

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 4

2019

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, чл.-кор. НАН України

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,
просп. Перемоги, 37, корп. 35,
ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського
Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44
E-mail: journal.iasa@gmail.com
<http://journal.iasa.kpi.ua>

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблеми прийняття рішень та управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах**

• **Теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримання прийняття рішень**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

• **Нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 4

2019

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Correspondent
member of NASU

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

L. SAKALAUSKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal.iasa@gmail.com
<http://journal.iasa.kpi.ua>

In the issue:

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Decision making and control in economic, technical, ecological and social systems**

• **Theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

• **New methods in system analysis, computer science and theory of decision making**

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНІТІ РАН.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918**. Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**

Редактор **Р.М. Шульженко**

Молодший редактор **Л.О. Тарин**

Комп'ютерна верстка, дизайн **А.А. Патіоха**

Свідоцтво про реєстрацію КВ № 23234–13074 ПР від 22.03.2018 р.

Підписано до друку 23.12.2019. Формат 70x108 1/16. Папір офс. Гарнітура Times.

Спосіб друку – різграфічний. Ум. друк. арк. 13.20. Обл.-вид. арк. 26.07. Наклад 136 пр. Зам. № 19-092

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Свідоцтво про державну реєстрацію: ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського, вул. Політехнічна, 14, корп. 15

м. Київ, 03056. Тел. (044) 204-81-78

Наклад 136 пр. Зам. №

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

«SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES».

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

4 • 2019

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ	
<i>Matsuki Y., Bidyuk P.I.</i> Analysis of negative flow of gravitational waves	7
<i>Луцьо В.В., Сільвестров А.М., Снінул Л.Ю.</i> Моделювання режимів роботи двомашинного асинхронного агрегата у трифазній системі координат	19
<i>Zabielin S.I.</i> Forecasting SO ₂ emission of Kilauea volcano using intelligent method of data analysis	30
ПРОБЛЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ ТА УПРАВЛІННЯ В ЕКОНОМІЧНИХ, ТЕХНІЧНИХ, ЕКОЛОГІЧНИХ І СОЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ	
<i>Petrov M.D.</i> CT Image denoising based on locally adaptive thresholding	39
<i>Abdulhamid Mohanad, Murungi Mwongeera.</i> System design of video surveil- lance	49
<i>Граф М.С., Квасніков В.П.</i> Інтелектуальна система оброблення інформації блока керування безпілотного повітряного судна	59
<i>Shypik D.V., Bidyuk P.I.</i> A literature review of abstractive summarization methods	66
ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	
<i>Данилов В.Я., Грушко Я.В.</i> Порівняння ефективності класифікаторів машин- ного навчання у контексті голосової біометрії.....	77
<i>Naderan M., Zaychenko Yu., Napoli A.</i> Using convolutional neural networks for breast cancer diagnosing	85
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ	
<i>Кондратенко Н.Р., Снігур О.О.</i> Дослідження адекватності інтервальних нечітких моделей типу 2 в задачах ідентифікації складних об'єктів	94
<i>Кравець П.О.</i> Ігрові стратегії прийняття рішень в ієрархічних системах. II. Комп'ютерне моделювання стохастичної гри	105
НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ	
<i>Сніжко Б.М.</i> Поверхневі міри, асоційовані з неінваріантною мірою у скін- ченновимірному просторі	119
Реферати	138
Відомості про авторів	146
Зміст журналу «Системні дослідження та інформаційні технології» за 2019 р.	148
Автори статей за 2019 р.	150

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

4 • 2019

CONTENT

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Matsuki Y., Bidyuk P.I.</i> Analysis of negative flow of gravitational waves	7
<i>Lutso V.V., Silvestrov A.M., Spinul L.Yu.</i> Modeling of operating modes of two- machine induction motor in three-phase coordinate system	19
<i>Zabelin S.I.</i> Forecasting SO ₂ emission of Kilauea volcano using intelligent method of data analysis	30
DECISION MAKING AND CONTROL IN ECONOMIC, TECHNICAL, ECOLOGICAL AND SOCIAL SYSTEMS	
<i>Petrov M.D.</i> CT Image denoising based on locally adaptive thresholding	39
<i>Abdulhamid Mohanad, Murungi Mwongeera.</i> System design of video surveil- lance	49
<i>Graf M.S., Kvasnikov V.P.</i> Information processing in the control system of an un- manned aerial vehicle	59
<i>Shypik D.V., Bidyuk P.I.</i> A literature review of abstractive summarization methods	66
THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION MAKING SUPPORT	
<i>Danilov V.Ya., Grushko Ya.G.</i> Comparison of the effectiveness of machine learning classifiers in the context of voice biometrics	77
<i>Naderan M., Zaychenko Yu., Napoli A.</i> Using convolutional neural networks for breast cancer diagnosing	85
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Kondratenko N.R., Snihur O.O.</i> Investigating adequacy of interval type-2 fuzzy models in complex objects identification problems	94
<i>Kravets P.A.</i> Game strategies for decision making in hierarchical systems. II. Computer simulation of stochastic game	105
NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING	
<i>Snizhko B.M.</i> Surface measures associated with a non-invariant measure in a finite-dimensional space	119
References	138
Information about the authors	146

ANALYSIS OF NEGATIVE FLOW OF GRAVITATIONAL WAVES

Y. MATSUKI, P.I. BIDYUK

Abstract. In this article, we made the mathematical explanation of the anti-gravitational waves, by the inspiration that we got from the observed positron in cosmic rays. Then, we analyzed the mathematical difference between positive and negative flows of gravitational waves; and we calculated the spin of the negative flow of gravitational waves, which is used to stabilize the movement of the waves. In the mathematical formulas we found that positive and negative flows move in opposite directions from each other; therefore, if we see the spin (rotation) of the waves from the planet that emits the waves, the positive flow rotates anti-clockwise, while the negative flow rotates clockwise. We also investigated the possible origin of gravitational waves, and concluded that the negative flow can occur when the positive flow appears, leaving holes behind, in the gravitational field, which is triggered by the movements of a large mass of the planet.

Keywords: Gravitational waves, antimatter, rectilinear coordinates, negative energy flow, spin of gravitational waves.

INTRODUCTION

In our previous research [1], we calculated the energy density of gravitational waves from Moon, assuming that it influences Earth's global temperature. However, the result of the analysis showed that the energy density of Moon's gravitational waves toward Earth's global temperature was negative in comparison with that of Moon's gravitational field.

After this result of the analysis, we held a question: Don't gravitational waves really exist? For answering to this question, we continued the research by setting new tasks: (a) to compare the characteristic of gravitational waves with that of electron and positron, where positron is the antimatter of electron, and (b) to find the mechanism that creates negative flow (antimatter) of the gravitational waves. Here, we set the task (b), because all the particles (waves) must have their antimatters. So, we thought that the existence of antimatters is a prerequisite for confirming the existence of gravitational waves.

In order to implement these two tasks, we took the following steps: (1) to investigate the findings from the observation of electron and positron in the cosmic rays, (2) to review the theory of electron and positron in quantum mechanics, (3) to investigate the mechanism that produces gravitational waves, (4) to make the mathematical formula of negative flow of gravitational waves, and (5) to compare

the spin momentum of negative energy flow with the spin momentum of positive energy flow. We selected the spin momentum as an indicator that is to illustrate the characteristic of gravitational waves, which we made in our previous research for positive flow of the waves [1].

Above (4) and (5) are our original, while we analyzed the ratio of positron/electron for the task (1) from the information that we took from [2]; and, we took the necessary equations from Dirac [3, 4] for the tasks (2) and (3).

ANALYSIS

Observed electron and positron in cosmic rays

Fig. 1 shows the observed ratio of positron to electron in cosmic rays, with the intensity of electromagnetic energy that was related to the creation of the positron [2]. It shows that more positrons were observed when the related electromagnetic energy was stronger. And, then, in order to further investigate Fig. 1, we analyzed this data with the method of the Least Squares Estimates of Classical Regression Model.

We show the result of the analysis in Table 1 and the descriptive statistics of the data in Table 2. The regression model is $Y = a + bX$, where Y is the ratio of positron versus electron, X is observed energy of the electromagnetic field, and a and b are coefficients. The calculated coefficient is $b = 5,572 \cdot 10^{-4} \pm 9,455 \cdot 10^{-5}$ with 95% confidence interval, $\pm 1,560 \cdot 10^{-4}$ with 90% confidence interval, and $\pm 1,763 \cdot 10^{-4}$ with 85% confidence interval, where we assumed the standard normal distribution of the coefficients. This calculated result indicates that positron (antimatter of electron) is more observed in the higher energy of the electromagnetic field.

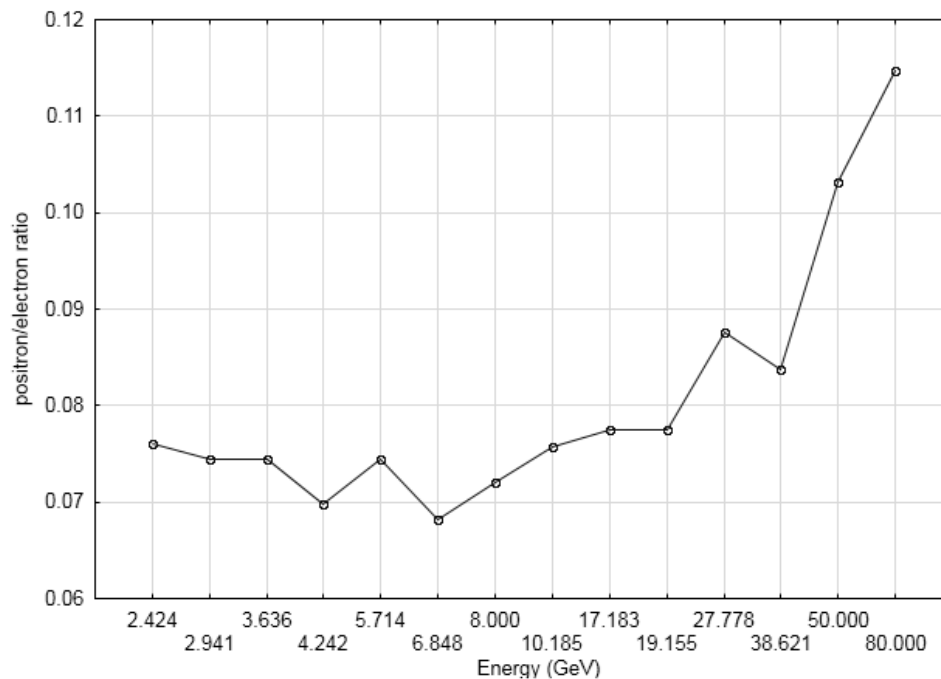


Fig. 1. Observed ratio of positron to electron and energy of the electromagnetic field*

***Note:** Remake from [2]. This source article explains that the lower rate of positron/electron observation below 10 GeV is due to the new solar magnetic field polarity after the year 2001.

Table 1. Summary of the least squares estimates

<i>a</i>		$6,964 \cdot 10^{-2}$
<i>b</i>	Coefficient	$5,572 \cdot 10^{-4}$
	Standard error of Coefficient	$4,824 \cdot 10^{-5}$
R^2 (coefficient of determination)		0,9175
Durbin-Watson Statistic		2,341
Sum of Squared Residuals		$1,857 \cdot 10^{-4}$

Table 2. Descriptive statistics

Variable	Ratio of positron/electron	Electro-magnetic energy of electron and positron (GeV)
Mean	$8,065 \cdot 10^{-2}$	19,77
Standard deviation	$1,316 \cdot 10^{-2}$	22,61
Minimum	$6,820 \cdot 10^{-2}$	2,424
Maximum	0,1147	80,00
Skewness	1,453	1,408
Kurtosis	3,934	3,965
Valid number of observations	14	14

Mathematical formulas of electron and positron

Paul Dirac [4] predicted that both positron and electron are balanced, therefore they are not usually observed; but the positron appears with presence of the electromagnetic field. The equation of motion for an electron in the electromagnetic field of hydrogen atom is:

$$\left\{ \left(p_0 + \frac{e}{c} A_0 \right) - \alpha_1 \left(p_1 + \frac{e}{c} A_1 \right) - \alpha_2 \left(p_2 + \frac{e}{c} A_2 \right) - \alpha_3 \left(p_3 + \frac{e}{c} A_3 \right) - \alpha_m mc \right\} \Psi = 0 . \quad (1)$$

Here, p_i ($i = 0, 1, 2, 3$) are momentum of electron, α_i are coefficients that give angular momentum of electron, and $\frac{e}{c} A_i$ are electromagnetic field of hydrogen atom, e is electric charge of electron, c is a constant, and Ψ is the wave function of electron (1).

The equation of motion for positron is:

$$\left\{ \left(-p_0 + \frac{e}{c} A_0 \right) - \alpha_1 \left(-p_1 + \frac{e}{c} A_1 \right) - \alpha_2 \left(-p_2 + \frac{e}{c} A_2 \right) - \right.$$

$$-\alpha_3 \left(-p_3 + \frac{e}{c} A_3 \right) + \alpha_m m c \bar{\Psi} \Big\} = 0 .$$

Here, $\bar{\Psi}$ is a wave function of positron.

Equations of motion for gravitational waves and anti-gravitational waves

From the implication of the equations of motions for electron and positron, we formulated the solutions of the equations of motions for positive flow and negative flow of gravitational waves.

For positive flow of the waves (from [1])	For negative flow of the waves (Our new idea)
<p>At first, we have the solution of the equation of motion, which is energy density of gravitational waves, which move in one direction of x^3 with the speed of light:</p> $16\pi t_0^0 = \frac{1}{4}(u_{11} - u_{22})^2 - u_{12}^2 \quad (2)$	<p>We think that the negative flow of energy is:</p> $16\pi t_0^0 = \frac{1}{4}\{-u_{11} - (-u_{22})\}^2 - (-u_{12})^2 \quad (3)$
<p>Below, we show how the equations (2) and (3) are derived from the equation (8), which will be explained in the latter part of this article:</p> <p>According to Dirac [3], the necessary condition for solving the equation of motion of the gravitational waves is $g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0$, while $g_{\rho\sigma,\mu\nu} = \frac{\partial^2 g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}$, where x^σ are the contravariant vectors that are described in the 4-dimensional curvilinear coordinates, and $g^{\mu\nu}$ and $g_{\rho\sigma}$ are fundamental tensors. Now we take rectilinear coordinates system as approximation of curvilinear coordinates system, then the second derivatives of $g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0$ are considered to be resolved (integrated) already; and, then, and we define $g_{\mu\nu,\sigma} = u_{\mu\nu} l_\sigma$, where $u_{\mu\nu}$ is the derivative of the function $g_{\mu\nu}$ of $l_\sigma x^\sigma$, where $g_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}$, and μ, ν, σ are the suffixes that indicate those coordinates; while, we assume that the waves move in only one direction of the space, $\mu, \nu, \sigma = 0, \text{ or } 3$, where 0 is for time, and 3 is the selected one direction. Also, we put $u_{\mu\nu} u^{\nu\mu} = u_\mu^\mu = u$, where $u^{\mu\nu}$ are contravariant two-vector tensors and $u_{\mu\nu}$ are covariant two-vector tensors, and $u_{\mu\nu} = u_{\nu\mu}$; and, l_σ are constants, which satisfy $g^{\rho\sigma} l_\rho l_\sigma = 0$. Therefore, $g_{\mu\nu,\sigma} = u_{\mu\nu,\sigma} l_\sigma$ is regarded as the first integral of $g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma,\mu\nu} = 0$, then the equation (6), which is shown later in the latter part of this article, becomes $g^{\mu\nu} u_{\mu\nu} l_\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} u_{\mu\nu} l_\rho = \frac{1}{2} u l_\rho$, then $(u_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} u) l_\nu = 0$, and $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho = \frac{1}{2} (u_\mu^\rho l_\sigma + u_\sigma^\rho l_\mu - u_{\mu\sigma} l^\rho)$. Meanwhile, the general formula of the action integral is $I = \int R \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, where R will be</p>	

explained later with the equation (4). $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^{\sigma}) - L$, where $L = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma})$. Then, L for the waves moving in one direction becomes:

$$L = -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} (u_{\mu}^{\rho} l_{\sigma} + u_{\sigma}^{\rho} l_{\mu} - u_{\mu\sigma} l^{\rho}) (u_{\nu}^{\sigma} l_{\rho} + u_{\rho}^{\sigma} l_{\nu} - u_{\nu\rho} l^{\sigma}).$$

With the constraint, $\delta L = 0$, the solution of the above action integral is expressed by the pseudo-tensors t_{μ}^{ν} that lead to the spin momentum densities of the gravitational waves:

$16\pi t_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} (u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} u^2) l_{\mu} l^{\nu}$, where l_{α} is one direction, in which the waves are moving in. Here, we consider the gravitational waves moving only in the direction of x^3 , therefore $l_0 = 1$, $l_1 = l_2 = 0$, and $l_3 = -1$.

