ISSN 2312-9557

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вісник Дніпропетровського університету

Науковий журнал

№ 6/1 Том 22 2014

Серія: МАТЕМАТИКА
Випуск 19

Дніпропетровськ
2014

УДК 517

Друкується за рішенням вченої ради Дніпропетровського національного університету згідно із затвердженим планом видань на 2014р.

Рецензент:
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода

Изложены результаты исследований по вопросам теории приближений функций действительной переменной, алгебре, уравнениям математической физики, а также по их применению к решению задач.

Для научних сотрудников, а также аспирантов и студентов старших курсов.

Викладено результати досліджень із питань теорії наближення функцій дійсної змінної, алгебри, рівнянь математичної фізики, а також їх застосування для розв'язання задач.

Для наукових співробітників, а також аспірантів та студентів старших курсів.

ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Н. А. Крячко
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050.
E-mail: babenko.vladislav@gmail.com, nadiakriachko@gmail.com

О неравенствах типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве

Отримано сiмейство точних адитивних нерiвностей типу Хардi-Лiттлвуда-Полiа для операторiв в гiльбертовому просторi.

Ключовi слова: **гiльбертiв простiр, оператор, нерiвностi типу Хардi-Лiттлвуда-Полiа.**

Получено семейство точных аддитивных неравенств типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: **гильбертово пространство, оператор, неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа.**

A family of exact additive inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's type has been received for operators in Hilbert space.

Key words: **Hilbert space, operator, inequalities of Hardy-Littlewood-Polya's.**

1. Введение

Пусть $\mathbb{G}$ - действительная ось $\mathbb{R}$ или единичная окружность $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$. Через $L_2(\mathbb{G})$ будем обозначать пространство измеримых функций $x: \ \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\|x\|_{L_2(\mathbb{G})} = \left(\int\limits_{\mathbb{G}} |x(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < \infty,$$

$L_2^r(\mathbb{G})$, $r \in \mathbb{N}$, - пространство всех функций x, которые имеют локально абсолютно непрерывные производные $x^{(r-1)}$ и $x^{(r)} \in L_2(\mathbb{G})$; $L_{2,2}^r(\mathbb{G}) = L_2(\mathbb{G}) \cap L_2^r(\mathbb{G})$.

Хорошо известно (см., напр. [1]), что для любой функции $x \in L_{2,2}^r(\mathbb{R})$ выполняется точное неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа

$$\| x^{(k)}\|_{L_2(\mathbb{G})} \leq \| x \|_{L_2(\mathbb{G})}^{1-k/r} \| x^{(r)} \|_{L_2(\mathbb{G})}^{k/r}, \ r, k \in \mathbb{N}, \ k < r. \tag{1.1}$$

В случае $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ неравенство (1.1) эквивалентно семейству аддитивных неравенств

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le A\left\|x\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad (1.2)$$

и для любого заданного $A > 0$ константа $\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}$ неулучшаема [2, §5.4].

Для $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ из неравенства (1.1) вытекает справедливость следующего аналога неравенства (1.2): для любой функции $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{T})$

$$\left\|x^{(k)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \le A\left\|x\right\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}} \left\|x^{(r)}\right\|^2_{L_2(\mathbb{T})}, \qquad (1.3)$$

однако, константа $\frac{k}{r}\left(\frac{r-k}{rA}\right)^{\frac{r-k}{k}}$, в отличие от непериодического случая, вообще говоря, не является точной [1]. Задача отыскания неулучшаемых аддитивных неравенств для функций класса $L^r_{2,2}(\mathbb{T})$ решена в работе [2] (см. также [3, §5.4]).

Приведем некоторые результаты, связанные с обобщением неравенств Харди-Литтлвуда-Полиа на случай достаточно произвольных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве, которые были получены в работе [4].

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $\{e_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H. Пусть также $c_\nu = (x, e_\nu)$ - коэффициенты Фурье элемента $x \in H$ и $\sum\limits_\nu c_\nu e_\nu$ - его ряд Фурье.

Пусть $f(\nu)$ и $\varphi(\nu)$ - комплекснозначные функции, заданные на множестве целых чисел и удовлетворяющие условиям:

1) $|f(\nu)|$ и $|\varphi(\nu)|$ не убывают с ростом $|\nu|$ и $|f(\nu)| = |f(-\nu)|$, $|\varphi(\nu)| = |\varphi(-\nu)|$ для любого $\nu \in \mathbb{Z}$;

2) функции $f(\nu)$ и $\varphi(\nu)$ связанны соотношением

$$|\varphi(\nu)|^2 = \alpha\left(|f(\nu)|^2\right), \qquad (1.4)$$

где $\alpha(t)$, $t \ge 0$, - выпуклая вверх неубывающая функция, $\alpha(0) = 0$.

Рассмотрим операторы A_f и A_φ, определенные следующим образом.

Для $x = \sum\limits_\nu c_\nu e_\nu$ положим

$$A_f x = \sum_\nu f(\nu) c_\nu e_\nu, \; A_\varphi x = \sum_\nu \varphi(\nu) c_\nu e_\nu,$$

$$D_{A_f} = \left\{x : \sum_\nu |f(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty\right\} \text{ и } D_{A_\varphi} = \left\{x : \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 < \infty\right\} -$$

соответственно области определения операторов A_f и A_φ. Нетрудно убедиться в том, что $D_{A_f} \subset D_{A_\varphi}$.

В работе [4] доказано, что для любого $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq \|x\|^2 \alpha\left(\frac{1}{\|x\|^2}\|A_f x\|^2\right), \tag{1.5}$$

которое обращается в равенство на любом элементе базиса e_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.

Неравенство (1.5) представляет собой обобщение классического неравенства Харди-Литтлвуда-Полиа. В частности, в неравенстве (1.5) содержится неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа для периодических функций.

Также в [4] для всех $x \in D_{A_f}$ и любого $K \in \left(0; \frac{\alpha(|f(1)|^2)}{|f(1)|^2}\right)$ было получено семейство аддитивных неравенств вида

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq C_K\|x\|^2 + K\|A_f x\|^2 \tag{1.6}$$

и доказано, что для любого заданного $K \in \left(0; \frac{\alpha(|f(1)|^2)}{|f(1)|^2}\right)$ константа C_K в (1.6) неулучшаема.

В данной работе исследуется задача получения семейства аддитивных неравенств другого вида: для любого $x \in D_{A_f}$

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K\|x\|^2 + C_K\|A_f x\|^2, \tag{1.7}$$

когда $K \in \left[0; \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha(|f(\nu)|^2)\right)$, точных в том смысле, что для любого заданного $K \in \left[0; \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha(|f(\nu)|^2)\right)$ константу C_K уменьшить нельзя.

2. Другой вариант точных аддитивных неравенств типа Харди – Литтлвуда – Полиа.

В дополнение к условиям 1) и 2), наложенным в предыдущем пункте на функции f, φ и α, будем предполагать, что функция f строго возрастает, $f(0) = 0$, $\alpha(t)$– дифференцируема в любой точке $t > 0$, причем $\alpha'(t) \to 0$, если $t \to +\infty$.

Для любого $K \geq 0$ можем написать

$$\|A_\varphi x\|^2 = \sum_\nu |\varphi(\nu)|^2 |c_\nu|^2 = \sum_\nu \left(|\varphi(\nu)|^2 - K\right)|c_\nu|^2 + \sum_\nu K|c_\nu|^2 =$$

$$= \sum_\nu \frac{|\varphi(\nu)|^2 - K}{|f(\nu)|^2}|f(\nu)|^2|c_\nu| + \sum_\nu K|c_\nu|^2 \leq K\|x\|^2 + \sup_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{|\varphi(\nu)|^2 - K}{|f(\nu)|^2}\right)\|A_f x\|^2.$$

Для $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ положим $\gamma_\nu = |f(\nu)|^2$. Последнее неравенство перепишем в виде

$$\|A_\varphi x\|^2 \leq K\|x\|^2 + \sup_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{\alpha(\gamma_\nu) - K}{\gamma_\nu}\right)\|A_f x\|^2.$$

Положим $M = \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \alpha\left(\gamma_\nu\right)$ и далее будем предполагать, что $K \in [0;\, M)$.

Рассмотрим последовательность

$$\psi_1 = 0,\ \psi_\nu = \frac{\frac{\alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}}{\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{1}{\gamma_\nu}},\ \nu = 2,\, 3,\, \ldots$$

Из выпуклости функции α и теоремы Коши следует, что $\psi_\nu \to +\infty$ при $\nu \to +\infty$, $\inf\limits_\nu \psi_\nu = 0$.

Для $\nu = 2,\, 3,\, \ldots$ рассмотрим разности

$$\delta_\nu = \frac{\alpha\left(\gamma_\nu\right) - K}{\gamma_\nu} - \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu-1}\right) - K}{\gamma_{\nu-1}} = \frac{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu\gamma_{\nu-1}}\left(K - \frac{\frac{\alpha(\gamma_{\nu-1})}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{\alpha(\gamma_\nu)}{\gamma_\nu}}{\frac{1}{\gamma_{\nu-1}} - \frac{1}{\gamma_\nu}}\right).$$

Пусть $K \in [0;\, M)$. Если значение $\nu_0 \in \mathbb{N}$ таково, что

$$\psi_{\nu_0} \le K \le \psi_{\nu_0+1},$$

тогда для $\nu \le \nu_0$ будет $\delta_\nu \ge 0$, а для $\nu > \nu_0$ будет $\delta_\nu < 0$. Отсюда следует, что

$$\sup_{\nu\in\mathbb{N}}\left(\frac{\alpha\left(\gamma_\nu\right) - K}{\gamma_\nu}\right) = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - K}{\gamma_{\nu_0}}.$$

Отметим, что для $K = \psi_{\nu_0}$

$$\frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - K}{\gamma_{\nu_0}} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)}{\gamma_{\nu_0}} - \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0-1}\right)\gamma_{\nu_0} - \alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)\gamma_{\nu_0-1}}{\gamma_{\nu_0}\left(\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}\right)} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - \alpha\left(\gamma_{\nu_0-1}\right)}{\gamma_{\nu_0} - \gamma_{\nu_0-1}},$$

а при $K = \psi_{\nu_0+1}$

$$\frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right) - K}{\gamma_{\nu_0}} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)}{\gamma_{\nu_0}} - \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)\gamma_{\nu_0+1} - \alpha\left(\gamma_{\nu_0+1}\right)\gamma_{\nu_0}}{\gamma_{\nu_0}\left(\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}\right)} = \frac{\alpha\left(\gamma_{\nu_0+1}\right) - \alpha\left(\gamma_{\nu_0}\right)}{\gamma_{\nu_0+1} - \gamma_{\nu_0}}.$$

Обозначим через $l\left(K\right)$ ломаную с узлами в точках $\psi_\nu,\ \nu = 1,\, 2,\, \ldots$, которая в узлах интерполирует значения

$$\frac{\alpha\left(\gamma_\nu\right) - \alpha\left(\gamma_{\nu-1}\right)}{\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}}.$$

Подытоживая сказанное, видим, что справедлива

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях относительно функций f, φ и α для любого $K \in [0; M)$ и всех $x \in D_{A_f}$ имеет место неравенство*

$$\|A_\varphi x\|^2 \le K\|x\|^2 + l(K)\|A_f x\|^2. \tag{2.1}$$

Покажем, что константа $l\,(K)$ для любого $K \in [0;\, M)$ неулучшаема. Возьмем произвольное $K \in [0;\, M)$ и выберем $\nu_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\psi_{\nu_0} \leqslant K \leqslant \psi_{\nu_0+1}$. Для $x = e_{\nu_0}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \|A_\varphi x\|^2 &= \|A_\varphi e_{\nu_0}\|^2 = |\varphi\,(\nu_0)|^2 = \alpha\left(|f\,(\nu_0)|^2\right) = \\ &= K\|e_{\nu_0}\|^2 + \frac{\alpha(\gamma_{\nu_0}) - K}{\gamma_{\nu_0}}|f(\nu_0)|^2 = \\ &= K\|x\|^2 + l(K)\|A_f x\|^2. \end{aligned}$$

Библиографические ссылки

1. *Харди Г. Г.* Неравенства. / Г.Г. Харди, Д.Е. Литтлвуд, Г. Полиа - М. : Государственное издательство иностранной литературы, 1948. - 456 с.
2. *Babenko V. F.*. On Exact Inequalities of Hardy-Littlewood-Polya Type / V. F. Babenko, T. M Rassias // J. of Mathematical Analysis and Applications, 2000. — 245. — P. 570–593.
3. *Бабенко В. Ф.* Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. - К. : Наук. думка, 2003. — 590 с.
4. *Бабенко В.Ф.* Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Полиа для операторов в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, Н.А. Крячко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика, 2013. - Т. 21, № 6/1. - С. 34-39.

Надійшла до редколегії 12.05.2014

ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 517.5

Т. Р. Біккужина*, **В. Л. Великін****

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: mechtatel_t@mail.ru*

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: velikiny@rambler.ru*

Точні значення взаємного відхилення деяких інтерполяційних підпросторів ермітових сплайнів в рівномірній і інтегральній метриках

Отримано точні значення взаємного відхилення в просторах L_p, $1 \le p \le \infty$, інтерполяційних підпросторів ермітових сплайнів довільного порядку на класах неперервних і неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: **сплайн, підпростір, нормований простір.**

Получены точные значения взаимного уклонения в пространствах L_p, $1 \le p \le \infty$, интерполяционных подпространств эрмитовых сплайнов произвольного порядка на классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: **сплайн, подпространство, нормированное пространство.**

We obtained exact values of mutual deviation of interpolation subspaces of Hermitian splines of arbitraty orders on the classes of continuous and continuously differentiable functions in L_p spaces, $1 \le p \le \infty$.

Key words: **splines, subspace, normed space.**

Нехай C^q, $q = 0, 1, 2, ..., C^0 = C$, — лінійний нормований простір функцій $f(x)$, які мають на відрізку $[0, 1]$ q неперервних похідних, з нормою

$$||f||^{(q)} = \sum_{i=0}^{q} ||f^{(i)}||_{C[0,1]}, \qquad ||f||^{(0)} = ||f||.$$

Нехай ще $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1\}$, $n \ge 1$, - довільне розбиття відрізка $[0, 1]$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, $\delta_n = max\{h_i, i = \overline{1, n}\}$, $f_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, q}$.

Як і в [1], кожній функції $f(x) \in C^q$ поставимо у відповідність інтерполяційний ермітовий сплайн порядку $2m + 1$, $m = 0, 1, 2, ...$, виду

$$s_{r,m}(f, \Delta_n; x) = \sum_{k=0}^{r} f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f_i^{(k)} H_{k,m}(h_i; x_i - x), \qquad (1)$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}, \quad r \le q, \quad r \le m,$$

де

$$H_{k,m}(h,t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!m!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{(m+s)!}{s!h^{m+1+s}} t^{k+s}. \qquad (2)$$

Підпростір таких сплайнів при фіксованих m, r, і Δ_n позначимо через $S_{r,m}(\Delta_n)$.

В цій роботі ми продовжили, розпочате в [2] - [5], дослідження величини

$$\Theta_{r,p}[S_{r_1,m_1}(\Delta_n), S_{r_2,m_2}(\Delta_n)] = \sup_{||f||^{(r)} \le 1} ||s_{r_1,m_1}(f,\Delta_n;x) - s_{r_2,m_2}(f,\Delta_n;x)||_p, \qquad (3)$$

яка представляє собою взаємне відхилення пари підпросторів ермітових сплайнів, що є аналогом розхилу (див. [6], гл. 3, п. 39) двох підпросторів в нормованому просторі. У подальшому в цій роботі будемо позначати $\Theta_{r,p}[S_{0,m_1}(\Delta_n), S_{0,m_2}(\Delta_n)]$ через $\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n]$

В [3] для будь-яких $m \in \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\nu \in \mathbf{N}$, і довільного розбиття, знайдено точні значення для $\Theta_{0,\infty}[m+1, m, n]$, $\Theta_{1,\infty}[m+1, m, n]$, $\Theta_{0,1}[m+\nu, m, n]$ і $\Theta_{1,1}[m+\nu, m, n]$ для рівномірного розбиття.

В даній роботі отримані результати по точним значенням величини $\Theta_{r,p}[m_1, m_2, n]$ для будь-яких значень m_i, $i = 1, 2$, для $r = 0, 1$, $1 \le p \le \infty$.

Нехай

$$\mathcal{A}_r(\Delta_n) := \sup_{||f||^{(r)} \le 1} \max_{1 \le i \le n} |f_i - f_{i-1}|,$$

$$\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) := \sup_{||f||^{(r)} \le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i - f_{i-1}|^p h_i \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поряд з функціями

$$\varphi_m(t) = H_{0,m+1}(1,t) - H_{0,m}(1,t) = C_{2m+1}^m t^{m+1} (1-t)^{m+1} (1-2t), \qquad (4)$$

з роботи [3] тут використовуються функції

$$\Phi_{m,j}(t) = H_{0,m+j+1}(1,t) - H_{0,m}(1,t).$$

Ясно, що

$$\Phi_{m,j}(t) = \varphi_m(t) + \varphi_{m+1}(t) + \varphi_{m+2}(t) + ... + \varphi_{m+j}(t). \qquad (5)$$

Основні результати цієї роботи базуються на лемах 1 - 4.

Лема 1. *Для будь-яких* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$ *мають місце рівності*

$$\Theta_{r,\infty}[m+j, m, n] = \mathcal{A}_r(\Delta_n) ||\Phi_{m,j-1}||,$$

$$\Theta_{r,p}[m+j, m, n] = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) ||\Phi_{m,j-1}||_p, \quad r \in \mathbf{N}_0, \quad 1 \le p < \infty.$$

Доведення. Виходячи з співвідношень (3) і (1), з урахуванням тотожності

$$H_{0,m}(1,t) + H_{0,m}(1,1-t) \equiv 1,$$

безпосередньо маємо

$$\Theta_{r,p}[m+j,m,n] = \sup_{||f||^{(r)}\le 1} ||s_{0,m+j}(f,\Delta_n;x) - s_{0,m}(f,\Delta_n;x)||_p =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\int_0^1 |s_{0,m+j}(f,\Delta_n;x) - s_{0,m}(f,\Delta_n;x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| (f_i - f_{i-1}) \Phi_{m,j-1}(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}) \right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |(f_i - f_{i-1})|^p \left| \Phi_{m,j-1}(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}) \right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| \Phi_{m,j-1}(\frac{x-x_{i-1}}{h_i}) \right|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left\{ t = \frac{x-x_{i-1}}{h_i} \right\} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \, h_i \int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p) dt \cdot \sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \, h_i \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_0^1 |\Phi_{m,j-1}(t)|^p) dt \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{||f||^{(r)}\le 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |(f_i - f_{i-1})|^p \, h_i \right)^{\frac{1}{p}} = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) ||\Phi_{m,j-1}||_p.$$

Перша формула доводиться аналогічно. Лема доведена.

Наслідок 1. *Для будь-яких* $m_1, m_2 \in \mathbf{N}_0$, $\quad m_1 \ne m_2$, *мають місце рівності*

$$\Theta_{r,\infty}[m_1,m_2,n] = \mathcal{A}_r(\Delta_n) ||\Phi_{min\{m_1,m_2\},|m_2-m_1|-1}||,$$

$$\Theta_{r,p}[m_1,m_2,n] = \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) ||\Phi_{min\{m_1,m_2\},|m_2-m_1|-1}||_p, \quad r = 0,1,2,\dots, \quad 1 \le p < \infty.$$

Для подальшого відмітимо, що $t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2m+3}}$ - точка відрізку$(0,\frac{1}{2})$, в якій функція $\varphi_m(t)$ досягає найбільшого значення на відрізку$[0,1]$, а отже

$$||\varphi_m(t)|| = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \cdot \frac{(m+1)^{m+1}\sqrt{2m+3}}{2^{m+1}(2m+3)^{m+2}}.$$

Також відмітимо, що з урахуванням співвідношень (4) - (5), функції $\Phi_{m,j}(t)$ мають такі властивості:

$$1)\ \Phi_{m,j}(1-t) = -\Phi_{m,j}(t), \quad t\in[0,1];$$

$$2)\ \Phi_{m,j}(t) > 0, \quad \Phi_{m,j}(t) > \Phi_{m+1,j}(t), \quad \Phi_{m,j+1}(t) > \Phi_{m,j}(t), \quad t\in(0,\frac{1}{2}).$$

Таким чином,

$$||\Phi_{m,j}|| = \max_{t\in[0,\frac{1}{2}]}\Phi_{m,j}(t), \qquad \int_0^1 |\Phi_{m,j}(t)|^p dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (\Phi_{m,j}(t))^p\, dt.$$

Лема 2. *Для норми функції $\Phi_{m,j}(t)$ в просторі C має місце наступне співвідношення:*

$$||\Phi_{m,j}|| = C^m_{2m+1}\mathcal{N}^{m+1}_{m,j}\sqrt{1-4\mathcal{N}_{m,j}}\Big(1 + a_m\mathcal{N}_{m,j} + ... + a_m a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+j-1}\mathcal{N}^j_{m,j}\Big),$$

де

$$a_m := \frac{2(2m+3)}{m+2}, \quad \mathcal{N}_{m,j} := \left(\frac{C^m_{2m+1}(m+1)}{C^{m+j}_{2m+2j+1}\cdot 2(2m+2j+3)}\right)^{\frac{1}{j+1}}.$$

Доведення. Нехай $u := t(1-t)$. Тоді $(u')^2 = 1-4u$, а $\varphi_m(t) = C^m_{2m+1}u^{m+1}u'$,

$$\varphi_{m+1}(t) = C^{m+1}_{2m+3}u^{m+2}u', \quad C^{m+1}_{2m+3} = C^m_{2m+1}a_m, \quad \varphi_{m+1}(t) = a_m u\varphi_m(t),$$

$$\varphi_{m+2}(t) = a_m a_{m+1}u^2\varphi_m(t), \ \ldots, \varphi_{m+j}(t) = a_m a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+j-1}u^j\varphi_m(t).$$

Отже

$$\Phi_{m,j}(t) = \varphi_m(t)(1 + a_m u + a_m a_{m+1}u^2 + \cdots + a_m a_{m+1}a_{m+2}...a_{m+j-1}u^j). \qquad (6)$$

Нехай

$$P(t) := 1 + \sum_{i=1}^{j}\left(u^i\prod_{k=0}^{i-1}a_{m+k}\right), \qquad Q(t) := 1 + \sum_{i=1}^{j-1}\left((i+1)u^i\prod_{k=1}^{i}a_{m+k}\right).$$

Тоді

$$P'(t) = a_m u' Q(t), \qquad \Phi_{m,j}(t) = C^m_{2m+1}u^{m+1}u'P(t),$$

$$\Phi'_{m,j}(t) = C^m_{2m+1}u^m\Big((m+1-4mu-6u)P(t) + a_m u(1-4u)Q(t)\Big) =$$

$$= C^m_{2m+1}u^m\Big(-4a_m u^2 Q(t) + u\Big(a_m Q(t) - 2(2m+3)P(t)\Big) + (m+1)P(t)\Big).$$

Покладемо ще

$$W(u) := \Big(-4a_m u^2 Q(t) + u\Big(a_m Q(t) - 2(2m+3)P(t)\Big) + (m+1)P(t)\Big).$$

Ясно, що

$$W(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots + b_j u^j + b_{j+1} u^{j+1}.$$

Обчислюючи коефіцієнти при u^i, $\; i = \overline{0, j+1}$, знайдемо

$$b_0 = m+1, \quad b_i = 0, \quad 1 \le i \le j,$$

$$b_{j+1} = -a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} \cdot 2(2m+2j+3),$$

а отже,

$$W(u) = m + 1 - a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} \cdot 2(2m+2j+3) u^{j+1}.$$

Нарешті, позначаючи

$$\omega_m = a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} \cdot 2(2m+2j+3) = \frac{C_{2m+2j+1}^{m+j} \cdot 2(2m+2j+3)}{C_{2m+1}^{m}},$$

будемо мати

$$\Phi'_{m,j}(t) = C_{2m+1}^{m} u^m (-\omega_m u^{j+1} + m + 1), \qquad -\omega_m u^{j+1} + m + 1 = 0, \qquad u = \mathcal{N}_{m,j},$$

де $\mathcal{N}_{m,j} = \left(\frac{m+1}{\omega_m}\right)^{\frac{1}{j+1}}$.

Максимум $\Phi_{m,j}(t)$ досягається в точці $t_{m,j} = \frac{1-\sqrt{1-4\mathcal{N}_{m,j}}}{2}$, $\;||\Phi_{m,j}|| = \Phi_{m,j}(t_{m,j})$. Лема 2 доведена.

Нехай далі

$$\mathcal{J}(a,b) = \int_0^{\frac{1}{2}} \left((1-t)t\right)^a (1-2t)^b dt, \quad a > 0, \; b > 0.$$

Лема 3. *Має місце наступна рівність*

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!}{2^{a+1} \prod_{i=0}^{a} (b+2i+1)}, \quad a, b \in \mathbf{N}_0.$$

Доведення. Дійсно,

$$\mathcal{J}(0,b) = \frac{1}{2b+1}.$$

Для довільного $\; a \in \mathbf{N}$, застосовуючи формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a}{2(b+1)} \mathcal{J}(a-1, b+2).$$

Таким чином, для $\quad 0 < i \le a, \quad b > 1$,

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a(a-1)(a-2)...(a-j+1)}{2^i (b+1)(b+3)...(b+2i-1)} \mathcal{J}(a-i, b+2i),$$

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a(a-1)(a-2)...1}{2^a(b+1)(b+3)...(b+2a-1)}\mathcal{J}(0,b+2a), \quad \mathcal{J}(0,b+2a) = \frac{1}{2(b+2a+1)},$$

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!}{2^{a+1}\prod_{i=0}^{a}(b+2i+1)}.$$

Лема 3 доведена.

Інтеграл $\mathcal{J}(a,b)$ також можно обчислити за формулами

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!\cdot[l]!}{2^{2a+2}\cdot(a+[l]+1)!}, \quad \text{якщо } b = 2l+1,$$

та

$$\mathcal{J}(a,b) = \frac{a!\cdot b!\cdot(a+[l])!}{2\cdot[l]!(2a+b+1)!}, \quad \text{якщо } b = 2l,$$

які доводяться аналогічно.

Розглянемо далі поліном степеня jp відносно u

$$\Big(1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \cdots + a_m a_{m+1} a_{m+2}...a_{m+j-1} u^j\Big)^p = \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^j, \tag{7}$$

де $a_{m,j} = (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, ..., a_{m+j-1})$, а $\mathcal{M}_i(a_{m,j})$ - це коефіцієнт при u^j. Наприклад,

$$\Big(1 + a_0 u + a_0 a_1 u^2\Big)^2 = 1 + 2a_0 u + \Big(a_0^2 + 2a_0 a_1\Big)u^2 + 2a_0^2 a_1 u^3 + a_0^2 a_1^2 u^4.$$

Отже,

$$\mathcal{M}_0(a_0,a_1) = 1,\ \mathcal{M}_1(a_0,a_1) = 2a_0,\ \mathcal{M}_3(a_0,a_1) = 2a_0^2 a_1,\ \mathcal{M}_4(a_0,a_1) = a_0^2 a_1^2.$$

Лема 4. *Для норм функцій $\varphi_m(t)$ і $\Phi_{m,j}(t)$ в просторі L_p, $1 \le p < \infty$, мають місце наступні співвідношення*

$$||\varphi_m||_p = 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \Big(\mathcal{J}(mp+p,p)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$||\Phi_{m,j}||_p = 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \mathcal{J}(mp+p+i,p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зокрема, для натуральних значень p

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p) = \frac{(mp+p+i)!}{2^{mp+p+i+1}\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}, \quad i = \overline{0,jp},$$

і тому

$$||\varphi_m||_p = \frac{1}{2^{m+1}} C_{2m+1}^m \left(\frac{(mp+p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$||\Phi_{m,j}||_p = \frac{1}{2^{m+1}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \frac{(mp+p+i)!}{2^i \prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

Доведення. В силу (6), враховуючи, що $u = t(1-t)$, маємо

$$\Big(\Phi_{m,j}(t)\Big)^p = \Big(\varphi_m(t)\Big)^p \Big(1 + a_m u + a_m a_{m+1} u^2 + \cdots + a_m a_{m+1} a_{m+2} ... a_{m+j-1} u^j\Big)^p =$$

$$= \Big(C_{2m+1}^m\Big)^p u^{mp+p} \Big(u'\Big)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^i = \Big(C_{2m+1}^m\Big)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) u^{mp+p+i} \Big(u'\Big)^p.$$

$$||\Phi_{m,j}||_p = \left(2 \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\Phi_{m,j}(t)\Big)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(2 \Big(C_{2m+1}^m\Big)^p \sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \int_0^{\frac{1}{2}} u^{mp+p+i} (u')^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{jp} \mathcal{M}_i(a_{m,j}) \mathcal{J}(mp+p+i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лема 4 доведена.

З лем 1 і 2 випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Для будь-яких значень* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$, *мають місце наступні співвідношення*

$$\Theta_{0,\infty}[m+j, m, n] = 2 C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j-1}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{N}_{m,j-1}^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right),$$

$$\Theta_{1,\infty}[m+j, m, n] = \frac{2\delta_n}{2+\delta_n} C_{2m+1}^m \mathcal{N}_{m,j-1}^{m+1} \sqrt{1 - 4\mathcal{N}_{m,j-1}} \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{N}_{m,j-1}^i \prod_{k=0}^{i-1} a_{m+k}\right).$$

Для $j = 1$ ці співвідношення містяться в [3].

З лем 1 і 4 випливають наступні твердження.

Теорема 2. *Для будь-яких значень* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$, $1 \le p < \infty$ *справедливі рівності*

$$\Theta_{0,p}[m+1, m, n] = 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \Big(\mathcal{J}(mp+p, p)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{0,p}[m+j, m, n] = 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \mathcal{J}(mp+p+i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 3. *Для будь-яких значень* $m \in \mathbf{N}_0$, $j \in \mathbf{N}$, $1 \le p < \infty$ *і для рівномірного розбиття, мають місце наступні співвідношення*

$$\Theta_{1,p}[m+1, m, n] = \frac{1}{2n+1} 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \Big(\mathcal{J}(mp+p, p)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m+j, m, n] = \frac{1}{2n+1} 2^{1+\frac{1}{p}} C_{2m+1}^m \left(\sum_{i=0}^{(j-1)p} \mathcal{M}_i(a_{m,j-1}) \mathcal{J}(mp+p+i, p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Для $p=1$ результати теорем 2 і 3 містяться в [3].

Зауважимо, що для натуральніх значень p інтеграли $\mathcal{J}(mp+p+i,p)$ можна обчислити за формулами

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p)=\frac{(mp+p+i)!}{2^{mp+p+i+1}\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)},$$

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p)=\frac{2^{-(2mp+2p+2i+2)}\cdot(mp+p+i)!\cdot[l]!}{(mp+p+i+[l]+1)!},\quad \text{якщо } p=2l+1,$$

та

$$\mathcal{J}(mp+p+i,p)=\frac{(mp+p+i)!\cdot p!\cdot(mp+p+i+[l])!}{2\cdot[l]!\cdot(2mp+3p+2i+1)!},\quad \text{якщо } p=2l,\qquad i=\overline{0,jp}.$$

Отже, для натуральніх значень p

$$\Theta_{0,p}[m+1,m,n]=\frac{1}{2^m}C_{2m+1}^m\left(\frac{(mp+p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{0,p}[m+j,m,n]=\frac{1}{2^m}C_{2m+1}^m\left(\sum_{i=0}^{(j-1)p}\mathcal{M}_i(a_{m,j-1})\frac{(mp+p+i)!}{2^i\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m+1,m,n]=\frac{1}{2^m(2n+1)}C_{2m+1}^m\left(\frac{(mp+p)!}{\prod_{k=0}^{mp+p}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Theta_{1,p}[m+j,m,n]=\frac{1}{2^m(2n+1)}C_{2m+1}^m\left(\sum_{i=0}^{(j-1)p}\mathcal{M}_i(a_{m,j-1})\frac{(mp+p+i)!}{2^i\prod_{k=0}^{mp+p+i}(p+2k+1)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Наведемо деякі значення інтерполяційних розхилів, які обчислені з точністю до 0,00001. Так,

$$\Theta_{0,\infty}[17,3,n]=0,35790,\quad \Theta_{1,\infty}[20,5,n]=0,02093\ \text{ при }\ \delta_n=0,15,$$

$$\Theta_{0,5}[25,5,n]=0,23862,\quad \Theta_{1,5}[3,24,20]=0,00731.$$

Для будь-яких чисел $r,m_0\in\mathbf{N}_0$, $k_0\in\mathbf{N}$ і $1\le p<\infty$ виконуються граничні співвідношення

$$\mathop{lim}_{m\to\infty}\Theta_{0,p}[m,0,n]=\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\mathop{lim}_{m\to\infty}\Theta_{r,\infty}[m,m_0,n]=\frac{1}{2}\mathcal{A}_r(\Delta_n),\qquad \mathop{lim}_{m\to\infty}\Theta_{r,p}[m,0,n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n),$$

$$\mathop{lim}_{m\to\infty}\Theta_{r,p}[m,k_0,n]<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n),$$

причому, границі в рівностях не досягаються.

Для $r = 0, 1,\ p = 1, \infty$ рівності отримані в [3].

Зазначимо, що

$$\mathcal{A}_{r+1}(\Delta_n) \le \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \le \mathcal{A}_r(\Delta_n), \quad \mathcal{F}_{r,p}(\overline{\Delta_n}) = \mathcal{A}_r(\overline{\Delta_n}), \quad r \in \mathbf{N}_0,$$

$$0 < \mathcal{A}_r(\Delta_n) \le \frac{2}{3}, \quad 0 < \mathcal{F}_{r,p}(\Delta_n) \le \frac{2}{3}, \quad r \in \mathbf{N}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Тому для $m \in \mathbf{N}_0,\ j \in \mathbf{N}$,

$$0 < \Theta_{0,p}[m+j, m, n] < 1, \quad 0 < \Theta_{r,p}[m+j, m, n] < \frac{1}{3}, \quad r \in \mathbf{N}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Зазначимо, нарешті, що для $r = 0, \quad 1 \le p < \infty,$ мають місце двосторонні оцінки

$$\Big(p!\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{i=0}^{p} (p + 2i + 1)\right)^{-\frac{1}{p}} \le \Theta_{0,p}[m, 0, n] < \Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{2^{m_0}} C_{2m_0+1}^{m_0} \Big((m_0 p + p)!\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{m_0 p + p} (p + 2k + 1)\right)^{-\frac{1}{p}} \le \Theta_{0,p}[m, m_0, n] < \Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Бібліографічні посилання

1. *Великин В.Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых фцнкций// Известия АН СССР, Серия математическая, 1973.– 37, С.165-185.
2. *Бовдуй Е.Ю., Великин В.Л.* Об интерполяционном растворе некоторых подпространств эрмитовых сплайнов// Вісник Дніпропетровського університету, 2007, №8– С.54–56.
3. *Великин В.Л.* Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов// Вісник Дніпропетровського університету, 2009, т. 17, №6/1, вип. 14 – С.54–56.
4. *Великин В.Л.* О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов// Вісник Дніпропетровського університету, 2010, №6/1, вип. 15 – С.14–16.
5. *Великин В.Л.* О взаимном уклонении некоторых подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов по разным сеткам узлов// Вісник Дніпропетровського університету, 2011, №6/1, вип. 16 – С.32–40.
6. *Ахиезер Н.И.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: Том 1/ Н.И. Ахиезер,И.М. Глазман - Харьков: Вища школа, 1977. – 316 с.

Надійшла до редколегії 05.05.2014

УДК 517.518

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**

* Днепропетровский университет им. Альфреда Нобеля,
Днепропетровск 49000. *E-mail: sbvakarchuk@mail.ru*

** Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: vacarchuk@ukr.net*

Точные неравенствах типа Джексона в весовом пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$

Точні нерівності типу Джексона отримано на класах диференційованих функцій двох змінних у випадку найкращого наближення "кутами" з алгебраїчних поліномів у метриці простору $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ з вагою Чебишева-Ерміта.

Ключові слова: **узагальнений модуль неперервності, найкраще наближення "кутом", многочлени Чебишева-Ерміта**

Точные неравенства типа Джексона получены на классах дифференцируемых функций двух переменных в случае наилучшего приближения "углами" из алгебраических полиномов в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ с весом Чебышева-Эрмита.

Ключевые слова: **обобщенный модуль непрерывности, наилучшее приближение "углом", многочлены Чебышева-Эрмита.**

Exact inequalities of Jackson type, connected with the best approximation by "angles" of algebraic polynomials have been obtained on the classes of differentiable functions of two variables in the metric of space $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ of the Chebyshev-Hermite wieght.

Key words: **generalized modulus of continuity, best approximation by "angle", Chebyshev-Hermite polynomials.**

Пусть $L_2(\mathbb{R}^2)$, где $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \{(x,y) : -\infty < x, y < \infty\}$, есть пространство измеримых функций суммируемых на плоскости $\mathbb{R}^2$ с квадратом модуля. Символом $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где $\rho(x,y) := \exp(-(x^2+y^2)/2)$, обозначим множество функций f, для которых $f \cdot \rho \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Отметим, что норма в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ определяется формулой

$$\|f\| := \|f\|_{2,\rho} = \left\{ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x,y) \cdot \rho(x,y)|^2 dxdy \right\}^{1/2}.$$

В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим оператор обобщенного сдвига [1]

$$F_h(f) := F_h f(x,y) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f\left(x\sqrt{1-h^2} + hu, y\sqrt{1-h^2} + hv\right) \rho^2(u,v) dudv,$$

где $0 < h \leqslant 1$. Как и в классическом случае, определим аналоги конечных разностей первого и высших порядков функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, используя для этого оператор $F_h(f)$:

$$\Delta_h^1(f) := \Delta_h^1(f; x, y) = F_h f(x, y) - f(x, y) = (F_h - \mathbb{I}) f(x, y),$$

$$\Delta_h^k(f) := \Delta_h^1\left(\Delta_h^{k-1}(f)\right) = \Delta_h^1\left(\Delta_h^{k-1}(f); x, y\right) = (F_h - \mathbb{I})^k f(x, y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} F_h^i f(x, y). \tag{1}$$

Здесь $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$; $F_h^0(f) := f$; $F_h^1(f) := F_h(f)$; $F_h^i(f) := F_h\left(F_h^{i-1}(f)\right)$, $i = 1, ..., k$; $k \in \mathbb{N}$. Величину

$$\widetilde{\omega}_k(f, t) := \sup\left\{\left\|\Delta_h^k(f)\right\| : 0 < h \leqslant t\right\}, \tag{2}$$

где $0 < t \leqslant 1$, будем называть обобщенным модулем непрерывности k-го порядка функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

Пусть $H_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, есть ортонормированная система полиномов Эрмита (см., например, [2]) и

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) H_i(x) H_j(y) \tag{3}$$

— двойной ряд Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, где равенство понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, а

$$c_{ij}(f) := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y) H_i(x) H_j(y) \rho^2(x, y)\, dx dy$$

— коэффициенты Фурье-Эрмита для f. Символом $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$, $\widetilde{\rho}(x) := \exp(-x^2/2)$, обозначим множество измеримых функций f таких, что функции $f \cdot \widetilde{\rho}$ суммируемы на действительной оси $\mathbb{R}$ с квадратом модуля. Пусть $L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ (соответственно $L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$) есть пространство $L_{2,\widetilde{\rho}}(\mathbb{R})$ в случае, когда в качестве $\mathbb{R}$ выступает ось абсцисс OX (соответственно ось ординат OY). Полагаем, что $\mathfrak{M}_{N+1} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ и $\mathfrak{N}_{M+1} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ есть конечномерные подпространства с базисами $\{H_i(x)\}_{i=0}^N$ и $\{H_j(y)\}_{j=0}^M$ соответственно, где $N, M \in \mathbb{Z}_+$. В пространстве $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим множество функций

$$G\left(\mathfrak{M}_{N+1}, \mathfrak{N}_{M+1}\right) := L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{M}_{N+1} \oplus L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{N}_{M+1}, \tag{4}$$

где символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (4) имеют следующий вид:

$$g_{N,M}(x, y) := \sum_{i=0}^{N} \varphi_i(y) H_i(x) + \sum_{j=0}^{M} \psi_j(x) H_j(y), \tag{5}$$

где $\{\varphi_i\}_{i=0}^{N} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(y)}(\mathbb{R})$ и $\{\psi_j\}_{j=0}^{M} \subset L_{2,\widetilde{\rho}(x)}(\mathbb{R})$ есть произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (5) называют "углами" из алгебраических полиномов [3]. Отметим, что впервые понятие "угла", как одного из эффективных методов теории аппроксимации функций многих переменных, было введено М.К.Потаповым в работе [4] и нашло широкое применение в исследованиях других математиков.

Для произвольной функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ символом $\mathcal{E}_{N,M}(f)$ обозначим её наилучшее приближение элементами множества (4) в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, т.е.

$$\mathcal{E}_{N,M}(f) := \inf\left\{\|f - g_{N,M}\| : g_{N,M} \in G\left(\mathfrak{M}_{N+1}, \mathfrak{N}_{M+1}\right)\right\}.$$

Символами $S_{N,\infty}(f)$ и $S_{\infty,M}(f)$ обозначим частные суммы ряда (3) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядков N по x и M по y соответственно, которые имеют следующий вид:

$$S_{N,\infty}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y),$$

$$S_{\infty,M}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y).$$

Под $S_{N,M}(f)$ понимаем прямоугольную частную сумму ряда Фурье-Эрмита (3) функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядков N по x и M по y

$$S_{N,M}(f;x,y) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y).$$

Функцию

$$\widetilde{S}_{N,M}(f;x,y) = S_{N,\infty}(f;x,y) + S_{\infty,M}(f;x,y) - S_{N,M}(f;x,y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} c_{ij}(f)H_i(x)H_j(y) \quad (6)$$

будем называть обобщенным полиномом Фурье-Эрмита функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ порядка N по x и M по y. Можно показать, что функция (6) принадлежит множеству (4), т.е. имеет место представление (5). Используя идею доказательства леммы 1 из работы [5], можно показать справедливость равенства

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f) = \left\|f - \widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)\right\| = \left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty} c_{ij}^2(f)\right\}^{1/2}, \quad (7)$$

т.е. среди всех элементов $g_{N-1,M-1}$ вида (5), принадлежащих множеству $G(\mathfrak{M}_{N-1}, \mathfrak{N}_{M-1})$, наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ доставляет её обобщенный полином Фурье-Эрмита $\widetilde{S}_{N-1,M-1}(f)$ порядков $N-1$ по x и $M-1$ по y.

Рассмотрим оператор [1]

$$D := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Символом $L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2)$, $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$, имеющих обобщенные частные производные $\partial^m f/\partial x^i \partial y^j$, $i + j = m$; $m = 1, ..., 2r$, принадлежащие пространству $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. При этом $D^0 f := f$, $D^r f := D(D^{r-1} f) \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $N, M, k \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < t \leqslant 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2) \\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r \mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h) dh\right\}^k} = \left\{\int\limits_0^t (1 - (1-h^2)^{(N+M)/2}) dh\right\}^{-k}, \tag{8}$$

где $L_{2,\rho}^0(\mathbb{R}^2) \equiv L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство теоремы 1. В работе [1] было получено разложение функции $F_h f$ в ряд Фурье-Эрмита. С учетом того, что $f \in L_{2,\rho}^r(\mathbb{R}^2)$, $f \not\equiv const$, и имеет место разложение (3), для $F_h f$ запишем

$$F_h f(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2} H_i(x) H_j(y). \tag{9}$$

Отметим, что равенство (9) понимается в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. Из формул (3) и (9) получаем

$$\Delta_h^1(f; x, y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) \left((1-h^2)^{(i+j)/2} - 1\right) H_i(x) H_j(y). \tag{10}$$

Используя формулы (1) и (10), на основании метода математической индукции имеем

$$\Delta_h^k(f; x, y) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} c_{ij}(f) \left((1-h^2)^{(i+j)/2} - 1\right)^k H_i(x) H_j(y), \tag{11}$$

где $k = 2, 3, ...$, причем равенство в формуле (11) понимаем в смысле сходимости в метрике пространства $L_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. С учетом соотношений (2) и (11) запишем

$$\widetilde{\omega}_k(f,t) = \left\{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - (1-t^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k} c_{ij}^2(f)\right\}^{1/2}. \tag{12}$$

Используя формулу (7), получаем

$$\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)-\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2}=\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)=$$

$$=\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}\left(c^2_{ij}(f)\right)^{1-1/(2k)}\left(c^2_{ij}(f)\right)^{1/(2k)}\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right). \qquad (13)$$

В работе [1] было показано, что для функции $f\in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$ имеют место равенства

$$c_{ij}(f)=(-1)^r\frac{1}{2^r(i+j)^r}c_{ij}(D^rf), \qquad (14)$$

где $i,j\in\mathbb{N}$. Используя неравенство Гельдера, равенства (13)–(14) и соотношения (7) и (12), запишем

$$\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)-\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k}\right\}^{1/(2k)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2^{2r}(N+M)^{2r}}\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}2^{2r}(i+j)^{2r}c^2_{ij}(f)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k}\right\}^{1/(2k)}\times$$

$$\times\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}=\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\frac{1}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}}\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(D^rf)\left(1-(1-h^2)^{(i+j)/2}\right)^{2k}\right\}^{1/(2k)}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\frac{\widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^rf,h)}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}}\ .$$

Из данного соотношения получаем

$$\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\leqslant\left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)}\frac{\widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^rf,h)}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}}+$$

$$+\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=M}^{\infty}c^2_{ij}(f)(1-h^2)^{(i+j)/2}\ . \qquad (15)$$

Интегрируя обе части неравенства (15) по h в пределах от 0 до t, где $0 < t \leqslant 1$, и используя формулу (7), имеем

$$t \cdot \mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f) \leqslant \left\{\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f)\right\}^{1-1/(2k)} \frac{1}{2^{r/k}(N+M)^{r/k}} \int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h)dh+$$

$$+\mathcal{E}^2_{N-1,M-1}(f) \int\limits_0^t (1-h^2)^{(N+M)/2}dh.$$

Отсюда получаем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f\in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)\\ f\not\equiv const}} \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h)dh\right\}^k} \leqslant \left\{\int\limits_0^t (1-(1-h^2)^{(N+M)/2})dh\right\}^{-k}. \qquad (16)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части неравенства (16), рассмотрим функцию $f_0(x,y) := H_N(x)H_M(y)$, которая принадлежит классу $L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)$. В силу формулы (7) имеем

$$\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_0) = \|f_0\| = 1. \qquad (17)$$

Поскольку, на основании формулы (14),

$$c_{N,M}(D^r f_0) = (-1)^r 2^r (N+M)^r c_{N,M}(f_0),$$

то из соотношения (12) получаем

$$\widetilde{\omega}_k(D^r f_0, h) = \left(1-(1-h^2)^{(N+M)/2}\right)^k |\ c_{N,M}(D^r f_0)| =$$

$$= 2^r(N+M)^r \left(1-(1-h^2)^{(N+M)/2}\right)^k. \qquad (18)$$

Используя равенства (17)–(18) , запишем

$$\sup_{\substack{f\in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2)\\ f\not\equiv const}} \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h)dh\right\}^k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^r(N+M)^r\mathcal{E}_{N-1,M-1}(f_0)}{\left\{\int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f_0, h)dh\right\}^k} = \left\{\int\limits_0^t (1-(1-h^2)^{(N+M)/2})dh\right\}^{-k}. \qquad (19)$$

Сопоставляя оценку сверху (16) с оценкой снизу (19), получаем требуемое равенство (8). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $N, M, k \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_+$; $0 < t \leqslant 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in L^r_{2,\rho}(\mathbb{R}^2) \\ f \not\equiv const}} \frac{2^r (N+M)^r |c_{N,M}(f)|}{\left\{ \int\limits_0^t \widetilde{\omega}_k^{1/k}(D^r f, h) dh \right\}^k} = \left\{ \int\limits_0^t (1 - (1-h^2)^{(N+M)/2}) dh \right\}^{-k}.$$

где $c_{N,M}(f)$ — *коэффициент Фурье-Эрмита функции* f.

Библиографические ссылки

1. *Абилов В. А.* Приближение функций в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N, \exp(-|x|^2))$ / В. А. Абилов, М.В.Абилов // Матем. заметки, 1995. — Т. 57, № 1. — С. 3–19.
2. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены / Г. Сегё. — М.: Физматгиз, 1962. — 500 с.
3. *Ржавинская Е. В.* О приближении алгебраическими многочленами в метрике L_p с весом / Е. В Ржавинская // Дис. канд. физ.-мат. наук. — М., 1980. — 126 с.
4. *Потапов М. К.* О приближении "углом" / М. К. Потапов // Proc. of the Conf. on Constructive Theory of Functions. — Budapest, 1972. — P. 371–399.
5. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных / С. Б. Вакарчук // Изв. вузов. Математика, 1991. — № 7. — С. 14–25.

Надійшла до редколегії 01.01.2001

ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 517.5

С. В. Гончаров

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: sergon.public@gmail.com*

О вложении классов функций, интегрируемых с весом на отрезке и удовлетворяющих условия типа Липшица

Отримане узагальнення теореми про вкладення Харді-Літтлвуда для деяких класів функцій, інтегровних з вагою на $[-1;1]$.

Ключові слова: **інтегральна метрика, умова Ліпшица, функція ваги.**

Получено обобщение теоремы о вложении Харди-Литтлвуда для некоторых классов функций, интегрируемых с весом на $[-1;1]$.

Ключевые слова: **интегральная метрика, условие Липшица, функция веса.**

We obtain generalization of Hardy and Littlewood inclusion theorem for some classes of functions being integrable with a weight on $[-1;1]$.

Key words: **integral metric, Lipschitz condition, weight function.**

Пусть $\alpha, \beta \in (-1;0]$; $p \in [1;+\infty)$; $\nu \in (0;1]$.

Вес $w\colon [-1;+1] \to \mathbb{R}$: $w(x) = e(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, где $0 < C_1 \leqslant e(x) \leqslant C_2$.

Возьмём отрезок $[a;b] \subseteq [-1;1]$. $L^p_w[a;b]$ — пространство функций $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$:

$$\|f\|_{L^p_w[a;b]} = \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Рассмотрим функциональные классы: $K\mathcal{L}^p_w[a;b] = \big\{f \in L^p_w[a;b]\colon \|f\|_{L^p_w[a;b]} \leqslant K\big\}$,

$$M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \big\{f \in L^p_w[a;b]\colon \forall h \in (0; \tfrac{b-a}{2})$$

$$\psi^{(p)}_{-}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu},$$

$$\psi^{(p)}_{+}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_{a+h}^{b} |f(x) - f(x-h)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu}\big\}$$

$$M\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \big\{f \in L^p_w[a;b]\colon \forall h \in (0; \tfrac{b-a}{2})$$

$$\overline{\psi}^{(p)}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p \overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^{\nu}\big\}$$

где $\overline{\varphi}(A;B) = \frac{1}{B-A}\int\limits_A^B \varphi(t)dt$. Также $\overline{\psi}^{(p)}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_{a+h}^{b} |f(x) - f(x-h)|^p \overline{w}(x-h;x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}$.

Будем обозначать $H^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \bigcup\limits_{M>0} M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ и $\overline{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] = \bigcup\limits_{M>0} M\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$.

Если $e(x) \equiv 1$ и $\alpha = \beta = 0$, т.е. $w(x) \equiv 1$, класс $\mathcal{L}^p_w[a;b]$ обращается в $\mathcal{L}^p[a;b]$, а классы $\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ и $\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ — в $\mathcal{H}^{(\nu)}_p[a;b] = Lip_{[a;b]}(\nu;p)$.

Аналогично, $\mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu;p) = \bigcup\limits_{M>0} MLip_{[a;b]}(\nu;p)$.

Класс $MLip_{[a;b]}(\nu) = \big\{ f \in C_{[a;b]} \mid \forall x_1, x_2 \in [a;b]\colon |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant M|x_1 - x_2|^\nu \big\}$.

Сформулируем теорему о вложении Харди и Литтлвуда, полученную в [1]:

Теорема 1. *Если $f \in \mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu;p)$, то:*

a) при $\nu p > 1$ функция f эквивалентна функции $f^* \in \mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu - \frac{1}{p})$;

b) при $\nu p \leqslant 1$ функция $f \in \mathrm{Lip}_{[a;b]}(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; q)$ для $\forall q \in \big[p; \frac{p}{1-\nu p}\big)$.

Здесь мы установим некоторое обобщение этого результата на весовой случай:

Теорема 2. *Если $\alpha \in (-1;0]$, $\beta \in (-1;0]$ и $f \in K\mathcal{L}^p_w[-1;1] \cap M\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1]$, то:*

a) при $\nu p > 1$ функция f эквивалентна функции $f^* \in M^* Lip_{[-1;1]}(\nu - \frac{1}{p})$;

b) при $\nu p \leqslant 1$ функция $f \in K^*\mathcal{L}^q_w[-1;1] \cap M^*\overline{\mathcal{H}}^{(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}_{q;w}[-1;1]$ для $\forall q \in \big[p; \frac{p}{1-\nu p}\big)$; где константы K^* и M^* зависят от K, M, α, β, p, ν (и q), но не от функции f.

Используем частично модифицированное доказательство теоремы 1 из [2].

Доказательство. Начнём с оценок, связывающих w и $\overline{w}$.

Покажем, что $\forall d \in (0; \frac{1}{2})$, $\forall x \in (-1; 1-d)$: $\overline{w}(x; x+d) \leqslant C'_{\alpha;\beta} w(x)$.

1) $x \in (-1;0]$: $\overline{w}(x;x+d) = \frac{1}{d}\int\limits_x^{x+d} w(t)dt \leqslant C^{(1)}_\alpha \frac{1}{d}\int\limits_x^{x+d}(1+t)^\beta dt \leqslant C^{(1)}_\alpha (1+x)^\beta \leqslant C^{(2)}_\alpha w(x)$.

2) $x \in [0; 1-d)$: $\overline{w}(x;x+d) \leqslant C^{(3)}_\beta \frac{1}{d}\int\limits_x^{x+d}(1-t)^\alpha dt = C^{(4)}_{\alpha;\beta}\frac{1}{d}\big((1-x)^{1+\alpha} - (1-x-d)^{1+\alpha}\big) \overset{y=1-x}{=}$

$= C^{(4)}_{\alpha;\beta} g(z) y^\alpha$, где $z = \frac{d}{y} \in [d;1)$ и $g(z) = \frac{1-(1-z)^{1+\alpha}}{z} \in C_{[0;1]} \Rightarrow |g(z)| \leqslant C^{(5)}_\alpha$ при $z \in [0;1]$.

Отсюда $\overline{w}(x;x+d) \leqslant C^{(6)}_{\alpha;\beta} y^\alpha \leqslant C^{(7)}_{\alpha;\beta} w(x)$. В любом случае $\overline{w}(x;x+d) \leqslant C^{(8)}_{\alpha;\beta} w(x)$.

Рассмотрев $\tilde{w}(x) = w(-x)$ и $\overline{\tilde{w}}(-x-d;-x) = \overline{\tilde{w}}(-x-d;(-x-d)+d) = \overline{w}(x;x+d)$, аналогично установим, что $\overline{w}(x;x+d) \leqslant C^{(9)}_{\alpha;\beta} w(x+d)$.

Иначе говоря, $\overline{w}(A;B) \leqslant C^{(10)}_{\alpha;\beta} w(A), C^{(10)}_{\alpha;\beta} w(B)$. Далее, $\forall x \in (A;B)$:

$$\overline{w}(A;B) = \frac{1}{B-A}\int\limits_A^B w(t)dt = \frac{1}{B-A}\Big(\int\limits_A^x w(t)dt + \int\limits_x^B w(t)dt\Big) \leqslant \frac{1}{x-A}\int\limits_A^x w(t)dt + \frac{1}{B-x}\int\limits_x^B w(t)dt =$$

$$= \overline{w}(A;x) + \overline{w}(x;B) \leqslant C^{(10)}_{\alpha;\beta} w(x) + C^{(10)}_{\alpha;\beta} w(x) = C_{\alpha;\beta} w(x) \tag{1}$$

Отсюда $\mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b] \subseteq C'''\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$, то есть $H^{(\nu)}_{p;w}[a;b] \subseteq \overline{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$ (2)

(пусть $f \in \mathcal{H}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$, тогда $\overline{\psi}^{(p)}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_a^{b-h} \big|f(x+h) - f(x)\big| \overline{w}(x;x+h)dx^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$

$$\leqslant C'''\Big(\int\limits_a^{b-h}\big|\ldots\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} = C'''\psi^{(p)}_-(f;a;b;h) \leqslant C''' h^\nu$$

так что $f \in C'''\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[a;b]$). Кроме того, если отрезок $[A';B'] \subseteq [A;B]$, то

$$\overline{w}(A;B) = \frac{1}{B'-A'}\int\limits_{A'}^{B'} \overline{w}(A;B)dx \leqslant C_{\alpha;\beta}\frac{1}{B'-A'}\int\limits_{A'}^{B'} w(x)dx = C_{\alpha;\beta}\overline{w}(A';B') \tag{3}$$

С другой стороны, $\forall d \in (0;\frac{1}{2})$, $\forall x \in [-1+d;1-d]$: $w(x) \leqslant C^{(11)}\overline{w}(x;x+d)$ (4)

$x \leqslant 0$: $w(x)\big[\overline{w}(x;x+d)\big]^{-1} \leqslant C^{(12)}(1+x)^{\beta}\big[\frac{1}{d}\int\limits_{x}^{x+d}(1+t)^{\beta}dt\big]^{-1} \leqslant C^{(12)}(1+\frac{d}{1+x})^{-\beta} \leqslant C^{(13)}$;

$x \geqslant 0$: $w(x)\big[\overline{w}(x;x+d)\big]^{-1} \leqslant C^{(14)}(1-x)^{\alpha}\big[\frac{1}{d}\int\limits_{x}^{x+d}(1-t)^{\alpha}\big]^{-1} \leqslant C^{(14)}(1-x)^{\alpha-\alpha} = C^{(14)}$;

в любом случае (4) имеет место. Аналогично $w(x) \leqslant C^{(15)}\overline{w}(x-d;x)$.

. . . .

Поскольку при $\alpha,\beta \leqslant 0$ вес $w(x) \geqslant C_3 > 0$, то интегралы, указывающие на принадлежность f классам $K\mathcal{L}$ и $M\mathcal{H}$ (из определений этих классов), мажорируют аналогичные интегралы без веса с некоторой константой $C_{\alpha;\beta;p} > 0$. Значит, $f \in M_1Lip_{[-1;1]}(\nu;p)$, поэтому в случае (a) достаточно воспроизвести рассуждения из [2] (лемма 1 и теорема 1, п. 1) и получить искомое утверждение.

Далее рассматривается случай (b); не ограничивая общности, считаем $\nu p < 1$.

I. Пусть вначале $f \in C_{(-1;1)}$. Поскольку $w(x) \geqslant C_3 > 0$, то $\forall a,b \in [-1;1]$:

$\int\limits_a^b |f(x)|dx = \int\limits_a^b |f(x)|w^{\frac{1}{p}}(x)w^{-\frac{1}{p}}(x)dx \overset{\text{НГ}(p,p')}{\leqslant} \big(\int\limits_a^b |f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}} \cdot \big(\int\limits_a^b w^{-\frac{p'}{p}}(x)dx\big)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$

$\leqslant C_4\big(\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}} = C_4\|f\|_{L^p_{w[-1;1]}} < \infty$, т.е. $f \in L[-1;1]$. Следовательно, для $x \in [-1;1)$ и $v \in (0;1-x)$ можно определить «усредняющую» функцию

$\Phi(x;v) = \frac{1}{v}\int\limits_x^{x+v} f(t)dt = \frac{1}{v}\int\limits_0^v f(x+u)du = \int\limits_0^1 f(x+vz)dz$, и пусть $\Phi(x;0) := f(x)$

Тогда для $h > 0$ и $x+h < 1$, ввиду непрерывности $f(\cdot)$ на $[x;x+h]$

$$f(x) - \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+u)du = \Phi(x;0) - \Phi(x;h) = -\int\limits_0^h \Phi'_v(x;v)dv =$$

$$= -\int\limits_0^h\Big(-\frac{1}{v^2}\int\limits_0^v f(x+u)du + \frac{1}{v}f(x+v)\Big)dv = -\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big(f(x+v)-f(x+u)\big)du\Big\}dv$$

откуда $f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+u)du - \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big(f(x+v)-f(x+u)\big)du\Big\}dv$ (5)

и аналогично для $x-h > -1$, взяв усреднение $\Phi(x;v) = \frac{1}{v}\int\limits_{x-v}^{x} f(t)dt$:

$$f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x-u)du - \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big(f(x-v)-f(x-u)\big)du\Big\}dv \tag{6}$$

. . . .

Пусть $[a;b] \subset [-1;1]$: $\exists h > 0$: $[a;b+h] \subseteq [-1;1]$. $\|f\|_{L^q_{w[a;b]}} = \big(\int\limits_a^b |f(x)|^q w(x)dx\big)^{\frac{1}{q}} \overset{(5)}{=}$

$$= \Big(\int\limits_a^b\Big|\frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+u)du - \int\limits_0^h\frac{1}{v^2}\{\int\limits_0^v\big[f(x+v)-f(x+u)\big]du\}dv\Big|^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}\Big(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\big|f(x+u)\big|du\Big]^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\Big(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h\frac{1}{v^2}\{\int\limits_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\}dv\Big]^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} = I_1 + I_2 \tag{7}$$

1) Оценим сверху I_1, применив для внутреннего интеграла неравенство Гёльдера с показателями p и p': $I_1 \leqslant h^{-1}\Big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p du\big]^{\frac{q}{p}} \cdot \big[\int\limits_0^h du\big]^{\frac{q}{p'}} w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$

$$= h^{-1+\frac{1}{p'}}\Big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p w(x+u)w^{-1}(x+u)du\big]^{\frac{q-p}{p}} \cdot \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p du\big]^1 w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_x^{x+h} |f(t)|^p w(t)dt\big]^{\frac{q-p}{p}} \cdot \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p du\big]^1 w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}}\big(\int\limits_a^b \big[\int\limits_0^h |f(x+u)|^p w(x)du\big]dx\big)^{\frac{1}{q}} = C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}}\big(\int\limits_0^h \big[\int\limits_a^b (...)dx\big]^{\frac{1}{p}\cdot p} du\big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}}\Big(\int\limits_0^h \Big[\underbrace{\big(\int\limits_a^b |f(x+u)-f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}}}_{=\psi_-^{(p)}(f;a;b+u;u)\leqslant Mu^\nu \leqslant M} + \underbrace{\big(\int\limits_a^b |f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}}}_{\leqslant \|f\|_{L^p_w[-1;1]}\leqslant K}\Big]^p du\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 h^{-\frac{1}{p}} K^{1-\frac{p}{q}} (M+K)^{\frac{p}{q}} \big(\int\limits_0^h du\big)^{\frac{1}{q}} = C_6 K^{1-\frac{p}{q}} (M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \tag{8}$$

2) Оценим $I_2 = \big(\int\limits_a^b T^q(x)w(x)dx\big)^{\frac{1}{q}}$, где $T(x) = \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v \big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\big\}dv$.

Вновь используя то, что из $\alpha, \beta \leqslant 0$ вытекает $f \in L^p[-1;1]$ и $f \in \mathrm{Lip}_{[-1;1]}(\nu;p)$, воспроизведём оценку $T(x)$ (и I_2) в [2, (17) – (19)]. Итак, для $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}) > 0$ и $\gamma = \max\big\{0; (1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) - \frac{\varepsilon}{2}\big\}$, обозначая $\mu = \varepsilon - \gamma + (1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$:

$$I_2 \leqslant C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v |f(x+v)-f(x+u)|^p du\big\}dv\Big] w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \big(\int\limits_a^b \int\limits_0^h \int\limits_0^v (...)du\,dv\,dx\big)^{\frac{1}{q}} = \big(\int\limits_0^h \int\limits_a^b \int\limits_0^v (...)du\,dx\,dv\big)^{\frac{1}{q}} = \big(\int\limits_0^h \int\limits_0^v \int\limits_a^b (...)dx\,du\,dv\big)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v \big(\int\limits_a^b |f(x+v)-f(x+u)|^p w(x)dx\big)^{\frac{p}{p}} du\big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 M^{1-\frac{p}{q}} h^\mu \Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int\limits_0^v \big[\big(\int\limits_a^b |f(x+v)-f(x)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\big(\int\limits_a^b |f(x)-f(x+u)|^p w(x)dx\big)^{\frac{1}{p}}\big]^p du\Big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_7' M h^\mu \big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big[\int\limits_0^v v^{\nu p} du\big]dv\big)^{\frac{1}{q}} = C_7' M h^\mu \big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q+\nu p+1} dv\big)^{\frac{1}{q}}$$

$\int\limits_0^h (...)dv$ сходится $\Leftrightarrow (-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q+\nu p+1 > -1 \Leftrightarrow \frac{2}{p}+\varepsilon-\gamma < \nu\frac{p}{q}+\frac{2}{q}$; по определению γ, имеем $\frac{2}{p}+\varepsilon-\gamma \leqslant \frac{2}{p}+\frac{3}{2}\varepsilon-(1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. А $\frac{2}{p}+\big(\frac{3}{4}\nu-\frac{3}{4p}+\frac{3}{4q}\big)-\big(\frac{1}{p}+\nu-\frac{1}{q}-\nu\frac{p}{q}\big) < \nu\frac{p}{q}+\frac{2}{q} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\big(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\big) < 0$, что верно вследствие выбора q, откуда $\frac{2}{p}+\varepsilon-\gamma < \nu\frac{p}{q}+\frac{2}{q}$. Поэтому

$$I_2 \leqslant C_8 M h^{\varepsilon-\gamma+(1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon+(2+\nu p)\frac{1}{q}} = C_8 M h^{\frac{1}{p}+\nu-\frac{2}{p}+\frac{1}{q}} = C_8 M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \tag{9}$$

Из (7), (8) и (9): $\|f\|_{L^q_w[a;b]} \leqslant C_6 K^{1-\frac{p}{q}} (M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_8 M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (10)

Если взять функцию $\tilde{f}(x) = f(-x)$ и вес $\tilde{w}(x) = w(-x)$ (т.е. $w(x)$ с заменой $\alpha \leftrightarrow \beta$, $e(x) \leftrightarrow e(-x)$), то легко видеть, что

$\psi_-^{(p);w}(f;-1;1;h) = \psi_+^{(p);\tilde{w}}(\tilde{f};-1;1;h)$ и $\psi_+^{(p);w}(f;-1;1;h) = \psi_-^{(p);\tilde{w}}(\tilde{f};-1;1;h)$ (11)

поэтому для $[a';b'] \subset [-1;1]$ такого, что $\exists h > 0$: $[a'-h;b'] \subseteq [-1;1]$, аналогично (10) получаем: $\|f\|_{L_w^q[a';b']} \leqslant C_9 K^{1-\frac{p}{q}}(M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{10} M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (12)

Ввиду (10) и (12): $\|f\|_{L_w^q[-1;1]} = \Big(\int\limits_{-1}^{1}(...)\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant 2^{\frac{1}{q}}\Big(\Big(\int\limits_{0}^{1}(...)\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int\limits_{-1}^{0}(...)\Big)^{\frac{1}{q}}\Big) =$

$$= 2^{\frac{1}{q}}\big(\|f\|_{L_w^q[0;1]} + \|f\|_{L_w^q[-1;0]}\big) \leqslant C_{11} K^{1-\frac{p}{q}}(M+K)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{12} M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \qquad (13)$$

где $h \in (0;1)$. Отсюда, в частности, $\|f\|_{L_w^q[-1;1]} < \infty$, так что $f \in K_2\mathcal{L}_w^q[-1;1]$ (14)

. . . .

Теперь рассмотрим $[a;b] \subset [-1;1]$ такой, что $\exists k > 0$: $[a;b+k] \subseteq [1;1]$, и оценим $\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k)$ (при $a=-1$, $b=1-h$ и $k=h$ это будет $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h)$):

$$\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k) = \Big(\int\limits_a^b |f(x+k)-f(x)|^q \overline{w}(x;x+k)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_a^b |f(x+\tfrac{k}{2})-f(x)|^q \overline{w}(...)dx\Big)^{\frac{1}{q}} + \Big(\int\limits_a^b |f(x+k)-f(x+\tfrac{k}{2})|^q \overline{w}(...)dx\Big)^{\frac{1}{q}} = J^+ + J^- \qquad (15)$$

Оценим, например, J^+. Пусть $h = \frac{k}{2}$, тогда $x + \frac{k}{2} + h = x + k \leqslant 1$. Ввиду (5):

$$f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+u)du - \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v \big(f(x+v)-f(x+u)\big)du\Big\}dv$$

$$f(x+\tfrac{k}{2}) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h f(x+\tfrac{k}{2}+u)du - \int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v \big(f(x+\tfrac{k}{2}+v)-f(x+\tfrac{k}{2}+u)\big)du\Big\}dv$$

По неравенству Минковского $J^+ \leqslant J_1^+ + J_2^+ + J_3^+ =$

$$= \frac{1}{h}\Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h \big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|du\Big]^q \overline{w}(x;x+k)dx\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v \big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q \overline{w}(x;x+k)dx\Big)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+\Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v \big|f(x+\tfrac{k}{2}+v)-f(x+\tfrac{k}{2}+u)\big|du\Big\}dv\Big]^q \overline{w}(x;x+k)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \qquad (16)$$

1) Оценим J_1^+. Используя (1) и неравенство Гёльдера с показателями p и p',

$$J_1^+ \leqslant \frac{1}{h}\Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h \big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|^p du\Big]^{\frac{q}{p}} \cdot \Big[\int\limits_0^h du\Big]^{\frac{q}{p'}} \overline{w}(x;x+k)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{13} h^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_x^{x+h} \big|f(t+\tfrac{k}{2})-f(t)\big|^p w(t)dt\Big]^{\frac{q-p}{p}} \Big[\int\limits_0^h \big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|^p du\Big]^1 \overline{w}(...)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{15} M^{1-\frac{p}{q}} k^{-\frac{1}{p}+\nu(1-\frac{p}{q})}\Big(\int\limits_a^b \Big[\int\limits_0^h \big|f(x+\tfrac{k}{2}+u)-f(x+u)\big|^p \overline{w}(x;x+k)du\Big]dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{16} M^{1-\frac{p}{q}} k^{-\frac{1}{p}+\nu(1-\frac{p}{q})}\Big(\int\limits_0^h \Big[\int\limits_{a+u}^{b+u} \big|f(t+\tfrac{k}{2})-f(t)\big|^p w(t)dt\Big]^{\frac{1}{p}} du\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{17} M k^{-\frac{1}{p}+\nu-\nu\frac{p}{q}+\nu\frac{p}{q}}\Big(\int\limits_0^h du\Big)^{\frac{1}{q}} = C'_{17} M k^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \qquad (17)$$

2) Вследствие (1): $J_2^+ \leqslant C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\{\int\limits_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\}dv\Big]^q w(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$ $= C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}} I_2$, так что ввиду (9) $J_2^+ \leqslant C_8 M h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = C_{18}k^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (18)

3) По (1): $J_3^+ \leqslant C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_a^b\Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\{\int\limits_0^v\big|f(x+\frac{k}{2}+v)-f(x+\frac{k}{2}+u)\big|du\}dv\Big]^q w(x+\frac{k}{2})dx\Big)^{\frac{1}{q}} =$ $= C_{\alpha;\beta}^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{a+\frac{k}{2}}^{b+\frac{k}{2}}\Big[\int\limits_0^h \frac{1}{v^2}\{\int\limits_0^v\big|f(y+v) - f(y+u)\big|du\}dv\Big]^q w(y)dy\Big)^{\frac{1}{q}}$; дальнейшая оценка J_3^+ аналогична оценке I_2 (с $a \leftarrow a+\frac{k}{2}$, $b \leftarrow b+\frac{k}{2}$). Выходит, $J_3^+ \leqslant C_{19}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (19)

Из (17), (18), (19) и (16) вытекает, что $J^+ \leqslant C_{20}Mk^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$.