Below, we calculate the spin momentum densities of the positive flow of gravitational waves in rectilinear coordinates, as approximation of curvilinear coordinates

$$16\pi t_{\mu}^{\nu} = (1/2) (u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - (1/2) u^2) l_{\mu} l^{\nu} :$$

$$u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} .$$

For $\rho = 0$:

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = u_0^0 l_0 + u_0^1 l_1 + u_0^2 l_2 + u_0^3 l_3 = \\ &= u_0^0 + 0 + 0 + u_0^3 = g^{00} u_{00} - g^{33} u_{03} = \\ &= u_{00} + u_{03} = (1/2) u l_0 = (1/2) u . \end{aligned}$$

$$\text{Here, } g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ therefore}$$

$$g^{00} = 1, \text{ and } g^{33} = -1 .$$

Also, for contra-variant vector A^{μ} and covariant vector A_{μ} , $A^{\mu} = g^{\mu\mu} A_{\mu}$, and $A_{\mu} = g_{\mu\mu} A^{\mu}$ therefore, for example, $u^{00} = g^{00} g^{00} u_{00}$, $u^{10} = g^{11} g^{00} u_{10}$, and $u_0^3 = g^{33} u_{03}$.

For $\rho = 1$:

$$\begin{aligned} u_1^0 l_0 + u_1^1 l_1 + u_1^2 l_2 + u_1^3 l_3 &= u_1^0 + 0 + 0 + u_1^3 = \\ &= g^{00} u_{01} - g^{33} u_{31} = u_{01} + u_{13} = (1/2) u l_1 = 0 . \end{aligned}$$

For $\rho = 2$:

$$u_1^0 l_2 + u_1^1 l_1 + u_2^2 l_2 + u_3^3 l_3 = u_2^0 + 0 + 0 + u_2^3 =$$

Below we calculate the spin momentum density of the negative flow of gravitational waves in rectilinear coordinates, as approximation of curvilinear coordinates

$$16\pi t_{\mu}^{\nu} = (1/2) \{-u_{\alpha\beta} u^{\alpha\beta} - (1/2) u^2\} l_{\mu} l^{\nu} :$$

$$u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} .$$

For $\rho = 0$:

$$u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = -u_{00} - u_{03} = -(1/2) u .$$

For $\rho = 1$:

$$u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = -u_{01} - u_{13} = 0 .$$

For $\rho = 2$:

$$u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 u_{\rho}^{\nu} l_{\nu} = -u_{02} - u_{23} = 0 .$$

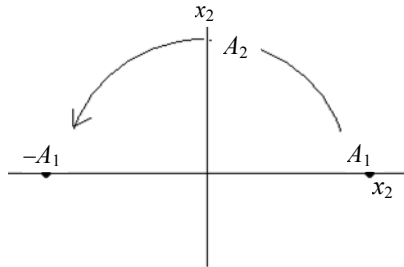
<p>$= g^{00}u_{02} - g^{33}u_{32} = u_{02} + u_{23} = (1/2)ul_2 = 0.$</p> <p style="text-align: center;">For $\rho = 3$:</p> <p>$u_3^0l_0 + u_3^1l_1 + u_3^2l_2 + u_3^3l_3 = u_3^0 + 0 + 0 - u_3^3 =$ $= g^{00}u_{03} - g^{33}u_{33} = u_{03} + u_{33} = (1/2)ul_3 =$ $= -(1/2)u.$</p> <p>Thus, $u_{00} = -u_{03} + (1/2)u$ and $u_{33} = -u_{03} - (1/2)u.$</p> <p>Therefore, $u_{00} - u_{33} = (1/2)u -$ $-(-(1/2)u) = u$, and $u_{00} + u_{33} = -2u_{03}$, where $u_{03} = u_{30}$. Also, $u_{11} = g_{11}u_1^1l_1 = 0$, and $u_{22} = g_{22}u_2^2l_2 = 0$, therefore $u_{11} + u_{22} = 0.$</p> <p>Here, $g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, and $g^{01} = g^{02} = g^{03} = g^{10} = g^{12} = g^{13} =$ $= g^{20} = g^{21} = g^{23} = g^{30} = g^{31} = g^{32} = 0.$</p> <p>Then, $16\pi t_\mu^v = (1/2)(u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} -$ $-(1/2)u^2)l_\mu l^v$ becomes</p> $16\pi \cdot t_0^0 = (1/2) \left\{ \sum_{\alpha,\beta=0}^3 (u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - (1/2)u^2) \right\}.$ <p>Here,</p> $\sum_{\alpha,\beta=0}^3 u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - (1/2)u^2 = u_{00}u^{00} + u_{11}u^{11} +$ $+ u_{22}u^{22} + u_{33}u^{33} + 2u_{01}u^{01} + 2u_{02}u^{02} +$ $+ 2u_{03}u^{03} + 2u_{12}u^{12} + 2u_{23}u^{23} + 2u_{31}u^{31} -$ $-(1/2)u^2 = u_{00}g^{00}g^{00}u_{00} + u_{11}g^{11}g^{11}u_{11} +$ $+ u_{22}g^{22}g^{22}u_{22} + u_{33}g^{33}g^{33}u_{33} +$ $+ 2u_{01}g^{00}g^{11}u_{01} + 2u_{02}g^{00}g^{22}u_{02} +$ $+ 2u_{03}g^{00}g^{33}u_{03} + 2u_{12}g^{11}g^{22}u_{12} +$ $+ 2u_{23}g^{22}g^{33}u_{23} + 2u_{31}g^{33}g^{11}u_{31} -$ $-(1/2)u^2 = u_{00}^2 + u_{11}^2 + u_{22}^2 + u_{33}^2 +$ $+ (-1)2u_{01}^2 + (-1)2u_{02}^2 + (-1)2u_{03}^2 +$ $+ 2u_{12}^2 + 2u_{23}^2 + 2u_{31}^2 - (1/2)(u_{00} - u_{33})^2 =$ $= u_{11}^2 + u_{22}^2 + 2u_{12}^2 - (1/2)(u_{00} - u_{33})^2 =$ $= (1/2)(u_{11} - u_{22})^2 - 2u_{12}^2.$ <p>Because: $u_{11} + u_{22} = 0$, $u_{11} = -u_{22}$, $u_{11}^2 = u_{22}^2$, $u_{11}^2 + u_{22}^2 = 2u_{22}^2$, $(u_{11} - u_{22})^2 =$</p>	<p style="text-align: center;">For $\rho = 3$:</p> $u_\rho^v l_v = \sum_{v=0}^3 u_\rho^v l_v = -u_{03} - u_{33} = (1/2)u.$ <p>Thus, $-u_{00} = u_{03} - (1/2)u$ and $-u_{33} = u_{03} + (1/2)u.$</p> <p>Therefore, $-u_{00} + u_{33} = -u$ and $-u_{00} - u_{33} = 2u_{03}$, where $u_{03} = u_{30}$. Also, $u_{11} = g_{11}u_1^1l_1 = 0$, and $u_{22} =$ $= g_{22}u_2^2l_2 = 0$, therefore $-u_{11} - u_{22} = 0.$</p> <p>Then,</p> $16\pi t_\mu^v = (1/2) \{ -u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - (1/2)u^2 \} l_\mu l^v$ becomes $16\pi t_0^0 = (1/2) \left\{ \sum_{\alpha,\beta=0}^3 (-u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - (1/2)(-u^2)) \right\}.$ <p>Here,</p> $\sum_{\alpha,\beta=0}^3 (-u_{\alpha\beta}u^{\alpha\beta} - (1/2)u^2) =$ $= -(u_{00})^2 - (u_{11})^2 - (u_{22})^2 - (u_{33})^2 +$ $+ 2u_{01}^2 + 2u_{02}^2 + 2u_{03}^2 - 2u_{12}^2 -$ $- 2u_{23}^2 - 2u_{31}^2 + (1/2)u^2 =$ $= -u_{11}^2 - u_{22}^2 - 2u_{12}^2 + (1/2)u^2 =$ $= 2u_{22}^2 + 2u_{12}^2 = (1/2)(-u_{11} + u_{22})^2 -$ $- 2(-u_{12})^2.$ <p>Because: $-u_{11} - u_{22} = 0$, $-u_{11} = u_{22}$,</p>
--	---

$$= (-u_{22} - u_{22})^2 = (-2u_{22})^2 = 4u_{22}^2,$$

$$(1/2)(u_{11} - u_{22})^2 = 2u_{22}^2.$$

$$\text{So, } 16\pi t_0^0 = (1/4)(u_{11} - u_{22})^2 - u_{12}^2.$$

And then, we assume an infinitesimal rotation operator, R , in the plane of contravariant vectors $x^1 x^2$. If it is applied to any vector, A_1, A_2 , it has the effect: $RA_1 = A_2$, $RA_2 = -A_1$, and $R^2 A_1 = RA_2 = -A_1$, so iR must have the eigenvalues ± 1 when applied to a vector [3]. Here, $iR = \pm 1$. So, the operator R makes anti-symmetric change of the vectors.



When we apply this infinitesimal rotation operator, R , to $u_{\mu\nu} = A_\mu A_\nu$, the rotations will occur as follows:

$$Ru_{11} = R(A_1 A_1) = (RA_1)A_1 + A_1(RA_1) = A_2 A_1 + A_1 A_2 = u_{21} + u_{12} = 2u_{12},$$

where $u_{21} = u_{12}$.

$$Ru_{12} = R(A_1 A_2) = (RA_1)A_2 + A_1(RA_2) = A_2 A_2 + A_1(-A_1) = u_{22} - u_{11}.$$

$$Ru_{22} = R(A_2 A_2) = (RA_2)A_2 + A_2(RA_2) = -A_1 A_2 + A_2(-A_1) = -u_{12} - u_{21} = -2u_{12}.$$

$$R(u_{11} + u_{22}) = R(A_1 A_1 + A_2 A_2) = (RA_1)A_1 + A_1(RA_1) + (RA_2)A_2 + A_2(RA_2) = A_2 A_1 + A_1 A_2 - A_1 A_2 - A_2 A_1 = 2u_{12} - 2u_{12} = 0.$$

$$R(u_{11} - u_{22}) = R(A_1 A_1 - A_2 A_2) = A_2 A_1 + A_1 A_2 + A_1 A_2 + A_2 A_1 = 4A_1 A_2 = 4u_{12}.$$

$$R^2(u_{11} - u_{22}) = R(R(u_{11} - u_{22})) = R(Ru_{11} - Ru_{22}) = R(2u_{12} - (-2u_{12})) = 2Ru_{12} + 2Ru_{12} = 2(u_{22} - u_{11}) + 2(u_{22} - u_{11}) =$$

$$u_{11}^2 = u_{22}^2, \quad u_{11}^2 + u_{22}^2 = 2u_{22}^2,$$

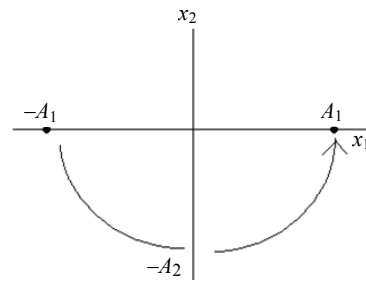
$$-u_{11}^2 - u_{22}^2 = -2u_{22}^2,$$

$$\{-u_{11} - (-u_{22})\}^2 = \{-(-u_{22}) - (-u_{22})\}^2 = (u_{22} + u_{22})^2 = \{-(-2u_{22})\}^2 = 4u_{22}^2,$$

$$(1/2)(-u_{11} + u_{22})^2 = 2u_{22}^2. \quad \text{So,}$$

$$16\pi t_0^0 = (1/4)\{-u_{11} - (-u_{22})\}^2 - (-u_{12})^2.$$

Then, we assume an infinitesimal rotation operator, R , in the plane of contravariant vectors $x^1 x^2$. If it is applied to any vector, A_1, A_2 , it has the effect: $R(-A_1) = -A_2$, $R(-A_2) = A_1$, and $R^2(-A_1) = R(-A_2) = A_1$.



When we apply this infinitesimal rotation operator, R , to $-u_{\mu\nu} = -A_\mu A_\nu$, the rotations will occur as follows:

$$R(-u_{11}) = R(-A_1 A_1) = (R(-A_1))A_1 - A_1(RA_1) = -A_2 A_1 - A_1 A_2 = -u_{21} - u_{12} = -2u_{12},$$

$$\text{where } u_{21} = u_{12}. \quad R(-u_{12}) = R(-A_1 A_2) = -A_2 A_2 - A_1(-A_1) = -u_{22} + u_{11} = -(u_{22} - u_{11}). \quad R(-u_{22}) = R(-A_2 A_2) = (-RA_2)A_2 - A_2(RA_2) = A_1 A_2 + A_2 A_1 = u_{12} + u_{21} = -(u_{12} - u_{21}) = -(-2u_{12}) = 2u_{12};$$

$$R(-u_{11} - u_{22}) = R(-A_1 A_1 - A_2 A_2) = -(RA_1)A_1 - A_1(RA_1) - (RA_2)A_2 - A_2(RA_2) = -A_2 A_1 - A_1 A_2 + A_1 A_2 + A_2 A_1 = -A_2(-A_1) = -2u_{12} + 2u_{12} = 0;$$

$$R(-u_{11} + u_{22}) = R(-A_1 A_1 + A_2 A_2) = -A_2 A_1 - A_1 A_2 + (-A_1)A_2 + A_2(-A_1) = -4A_1 A_2 = -4u_{12}.$$

$$R^2(-u_{11} + u_{22}) = R(R(-u_{11} + u_{22})) = R(-Ru_{11} + Ru_{22}) = R(-2u_{12} - 2u_{12}) = -2Ru_{12} - 2Ru_{12} = -2(u_{22} - u_{11}) -$$

<p>$= 4(u_{22} - u_{11}) = -4(u_{11} - u_{22})$. $u_{11} + u_{22}$ is invariant because $R(u_{11} + u_{22}) = 0$ as shown above, and iR has the eigenvalues ± 2 when applied to $u_{11} - u_{22}$ or u_{12}. Therefore, $(1/4)(u_{11} - u_{22})^2 - u_{12}^2$ (the components of $u_{\alpha\beta}$ that contribute to the momentum density of gravitational waves) corresponds to spin 2 [3]. (See note* below.)</p>	<p>$-2(u_{22} - u_{11}) = -4(u_{22} - u_{11})$ $= -4(-u_{11} + u_{22})$. $-u_{11} - u_{22}$ is invariant because $R(-u_{11} - u_{22}) = 0$ as shown above, and iR has the eigenvalues ± 2 when applied to $-(u_{11} - u_{22})$ or $-u_{12}$. Therefore, $(1/4)\{-u_{11} - (-u_{22})\}^2 + (-u_{12})^2$ corresponds to spin -2. We add minus-sign to 2, in order to show the direction of negative flow, as shown in Fig. 2. (Also see note* below to compare this result with electron's spin momentum.)</p>
--	---

The geometric relation between the positive flow and negative flow of gravitational waves is shown in Fig. 2.

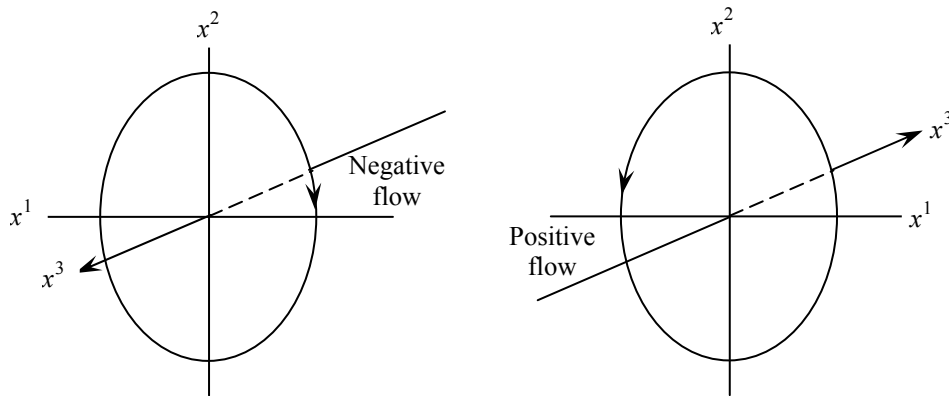


Fig. 2. Calculated directions of spins

Note*: In the equation of motion (1) for electron in the electromagnetic field of hydrogen atom, the infinitesimal operator iR for the rotation of the electron in the plane of $x^2 x^3$ is $-\alpha_1 p_1$; and it has the eigenvalue of $\pm(1/2)$; because, the necessary condition for solving the equation (1) is : $\dot{m}_1 + i\hbar\dot{\sigma}_1 = i\hbar c\rho_1(\sigma_2 p_3 - \sigma_3 p_2) + 2ic\rho_1(\sigma_3 p_2 - \sigma_2 p_3) = 0$, and $2ic\rho_1(\sigma_3 p_2 - \sigma_2 p_3)$ is invariant with $i\hbar\dot{\sigma}_1$. So, $i\hbar = 2i$, then $i = (1/2)\hbar$. Therefore, the spin momentum of electron is $(1/2)\hbar\dot{\sigma}_1$. Here m is the orbital angular momentum of electron in hydrogen atom, \dot{m} is its time-differential of m and $\dot{\sigma}_1$ is the time-differential of σ_1 , and the suffix 1, 2, 3 represent matrices of tensors

in 3 space coordinates, c is a constant, and $\rho_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; \hbar is Planck's constant and

σ_1 is a matrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, which makes α_1 by $c\rho_1\sigma_1 = \alpha_1$.

Here, it is noted that, in quantum mechanics [4], rectilinear coordinates are used, but not curvilinear coordinates; while, the rectilinear coordinates system holds 4×4 combinations of vectors, the curvilinear coordinates has $4 \times \infty^3$ combinations of vectors.

For positron, instead of electron, $i\hbar$ is replaced by $-i\hbar$ in the above equations.

Mechanism to create gravitational waves

The next research question is “how are both positive and negative flows of gravitational waves made?” We think that the answer for positive flow of gravitational waves is described in Einstein’s General Theory of Relativity [3]. In this theory, Einstein used Riemann’s geometry to describe his idea of gravitational field of a planet. The gravitational field is a tide of vectors ξ^i , where $i = 0, 1, 2, 3$, and the tide is to be made as the effect of differential, $\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = R\xi^i$, in the curvature of the 4-dimensional coordinates, where $R = \frac{1}{a^2}$, and a is a radius of the curved surface [5].

In order to further generalize the curvature of the 4-dimensional coordinates, Einstein used Riemann tensor for setting the condition to solve the equation of motion, $\nabla_u \nabla_u \xi + \text{Riemann}(\dots, u, \xi, u) = 0$, where $\nabla_u \nabla_u = \frac{d^2}{ds^2}$, u is the vector $u = \frac{dx^\mu}{d\tau} e_\mu = u^\mu e_\mu$, which are tangent vectors to the center of the curvature, and e_0, e_1, e_2, e_3 are basis vectors that lie in the directions of their increasing order of the coordinates of x^0, x^1, x^2 , and x^3 ; also, $\Delta\xi = \Delta x^\alpha e_\alpha$, where $d\xi \cdot d\xi = ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, and ds is the length of the travel of particles along the geodesics, and Riemann tensor is $\text{Riemann}(w^\alpha, x^\mu, e_\alpha, x^\nu)$, where $\alpha = 0, 1, 2, 3$, and w^α is the gradient (deviation) of the coordinates, which means $w^\alpha = dx^\alpha$. And then, the condition for solving the equation of motion becomes $\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} + R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\gamma \frac{dx^\delta}{d\tau} = 0$.

Then, in case of $w^\alpha = e_\alpha$, Ricci tensors become $\text{Ricci}(u, v) = \text{Riemann}(w^\alpha, x^\mu, e_\alpha, x^\nu)$, which is $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$. Then, in case of $\mu = \nu$, Ricci tensors become the curvature scalar, R , where $R = \text{Ricci}(w^\alpha, e_\alpha) = R_\alpha^\alpha$. Meanwhile, Einstein defined the differential symmetries of Riemann tensors to describe the gravitational field with the curvature: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$; then, he assumed

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{4}$$

in the empty space where only gravitational field of a planet exists.

Then,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0,$$

where $\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu})$.

In rectilinear coordinates as an approximation of curvilinear coordinates, $-\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta = 0$, then $R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha = 0$.

On the other hand,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\nu\rho,\mu\sigma}) + \Gamma_{\beta\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\nu\rho}^\beta - \Gamma_{\beta\mu\rho}^\beta \Gamma_{\nu\sigma}^\beta.$$

By interchanging ρ and μ , and neglecting $\Gamma_{\beta\mu\sigma}^\beta \Gamma_{\nu\rho}^\beta - \Gamma_{\beta\mu\rho}^\beta \Gamma_{\nu\sigma}^\beta$ to replace curvilinear coordinates by rectilinear coordinates we have:

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\rho\sigma} (g_{\rho\sigma,\mu\nu} - g_{\nu\sigma,\mu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} + g_{\mu\nu,\rho\sigma}) = 0.$$

Then,

$$g^{\mu\nu} (g_{\mu\nu,\rho\sigma} - g_{\mu\rho,\nu\sigma} - g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\rho\sigma,\mu\nu}) = 0. \quad (5)$$

On the other hand, the moving particle in a scalar field of potential energy V follows d'Alambert equation $\nabla V = g^{\mu\nu} (V_{,\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V_{,\alpha}) = 0$. In order to describe the gravitational waves moving in the 4-dimensional space, we replace V by vectors x^λ by a certain coordinate system in which $x_{,\alpha}^\lambda = g_\alpha^\lambda$, then d'Alambert equation becomes $g^{\mu\nu} g_{\alpha,\nu}^\lambda - g^{\mu\nu} g_\alpha^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$ then $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$. Meanwhile,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = g^{\lambda\rho} \Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}),$$

so

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} (g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho}) = 0,$$

where $g_{\rho\nu,\mu} = y_{n,\rho\mu} y_{,\nu}^n + y_{n,\nu\mu} y_{,\rho}^n = y_{n,\rho\nu} y_{,\mu}^n + y_{n,\mu\nu} y_{,\rho}^n = g_{\rho\mu,\nu}$, where μ and ν are in symmetrical relation in the equation, therefore they are exchangeable; and,

$y_{,\mu}^n = \frac{\partial y^n(x^\mu)}{\partial x^\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, while x^μ are located in N -dimensional physical space of y^n , $n = 1, 2, \dots, N$.

Therefore,

$$g^{\mu\nu} \left(g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} \right) = 0. \quad (6)$$

Then, in order to describe the waves moving in the gravitational field, it is differentiated by x^σ once again,

$$\frac{d}{dx^\sigma} g^{\mu\nu} \left(g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} \right) = g_{,\sigma}^{\mu\nu} \left(g_{\rho\mu,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho} \right) + g^{\mu\nu} \left(g_{\mu\rho,\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu,\rho\sigma} \right) =$$

$$= g^{\mu\nu} \left(g_{\mu\rho, \nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \rho\sigma} \right) = 0. \quad (7)$$

In the equation (7), $g_{,\sigma}^{\mu\nu} (g_{\rho\mu, \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \rho}) = 0$, because $g_{\rho\mu}$ is constant in rectilinear coordinates system, therefore $g_{\rho\mu, \nu} = 0$.

By interchanging ρ and σ ,

$$g^{\mu\nu} (g_{\mu\sigma, \nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \sigma\rho}) = g^{\mu\nu} (g_{\mu\sigma, \nu\rho} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \rho\sigma}) = 0. \quad (8)$$

By adding (5), (7) and (8),

$$g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma, \mu\nu} = 0. \quad (9)$$

It satisfies d'Alambert equation, so it describes the waves that travel in empty space.

Note: The equation (2) is the first integral of equation (9) in rectilinear coordinate system (flat space); however, here is a paradox: the gravitational waves are predicted in the curvilinear coordinate system (curved space) where the waves move on the curved surface of the coordinates. However, if it is in the curvilinear coordinates, $-\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \neq 0$ for the equation (4), $\Gamma_{\beta\mu\sigma} \Gamma_{\nu\rho}^{\beta} - \Gamma_{\beta\mu\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} \neq 0$ for the equation (5), and $g_{,\sigma}^{\mu\nu} (g_{\rho\mu, \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu, \rho}) \neq 0$ for the equation (7); then, we are not able to get the equation (9), which enables us to calculate the spin momentum densities with the equation (2). It means that the equation (9) is only an approximation, which is given by the condition that the waves move only in one direction of $l_{\sigma} x^{\sigma}$ as if the waves move in the rectilinear coordinates system.

Mechanism to create negative flow of gravitational waves

On the other hand, we think that the negative flow of gravitational waves must be described by:

$$-g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma, \mu\nu} = 0.$$

This means that the negative waves move backward from the direction of the positive flow of the waves. When the positive flow moves forward, it creates vacuum or hole in the geometric structure of the gravitational field of the equation (4). This explanation corresponds to Dirac's explanation about the creation of positron [4]. And, then, we have made the following explanation: Usually, the positive flow and the negative flow should be balanced; therefore, neither of the positive flow nor negative flow of gravitational waves is observable. However, when planet moves, the movement of the mass of the planet breaks the balance; then gravitational waves of both positive flow and negative flow appear.

CONCLUSIONS AND RECOMMENDATION

In this research, we investigated a question: "Do gravitational waves really exist?" As the result of our investigation, we didn't find the straight answer, but we

found that the gravitational waves must have both positive and negative flows if they exist. So, we also investigated one more question: “How are both positive and negative flows of gravitational waves created?”

To find the answer for this second question, we made the negative image of the energy flow of gravitational waves, and calculated its spin momentum, and we compared it with the spin of the positive flow. As the result, we found that the negative flow of gravitational waves moves in one direction, spinning clockwise, while the positive flow of gravitational waves moves in opposite direction to that of negative flow, spinning anti-clockwise, when looking at both flows of the waves from the producer (planet) of the waves.

Then, we found a possible explanation about the process that creates the negative flow of gravitational waves. In the process that creates positron (antimatter of electron), electron and positron are usually not observable because they are balanced in the space. However, getting magnetic radiations, electron appears and also positron appears as the hole from where electron goes out. Similarly, positive flow and negative flow of gravitational waves are usually not observable, but when the planet moves, the gravitational waves appear from the gravitational field; and then, when positive flow appears, negative flow also appears as the vacuum of the gravitational field, which is made by the positive flow.

A paradox still remains. The mathematical explanation of gravitational waves is made by the curvature of the gravitational field; however, our approach, shown in this report, used the system of rectilinear coordinates, and it is only an approximation for very small range of the curvilinear coordinate system. Therefore, we still need further investigation in curvature coordinate system, to find more general explanation.

REFERENCES

1. *Matsuki Y.* Calculating energy density and spin momentum density of Moon’s gravitational waves in rectilinear coordinates (part 4) / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology. — 2019. — N 3. — P. 7–17.
2. *Beringer J.* Particle Data Group / J. Beringer et al. // Phys. Rev. D86, 010001. — 2012. — P. 306 (Figure 26.2 Differential spectrum of electrons plus positrons multiplied by E^3).
3. *Dirac P.A.M.* General Theory of Relativity / P.A.M. Dirac. —New York: Florida University, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1975. — P. 69.
4. *Dirac P.A.M.* The Principle of Quantum Mechanics / P.A.M. Dirac. — Fourth Edition. — Oxford: Clarendon Press, 1958. — P.312
5. *Goldstein H.* Classical Mechanics / H. Goldstein, C.P. Poole, J.L. Safko. — 3rd Edition. —Pearson Education, Inc., (2002). — P. 646 (especially Chapter 7.11 “Introduction to the general theory of relativity”, P. 324–328).
6. *Matsuki Y.* Empirical Investigation on Influence of Moon’s Gravitational-Field to Earth’s Global Temperature (Part-3) / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology. — 2019. — N 2. — P. 18–24.

Received 02.09.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

МОДЕЛЮВАННЯ РЕЖИМІВ РОБОТИ ДВОМАШИННОГО АСИНХРОННОГО АГРЕГАТА У ТРИФАЗНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

В.В. ЛУЦЬО, А.М. СІЛЬВЕСТРОВ, Л.Ю. СПІНУЛ

Анотація. Розроблення експериментальних зразків нових видів електричних машин, а також пошук найбільш перспективних напрямів їх використання потребують ґрунтовних теоретичних досліджень. Наявність адекватної математичної моделі дозволяє передбачити можливі недоліки в роботі майбутніх зразків та уникнути їх на етапі проектування. Запропоновано математичну модель двомашинного асинхронного агрегата [1] з рухомих індуктором у трифазній системі координат. Моделі первинної і вторинної асинхронних машин розділено на дві окремі структурні одиниці. У моделі вторинної машини відображено вплив рухомого індуктора на рух ротора і забезпечено зв'язок з первинною машиною за швидкістю та електромагнітним моментом. Отримано графіки перехідних процесів для роботи двомашинного асинхронного двигуна у режимах холостого ходу і під навантаженням, а також під час роботи окремо вторинної машини. На основі графіків проаналізовано варіанти пуску вузлів двигуна. Побудована у середовищі MatLab структурна схема моделі наочно відображає зв'язок первинної і вторинної машин.

Ключові слова: асинхронний двигун, двомашинний агрегат, математична модель, рухомий індуктор, трифазна система координат, MatLab.

ВСТУП

У промисловості натепер широко застосовують трифазні асинхронні двигуни (АД) в широкому діапазоні потужностей, передусім завдячуючи інженеру-досліднику Михайлу Йосиповичу Доліво-Добровольському. Весною 1889 р. він збудував перший АД потужністю 100 Вт, розробивши і впровадивши перед цим як найбільш доцільну трифазну мережу електроживлення. Відтоді принцип роботи і конструкція АД майже не змінювалися. Простота конструкції і надійність роботи АД з короткозамкненим ротором є істотними його перевагами відносно електродвигунів інших конструкцій. Однак швидкість обертання вала АД обмежена частотою напруги живлення, що для промислової частоти $f = 50$ Гц становить менше за 3000 об/хв. Для збільшення швидкості необхідно до АД додавати дорогі і ненадійно працюючі в умовах зовнішніх електромагнітних, теплових, радіаційних та інших збурень напівпровідникові перетворювачі. Отже, актуальним постало завдання створення нової конструкції АД, яка б без підвищувального редуктора могла досягати швидкості обертання вала АД із частотою понад 3000 об/хв. Модель такого АД було створено і запатентовано [1].

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Наявність моделі [1] нової конструкції АД на етапі її доопрацювання і розроблення дослідного зразка дозволяє, а практика, відповідно, потребує детального математичного моделювання роботи такого АД у різних режимах. Це дасть змогу ще на етапі проектування дещо дооптимізувати конструкцію і режими роботи АД як двомашинного асинхронного агрегата. Таким чином, у системі MatLab Simulink необхідно виконати моделювання і з'ясувати оптимальні режими його роботи.

Основними частинами двомашинного АД (рис. 1) є статор 1 із трифазною обмоткою, рухомий індуктор (PI) 2, який включає в себе короткозамкнену обмотку первинної машини (ПМ), а також трифазну обмотку вторинної машини (ВМ), ротор 3, що містить короткозамкнену обмотку ВМ [1; 6]. Живлення на ВМ подається через вузол контактних кілець 4, а механічне навантаження може подаватись як на порожнистий вал PI 5, так і на вал ротора 6.

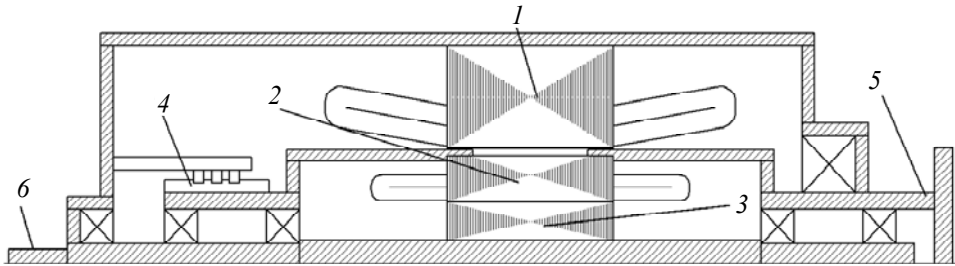


Рис. 1. Конструкція двомашинного асинхронного агрегата із PI

Робота ПМ нічим не відрізняється від роботи звичайної асинхронної машини. Подача трифазної синусоїдальної напруги на обмотку статора приводить у рух індуктор ВМ. Обертове магнітне поле, створене трифазною обмоткою ВМ, пришвидшується на величину кутової швидкості PI. Отже, на валу ротора маємо в результаті подвоєну кутову швидкість.

Для спрощення побудови математичної моделі двомашинного асинхронного агрегата спочатку розглянемо окремо роботу ВМ.

За відсутності живлення ПМ ВМ являє собою АД з вільним (не закріпленим) статором. Обертове магнітне поле, створене трифазною обмоткою PI, наводить у короткозамкненій обмотці ротора електрорушійну силу, що зумовлює протікання в ній струму. Електромагнітний момент, що виникне внаслідок взаємодії потікозчеплень PI та ротора, приведе в рух не тільки ротор, а і сам PI. За третім законом Ньютона, оскільки немає протидії, ВМ не протидіє впливу електромагнітного моменту на PI (крім тертя у підшипниках). Тому PI обертатиметься у протилежному від ротора напрямку.

Розглянемо електромагнітні процеси, які перебігають в обмотках PI та ротора у рухомих трифазних системах координат (СК).

Система координат PI (ABC) обертається за годинниковою стрілкою зі швидкістю ω_{r_i} відносно нерухомої СК ($A_0B_0C_0$) статора, а СК ротора (abc) — проти годинникової стрілки зі швидкістю ω_r (рис. 2). Взаємне положення трифазних СК PI та ротора в кожен момент часу можна описати за допомогою таких величин:

$\gamma_r(t)$ — кут між однойменними осями СК ротора і нерухомою СК;

$\gamma_{ri}(t)$ — кут між однойменними осями СК РІ та нерухомою СК.

Тоді кут між однойменними осями СК РІ та ротора становитиме

$$\gamma_{rir}(t) = \gamma_r(t) - \gamma_{ri}(t). \quad (1)$$

Зв'язок між кутами повороту і кутовими швидкостями СК РІ та ротора можна описати через похідну:

$$\omega_{ri}(t) = \frac{d\gamma_{ri}(t)}{dt};$$

$$\omega_r(t) = \frac{d\gamma_r(t)}{dt}.$$

Зв'язок між кутовими швидкостями СК РІ та ротора і відповідними їм механічними кутовими швидкостями описується такими рівняннями:

$$\omega_r(t) = Z'_p \omega_4(t);$$

$$\omega_{ri}(t) = Z'_p \omega_2(t),$$

де Z'_p — кількість пар полюсів ВМ; $\omega_2(t)$; $\omega_4(t)$ — механічні кутові швидкості РІ та ротора відповідно.