J^- оценивается аналогично J^+, только вместо представления (5) используется представление (6) и модуль непрерывности $\psi_+^{(p)}$ вместо $\psi_-^{(p)}$. Следовательно, учитывая (15), $\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k) \leqslant C_{21}k^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$; в частности, $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h) \leqslant C_{22}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$.

Это означает, что $f \in M_2\overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$ (20)

Таким образом, $f \in K_2\mathcal{L}_w^q[-1;1] \cap M_2\overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$.

II. Пусть теперь f — произвольная функция из $K\mathcal{L}_w^p[-1;1] \cap M\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$.
Возьмём $\forall h \in (0;h_0)$, где $h_0 = \frac{1}{4}$, и рассмотрим

$$\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h) \leqslant 2^{\frac{1}{q}}\big(\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;\tfrac{1}{2};h) + \overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)\big) \tag{21}$$

1) Оценим $\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)$. Введём последовательность «средних» для $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$:

$$f_n^+(x) := \frac{n}{1-x}\int\limits_x^{x+\frac{1-x}{n}} f(t)dt = \frac{n}{1-x}\int\limits_0^{\frac{1-x}{n}} f(x+u)du = n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} f\big(x+(1-x)v\big)dv$$

$f_n^+ \in C_{(0;1)}$ ввиду абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Покажем, что так определённые $f_n^+(\cdot)$ удовлетворяют условиям п. (I) (с заменой $[-1;1]$ на $[0;1]$). $\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} = \Big(\int\limits_0^1\Big|\frac{n}{1-x}\int\limits_0^{\frac{1-x}{n}} f(x+u)du - \frac{n}{1-x}\int\limits_0^{\frac{1-x}{n}} f(x)du\Big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} =$

$$= n\Big(\int\limits_0^1\Big|\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{1-x}\big(f(x+u)-f(x)\big)w^{\frac{1}{p}}(x)\chi(\tfrac{1-x}{n}-u)du\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_0^1 \frac{1}{(1-x)^p}\big|f(x+u)-f(x)\big|^p w(x)\chi^p(\frac{1-x}{n}-u)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du$ (по обобщённому неравенству Минковского), где $\chi(z) = \begin{cases} 0, & z<0,\\ 1, & z\geqslant 0.\end{cases}$ $\chi(\frac{1-x}{n}-u) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{n} < u \Leftrightarrow x > 1-nu$, поэтому

$$\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} \leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_0^{1-nu}(1-x)^{-p}\big|f(x+u)-f(x)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}} u^{-1}\Big(\int\limits_0^{1-u}\big|f(x+u)-f(x)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant M\int\limits_0^{\frac{1}{n}} u^{-1+\nu}du = M'n^{-\nu} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Значит, $\|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (22)

$\|f_n^+\|_{L_w^p[0;1]} \leqslant \|f_n^+ - f\|_{L_w^p[0;1]} + \|f\|_{L_w^p[0;1]} \leqslant M' + K = K_3 < \infty$: $f_n^+ \in K_3\mathcal{L}_w^p[0;1]$ (23)

Взяв $\forall h \in (0;h_0)$, оценим $\psi_-^{(p)}(f_n^+;0;1;h) = \Big(\int\limits_0^{1-h} \big|f_n^+(x+h) - f_n^+(x)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} =$

$$= n\Big(\int\limits_0^{1-h} \Big|\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \big[f(x+h+(1-x-h)v) - f(x+(1-x)v)\big] w^{\frac{1}{p}}(x)dv\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \Big(\int\limits_0^{1-h} \big|f(x+(1-x)v+h(1-v)) - f(x+(1-x)v)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} dv$$

Пусть $x + (1-x)v = y$, $h(1-v) = \tilde{h}$, тогда: $x = \frac{y-v}{1-v}$, $1 - x = \frac{1-v-y+v}{1-v} = \frac{1-y}{1-v}$; $w(x) \leqslant C_{23}(1-x)^\alpha$, и т.к. $1 \geqslant 1-v \geqslant 1-\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$, то $w(x) \leqslant C_{24}(1-y)^\alpha \leqslant C_{25}w(y)$ (ибо $(1+y)^\beta \geqslant C_{26}$); $dx = (1-v)^{-1}dy$; пределы $0 \to v$, $1-h \to 1-\tilde{h}$. Таким образом,

$$\psi_-^{(p)}(f_n^+;0;1;h) \leqslant C_{27} n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \Big(\int\limits_v^{1-\tilde{h}} \big|f(y+\tilde{h}) - f(y)\big|^p w(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}} dv \leqslant C_{27}Mn\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \tilde{h}^\nu dv \leqslant C_{27}Mh^\nu$$

Аналогично $\psi_+^{(p)}(f_n^+;0;1;h) \leqslant C_{28}Mh^\nu$. Значит, $f_n^+ \in M_3\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;1]$ (24)

Итак ((23) и (24)), функции f_n^+ действительно удовлетворяют условиям п. (I).

Заметим, что K_3 и M_3 не зависят от n.

. . . .

Теперь рассмотрим непрерывные на $(0;1)$ функции $f_{n;m}^+(x) = f_n^+(x) - f_m^+(x)$.

Во-первых, $\forall h \in (0;h_0)$: $\psi_-^{(p)}(f_{n;m}^+;0;1;h) = \|f_{n;m}^+(x+h) - f_{n;m}^+(x)\|_{L_w^p[0;1-h]} =$

$$= \|\big(f_n^+(x+h) - f_n^+(x)\big) - \big(f_m^+(x+h) - f_m^+(x)\big)\|_{L_w^p[0;1-h]} \leqslant$$

$$\leqslant \psi_-^{(p)}(f_n^+;0;1;h) + \psi_-^{(p)}(f_m^+;0;1;h) \overset{(24)}{\leqslant} 2M_3h^\nu = M_4h^\nu$$

и $\psi_+^{(p)}(f_{n;m}^+;0;1;h) \leqslant \psi_+^{(p)}(f_n^+;0;1;h) + \psi_+^{(p)}(f_m^+;0;1;h) \leqslant M_4h^\nu$.

Возьмём $\forall\varepsilon > 0$ и укажем, что, во-вторых, из (22) вытекает:

$$\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n,m \geqslant N\colon \|f_{n;m}^+\|_{L_w^p[0;1]} = \|f_n^+ - f_m^+\|_{L_w^p[0;1]} < \varepsilon$$

Иными словами, $f_{n;m}^+$ при $n,m \geqslant N_\varepsilon$ также удовлетворяет условиям п. (I):

$$f_{n;m}^+ \in \varepsilon\mathcal{L}_w^p[0;1] \cap M_4\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[0;1]$$

Поэтому, в соответствии с (13), для таких n и m

$$\|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant C_{29}\varepsilon^{1-\frac{p}{q}}(M_4+\varepsilon)^{\frac{p}{q}} h^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + C_{30}M_4h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$$

Положим $h = \varepsilon^\tau$, где $\tau > 0$: тогда (для $\varepsilon < 1$) $\|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant$

$$\leqslant C_{29}\varepsilon^{1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(M_4+\varepsilon)^{\frac{p}{q}} + C_{30}M_4\varepsilon^{\tau(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \leqslant C_{31}\varepsilon^{\min\left\{1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q});\tau(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\right\}} = C_{31}\varepsilon^\lambda$$

Выберем τ настолько малым, чтобы $1-\frac{p}{q}-\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})>0$ — тогда и $\lambda > 0$, а значит,

$$\|f_n^+ - f_m^+\|_{L_w^q[0;1]} = \|f_{n;m}^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant C_{31}\varepsilon^\lambda$$

То есть $\{f_n^+\}_{n=2}^\infty$ фундаментальна в $L_w^q[0;1]$, поэтому ввиду полноты этого пространства она сходится к некоторой функции $\overline{f} \in L_w^q[0;1]$. Но, учитывая (22), функции f и $\overline{f}$ эквивалентны ($\|f-\overline{f}\|_{L[a;b]} \leqslant C_p^{(1)}\big(\|f-f_n^+\|_{L^p[a;b]} + C_{p;q}^{(2)}\|f_n^+-\overline{f}\|_{L^q[a;b]}\big)$), и можно считать, что $\|f_n^+ - f\|_{L_w^q[0;1]} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (25)

Применим п. (I) к функциям f_n^+. Во-первых, по (14), $\|f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant K_5 < \infty$.

Отсюда $\|f\|_{L_w^q[0;1]} \leqslant \|f - f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} + \|f_n^+\|_{L_w^q[0;1]} < \infty$, и $f \in K_6\mathcal{L}_w^q[0;1]$ (26)

Во-вторых, по (20), $\|\big[f_n^+(x+h)-f_n^+(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant M_6 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (27)

Так что по неравенствам треугольника, (1) и (27):

$$\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)=\|\big[f(x+h)-f(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant$$
$$\leqslant \|\big[f(x+h)-f_n^+(x+h)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]}+$$
$$+\|\big[f_n^+(x+h)-f_n^+(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]}+\|\big[f_n^+(x)-f(x)\big]\overline{w}^{\frac{1}{q}}(x;x+h)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant$$
$$\leqslant C''_{\alpha;\beta}\|\big[f(x+h)-f_n^+(x+h)\big]w^{\frac{1}{q}}(x+h)\|_{L^q[0;1-h]}+M_6 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+$$
$$+C''_{\alpha;\beta}\|\big[f_n^+(x)-f(x)\big]w^{\frac{1}{q}}(x)\|_{L^q[0;1-h]} \leqslant M_6 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}+2C''_{\alpha;\beta}\|f_n^+-f\|_{L^q_w[0;1]}$$

Взяв достаточно большое $n=n(h)$, для которого $\|f_n^+-f\|_{L^q_w[0;1]}<h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (это можно сделать ввиду (25)), получим: $\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)\leqslant M_7 h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (28)

2) Оценка $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;\frac{1}{2};h)$ аналогична оценке $\overline{\psi}^{(q)}(f;0;1;h)$.

«Средние» функции определяем «симметрично»: для $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$

$$f_n^-(x):=\tfrac{n}{1+x}\int\limits_{x-\frac{1+x}{n}}^{x} f(t)dt=\tfrac{n}{1+x}\int\limits_{0}^{\frac{1+x}{n}} f(x-u)du=n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} f\big(x-(1+x)v\big)dv$$

затем показываем, что $\|f\|_{L^q_w[-1;\frac{1}{2}]}\leqslant K_{10}<\infty$ (29)

и $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;\frac{1}{2};h)\leqslant M_{11}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$ (30)

. . . .

Из (26) и (29): $\|f\|_{L^q_w[-1;1]}\leqslant 2^{\frac{1}{q}}\big(\|f\|_{L^q_w[-1;\frac{1}{2}]}+\|f\|_{L^q_w[0;1]}\big)\leqslant 2^{\frac{1}{q}}(K_6+K_{10})=K_{12}$, следовательно, $f\in K_{12}\mathcal{L}^q_w[-1;1]$. А из (21), (28) и (30): $\overline{\psi}^{(q)}(f;-1;1;h)\leqslant M_{12}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$. Эти оценки позволяют утверждать, что $f\in M_{12}\overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$.

Получается, $f\in K^*\mathcal{L}^q_w[-1;1]\cap M^*\overline{\mathcal{H}}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$, и теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha,\beta\in(-1;0]$. *Тогда:*

a) при $\nu p>1$ $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]\subseteq C_{34}\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$ $\big(\subseteq C'_{34}Lip_{[-1;1]}(\nu-\frac{1}{p})\big)$;

b) при $\nu p\leqslant 1$, *если* $\nu p>-\alpha$ *и* $\nu p>-\beta$, *то* $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]\subseteq C_{34}\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$.

Доказательство. Рассуждения, приводящие к этому результату, в основном повторяют схему доказательства теоремы 2. Пусть $f\in\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$:

$$\forall h\in(0;\tfrac{1}{2})\colon \overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h)=\Big(\int\limits_{-1}^{1-h}\big|f(x+h)-f(x)\big|^p\overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant h^\nu$$

Оценим $\psi_-^{(p)}(f;-1;1;h)\leqslant 2^{\frac{1}{p}}\Big(\Big[\int\limits_{-1}^{-1+h}|f(x+h)-f(x)|^p w(x)dx\Big]^{\frac{1}{p}}+\Big[\int\limits_{-1+h}^{1-h}(...)\Big]^{\frac{1}{p}}\Big)=H_1+H_2$.

В H_2, по (4), $w(x)\leqslant C_{36}\overline{w}(x;x+h)$, откуда $H_2\leqslant C_{37}\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h)\leqslant C_{37}h^\nu$.

Оценим H_1. В случае (a) возьмём $\forall q>\frac{p}{1+\beta}$, а в случае (b) $\nu>-\frac{\beta}{p}\Leftrightarrow\frac{p}{1+\beta}<\frac{p}{1-\nu p}$, и пусть $q\in\big(\frac{p}{1+\beta};\frac{p}{1-\nu p}\big)$. При этом $\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>0$. По неравенству Гёльдера

$$H_1\leqslant\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\big|f(x+h)-f(x)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}w^{\frac{q}{q-p}}(x)dx\Big)^{\frac{q-p}{pq}}=H_{1;1}\cdot H_{1;2}$$

$H_{1;2} \leqslant C_{38}\Big(\int\limits_0^h t^{-\frac{\beta q}{q-p}}dt\Big)^{\frac{q-p}{pq}} = C_{39}h^{\frac{\beta}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. Покажем, что $H_{1;1} \leqslant C_{40}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

I. Пусть вначале $f \in C_{(-1;1)}$. Аналогично оценке $\overline{\psi}^{(q)}(f;a;b+k;k)$ и J^+ в т. 2, используя (5) ($f \in L[-1;1]$, т.к. $f \in L^p_w[-1;1]$) и неравенство Минковского:

$$H_{1;1} \leqslant \tfrac{1}{h}\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\Big[\int\limits_0^h\big|f(x+h+u)-f(x+u)\big|du\Big]^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}+$$
$$+\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\Big[\int\limits_0^h \tfrac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\big\}dv\Big]^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}+$$
$$+\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\Big[\int\limits_0^h \tfrac{1}{v^2}\big\{\int\limits_0^v\big|f(x+h+v)-f(x+h+u)\big|du\big\}dv\Big]^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} = J_1+J_2+J_3$$

1) $J_1 \leqslant h^{-\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\big[\int\limits_0^h\big|f(x+h+u)-f(x+u)\big|^p\frac{\overline{w}(x+u;x+h+u)}{\overline{w}(x+u;x+h+u)}du\big]^{\frac{q}{p}}dx\Big)^{\frac{1}{q}}$.

$$\overline{w}(x+u;x+h+u)=\tfrac{1}{h}\int\limits_{x+u}^{x+h+u}w(t)dt\geqslant C_{41}\cdot\tfrac{1}{h}\int\limits_{x+u}^{x+h+u}(1+t)^\beta dt\geqslant C_{41}(1+x+h+u)^\beta\geqslant C'_{41}h^\beta;$$

$$J_1 \leqslant C_{42}h^{-\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}}\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\big[\int\limits_x^{x+h}\big|f(z+h)-f(z)\big|^p\overline{w}(z;z+h)dz\big]^{\frac{q}{p}}dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_{42}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$$

2) В J_2, оценивая $T(x)=\int\limits_0^h\frac{1}{v^2}\Big\{\int\limits_0^v\big|f(x+v)-f(x+u)\big|du\Big\}dv$, приходим к $T(x)\leqslant$ $\leqslant T_1^{\frac{1}{p'}}(x)\cdot T_2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(x)\cdot T_3^{\frac{1}{q}}(x)$; далее, $T_2(x)\leqslant\int\limits_0^h t^{-\gamma\frac{pq}{q-p}}\big(\int\limits_0^{h-t}\big|f(x+u+t)-f(x+u)\big|^p du\big)dt =$ $=\int\limits_0^h t^{-\gamma\frac{pq}{q-p}}\big(\int\limits_x^{x+h-t}\big|f(z+t)-f(z)\big|^p\frac{\overline{w}(z;z+t)}{\overline{w}(z;z+t)}dz\big)dt$. И $\overline{w}(z;z+t)\geqslant C_{43}(1+z+t)^\beta\geqslant C_{43}(2h)^\beta$,

$$T_2(x)\leqslant C_{44}h^{-\beta}\int\limits_0^h t^{-\gamma\frac{pq}{q-p}}\big(\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;t)\big)^p dt\leqslant C'_{44}h^{-\beta+1+\nu p-\gamma\frac{pq}{q-p}}$$

Затем, $J_2\leqslant C_{45}h^{\varepsilon-\gamma+(1+\nu p)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\beta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\times$
$$\times\Big(\int\limits_{-1}^{-1+h}\Big[\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v|f(x+v)-f(x+u)|^p du\big\}dv\Big]dx\Big)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=C_{45}h^{(\dots)}\Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\Big\{\int\limits_0^v\big(\int\limits_{-1}^{-1+h}|f(x+v)-f(x+u)|^p\frac{\overline{w}(x+u;x+v)}{\overline{w}(x+u;x+v)}dx\big)du\Big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Тут также $\overline{w}(x+u;x+v)\geqslant C_{46}(1+x+v)^\beta\geqslant C_{46}(2h)^\beta$, и
$$J_2\leqslant C_{47}h^{(\dots)-\frac{\beta}{p}}\Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v\big[\overline{\psi}^{(p)}(f;-1+u;-1+h+v;v-u)\big]^p du\big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$
$$\leqslant C_{47}h^{(\dots)-\frac{\beta}{p}}\Big(\int\limits_0^h v^{(-\frac{2}{p}+\gamma-\varepsilon)q}\big\{\int\limits_0^v(v-u)^{\nu p}du\big\}dv\Big)^{\frac{1}{q}}=C_{49}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$$

3) J_3 оценивается аналогично J_2; в итоге, $J_3\leqslant C_{52}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

Соединяя оценки J_1, J_2 и J_3, получаем: $H_{1;1}\leqslant C_{40}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

II. Пусть теперь f — произвольная функция из $\overline{\mathcal{H}}^{(\nu)}_{p;w}[-1;1]$. Введём средние

$$f_n^-(x) := \tfrac{n}{1+x}\int\limits_{x-\frac{1+x}{n}}^{x} f(t)dt = \tfrac{n}{1+x}\int\limits_0^{\frac{1+x}{n}} f(x-u)du = n\int\limits_0^{\frac{1}{n}} f\big(x-(1+x)v\big)dv$$

непрерывные из-за абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Покажем, что $f_n^- \in L_w^p[-1;0]$: $\|f_n^-\|_{L_w^p[-1;0]} \leqslant \|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1;0]} + \|f\|_{L_w^p[-1;0]}$, а

$$\|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1;0]} = n\Big(\int\limits_{-1}^{0}\Big|\int\limits_0^{\frac{1}{n}} \tfrac{1}{1+x}\big[f(x)-f(x-u)\big]w^{\frac{1}{p}}(x)\chi(\tfrac{1+x}{n}-u)du\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1}^{0} \tfrac{1}{(1+x)^p}\big|f(x)-f(x-u)\big|^p w(x)\chi^p(\tfrac{1+x}{n}-u)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1+nu}^{0}(1+x)^{-p}\big|f(x)-f(x-u)\big|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \overset{(4)}{\leqslant}$$

$$\leqslant C_{53}\int\limits_0^{\frac{1}{n}} u^{-1}\Big(\int\limits_{-1+u}^{0}\big|f(x)-f(x-u)\big|^p\overline{w}(x-u;x)dx\Big)^{\frac{1}{p}}du \leqslant$$

$\leqslant M\int\limits_0^{\frac{1}{n}} u^{-1+\nu}du = M'n^{-\nu} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Отсюда $\|f_n^-\|_{L_w^p[-1;0]} < \infty \Leftrightarrow f_n^- \in L_w^p[-1;0]$.

Теперь возьмём $\forall h \in (0;\frac{1}{2})$ и оценим $\overline{\psi}^{(p)}(f_n^-;-1;0;h) =$

$$= n\Big(\int\limits_{-1}^{-h}\Big|\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\big[f(x+h-(1+x+h)v)-f(x-(1+x)v)\big]\overline{w}^{\frac{1}{p}}(x;x+h)dv\Big|dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1}^{-h}\big|f(x(1-v)-v+h(1-v))-f(x(1-v)-v)\big|^p\overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}}dv$$

Пусть $x(1-v)-v=y$, $h(1-v)=\tilde{h}$, тогда $x=\frac{y+v}{1-v}$, $1+x=\frac{1+y}{1-v}$; $dx=(1-v)^{-1}dy$; $-1\to-1$, $-h\to-\tilde{h}-v$; $C_{54}(1+x)^{\beta} \leqslant w(x) \leqslant C'_{54}(1+x)^{\beta}$, и так же делаем замену $t(1-v)-v=s$ в $\overline{w}(x;x+h) \leqslant C_{55}\frac{1}{\tilde{h}}\int\limits_y^{y+\tilde{h}}(1+s)^{\beta}ds \leqslant C_{56}\overline{w}(y;y+\tilde{h})$, откуда $\overline{\psi}^{(p)}(f_n^-;-1;0;h) \leqslant$

$$\leqslant C_{57}n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\Big(\int\limits_{-1}^{-\tilde{h}-v}\big|f(y+\tilde{h})-f(y)\big|^p\overline{w}(y;y+\tilde{h})dy\Big)^{\frac{1}{p}}dv \leqslant C_{57}n\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\tilde{h}^{\nu}dv \leqslant C_{58}h^{\nu}$$

То есть $f_n^- \in M_{13}\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;0]$. Поэтому, применяя для f_n^- результаты п. (I): $\|f_n^-(x+h)-f_n^-(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} \leqslant C_{59}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$. Аналогично оценке $\|f_n^- - f\|_{L_w^p[-1;0]}$,

$$\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]} \leqslant \ldots \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{n}}u^{-1}\Big(\int\limits_{-1+u}^{0}\big|f(x)-f(x-u)\big|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}du$$

$\overline{w}(x;x+k) \geqslant C_3$, так что $\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq C_{61}\mathcal{H}_p^{(\nu)}[-1;1]$. То есть $f \in C_{61}Lip(\nu;p)$, а значит, к ней применима теорема 1: $f \in C_{62}\mathcal{H}_q^{(\xi)}[-1;1]$, где $\xi = \nu - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 0$.

Поэтому $\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]} \leqslant C_{63}\int\limits_0^{\frac{1}{n}}u^{-1+\xi}du = C_{64}n^{-\xi} \xrightarrow[n\to 0]{} 0$.

Наконец, $H_{1;1} = \|f(x+h)-f(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} \leqslant$

$$\leqslant \|f_n^-(x+h)-f(x+h)\|_{L^q[-1;-1+h]} + \|f_n^-(x+h)-f_n^-(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} +$$

$+\|f_n^-(x)-f(x)\|_{L^q[-1;-1+h]} \leqslant C_{59}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}+2\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]}$. Выбрав такое $n = n(h)$, что $\|f_n^- - f\|_{L^q[-1;0]} \leqslant h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$, приходим к: $H_{1;1} \leqslant C_{65}h^{\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\beta}{p}}$.

Объединяя оценки $H_{1;1}$, $H_{1;2}$ и H_1 с H_2, получаем: $\psi_-^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant C_{35}h^\nu$. Аналогично можно показать, что $\psi_+^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant C_{35}h^\nu$, отчего $f \in M_{14}\mathcal{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$. Это завершает доказательство теоремы 3.

Соединив её с (2), при $\nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$ получаем: $H_{p;w}^{(\nu)}[a;b] = \overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[a;b]$.

Поэтому в условиях п. (b) теоремы 2, при дополнительных ограничениях на p, $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq \overline{H}_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$ для $\forall q \in \big[p;\frac{p}{1-\nu p}\big)$ и $H_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq H_{q;w}^{(\nu-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}[-1;1]$ для $\forall q \in \big[p;\frac{p(1+\min\{\alpha;\beta\})}{1-\nu p}\big)$ (второе включение вытекает из теоремы 3 при $p \leftarrow q$ и $\nu \leftarrow \nu - \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$). А именно, должно быть $p < \frac{p(1+\min\{\alpha;\beta\})}{1-\nu p} \Leftrightarrow \nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$.

. . . .

Теперь рассмотрим класс $M\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[a;b] = \big\{f \in L_w^p[a;b]\colon \forall h \in (0;\frac{b-a}{2})$

$$\widehat{\psi}^{(p)}(f;a;b;h) = \Big(\int\limits_{a+h}^{b-h}|f(x+h)-f(x-h)|^p w(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant Mh^\nu\Big\}$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha,\beta \in (-1;0]$. *Тогда* $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] = \widehat{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$; *точнее,*

$$\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq M'\overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \text{ и } \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1] \subseteq M''\widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$$

Доказательство. 1) Пусть $f \in \widehat{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$. Для $\forall h \in (0;1)$

$$\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h) = \Big(\int\limits_{-1}^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p\overline{w}(x;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leqslant}$$

$$\leqslant C_{66}\Big(\int\limits_{-1}^{1-h}|f(x+h)-f(x)|^p w(x+\tfrac{h}{2})dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \widehat{\psi}^{(p)}(f;-1;1;\tfrac{h}{2}) \leqslant M'h^\nu$$

2) Пусть $f \in \overline{\mathcal{H}}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$. По (4): $w(x) \leqslant C_{67}\overline{w}(x-h;x)$ и $w(x) \leqslant C_{67}\overline{w}(x;x+h)$, $w(x) \leqslant C_{67}\cdot\frac{1}{2}\big[\overline{w}(x-h;x)+\overline{w}(x;x+h)\big] = C_{67}\overline{w}(x-h;x+h)$, значит, $\widehat{\psi}^{(p)}(f;-1;1;h) \leqslant$ $\leqslant C_{68}\Big(\int\limits_{-1+h}^{1-h}|f(x+h)-f(x-h)|^p\overline{w}(x-h;x+h)dx\Big)^{\frac{1}{p}} = C_{68}\overline{\psi}^{(p)}(f;-1;1;2h) \leqslant M''h^\nu$.

Таким образом, в силу (2) и теорем 3, 4 при $\nu p > \max\{-\alpha;-\beta\}$ классы $H_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$, $\overline{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$ и $\widehat{H}_{p;w}^{(\nu)}[-1;1]$ совпадают.

Библиографические ссылки

1. *Hardy G. H.* A convergence criterion for Fourier series. // G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Zeitschr. — 1928. — 28. — P. 122–147.
2. *Ильин В. П.* Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтльвуда. // В. П. Ильин // Труды МИАН СССР. — 1959. — Т. 53. — С. 128–144.

Надійшла до редколегії 24.04.2014

ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 517.977.56

S. O. Gorbonos*, **P. I. Kogut****

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. *E-mail: gorbonos.so@gmail.com*

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпропетровськ 49050. *E-mail: p.kogut@i.ua*

On non-variational solutions to optimal boundary control problems for parabolic equations

Досліджується задача оптимального керування для лінійного параболічного рівняння з необмеженими коефіцієнтами в головній частині еліптичного оператора. Особливість даного рівняння полягає в тому, що матриця потоку є кососиметричною, а її коефіцієнти належать до простору L^2. Показано, що поставлена задача керування має єдиний розв'язок, який не можна досягти через границю оптимальних розв'язків для L^∞- апроксимованих задач.

Ключові слова: **параболічне рівняння, оптимальне керування, варіаційний роз'язок, необмежені коефіцієнти, кососиметрична матриця.**

Изучается задача оптимального управления для линейного параболического уравнения с неограниченными коэффициентами в главной части эллиптического оператора. Особенность данного уравнения состоит в том, что матрица потока является кососимметричной, а ее коэффициенты принадлежат пространству L^2. Показано, что данная задача управления имеет единственное решение, которое нельзя достичь через предел оптимальных решений для L^∞-аппроксимированных задач.

Ключевые слова: **параболическое уравнение, оптимальное управление, вариационное решение, неограниченные коэффициенты, кососимметрическая матрица.**

We study an optimal boundary control problem (OCP) associated to the linear parabolic equation $y_t - \operatorname{div}\,(\nabla y + A(x)\nabla y) = f$. The characteristic feature of this equation is the fact that the matrix $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,\dots,N}$ is skew-symmetric, $a_{ij}(x) = -a_{ji}(x)$ and belongs to L^2-space (rather than L^∞). We show that under special choice of matrix A and distribution f, a unique solution to the original OCP inherits a singular character of the original matrix A and it can not be attainable by the solutions of the similar OCPs with L^∞-approximations of matrix A.

Key words: **parabolic equation, optimal control, variational solution, unbounded coefficients, skew-symmetric matrix.**

1. Introduction

We consider the optimal boundary control problem for a parabolic equation with unbounded coefficients. The characteristic feature of this problem is the fact that the stream matrix $A(x)$ is skew-symmetric and its coefficients belongs to L^2-space (rather than L^∞). As a result, the existence, uniqueness, and variational properties of the weak solution to optimal control problem (OCP) usually are drastically different from the corresponding properties of solutions to the parabolic equations with L^∞-matrices in coefficients. In most cases, the situation can change dramatically for the matrices A with unremovable singularity. Typically, in such cases, boundary value problem may admit infinitely many weak solutions which can be divided into two classes: approximable and non-approximable solutions [5], [12], and [13].

The aim of this work is to consider OCP with a well prescribed skew-symmetric L^2-matrix A and, using the direct method in the Calculus of variations, to show that this problem admits a unique solution possessing a special singular properties. As a result, we prove that this solution cannot be attained through a sequence of optimal solutions to regularized OCP for boundary value problem with skew-symmetric matrices $A_k \in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^3)$ such that $A_k \to A$ strongly in $L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)$. Thus, this result shows that a numerical analysis of optimal control problems for parabolic equations with unbounded coefficients is a non-trivial matter and it requires the elaboration of special approaches.

2. Notation and Preliminaries

Let Ω be the unit ball in $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3\ :\ \|x\|_{\mathbb{R}^3} < 1\}$. Let $C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D)$ be the set of all infinitely differentiable functions $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ with compact supports in Ω. Let $C_0^\infty(\mathbb{R}^N;\Gamma_D) = \left\{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)\ :\ \varphi = 0 \text{ on } \Gamma_D\right\}$. We define the Banach space $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$ as the closure of $C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D)$ with respect to the norm (see [1])

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega;\Gamma_D)} = \left(\int_\Omega \|\nabla y\|^2_{\mathbb{R}^3}\, dx\right)^{1/2}.$$

Let $H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)$ be the dual space to $H_0^1(\Omega;\Gamma_D)$.

Let $\mathbf{X}$ be a Banach space and let $T > 0$ be a given value. We denote by $L^2(0,T;\mathbf{X})$ the set of measurable functions $y \in (0,T) \to \mathbf{X}$ such that $\|u(\cdot)\|_{\mathbf{X}} \in L^2(0,T)$. Similarly, one can also define the set of distributions $\mathcal{D}'(0,T;\mathbf{X})$ on $(0,T)$ with values in $\mathbf{X}$. $L^2(0,T;\mathbf{X})$ is a Banach space with respect to the norm

$$\|y\|_{L^2(0,T;\mathbf{X})} = \left(\int_0^T \|u(x)\|^2_{\mathbf{X}}\, dx\right)^{1/2}.$$

If $\mathbf{X}$ is reflexive, the space $L^2(0,T;\mathbf{X})$ is reflexive too. Moreover, if $\mathbf{X}$ is separable, then $L^2(0,T;\mathbf{X})$ is separable.

Let $C([0,T];L^2(\Omega))$ be the space of measurable functions on $[0,T]\times\Omega$ such that $y(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ for any $t \in [0,T]$ and such that the map $t \in [0,T] \mapsto y(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ is continuous. Let us define the Banach space

$$\mathcal{W}_{\Gamma_D} = \left\{ y\ :\ y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)), \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)) \right\},$$

equipped with the norm of the graph. Here, the derivative $\partial y/\partial t$ is the distribution in $\mathcal{D}'(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))$. Then the following properties holds true (see [4, 10]).

Theorem 1. *(1) The embedding* $\mathcal{W}_{\Gamma_D} \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *is compact.*

(2) One has the embedding $\mathcal{W}_{\Gamma_D} \hookrightarrow C([0,T];L^2(\Omega))$.

(3) For any $u, v \in \mathcal{W}_{\Gamma_D}$*, one has*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)v(t,x)\,dx = \langle u'(t,\cdot), v(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D),H^1_0(\Omega;\Gamma_D)} + \langle v'(t,\cdot), u(t,\cdot)\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D),H^1_0(\Omega;\Gamma_D)}\,.$$

Let $y \in L^2\left(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D)\right) \cap C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Then the following density result holds: there exists $\Phi \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D))$ such that

$$\|y-\Phi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \delta, \quad \|\nabla y - \nabla\Phi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \delta,\ \forall\,\delta>0.$$

Skew-Symmetric Matrices. Let $\mathbb{S}^3$ be the set of all skew-symmetric matrices $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^3$, i.e., A is a square matrix with $a_{ij} = -a_{ji}$ and, hence, $a_{ii} = 0$. Therefore, the set $\mathbb{S}^3$ can be identified with the Euclidean space $\mathbb{R}^3$.