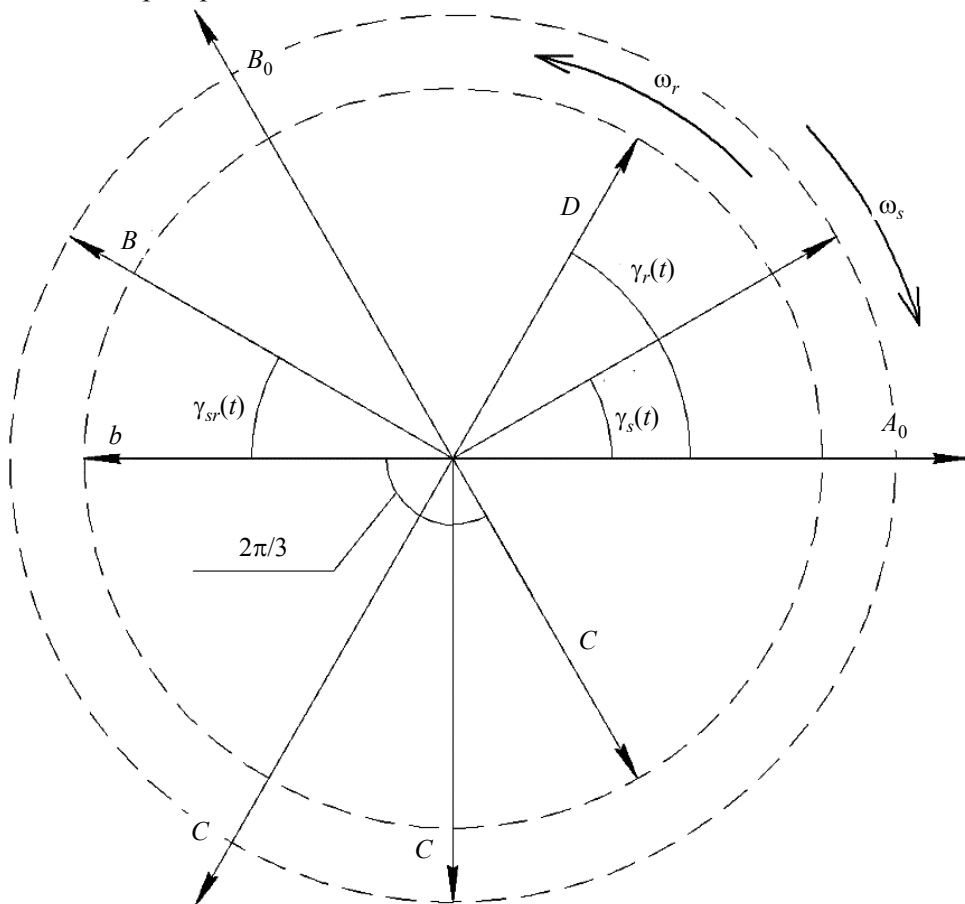


Рис. 2. Трифазні системи координат статора, РІ та ротора двомашинного асинхронного агрегата

У матричній формі систему диференціальних рівнянь електричної рівноваги кіл РІ та ротора ВМ можна записати у вигляді [2–4]:

$$\begin{cases} U_3 = R_3 I_3 + \frac{d\Psi_3}{dt}; \\ 0 = R_4 I_4 + \frac{d\Psi_4}{dt}, \end{cases} \quad (2)$$

де $U_3 = \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix}$; $I_{3,4} = \begin{bmatrix} I_{A,a} \\ I_{B,a} \\ I_{C,c} \end{bmatrix}$; $\Psi_{3,4} = \begin{bmatrix} \Psi_{A,a} \\ \Psi_{B,a} \\ \Psi_{C,c} \end{bmatrix}$ — вектори напруг, струмів і пото-

козчеплень трифазної обмотки РІ (ABC) і короткозамкненої обмотки ротора (abc) відповідно; R_3, R_4 — активні опори фаз статора і ротора відповідно за умови їх симетричності.

Активні опори та напруга живлення ВМ не залежать від взаємного розташування РІ та ротора, а тому їх можна визначати як і у випадку машини із закріпленим статором [4].

Взаємозв'язок потокозчеплень і струмів РІ та ротора ВМ визначаються матричним рівнянням

$$\begin{bmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{33} & L_{34} \\ L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

де $L_{33} = \begin{bmatrix} L_A & L_{AB} & L_{AC} \\ L_{BA} & L_B & L_{BC} \\ L_{CA} & L_{CB} & L_C \end{bmatrix}$; $L_{44} = \begin{bmatrix} L_a & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_b & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_c \end{bmatrix}$; $L_{43} = \begin{bmatrix} L_{aA} & L_{aB} & L_{aC} \\ L_{bA} & L_{bB} & L_{bC} \\ L_{cA} & L_{cB} & L_{cC} \end{bmatrix}$;

$L_{34} = \begin{bmatrix} L_{Aa} & L_{Ab} & L_{Ac} \\ L_{Ba} & L_{Bb} & L_{Bc} \\ L_{Ca} & L_{Cb} & L_{Cc} \end{bmatrix}$ — матриці індуктивностей (L_A, \dots, L_c) та взаємоін-

дуктивностей (L_{Aa}, \dots, L_{ac}) фаз трифазної обмотки РІ та короткозамкненої обмотки ротора.

Власні індуктивності фаз РІ та ротора, а також взаємоіндуктивності фаз РІ або ротора одна відносно одної є сталими величинами, які не залежать від кута повороту РІ та ротора, а тому їх розрахунок для ВМ не відрізняється від машини із закріпленим статором [4] і може бути виконаний за довідковими даними асинхронної машини [5].

Взаємоіндуктивності фаз трифазної обмотки РІ відносно фаз КЗ обмотки ротора будуть такими:

$$\begin{cases} L_{Aa} = L_{Bb} = L_{Cc} = L_h \cos(\gamma_{rir}); \\ L_{Ab} = L_{Bc} = L_{Ca} = L_h \cos(\gamma_{rir} + 2\pi/3); \\ L_{Ac} = L_{Ba} = L_{Cb} = L_h \cos(\gamma_{rir} + 4\pi/3), \end{cases}$$

де L_h — індуктивність однієї фази ПІ відносно основного магнітного потоку за відсутності струмів у інших фазах; γ_{rir} — кут між СК статора і ротора, розрахований за формулою (1).

За умови відомих параметрів матриць індуктивностей в кожен момент часу із системи матричних рівнянь (3) можна визначити вектори струмів для ВМ:

$$\begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{33} & L_{34} \\ L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Таким чином, із системи (4) з урахуванням системи (2) для кожного моменту часу можна визначити значення струмів (I_3, I_4) і потокозчеплень (Ψ_3, Ψ_4) ВМ. Оскільки для розрахунку електромагнітного моменту необхідно мати будь-яку пару з чотирьох, то маємо 6 варіантів рівняння [2–4]. Для прикладу наведемо рівняння розрахунку моменту через струм і потокозчеплення ротора:

$$M_3 = \frac{Z_p}{3} I_4^T D \Psi_4, \quad (5)$$

$$\text{де } D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рівняння руху ПІ та ротора з урахуванням рівняння (5) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} M_3 - M_{c4} &= J_r \frac{d\omega_4}{dt}; \\ -M_3 + M_{c2} &= J_{ri} \frac{d\omega_2}{dt}, \end{aligned} \quad (6)$$

де J_{ri}, J_r — моменти інерції ПІ та ротора відповідно; M_{c2}, M_{c4} — статичні моменти навантаження, прикладені до статора і ротора відповідно.

У моделі в середовищі MatLab Simulink (рис. 3) навантаження ПІ відсутнє ($M_{c2} = 0$). Функція F_{cn1} формує матриці індуктивностей, а також розв'язує систему рівнянь (3) для вектора струмів за формулою (4). Функція F_{cn2} виконує розрахунок електромагнітного моменту ВМ за рівнянням (5).

Для моделювання вибрано АД 4A100L2Y3 [5] з кількістю пар полюсів $Z'_p = 1$ ($n_0 = 3000$ об/хв). Перехідні процеси (рис. 4) в моделі отримано для наближеного співвідношення $J_{ri} \approx 8J_r$, розрахованого за конструктивними параметрами двигуна [5]. Виходячи з рівнянь (6), у режимі холостого ходу чим менший момент інерції матиме ПІ, тим більшу кутову швидкість він розвине. Чим більшу швидкість набере ПІ, тим більшою буде різниця між кутовою швидкістю ротора ВМ і кутовою швидкістю аналогічної машини із закріпленим статором. Для порівняння на рис. 4 зображено перехідні процеси кутової швидкості та електромагнітного моменту АД тієї ж моделі, але із закріпленим статором (криві a і z).

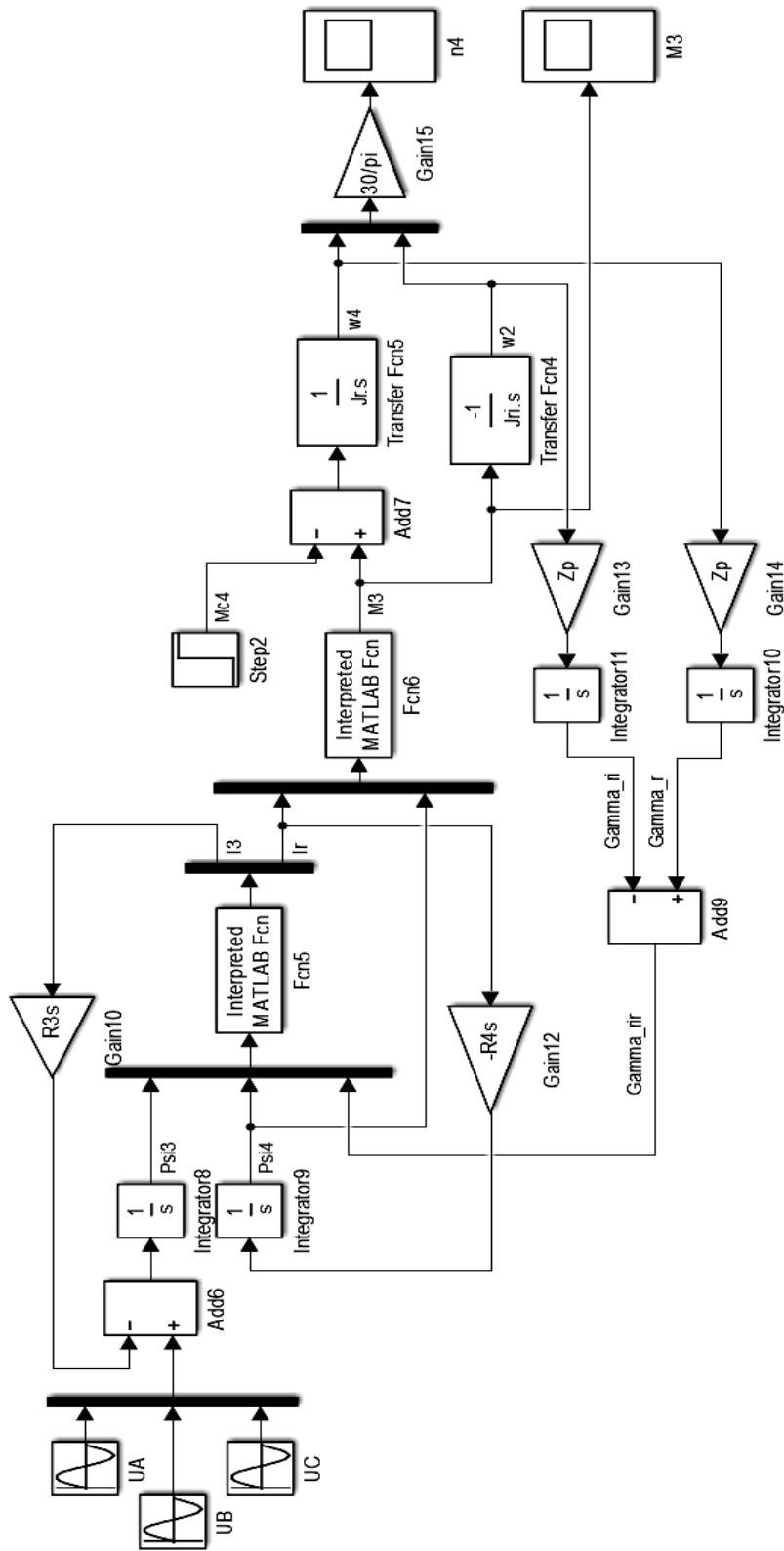


Рис. 3. Структурна схема моделі ВМ для роботи окремо від ПМ

У момент $t = 0,2\text{с}$ у моделі на вал ротора АД з вільним статором подається статичне навантаження $M_{cr} = M_n$, номінальне для обраної моделі асинхронної машини (рис. 4). Оскільки відсутній крутний момент, який забезпечував би компенсацію впливу електромагнітного моменту двигуна на РІ та який у випадку АД із закріпленим статором виконує реакція опори, до якої кріпиться станина двигуна, то кутова швидкість РІ зростатиме в напрямку, протилежному до обертання ротора. Розгін РІ призводить до зниження частоти обертання обертового магнітного поля РІ відносно ротора, а отже, до гальмування ротора. Загалом подачу статичного навантаження на ротор АД з вільним статором можна вважати аварійним випадком.

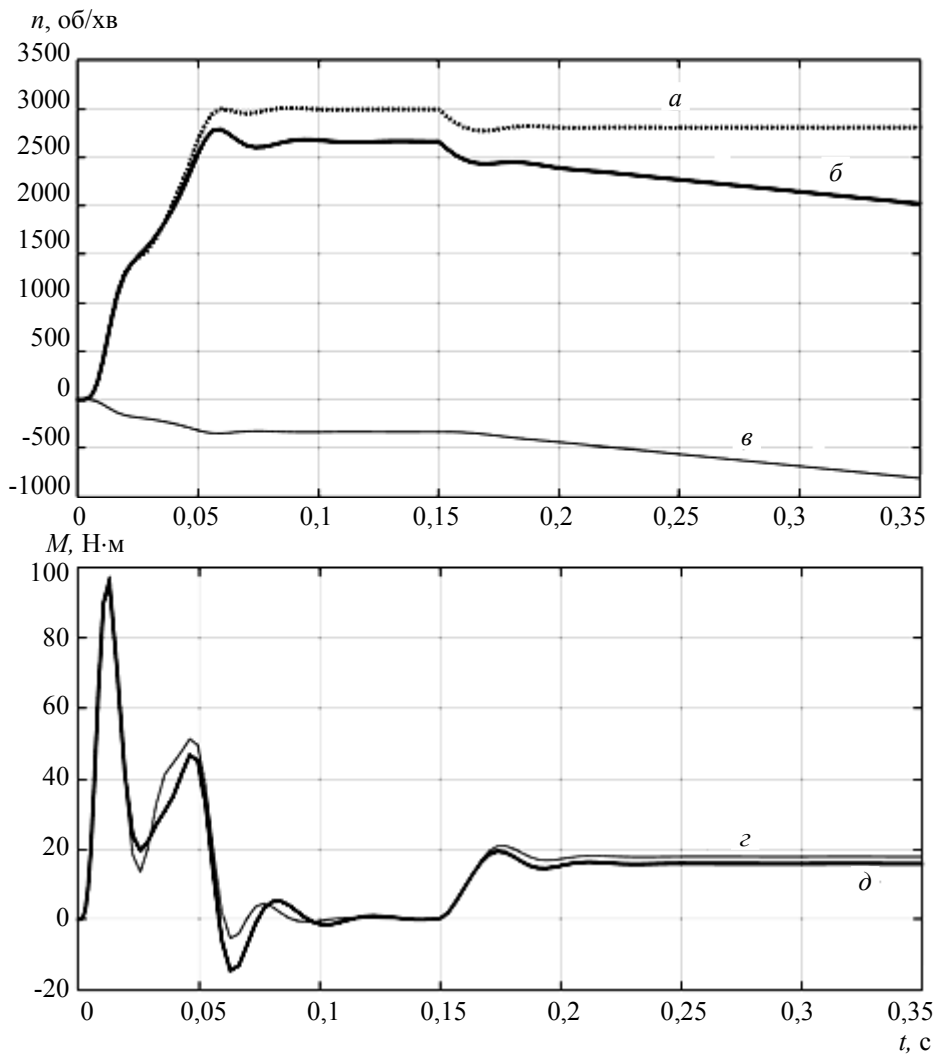


Рис. 4. Перехідні характеристики: *a* — кутова швидкість ротора АД із закріпленим статором; *b* — кутова швидкість ротора ВМ; *v* — кутова швидкість РІ; *z* — електромагнітний момент АД із закріпленим статором; *d* — електромагнітний момент ВМ

Розглянувши моделювання ВМ окремо від ПМ, можемо зобразити модель двомашинного асинхронного агрегата з РІ (рис. 5) як сполучення моделей АД із закріпленим ротором (ПМ) і модель АД з вільним ротором (ВМ).

У номінальному режимі живлення подається одночасно на ПМ і на ВМ. Рухомий індуктор обертається у тому самому напрямку, що і ротор під дією електромагнітного моменту ПМ, пришвидшуючи тим самим швидкість обертотого магнітного поля ВМ.

Для побудови моделі робимо припущення про те, що вплив магнітного поля ПМ на магнітне поле ВМ настільки малий, що ним можна знехтувати.

Компенсацію впливу електромагнітного моменту ВМ на РІ забезпечує ПМ, а тому електромагнітний момент ВМ є моментом навантаження для ПМ. Отже, рівняння руху РІ та ротора мають вигляд:

$$\begin{aligned} M_3 - M_{c4} &= J_r \frac{d\omega_4}{dt}; \\ M_1 - M_3 - M_{c2} &= J_{ri} \frac{d\omega_2}{dt}. \end{aligned} \tag{7}$$

Швидкості ω_2 і ω_4 у рівняннях (7) мають однаковий напрямок, а тому пришвидшують зміну кута між осями трифазних СК ротора та РІ, розрахованого за формулою (1). Таким чином, у моделі реалізується прямий зв'язок ПМ і ВМ за швидкістю і зворотний зв'язок за електромагнітним моментом. У моделі двомашинного АД (рис. 5) та ПМ і ВМ показано АД 4А100L2У3. Статичний момент навантаження ПМ відсутній ($M_{c2} = 0$), а на вал ротора подається номінальне механічне навантаження у момент часу $t = 0,8$ с.

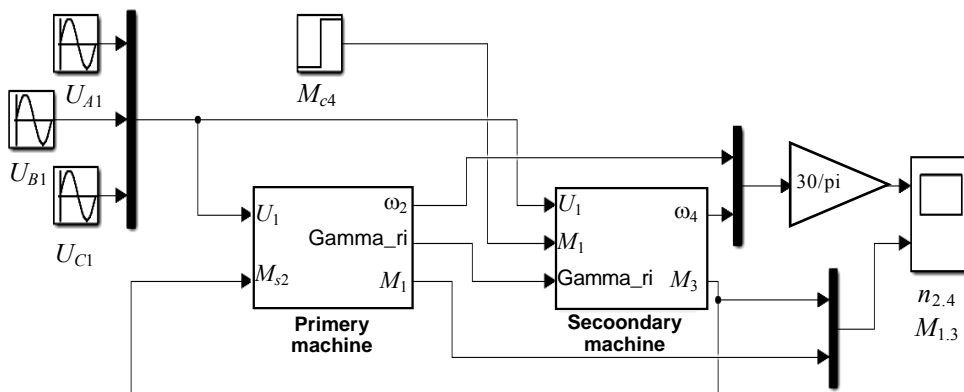


Рис. 5. Структурна схема моделі двомашинного АД

За рахунок різниці моментів інерції РІ та ротора ПМ розганяється значно повільніше ніж ВМ (рис. 6). У режимі холостого ходу кутова швидкість ротора близька до 6000 об/хв. Під впливом номінального навантаження кутова швидкість РІ знижується на величину номінального ковзання ПМ:

$$\omega_{2н} = \frac{\omega_m(1 - s_{нПМ})}{Z'_p}, \tag{8}$$

де $\omega_m = 2\pi f_m$ — кутова частота мережі живлення; $s_{нПМ}$ — номінальне ковзання ПМ.

Кутова швидкість обертотого магнітного поля ВМ становить:

$$\omega_{3н} = \omega_{2н} + \frac{\omega_M}{Z_p''}, \quad (9)$$

де Z_p'' — кількість пар полюсів ВМ.

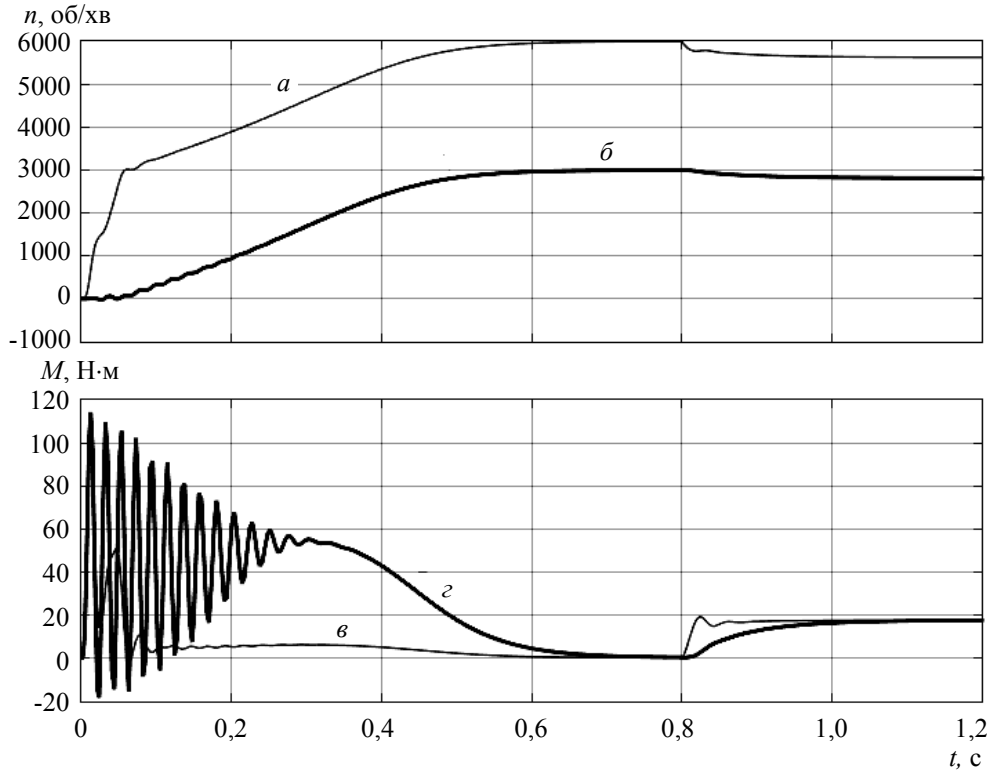


Рис. 6. Перехідні характеристики кутової швидкості та електромагнітного моменту ВМ (а, в) і ПМ (б, г)

Номінальна кутова швидкість ротора тоді може бути знайдена за формулою

$$\omega_{4н} = \omega_{3н} (1 - s_{нВМ}), \quad (10)$$

де $s_{нВМ}$ — номінальне ковзання ВМ.

Перетворивши формулу (10) з урахуванням формул (8) та (9), дістаємо:

$$\omega_{4н} = \omega_M \left(\frac{1 - S_{нПМ} - S_{нВМ} + S_{нПМ} S_{нВМ}}{Z_p'} + \frac{1 - s_{нВМ}}{Z_p''} \right). \quad (11)$$

Оскільки однією з найважливіших і корисних характеристик двомашинного АД з РІ є досягнення швидких обертів на вихідному валу ротора, то ПМ і ВМ повинні мати одну пару полюсів ($Z_p' = Z_p'' = Z_p = 1$), як це і є у розглянутій моделі. Тоді формула (11) набуває вигляду

$$\omega_{4н} = \omega_M (2 - S_{нПМ} - 2S_{нВМ} + S_{нПМ} S_{нВМ}).$$

Виходячи із графіків перехідних процесів (рис. 6), можна стверджувати, що одночасний пуск ПМ і ВМ призводить до перевантаження ПМ

одночасно двома пусковими моментами. Почергове вмикання спочатку ВМ, а потім ПМ можливе тільки у випадку відсутності статичного навантаження на валу, до того ж характеризуватиметься реверсом РІ, тому не є доцільним.

На графіках перехідних процесів (рис. 7) у початковий момент часу подається живлення тільки на ПМ. Вал РІ розганяється і в момент часу $t = 0,8\text{с}$ відбувається пуск ВМ під номінальним навантаженням і вал ротора розганяється до своєї номінальної швидкості. Перехідний процес кутової швидкості ротора за таких умов відбувається значно швидше, ніж у разі ввімкнення двох машин одночасно, оскільки тривалість пуску задається фактично тільки інерційністю ВМ, яка значно менша за інерційність ПМ. Пуск ПМ відбувається в нормальних умовах.

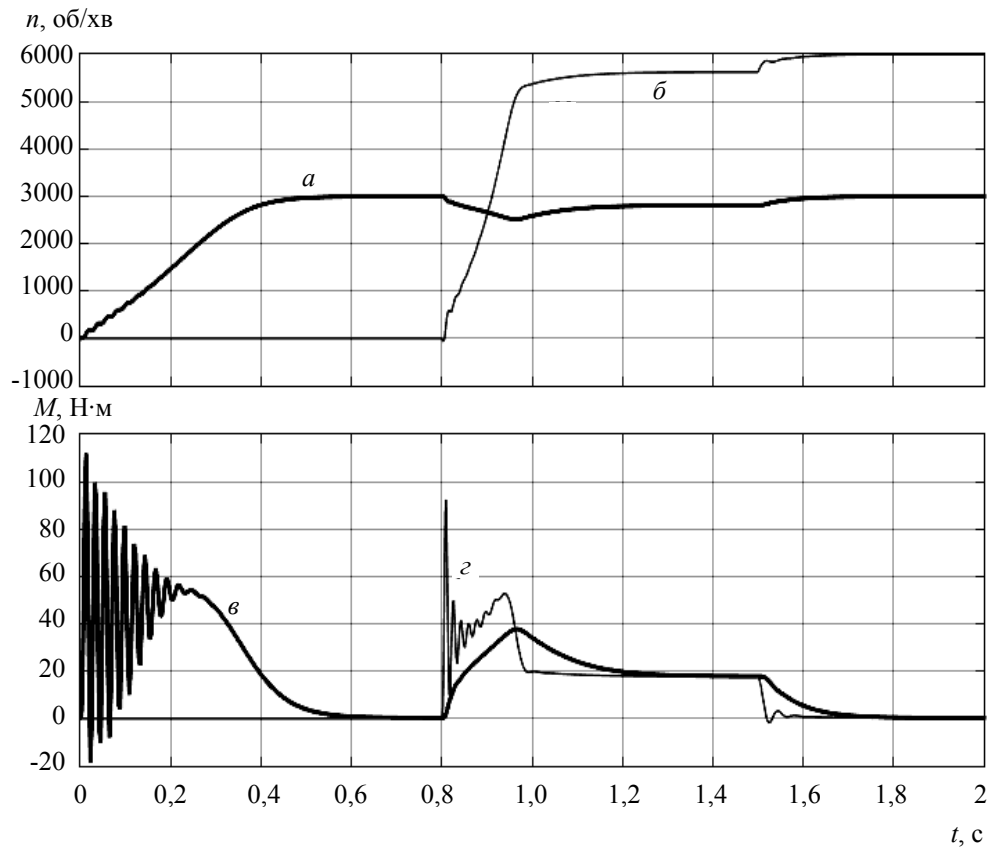


Рис. 7. Перехідні характеристики кутової швидкості та електромагнітного моменту ВМ (а, в) та ПМ (б, г) за почергового пуску

Побудована для описаного режиму механічна характеристика ВМ (рис. 8) мало відрізняється за формою від механічних характеристик АД. Перед точкою номінального режиму (В) відбувається незначний стрибок, зумовлений різною тривалістю перехідних процесів ПМ і ВМ. У режимі холостого ходу (точка А) зі зняттям навантаження вал ротора досягає швидкості близько 6000 об/хв.

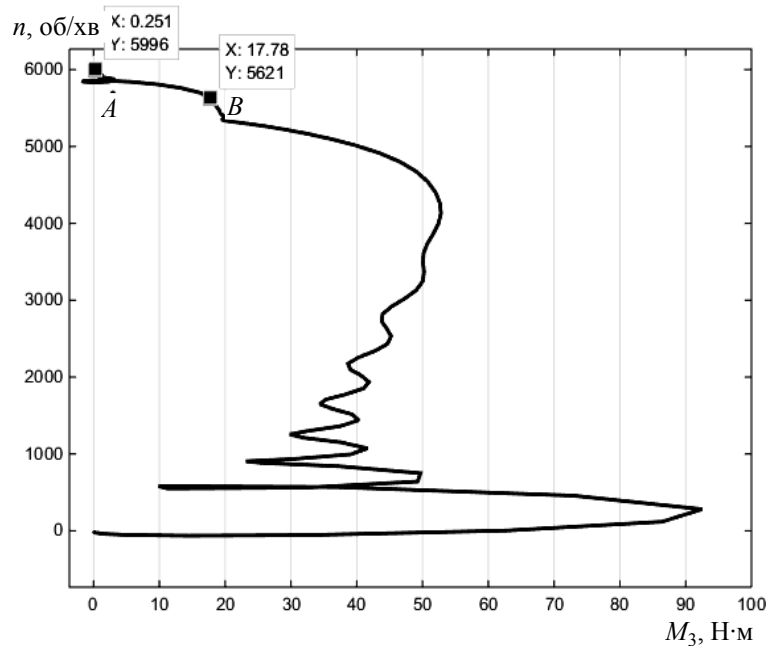


Рис. 8. Механічна характеристика ВМ $n_4(M_3)$

ВИСНОВКИ

Розроблена модель двомашинного асинхронного агрегата з РІ у трифазній системі координат відображає роботу ПМ і ВМ і дозволяє спостерігати за перебігом у них необхідних фізичних процесів. На основі моделі з'ясовано оптимальний режим почергового пуску ПМ і ВМ, встановлено залежність (11) кутової швидкості ротора від ковзання ПМ і ВМ, побудовано графіки перехідних процесів кутової швидкості та електромагнітного моменту ПМ і ВМ, а також механічну характеристику ВМ.

Отримана модель може бути використана для уточнення параметрів даного класу електричних машин під час їх проектування та проектування електроприводів на їх основі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Патент України на корисну модель UA 109114 U. Асинхронний двигун / А.М. Сільвестров, В.Ф. Шинкаренко, О.Ф. Мінець. — № u109114; заявл. 24.02.2016; опубл. 10.08.2016. — Бюл. № 15/2016.
2. Моделювання електромеханічних систем: підручник / О.П. Чорний, А.В. Луговий, Д.Й. Родькін. — Кременчук, 2001. — 376 с.
3. Терехин В.Б. Моделирование систем электропривода в Simulink (Matlab 7.0.1) / В.Б. Терехин. — Томск: Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2010. — 292 с.
4. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу: навч. посіб. / О. І. Толочко. — К.: НТУУ «КПІ», 2016. — 150 с.
5. Асинхронные двигатели серии 4А: справ. /А 90 / А.Э. Кравчик, М.М. Шлаф, В.И. Афонини, Е.А. Соболевская. — М.: Энергоиздат, 1982. — 504 с.
6. Луцьо В.В. Математична модель двомашинного асинхронного двигуна із рухомим індуктором / В.В. Луцьо, А.М. Сільвестров // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 1. — С. 66–74.

Надійшла 01.11.2019

FORECASTING SO₂ EMISSION OF KILAUEA VOLCANO USING INTELLIGENT METHOD OF DATA ANALYSIS

S.I. ZABIELIN

Abstract. Kilauea is one of the most active and well-known volcanoes in the world and most of our knowledge of volcanism originates from its research. During a long study of volcanoes, many different methods of forecasting their activity were proposed, from the seismological analysis to the statistical analysis of their emissions. However, a comprehensive analysis of data arrays with the help of intelligent methods of data analysis has not been carried out before. Using fuzzy data processing methods, a neural network, volcanic and atmospheric indicators, we forecast emissions SO₂ for a period of one to three months.

Keywords: neural network, volcanology, fuzzy logic, LSTM.

INTRODUCTION

Kilauea is a shield volcano on the island of Hawaii on the southeastern tip of the Hawaiian Archipelago. It is one of the most active and well-known volcanoes in the world and most of our knowledge of volcanism originates from his research. Kilauea often erupted and expanded over a long period of time.

Kilauea is one of the most studied volcanoes in the world. Since the arrival in its neighborhood of the first Christian missionaries in 1823, detailed descriptions of the eruption of the volcano were conducted. In 1912, after the construction of the Hawaiian Observatory of Volcanoes on the caldera Kilauea, ongoing scientific research was carried out [1]. Today, this observatory has become one of the world's leading centers of volcanological research.

During a long study of volcanoes, many different methods of forecasting their activity were proposed, from seismological analysis to statistical analysis of their emissions. However, a comprehensive analysis of data arrays with the help of intelligent methods of data analysis has not been carried out before.

MODEL FOR VOLCANIC ERUPTIONS

Many different methods of volcanology try to predict the behavior of volcanoes using temperature data or seismic models [2], lava motion models, or gas motion models. The proposed model used to predict volcanic activity consists of three components: volcanological, atmospheric, and seismic models (Fig. 1).

During volcanic eruptions, a hot mixture of particles and volcanic gases is typically released into the air. The main parameters of the volcanological model include indicators of carbon dioxide (tons per month), sulfur dioxide (tons per month) and a discrete volcanic explosivity index from 0 to 8, where 0 to

10,000 meters of cubic ejected materials, 8 – more than 1,000 cubic kilometers of ejected materials [3].