Let $L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ be the space of measurable square-integrable functions whose values are skew-symmetric matrices and it is endowed with the norm

$$\|A\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)} = \left(\int_\Omega \|A(x)\|^2_{\mathbb{S}^3}\,dx\right)^{1/2}.$$

In what follows, we associate with matrix $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ the bilinear form $\varphi(\cdot,\cdot)_A : L^2(0,T;C_0^1(\Omega)) \times L^2(0,T;C_0^1(\Omega)) \to \mathbb{R}$ following the rule

$$\varphi(y,v)_A = \int_0^T\int_\Omega \big(\nabla v, A(x)\nabla y\big)_{\mathbb{R}^3}\,dxdt, \quad \forall\, y,v \in L^2(0,T;C_0^1(\Omega)).$$

It is easy to see that this form is unbounded on $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, since, in general, the 'integrand' $\big(\nabla v, A(x)\nabla y\big)_{\mathbb{R}^3}$ is not integrable on $(0,T)\times\Omega$. This motivates an introduction of the following set. We say that a distribution $y \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$ belongs to the set $D(A)$ if

$$\left|\int_0^T\int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^3}\,dx\,dt\right| \leq c(y,A)\left(\int_0^T\int_\Omega \|\nabla\varphi\|^2_{\mathbb{R}^3}\,dx\,dt\right)^{1/2}, \tag{1}$$

for all $\varphi \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D))$, with some constant c depending on y and A. As a result, having set

$$[y,\varphi] = \int\limits_0^T\int\limits_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y)_{\mathbb{R}^N}\,dx\,dt,\ \forall y \in D(A), \forall\varphi \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega)), \tag{2}$$

we observe that the bilinear form $[y,\varphi]$ can be defined for all $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$ using the standard rule

$$[y,\varphi] = \lim_{\to\infty}[y,\varphi_\varepsilon], \tag{3}$$

where $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D))$ and $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ converges strongly in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$. In this case the value $[y,\varphi]$ is finite for every $y \in D(A)$, although the 'integrand' $\big(\nabla\varphi, A(x)\nabla y\big)_{\mathbb{R}^3}$ need not be integrable on $(0,T)\times\Omega$, in general. This fact leads us to the conclusion

$$|[y,y]| < +\infty, \quad \forall\, y \in D(A). \tag{4}$$

At the same time, if we temporary assume that $A \in L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^3)$, then the bilinear form $[y,\varphi]$ is obviously bounded on $L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$, i.e. in this case $D(A) \equiv L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$. Indeed, in view of the Bunjakowski inequality, we get

$$\begin{aligned}|[y,v]| \leq & \|A\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^3)} \int_0^T \int_\Omega \|\nabla y\|_{\mathbb{R}^3} \|\nabla v\|_{\mathbb{R}^3}\, dxdt \\ \leq & \|A\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^3)} \|y\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))}\end{aligned}$$

Moreover, if $y = v$ then $[y,y] = -[y,y]$, and, therefore, $[y,y] = 0$ for all $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$. However, as it is shown in the next section, there exist skew-symmetric L^2-matrices A such that the equality $|[y,y]| = [y,y]$ does not hold true for some $y \in D(A)$.

We define the divergence $\operatorname{div} A$ of a skew-symmetric matrix $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ as a vector-valued distribution $d \in H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ by the following rule

$$\langle d_i, \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega);H_0^1(\Omega)} = -\int_\Omega (a_i, \nabla\varphi)_{\mathbb{R}^3}\, dx,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{5}$$

where a_i stands for the i-th row of the matrix A. We say that a matrix $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ belongs to the space $H(\Omega,\operatorname{div};\mathbb{S}^3)$ if $d := \operatorname{div} A \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$, that is,

$$H(\Omega,\operatorname{div};\mathbb{S}^3) = \left\{A\ \middle|\, A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big),\ \operatorname{div} A \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)\right\}.$$

3. Setting and Approximation of the Optimal Control Problem

We deal with the following optimal control problem (OCP) for a parabolic equation with unbounded coefficients

$$I(u,y) = \|y-y_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} + \|u-u_d\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))} \to \inf \tag{6}$$

subject to the constraints

$$y_t - \operatorname{div}\big(\nabla y + A(x)\nabla y\big) = f \quad \text{in } (0,T)\times\Omega, \tag{7}$$

$$y(0,\cdot) = y_0 \quad \text{in } \Omega, \tag{8}$$

$$y(\cdot,x) = 0 \quad \text{on } (0,T)\times\Gamma_D, \quad \frac{\partial y(\cdot,x)}{\partial\nu_A} = u \quad \text{on } (0,T)\times\Gamma_N, \tag{9}$$

$$u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)), \tag{10}$$

where Ω be the unit ball in $\mathbb{R}^3$ and its boundary $\Gamma = \{\|x\|_{\mathbb{R}^3} = 1\}$ is divided onto two disjoint parts $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ which have positive 2-dimensional measures. Here, u is a control, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ and $u_d \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$ and $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))$ are given distributions, and $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ is a skew-symmetric matrix.

The optimal control problem which we consider is to minimize the discrepancy (tracking error) between a given distribution $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ and a solution y of the Neumann-Dirichlet boundary value problem for parabolic equation (7)–(9) by choosing an appropriate boundary control $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$, where

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{3} \Big(\delta_{ij} + a_{ij}(x)\Big)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i),$$

δ_{ij} is the Kronecker's delta, $\cos(\nu, x_i)$ is the i-th directing cosine of ν, and ν is the outward unit normal vector at Γ_N to the ball Ω.

More precisely, we are concerned with OCP (6)–(10). The distinguishing feature of this problem is the special choice of matrix A and distribution f. This entails a number of pathologies with respect to the standard properties of optimal control problems for parabolic equation and leads to the non-uniqueness of weak solutions to the corresponding initial boundary value problem and a singular properties of an optimal pair. As a result, numerical approximation of the solution to OCP (6)–(10) is getting non-trivial.

Note that the function $y = y(u)$ is called an approximable solution to the initial-boundary value problem in (7)–(9) if it can be attained by weak solutions to the similar boundary value problems with L^∞-approximated matrix A. However, this type of solutions does not exhaust all weak solutions to the above problem. There is another type of weak solutions, which cannot be approximated by weak solutions of such regularized problems. Usually, such solutions are called non-variational [7, 12, 13], singular [14], [2], [8], pathological [9], [11] and others

To begin with, we introduce the following notion.

Definition 1. We say that (u, y) is an admissible pair to OCP (6)–(10) if $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$, $y \in \mathcal{W}$,

$$y(0,\cdot) = y_0 \in L^2(\Omega) \ \text{ almost everywhere in } \ \Omega, \tag{11}$$

and the integral identity

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega y_t \varphi \, dxdt &+ \int_0^T \int_\Omega \big(\nabla\varphi, \nabla y + A(x)\nabla y\big)_{\mathbb{R}^N} \, dxdt \\ &= \int_0^T \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H_0^1(\Omega;\Gamma_D)} \, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u\varphi \, d\mathcal{H}^2 dt \end{aligned} \tag{12}$$

holds true for each $\varphi \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D))$.

We denote by Ξ the set of all admissible pairs for the OCP (6)–(10).

It is worth to note that in view of definition of the space $\mathcal{W}$ and Theorem 1, the condition (11) has a sense. Moreover, as was shown in [3], if (u, y) is an admissible pair, then $y \in D(A)$.

Definition 2. We say that OCP (6)–(10) is regular if it admits at least one admissible pair, i.e. $\Xi \neq \emptyset$.

We also say that a pair $(u^0, y^0) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times D(A)$ is optimal for problem (6)–(10) if $(u^0, y^0) \in \Xi$ and $I(u^0, y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y)$.

As immediately follows from (12) and the definition of bilinear form $[y,\varphi]$ (see also the extension rule (3)), every admissible pair $(u,y) \in \Xi$ is related by the following energy equality

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(y^2\right)_t \,dxdt + \|y\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))} + [y,y]$$
$$= \int_0^T \langle f, y\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H^1_0(\Omega;\Gamma_D)}\,dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} uy\,d\mathcal{H}^2 dt. \tag{13}$$

The next question which we are going to discuss is about variational solutions to the problem (6)–(10). Since $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$, it follows that there exists a sequence of skew-symmetric matrices $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^3)$ such that $A_k \to A$ strongly in $L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)$. Hence, it is reasonably, from numerical point of view, to consider the following sequence of constrained minimization problems associated with matrices A_k.

$$\left\{ \left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_k} I_k(u,y) \right\rangle, \quad k\to\infty \right\}. \tag{14}$$

Here,

$$I_k(u,y) := I(u,y) \tag{15}$$

for every $(u,y) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_N)))$, $\forall k \in \mathbb{N}$ and $(u,y) \in \Xi_k$ if and only if

$$\left\{\begin{array}{c} y_t - \operatorname{div}\big(\nabla y + A_k \nabla y\big) = f \quad \text{in} \;\; (0,T)\times\Omega, \\ y(0,\cdot) = y_0 \quad \text{in} \;\; \Omega, \\ y(\cdot,x) = 0 \text{ on } (0,T)\times\Gamma_D,\; \dfrac{\partial y(\cdot,x)}{\partial \nu_{A_k}} = u \text{ on } (0,T)\times\Gamma_N, \\ u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)),\; y \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D)), \\ y_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)). \end{array}\right\} \tag{16}$$

Theorem 2. *Let $u_d \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, and $y_d \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega;\Gamma_D))$ be given distributions. Then for every $k \in \mathbb{N}$ there exists a unique minimizer $(u^0_k, y^0_k) \in \Xi_k$ to the corresponding constrained minimization problem* (14) *such that the sequence of optimal pairs $\big\{(u^0_k, y^0_k) \in \Xi_k\big\}_{k\in\mathbb{N}}$ is relatively compact with* *respect to the product of the weak topologies on* $L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$ *and each of its cluster pairs* (u^*,y^*) *possesses the properties:*

$$(u^*,y^*) \in \Xi, \quad [y^*,y^*] \geq 0. \tag{17}$$

Proof. To begin with, we show that the sequence of minimal values for the problems (14) is uniformly bounded, i.e.

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{(u,y)\in\Xi_k} I_k(u,y) \leq C \quad \text{for some } \ C>0. \tag{18}$$

Indeed, for every $k \in \mathbb{N}$ the bilinear form $[y,\varphi]_k := \int_0^T \int_\Omega \big(\nabla\varphi, A_k(x)\nabla y\big)_{\mathbb{R}^N}\, dxdt$ is obviously bounded on $L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$. Moreover, since

$$\int_0^T \int_\Omega \big(\nabla\varphi, A_k\nabla y\big)_{\mathbb{R}^N}\, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \big(\nabla y, A_k\nabla \varphi\big)_{\mathbb{R}^N}\, dxdt,$$

we have

$$\int_0^T \int_\Omega \big(\nabla v, A_k(x)\nabla v\big)_{\mathbb{R}^N}\, dxdt = 0 \quad \forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)) \tag{19}$$

and, hence, the initial-boundary value problem (16) has a unique solution (see [10] for the details)

$$y_k \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)), \quad (y_k)_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))$$

for every $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$.

As an obvious consequence of this observation and the properties of lower semicontinuity and strict convexity of the cost functional I_k, we have: the corresponding minimization problem (14) admits a unique solution [6]

$$I_k(u_k^0,y_k^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi_k} I_k(u,y), \quad (u_k^0,y_k^0) \in \Xi_k.$$

Moreover, having fixed a control $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$, condition (19) implies the fulfilment of the following identities for every $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega (y_k)_t\varphi\, dxdt &+ \int_0^T \int_\Omega \big(\nabla\varphi, \nabla y + A_k(x)\nabla y_k\big)_{\mathbb{R}^N}\, dxdt \\ &= \int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H_0^1(\Omega;\Gamma_D)}\, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u\varphi\, d\mathcal{H}^2 dt, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|y_k(\tau,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|y_k\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} &= \int_0^\tau \langle f,y_k\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H_0^1(\Omega;\Gamma_D)}\, dt \\ &+ \int_0^\tau \int_{\Gamma_N} uy_k\, d\mathcal{H}^2 dt + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, \tau \in [0,T], \end{aligned} \tag{21}$$

where $y_k = y_k(u) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ are the corresponding solutions to the initial-boundary value problems (16). Hence, following the standard technique [10], it is easy to show that the sequence $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is bounded in $\mathcal{W}_{\Gamma_D}$ for every fixed $u \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$ and due to the a priori estimates

$$\|y_k\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} + \left\|\frac{\partial y_k}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} \\ \le\; C(\Omega)\Big[\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} + \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\Big], \quad (22)$$

where the constant $C(\Omega)$ is independent of A_k, we arrive at the relation

$$I_k(u_k^0,y_k^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi_k} I_k(u,y) \le I_k(u,y_k) \le 2\|y_d\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} \\ + 2\|u_d\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))} + 4C^2(\Omega)\Big[\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\Big] \\ + \big(4C^2(\Omega)+1\big)\,\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))} \le C \quad \forall\, k\in\mathbb{N}. \quad (23)$$

Thus, (18) holds true and it implies that

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left[\|y_k^0\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))} + \left\|\frac{\partial y_k^0}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))} + \|u_k^0\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))}\right] < +\infty. \quad (24)$$

So, by the completeness of $\mathcal{W}_{\Gamma_D}$, we can assume that there exists a pair $(u^*,y^*) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times \mathcal{W}_{\Gamma_D}$ such that up to a subsequence

$$\begin{aligned} y_k^0 &\rightharpoonup y^* && \text{in } \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)),\\ \frac{\partial y_k^0}{\partial t} &\rightharpoonup \frac{\partial y^*}{\partial t} && \text{in } \ L^2(0,T;H^{-1}(\Omega;\Gamma_D)),\\ u_k^0 &\rightharpoonup u^* && \text{in } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)). \end{aligned}$$

Hence,

$$y_k^0 \longrightarrow y^* \quad \text{strongly in } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \quad (25)$$

by compactness of the embedding $H^{1/2}(\Gamma_N) \hookrightarrow L^2(\Gamma_N)$.

It remains to prove the properties (17). To do so, we note that due to the strong convergence $A_k \to A$ in $L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)$, we get

$$\left|\int_0^T\int_\Omega \big(\nabla\varphi, A\nabla y^* - A_k\nabla y_k^0\big)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt\right| \le \int_0^T\int_\Omega \|A_k - A\|_{\mathbb{S}^N}\|\nabla y_k^0\|_{\mathbb{R}^N}\|\nabla\varphi\|_{\mathbb{R}^N}\,dxdt \\ + \left|\int_0^T\int_\Omega \big(A\nabla\varphi, \nabla y^* - \nabla y_k^0\big)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt\right| \\ \le \|\varphi\|_{C([0,T];C^1(\overline{\Omega}))}\sup_{k\in\mathbb{N}}\|y_k^0\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))}\|A_k - A\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)} \\ + \left|\int_0^T\int_\Omega \big(A\nabla\varphi, \nabla y^* - \nabla y_k^0\big)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt\right| \longrightarrow 0 \quad \text{as } k\to\infty$$

for every $\varphi \in C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$.

Hence, $A_k \nabla y_k^0 \overset{*}{\rightharpoonup} A\nabla y^*$ in $L^1(0,T; L^1(\Omega;\mathbb{R}^3))$. It means that we can pass to the limit in integral identity (20) with $u = u_k^0$. As a result, we have: the pair (u^*, y^*) is related by the integral identity (13), therefore, y^* is a weak solution to the original boundary value problem (7)–(9) under $u = u^*$ in the sense of Definition 1. Thus, $(u^*, y^*) \in \Xi$. Moreover, following [3], we have $y^* \in D(A)$.

In order to prove the property $(17)_2$, we pass to the limit in the energy equality (21). Takin into account the lower semicontinuity of the norm $\|\cdot\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}$ with respect to the weak convergence $\nabla y_k^0 \rightharpoonup \nabla y^*$ in $L^2(0,T; L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))$, we obtain

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \left(y^2\right)_t\, dxdt + \|y\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D))}
&\le \langle f, y^*\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H_0^1(\Omega;\Gamma_D)} + \lim_{k\to\infty}\int_0^T \int_{\Gamma_N} u_k^0 y_k^0 \, d\mathcal{H}^2 dt \\
&\overset{\text{by (25)}}{=} \int_0^T \langle f, y^*\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H_0^1(\Omega;\Gamma_D)}\, dt + \int_0^T \int_{\Gamma_N} u^* y^* \, d\mathcal{H}^2 dt. \quad (26)
\end{aligned}
$$

Thus, the desired inequality $(17)_2$ obviously follows from (13) and (26). The proof is complete.

Remark 1. As immediately follows from the proof of this theorem, some admissible pairs $(u^*, y^*) \in \Xi$ can be attained by optimal solutions to the approximate OCPs (14). Hence, we can conclude that the original optimal control problem (6)–(10) is regular for every $u_d \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_N))$, $f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega;\Gamma_D))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, and $y_d \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega;\Gamma_D))$.

Remark 2. The next observation deals with the inequality $(17)_2$. As Theorem 2 proves, for any approximation $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ of the matrix $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ with properties $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{S}^3)$ and $A_k \to A$ strongly in $L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)$, the optimal solutions to the regularized OCPs (14)–(16) always leads us in the limit to some admissible solution (u^*, y^*) of the original OCP (6)–(10). Moreover, in general, this limit pair can depend on the choice of the approximative sequence $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. That's why it is reasonably to call such pairs attainable admissible solutions to OCP (6)–(10).

As we will see later on, the pair (u^*, y^*) is not optimal, in general, and the pair (u_d, y_d) is a unique optimal pair to OCP (6)–(10). Whereas we will shown that $[y_d, y_d] = -\alpha$, where α is a given strictly positive value, in the mean time $[y^*, y^*] \ge 0$ for any attainable pair (u^*, y^*). Thus, for given f, y_d, y_0, u_d the optimal pair (u^0, y^0) to OCP (6)–(10) cannot be attained through any L^∞-approximation of the matrix $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$.

4. Example of the Non-Variational Solution

Our aim in this section is to show that optimal control problem (6)–(10) has a unique non-variational solution. Namely, we will show that for a given positive scalar value $\alpha \in \mathbb{R}$ there exist a skew-symmetric matrix $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ and a function $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ such that

$$y_d \in D(A) \quad \text{and} \quad [y_d, y_d] = -\alpha < 0, \tag{27}$$

where the bilinear form $[y,v]$ is defined by (2).

We divide our analysis into several steps. At the first step we define a skew-symmetric matrix A as follows

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & a(x) & 0 \\ -a(x) & 0 & -b(x) \\ 0 & b(x) & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

where $a(x) = \dfrac{x_1}{2\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}}$ and $b(x) = \dfrac{x_3}{2\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}}$. Since

$$\|a\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{x_1}{2\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}}\right)^2 dx = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\psi}{4\rho^4}\rho^2\sin\psi\,d\psi\,d\varphi\,d\rho < +\infty,$$

it follows that $a \in L^2(\Omega)$. By analogy, it can be shown that $b \in L^2(\Omega)$. Moreover, it is easy to see that the skew-symmetric matrix A, define by (28), satisfies the property $A \in H(\Omega, \operatorname{div}; \mathbb{S}^3)$, i.e. $A \in L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)$ and $\operatorname{div} A \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Indeed, in view of the definition of the divergence $\operatorname{div} A$ of a skew-symmetric matrix, we have $\operatorname{div} A = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$, where $d_i = \operatorname{div} a_i = \dfrac{x_i x_2}{\|x\|^4_{\mathbb{R}^3}}$ and a_i is i-th column of A. As a result, we get

$$\|\operatorname{div} a_i\|_{L^1(\Omega)} = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\rho^2 f_i(\varphi,\psi)\sin\varphi\sin\psi}{\rho^4}\right|\rho^2\sin\psi\,d\psi\,d\varphi\,d\rho < +\infty,$$

for the corresponding $f_i = f_i(\varphi,\psi)$ $(i=1,2,3)$. Therefore, $\operatorname{div} A \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$.

Step 2 deals with the choice of the function $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. We define it by the rule

$$y_d(t,x) = t\sqrt{\frac{52\alpha}{\pi T^3(1-\exp(-2\pi))}}\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right) \times \frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\exp\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}-x_1}{x_2}\right), \tag{29}$$

for all $(t,x) \in (0,T)\times\Omega$. It is easy to see that

$$v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big) := \sqrt{\frac{52\alpha}{\pi T^3(1-\exp(-2\pi))}}\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\exp\left(-\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}-x_1}{x_2}\right) = \sqrt{\frac{52\alpha}{\pi T^3(1-\exp(-2\pi))}}\sin^2\varphi\exp(-\varphi/2), \quad \forall\,\varphi \in [0,2\pi]$$

with respect to the spherical coordinates. Hence, $v_0 \in C^1(\partial\Omega)$, and, as immediately follows from (29), it provides that

$$y_d \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{and} \quad y_d(t,\cdot)=0 \;\text{ on }\; \partial\Omega \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{30}$$

By direct computations, we get

$$\nabla v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)=\frac{1}{\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}}\begin{bmatrix} \frac{\partial v_0}{\partial z_1}\left(\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}-x_1^2\right)-\frac{\partial v_0}{\partial z_2}x_1x_2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial z_2}\left(\|x\|^2_{\mathbb{R}^3}-x_2^2\right)-\frac{\partial v_0}{\partial z_1}x_1x_2 \\ -\frac{\partial v_0}{\partial z_1}x_1x_3-\frac{\partial v_0}{\partial z_2}x_2x_3 \end{bmatrix},\ \forall\, x\neq 0. \tag{31}$$

Hence, there exists a constant $C^*>0$ such that

$$\left\|\nabla v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\right\|_{\mathbb{R}^3}\le\frac{C^*}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}.$$

Thus,

$$\begin{aligned}\|\nabla y_d\|_{\mathbb{R}^3}\le & t\left|v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\right|\left\|\nabla\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right)\right\|_{\mathbb{R}^3}\\ &+t\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right)\left\|\nabla v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\right\|_{\mathbb{R}^3}\le C_1+\frac{C_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}.\end{aligned}$$

As a result, we infer that $\nabla y_d\in L^2(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^3))$, i.e. we finally have $y_d\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$.

Step 3. We show that the function y_d, which was introduced before, belongs to the set $D(A)$. To do so, we have to prove the estimate

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\left(\nabla\varphi,A(x)\nabla y_d\right)_{\mathbb{R}^3}dxdt\right|\le\widetilde{C}\left(\int_0^T\int_\Omega|\nabla\varphi|^2_{\mathbb{R}^3}\,dxdt\right)^{1/2},$$

for all $\varphi\in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega))$.

To this end, we make use of the following transformations

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega\left(\nabla\varphi,\,A\nabla\psi\right)_{\mathbb{R}^3}dxdt&=-\int_0^T\left\langle\operatorname{div}\,(A\nabla\psi)\,,\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega);H^1_0(\Omega)}dt\\ &=\int_0^T\left\langle\operatorname{div}\begin{bmatrix}(a_1)^t\nabla\psi\\(a_2)^t\nabla\psi\\(a_3)^t\nabla\psi\end{bmatrix},\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega);H^1_0(\Omega)}dt\end{aligned}$$

$$=\int_0^T\sum_{i=1}^3\left\langle\operatorname{div}a_i,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\rangle_{H^{-1}(\Omega);H^1_0(\Omega)}dt+\int_0^T\underbrace{\int_\Omega\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\left(a_{ij}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}\right)\varphi\,dx\,dt}_{\substack{=0\\ \text{since}\quad A\in L^2(\Omega;\mathbb{S}^3)}}$$

(due to the fact that $\operatorname{div}A\in L^1(\Omega;\mathbb{R}^3)$)

$$=\int_0^T\int_\Omega\left(\operatorname{div}A,\nabla\psi\right)_{\mathbb{R}^3}\varphi\,dxdt,$$

which are obviously true for all $\psi, \varphi \in C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$. Since

$$\Big|\int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} A, \nabla\psi)_{\mathbb{R}^3}\, \varphi\, dxdt\Big| = \Big|\int_0^T \int_\Omega \big(\nabla\varphi,\ A\nabla\psi\big)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt\Big| \\ \le C\, \|A\|_{L^2(\Omega;\mathbb{S}^3_{skew})} \|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

it follows that, using the continuation principle, we can extend the previous equality with respect to ψ to the following one

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\ dxdt = \int_0^T \int_\Omega \varphi\, (\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\ dxdt, \tag{32}$$
$$\forall\, \varphi \in C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\Omega)).$$

Let us show that $(\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3} \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$. In this case, relation (32) implies the estimate

$$\Big|\int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi, A\nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\ dxdt\Big| \le \|(\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \int_0^T \int_\Omega |\varphi|\, dxdt \\ \le \widetilde{C} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla\varphi|^2_{\mathbb{R}^N}\, dxdt\right)^{1/2}, \forall\, \varphi \in C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\Omega)), \tag{33}$$

which means that the element y_d belongs to the set $D(A)$.

Indeed, as follows from (31), we have the equality

$$\left(\nabla v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big), \frac{x}{\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3} = 0. \tag{34}$$

Thus, the gradient of the function $\nabla v_0(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}})$ is orthogonal to the vector field $Q = x/\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}$ outside the origin. Therefore,

$$\begin{aligned}(\nabla y_d, \operatorname{div} A)_{\mathbb{R}^3} &:= t\left(\nabla\left[\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right) v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\right], \frac{x}{\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}}\,\frac{x_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3} \\ &= t\left(\nabla\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right), \frac{x}{\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3} v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\frac{x_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}} \\ &\quad + t\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right)\left(\nabla v_0\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big), \frac{x}{\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}}\right)_{\mathbb{R}^3} \frac{x_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}} = I_1 + I_2,\end{aligned}$$

where $I_2 = 0$ by (34). Since $\nabla\left(1-\|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right) = -5\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}x$, $\frac{x_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}} = \sin\varphi\sin\psi$ with respect to the spherical coordinates, and function v_0 is smooth, it follows that there exists a constant $C_0 > 0$ such that $|(\nabla y_d, \operatorname{div} A)_{\mathbb{R}^3}| \le C_0$ almost everywhere in $(0,T)\times\Omega$. Thus,

$$(\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3} \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$$

and we have obtained the required property.

Step 4. Using results of the previous steps, we show that the function y_d satisfies the condition $[y_d, y_d] = -\alpha < 0$. Indeed, let $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0} \subset C^\infty([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$ be a sequence such that

$$\varphi_\varepsilon \to y_d \ \text{ strongly in } \ L^2(0,T; H_0^1(\Omega)). \tag{35}$$

Then by continuity, we have

$$[y_d, y_d] = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_\Omega (\nabla\varphi_\varepsilon, A\nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt \overset{\text{by (32)}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_\Omega \varphi_\varepsilon\, (\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt.$$

Since $(\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3} \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$, in view of the property (35), we can pass to the limit in the right-hand side of this relation. As a result, we get

$$[y_d, y_d] = \int_0^T \int_\Omega y_d\, (\operatorname{div} A, \nabla y_d)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \big(\operatorname{div} A, \nabla y_d^2\big)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt. \tag{36}$$

Let $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varepsilon < \|x\|_{\mathbb{R}^3} < 1\}$ and let $\Gamma_\varepsilon = \{\|x\|_{\mathbb{R}^3} = \varepsilon\}$ be the sphere of radius ε centered at the origin. Then

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \big(\operatorname{div} A, \nabla y_d^2\big)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt &= \int_0^T \int_{\Gamma_\varepsilon} (\operatorname{div} A, \nu)_{\mathbb{R}^3}\, y_d^2\, d\mathcal{H}^2 dt \\
&= \int_0^T \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} (\operatorname{div} A, \nu)_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \|x\|^5_{\mathbb{R}^3}\right)^2 v_0^2\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\, d\mathcal{H}^2\right] t^2 dt \\
&= \frac{T^3}{3}\int_{\Gamma_\varepsilon} (\operatorname{div} A, \nu)_{\mathbb{R}^3}\, v_0^2\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\, d\mathcal{H}^2 + o(1) \\
&= \frac{T^3}{3}\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{x}{\|x\|^3_{\mathbb{R}^3}}, \Big(-\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\right)_{\mathbb{R}^3} \frac{x_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}} v_0^2\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\, d\mathcal{H}^2 + o(1) \\
&= -\frac{T^3}{3\varepsilon^2}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{x_2}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}} v_0^2\Big(\frac{x}{\|x\|_{\mathbb{R}^3}}\Big)\, d\mathcal{H}^2 + o(1) \\
&= -\frac{T^3}{3}\int_\Gamma b_0(x) v_0^2(x)\, d\mathcal{H}^2 + o(1),
\end{aligned} \tag{37}$$

where $b_0 = \sin\varphi\sin\psi$ and $v_0^2 = \frac{52\alpha}{\pi T^3(1-\exp(-2\pi))}\sin^4\varphi\exp(-\varphi)$. Since

$$\int_{\partial\Omega} b_0 v_0^2\, d\mathcal{H}^2 = \frac{52\alpha}{\pi T^3(1-\exp(-2\pi))}\left(\int_0^{2\pi} \sin^5\varphi\, e^{-\varphi}\, d\varphi \int_0^\pi \sin^2\psi\, d\psi\right) = 6\alpha T^{-3} > 0,$$

it remains to combine this result with (36), (37), and relation

$$\int_0^T \int_\Omega \big(\operatorname{div} A, \nabla y_d^2\big)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \big(\operatorname{div} A, \nabla y_d^2\big)_{\mathbb{R}^3}\, dxdt.$$

As a result, we finally infer $[y_d, y_d] = -\alpha < 0$.

However, as was shown before, the value $[y, y]$ is not of constant sign on $D(A)$. Hence, energy equality (13) does not allow us to derive any a priory estimate for the admissible solutions. In spite of this, the following result proves that OCP (6)–(10) is well-posed under the special choice of distributions $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u_d \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, and $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Theorem 3. *Let $A \in L^2\big(\Omega;\mathbb{S}^3\big)$ and $y_d \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ be defined by (28) and (29), respectively. Assume that $y_0 \equiv 0$ in Ω and distributions $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ and $u_d \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N))$ are given by the rule*

$$f := (y_d)_t - \operatorname{div}\,(\nabla y_d + A\nabla y_d) \ \text{ and } u_d := \gamma^1_{\Gamma_N}(y_d), \tag{38}$$

where $\gamma^1_{\Gamma_N} : L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)) \to L^2(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_N))$ is the trace operator such that

$$\gamma^1_{\Gamma_N}(y) = \frac{\partial y}{\partial \nu_A}\Big|_{\Gamma_N} := \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\delta_{ij} + a_{ij}(x)\Big)\frac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)$$

provided $y \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;\Gamma_D)) \cap L^2(0,T;C^1(\overline{\Omega}))$.

Then the pair $(u^0,y^0) := (u_d,y_d) \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)) \times D(A)$ is a unique solution to OCP (6)–(10).

Proof. As follows from (29), the function y_d is smooth near the boundary $\partial\Omega$ and $(y_d)_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Hence, $u_d := \gamma^1_{\Gamma_N}(y_d) \in L^2(\Gamma_N)$ and $y_d \in \mathcal{W}$ (see (30)). Moreover, the inclusion $y_d \in D(A)$ (see estimate (33)) implies:

$$\operatorname{div}\,(A\nabla y_d) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Therefore, in view of the inclusion $(y_d)_t \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, we have $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Since $y_d(0,\cdot) = 0$ in Ω and

$$\int_0^T \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1}(\Omega;\Gamma_D);H_0^1(\Omega;\Gamma_D)}\,dt = \int_0^T\int_\Omega (y_d)_t\varphi\,dxdt \\ + \int_0^T\int_\Omega \big(\nabla\varphi, \nabla y_d + A(x)\nabla y_d\big)_{\mathbb{R}^N}\,dxdt - \int_0^T\int_{\Gamma_N}\gamma^1_{\Gamma_N}(y_d)\varphi\,d\mathcal{H}^2 dt$$

for all $\varphi \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega;\Gamma_D))$, it follows that the pair (u_d,y_d) satisfies relations (11)–(12). Thus, (u_d,y_d) is an admissible solution to OCP (6)–(10) in the sense of Definition 1. To conclude the proof, it is enough to note that

$$I(u,y) \geq 0 \quad \forall\,(u,y) \in \Xi, \quad I(u_d,y_d) = 0,$$

and the cost functional $I : \Xi \to \mathbb{R}$ is strictly convex.

References

1. *R. Adams*, Sobolev spaces – Academic Press, New York, 1975.
2. *G. Buttazzo* Weak optimal controls in coefficients for linear elliptic problems/G. Buttazzo, P. I. Kogut // Revista Matematica Complutense, **24**, (2011), 83–94.

3. *S. O. Gorbonos* Variational solutions of an optimal control problem with unbounded coefficient/S. O. Gorbonos, P. I. Kogut // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk: DNU, **5**, (2013), N 8, 69–83 (in Ukrainian).
4. *V. I. Ivanenko* Variational Methods in Optimal Control Problems for Systems with Distributed Parameters/V. I. Ivanenko, V. S. Mel'nik – Naukova Dumka, Kyiv, 1988 (in Russian).
5. *M. A. Fannjiang* Diffusion in turbulence/M. A. Fannjiang, G. C. Papanicolaou // Probab. Theory and Related Fields, **105**, (1996), 279–334.
6. *A. V. Fursikov* Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications – AMS, Providence, RI, 2000.
7. *P. I. Kogut* On Approximation of an Optimal Boundary Control Problem for Linear Elliptic Equation with Unbounded Coefficients // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A, **34**, No.5, 2014, 2105–2133.
8. *P. I. Kogut* Optimal Control Problems for Partial Differential Equations on Reticulated Domains: Approximation and Asymptotic Analysis/P. I. Kogut, G. Leugering – Birkhäuser, Boston, 2011.
9. *T. Jin* Pathological solutions to elliptic problems in divergence form with continuous coefficients / T. Jin, V. Mazya, J. van Schaftinger // C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **347**, (2009), N 13–14, 773-778.
10. *S. Salsa*, Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory – Springer-Verlag, Milan, 2008.
11. *J. Serrin* Pathological solutions of elliptic differential equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **3**, (1964), N 18, 385–387.
12. *V. V. Zhikov* Diffusion in incompressible random flow // Functional Analysis and Its Applications, **31**, (1997), N 3, 156–166.
13. *V. V. Zhikov* Remarks on the ubiqueness of a solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with lower-order terms// Functional Analysis and Its Applications, **38**, (2004), N 3, 173-183.
14. *J. L. Vazquez* The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential / J. L. Vazquez, E. Zuazua // J. of Functional Analysis, **173**, (2000), 103–153.

Надійшла до редколегії 07.04.2014

ISSN 9125 0912. *Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 517.5

Ю. С. Загорулько[*], А. А. Кофанов[**]

[*] Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: yuliya.zagorulko@gmail.com*

[**] Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: vladimir.kofanov@gmail.com*

О продолжении дифференцируемых функций с отрезка их монотонности и неравенства типа Колмогорова

Дослiджена можливiсть продовження будь-якої функцiї $f \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ з довiльного її вiдрiзкiа монотонностi I на всю вiсь зi збереженням норм f i $f^{(r)}$ на вiдрiзку.

Ключовi слова: **Нерiвностi типу Колмогорова, теорема порiвняння Колмогорова.**

Исследована возможность продолжения произвольной функции $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ с любого отрезка I монотонности f на всю ось с сохранением норм f и $f^{(r)}$ на отрезке.

Ключевые слова: **Неравенства типа Колмогорова, теорема сравнения Колмогорова.**

It is studied the posibility of extension for every function $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ from any monotonicity interval I of function f to the whole axis with retaining norms f and $f^{(r)}$ on interval.

Key words: **Kolmogorov-type inequalities, the comparison theorem of Kolmogorov.**

Пусть $G \subset \mathbb{R}$ — некоторое измеримое подмножество числовой оси. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, обозначим пространство измеримых функций f, таких что $\|f\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|f\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad \text{если} \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_p(G)} := \operatorname{vrai}\sup_{t\in G} |f(t)|, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

В качестве G будем рассматривать отрезок $I = [a, b]$, действительную ось $\mathbb{R}$ или окружность T, реализованную в виде отрезка $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Если $f \in L_p(T)$, положим для краткости $\|f\|_p := \|f\|_{L_p(T)}$ и для $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ вместо $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$ также будем писать $\|f\|_\infty$.