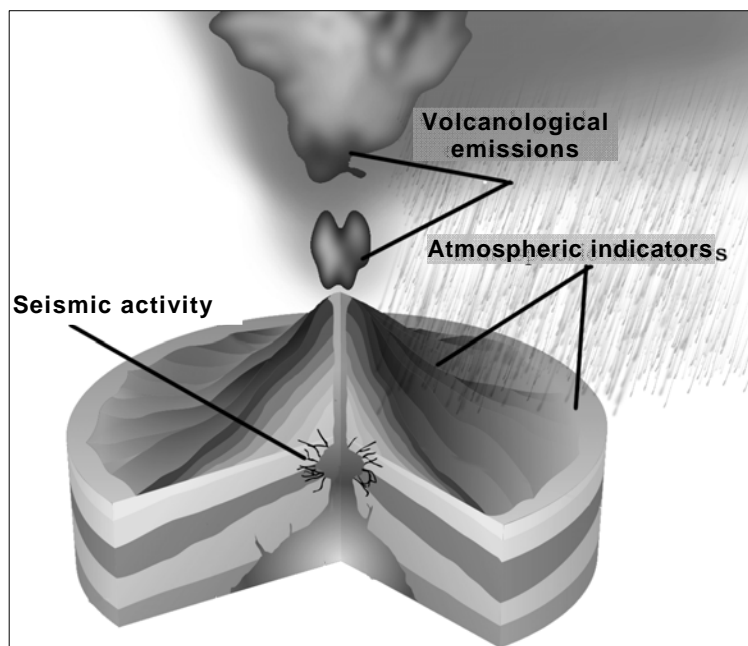


Fig. 1. Volcanic Eruption Model

Emissions of gases and hot particles affect the atmospheric performance of the metrological stations closest to the volcano. The main parameters of the atmospheric model include temperature anomaly ($^{\circ}\text{C}/\text{month}$), precipitation (mm per month), air pressure, wind speed. Thus, an increase in the temperature anomaly precedes the eruption of a volcano and can provide the necessary data for forecasting [4].

The eruption can also be preceded by seismic activity several hours or days before the eruption. The main parameters of the seismic model is the relative magnitude of soil vibrations [5].

STATEMENT OF THE PROBLEM

Task is to predict the behavior of the volcano using the volcanic eruption model described above and various data collected from volcanic studies over a long period.

Data

The first component is the data. It was taken from a different number of sources and reports [6–9]. Data can be divided into several categories.

Volcanological indicators include:

1. Carbon dioxide CO_2 . The gas that is released during the volcanic activity of a volcano.
2. Sulfur dioxide SO_2 . A colorless gas with a pungent odor that irritates the skin and mucous membranes of the eyes, nose and throat.

3. Indicator of volcanic activity. An indicator of the strength of a volcanic eruption based on an estimate of the volume of erupted products and the height of the ash column.

These indicators directly show the activity of the volcano. With a sharp increase in emissions, it can be concluded about the onset of volcanic activity.

Atmospheric indicators include:

4. Temperature anomaly ($^{\circ}\text{C}$ /month). Deviation from the reference value or long-term average.

5. Precipitation (mm per month).

6. Air pressure.

7. Wind speed. Allows you to determine the speed of gas propagation from the bowels of the volcano and make the appropriate correction for volcanological indicators.

Seismic indicators include.

Relative magnitude of soil vibrations, calculated by the following formula:

$$M_r = \frac{M}{d^2},$$

where M is the magnitude of the earthquake at the epicenter and d is the distance from the epicenter to the volcano.

METHODS USED

To analyze data, fuzzy logic and neural networks were used.

Echo time series

For higher accuracy of the neural network, the echo time series have been developed. This method is used for time series with high sparseness. Instead of fading immediately, a surge in the value in the time series generates an echo that propagates further along the time series. Each echo term in a time series is described by the following formula:

$$E_i = x_i + kx_{i-1} + k^2x_{i-2} + \dots + k^n x_{i-n},$$

where E_i is the echo value of the time series, x_i is the value of the input time series at time i , k is the attenuation coefficient ($k < 1$), n is the attenuation limit, which determines the limit of the influence of previous values on the current value.

This method was used in the current problem for the relative soil vibration magnitudes, since earthquakes are rare and sporadic.

Fuzzification

To use fuzzy data it was fuzzified. Fuzzification is the process of changing a real scalar value into a fuzzy value. This is achieved with the different types of fuzzifiers (membership functions) [10].

Fuzzy data were presented in the form of triangular fuzzy numbers, described using three numbers — $\{a, b, c\}$, where b is the mode of the fuzzy number, a and c are the degrees of fuzziness of the fuzzy number. They were calculated from initial data using the following formulas:

$$b_i = x_i, a_i = x_i \left(\frac{N-1}{N} \right), c_i = x_i \left(\frac{N+1}{N} \right),$$

where x_i is the initial clear data at time i , N is the number of input variables, for this problem $N = 8$.

Thus, using the above-described method of fuzzification, we can obtain fuzzy numbers, which, with an increase in the number of input parameters, tend to real scalar data. This consideration is justified by the assumption that the forecast will be less fuzzy using all the indicators of the data. In other words if we had the opportunity to obtain the location and velocity vector of all molecules within a radius of 10 km from the volcano, then the forecast could be given with undeniable accuracy.

Neural networks

To solve this problem, it was decided to use recurrent neural networks, namely long-term short-term memory (LSTM). Like most recurrent neural networks, an LSTM network is universal in the sense that, with a sufficient number of network elements, it can perform any calculation that a regular computer is capable of, which requires an appropriate weight matrix that can be considered as a program. Unlike traditional recurrent neural networks, the LSTM network is well suited for training on the problems of classification, processing and forecasting time series in cases where important events are separated by time lags with an indefinite duration and boundaries. The relative immunity to the duration of time gaps gives LSTM an advantage over alternative recurrent neural networks, hidden Markov models, and other training methods for sequences in various fields of application [11].

RESULTS AGGREGATION PROCESS

To predict volcanic activity, we used the process of aggregation of results, presented in Fig. 2.

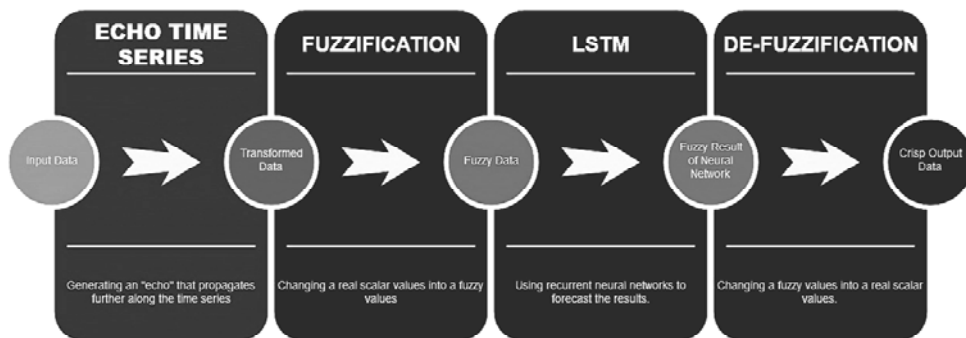


Fig. 2. Schematic process of aggregating results

The input data that was described earlier goes through several stages of data conversion, fuzzification, forecasting and de-fuzzification. Each part of the process receives input from the previous stage and, after appropriate transformations, transfers it to the next stage.

Below in Fig. 3, 4 and Table, you can see an example of the aggregation process with intermediate values obtained at various stages of its operation.

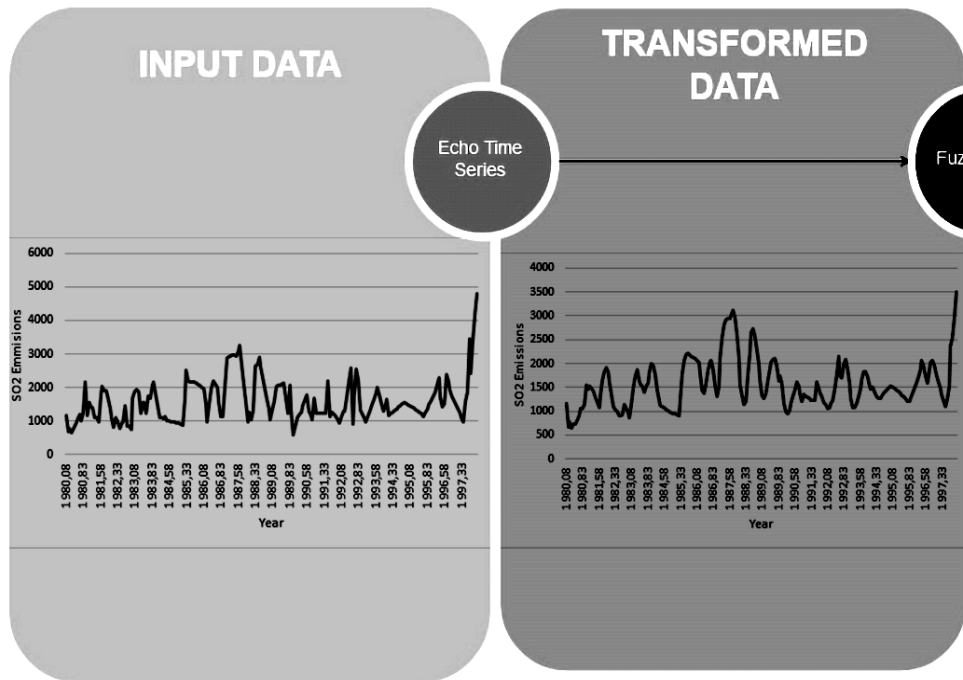


Fig. 3. Example of an aggregation process for SO₂ emissions

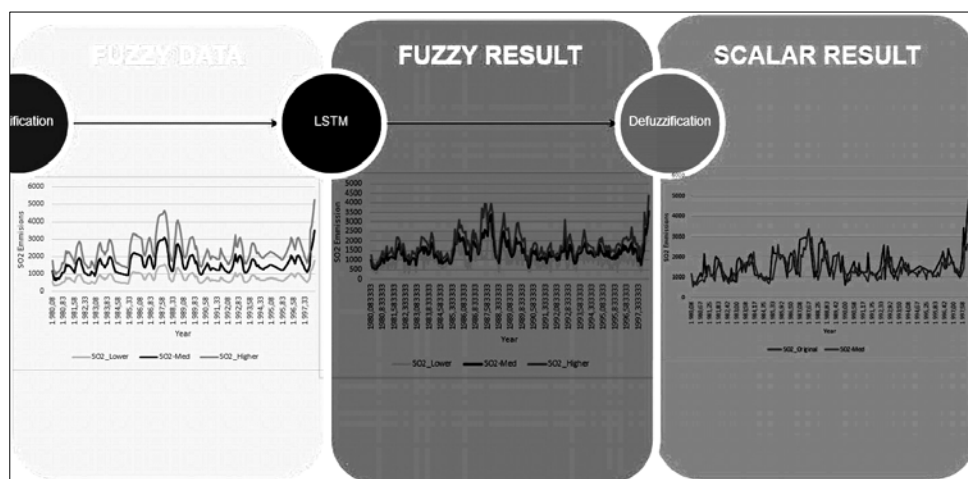


Fig. 4. Example SO₂ Emissions Aggregation Process

An example of forecasting

Date	Input SO ₂	Fuzzy Low	Fuzzy High	Forecasted Low	Forecasted High	Scalar Result	MPE
1983,00	1670,20	835,10	2505,30	1632,10	1765,20	1698,65	0,04
1983,08	1872,33	936,17	2808,50	1193,17	2347,33	1770,25	0,25
1983,17	1944,51	972,26	2916,77	1415,26	2753,51	2084,38	0,24
1983,25	1864,81	932,40	2797,21	1091,40	2090,81	1591,11	0,24
1983,33	1233,60	616,80	1850,41	816,80	1422,60	1119,70	0,21
1983,42	1560,11	780,05	2340,16	1189,05	2202,11	1695,58	0,23
1983,50	1552,24	776,12	2328,35	444,12	1856,24	1150,18	0,38
1983,58	1229,47	614,74	1844,21	966,74	1140,47	1053,60	0,08
1983,67	1740,36	870,18	2610,53	1026,18	2327,36	1676,77	0,28
1983,75	1680,17	840,08	2520,25	1015,08	2161,17	1588,13	0,27
1983,83	2066,06	1033,03	3099,09	1411,03	1964,06	1687,55	0,14
1983,92	2157,86	1078,93	3236,79	1065,93	2583,86	1824,90	0,29

FORECASTING RESULTS

Prediction was carried out for emissions of SO₂ for a period of one to three months.

The predicted indicators are a triangular fuzzy number, where each of the parameters is calculated by a separate neural network. Each of the three neural networks receives real scalar data, the first is the lower boundary of the triangular number, the second is the mode, and the third is the upper boundary.

The result of the work of these networks and their various training became predicted fuzzy number. Cross-validation of data was performed when dividing the data into a training and verification sample. Data was taken from 1980 to 1997. The results are given below.

As can be seen when forecasting at 1 month (fig. 5–6), good forecasting results were obtained with an original SO₂ level that stayed in the boundaries of the predicted values.

CONCLUSIONS

In this paper, we presented a method for predicting SO₂ emissions using a large number of diverse input data, phasing methods, recurrent neural networks, and time series echoes. High accuracy indicators were obtained when forecasting from one to three months in advance.

This method can be used to detect volcanic activity at an early stage of its initiation and to prevent the catastrophic consequences that volcanic activity can bring with it.

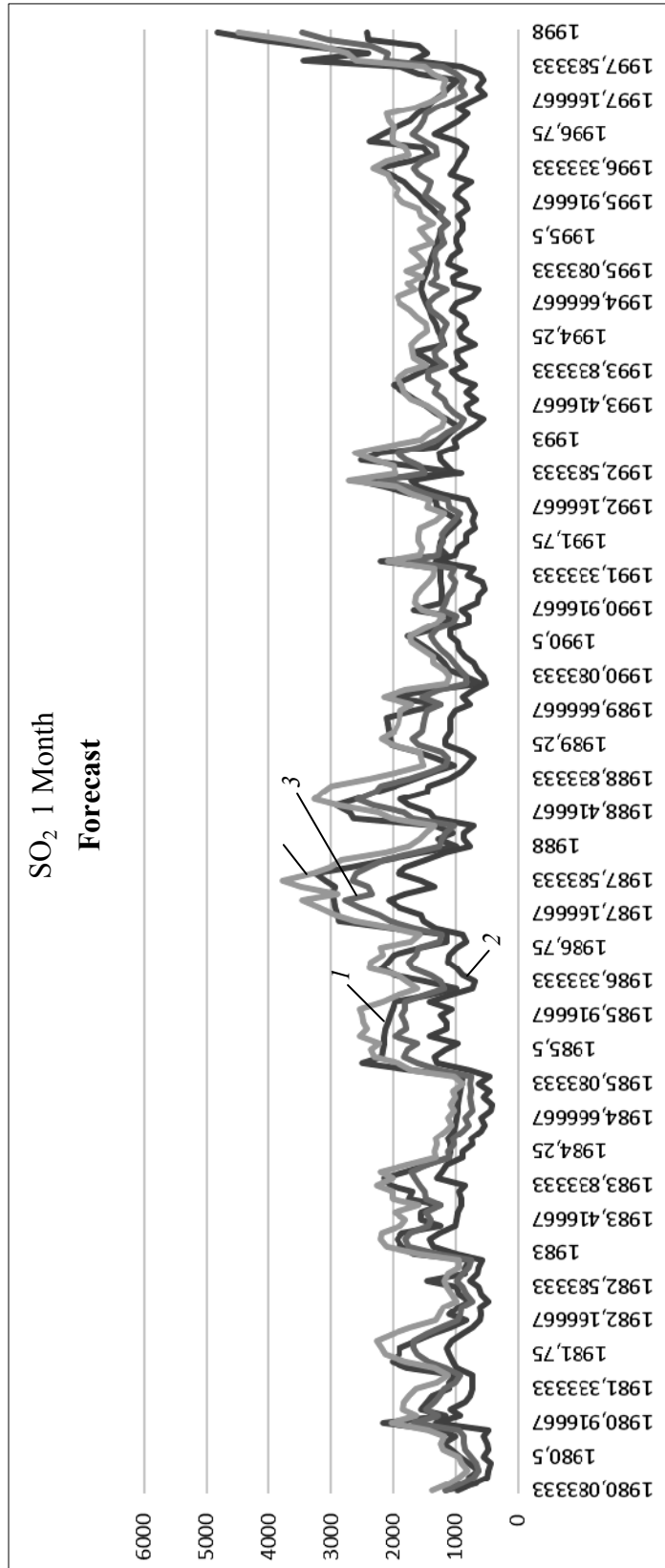


Fig. 5. Forecasting emissions for 1 month: 1 — SO₂ (Original); 2 — SO₂ (Low); 3 — SO₂ (Med); 4 — SO₂ (High)

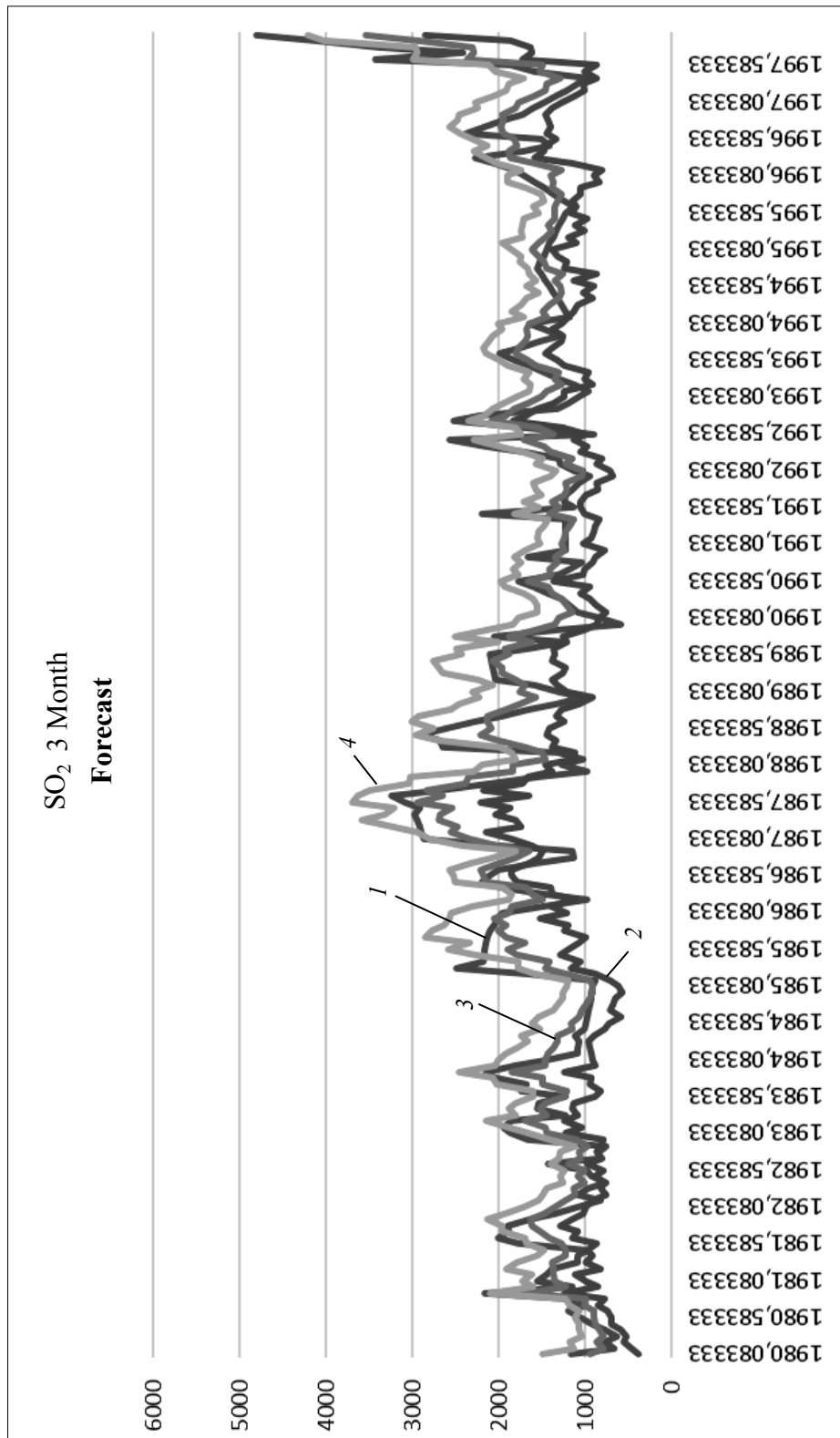


Fig. 6. Forecasting emissions for 3 month: 1 — SO₂ (Original); 2 — SO₂ (Low); 3 — SO₂ (Med); 4 — SO₂ (High)

CONCLUSIONS

In this paper, we presented a method for predicting SO₂ emissions using a large number of diverse input data, phasing methods, recurrent neural networks, and time series echoes. High accuracy indicators were obtained when forecasting from one to three months in advance.

This method can be used to detect volcanic activity at an early stage of its initiation and to prevent the catastrophic consequences that volcanic activity can bring with it.

REFERENCES

1. *Hawaii* Volcanoes National Park (N.P.), natural resources management plan. — Hawaii: Department of the Interior, 1974. — P. 32.
2. *Shimozuru D.* A seismological approach to the prediction of volcanic eruptions / D. Shimozuru // *The Surveillance and Prediction of Volcanic Activity.* — Paris, 1971. — P. 19–45.
3. *Aiello G.* Volcanoes: geological and geophysical setting, theoretical aspects and numerical modeling, applications to industry and their impact on the human health / G. Aiello. — London: IntechOpen, 2018. — 285 p.
4. *Gvishiani A.D.* Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications / A.D. Gvishiani, J.O. Dubois. — Berlin: Springer, 2011. — P. 239–283.
5. *Zobin V.M.* Introduction to volcanic seismology / M. V. Zobin. — Amsterdam: Elsevier, 2017. — P. 29–43.
6. *Elias T.* Sulfur dioxide emission rates of Kilauea Volcano, Hawaii, 1979–1997. Menlo Park, CA: U.S. / T. Elias // *Geological Survey.* — 1998.
7. *Carey R.* Hawaiian volcanoes: from source to surface / R. Carey. — Washington, D.C: American Geophysical Union, 2015. — P. 393–404.
8. *Poland M.P.* Characteristics of Hawaiian volcanoes / M.P. Poland, T.J. Takahashi, C.M. Landowski. — Reston, Virginia: U.S. Department of the Interior, U.S. Geological Survey, 2014. — 429 p.
9. *Helz R.T.* Whole-rock analyses of core samples from the 1988 drilling of Kilauea Iki lava lake, Hawaii / R.T. Helz, J.E. Taggart // *Open-File Report.* — 2010. — doi: 10.3133/ofr20101093
10. *Bhargava A.K.* Fuzzy set theory fuzzy logic and their applications / A.K. Bhargava // Ram Nagar, New Delhi: S CHAND & CO LTD, 2013. — P. 315–348.
11. *Goodfellow I.* Deep learning. Cambridge / I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville. — MA: MIT Press, 2017. — P. 408–412.

Received 25.10.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

CT IMAGE DENOISING BASED ON LOCALLY ADAPTIVE THRESHOLDING

M.D. PETROV

Abstract. The noise in reconstructed X-ray Computed Tomography (CT) slices is complex, non-stationary and indefinitely distributed. Subsequent image processing is needed in order to achieve a good-quality medical diagnosis. It requires a sufficiently great ratio between the detailed contrasts and the noise component amplitude. This paper presents an adaptive method for noise reduction in CT images, based on the local statistical evaluation of the noise component in the domain of Repagular Wavelet Transformation (RWT). Considering the spatial dependence of the noise strength, the threshold constant for processing the high frequency coefficients in the proposed shrinkage method is a function of the local standard deviation of the noise for each pixel of the image. Experimental studies have been conducted using different images in order to evaluate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: repagular wavelet transform, statistical noise reduction, X-ray computed tomography.

INTRODUCTION

Because of its high productivity in obtaining images having very good spatial resolution, X-ray CT plays a central role in clinical diagnostics. The improvement of this resolution is directly related to the radiation dose. However, its increase poses a certain risk to the patient's health. On the other hand, lowering this dose can significantly reduce the diagnostic value of the tomographic image obtained. The protocol optimization for the corresponding clinical study is based on the balance between preserving the fine details of the image, the noise level and the radiation dose for the patient. Therefore, the development of algorithms for noise reduction in CT images obtained at a reduced radiation dose, while maintaining the detailed information, is a topical task. The statistical fluctuations of the X-ray quanta reaching the corresponding detector are a source of quantum noise in the projection data. This noise, combined with the noise generated by the electronics of workstations, is propagated by means of the reconstruction algorithms in the CT slices. The methods for noise reduction in CT images obtained at a low radiation dose are mainly divided into three groups [1]: methods in the projection data domain; methods in the image domain; image and iterative-reconstructive methods.

The algorithms developed in the Radon space most often use iterative, optimization and filtering methods before the application of the Filtered Backprojec-

tion. The low values of the signal-to-noise ratio in the sonogram lead to the loss of structural information.

The methods for reducing the noise in the reconstructed CT slices can be divided into two subgroups: spatial-domain denoising techniques and transform-domain denoising techniques. The linear filters used in the spatial domain are not very effective for the preservation of the small details in the image, because its diagnostic value is reduced. Significantly better results are obtained with methods based on anisotropic diffusion. Its iterative character allows for improved computational efficiency, but speckled or mosaic effects appear in the denoised CT images [6–7]. Noise reduction algorithms in the transformation domain are based on different multiscale transformations, with the possible use of noise assessment [8–11]. CT image is decomposed in the low and high frequency sub-bands of the scale space. Usually, the high-frequency wavelet coefficients are subjected to threshold processing because the noise components are located mainly in these subbands. The denoised image is obtained by means of inverse multiscale transformation.

The third group of CT noise reduction methods refers to iterative reconstruction using iterative and optimization algorithms that are implemented within the two spaces for obtaining CT images. The advantage is the direct use of the statistics of the noise component in the projection data during the implementation of the algorithm, but the problem is the increased computational value [12–14]. With the improvement of workstations, the iterative reconstruction is a preferred alternative to the Filtered Backprojection. This helps to solve the problem of reduced radiation dose while preserving the diagnostic properties of the image [15–16].

The goal of this paper is to present a locally adaptive, shrinkage algorithm for noise reduction in CT images, based on the individual reconstruction of a pair of intersecting subsets of projection data and threshold processing in the RWT field. The rest of the report is organized as follows: section 2 provides a brief description of the motivation for the proposed method. The multiscale RWT used in this paper is presented in Section 3, and the following section provides a detailed description of the implementation of the announced noise reduction algorithm in CT images. Section 5 presents the outcome of the experimental studies carried out, as well as some comparative assessments. The last section summarizes the results obtained and the conclusions drawn.

MOTIVATION AND JUSTIFICATION

Generally, a certain statistical model of the distribution of the noise component in the image is used in post-processing methods for noise reduction in CT slices and it may lead to inaccurate reflection of the actual situation. The approximate description of the physical process of obtaining the projection data can be achieved with Poisson statistics. However, the analytical description of the noise in CT images is complicated by the fact that reconstruction methods generate a correlation in the noisy data [17]. Therefore, [18,19] propose noise reduction by means of a wavelet threshold method based on the correlation between two CT images that are equivalent in terms of the information they contain.

The method this paper proposes is motivated by the announced in [19] Adaptive Wavelet Shrinkage (AWShrink) algorithm of noise reduction by means of several CT reconstructions. The authors use the fact that the noise in two CT

images, equivalent in terms of information content, is uncorrelated, unlike their structural information. The threshold processing in the method is based on the local evaluation of the noise in the two images, obtained through their high frequency wavelet coefficients. The noise-estimated image is obtained from the corresponding averaged low-frequency coefficients, as well from the modified high-frequency coefficients by means of the inverse wavelet transformation.

REPAGULAR WAVELETTTRANSFORM

The wavelet transformation used in this paper is the RWT, introduced by Poliakova and Krylov [20] in order to increase the accuracy when separating image contours. A family of functions that are localized at one point is used as a basic wavelet. Its scale change occurs not by a dilation operator, as in the usual wavelet transformation, but by using functions of different regularity.

If $s(t)$ is a signal with limited energy and $\psi(t, a)$ is the base wavelet (with a regularity parameter a , its continuous RWT can be set with the convolution $W_s^r(a, b) = s(t)\overline{\psi_a(b)}$, where $\overline{\psi_a(t)} = \psi(-t, a)$. In the applications of the RWT for basic wavelet, the function $\tilde{\psi}(t, a) = 2^{-ta}$ is often used and the corresponding convolution is realized using the filter

$$\{G_a^\Psi(n)\}_{n=0}^{2(N_a-1)} = \{-2^{-(N_a-1)a}, \dots, -2^{-2a}, -2^{-a}, -1, 1, 2^{-a}, 2^{-2a}, \dots, 2^{-(N_a-1)a}\}$$

where $2N_a$ is the number of filter coefficients. The values of the parameter a of the RWT can be set by the formula $a = 2^{-j}\alpha_0$, where α_0 is any fixed number from the interval (0,1), and $j = 0, 1, 2, \dots$. The change of j results in modifying the regularity parameter, i.e. the transition from one scale level to another in RWT is done by changing the parameter a .

THE PROPOSED METHOD

A Brief Overview of the Method

The overview of the proposed method can be seen in the block diagram in Fig. 1.

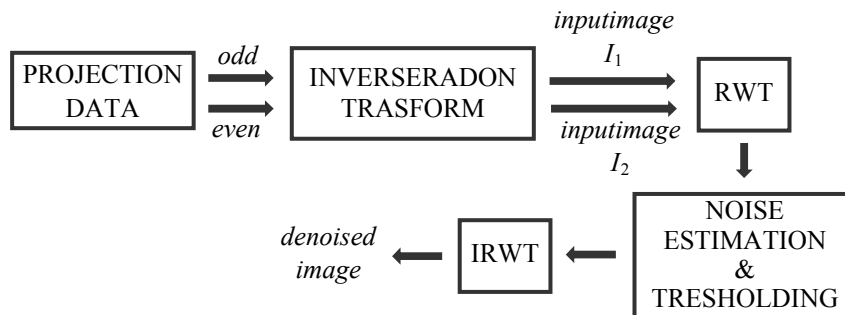


Fig. 1. A block diagram of the proposed method for reducing noise in CT images

The first step consists in obtaining the couple of input images that differ only in terms of their noise components. Their generation is realized by separate reconstructions of two projection sets, equivalent in terms of information. One of the possibilities of obtaining these projections is the double scan of the object

under identical conditions and using half of the total radiation dose. Another option is the use of two non-intersecting subsets of projection data, whose overlapping represents the entire set of projections. An example of such subsets are respectively the sets of odd and even projections obtained at a single scan. In this case, it is assumed that the noise between the adjacent parallel projections is uncorrelated, since the cross disturbances of the detector are negligible. The averaged image obtained from the pair of reconstructed images corresponds to the reconstruction from the full set of projections. These methods are CT variants with a single source and it is necessary to take into account certain factors, such as the reconstruction method, the sufficient number of projections, etc. [21].

In case there is a dual-source CT scanner, obtaining the input images is not a problem, if the pair of tubular detector systems uses the same protocol for scanning and reconstruction [22].

The statistical evaluation of the noise in the reconstituted pair of images, and hence in their averaged image, is obtained by means of their RWT coefficients. The denoised image is obtained through the inverse RWT applied to the low-frequency and the corrected high-frequency coefficients of the averaged image, respectively. The resulting image corresponds to the reconstruction of the complete set of projections but with an improved signal-to-noise ratio.

Noise Assessment

Let us denote with I_1 and I_2 the pair of images obtained by separate reconstruction of the even and odd numbered projections of a given scan, and the total number of the received projections is an even number. The noise in the pair of projection sets is uncorrelated and, through the reconstruction methods, it appears as such in the CT slices. In addition, the noise components of the images are assumed to have zero averages and approximately equal standard deviations (at a given position of the pixel), as the number of the quantas that produces them is approximately equal. Let us note that the noise level in each of the images increases by a factor $\sqrt{2}$ compared to the noise level in the reconstructed image corresponding to the full set of projections [23].

Because the structural information is common to both images, their difference $D = I_1 - I_2$ can be used to estimate the noise in each of them, and therefore in their averaged image $I = 0,5(I_1 + I_2)$. Taking into account the zero covariance between the pair of random variables, then $\sigma(I_1) = \sigma(I_2) = 2^{-0,5} \sigma(D)$ and $\sigma(I) = 2^{-0,5} \sigma(I_1) = 2^{-1} \sigma(D)$.

Let $w_{j,m}(\cdot)$ be the coefficient of the m -th pixel, at a scale of j ($j > 0, m \in \mathbb{R}$), obtained through RWT. Since the transformation is linear, the equality $w_{j,m}(D) = w_{j,m}(I_1) - w_{j,m}(I_2)$ is valid. As it has been noted above, the noise in CT images is non-stationary, i.e. its power is spatially dependent, which implies a local evaluation of its standard deviation. Therefore, for each pixel m , a neighbourhood Ω_m is selected that contains n pixels. Since the noise has a zero average, then $\sigma_{j,m}(D) = \sqrt{n^{-1} \sum_{n \in \Omega_m} w_{j,m}(D)^2}$ and, finally, for the standard deviation

of the noise in the averaged image I , we obtain: $\sigma_{j,m}(D) = \sqrt{n^{-1} \sum_{n \in \Omega_m} w_{j,m}(D)^2}$.

Determining the Threshold Mask

There are different methodologies for selecting threshold values in shrinkage methods. The nonlinear functions of the “hard” and “soft” thresholds proposed in [24] are most often used. The noise-estimation algorithm includes: wavelet decomposition of the signal; estimation of the coefficients from the high frequency bands, by means of a certain threshold value; obtaining the estimated signal through the inverse transform. A basic idea in noise reduction shrinkage methods is the use of the rarity of the multiscale transformations. The carriers of the structural information of the image are a small number of coefficients, and noise reduction is based on the shrinkage of the rest to zero.

A problem for hard threshold processing are the small changes in the image due to the discontinuity of the function used. The proposed method uses a continuous function of the soft threshold, and the estimated coefficients of the averaged image are $w_{j,m}^0(I) = \text{sgn}(w_{j,m}(I))\max(|w_{j,m}(I)| - \eta_{j,m}(r), 0)$, where $\eta_{j,m}(r) = 2^{-1}r\sigma_{j,m}(r)$, and $r > 0$ is a threshold parameter that regulates the amount of the suppressed noise.

RESULTS AND COMPARATIVE ANALYSIS

Two types of measures are used to evaluate the quality of the denoised CT images. They are based on:

- a) Pixel Difference Measurement — Mean Absolute Error (MAE) and Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR);
- b) Human Visual Measurement — Structural Similarity Index (SSIM) and Universal Image Quality Index (UIQI).

The algorithms for calculating the listed measures are implemented in Matlab.

Two experiments are conducted in order to evaluate the effectiveness of the proposed method for reducing noise in CT images.

Test CT Image

A medical Matlab 16-bit monochrome 3-D CT image (ankle) with 512×512 resolution is used as a test image. Wavelet filtering of image CT-MONO2-16-ankle.dcm is performed, to which Gaussian noise has been added. Each of the images obtained is subjected to the Radon transform in order to obtain and separate the projection data, numbered by odd and even numbers respectively. At the next stage, the corresponding reconstructed CT slices are decomposed by RWT, at a pre-selected level of decomposition.