Для $r \in \mathbb{N}$ через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство функций $f \in L_\infty(G)$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, причем $f^{(r)} \in L_\infty(G)$. Положим

$$W^r_\infty(\mathbb{R}) := \left\{f \in L^r_\infty(\mathbb{R}) : \|f^{(r)}\|_\infty \le 1\right\}.$$

Символом $\varphi_r(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) := \operatorname{sign}\sin t$, и для $\lambda > 0$ пусть $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$.

Для функции $f \in L_\infty[a,b]$ положим

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} := \inf_{c\in\mathbb{R}} \|f - c\|_{L_\infty[a,b]}.$$

Аналогичный смысл имеет обозначение $E_0(f)_{L_\infty(\mathbb{R})}$ для $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, а функция $f \in L^r_\infty(T)$ такова, что для любого отрезка $I = [a,b]$, удовлетворяющего условиям:*

$$f'(a) = f'(b) = 0, \;\; f'(t) \neq 0, \;\; t \in (a,b), \tag{1}$$

существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, такая что

$$f_I(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{2}$$

$$E_0(f_I)_{L_\infty} \leq E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \tag{3}$$

и

$$\|f_I^{(r)}\|_\infty \leq \|f^{(r)}\|_{L_\infty[a,b]}. \tag{4}$$

Тогда для любых q, $p \geq 1$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq r-1$, справедливо точное на классе $L^r_\infty(T)$ неравенство

$$\|f^{(k)}\|_q \leq \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p^\alpha}\|f\|_p^\alpha\|f^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \tag{5}$$

с максимально возможным показателем

$$\alpha = \min\left\{\frac{r-k}{r}, \frac{r-k+1/q}{r+1/p}\right\}.$$

Точные неравенства вида (5), называемые неравенствами типа Колмогорова, играют важную роль при решении многих экстремальных задач теории приближения [2]. В работе [1] также доказано, что при $r = 2$, $k = 1$ и $r = 3$, $k = 1$ или $k = 2$, неравенство (5) имеет место для любой функций $f \in L^r_\infty(T)$.

Авторами этой работы высказана гипотеза о справедливости неравенства (5) на классах $L^r_\infty(T)$ для любых $k, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq r-1$ и любых $q, p \geq 1$.

Поэтому представляет интерес следующий вопрос. Верно ли, что любых функций $f \in L^r_\infty(T)$ и отрезка $I = [a,b]$, для которых выполнены условия (1), существует функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющая требованиям (2)- (4)?

Положительный ответ на этот вопрос в силу теоремы **??** был бы одновременно положительным ответом на сформулированную выше гипотезу.

Однако в данной статье показано, что ответ на поставленный вопрос отрицательный. А именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для некоторого* $r \in \mathbb{N}$ *существуют функция* $f \in L^r_\infty(T)$ *и отрезок* $I = [a, b]$, *для которых выполнены условия* (1), *но для них в классе* $L^r_\infty(\mathbb{R})$ *нет функций* $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, *удовлетворяющей требованиям* $(2) - (4)$.

Доказательство этой теоремы опирается нас следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, *а функция* $f \in L^r_\infty(T)$ *и отрезок* $I = [a, b]$, *удовлетворяющие условию , таковы, что для них существует функция* $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$, *для которой выполнены требования* (2)-(4). *Тогда справедливо неравенство*

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty \|f^{(r)}\|_{L_\infty[a,b]}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как неравенство (6) однородно, можно считать что

$$\|f^{(r)}\|_{L_\infty[a,b]} = 1. \tag{7}$$

Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = \lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty. \tag{8}$$

Тогда согласно условиям (3) - (4) леммы

$$\|f_I^{(r)}\|_\infty = 1$$

и

$$E_0(f_I)_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Следовательно, $f_I \in W^r_\infty(\mathbb{R})$ и для нее выполнены условия теоремы сравнения Колмогорова [3]. Из этой теоремы вытекает неравенство

$$\frac{\pi}{\lambda} \le b - a,$$

которое с учетом (8) можно переписать в виде

$$\left(\frac{E_0(f)_{L_\infty[a,b]}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{1}{r}} \le \frac{b-a}{\pi}.$$

Отсюда имеем

$$E_0(f)_{L_\infty[a,b]} \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty.$$

Последнее неравенство в силу (7) равносильно неравенству (6).

Доказательство теоремы 2. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что каково бы не было $r \in \mathbb{N}$, для любых функции $f \in L^r_\infty(T)$ и отрезка $I = [a, b]$, удовлетворяющих условию (1), найдется функция $f_I \in L^r_\infty(\mathbb{R})$ для которой выполнены требования (2)- (4).

Возьмем в качестве функции f тригонометрический полином τ, для которого существует отрезок $I = [a, b]$, такой что

$$\tau^{'}(a) = \tau^{'}(b) = 0, \;\; \tau^{'}(t) \neq 0, \;\; t \in (a, b),$$

причем

$$b - a < \frac{\pi}{n},$$

где n — порядок полинома. Существование такого полинома очевидно. Ясно, что для любого $r \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\tau \in L^r_\infty(T)$, а для полинома τ и отрезка I выполнены условия леммы. Согласно леммы имеет место неравенство

$$E_0(\tau)_{L_\infty[a,b]} \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty \|\tau^{(r)}\|_\infty.$$

Оценивая в этом неравенстве норму $\|\tau^{(r)}\|_\infty$ при помощи неравенства Бернштейна

$$\|\tau^{(r)}\|_\infty \leq n^r \|\tau\|_\infty,$$

получим

$$E_0(\tau)_{L_\infty[a,b]} \leq \left(\frac{b-a}{\pi/n}\right)^r \|\varphi_r\|_\infty \|\tau\|_\infty.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $r \to \infty$. Учитывая, что $b - a < \frac{\pi}{n}$ и

$$\lim_{r\to\infty} \|\varphi_r\|_\infty = \frac{4}{\pi},$$

приходим к выводу, что

$$E_0(\tau)_{L_\infty[a,b]} = 0.$$

Из этого равенства в силу теоремы единственности для аналитических функций вытекает, что полином τ является константой, что противоречит неравенству $\tau^{'}(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$.

Библиографические ссылки

1. *В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов* Точные константы типа Колмогорова с ограниченной старшей производной в случае малых гладкостей// Укр.мат.журн.(2001). – 53, №10. – С.1298–1308.
2. *В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов* Неравенства для производных и их приложения/ В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов// Киев, Наукова думка, 2003.
3. *А. Н. Колмогоров* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале// Избр. тр. Математика, механика. - М.:Наука, 1985. - С.252–263.

Надійшла до редколегії 01.02.2014

УДК 512.562

Н. В. Калашнікова[*]
[*] Дніпропетровский національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail:natalja_ kn@ukr.net*

L-підгрупи на деяких скінченних групах

Розглянуті деякі властивості L-підгруп на скінченних групах. Описані множини L-підгруп на циклічних групах порядку p^n, де p – просте число, порядку pq, де p, q – різні прості числа, квазіциклічній групі типу p^∞, нециклічній групі порядку p^2, де p – просте число.

Ключові слова: **решітка, група, перетин, L-підгрупа, a-рівнева множина.**

Рассмотрены некоторые свойства L-подгрупп на конечных группах. Описаны множества L-подгрупп на циклических группах порядка p^n, где p – простое число, порядка pq, где p, q – разные простые числа, квазициклической группе типа p^∞, нециклической группе порядка p^2, где p – простое число.

Ключевые слова: **решетка, группа, пересечение, L-подгруппа, a-уровневое множество.**

Some properties of L-subgroups of finite groups are considered. Sets of L-subgroups of cyclic groups of an order p^n, where p is a prime number, of an order pq, where p, q are a prime numbers, of quasicyclic group of type of p^∞, of uncyclic group of an order p^2, where p is a prime number, are described.

Key words: **lattice, group, intersection, L-subgroup, a-level set.**

Нехай L – решітка. L-підмножиною на множині X називається функція із X в L.

Множина всіх L-підмножин X позначається L^X.

Нехай $\mu \in L^X$, $a \in L$. Множина

$$\mu_a = \{x | x \in X, \mu(x) \geq a\}$$

називається a-рівневою множиною μ. L-підмножина μ групи G називається L-підгрупою на групі G, якщо

(1) $\mu(xy) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y)$ для будь-яких $x, y \in G$,

(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ для будь-якого $x \in G$.

Множина всіх L-підгруп на групі G позначається $L(G)$.

Твердження 1. Нехай μ – L-підгрупа на групі G, e – одиничний елемент групи G. Тоді для будь-якого $x \in G$ є справедливими висловлювання:

(1) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

(2) $\mu(e) \geq \mu(x)$.

(3) $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ для будь-якого $n \in Z$.

Доведення. (1) $\mu(x) = \mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1})$, отже, $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

(2) $\mu(e) = \mu(x \cdot x^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x^{-1}) = \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x)$.

(3) Нехай $n \in N$. Доведемо твердження методом математичної індукції.

$$\mu(x^2) = \mu(x \cdot x) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Припустимо, що твердження доведено для $n = k$ і доведемо його для $n = k + 1$.

$$\mu(x^{k+1}) = \mu(x \cdot x^k) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x^k) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Якщо $n \in Z$ і $n \leq 0$, то висловлювання випливає із (1) і (2).

Твердження 2. Нехай $\mu \in L^G$. Тоді μ є L-підгрупою на групі G тоді й тільки тоді, коли

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y) \text{ для будь-яких } x, y \in G.$$

Доведення. Припустимо, що $\mu \in L(G)$, $x, y \in G$. Тоді

$$\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y^{-1}) = \mu(x) \bigwedge \mu(y).$$

Нехай тепер для будь-яких $x, y \in G$ є справедливим: $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y)$. Тоді $\mu(e) \geq \mu(x)$ для будь-якого $x \in G$. Дійсно,

$$\mu(e) = \mu(xx^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Далі,

$$\mu(x^{-1}) = \mu(ex^{-1}) \geq \mu(e) \bigwedge \mu(x) = \mu(x).$$

Отже,

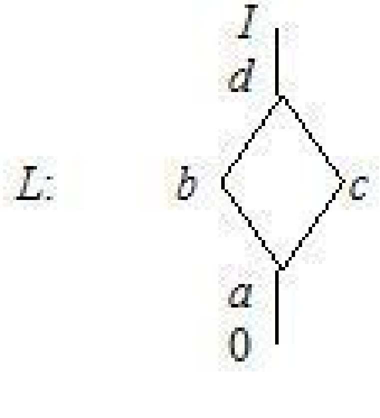
$$\mu(xy) = \mu(x(y^{-1})^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y).$$

Твердження 3. Нехай $\mu \in L^G$. Тоді μ є L-підгрупою на групі G тоді й тільки тоді, коли μ_a – підгрупа G для будь-якого $a \in \mu(G) \bigcup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$.

Доведення. Нехай $\mu \in L(G)$, $a \in \mu(G) \bigcup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$. Оскільки $e \in \mu_a$, то множина μ_a непуста. Припустимо, що $x, y \in \mu_a$. З того, що $\mu(x) \geq a$ і $\mu(y) \geq a$ виходить, що $\mu(xy^{-1}) \geq \mu(x) \bigwedge \mu(y) \geq a \bigwedge a = a$, тобто $(xy^{-1}) \in \mu_a$, а, значить, μ_a – підгрупа групи G.

Припустимо тепер, що μ_a є підгрупою G для будь-якого $\mu \in L(G)$, $a \in \mu(G) \bigcup \{b \in L | b \leq \mu(e)\}$. Тоді $\mu(x) \leq \mu(e)$ для будь-якого $x \in G$. Дійсно, нехай $\mu(x) = a$. Тоді $\mu_a \leq G$, а, значить, $e \in \mu_a$, тобто $\mu(e) \geq a = \mu(x)$. Нехай $x, y \in G$, $\mu(x) = a$ $\mu(y) = b$. Позначимо $c = a \bigwedge b$. Тоді $x, y \in \mu_c$. Оскільки $a \leq \mu(e)$ і $b \leq \mu(e)$, то $c \leq \mu(e)$. Звідси виходить, що $\mu_c \leq G$, тобто $xy^{-1} \in \mu_c$, а, значить, $\mu(xy^{-1}) \geq c = a \bigwedge b = \mu(x) \bigwedge \mu(y)$. Це означає, що μ є L-підгрупою на групі G.

Приклад 1. Нехай $G = S_3 = \{\varepsilon, (12), (13), (23), (123), (132)\}$, L – решітка і



Задамо μ за правилом:

$$\mu((23)) = \mu((123)) = \mu((132)) = a, \mu((12)) = b, \mu((13)) = c, \mu(\varepsilon) = d.$$

Покажемо, що μ – L-підгрупа на групі G.

$\mu_0 = \mu_a = G, \mu_b = \{\varepsilon, (12)\} =< (12) >\leq G, \mu_c = \{\varepsilon, (13)\} =< (13) >\leq G, \mu_d = \{\varepsilon\} \leq G$. Згідно з твердженням 3, $\mu \in L(G)$.

Приклад 2. Нехай G і L – відповідно група і решітка із прикладу 1.

Задамо тепер μ по іншому:

$$\mu((12)) = \mu((13)) = \mu((123)) = \mu((132)) = a, \mu((23)) = b, \mu(\varepsilon) = I.$$

Тоді μ також є L-підгрупою на групі G. Дійсно,

$$\mu_0 = \mu_a = G, \mu_b = \{\varepsilon, (23)\} =< (23) >\leq G, \mu_c = \mu_d = \mu_I = \{\varepsilon\} \leq G.$$

Твердження 4. Нехай G – група, x – елемент групи G порядку n, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $k \in N$, $(k, n) = 1$. Тоді $\mu(x^k) = \mu(x)$.

Доведення. З того, що μ є L–підгрупа виходить, що $\mu(x^k) \geq \mu(x)$. Оскільки $(k, n) = 1$, то існує натуральне число m таке, що $(x^k)^m = x$. Звідси

$$\mu(x) = \mu((x^k)^m) \geq \mu(x^k).$$

Отже, $\mu(x^k) = \mu(x)$.

Наслідок. Нехай p – просте число, G – група порядку p, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді $\mu(x) = \mu(y)$ для будь-яких $x, y \in G \setminus \{e\}$.

Нехай p – просте число, $|G| = p$ і L – ланцюг із n елементів. Покажемо, що $|L(G)| = \frac{n(n+1)}{2}$. Дійсно, із твердження 4 виходить, що коли $\mu \in L(G)$, то $\mu(G)$ є або одноелементною, або двоелементною підмножиною L. Звідси $|L(G)| = n + C_n^2 = n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Нехай p – просте число, $|G| = p$ і L – решітка із прикладу 1. Тоді $|L(G)| = 20$. Дійсно, для $\mu(G)$ є одна і тільки одна із можливостей:

1) $\mu(G) = \{\alpha\}$, де $\alpha \in L$; 2) $\mu(G) = \{0, a\}$; 3) $\mu(G) = \{0, b\}$; 4) $\mu(G) = \{0, c\}$; 5) $\mu(G) = \{0, d\}$; 6) $\mu(G) = \{0, I\}$; 7) $\mu(G) = \{a, b\}$; 8) $\mu(G) = \{a, c\}$; 9) $\mu(G) = \{a, d\}$; 10) $\mu(G) = \{a, I\}$; 11) $\mu(G) = \{b, d\}$; 12) $\mu(G) = \{b, I\}$; 13) $\mu(G) = \{c, d\}$; 14) $\mu(G) = \{c, I\}$; 15) $\mu(G) = \{d, I\}$.

Твердження 5. Нехай p – просте число, $G =< x >$ – циклічна група порядку p^2, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді $\mu(G) = \{a, b, c | a \leq b \leq c; a, b, c \in L\}$ і для

$0 \leq k \leq p^2 - 1$

$$\mu(x^k) = \begin{cases} a, & \text{якщо } (k, p) = 1, \\ b, & \text{якщо } k = lp,\ 1 \leq l \leq p - 1, \\ c, & \text{якщо } k = 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $0 \leq k \leq p^2 - 1$. Оскільки μ – L – підгрупа, то $\mu(x^k) \geq \mu(x)$. Із твердження 4 виходить, що коли $(k,\ p) = 1$, то $\mu(x^k) = \mu(x) = a$, де $a \in L$.

Нехай $k = lp$, $1 \leq l \leq p-1$. Оскільки $| < x^p > | = p$, то $\mu(x^k) = \mu(x^p) = b$, де $b \in L$ і $a \leq b$. Із твердження 1 виходить, що $b \leq c$.

Легко перевірити, що коли $a, b, c \in L$, $a \leq b \leq c$ і μ задана за правилом твердження 5, то μ є L-підгрупою на групі G.

Твердження 6. Нехай p – просте число, $n \in N$, G – циклічна група порядку p^n, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді

$$\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} | a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n+1}, a_i \in L, 1 \leq i \leq n+1\}$$

і для будь-якого $x \in G$

$$\mu(x) = \begin{cases} a_1, & \text{якщо } |x| = p^n, \\ a_2, & \text{якщо } |x| = p^{n-1}, \\ \ldots, & \\ a_{n+1}, & \text{якщо } |x| = 1. \end{cases}$$

Твердження можна довести методом математичної індукції, використовуючи твердження 4 і 5.

Нехай p – просте число, $G = C_{p^\infty}$ – квазіциклічна група типу p^∞. Тоді всі підгрупи G утворюють зростаючий ланцюг:

$$< e ><< x_1 ><< x_2 >< \ldots << x_n >< \ldots$$

де, $x_{i+1}^p = x_i$, $i \in N$. Використовуючи твердження 6, отримуємо наступний результат.

Твердження 7. Нехай p – просте число, $G = C_{p^\infty}$ – квазіциклічна група типу p^∞, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді

$$\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots | a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots, a_i \in L, i \in N\}.$$

Твердження 8. Нехай G – група, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $x, y, z \in G$, $x = yz$, $\mu(x) = a$, $\mu(y) = b$, $\mu(z) = c$. Тоді є справедливими такі висловлювання:

(1) $a \bigwedge b = b \bigwedge c = a \bigwedge c$.

(2) Якщо $a \leq b \leq c$, то $a = b$.

Доведення. (1) Оскільки $x = yz$, то $a \geq b \bigwedge c$. З іншого боку, $b \geq b \bigwedge c$, а, значить, $a \bigwedge b \geq b \bigwedge c$. З того, що $z = y^{-1}x$, виходить, що $c \geq a \bigwedge b$. Враховуючи те, що $b \geq a \bigwedge b$, маємо $b \bigwedge c \geq a \bigwedge b$, тобто $a \bigwedge b = b \bigwedge c$. Друга рівність доводиться аналогічно.

(2) Із (1) виходить, що $a = a \bigwedge b = b \bigwedge c = b$.

Твердження 9. Нехай G – група, $x, y, z \in G$, $x = yz$, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $\mu(x) = a$, $\mu(y) = b$, $\mu(z) = c$. Тоді, з точністю до перестановки елементів a, b, c, має місце один і тільки один із випадків:

1) $a = b \leq c$;

2) a і b не порівнянні і $c = a \bigwedge b$;

3) a, b, c попарно не порівнянні і $a \bigwedge b = b \bigwedge c = a \bigwedge c$.

Доведення. Для a і b, з точністю до їх перестановки, маємо дві можливості: $a \leq b$ або a і b не порівнянні.

Нехай $a \leq b$. Якщо $b \leq c$, то $a \leq b \leq c$ і із твердження 8 виходить, що $a = b$. Значить, в цьому випадку має місце 1). Якщо $c \leq b$, то $a = a \bigwedge b = b \bigwedge c = c$ і $a = c \leq b$, тобто знову маємо 1). Нехай b і c не порівнянні. Оскільки $a = a \bigwedge b = a \bigwedge c$, то $a \leq c$. Звідси виходить, що $a \leq b \bigwedge c$. З іншого боку, $a = \mu(x) = \mu(yz) \geq b \bigwedge c$, тобто $a = b \bigwedge c$ і ми маємо 2).

Припустимо, що a і b не порівнянні. Для a і c в цьому випадку маємо три можливості: $a \leq c$, $c \leq a$ або a і c не порівнянні. Нехай $a \leq c$. Тоді $a = a \bigwedge c = a \bigwedge b$, тобто $a \leq b$, що є суперечністю. Припустимо, що $a \geq c$. Тоді $c = a \bigwedge c = a \bigwedge b$, тобто маємо 2). Нехай a і c не порівнянні. Якщо $b \leq c$, то, оскільки $x = yz$, то $a \geq b \bigwedge c = b$, тобто $a \geq b$, що неможливо. У випадку $b \geq c$ також маємо суперечність. Значить, a, b, c попарно не порівнянні і має місце 3).

Твердження 10. Нехай p, q – різні прості числа, $G =< x >$ – циклічна група порядку pq, L – решітка, $\mu \in L(G)$, $\mu(x) = a$, $\mu(x^p) = b$, $\mu(x^q) = c$, $\mu(e) = d$. Тоді $\mu(G) = \{a, b, c, d\}$ і для елементів a, b, c є одна й тільки одна із можливостей:

1) $a = b \leq c$;

2) $a = c \leq b$;

3) b і c не порівнянні і $a = b \bigwedge c$.

Доведення. Оскільки $| < x^p > |$ і $| < x^q > |$ – прості числа q і p відповідно, то із твердження 4 і наслідка з нього маємо, що для будь-якого $y \in G$

$$\mu(y) = \begin{cases} a, & \text{якщо } |y| = pq, \\ b, & \text{якщо } |y| = q, \\ c, & \text{якщо } |y| = p. \end{cases}$$

Оскільки $(p, q) = 1$, то існують натуральні числа m і n такі, що $x = (x^p)^m (x^q)^n$, причому $(x^p)^m \neq e$, $(x^q)^n \neq e$, тобто $a = \mu(x) \geq \mu((x^p)^m) \bigwedge \mu((x^q)^n) = b \bigwedge c$. З іншого боку, $a \leq b$ і $a \leq c$, а, значить, $a \leq b \bigwedge c$, тобто $a = b \bigwedge c$.

Подальші висновки випливають із твердження 9.

Твердження 11. Нехай p – просте число, G – нециклічна група порядку p^2, L – решітка, $\mu \in L(G)$. Тоді для $\mu(G)$ є одна й тільки одна із можливостей:

1) $\mu(G) = \{a, b, c | a, b, c \in L, a \leq b \leq c\}$;

2) $\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}, b\}$, де $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}, b \in L$; $a_1, a_2, \ldots, a_{p+1}$ попарно не порівнянні; $a_i \bigwedge a_j = a_k \bigwedge a_l$ при $i \neq j$, $k \neq l$, $1 \leq i, j, k, l \leq p + 1$; $a_m \leq b$, $1 \leq m \leq p + 1$;

3) $\mu(G) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m, b\}$, де $m \leq p + 1$, $a_1, a_2, \ldots, a_m, b \in L$; $a_2, \ldots, a_m$ попарно не порівнянні; $a_1 = a_i \bigwedge a_j$ при $i \neq j$, $2 \leq i, j \leq m$.

Доведення. Якщо G – нециклічна група порядку p^2, то G має $(p+1)$ підгрупу порядку p і є прямим добутком двох будь-яких таких різних підгруп.

Нехай $H_1, H_2, \ldots, H_{p+1}$ – множина всіх підгруп групи G, $H_i =< x_i >$ і $\mu(x_i) = a_i$. Тоді із наслідка твердження 4 випливає, що $\mu(x) = a_i$ для будь-якого $x \in H_i$, $x \neq e$.

Використовуючи твердження 9, отримаємо подальші висновки.

Аналогічні результати мають місце також для нециклічної групи порядку pq, де p, q – різні прості числа.

Библиографические ссылки

1. *Биркгоф Г.* Теория решеток: Пер. с англ. / Биркгоф Г. –// М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы/ Биркгоф Г. , 1984.– 568 с.
2. *J.M.Anthony and H.Sherwood.* A characterization of fuzzy subgroups/ J.M.Anthony and H.Sherwood. // Fuzzy Sets and Systems 7 (1982).– P.297–305.
3. *J.M.Anthony and H.Sherwood.* Fuzzy groups redefined/ J.M.Anthony and H.Sherwood. // J.Math. Anal. Appl. 69 (1979).– P.124–130.

Надійшла до редколегії 6.04.2014

ISSN 9125 0912. Вiсник Днiпропетровського унiверситету. Серiя: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 517.5

В. П. Моторный
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49050. *E-mail: Motornyivp@yandex.ru*

О классах М.К. Потапова

Отримано оцiнки для iнтегральних модулiв неперервностi функцiй, що iнтегрованi з вагою на сегментi.

Ключовi слова: **модуль неперервностi, iнтеграл, вагова функцiя.**

Получены оценки для модулей непрерывности функцый, интегрируемых с весом на сегменте.

Ключевые слова: **модуль непрерывности, интеграл, весовая функция.**

Estimates for modulus of continuity functions, that are integrable on the segment, are obtained

Key words: **modulus of continuity, integral, weight function.**

1. Введение

Пусть функция f интегрируема на сегменте $[a,b]$. Интегральным модулем непрерывности функции f называется функция

$$\omega(f,[a,b],h)=\sup_{0<u\le h}\int_a^{b-h}|f(x+u)-f(x)|dx,\quad 0<h\le b-a.$$

Если $[a,b]=[-1,1]$, то $\omega(f,h)=\omega(f,[-1,1],h)$. Обозначим через H_1^ω класс функций для которых $\omega(f,h)\le\omega(h)$, где $\omega(h)-$ заданный модуль непрерывности.

Через $\Omega(f,h),\quad 0<h\le 1$ обозначим $\sup_{0<|u|\le h}\Delta(f,u)$, где

$$\Delta(f,u)=\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)}dx,$$

а $\omega(h)-$ заданный модуль непрерывности. Характеристика $\Delta(f,h)$ для $\omega(t)=t^\alpha, 0<\alpha<1$, введена в работах М.К. Потапова [1] - [2]. В частности, М.К.Потаповым были введены классы $A_1^\alpha-$ функций, для которых $\Omega(f,h)\le 1$, где $\omega(t)=t^\alpha$. Заметим, что $\Delta(f,h)$ существует, если существует интеграл $\int_{-1}^1\frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Действительно, в этом случае существует интеграл $\int_0^\pi|f(\cos u)|du$ и, в частности, существует интеграл $\int_0^\pi|f(\cos(u+v)|du,\quad\forall v$. Тогда, положив $h=\sin v$, функцию $\Delta(f,h)$ можно представить в виде

$$\Delta(f,h)=\int_0^\pi\frac{|f(\cos(u+v))-f(\cos u)|}{\omega(\sin u|h|+h^2)}\sin u du.$$

Далее будем рассматривать функции заданные на сегменте $[-1, 1]$ и интегрируемые с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Обозначим через

$$\omega^*(f;h) = \max\{\sup_{0<u\le h}\int_{-1}^{1-h}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx, \sup_{0<u\le h}\int_{-1+h}^{1}\frac{|f(x-u)-f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\}.$$

Через $\Omega^*(f,h)$ обозначим

$$\sup_{0<|u|\le h}\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)\sqrt{1-x^2}}dx, \quad 0<|h|\le 1,$$

где $\omega(t)-$ некоторый модуль непрерывности. Класс функций, для которых $\omega^*(f;h)\le\omega(h)$ обозначим через $\widetilde{H}_1^\omega$, а класс функций, для которых $\Omega^*(f,h)\le 1$ обозначим через $\widetilde{A}_1^\omega$. При $\omega(t)=t^\alpha, \quad 0<\alpha<1$, эти классы введены в [1].

В [3] доказано, что если $f\in H_1^\omega$, то $\Omega(f,h)\le C\ln\frac{1}{h}$.

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем буквой C обозначаются абсолютные константы. При этом в разных формулах они могут иметь разные значения.

В настоящей работе установлено, что, если $f\in\widetilde{H}_1^\omega$, то $\Omega^*(f,h)\le C\ln\frac{1}{|h|}$.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

Сначала рассмотрим некоторые вспомогательные понятия. Пусть $n=2^{k_0}$, где k_0- натуральное число,$a_0=0, a_k=1-2^{-2k}, k=1,2,\dots,k_0-1, a_{k_0}=1, a_{-k}=-a_k$. Каждий сегмент $[a_k,a_{k+1}], k=0,1,\dots,k_0-2$, соответственно $[a_{-(k+1)},a_{-k}]$,, разделим на равные сегменты длини $1/n2^k$.. Точки деления, вместе с точками a_k обозначим через $x_i, i=0,1,\dots,N, x_0=-1, x_N=1$. Положим $L_i=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)dt, \Delta x_i=x_i-x_{i-1}, i=1,2,\dots,N$ и пусть $\tilde{F}_n(f;x)=L_i$, если $x\in[x_{i-1};x_i), i=1,2,\dots,N$.

Лема 1 [[4], теорема 1]. *Пусть сегмент $[a,b]$ разбит точками y_j на равные сегменты длиною δ и $F_m(f,x)=L_j, x\in[y_{j-1},y_j), j=1,2,\dots,m, y_0=a, y_m=b$. Тогда*

$$\int_a^b|f(x)-F_m(x)|dx\le C\omega(f,[a,b],\delta).$$

Лема 2 [[4], теорема 2]. *Имеет место неравенство*

$$\sum_{i:x_i\in(a_k,a_{k+1})}|L_{i+1}-L_i|\le n2^k\omega(f,[a_k,a_{k+1}],1/n2^k).$$

Лема 3[[5], леммы $3^+, 3^-$]. *Для любой функции* $f \in \widetilde{H}_1^\omega$ *имеет место неравенства*

$$\int_{1-h}^{1}\left|\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1} f(x)dx - f(y)\right|\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \le C\omega^*(f;h),$$

$$\int_{-1}^{-1+h}\left|\frac{1}{h}\int_{-1}^{-1+h} f(x)dx - f(y)\right|\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \le C\omega^*(f;h).$$

Лемма 4. *Пусть* $f \in \widetilde{H}_1^\omega$, $h = 1/n2^k$, $k+1 < k_0$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_k,a_{k+1}],h) \le 4\omega^*(f;h) \le 4\omega(h),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_{-k-1},a_{-k}],h) \le 4\omega^*(f;h) \le 4\omega(h).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство, второе доказывается аналогично. Для любого $u \in (0;h]$, используя монотонность функции $\sqrt{1-x^2}$,получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}-u}|f(x+u)-f(x)|dx \le$$

$$\le \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}-u}\frac{|f(x+u)-f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \le 4\omega^*(f;h) \le 4\omega(h).$$

А тогда

$$\sup_{0<u\le h}\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}-u}|f(x+u)-f(x)|dx \le 4\omega^*(f;h) \le 4\omega(h).$$

Лемма 5. *Пусть* $f \in \widetilde{H}^\omega$, $h = 1/n2^k$, $k+1 < k_0$. *Тогда имеют место неравенства*

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \frac{C}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_k,a_{k+1}],h) \le 4C\omega^*(f;h) \le 4C\omega(h),$$

$$\int_{a_{-k-1}}^{a_{-k}}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \frac{C}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_{-k-1},a_{-k}],h) \le 4C\omega^*(f;h) \le 4C\omega(h).$$

Доказательство. В этом случае тоже достаточно доказать первое неравенство. Сначала используем монотонность и ограниченность функции $\sqrt{1-x^2}$ на сегменте $[0;a_{k+1}]$, а затем, благодаря тому, что сегмент $[a_k,a_{k+1}]$ разбит на полуинтервалы равной длины $h=1/n2^k$, применим лемму 1 и, наконец, используем лемму 4:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\le\frac{1}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|dx\le$$

$$\le\frac{C}{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}\omega(f;[a_k,a_{k+1}],h)\le 4C\omega^*(f;h)\le 4C\omega(h).$$

Лемма 6. *Для любой функции $f\in\widetilde{H}_1^{\omega}$ имеют место неравенства*

$$\int_{a_{k_0-1}}^{1}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\le C\omega^*(f;1/n^2)\le C\omega(1/n^2),$$

$$\int_{-1}^{a_{-k_0+1}}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx\le C\omega^*(f;1/n^2)\le C\omega(1/n^2),$$

Доказательство. И в этом случае рассмотрим первое из неравенств. По определению $a_{k_0-1}=1-4/n^2$, $\widetilde{F}_n(f;x)=n^2/4\int_{1-4/n^2}^{1}f(u)du$, Поэтому, применяя лемму 3, получим

$$\int_{a_{k_0-1}}^{1}\frac{|f(x-\widetilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{a_{k_0-1}}^{1}\frac{\left|f(x)-n^2/4\int_{a_{k_0-1}}^{1}f(u)du\right|dx}{\sqrt{1-x^2}}\le C\omega(f;1/n^2).$$

Лемма 7. [[3], лемма 6] *Пусть $f\in\widetilde{H}^{\omega}$, $h_k=1/n2^k$, $k+1<k_0$. Тогда имеет место неравенство*

$$I=|n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}f(t)dt-n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}}f(t)dt|\le$$
$$\le n2^{k+1}\omega(f,[-a_{k+1}-h_{k+1};-a_{k+1}+h_{k+1}];h_k).$$

Лема 8. [[3], лемма 7] *Пусть $f\in\widetilde{H}^{\omega}$, $h_k=1/n2^k$, $k+1<k_0$. Тогда имеет место неравенство*

$$I=|n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}f(t)dt-n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}f(t)dt|\le$$

$$\le n2^{k+1}\omega(f,[-a_{k+1}-h_k;-a_{k+1}+h_{k+1}];h_k).$$

Лемма 9. *Пусть* $x \in (-a_{k+1}; -a_k) \cup (a_k; a_{k+1})$, $k \le k_0 - 2$, $h_k = 1/n2^k$, *и* $y = x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}$, *где* $0 < h = \sin v \le 1/2n$. *Тогда*

$$0 < x - y < h_k.$$

Доказательство. Пусть, сначала $x = \cos u \in (-a_{k+1}; -a_k)$, где $u \in [\pi/2; \pi]$ и $\sin v = h$, где $v \in [0; \pi/2]$. Тогда $x - y = \cos u - \cos(u+v) = 2\sin(u + v/2)\sin v/2$ и первое из неравенств будет иметь место, если $u + v/2 < \pi$ или $\sin u > \sin v/2$. Наименьшее значение $\sin u$ получим для $u = -\arccos(1 - 4/n^2)$. Нетрудно видеть, что $\sin^2 u \ge 1 - a_{k_0-1}^2 = 1 - (1-4/n^2)^2 > \sin^2 v/2 = \frac{1-\sqrt{1-1/4n^2}}{2}$ для всех $n \ge 2$. Если $x \in (-a_{k+1}; -a_k)$, то $x - y = x(1 - \sqrt{1-h^2}) + h\sqrt{1-x^2} < h\sqrt{1-x^2} < h_k$.

Пусть теперь $x \in (a_k; a_{k+1})$, где $u \in [0; \pi/2]$. Тогда

$$x - y = \cos u - \cos(u+v) =$$

$$= 2\sin(u+v/2)\sin v/2 = \sin u \sin v + \cos u(1 - \cos v). \tag{1}$$

Из равенства (1) получаем оценку снизу разности $x - y$. Чтобы получить оценку сверху преобразуем правую часть равенства (1).

$$\sin u \sin v + \cos u(1-\cos v) \le \frac{1}{2n}\sqrt{1-a_k^2} + (1 - \sqrt{1 - 1/4n^2}) \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{n2^{k+1}} + \frac{1}{4n^2} < h_k.$$

Лемма 10. *Пусть* $f \in \widetilde{H}^\omega$, $h = 1/n2^k$, $k + 1 < k_0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$I = |n2^k \int_{a_k}^{a_k+h_k} f(t)dt - n2^{k-1} \int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k} f(t)dt| \le$$

$$\le n2^k \int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k} |f(t+h_k) - f(t)|dt.$$

Доказательство. Производя простейшие преобразования, получим:

$$I = n2^k| \int_{a_k}^{a_k+h_k} f(t)dt - 2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k} f(t)dt - 2^{-1}\int_{a_k-h_k}^{h_k} f(t)dt| =$$

$$= n2^k|2^{-1}\int_{a_k-a_k}^{h_k}[f(t+h_k - f(t)]dt + 2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k}[f(t+h_{k-1}) - f(t)]dt| =$$

$$= n2^k|2^{-1}\int_{a_k-h_k}^{a_k}[f(t+h_k - f(t)]dt +$$

$$+2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k}[f(t+h_{k-1})-f(t+h_k)+f(t+h_k)-f(t)]dt|=$$

$$=n2^k|\int_{a_k-h_k}^{a_k}[f(t+h_k-f(t)]dt+2^{-1}\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k-h_k}[f(t+h_k)-f(t)]dt|\le$$

$$\le n2^k\int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k}|f(t+h_k)-f(t)|dt.$$

3. Доказательство основных теорем

Теорема 1. *Для любой функции $f\in\widetilde{H}_1^\omega$ имеет место неравенство*

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx\le C\ lnn. \tag{2}$$

Доказательство. Представив интеграл суммою и пользуясь монотонностью модуля непрерывности, получим

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\sum_{k=0}^{k_0-2}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx+$$

$$+\left(\int_{a_{k_0-1}}^{1}+\int_{-1}^{a_{-k_0+1}}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{k_0-2}\frac{1}{\omega(1/n2^{k+1})}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|dx}{\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{\omega(1/n^2)}\left(\int_{a_{k_0-1}}^{1}+\int_{-1}^{a_{-k_0+1}}\right)\frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Применяя лемму 5 для оценки слагаемых для индекса $k=0,1,\ldots,k_0-2$ и лемму 6 для оценки слагаемого с индексом k_0-1 получим неравенство 2.

Теорема 2. *Для любой функции $f\in\widetilde{H}_1^\omega$ имеют место неравенство*

$$\int_{-1}^{1}\frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx\le C\ln n, \tag{10}$$

где $1/4n\le h=\sin v\in(0;1/n]$.

Доказательство. Сделав замену переменной $x = \cos u$, интеграл (1) преобразуем следующим образом

$$C\ lnn \geq \int_0^\pi \frac{|f(\cos u) - \tilde{F}_n(f;\cos u)|}{\omega(\sin u/n + 1/n^2)} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos u) - \tilde{F}_n(f;\cos u)|}{\omega(|\sin u|/n + 1/n^2)} du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(|\sin(u+v)|/n + 1/n^2)} du \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(|\sin(u+v)|/n + 1/n^2)} du. \tag{3}$$

Если $u \in (\pi/2 - v/2, \pi - 2v)$, то $\sin(u+v) < \sin u$ и поэтому

$$\frac{1}{\omega(f, \sin u/n + 1/n^2)} \leq \frac{1}{\omega(f, \sin(u+v)/n + 1/n^2)}. \tag{4}$$

Так как $\sin v \leq 1/n$, то $\sin(u+v) + 1/n < 2(\sin u + 1/n)$, если $u \in (0, \pi/2 - v/2)$, и $|\sin(u+v)| + 1/n < 2(\sin u + 1/n)$, если $u \in [\pi - 2v, \pi]$. Следовательно,

$$\frac{1}{\omega(f, \sin u/n + 1/n^2)} \leq \frac{2}{\omega(f, \sin(u+v)/n + 1/n^2)}. \tag{5}$$

Из неравенств (3 - 5) следует

$$4C\ln n \geq 2\int_0^\pi \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(|\sin(u+v)|/n + 1/n^2)} du \geq$$

$$\geq \int_0^\pi \frac{|f(\cos(u+v)) - \tilde{F}_n(f;\cos(u+v))|}{\omega(\sin u/n + 1/n^2)}. \tag{6}$$

Замена $x = \cos u$ переменной интегрирования и параметра $h = \sin v$ в интеграле (6) приводит к интегралу (2).

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in \widetilde{H}_1^\omega$ *имеют место неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \leq C\ln n, \tag{7}$$

где $1/4n \leq h = \sin v \leq 1/2n$.

Доказательство. Обозначим разность $x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}$ через y и представим интеграл (7) суммою интегралов:

$$\left(\sum_{j=1}^{k_0}\int_{-a_j}^{-a_{j-1}} + \sum_{j=0}^{k_0-1}\int_{a_j}^{a_{j+1}}\right) \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx,$$

Оценим каждый из них. В силу леммы 9 y принадлежит $[-1, x_1]$, если $x \in [-1, x_1]$. А так как на каждом интервале $(x_i; x_{i+1})$ функция $\tilde{F}_n(f; x)$ равна константе, то разность $\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y) = 0$ и, следовательно, интеграл по сегменту $[-1; x_1]$ равен нулю. Интеграл по сегменту $[-a_{k_0-1}; -a_{k_0-2}]$ не превосходит

$$\frac{1}{\omega(f, 1/n^2)\sqrt{1 - a_{k_0-1}^2}} \int_{-a_{k_0-1}}^{-a_{k_0-2}} |\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y)| dx. \tag{8}$$

По определению $-a_{k_0} = x_0 = -1, -a_{k_0-1} = x_1 = -1 + 4/n^2, -a_{k_0-2} = -1 + 16/n^2 = x_4$. Точки x_2, x_3 делят отрезок $[-a_{k_0-1}; -a_{k_0-2}]$ на три отрезка, равных по длине, совпадающей с длиною отрезка $[x_0; x_1]$. Тогда по лемме 9, если $x \in (x_i; x_{i+1}), i = 1, 2, 3$, то y находится либо на этом же интервале, либо на интервале $(x_{i-1}; x_i)$. Поэтому для $i = 1, 2, 3: \ \tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y) = 0$, если $x, y \in (x_i; x_{i+1})$ и $\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y) = L_{i+1} - L_i$, если $x, \in (x_i; x_{i+1}), y \in (x_{i-1}; x_i)$. Следовательно, интеграл может только увеличиться, если будем полагать, что подинтегральная функция на интервале $(x_i; x_{i+1})$ равняется $|L_{i+1} - L_i|$. Из последнего замечания и благодаря лемме 2 интеграл (8) не превосходит

$$\frac{1}{\omega(f, 1/n^2)\sqrt{1 - a_{k_0-1}^2}} \int_{-a_{k_0-1}}^{-a_{k_0-2}} |\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y)| dx \leq$$

$$\leq \frac{h_{k_0-2}}{\omega(f, 1/n^2)\sqrt{1 - a_{k_0-1}^2}} \sum_{i=1}^{3} |L_{i+1} - L_i| \leq$$

$$\leq \frac{\omega(f : [-a_{k_0-1}; -a_{k_0-2}], h_{k_0-2})}{\omega(f, 1/n^2)\sqrt{1 - a_{k_0-1}^2}} \tag{9}$$

Вследствии леммы 4 правая часть неравенства (9) не превосходит константы. Пусть $h_k = 1/n2^k, 0 < h < 1/2n$ и $A_k = \{i : x_i \in [-a_{k+1} + h_k, -a_k)\}$. Тогда

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \frac{|\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1 - h^2} - h\sqrt{1 - x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1 - x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1 - x^2}} dx \leq$$

$$\frac{\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} |\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1 - h^2} - h\sqrt{1 - x^2})| dx}{\omega(f, \sqrt{1 - a_{k+1}^2}/n)\sqrt{1 - a_{k+1}^2}} =$$

$$= \frac{W}{\omega(f, \sqrt{1 - a_{k+1}^2}/n)\sqrt{1 - a_{k+1}^2}}. \tag{10}$$

Інтеграл W представим в виде

$$W = \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y)| dx + \sum_{i \in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f; x) - \tilde{F}_n(f; y)| dx.$$

Так как $0 < x - y < h\sqrt{1-x^2} < h_k$, то, в силу леммы 9, если $x \in (x_i; x_{i+1}), \in A_k$ то y находится либо на этом же интервале, либо на интервале $(x_{i-1}; x_i)$, и интеграл $\int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$ только увеличится, если будем считать, что подинтегральная функция равна $|L_{i+1} - L_i|$. Тогда, благодаря леммы 2

$$\sum_{i\in A_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \le$$

$$\le h_k \sum_{i\in A_k} |l_{i+1} - L_i| \le \omega(f; [-a_{k+1} + h_k; -a_k]; h_k). \tag{11}$$

Чтобы оценить интеграл $\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$ заметим, что,если $x \in (-a_{k+1}, -a_{k+1} + h_k)$, то $y \in (-a_{k+1} - h_{k+1}, -a_{k+1})$, либо y принадлежит интервалу $(-a_{k+1} - h_k, -a_{k+1} - h_{k+1})$. В первом случае

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt|$$

и, в силу леммы 7,

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \le n2^{k+1}\omega(f, [-a_{k+1} - h_{k+1}; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_{k+1}). \tag{12}$$

Во втором

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| = |n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt|$$

и, в силу леммы 8,

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \le n2^{k+1}\omega(f, [-a_{k+1} - h_k; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_{k+1}). \tag{13}$$

Таким образом, в любом случае,

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \le 4\omega(f, [-a_{k+1} - h_k; -a_{k+1} + h_{k+1}]; h_{k+1}). \tag{14}$$

Из неравенств (10 – 14) следует оценка

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le C, \tag{15}$$

где $C-$ некоторая константа.

Оценим интеграл по сегменту $[a_k, a_{k+1}]$, $1 \le k \le k_0 - 2$. Пусть $B_k = \{i : x_i \in (a_k; a_{k+1})\}$. Тогда

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le$$

$$\le \frac{W}{\omega(f, \sqrt{1-a_{k+1}^2}/n)\sqrt{1-a_{k+1}^2}}, \tag{16}$$

где

$$W = \int_{a_k}^{a_k+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx + \sum_{i\in B_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx.$$

Если $1/4n \le h = \sin v \le 1/2n, x \in (a_k, a_{k+1})$, то, в силу леммы 9, $0 < x - y = x(1 - \sqrt{1-h^2}) + h\sqrt{1-x^2} < h_k$. Из последнего неравенства следует, что, если $x \in (x_i, x_{i+1})$, то $y \in (x_i, x_{i+1})$, или $y \in (x_{i-1}, x_i)$.

Поэтому

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx = |n2^k \int_{a_k}^{a_k+h_k} f(t)dt - n2^{k-1} \int_{a_k-h_{k-1}}^{a_k} f(t)dt|$$

и, в силу лемм 10, 2 и 4

$$|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| \le n2^k \omega(f, [a_k - h_{k-1}; a_k]; h_k). \tag{17}$$

Следовательно

$$\int_{a_k}^{a_k+h_k} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx \le n2^k \omega(f, [a_k - h_{k-1}; a_k]; h_k). \tag{18}$$

Сумма интегралов

$$\sum_{i\in B_k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|dx$$

оценивается аналогично. Таким образом, из неравенств (16 - 18) для $k = 1, 2, \dots k_0 - 2$, получаем

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le C. \tag{19}$$

Осталось оценить интеграл по сегменту $[a_{k_0-1}; 1]$:

$$\int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}} dx \le$$

$$\le \frac{1}{\omega(1/n^2)} \int_{a_{k_0-1}}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Для $v \in (0; \pi/2)$ такого, что $\sin v \leq 1/2n$ определим $u = u_v$ так, что $\cos(u+v) = a_{k_0-1}$. Очевидно, что такое u существует и единственно. Пусть $x_v = \cos u_v$, $x = \cos u$, $h = \sin v$. Если $x > x_v$, то $u < u_v$ и, следовательно,

$$x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2} = \cos(u+v) > a_{k_0-1}$$

и в этом случае $\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y) = 0$, а тогда

$$\int_{x_v}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$$

Оценим снизу значение u_v, когда v меняется от 0 до $\arcsin(1/2n)$. Так как

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v \geq 1 - 1/2n^2 > 1 - 4/n^2 = a_{k_0-1},$$

то $u_v > v$, а тогда $\cos u_v < \cos v$ и $\sqrt{1-\cos^2 u_v} > \sqrt{1-\cos^2 v} \geq 1/4n$. Из последнего неравенства и леммы 9 получаем

$$\int_{a_{k_0-1}}^{x_v} \frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)|}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= \frac{1}{1-x_v^2} \int_{a_{k_0-1}}^{x_v} |\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;y)| dx \leq$$
$$\leq 4n(x_v - a_{k_0-1}) h_{k_0-2}^{-1} \Big| \int_{a_{k_0-1}}^{1} f(u)du - \int_{a_{k_0-1}-h_{k_0-2}}^{a_{k_0-1}} f(u)du \Big|. \tag{20}$$

Так как $x_v - a_{k_0-1} - a_{k_0-1} < 1 - a_{k_0-1} = h_{k_0-2} = 4/n^2$, то правая часть неравенства (20) не превосходит

$$4n \int_{a_{k_0-1}-h_{k_0-2}}^{a_{k_0-1}} |f(u+h_{k_0-2}) - f(u)| du \leq$$
$$\leq 16 \int_{a_{k_0-1}-h_{k_0-2}}^{a_{k_0-1}} \frac{|f(u+h_{k_0-2}) - f(u)| du}{\sqrt{1-x^2}} \leq C\omega(1/n^2). \tag{21}$$

Следовательно, интеграл от функции $\frac{|\tilde{F}_n(f;x) - \tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(f, \sqrt{1-x^2}/n + 1/n^2)\sqrt{1-x^2}}$ по сегменту $[a_{k_0-1}; 1]$ ограничен. Так как число интервалов (a_k, a_{k+1}) и $(-a_{k+1}; -a_k)$ равно $2k_0 = \log_2 n$, то утверждение теоремы 3 следует из неравенств (9, 15, 19).

Теорема 4. *Для любой функции $f \in \widetilde{H}_1^\omega$ имеют место неравенство*

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}h + h^2)\sqrt{1-x^2}} dx \leq C \ln n,$$

где $1/4n < |h| = \sin v \leq 1/2n$.

Доказательство. В случае $h > 0$ теорема 4 следует из теорем 1 - 3.

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}h+h^2)\sqrt{1-x^2}}dx \le$$
$$\le \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)-\tilde{F}_n(f;x)|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx+$$
$$+\int_{-1}^{1} \frac{|\tilde{F}_n(f;x)-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx+$$
$$+\int_{-1}^{1} \frac{|f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-\tilde{F}_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})|}{\omega(\sqrt{1-x^2}/n+1/n^2)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Если $h<0$, рассуждения аналогичны. Таким образом установлено, что, если $f \in \widetilde{H}_1^{\omega}$, то $\Omega^*(f,h) \le C \ln \frac{1}{|h|}$.

Библиографические ссылки

1. *П*отапов М.К. О приближении непериодических функций алгебраическими многочленами / М.К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та, №4. — 1960. С. 14–25.
2. *П*отапов М.К. О приближении алгебраическими полиномами в метрике L_p / М.К. Потапов // Исследования по современным проблемам конструкивной теории функций, М., 1961.
3. *М*оторний В.П. Властивості деяких модулів неперервності інтегрованих функцій /В.П. Моторний, В.В. Седунова//Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія "Математика" — 2013.–Вип. 18. – С. 132–140.
4. *М*оторный В.П. Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p /В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Серия "Математика" 35. — 1971. С. 874–899.
5. *Г*essay-placeholder

Надійшла до редколегії 15.05.2014

УДК 512.544

О. О. Пипка*

* Днiпропетровський нацiональний унiверситет iм. Олеся Гончара,
Днiпропетровськ 49010. *E-mail: Pypka@ua.fm*

Про деякi групи з чернiковською групою автоморфiзмiв

Присвячується 65-рiччю професора Курдаченка Леонiда Андрiйовича.

Отримано автоморфний аналог теореми Шура у випадку, коли довiльна пiдгрупа A групи автоморфiзмiв $Aut(G)$ групи G та фактор-група групи G по A-центру є чернiковськими групами.

Ключовi слова: A**-центр,** A**-комутаторна пiдгрупа, чернiковська група.**

Получен автоморфный аналог теоремы Шура в случае, когда произвольная подгруппа A группы автоморфизмов $Aut(G)$ группы G и фактор-группа группы G по A-центру являются черниковскими группами.

Ключевые слова: A**-центр,** A**-коммутаторная подгруппа, черниковская группа.**

We obtained automorphic analogue of Schur's theorem for the case when an arbitrary subgroup A of automorphism group $Aut(G)$ of a group G and the factor-group of a group G modulo A-center are Chernikov groups.

Key words: A**-center,** A**-commutator subgroup, Chernikov group.**

1. ВСТУП

Нехай G – група, A – пiдгрупа групи автоморфiзмiв $Aut(G)$. Покладемо

$$C_G(A) = \{g \in G | \alpha(g) = g, \forall \alpha \in A\},$$

$$[G, A] = \langle g^{-1}\alpha(g) = [g, \alpha] | g \in G, \alpha \in A\rangle.$$

Зауважимо, що в загальному випадку $C_G(A)$ не буде нормальної пiдгрупою групи G. Але якщо група внутрiшнiх автоморфiзмiв $Inn(G)$ мiститься в A, $Inn(G) \leq A$, то $C_G(A) \leq C_G(Inn(G)) = \zeta(G)$, тобто $C_G(A)$ є нормальною пiдгрупою групи G. Також очевидно, що $C_G(A)$ є A-iнварiантною пiдгрупою. Пiдгрупа $C_G(A)$ називається *A-центром групи G*.

Натомiсть пiдгрупа $[G, A]$ завжди буде нормальною для кожної пiдгрупи $A \leq Aut(G)$. Дiйсно, нехай $g, x \in G$, $\alpha \in A$, тодi

$$\begin{aligned} x^{-1}[g,\alpha]x =& x^{-1}g^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(g)x = (gx)^{-1}\alpha(gxx^{-1})x = (gx)^{-1}\alpha(gx)\alpha(x^{-1})x = \\ =& [gx,\alpha](\alpha(x))^{-1}x = [gx,\alpha](x^{-1}\alpha(x))^{-1} = [gx,\alpha][x,\alpha]^{-1} \in [G,A]. \end{aligned}$$

Підгрупа $[G, A]$ називається *A-комутаторною підгрупою групи G*.

Позначимо через τ_x внутрішній автоморфізм, який визначений елементом x, тобто $\tau_x(g) = x^{-1}gx$, для всіх $g \in G$. Відмітимо, що якщо $A = Inn(G)$, тоді A-центр групи G співпадає зі звичайним центом $\zeta(G)$ групи G, а також A-комутаторна підгрупа групи G співпадає з комутантом $[G, G]$ групи G.

Перші дослідження зв'язків між центральною фактор-групою $G/\zeta(G)$ групи G та комутантом $[G, G]$ були розпочаті ще на початку минулого століття в роботі І. Шура [1]. Зокрема, він вивчав властивості так званого *мультиплікатора Шура* (див., наприклад, [2]) групи G, який позначається $M(G)$. Він отримав наступний результат: *якщо група G скінченна, то $[G, G] \cap \zeta(G)$ ізоморфно вкладається в $M(G/\zeta(G))$*. Пізніше поняття мультиплікатора Шура було поширене на довільні групи. Дослідження зв'язків між центральною фактор-групою $G/\zeta(G)$ групи G та комутантом $[G, G]$ в нескінченних групах були вперше представлені в роботі Р. Бера [3]. Зокрема, він довів, що якщо $G/\zeta(G)$ скінченна, то $[G, G]$ також скінченна група. Це твердження в наш час називають *теоремою Шура*, хоча сам І. Шур в такій формі його не отримував. Інше питання, яке природно тут виникає, наступне: *як пов'язані між собою порядки центральної фактор-групи $G/\zeta(G)$ та комутанта $[G, G]$?* Цьому питанню було присвячено багато робіт. Найкращий результат було отримано в роботі [4]: *якщо $|G/\zeta(G)| = t$, тоді $|[G, G]| \leq w(t) = t^m$, де $m = \frac{1}{2}(log_p t - 1)$, p – це найменше просте число, яке ділить t*. Більш того, в цій же роботі було доведено, що в останній нерівності рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $t = p^n$, де p – просте число.

На цей час отримано ряд аналогів та узагальнень теореми Шура (див., наприклад, [5]). Більш того, існують різні підходи до отримання таких результатів. Серед них є підхід, який пов'язаний з групами автоморфізмів. П. Хегарті в роботі [6] довів, що якщо $A = Aut(G)$ та $G/C_G(A)$ скінченна, то $[G, A]$ також скінченна. Проте умова скінченності фактор-групи $G/C_G(Aut(G))$ є дуже сильною. Звідси, зокрема, випливає, що сама група автоморфізмів $Aut(G)$ буде скінченною. Відмітимо також, що у випадку, коли $A = Aut(G)$, підгрупа $C_G(A)$ називається *абсолютним центром* групи G, а $[G, A]$ – *автокомутаторною підгрупою* групи G. В роботі [7] було розглянуто більш загальний випадок: $Inn(G) \leq A$ та $A/Inn(G)$ скінченна. Для цього випадку були отримані узагальнення теорем Шура, Бера та Холла.

Зауважимо, що автоморфний аналог теореми Шура для довільної групи автоморфізмів не виконується. Це ілюструє наступний приклад.

Нехай p – просте число, $G = \langle a \rangle \times K$, де $|a| = p$, $K = Dr_{n \in \mathbb{N}} \langle b_n \rangle$ – елементарна абелева p-група. Тоді група G має автоморфізм α_j, який визначається наступним чином: $\alpha_j(a) = ab_j$, $\alpha_j(x) = x$, для кожного $x \in K$. Легко перевірити, що кожен автоморфізм α_j має порядок p, а підгрупа $A \leq Aut(G)$, яка породжена множиною $\{\alpha_j | j \in \mathbb{N}\}$, є елементарною абелевою p-групою. Більш того, $C_G(A) = K = [G, A]$, тобто фактор-група $G/C_G(A)$ скінченна, але підгрупа $[G, A]$ нескінченна.

Отже, для довільної підгрупи A групи автоморфізмів $Aut(G)$ потрібно ще вводити деякі додаткові обмеження.

В роботі Я.Д. Половицького [8] було отримано наступне узагальнення теореми Шура: *якщо центральна фактор-група* $G/\zeta(G)$ *групи* G *черніковська, то комутант* $[G,G]$ *також є черніковською групою.* Нагадаємо, що група G називається *черніковською*, якщо вона містить в собі таку нормальну абелеву підгрупу $Div(G) = Q_1 \times \ldots \times Q_m$, що фактор-група $G/Div(G)$ скінченна. При цьому Q_j , $1 \leq j \leq m$ – це квазіциклічні групи. Число m є інваріантом групи G, і називається *мінімаксним рангом* групи G та позначається $mm(G)$. Іншою характеристикою черніковських груп є множина $\Pi(Div(G))$. Ми будемо позначати її спеціальним символом $Sp(G)$. Ще одним інваріантом черніковських груп є порядок фактор-групи $G/Div(G)$, $o(G) = |G/Div(G)|$.

Наступна теорема представляє собою головний результат даної роботи.

Теорема А. *Нехай* G *– група,* A *– підгрупа групи автоморфізмів* $Aut(G)$*, і нехай* $Inn(G) \leq A$*. Якщо фактор-група* $G/C_G(A)$ *та підгрупа* A *черніковські, то* $[G,A]$ *також черніковська група.*

2. ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЛЕМИ

Лема 1. *Нехай* G *– абелева група,* A *– підгрупа групи автоморфізмів* $Aut(G)$*. Припустимо, що фактор-група* $G/C_G(A)$ *черніковська. Якщо підгрупа* A *скінченна, то підгрупа* $[G,A]$ *також черніковська.*

Доведення. Нехай $\alpha \in A$. Розглянемо відображення $d(\alpha) : G \to G$, яке діє за наступним правилом $d(\alpha)(g) = g^{-1}\alpha(g) = [g,\alpha]$, $g \in G$. Розглянемо

$$d(\alpha)(uv) = (uv)^{-1}\alpha(uv) = v^{-1}u^{-1}\alpha(u)\alpha(v) = u^{-1}\alpha(u)v^{-1}\alpha(v) = d(\alpha)(u)d(\alpha)(v).$$

Інакше кажучи, відображення $d(\alpha)$ є ендоморфізмом групи G. Більш того,

$$Im(d(\alpha)) = [G,\alpha], Ker(d(\alpha)) = C_G(\alpha).$$

Таким чином, ми маємо

$$[G,\alpha] = Im(d(\alpha)) \cong G/Ker(d(\alpha)) = G/C_G(\alpha).$$

Оскільки $\alpha \in A$, то $C_G(A) \leq C_G(\alpha)$, звідки отримуємо, що $G/C_G(\alpha) \leq G/C_G(A)$. Отже, фактор-група $G/C_G(\alpha)$ черніковська, а тому черніковською буде і група $[G,\alpha]$.

Оскільки A – скінченна група, то $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$. За Лемою 1.1 роботи [9] маємо

$$[G,A] = [G,\alpha_1] \cdot [G,\alpha_2] \cdot \ldots \cdot [G,\alpha_r].$$

Тобто $[G,A]$ є добутком скінченного числа черніковських груп. Отже, група $[G,A]$ також черніковська. Більш того, $mm([G,A]) \leq rm_G$, $Sp([G,A]) \subseteq \pi$, $o([G,A]) \leq (o_G)^r$, де $m_G = mm(G/C_G(A))$, $\pi = Sp(G/C_G(A))$ та $o_G = o(G/C_G(A))$. Лему доведено. $\square$

Лема 2. *Нехай G – абелева група, A – підгрупа групи автоморфізмів $Aut(G)$. Якщо фактор-група $G/C_G(A)$ та підгрупа A черніковські, то $[G, A]$ також черніковська група.*

Доведення. Покладемо $D = Div(A)$, $H = G/C_G(A)$. Оскільки група H черніковська, то існує цокольний ряд

$$\langle 1 \rangle = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n \leq \ldots,$$

де підгрупи H_i скінченні та A-інваріантні. Оскільки індекс $|D : C_D(H_i)|$ скінченний для кожного $i \in \mathbb{N}$, то група D подільна. А оскільки подільна черніковська група не містить скінченних факторів, то $D = C_D(H_i)$, для кожного $i \in \mathbb{N}$. Іншими словами, група D централізує кожну підгрупу H_i. Більш того,

$$H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i,$$

а тому група D централізує всю підгрупу H, тобто $D = C_D(H)$.

Розглянемо такі елементи $x \in G$, що $x \notin C_G(A)$ та визначимо відображення $\eta_x : D \to G$, яке діє за правилом $\eta_x(\alpha) = [x, \alpha]$, $\alpha \in D$. Якщо β – інший автоморфізм, то

$$(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x\eta_x(\beta)) = \alpha(x)\alpha(\eta_x(\beta)) = x\eta_x(\alpha)\eta_x(\beta),$$

а тому

$$\eta_x(\alpha \circ \beta) = x^{-1}(\alpha \circ \beta)(x) = x^{-1}x\eta_x(\alpha)\eta_x(\beta) = \eta_x(\alpha)\eta_x(\beta).$$

Таким чином, η_x – гомоморфізм. Більш того,

$$[x^2, \alpha] = x^{-2}\alpha(x^2) = x^{-2}\alpha(x)\alpha(x) = x^{-2}x\eta_x(\alpha)x\eta_x(\alpha) = (\eta_x(\alpha))^2 = [x, \alpha]^2.$$

Якщо застосувати індукцію, то ми отримаємо, що $[x^n, \alpha] = [x, \alpha]^n$. Оскільки група H черніковська, то існує таке k, що $1 = [x^k, \alpha] = [x, \alpha]^k$, звідки отримуємо, що $x^k \in C_G(A)$. Інакше кажучи, образ $Im(\eta_x) = [x, D]$ має скінченну експоненту. Таким чином, ми маємо $Im(\eta_x) \cong D/Ker(\eta_x)$. А оскільки подільна черніковська група не містить скінченних факторів, то $D = Ker(\eta_x)$, тобто

$$D/Ker(\eta_x) = \langle 1 \rangle = Im(\eta_x).$$

А це означає, що $D \leq C_G(x)$, для кожного $x \in G$, що $x \notin C_G(A)$. Звідси випливає скінченність підгрупи A. Користуючись Лемою 1, отримуємо, що $[G, A]$ черніковська. Більш того, $mm([G, A]) \leq rm_G$, $Sp([G, A]) \subseteq \pi$, $o([G, A]) \leq (o_G)^r$, де $r = |A|$, $m_G = mm(G/C_G(A))$, $\pi = Sp(G/C_G(A))$ та $o_G = o(G/C_G(A))$. Лему доведено. $\square$

Вище було зазначено, що з того факту, що центральна фактор-група $G/\zeta(G)$ черніковська, випливає, що черніковською буде і група $[G, G]$ [8]. Проте у вказаній роботі не було отримано жодних числових співвідношень. Наступне твердження дає нам такі співвідношення, які стосуються числових інваріантів черніковської групи.

Лема 3. *Нехай G – група, і нехай $G/\zeta(G)$ - черніковська група. Тоді $[G,G]$ також черніковська група. Більш того, $o([G,G]) \leq w(o(G/\zeta(G)))$, $mm([G,G]) \leq mm(G/\zeta(G))o(G/\zeta(G))$, $Sp([G,G]) \subseteq Sp(G/\zeta(G))$.*

Доведення. Покладемо $mm(G/\zeta(G)) = m_G$, $o(G/\zeta(G)) = o_G$, $Z = \zeta(G)$ та $D/Z = Div(G/Z)$. Для довільного елементу $d \in D$ розглянемо відображення $\xi_d : D \to D$, яке визначається за правилом $\xi_d(x) = [d,x]$, $x \in D$. Ми маємо

$$\xi_d(xy) = [d,xy] = [d,y][d,x]^y = [d,y][d,x] = [d,x][d,y] = \xi_d(x)\xi_d(y),$$

оскільки $Im(\xi_d) \leq \zeta(G)$. Таким чином, ξ_d – це ендоморфізм D і ми отримуємо, що

$$[d,D] = Im(\xi_d) \cong D/Ker(\xi_d).$$

Очевидно, що $Z \leq Ker(\xi_d)$, тому якщо $Ker(\xi_d) \neq D$, то $D/Ker(\xi_d)$ черніковська подільна група. З іншого боку,

$$[d^2,x] = [dd,x] = [d,x]^d[d,x] = [d,x][d,x] = [d,x]^2.$$

Скориставшись індукцією, можна показати, що $[d^n,x] = [d,x]^n$, для всіх натуральних n. Оскільки D/Z періодична, то існує таке натуральне число k, що $d^k \in Z$. А тому $[d,x]^k = [d^k,x] = 1$, для всіх $x \in D$. Зокрема, $[d,D]$ має скінченну експоненту, а тому не може бути подільною. Отримали протиріччя. Це означає, що $Ker(\xi_d) = D$, тобто $C_D(d) = D$. А оскільки це виконується для довільного елементу $d \in D$, то підгрупа D абелева.

Нехай $V = \{v_1, \ldots, v_s\}$ – трансверсаль підгрупи D в групі G. Тоді V скінченна і $s \leq o_G$. Для довільного елементу $v \in V$ розглянемо відображення $\xi_v : D \to D$, яке визначається за правилом $\xi_v = [v,x]$, $x \in D$. Оскільки D абелева, то

$$\xi_v(xy) = [v,xy] = [v,y][v,x]^y = [v,y][v,x] = [v,x][v,y] = \xi_v(x)\xi_v(y).$$

Таким чином, ξ_v – це ендоморфізм групи D та $Im(\xi_v) = [v,D]$, $Ker(\xi_d) = C_D(v)$, а тому

$$[v,D] = Im(\xi_v) \cong D/Ker(\xi_v) = D/C_D(v).$$

Очевидно, що $Z \leq Ker(\xi_v)$, звідки отримуємо, що $[v,D]$ – черніковська подільна група (якщо вона неодинична). Більш того, $mm([v,D]) \leq m_G$, $Sp([v,D]) \subseteq Sp(G/Z)$.

Оскільки $[G,D] = [v_1,D] \cdot \ldots \cdot [v_s,D]$ (див., наприклад, [9]), то $[G,D]$ – черніковська подільна група. Більш того, $mm([G,D]) \leq sm_G \leq o_Gm_G$, $Sp([G,D]) \subseteq Sp(G/Z)$.

Центр фактор-групи $G/[G,D]$ містить в собі $D/[G,D]$, а тому $(G/[G,D])/\zeta(G/[G,D])$ скінченна і її порядок не перевищує o_G. Тоді підгрупа $[G/[G,D], G/[G,D]]$ також скінченна і має порядок не більше, ніж $w(o_G) = (o_G)^m$, де $m = \frac{1}{2}(log_po_G - 1)$, p – це найменше просте число, яке ділить o_G [4]). Нарешті, рівність $[G/[G,D], G/[G,D]] = [G,G]/[G,D]$ показує, що $[G,G]$ - це черніковська група, для якої мають місце наступні співвідношення: $mm([G,G]) \leq o_Gm_G$, $o([G,G]) \leq w(o_G)$, $Sp([G,G]) \subseteq Sp(G/Z)$. Лему доведено. □

3. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ

Нехай G – група, A – підгрупа групи автоморфізмів $Aut(G)$. Припустимо, що K – це нормальна підгрупа групи G, і нехай K також A-інваріантна. Для кожного автоморфізму $\alpha \in A$ визначимо відображення $\alpha_K : G/K \to G/K$ за наступним правилом: $\alpha_K(xK) = \alpha(x)K$, для кожного $x \in G$. Очевидно, що α_K є ендоморфізмом фактор-групи G/K. Нехай x – такий елемент групи G, що $\alpha_K(xK) = K$, тобто $K = \alpha(x)K$ та $\alpha(x) \in K$. Оскільки K є A-інваріантною підгрупою групи G, то $x \in K$ та $xK = K$. Таким чином, α_K – це автоморфізм фактор-групи G/K. Більш того, якщо $\alpha, \beta \in A$, то

$$(\alpha\circ\beta)_K(xK) = (\alpha\circ\beta)(x)K = \alpha(\beta(x))K = \alpha_K(\beta(x)K) = \alpha_K(\beta_K(xK)) = (\alpha_K\circ\beta_K)(xK).$$

Таким чином, відображення $\Phi : A \to Aut(G/K)$, яке визначається за правилом $\Phi(\alpha) = \alpha_K$, $\alpha \in A$, є гомоморфізмом.

Доведення Теореми А. Оскільки ми маємо включення $Inn(G) \leq A$, то $C_G(A) \leq C_G(Inn(G)) = \zeta(G)$, звідки отримуємо, що $G/\zeta(G) \leq G/C_G(A)$, тобто $G/\zeta(G)$ – черніковська група. Тоді за теоремою Половицького група $K = [G,G]$ також черніковська, а з Леми 3 випливають всі числові співвідношення.

Покладемо $G_{ab} = G/K$. Для кожного $\alpha \in A$ визначимо відображення $\alpha_{ab} : G_{ab} \to G_{ab}$ за наступним правилом $\alpha_{ab}(xK) = \alpha(x)K$, для кожного $x \in G$. Оскільки $[G,G]$ – характеристична підгрупа групи G, то $[G,G]$ нормальна та A-інваріантна. Беручи до уваги вище викладені міркування, ми отримуємо, що $\alpha_{ab} \in Aut(G/K)$. Більш того, існує гомоморфізм $\Phi : A \to Aut(G/K)$, який діє за правилом $\Phi(\alpha) = \alpha_{ab}$, $\alpha \in A$. Покладемо $A_{ab} = \Phi(A)$. Оскільки G/K абелева, то

$$(\tau_g)_{ab}(x[G,G]) = \tau_g(x)[G,G] = g^{-1}xg[G,G] = x[x,g][G,G] = x[G,G],$$

для всіх $x \in G$. Звідси випливає, що $Inn(G) \leq Ker(\Phi)$, зокрема, A_{ab} є епіморфним образом $A/Inn(G)$. А це означає, що A_{ab} – черніковська група.

Якщо $x \in C_G(A)$, то $\alpha_{ab}(xK) = \alpha(x)K = xK$, для всіх $\alpha \in A$, звідки отримуємо включення $C_G(A)K/K \leq C_{G/K}(A_{ab})$. Отже, $(G/K)/C_{G/K}(A_{ab})$ є черніковською групою. Користуючись Лемою 2, ми отримуємо, що $[G_{ab}, A_{ab}]$ також черніковська. Більш того,

$$[G_{ab}, A_{ab}] = [G/[G,G], A_{ab}] = [G,A][G,G]/[G,G].$$

Якщо $g, x \in G$, то $[g,x] = g^{-1}x^{-1}gx = g^{-1}\tau_x(g) = [g, \tau_x]$. Це показує, що $[G,G] \leq [G,A]$, оскільки $Inn(G) \leq A$. Таким чином,

$$[G_{ab}, A_{ab}] = [G,A]/[G,G].$$

Нарешті, $[G,A]$ є розширенням черніковською групи за допомогою черніковської, а тому сама група $[G,A]$ буде черніковською.

Застосовуючи міркування, які використовувались при доведенні Леми 2, ми можемо стверджувати, що підгрупа A_{ab} скінченна, а тому можемо покласти $r =$

$|A_{ab}|$. Беручи до уваги той факт, що $[G_{ab}, A_{ab}] = [G, A]/[G, G]$, та Лему 3, отримуємо наступні числові співвідношення:

$$mm([G, A]) \le rm_G + o_G m_G = m_G(r + o_G),$$

$$Sp([G, A]) \subseteq \pi,$$

$$o([G, A]) \le (o_G)^r w(o_G) = (o_G)^r (o_G)^m = (o_G)^{r+m},$$

де $m = \frac{1}{2}(log_p o_G - 1)$ (p – це найменше просте число, яке ділить o_G), $m_G = mm(G/C_G(A))$, $\pi = Sp(G/C_G(A))$ та $o_G = o(G/C_G(A))$. Теорему доведено. $\square$

Бібліографічні посилання

1. *Schur I.* Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen/ I. Schur // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 127 (1904).– P.20–50.
2. *Karpilovsky G.* The Schur multiplier/ G. Karpilovsky // CLARENDON PRESS: Oxford, 1987.– 302 p.
3. *Baer R.* Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen/ R. Baer // Mathematische Annalen 124(1) (1952).– P.161–177.
4. *Wiegold J.* Multiplicators and groups with finite central factor-groups/ J. Wiegold // Mathematische Zeitschrift 89(4) (1965).– P.345–347.
5. *Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L.A.* The Schur property and groups with uniform conjugate classes/ S. Franciosi, F. de Giovanni, L.A. Kurdachenko // Journal of Algebra 174(3) (1995).– P.823–847.
6. *Hegarty P.* The absolute centre of a group/ P. Hegarty // Journal of Algebra 169(3) (1994).– P.929–935.
7. *Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Pypka A.A.* On Some Variants of Theorems of Schur and Baer/ M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko, A.A. Pypka // Milan Journal of Mathematics (2014), online version.
8. *Polovicky Ya.D.* Groups with extremal classes of conjugate elements/ Ya.D. Polovicky // Siberian Mathematical Journal 5(4) (1964).– P.891–895.
9. *Kurdachenko L.A., Otal J.* The rank of the factor-group modulo the hypercenter and the rank of the some hypocenter of a group/ L.A. Kurdachenko, J. Otal // Central European Journal of Mathematics 11(10) (2013).– P.1732–1741.

Надійшла до редколегії 29.04.2014

УДК 517.5

В. В. Сєдунова*

* Дніпропетровський національный університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: sdnva@ukr.net*

Властивості деяких модулів неперервності інтегровних функцій в просторах L_p

Обчислено оцінку зверху інтегральноі характеристики Потапова для функцій класу H^ω в метриці простору L_p.

Ключові слова: **ФУНКЦІЯ, МОДУЛЬ НЕПЕРЕВНОСТІ, НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР, НОРМА, РОЗБИТТЯ, ХАРАКТЕРИСТИКА ПОТАПОВА.**

Вычислена оценка сверху для интегральной характеристики Потапова для функций класса H^ω в метрике пространства L_p.

Ключевые слова: **ФУНКЦИЯ, МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ, НОРМИРОВАНОЕ ПРОСТРАНСТВО, НОРМА, РАЗБИЕНИЕ, ХАРАКТЕРИСТИКА ПОТАПОВА.**

The Potapov's characteristic of functions of class H_p^ω is estimated from above in L_p space.

Key words: **FUNCTION, CONTINUITY MODULE, NORMED SPACE, NORM, SPLITTING, POTAPOV'S CHARACTERISTIC**

1. Позначення та деякі дані, використані в роботі.

Будемо позначати:

$L_p[a;b], 1 \le p \le \infty$ - простір сумовних в р-тій степені функцій, з нормою:

$$\|f(\cdot)\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p}, p < \infty$$

$L_p = L_p[-1;1]$.

Модуль неперервності в $L_p[a;b]$:

$$\omega(f,h)_p = sup_{\delta \le h}\left\{\int_a^{b-\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

зокрема,

$$\omega^p(f,h)_p = sup_{\delta \le h}\left\{\int_a^{b-\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt\right\}$$

Для будь-якого $[c;d] \in [a;b]$ позначимо $\omega(f,[c;d];h)_p = sup_{\delta \le h}\left\{\int_c^{d-\delta} |f(t+\delta) - f(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$. Ясно, що:

$$\omega(f,[c;d];h)_p \le \omega(f,h)_p.$$

Відома нерівність Гельдера:

$$\left|\int_a^b u(t)v(t)dt\right| \le \left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |v(t)|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

де $u(t) \in L_p[a;b], v(t) \in L_q[a;b], \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; звідси, при $v(t)=1$:

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right| \le \left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}} = \left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\left|\int_a^b u(t)dt\right|^p \le \int_a^b |u(t)|^p dt (b-a)^{\frac{p}{q}} = \int_a^b |u(t)|^p dt (b-a)^{p-1}$$

H_p^ω - простір функцій, таких, що $\omega(f,h) \le \omega(h)$ де $\omega(h)$ - деякий модуль неперервності - неперервна, монотоно зростаюча, напівадитивна функція. Останнє означає, що:

$$\omega(h+\delta) \le \omega(h)+\omega(\delta)$$

Через $\Omega(f,h)_p$ позначимо $sup_{0<|u|\le h}\Delta(f,h)_p$, де

$$\Delta(f,h)_p = \left\{\int_a^b \left|\frac{f(x\sqrt{1-u^2}-u\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|u|+u^2)}\right|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Характеристика $\Omega(f,h)_p$ введена у роботах Потапова. $\Omega(f,h)_p$ існує, якщо існує $\int_{-1}^1 \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

В статті (1) показано: для $\forall f \in H_p^\omega$ такої, що існує $\int_{-1}^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx$, і виконуються умови

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \le Cn\omega(f;\frac{1}{n^2})$$

$$\int_{1-\frac{1}{n^2}}^{1} \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}dx \le Cn\omega(f;\frac{1}{n^2})$$

має місце:

$$\int_{-1}^1 \left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|h|+h^2)}\right| dt \le C\ln n$$

де $h=\sin v \le \frac{1}{2n}$.

Результатом даної роботи є поширення оцінки на випадок $p>1$. Має місце:

$$\int_a^b \left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega(f,\sqrt{1-x^2}|h|+h^2)}\right|^p dt \le C\ln n$$

де $h = \sin v \le \frac{1}{2n}$ і $f \in H_p^\omega$ така, що існує $\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$, і виконуються умови

$$\int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx \le Cn\omega^p(f;\frac{1}{n^2})_p \tag{1}$$

$$\int_{1-\frac{1}{n^2}}^{1} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx \le Cn\omega^p(f;\frac{1}{n^2})_p \tag{2}$$

Далі скрізь під $\omega(f,h)$ розуміємо $\omega(f,h)_p$ для простоти позначення.

Нехай $n = 2^{k_0}$, де k_0 - натуральне число. Розібємо відрізок $[-1;1]$ наступним чином:

$$a_k = 1 - \frac{1}{2^{2k}}, k = 0..k_0-1, a_{k_0} = 1;$$

$$a_{-k} = -a_k, k = 0..k_0$$

Тоді:

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{2^{2k-2}} - \frac{1}{2^{2k}} = \frac{3}{2^{2k}}$$

$$\frac{1}{2^k} < \sqrt{1-a_k^2} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Кожну з множин $E_k = [-a_{k+1};-a_k]\ [a_k;a_{k+1}], k = 0..k_0-1$ розібємо на відрізки довжиною $\frac{1}{n2^k}$, точки цього розбиття разом з a_k позначимо x_i:

$$-1 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$$

і нехай $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0..N-1$.

Для довільної функції $f \in H_p^\omega$ позначимо $L_i = \frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$ - середнє значення f на $[x_i;x_{i+1}]$. Будемо розглядати ступінчату функцію $F_n(f,x) = L_i, x \in [x_i;x_{i+1})$.

2. Доведення теорем

Лема 1. *[2, теорема 2] Має місце нерівність:*

$$\sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} |L_{i+1} - L_i|^p \le n2^k\omega^p\left(f;\frac{1}{2^k}\right)$$

Доведення.

$$\sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} |L_{i+1} - L_i|^p = \sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} \left|\frac{1}{\Delta x_{i+1}}\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} f(t)dt - \frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt\right|^p$$

З огляду на те, що $\forall i : x_i \in (a_k;a_{k+1})\Delta x_i = \frac{1}{n2^k}$ вказана сума дорівнює

$$(n2^k)^p \sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(t+\frac{1}{n2^k}\right) - f(t)dt \right|^p \le$$

$$\le (n2^k)^p \sum_{i:x_i\in(a_k;a_{k+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f\left(t+\frac{1}{n2^k}\right) - f(t) \right|^p dt \left(\frac{1}{n2^k}\right)^{p-1} \le n2^k \omega^p \left(f, \frac{1}{n2^k}\right)$$

Лема 2. *[2, теорема 1] Нехай деякий відрізок $[a;b]$ розбито на рівні частини довжини δ і $\forall x \in [x_{j-1};x_j) F_m(f,x) = L_j$, де $j = 1..m, x_0 = a, x_m = b$. Тоді*

$$\int_a^b |f(x) - F_m(f,x)|^p dx \le C\omega^p(f,[a;b],\delta)$$

Теорема 1. *Має місце:*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \le C \ln n \tag{3}$$

Доведення. Розглянемо

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx = \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{k_0-1} \int_{-a_{k+1}}^{-a_k} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx$$

Далі, $\forall x \in E_k$:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \ge \frac{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}{n} + \frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{2^k n}$$

тому $\omega^p\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \ge \omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)$, так як $\omega(f;t), t^p$ - неспадні функції при $t > 0$.

Застосуємо лему 2 до кожного $[a_k; a_{k+1}]$:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \left| \frac{f(x) - F_n(f,n)}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \le \frac{\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(x) - F_n(f,n)|^p dx}{\omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)} \le \frac{C_k \omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)}{\omega^p\left(f; \frac{1}{n2^{k+1}}\right)} = C_k$$

Аналогічно для $[a_{k+1}; a_k]$. Просумувавши по k, отримаємо:

$$\sum_{k=0}^{k_0-1} C_k + \sum_{k=0}^{k_0-1} C_k \le Ck_0 < C\ln n$$

Теорема доведена.

Лема 3. *Якщо* $v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ *і* $u \in [0; \pi - 2v]$, *то має місце нерівність:*

$$2\sin(u+v) \ge \sin u$$

Доведення. Якщо $u \in \left[0; \frac{\pi}{2} - v\right]$ то

$$\sin u \le \sin(u+v) < 2\sin(u+v)$$

так як $\sin(u+v)$ монотонно зростає на цьому проміжку, і $u \le u+v$. Далі, якщо $u \in \left[\frac{\pi}{2} - v; \pi - 2v\right]$, то $2\sin(u+v) - \sin u$ - монотонно спадаюча функція, і, так як в точці $u = \pi - 2v$

$$2\sin(u+v) - \sin u|_{u=\pi-2v} = 2\sin v - \sin 2v \ge 0$$

дана нерівність виконується, то вона має місце і на всьому проміжку.

Лема 4. *Якщо* $\sin v \in \left[0; \frac{1}{n}\right]$, *то має місце:*

$$\int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du \le C\ln n \tag{4}$$

Доведення. З нерівності (3), замінюючи $x = \cos u$:

$$C\ln n \ge \int_0^{\pi} \left| \frac{f(\cos u) - F_n(f; \cos u)}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(\cos u) - F_n(f; \cos u)}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi-v}^{\pi-v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin(u+v)| du \ge$$

$$\ge \int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin(u+v)| du \tag{5}$$

Із леми 3: $\sin u \le \sin(u+v), u \in \left(0; \frac{\pi}{2} - v\right); \sin u \le 2\sin(u+v), u \in \left(\frac{\pi}{2} - v; \pi - 2v\right)$ і, в будь-якому випадку,

$$2|\sin(u+v)| \ge |\sin u| \tag{6}$$

Якщо $u \in \left(\frac{\pi}{2} - v; \pi - 2v\right)$, то $\sin(u+v) < \sin u$ і тому

$$\frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \leq \frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} < \frac{2^p}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \tag{7}$$

Далі, так як $\sin v < \frac{1}{n}$ то $\sin(u+v) + \frac{1}{n} < 2\left(\sin u + \frac{1}{n}\right)$, якщо $u \in \left(0; \frac{\pi}{2} - \frac{v}{2}\right)$. Тому:

$$\frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} * \frac{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \leq$$

$$\frac{1}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} * \frac{\omega^p\left(f; 2\left(\frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right)}{\omega^p\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \leq \frac{2^p}{\omega^p\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}$$

тобто нерівність (7) має місце і в цьому випадку. З нерівностей (5–7) маємо:

$$\int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; coc(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| du \leq$$

$$\leq 2^{p+1} \int_0^{\pi-2v} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; coc(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin(u+v)}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin(u+v)| du \leq C_1 \ln n$$

Лема доведена.

Лема 5. *Якщо* $\sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$ *, то:*

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - F_n(f, \cos(u+v))|^p du \leq 2 \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Доведення.

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - F_n(f, \cos(u+v))|^p du = \int_{\pi-v}^{\pi+v} |f(\cos t) - F_n(f, \cos t)|^p dt =$$

$$= 2 \int_{\pi-v}^{\pi} |f(\cos t) - F_n(f, \cos t)|^p dt = 2 \int_{-1}^{-\cos v} \frac{|f(x) - F_n(f,x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Замінюємо $f(x)$ на $f(x) + d$, тоді величини $\omega(f;x), \Omega(f;x)$ не зміняться, а d обираемо так, щоб середнє значення $f(x)$ на $[-1; -a_{k_0-1}]$ дорівнювало 0, тоді $F_n(f;x) = 0 \forall x \in \left[-1; -1 + \frac{1}{n^2}\right]$. Крім того, $-\cos v < -1 + \frac{1}{n^2}$, коли $\sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right)$, тому

$$\int_{-1}^{-\cos v} \frac{|f(x) - F_n(f;x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Лема доведена.

Теорема 2. *Якщо* $h = \sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$, *то*

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - F_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx \leq C \ln n$$

Доведення. Нехай $h = \sin v \in \left(0; \frac{1}{n}\right]$. Виконуючи заміну $x = \cos u, h = \sin v$, отримаємо

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{f(x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2}) - F_n(f; x\sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f; \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi-2v} + \int_{\pi-2v}^{\pi} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega\left(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right|^p |\sin u| dx$$

Перший доданок оцінено в лемі 4. Використовуючи умову(1) і лему 5, оцінимо другий:

$$\int_{\pi-2v}^{\pi} \left| \frac{f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))}{\omega(f; \frac{\sin u}{n} + \frac{1}{n^2})} \right|^p |\sin u| du \leq \frac{Cv}{\omega^p(f; \frac{1}{n})} *$$

$$* \int_{\pi-2v}^{\pi} |f(\cos(u+v)) - F_n(f; \cos(u+v))|^p \sin u du \leq \frac{C}{n\omega^p(f; \frac{1}{n^2})} \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n^2}} \frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq C$$

тобто загальна сума не перевищує $C \ln n$. Теорема доведена.

Лема 6. *Для кожного* $[-a_{k+1}; -a_k]$ *позначимо* $h_k = \frac{1}{n2^k}$. *Має місце оцінка:*

$$I = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p \leq 2^p n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt$$

Доведення.

$$\left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p = (n2^{k+1})^p *$$

$$* \left| \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}+h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t)dt - \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right|^p = (n2^{k+1})^p *$$

$$\left| \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_k) \pm f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p =$$

$$= (n2^{k+1})^p \left| \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p = (n2^{k+1})^p \left(\frac{1}{2}\right)^p *$$

$$* \left| \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt + \frac{1}{2} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p \leq$$

$$\leq (n2^k)^p \left(2 \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|dt \right)^p \leq (n2^{k+1})^p (h_k)^{p-1} *$$

$$* \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt = 2^p n 2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt$$

Лема доведена.

Лема 7. *За умов леми 6, має місце нервність:*

$$I = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right|^p \leq$$

$$\leq 3^p n 2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|^p dt$$

Доведення.

$$\left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right|^p = \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - \right.$$

$$\left. - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt + n2^{k+1} \left(\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt - \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt \right) \right|^p =$$

$$= \left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt + n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right|^p \leq$$

$$\leq \left(\left| n2^k \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt \right| + n2^{k+1} \left| \int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t+h_{k+1}) - f(t)dt \right| \right)^p$$

Згідно лемі 6, перший доданок не перевищує

$$n2^{k+1} \int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_{k+1}} |f(t+h_{k+1}) - f(t)|dt,$$

другий не перевищує

$$n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt$$

тому

$$I\le(n2^{k+1})^p\left(\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|dt\right)^p\le(n2^{k+1})^p(3h_{k+1})^{p-1}*$$

$$*\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|^p dt\le 3^p n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|^p dt$$

Лема доведена.

Теорема 3. *Якщо* $f\in H_p^\omega, 0<h=\sin v<\frac{1}{n}$, *то*

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\le C\ln n$$

Доведення. Позначимо $y=x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2}$. Будемо казати, що $i\in A_k$, якщо $x_i\in(a_k;a_{k+1})$. Для кожного $i\in A_k:\Delta x_i=\frac{1}{n2^k}=h_k$. Інтеграл у лівій частині нерівності представимо у вигляді суми:

$$\int_{-1}^{-\cos v}+\int_{-\cos v}^{x_1}+\int_{x_1}^{-a_{k_0-1}}+\sum_{k=-k_0+1}^{0}\int_{a_k}^{a_{k+1}}+\sum_{k=1}^{k_0-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx$$

Якщо $x\in(-1;-\cos v)$, то і $y\in(-1;-\cos v)$, тому $F_n(f;x)-F_n(f;y)=0$. На відрізку $(-\cos v;x_1):y<x$, тому $F_n(f;x)-F_n(f;y)=0$. На проміжку $[x_1;x_2]$: $\delta x_1=\frac{1}{n2^{k_0-1}}=\frac{1}{n2^{\ln n-1}}\le\frac{2}{n^2}$; окрім того, так як

$$F_n(f;x)-F_n(f;y)=\left[\begin{array}{c}0\\ L_2-L_1\end{array}\right.$$

то інтеграл тільки збільшиться, якщо ми вважатимемо $F_n(f;x)-F_n(f;y)=L_2-L_1$:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\le\frac{1}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}\int_{x_1}^{x_2}|F_n(f;x)-F(f;y)|^p dx\le$$

$$\le\Delta x_2\frac{|L_2-L_1|^p}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}=\Delta x_2\frac{\left|\frac{1}{\Delta x_2}\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt-\frac{1}{\Delta x_1}\int_{x_0}^{x_1}f(t)dt\right|^p}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}\le\frac{(\Delta x_2)^{1-p}(\Delta x_1)^{p-1}}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)}*$$

$$*\int_{x_0}^{x_1}\left|f\left(t+\frac{2}{n^2}\right)-f(t)\right|^p dt \le \frac{\int_{x_0}^{x_1}\left|f\left(t+\frac{2}{n^2}\right)-f(t)\right|^p dt}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)} \le \frac{\omega^p\left(f;\frac{2}{n^2}\right)}{\omega^p\left(f;\frac{1}{n^2}\right)} \le 2^p$$

Далі, розглянемо

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx = \int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} + \sum_{i\in A_k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx \le$$

$$\le \frac{1}{\omega^p\left(f;\frac{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\left[\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} + \sum_{i\in A_k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p dx\right]$$

Так як $0<x-y<h\sqrt{1-x^2}<h_k$, то $\forall x\in(x_i;x_{i+1}), i\in A_k, y\in(x_i;x_{i+1})$ або $y\in(x_{i-1};x_i)$, тобто

$$F_n(f;x)-F_n(f;y) = \left[\begin{array}{c} 0 \\ L_{i+1}-L_i \end{array}\right.$$

і, якщо ми покладемо

$$F_n(f;x)-F_n(f;y) = L_{i+1}-L_i,$$

то сума тільки збільшиться. Застосовуючи лему 1, отримаємо:

$$\sum_{i\in A_k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p dx \le h_k\sum_{i\in A_k}|L_{i+1}-L_i|^p \le \omega^p(f;h_k).$$

Розглянемо тепер $\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p dx$. Якщо $x\in(-a_{k+1};-a_{k+1}+h_k)$, то $y\in(-a_{k+1}-h_{k+1};-a_{k+1})$ або $y\in(-a_{k+1}-h_k;-a_{k+1}-h_{k+1})$ і підінтегральна функція приймає значення відповідно:

$$|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p = \left|n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_{k+1}}^{-a_{k+1}} f(t)dt\right|^p \tag{8}$$

або

$$|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p = \left|n2^k\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k} f(t)dt - n2^{k+1}\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}-h_{k+1}} f(t)dt\right|^p \tag{9}$$

Оцінюємо (8) за лемою 6, (9) за лемою 7. У всякому випадку,

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_{k+1}+h_k}|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p dx\ leq2*3^p\int_{-a_{k+1}-h_k}^{-a_{k+1}+h_{k+1}}|f(t+h_{k+1})-f(t)|^p dt \le$$

$$\le 2*3^p\omega^p(f;h_{k+1}) \le 3^p\omega^p(f;h_k)$$

Тобто:

$$\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\le\frac{\int_{-a_{k+1}}^{-a_k}|F_n(f;x)-F_n(f;y)|^p dx}{\omega^p\left(f;\frac{\sqrt{1-a_{k+1}^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\le\frac{3^p\omega^p(f;h_k)}{\omega^p(f;2^{\frac{k}{2}+1}h_k)}=C_k$$

Аналогічно оцінюється інтеграли $\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx$. Далі,

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;y)}{\omega\left(f;\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|^p dx\le 2^p+\sum_{k=-k_0+1}^{0}C_k+\sum_{k=1}^{k_0-1}C_k\le Ck_0<C\ln n$$

Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо* $f\in H_p^\omega, 0<h=\sin v<\frac{1}{2n}$, *існує* $\int_{-1}^{1}\frac{|f(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}dx$ *і виконується (1), то:*

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx\le C\ln n \tag{10}$$

Доведення. Нехай $h>0$, тоді:

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx\le\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x)-F_n(f;x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\frac{F_n(f;x)-F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-F_n(f;x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx$$

Оцінюємо перший доданок за теоремою 1, другий - за теоремою 3, третій- за теоремою 2. Маємо:

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{f(x\sqrt{1-h^2}-h\sqrt{1-x^2})-f(x)}{\omega\left(f;h\sqrt{1-x^2}+h^2\right)}\right|^p dx\le C_1\ln n+C_2\ln n+C_3\ln n=C\ln n$$

Що й треба було довести.

Якщо $h<0$, то оцінка (10) має місце за умови (2). Доведення аналогічне.

Бібліографічні посилання

1. *Моторний В. П., Сєдунова В. В.* Властивості деяких модулів неперервності інтегрованих функцій // В. П. Моторний, В. В. Сєдунова // Вісник ДНУ, Серія: Математика, 2013. — Т. 21 ,№ 6/1. — С. 132–140.

2. *Моторний В. П.* Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p // В. П. Моторный // Изв.АН СССР, Серия «Математика» 35. – 1971. —С.874–899.
3. *Колмогоров А. В., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа // А. В. Колмогоров, С. В. Фомин //

Надійшла до редколегії 20.01.2014

ISSN 9125 0912. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип. **19**

УДК 517.5

В. М. Трактинська*, М. Є. Ткаченко**

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: victoria-dp@yandex.ru*

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ 49050. *E-mail: mtkachenko2009@ukr.net*

Загальний вид лінійного неперервного функціоналу і критерій елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою з вагою

В статті досліджуються питання характеризації елемента найкращого наближення у просторах із змішаною інтегральною метрикою з вагою. Отримані загальний вид лінійного обмеженого функціонала і критерій елемента найкращого наближення у вказаних просторах.

Ключові слова: **лінійний функціонал у просторі зі змішаною інтегральною метрикою з вагою, критерій елемента найкращого наближення у просторі зі змішаною інтегральною метрикою з вагою.**

В статье исследуются вопросы характеризации элемента наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой с весом. Получены общий вид линейного ограниченного фукционала и критерий элемента наилучшего приближения в указанных пространствах.

Ключевые слова: **линейный функционал в пространстве со смешанной интегральной метрикой с весом, критерий элемента наилучшего приближения в пространстве со смешанной интегральной метрикой с весом.**

The questions of the characterization of the best approximant in spaces with mixed integral metric with weight were considered in this article. The general form of a bounded linear functional and the criterion of best approximant in these spaces are obtained.

Key words: **the bounded linear functional in spaces with mixed integral metric with weight, the criterion of best approximant in spaces with mixed integral metric with weight.**

Нехай $\Omega(x,y)$ - невід'ємна сумовна на $[a,b]\times[c,d]$ функція, яка відрізняється від нуля на множині повної міри. Позначимо через $L_{p,q,\Omega}$ простори вимірних на квадраті $[a,b]\times[c,d]$ функцій $f(x,y)$, для яких норма задається формулою:

$$\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}}dy\}^{\frac{1}{q}}, \quad 1\le p,q<\infty,$$

і скінченна.

Якщо $\Omega \equiv 1$, то замість $L_{p,q,\Omega}$ отримуємо $L_{p,q}$.

Наряду з кожним із просторів $L_{p,q,\Omega}$ розглянемо простір $L_{p',q',\Omega}$, де числа p, p', q, q' задовольняють умовам:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 \tag{1}$$

Враховуючи рівності

$$\lim_{q\to\infty}\{\int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{1}{q}} = \operatorname{ess}\sup_{y\in[c,d]}[\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{1}{p}},$$

$$\lim_{p\to\infty}\{\int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy\}^{\frac{1}{q}} = \{\int\limits_c^d \Omega(x,y)[\operatorname{ess}\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y)|]^q dy\}^{\frac{1}{q}},$$

буде доречно ввести до розгляду також класи функцій $f(x,y)$, норми яких визначаються за формулами:

$$||f||_{L_{p,\infty,\Omega}} = \operatorname{ess}\sup_{y\in[c,d]}[\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{1}{p}},$$

$$||f||_{L_{\infty,q,\Omega}} = \{\int\limits_c^d \Omega(x,y)[\operatorname{ess}\sup_{x\in[a,b]}|f(x,y)|]^q dy\}^{\frac{1}{q}}$$

і скінченні. Саме тому, з просторами $L_{p,1,\Omega}$ та $L_{1,q,\Omega}$ будемо розглядати простори $L_{p',\infty,\Omega}$ та $L_{\infty,q',\Omega}$.

Тепер для будь-яких пар функцій $f(x,y) \in L_{p,q,\Omega}$, $\varphi(x,y) \in L_{p',q',\Omega}$ неважко отримати узагальнення нерівності Гельдера виду:

$$|\int\limits_a^b \int\limits_c^d \Omega(x,y)f(x,y)\varphi(x,y)dxdy| \le ||f||_{L_{p,q,\Omega}} \cdot ||\varphi||_{L_{p',q',\Omega}}. \tag{2}$$

Надалі будуть потрібні такі оцінки для норм функцій в різних просторах

$$(d-c)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}||f||_{L_{p,p,\Omega}} \le ||f||_{L_{p,q,\Omega}} \le (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_{L_{q,q,\Omega}}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Будь-який лінійний неперервний функціонал, заданий в $L_{p,q,\Omega}$ має вигляд:*

$$F(f) = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y)f(x,y)\cdot\alpha(x,y)dxdy, \tag{4}$$

де $f(x,y)$ – довільна функція з $L_{p,q,\Omega}$, а $\alpha(x,y)$ – деяка функція з $L_{p',q',\Omega}$, визначена за функціоналом F і при цьому

$$||F|| = ||\alpha(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}}. \tag{5}$$

Для стислості обмежимося випадком $1 < p < q < \infty$. Нехай F – лінійний неперервний функціонал, заданий на $L_{p,q}$. Розглянемо значення цього функціоналу на характеристичних функціях $\chi_E(x,y)$ вимірних підмножин $E \subset [a,b] \times [c,d]$. Застосовуючи нерівність (3), маємо:

$$|F(\chi_E)| \leq ||F|| \cdot ||\chi_E||_{L_{p,q}} \leq ||F|| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot ||\chi_E||_{L_{q,q}} =$$

$$= ||F|| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \{\int\limits_c^d (\int\limits_a^b |\chi_E|^q dx)dy\}^{\frac{1}{q}} \leq ||F|| \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot (\mathrm{mes}E)^{\frac{1}{q}}.$$

Звідси випливає, що функція множин $\Phi(E) = F(\chi_E)$ адитивна та абсолютно неперервна на $[a,b] \times [c,d]$, тому за теоремою Радона-Нікодіма існує сумовна функція $\alpha(x,y)$ така, що:

$$F(\chi_E) = \Phi(E) = \int\int\limits_E \alpha(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b \chi_E(x,y) \cdot \alpha(x,y)dxdy.$$

Далі при доведенні повторюються міркування відповідних класичних теорем про вигляд лінійного неперервного функціоналу ([2], стор. 188). А саме доводиться, що формула (4) має місце для кожної простої, а потім й обмеженої функції. Далі встановлюється, що $\alpha(x,y)$ – функція з $L_{p',q',\Omega}$, і після цього доводиться, що формула (4) вірна для будь-якої довільної функції $f(x,y) \in L_{p,q,\Omega}$. Неважко також переконатись в тому, що $||F|| = ||\alpha(x,y)||_{L_{p',q'.\Omega}}$.

В подальшому нам знадобиться наступна теорема, отримана С.М. Нікольським в роботі [3].

Теорема 2. *1) Якщо $x, x_1, x_2, ..., x_n$ – елементи лінійного нормованого простору E, то*

$$\min_{\lambda} ||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k|| = \max\{F(x) : ||F|| \leq 1, F(x_k) = 0\}, \qquad (6)$$

де мінімум розповсюджений на всі можливі системи чисел λ_k, а максимум – на всі можливі лінійні функціонали F, визначені на E з $||F|| \leq 1$, що задовольняють рівність $F(x_k) = 0$.

Права частина (6) досягаєтьcя для деякого функціоналу.

2) Якщо для елемента x існує тільки один функціонал F_0, $||F_0|| \leq 1$, для якого $F_0(x) = ||x||$ і ліва частина (6) досягає мінімуму при $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, то $F_0(x_k) = 0$ для всіх $k = 1, 2, ..., n$.

Тепер доведемо такий допоміжний факт.

Лема 1. *Якщо* $||f||_{L_{p,q,\Omega}} > 0$, *то максимум в правій частині досягається для функцій виду:*

$$g_0(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{||f||^{q-1}_{L_{p,q,\Omega}}}[\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f|^{p-1} sign f(x,y), & \int\limits_a^b |f(x,y)|^p dx > 0; \\ 0, & \int\limits_a^b |f(x,y)|^p dx = 0. \end{cases}$$

Функція буде єдиною (коли $p = 1$ *або* $q = 1$ *за припущенням, що* $f(x,y) \neq 0$ *майже скрізь на* $[a,b] \times [c,d]$*).*

Доведення. За нерівністю Гельдера, якщо $||g||_{p',q',\Omega} \leq 1$,

$$\int\limits_a^b \int\limits_c^d \Omega(x,y) f(x,y) \cdot g(x,y) dxdy \leq ||f||_{p,q,\Omega} \cdot ||g||_{p',q',\Omega} \leq ||f||_{p,q,\Omega}.$$

Далі

$$||g_0||^{q'}_{p',q',\Omega} = \frac{1}{||f||^{(q-1)q'}_{p,q,\Omega}} \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f(x,y)|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'} \cdot (\Omega(x,y) \int\limits_a^b |f|^{(p-1)\cdot p'} dx)^{\frac{q'}{p'}} dy =$$

$$= \frac{1}{||f||^{q}_{p,q,\Omega}} \int\limits_c^d [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'} \cdot (\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx)^{\frac{q'}{p'}} dy =$$

$$= \frac{1}{||f||^{q}_{p,q,\Omega}} \int\limits_c^d (\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx)^{\frac{q}{p}} dy = 1.$$

Крім того, в силу умови в нерівності Гельдера:

$$\int\limits_c^d \int\limits_a^b \Omega(x,y) f(x,y) \cdot g_0(x,y) dxdy = ||f||_{L_{p,q,\Omega}},$$

причому рівність виконується тоді та тільки тоді, коли

$$g_0(x,y) = \frac{1}{||f||^{q-1}_{p,q,\Omega}} [\int\limits_a^b \Omega(x,y)|f|^p dx]^{\frac{q}{p}-1} \cdot |f|^{p-1} \mathrm{sign} f(x,y),$$

майже скрізь на $[a,b] \times [c,d]$ там, де $f(x,y) \neq 0$.

Саме тому, функція $g_0(x,y)$ буде єдиною (коли $p = 1$ або $q = 1$), за припущенням, що

$$\mathrm{mes}\{(x,y) : f(x,y) = 0\} = 0$$

з точністю до множини міри нуль.

Тобто в просторі $L_{p,q}$ вона єдина.

Нехай на квадраті $[a,b]\times[c,d]$ задана лінійно-незалежна система функцій $\varphi_k(x,y)\in L_{p,q}$ і функція $f(x,y)\in L_{p,q,\Omega}$ $(1\le p<q<\infty)$ і не є поліномом виду

$$P_k(x,y)=\sum_{i=1}^{k}c_i\varphi_i(x,y), \tag{7}$$

де c_i $(i=1,...,n)$ – числа.

Теорема 3. *Для того, щоб поліном* $P_k^*(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{k}c_i^*\varphi_i(x,y)$ *був поліномом найкращого наближення для функції* $f(x,y)$ *в метриці* $L_{p,q}$, *достатньо і (коли* $p=1$ *або* $q=1$ *у випадку, коли різниця* $f(x,y)-P_k^*(x,y)\neq 0$ *майже скрізь на* $[a,b]\times[c,d]$*) необхідно, щоб для функції*

$$\alpha(x,y)=\begin{cases}[\int\limits_a^b\Omega\cdot|f-P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}-1}\cdot|f-P_k^*|^{p-1}sgn(f-P_k^*), & \int\limits_a^b|f-P_k^*|^p dx>0,\\ 0, & \int\limits_a^b|f-P_k^*|^p dx=0,\end{cases} \tag{8}$$

і будь-якого полінома $P_k(x,y)$ *виду (7) мала місце рівність:*

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b\Omega(x,y)P_k(x,y)\cdot\alpha(x,y)dxdy=0. \tag{9}$$

Теорема 3 узагальнює критерій елемента найкращого наближення в просторах $L_p[a,b]$ на випадок функцій двох змінних у просторах із змішаною метрикою з вагою.

Доведення. Спочатку доведемо достатність.

Припустимо, що функція $\alpha(x,y)$ задовольняє умови (8) та (9), тому неважко перевірити, що

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b\Omega(x,y)f(x,y)\cdot\alpha(x,y)dxdy=||f-P_k^*||^q_{L_{p,q,\Omega}}. \tag{10}$$

Крім того,

$$||\alpha||_{p',q',\Omega}=\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|\alpha|^{p'}dx]^{\frac{q'}{p'}}dy\}^{\frac{1}{p'}}=$$

$$=\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|f-P_k^*|^{(p-1)\cdot p'}dx]^{\frac{q'}{p'}}\cdot[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|f-P_k^*|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'}dy\}^{\frac{1}{q'}}=$$

$$=\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|f-P_k^*|^p dx]^{\frac{q'}{p'}+(\frac{q}{p}-1)\cdot q'}dy\}^{\frac{1}{q'}}=\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|f-P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}}dy\}^{\frac{1}{q'}}=$$

$$=\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|f-P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}}dy\}^{\frac{q-1}{q}}=||f-P_k^*||^{q-1}_{L_{p,q,\Omega}}.$$

Тобто

$$||\alpha(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}}=||f-P_k^*||^{q-1}_{L_{p,q,\Omega}}. \tag{11}$$

Далі, для будь-якого полінома $P_k(x,y)$ виду (7) будемо мати

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b\Omega(x,y)f(x,y)\cdot\alpha(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\int\limits_a^b\Omega(x,y)(f(x,y)-P_k(x,y))\cdot\alpha(x,y)dxdy\le$$

$$\le||f-P_k||_{L_{p,q,\Omega}}\cdot||\alpha||_{L_{p',q',\Omega}}=||f-P_k||_{L_{p,q,\Omega}}\cdot||f-P_k^*||^{q-1}_{L_{p,q,\Omega}},$$

тобто

$$\int\limits_c^d\int\limits_a^b\Omega(x,y)f(x,y)\cdot\alpha(x,y)dxdy\le||f-P_k||_{p,q,\Omega}\cdot||f-P_k^*||^{q-1}_{p,q,\Omega}. \tag{12}$$

Порівнюючи (9) і (11), отримаємо, що

$$||f-P_k^*||^q_{p,q,\Omega}\le||f-P_k||_{p,q,\Omega}\cdot||f-P_k^*||^{q-1}_{p,q,\Omega}$$

$$||f-P_k^*||_{p,q,\Omega}\le||f-P_k||_{p,q,\Omega},$$

тобто $P_k^*(x,y)$ – поліном найкращого наближення для функції $f(x,y)$ в метриці $L_{p,q,\Omega}$.

Доведемо необхідність.

Нехай $P_k^*(x,y)$ – поліном найкращого наближення $f(x,y)$ і $\alpha(x,y)$ – функція, побудована за формулою (8).

Покладемо $\alpha^*(x,y)=\frac{\alpha(x,y)}{E_m^{q-1}(f)_{L_{p,q,\Omega}}}$. Тоді виконуються такі умови:

а) $||\alpha^*(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}}=1$;

б) $\int\limits_a^b\int\limits_c^d\Omega(x,y)(f(x,y)-P_k^*(x,y))\cdot\alpha^*(x,y)dxdy=||f-P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}}=E_m(f)_{L_{p,q,\Omega}}$.

Дійсно,

$$||\alpha^*(x,y)||_{L_{p',q',\Omega}}=\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|\alpha^*|^{p'}dx]^{\frac{q'}{p'}}dy\}^{\frac{1}{q'}}=$$

$$=\frac{1}{E_m^{q-1}(f)_{p,q,\Omega}}\{\int\limits_c^d[\int\limits_a^b\Omega(x,y)|f-P_k^*|^{(p-1)\cdot p'}dx]^{\frac{q'}{p'}}\cdot[\int\limits_a^b|f-P_k^*|^p dx]^{(\frac{q}{p}-1)\cdot q'}dy\}^{\frac{1}{q'}}=$$

$$= \frac{1}{E_m^{q-1}(f)_{p,q,\Omega}} \{ \int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y) |f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q'}{p'} + (\frac{q}{p} - 1) \cdot q'} dy \}^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \frac{1}{||f - P_k^*||_\Omega^{q-1}} \{ \int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y) |f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy \}^{\frac{q-1}{q}} = 1.$$

Доведемо умову б).

$$\int_a^b \int_c^d \Omega(x,y)(f(x,y) - P_k^*(x,y)) \cdot \alpha^*(x,y) dx dy =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \frac{1}{E_m^{q-1}(f)_{L_{p,q,\Omega}}} (f - P_k^*) [\int_a^b \Omega(x,y) |f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p} - 1} \cdot |f - P_k^*|^{p-1} \operatorname{sgn}(f - P_k^*) dx dy =$$

$$= \frac{1}{||f - P_k^*||_\Omega^{q-1}} \int_c^d [\int_a^b \Omega(x,y) |f - P_k^*|^p dx]^{\frac{q}{p}} dy =$$

$$= \frac{1}{||f - P_k^*||_{p,q,\Omega}^{q-1}} \cdot ||f - P_k^*||_{p,q}^q = ||f - P_k^*||_{L_{p,q,\Omega}} = E_m(f)_{L_{p,q,\Omega}}.$$

Тоді з другої частини теореми і леми 1 випливає, що $\alpha^*(x,y)$, а разом з нею і $\alpha(x,y)$ задовольняють властивість (9).

Теорема повністю доведена.

Бібліографічні посилання

1. *Смирнов Г. С.* Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой / Г. С. Смирнов // Укр. мат. журн., 1973. — Т. 25, № 1. — С. 134–138.
2. *Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа /Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М., 1965.
3. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем /С. М. Никольский // Изв. АН СССР, серия: Математика, 1946. — Т. 10, № 3.

Надійшла до редколегії 1.05.2014

ISSN 9125 0912. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2014, вип.* **19**

УДК 512.544

V. A. Chupordia*

* Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск 49010. *E-mail: vchupordya@mail.ru*

On the structure of artinian-by-(finite rank) modules over generalized soluble groups

Нехай R – кільце, G – група. R-модуль A називається модулем скінченного рангу над артіновим, якщо $\mathbf{Tor}_R(A)$ є артіновим і $A/\mathbf{Tor}_R(A)$ має скінченний R-ранг. Досліджуються модулі A над груповими кільцями $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$ такі, що $A/C_A(H)$ є модулем скінченного рангу над артіновим (як $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-модуль) для кожної власної підгрупи H.

Ключові слова: **модуль, групове кільце, модуль над груповим кільцем, узагальнено розв'язна група, радикал групи, артіновий модуль, узагальнено радикальна група, модуль скінченного рангу.**

Пусть R – кольцо, G – группа. R-модуль A называется модулем конечного ранга над артиновым, если $\mathbf{Tor}_R(A)$ является артиновым и $A/\mathbf{Tor}_R(A)$ имеет конечный R-ранг. Исследуются модули A над групповыми кольцами $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$ такие, что $A/C_A(H)$ является модулем конечного ранга над артиновым (как $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-модуль) для кажной собственной подгруппы H.

Ключевые слова: **модуль, групповое кольцо, модуль над групповым кольцом, обобщенно разрешимая группа, радикал группы, артинов модуль, обобщенно радикальная группа, модуль конечного ранга.**

Let R be a ring and G a group. An R-module A is said to be *artinian-by-(finite rank)*, if $\mathbf{Tor}_R(A)$ is artinian and $A/\mathbf{Tor}_R(A)$ has finite R-rank. In this paper modules A over a group ring $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$ such that $A/C_A(H)$ is artinian-by-(finite rank) (as an $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-module) for every proper subgroup H are investigated.

Key words: **modules, group rings, modules over group rings, generalized soluble groups, radical groups, artinian modules, generalized radical groups, modules of finite rank.**

1. Introduction

Let R be a ring, G a group and A an RG–module. The modules over group rings are classic objects of study with well established links to various areas of algebra. The case when G is a finite group has been studying in sufficient details for a long time. For the case when G is an infinite group, the situation is different. Thus study modules over group rings of infinite groups requires some different approaches and restrictions. For instance, the classical finiteness conditions are largely employed and popular. The very first restrictions here were those who came from ring theory, namely the conditions like "to be noetherian"and "to be artinian". Noetherian and artinian modules over group rings are also very well investigated. Many aspects of the theory of artinian modules over group rings are treated in the book [5]. Recently the so–called finitary approach begun to be employed intensively in the theory of infinite dimensional linear groups where it brings many interesting promising results.

Let A be a module over group ring RG, if H is a subgroup of G, then consider the centralizer $C_A(H) = \{a \in A \mid ah = a$ for each element $h \in H\}$ of H in A. Clearly $C_A(H)$ is an RH-submodule of A and H really acts on $A/C_A(H)$. The R-factor-module $A/C_A(H)$ is called the *cocentralizer of H in A*. Then $H/C_H(A/C_A(H))$ is isomorphic to a subgroup of automorphism group of an R-module $A/C_A(H)$. It is not hard to see that $C_H(A/C_A(H))$ is abelian, and therefore the structure of the automorphism group of the R–module $A/C_A(H)$ defines the structure of whole group H.

Let $\mathfrak{M}$ be a class of R-modules. We say that A is an *$\mathfrak{M}$-finitary module over RG*, if $A/C_A(x) \in \mathfrak{M}$ for each element $x \in G$. If R is a field, $C_G(A) = \langle 1 \rangle$ and $\mathfrak{M}$ is a class of all finite dimensional vector spaces over R, then we come to the finitary linear groups. The theory of finitary linear groups is quite well developed (see, the survey [9]). B.A.F. Wehrfritz began to consider the cases when $\mathfrak{M}$ is the class of finite R-modules [11, 13, 14, 16], when $\mathfrak{M}$ is the class of noetherian R-modules [12], when $\mathfrak{M}$ is the class of artinian R-modules [14, 15, 16, 17, 18]. The artinian-finitary modules have been considered also in the paper [6]. The notion of an minimax module extends the notions of noetherian and artinian modules. An R-module A is said to be *minimax*, if A has a finite series of submodules, whose factors are either noetherian or artinian. It is not hard to show that if R is an integral domain, then every minimax R-module A includes a noetherian submodule B such that A/B is artinian. The first natural case here is the case when $R = \mathbb{Z}$ is the ring of all integers. This case has very important applications in generalized soluble groups. Every $\mathbb{Z}$-minimax module M has he following important property: $\mathbf{r}_{\mathbb{Z}}(M)$ is finite and $\mathbf{Tor}(M)$ is an artinian $\mathbb{Z}$-module.

Let R be an integral domain and A be an R-module. An analogue of the concept of a dimension for modules over integral domains is the concept of R-rank. One of the essential differences of R-modules and vector spaces is that some elements of A can have a non-zero annihilator in the ring. Put $\mathbf{Tor}_R(A) = \{a \in A \mid \mathbf{Ann}_R(a) \neq \langle 0 \rangle\}$. It is not hard to see that $\mathbf{Tor}_R(A)$ is an R-submodule of A. Actually, the concept of R-rank works only for the factor-module $A/\mathbf{Tor}_R(A)$. In particular, the finiteness of R-rank does not affect the submodule $\mathbf{Tor}_R(A)$. We say that an R-module A is an *artinian-by-(finite rank)*, if $\mathbf{Tor}_R(A)$ is artinian and $A/\mathbf{Tor}_R(A)$ has finite R-rank. In particular, if an artinian-by-(finite rank) module A is R-torsion-free, then it could be embedded into a finite dimensional vector space (over the field of fractions of R). If A is R-periodic, then it is artinian.

Let G be a group, A an RG-module, and $\mathfrak{M}$ a class of R-modules. Put

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G) = \{H \mid H \text{ is a subgroup of } G \text{ such that } A/C_A(H) \in \mathfrak{M}\}$$

If A is an $\mathfrak{M}$-finitary module, then $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$ contains every cyclic subgroup (moreover, every finitely generated subgroup whenever $\mathfrak{M}$ satisfies some natural restrictions). It is clear that the structure of G depends significantly on which important subfamilies of the family $\Lambda(G)$ of all proper subgroups of G include $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$. The first natural question that arises here is the following: What is the structure of a group G in which $\Lambda(G) = \mathcal{C}_{\mathfrak{M}}(G)$ (in other words, the cocentralizer of every proper subgroup of G belongs to $\mathfrak{M}$)? In [7] it was considered the case when $R = \mathbb{Z}$ and $\mathfrak{M}$ is the class of all artinian-by-(finite rank) modules. The next natural generalization of the case when $R = \mathbb{Z}$ is the case when $R = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ – the ring of p-adic integer, where p is prime. The proofs of the results we used the same technique as in [7].

Recall that a group G is called *generalized radical*, if G has an ascending series whose factors are locally nilpotent or locally finite.

The following results were obtained:

Theorem 1. *Let G be a locally generalized radical group and A a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-module. If the factor-module $A/C_A(H)$ is artinian-by-(finite rank) for every proper subgroup H of G, then either $A/C_A(G)$ is artinian-by-(finite rank) or $G/C_G(A)$ is a cyclic or quasicyclic q-group for some prime q.*

Corollary 1. *Let G be a locally generalized radical group and A a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-module. If a factor-module $A/C_A(H)$ is minimax for every proper subgroup H of G, then either $A/C_A(G)$ is minimax or $G/C_G(A)$ is a cyclic or quasicyclic q-group for some prime q.*

Corollary 2. *Let G be a locally generalized radical group and A a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-module. If a factor-module $A/C_A(H)$ is finitely generated for every proper subgroup H of G, then either $A/C_A(G)$ is finitely generated or $G/C_G(A)$ is a cyclic or quasicyclic q-group for some prime q.*

Corollary 3. *Let G be a locally generalized radical group and A a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-module. If a factor-module $A/C_A(H)$ is artinian for every proper subgroup H of G, then either $A/C_A(G)$ is artinian or $G/C_G(A)$ is a cyclic or quasicyclic q-group for some prime q.*

2. Some preparatory results

Lemma 1 ([7]). *Let R be a ring, G a group and A an RG–module. If L, H are subgroups of G, whose cocentralizers are artinian–by–(finite rank) modules, then $A/C_A(\langle H, L\rangle)$ is also artinian–by–(finite rank).*

A group G is said to be $\mathfrak{F}$-*perfect* if G does not include proper subgroups of finite index.

Let G be a generalized radical group. Then either G has an ascendant locally nilpotent subgroup or it has an ascendant locally finite subgroup. In the first case, the locally nilpotent radical $\mathbf{Lnr}(G)$ of G is non-identity. In the second case, it is not hard to see that G includes a non-trivial normal locally finite subgroup. Clearly in every group G the subgroup $\mathbf{Lfr}(G)$ generated by all normal locally finite subgroups is the largest normal locally finite subgroup (the *locally finite radical*). Thus every generalized radical group has an ascending series of normal subgroups with locally nilpotent or locally finite factors.

Observe also that a periodic generalized radical group is locally finite, and hence a periodic locally generalized radical group is also locally finite.

Let q be a prime and A is an additive abelian q-group. For each positive integer n we define n^{th} layer $\Omega_n(A)$ by the following rule: $\Omega_n(A) = \{a \in A \mid q^n a = 0\}$. Clearly $\Omega_n(A)$ is a characteristic subgroup of A.

Futher by $\mathbf{Dr}_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ we denote a direct product of groups G_λ, $\lambda \in \Lambda$.

Lemma 2. *Let G be a locally generalized radical group and A be a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-module. Suppose that A includes a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-submodule B which is artinian-by-(finite rank). Then the following assertions hold:*

(i) $G/C_G(B)$ is soluble-by-finite.

(ii) If $G/C_G(B)$ is periodic, then it is nilpotent-by-finite.

(iii) If $G/C_G(B)$ is $\mathfrak{F}$-perfect and periodic, then it is abelian. Moreover $[[B,G],G] = \langle 0\rangle$.

Proof. Without loss of generality we can suppose that $C_G(B) = \langle 1\rangle$. We recall that the additive group of artinian $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-module is Chernikov, that is $K = \mathbf{Tor}_{\mathbb{Z}_{p^\infty}}(B)$ includes a divisible subgroup D, which is a direct sum of quasicyclic subgroups such that K/D is finite. The additive group of B/K is torsion-free and has finite $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-rank. In particular, the $\Pi(D) = \{p\}$. Clearly D is G-invariant. The factor-group $G/C_G(D)$ is isomorphic to a subgroup of $\mathbf{GL}_m(\mathbb{Q}_{p^\infty})$ where $\mathbb{Q}_{p^\infty}$ is the field of fractions of $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ and m satisfies $p^m = |\mathbf{\Omega}_1(D)|$. Let $\mathbb{Q}_{p^\infty}$ be a field of fractions of $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, then $G/C_G(D)$ is isomorphic to a subgroup of $\mathbf{GL}_m(\mathbb{Q}_{p^\infty})$. Note that $\mathbf{char}(\mathbb{Q}_{p^\infty}) = 0$. Being locally generalized radical, $G/C_G(D)$ does not include the non-cyclic free subgroup; thus an application of Tits Theorem (see, for example, [10, Corollary 10.17]) shows that $G/C_G(D)$ is soluble-by-finite. If G is periodic, then $G/C_G(D)$ is finite (see, for example, [10, Theorem 9.33]). Since K/D is finite, $G/C_G(K/D)$ is finite. Finally, $G/C_G(B/K)$ is isomorphic to a subgroup of $\mathbf{GL}_r(\mathbb{Q}_{p^\infty})$, where $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathbb{Z}_{p^\infty}}(B/K)$. Using again the fact that $G/C_G(A/K)$ does not include the non-cyclic free subgroup and Tits Theorem or Theorem 9.33 of the book [10] (for periodic G), we obtain that $G/C_G(B/K)$ is soluble-by-finite (respectively finite whenever G is periodic). Put $Z = C_G(D) \cap C_G(K/D) \cap C_G(B/K)$. Then G/Z is embedded in $G/C_G(D) \cap G/C_G(K/D) \cap G/C_G(B/K)$, in particular, G/Z is soluble-by-finite (respectively finite). If $x \in Z$, then x acts trivially on every factor of the series $\langle 0\rangle \le D \le K \le A$. Then Z is nilpotent [4]. It follows that G is soluble-by-finite (respectively, for periodic G, it is nilpotent–by–finite). This completes the proof of (i) and (ii).

Now we prove (iii). Suppose now that G is an $\mathfrak{F}$-perfect group. Again consider the series of G-invariant subgroups $\langle 0\rangle \le K \le B$. Being abelian and Chernikov, K is an union of ascending series

$$\langle 0\rangle = K_0 \le K_1 \le \ldots \le K_n \le K_{n+1} \le \ldots$$

of G-invariant finite subgroups K_n, $n \in \mathbb{N}$. Then the factor-group $G/C_G(K_n)$ is finite, $n \in \mathbb{N}$. Since G is $\mathfrak{F}$-perfect, $G = C_G(K_n)$ for each $n \in \mathbb{N}$. The equation $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$

implies that $G = C_G(K)$. By the above $G/C_G(B/K)$ is soluble-by-finite, and being $\mathfrak{F}$-perfect, it is soluble. Then $G/C_G(B/K)$ includes normal subgroups U, V such that $C_G(B/K) \le U \le V$, $U/C_G(B/K)$ is isomorphic to a subgroup of $\mathbf{UT}_r(\mathbb{Q}_{p^\infty})$, V/U includes a free abelian subgroup of finite index [1, Theorem 2]. Since $G/C_G(B/K)$ is $\mathfrak{F}$-perfect, it follows that $G/C_G(B/K)$ is torsion-free. Being periodic, $G/C_G(B/K)$ must be identity. In other words, $G = C_G(B/K)$. Hence G acts trivially on every factor of the series $\langle 0\rangle \le K \le A$, so that $[[B,G],G] = \langle 0\rangle$ and we obtain that G is abelian [4].

Corollary 4. *Let G be a group and A a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-module. If the factor-module $A/C_A(G)$ is artinian-by-(finite rank), then every locally generalized radical subgroup of $G/C_G(A)$ is soluble-by-finite, and every periodic subgroup of $G/C_G(A)$ is nilpotent-by-finite.*

Proof. Indeed, Lemma 2 shows that $G/C_G(A/C_A(G))$ is soluble-by-finite. Every element $x \in C_G(A/C_A(G))$ acts trivially in the factors of the series $\langle 0\rangle \le C_A(G) \le A$. It follows that $C_G(A/C_A(G))$ is abelian. Suppose now that $H/C_G(A)$ is a periodic subgroup. Since $A/C_A(G)$ is artinian–by–(finite rank), A has a series of H-invariant subgroups $\langle 0\rangle \le C_A(G) \le D \le K \le A$ where $D/C_A(G)$ is a divisible Chernikov subgroup, K/D is finite and A/K is torsion-free and has finite $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-rank. In Lemma 2 we have already proved that $G/C_G(D/C_A(G))$, $G/C_G(K/D)$ and $G/C_G(A/K)$ are finite. Let $Z = C_G(D/C_A(G)) \cap C_G(K/D) \cap C_G(A/K)$. Then G/Z is finite. If $x \in Z$, then x acts trivially on every factor of the series $\langle 0\rangle \le C_A(G) \le D \le K \le A$. therefore Z is nilpotent [4].

Next result is well-known, but it is not able to find an appropriate reference.

Lemma 3. *Let G be an abelian group. Suppose that $G \ne KL$ for arbitrary proper subgroups K, L. Then G is a cyclic or quasicyclic q-group for some prime q.*

Proof. If G is finite, then it is not hard to see that G is a cyclic q-group for some prime q. Therefore suppose that G is infinite. If G is periodic, then obviously G is a q-group for some prime q. Let B be a basic subgroup of G, that is B is a pure subgroup of G such that B is a direct product of cyclic q-subgroups and G/B is divisible. The existence of such subgroups follows from [3, Theorem 32.3]. Since G/B is divisible, $G/B = \mathbf{Dr}_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ where D_λ is a quasicyclic subgroup for every $\lambda \in \Lambda$ (see, for example, [3, Theorem 23.1]). Our condition shows that G/B is a quasicyclic group. In particular, if $B = \langle 1\rangle$, then G is a quasicyclic group. Assume that $B \ne \langle 1\rangle$. If B is a bounded subgroup, then $G = B \times C$ for some subgroup C (see, for example, [3, Theorem 27.5]), and we obtain a contradiction. Suppose that B is not bounded. Then B includes a subgroup $C = \mathbf{Dr}_{n\in\mathbb{N}}\langle c_n\rangle$ such that $B = C \times U$ for some subgroup U and $|c_n| = q^n$, $n \in \mathbb{N}$. Let $E = \langle c_n^{-1} \cdot c_{n+1}^q \mid n \in \mathbb{N}\rangle$. Then the factor-group C/E is quasicyclic, so that B/EU is also quasicyclic. It follows that G/EU is a direct product of two quasicyclic subgroups, which yields a contradiction. This shows that $B = \langle 1\rangle$, which proves our result.

Corollary 5. *Let G be a soluble group. Suppose that G is not finitely generated and $G \ne \langle K, L\rangle$ for arbitrary proper subgroups K, L. Then $G/[G,G]$ is a quasicyclic q-group for some prime q.*

If G is a group, then by $\mathbf{Tor}(G)$ we will denote the maximal normal periodic subgroup of G. We recall that if G is a locally nilpotent group, then $\mathbf{Tor}(G)$ is a (characteristic) subgroup of G and $G/\mathbf{Tor}(G)$ is torsion-free.

3. Proof of main Theorem

Again suppose that $C_G(A) = \langle 1 \rangle$. Suppose that G is a finitely generated group. Then we can choose a finite subset M such that $G = \langle M \rangle$, but $G \neq \langle S \rangle$ for every subset $S \neq M$. If $|M| > 1$, then $M = \{x\} \cup S$ where $x \notin S$ and $S \neq \varnothing$. It follows that $\langle S \rangle = U \neq G$, thus $A/C_A(U)$ is artinian-by-(finite rank). The factor $A/C_A(x)$ is also artinian-by-(finite rank), and Lemma 1 shows that $\langle x, U \rangle = \langle x, S \rangle = G$ has an artinian-by-(finite rank) cocentralizer.

Suppose that $M = \{y\}$, that is $G = \langle y \rangle$ is a cyclic group. If y has infinite order, then $\langle y \rangle = \langle y^{p_1} \rangle \langle y^{p_2} \rangle$ where p_1, p_2 are primes, $p_1 \neq p_2$, and Lemma 1 again implies that $A/C_A(G)$ is artinian-by-(finite rank). Finally, if y has finite order, but this order is not a prime power, then $\langle y \rangle$ is a product of two proper subgroups, and Lemma 1 implies that $A/C_A(G)$ is artinian-by-(finite rank).

Assume now that G is not finitely generated and $A/C_A(G)$ is not artinian-by-(finite rank). Suppose that G includes a proper subgroup of finite index. Then G includes a proper normal subgroup H of finite index. We can choose a finitely generated subgroup F such that $G = HF$. Since G is not finitely generated, $F \neq G$. It follows that cocentralizers of both subgroups H and F are artinian-by-(finite rank). Lemma 1 shows that $FH = G$ has an artinian-by-(finite rank) cocentralizer, and we obtain a contradiction. This contradiction shows that G is an $\mathfrak{F}$-perfect group.

If H is a proper subgroup of G, then Corollary 4 shows that H is soluble-by-finite. In particular, G is locally-(soluble-by-finite). By Theorem A of the paper [2], G includes a normal locally soluble subgroup L such that G/L is finite or locally finite simple group. Since G is an $\mathfrak{F}$-perfect group, then in the first case $G = L$, i.e. G is locally soluble. Consider the second case. Put $C = C_A(L)$. In a natural way, we can consider C as $\mathbb{Z}_{p^\infty}(G/L)$-module. $C_{G/L}(C)$ is a normal subgroup of G/L. Since G/L is a simple group, then either $C_{G/L}(C)$ is the identity subgroup or $C_{G/L}(C) = G/L$. In the second case $C \leq C_A(G)$ and $A/C_A(G)$ is artinian-by-(finite rank). This contradiction shows that $C_{G/L}(C) =< 1 >$. Let H/L be an arbitrary proper subgroup of G/L. Then H is a proper subgroup of G, therefore $A/C_A(H)$ is artinian-by-(finite rank). It follows that $C/(C \cap C_A(H))$ is also artinian-by-(finite rank). Clearly $C_C(H/L) \leq C \cap C_A(H)$, so that $C/C_C(H/L)$ is artinian-by-(finite rank). Since H/L is periodic, it is nilpotent-by-finite by Corollary 4. In other words, every proper subgroup of G/L is nilpotent-by-finite. Using now Theorem A of the paper [8], we obtain that either G/L is soluble-by-finite or a q-group for some prime q. In any case, G/L cannot be an infinite simple group. This contradiction shows that G is locally soluble. Being an infinite locally soluble group, G has a non-identity proper normal subgroup. Corollary 4 shows that this subgroup is soluble. It follows that G includes a non-identity normal abelian subgroup. In turn, it follows that the locally nilpotent radical R_1 of G is non-identity. Suppose that $G \neq R_1$.

Being $\mathfrak{F}$-perfect, G/R_1 is infinite. Using the above arguments, we obtain that the locally nilpotent radical R_2/R_1 of G/R_1 is non-identity. If $G \neq R_2$, then the locally nilpotent radical R_3/R_2 of G/R_2 is non-identity, and so on. Using ordinary induction, we obtain that G is a radical group. Suppose that the upper radical series of G is infinite and consider its term R_ω, where ω is the first infinite ordinal. By its choice, R_ω is not soluble. Then Corollary 4 shows that $R_\omega = G$.

Since R_n is a proper subgroup of G, $A/C_A(R_n)$ is artinian-by-(finite rank), $n \in \mathbb{N}$. R_n is normal in G, therefore $C_A(R_n)$ is a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-submodule. Lemma 2 (*iii*) shows that $G/C_G(A/C_A(R_n))$ is abelian. Suppose that there exists a positive integer m such that $G \neq C_G(A/C_A(R_m))$, then $[G, G]$ is a proper subgroup of G. An application of Corollary 4 to Lemma 2 shows that $[G, G]$ is soluble, thus even G is soluble. This contradiction proves the equality $G = C_G(A/C_A(R_n))$. In other words, $[A, G] \leq C_A(R_n)$. Since it is valid for each $n \in \mathbb{N}$, $[A, G] \leq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_A(R_n)$. The equation $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ implies that $C_A(G) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_A(R_n)$. Hence $[A, G] \leq C_A(G)$. Thus G acts trivially on both factors $C_A(G)$ and $A/C_A(G)$, which follows that G is abelian [4]. Contradiction. This contradiction proves that G is soluble.

Let $D = [G, G]$. Then by Corollary 5 G/D is a quasicyclic q-group for some prime q. It follows that G has an ascending series of normal subgroups

$$D = K_0 \leq K_1 \leq \ldots \leq K_n \leq K_{n+1} \leq \ldots$$

such that K_n/D is a cyclic group of order q^n, $n \in \mathbb{N}$, and $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Every subgroup K_n is proper and normal in G, therefore $C_A(K_n)$ is a $\mathbb{Z}_{p^\infty}G$-submodule and $A/C_A(K_n)$ is artinian-by-(finite rank). Lemma 2 shows that $[[A, G], G] \leq C_A(K_n)$. It is valid for each $n \in \mathbb{N}$, and therefore $[[A, G], G] \leq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_A(K_n)$. The equation $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ implies that $C_A(G) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_A(R_n)$. Hence $[[A, G], G] \leq C_A(G)$. It follows that G acts trivially on factors $C_A(G)$, $[A, G]/C_A(G)$ and $A/[A, G]$. It follows that G is nilpotent of class at most 2 [4].

If G is abelian, then Lemma 3 shows that G is a cyclic or quasicyclic q–group for some prime q. Suppose that G is non-abelian. Let $T = \mathbf{Tor}(G)$. If we suppose that $T \neq G$, then G/T is a non-identity torsion-free nilpotent group. In particular, G/T has a non-identity torsion-free abelian factor-group, which contradicts Corollary 5. This contradiction shows that G is a periodic group. Moreover, G is a q-group. Since G is nilpotent of class 2, then $[G, G] \leq \zeta(G)$. In particular, $G/\zeta(G)$ is a quasicyclic group. In this case, $[G, G]$ is a Chernikov subgroup (see, for example, [5, Theorem 23.1]). It follows that whole group G is Chernikov. Being $\mathfrak{F}$-perfect, G is abelian, which completes the proof. It is not hard to proof that in the Theorem 1 if $G/C_G(A)$ is a quasicyclic q-group for some prime q than $q = p$.

References

1. *Charin V.S.* On the automorphism groups of nilpotent groups // Ukrain Math. J. – 1954, – 6, № 3. – P. 295-304.
2. *Dixon M.R, Evans M.J, Smith H.* Groups with all proper subgroups soluble-by-finite rank // Journal of Algebra 2005, – 289, – P. 135-147.

3. *Fuchs L.* Infinite abelian groups. Vol. 1. New York: Academic Press, 1970.
4. *Kaloujnine L.A.* Uber gewisse Beziehungen zwischen eine Gruppe und ihren Automorphismen // Bericht Math Tagung Berlin 1953. – P. 164-172.
5. *Kurdachenko L.A, Otal J, Subbotin I.Ya.* Artinian modules over group rings. Basel: Birkhauser, 2007.
6. *Kurdachenko L.A, Subbotin I.Ya, Chupordya V.A.* On bounded artinian finitary modules. International Journal of Algebra and Computation. – 2007. – 17, № 4. – P. 881-893.
7. *Kurdachenko L.A, Subbotin I.Ya, Chupordya V.A.* On the structure of some modules over generalized soluble groups // Turkish Journal of Mathematics. – 2014. – 38. – P. 52-59.
8. *Napolitani F, Pegoraro E.* On groups with nilpotent by Chernikov proper subgroup // Arch. Math. – 1997. – 69. – P. 89-94.
9. *Phillips R.* Finitary linear groups: a survey. "Finite and locally finite groups"1995; NATO ASI ser C 471 Dordrecht, Kluwer. – P. 111-146.
10. *Wehrfritz B.A.F.* Infinite linear groups. Berlin: Springer, 1973.
11. *Wehrfritz B.A.F.* Finite-finitary groups of automorphisms // Journal of Algebra and Its Applications. – 2002. – 4. – P. 375-389.
12. *Wehrfritz B.A.F.* On generalized finitary groups // Journal of Algebra. – 2002. – 247. – P. 707-727.
13. *Wehrfritz B.A.F.* Finitary automorphism groups over commutative rings // Journal Pure Appl Algebra. – 2002. – 172. – P. 337-346.
14. *Wehrfritz B.A.F.* Finitary and artinian-finitary groups over the integers Z // Ukrainian Math Journal. – 2002. – 54. – P. 924-936.
15. *Wehrfritz B.A.F.* Artinian-finitary groups over commutative rings // Illinois Journal of Math. – 2003. – 47. – P. 551-565.
16. *Wehrfritz B.A.F.* Finitary and artinian-finitary groups over commutative rings // Journal Group Theory. – 2004. – 7. – P. 243-253.
17. *Wehrfritz B.A.F.* Artinian-finitary groups over commutative rings and non-commutative rings // Journal London Math. Soc. – 2004. – 70.– P. 325-340.
18. *Wehrfritz B.A.F.* Artinian-finitary groups are locally normal-finitary // Journal of Algebra. – 2005. – 287. – P. 417-431.

Надійшла до редколегії 15.11.2013

ЗМІСТ

Наукове видання

**ВІСНИК
ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
Серія
Математика
Випуск 19**

Заснований у 1993 р.

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 7898 від 17.09.2003 р.

Редактор А.В. Дмитренко
Коректор Т.І. Севост'янова
Оригінал-макет ....

Підписано до друку 14.06.2014. Формат 70x108/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк.9,5 14,0. Ум. фарбовідб. 9,5.
Обл.-вид. арк. 14,4. Тираж 100 пр. Вид. 1783. Замовлення №

Свідоцтво державної реєстрації серія ДК № 289 від 21.12.2000 р.
Видавництво Дніпропетровського національного університету
пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010
Віддруковано в друкарні ЛіраМ,
площа Десантників, 1, м. Дніпропетровськ, 49038
Свідоцтво ДП №14 від 13.07.2000 р.