MAE, PSNR and SIMM for the CT-MONO2-16-ankle.dcm image, at the respective noise levels

$\sigma, \%$	AWShrink			Proposed		
	MAE	PSNR, dB	SIMM	MAE	PSNR, dB	SIMM
$\sigma=10$	1,574	30,43	0,7	0,778	39,56	0,83
$\sigma=15$	1,585	28,82	0,59	0,966	36,39	0,72
$\sigma=20$	1,696	27,86	0,48	1,33	33,49	0,66
$\sigma=25$	1,732	27,43	0,43	1,594	30,77	0,59
$\sigma=30$	1,781	26,44	0,32	1,67	28,89	0,54

AWShrink is used for the comparative analysis of the proposed method. Table provides the corresponding values for three of the four of those quality measures obtained when using the two methods.

Figures 2 and 3 show the results obtained when using the wavelet noise reduction methods, whose standard deviation is $\sigma = 10$ and $\sigma = 20$ respectively.

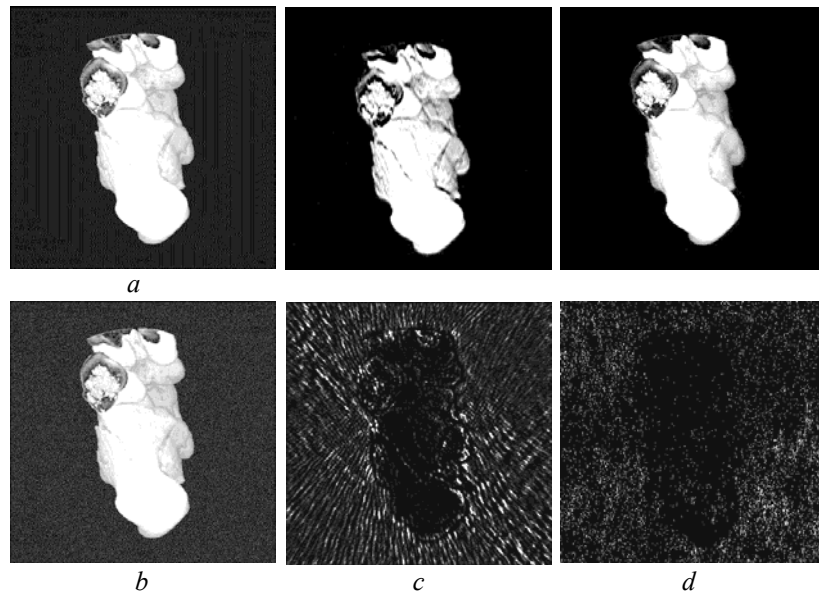


Fig. 2. Denoised results of CT-MONO2-16-ankle.dcm. (noise level $\sigma = 10$) obtained by the two wavelet-shrinkage methods: *a* — Original image; *b* — Noisy image, $\sigma = 10$; *c* — Denoised image and the corresponding residual information, obtained through A-Shrink; *d* — Denoised image and the corresponding residual information, obtained through the proposed method

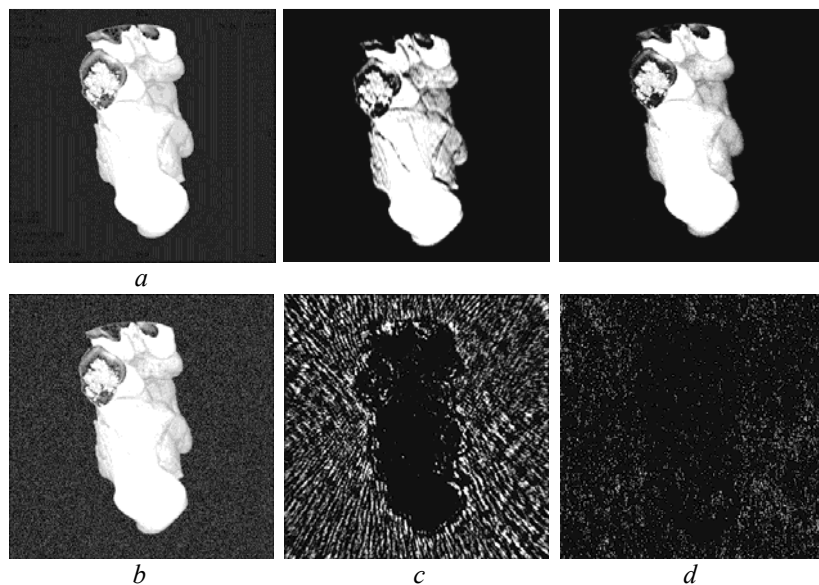


Fig. 3. Denoised results of CT-MONO2-16-ankle.dcm. (noise level $\sigma = 20$) obtained by the two wavelet-shrinkage methods: *a* — Original image; *b* — Noisy image, $\sigma = 20$; *c* — Denoised image and the corresponding residual information, obtained through AW-Shrink; *d* — Denoised image and the corresponding residual information, obtained through the proposed method

Real CT Data

The purpose of the next experiment is to evaluate visually the effectiveness of the proposed method, as well as to confirm it by means of the quantitative measure UIQI. The comparative analysis is again conducted by means of the AWSHrink, using real CT images of the three groups of studied organs: pancreas, colon and thorax. These images are obtained from publicly available medical databases (<https://www.cancerimagingarchive.net/>) and are in DICOM format.

Figures 4–6 present the respective base CT slices and their denoised images, accompanied by the values obtained for UIQI. In addition, the corresponding images containing the residual information, which has been removed from the image when applying these two algorithms, are presented for each pair.

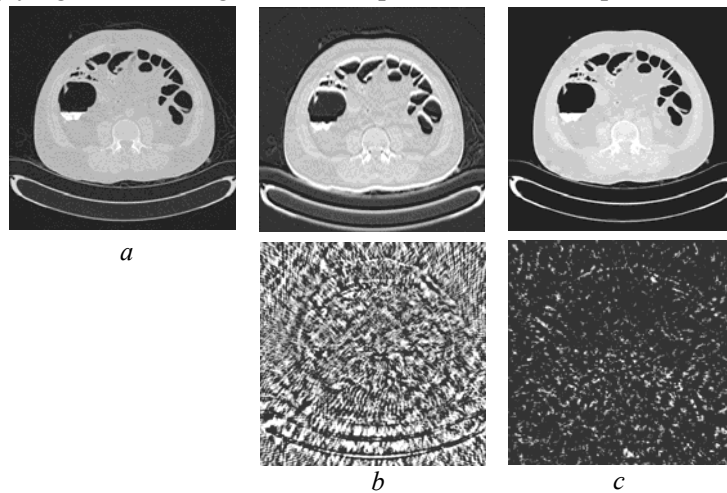


Fig. 4. Results from the reduction of noise in the “Pancreas” image, obtained by the two wavelet-shrinkage methods: *a* — Input test CT image; *b* — Denoised image ($UIQI = 0,632$) and the corresponding residual information, obtained through AWSHrink; *c* — Denoised image ($UIQI = 0,918$) and the corresponding residual information, obtained through the proposed method

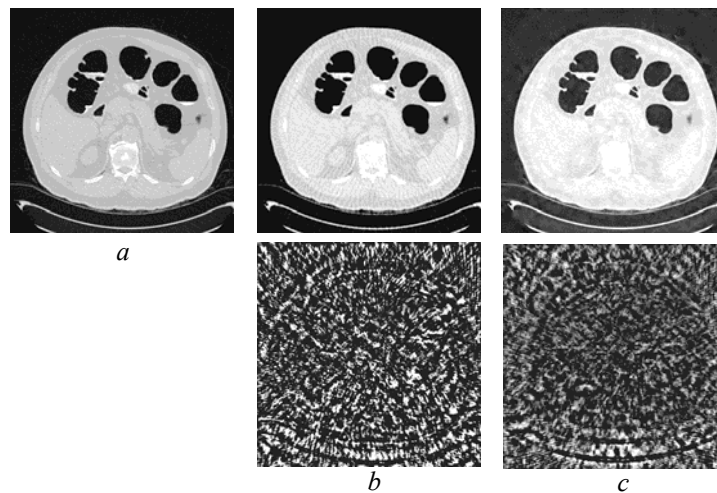


Fig. 5. Results from the reduction of noise in the “Colon” image, obtained by the two wavelet-shrinkage methods: *a* — Input test CT image; *b* — Denoised image ($UIQI = 0,742$) and the corresponding residual information, obtained through AWSHrink; *c* — Denoised image ($UIQI = 0,862$) and the corresponding residual information, obtained through the proposed method

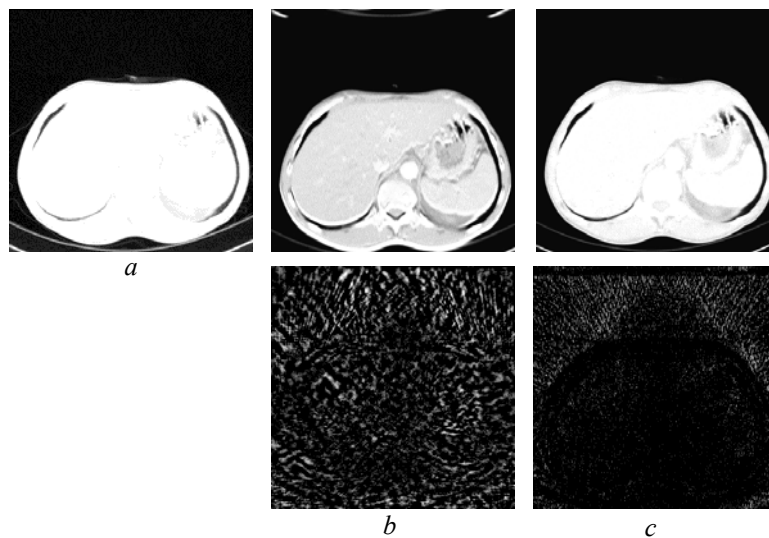


Fig. 6. Results from the reduction of noise in the “Chest” image, obtained by the two wavelet-shrinkage methods: *a* — Input test CT image; *b* — Denoised image ($UIQI = 0,646$) and the corresponding residual information, obtained through AWSHrink; *c* — Denoised image ($UIQI = 0,967$) and the corresponding residual information, obtained through the proposed method

Summarized Results

The results obtained from the two experiments, connected with the comparative analysis and shown in Table and Figures 1–6, lead to the following conclusions:

- For each of the test images obtained at different values of σ the proposed method achieves lower values for MAE as well as higher values for PSNR and SSIM.
- In percentage terms, this advantage over AWSHrink (in respect of the individual measures) is as follows: MAE (32%), PSNR (20%) and SSIM (33%).
- Compared to AWSHrink, the proposed method retains more textural details, not only in the images used in the two experiments, but also in other tested images.
- For each of the test CT images, the proposed method achieves better results for the quality measure UIQI (in percentage – 36%).

CONCLUSION

Based on indirect statistical estimation in the frequency domain, an adaptive threshold algorithm for noise reduction in CT images is proposed. The proposed method is implemented in the RWT domain and is based on the correlation between two CT images, which are equivalent in terms of information content. The continuous function of the soft threshold is used for threshold processing of the high frequency wavelet coefficients of the averaged image.

For the comparative analysis, two experiments are performed, in which the proposed method shows better results in terms of the measures evaluating the qualities of the noise-estimated image.

The assessment of the noise in the projection data and in the corresponding reconstructed slice, as well as its reduction, is among the important tasks in the area of diagnostic X-ray CT. Its solution can be included in the strategy of minimizing the radiation risk to the patient and improving the quality of the diagnostic image. The proposed adaptive wavelet shrinkage method is applicable when post-processing the reconstructed projection data.

REFERENCES

1. *Ehman E.C.* Methods for Clinical Evaluation of Noise Reduction Techniques in Abdominopelvic CT / E.C. Ehman. — 2014. — Available at: <https://doi.org/10.1148/rg.344135128>.
2. *La P.J.* Penalized-Likelihood Sinogram Restoration for Computed Tomography / P.J. La, J. Bian, Ph.A. Vargas // *IEEE Trans. Med. Imaging.* — 2011. — Vol. 25, N 8. — P. 1022–1036.
3. *Manduca A.* Projection Space Denoising with Bilateral Filtering and CT Noise Modelling for Dose Reduction in CT / A. Manduca, L. Yu, J.D. Trzasko et al. // *Medical Physics.* — 2009. — Vol. 36, N 11. — P. 4911–4919.
4. *Tang S.* Statistical CT Noise Reduction with Multiscale Decomposition and Penalized Weighted Least Squares in the Projection Domain / S. Tang, X. Tang // *Medical Physics.* — 2012. — Vol. 39, N 9. — P. 5498–5512.
5. *Cui X.* The Statistical Sinogram Smoothing via Adaptive-Weighted Total Variation Regularization for Low-Dose X-ray CT / X. Cui, Zh. Gui, Q. Zhang et al. // *Optik – International Journal for Light and Electron Optics.* — 2014. — Vol. 125, N 18. — P. 5352–5356.
6. *Motwani M.C.* Survey of Image Denoising Techniques / M.C. Motwani, M.C. Gadiya, R.C. Motwani, F.C. Harris // *Proceedings of Global Signal Processing Expo and Conference (GSPx '04).* — 2004. — P. 27–30.
7. *Yang Z.* Adaptive Weighted Anisotropic Diffusion for Computed Tomography Denoising / Z. Yang, M.D. Silver, Y. Noshi / in *Proc. 11th International Meeting on Fully Three-dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, Potsdam, Germany.* — 2011. — P. 210–213.
8. *Naimi H.* Medical Image Denoising Using Dual Tree Complex Thresholding Wavelet Transform and Wiener Filter / H. Naimi, A.B.H. Adamou-Mitiche, L. Mitiche // *J. King Saud Univ. Comput. Inf. Sci.* — 2015. — Vol. 27, N 1. — P. 40–45.
9. *Singh S.* Nonsampled Shearlet Based CT and MR Medical Image Fusion Using Biologically Inspired Spiking Neural Network / S. Singh, D. Gupta, R.S. Anand, Vinod Kumar // *Biomedical Signal Processing and Control.* — 2015. — Vol. 18. — P. 91–101.
10. *Shen Y.* Wavelet-Based Total Variation and Nonlocal Similarity Model for Image Denoising / Y. Shen, Qing Liu, Shuqin Lou, Ya-Li Hou // *IEEE Signal Processing Letters.* — 2017. — Vol. 24, N 6. — P. 877–881.
11. *Borsdorf A.* Adaptive Filtering for Noise Reduction in X-ray Computed Tomography, PhD Thesis, University of Erlangen / A. Borsdorf. — 2009. — 180 p. — Available at: <http://www5.informatik.uni-erlangen.de/Forschung/Publikationen/2009/Borsdorf09-AFF.pdf>
12. *Beister M.* Iterative Reconstruction Methods in X-ray CT / M. Beister, D. Kolditz, W.A. Kalender // *Physica Medica.* — 2012. — Vol. 28, N 2. — P. 94–108.
13. *Wang Y.* An Adaptive Nonlocal Filtering for Low-Dose CT in Both Image and Projection Domains / Y. Wang, S. Fu, W. Li, C. Zhang // *Journal of Computational Design and Engineering.* — 2015. — Vol. 2, N 2. — P. 113–118.

14. *Beekman F.J.* Ordered Subset Reconstruction for X-ray CT / F.J. Beekman, C. Kamphuis // *Int. J. Med. Phys. Res. Practice* 46. — 2001. — P. 1835–1844.
15. *Qiu D.* Does Iterative Reconstruction Improve Image Quality and Reduce Dose in Computed Tomography? / D. Qiu, E. Seeram // *Radiology: Open Journal*. — 2016. — Vol. 1, N 2. — P. 42–54.
16. *Van Eyndhoven G.* Iterative Reconstruction Methods in X-ray CT / G. Van Eyndhoven, J. Sijbers // *Handbook of X-ray Imaging: Physics and Technology*. — Chapter 34. — Boca Raton, Fl., USA: CRC Press, 2018. — P. 693–712.
17. *Buzug T.* Einführung in die Computertomographie / T. Buzug // Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
18. *Tischenko O.* An Artefact-free Structure-Saving Noise Reduction Using the Correlation Between Two Images for Threshold Determination in the Wavelet Domain / O. Tischenko, C. Hoeschen, E. Buhr // *Proc. SPIE 5747*, San Diego, California, United States. — 2005. — P. 1066–1075.
19. *Borsdorf A.* Multiple CT-Reconstructions for Locally Adaptive Anisotropic Wavelet Denoising / A. Borsdorf, R. Raupach, J. Hornegger // *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*. — 2008. — Vol. 2, N 5. — P. 255–264.
20. *Poliakova M.* The Morphological Method of Contour Image Segmentation Based on Repagular Wavelet Transform / M. Poliakova, V. Krylov // *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. — 2006. — Vol. 1, N 25. — S. 98–103 (in Russian).
21. *Oppelt A.* Imaging Systems for Medical Diagnostics / A. Oppelt. — Publicis Corporate Publishing, Erlangen. — 2006.
22. *Bruder H.* Design Considerations in Cardiac CT / H. Bruder, K. Stierstorfer, C. McCullough et al. // *Medical Imaging 2006: Physics of Medical Imaging. Proceedings of the SPIE*. — 2006. — P. 151–163.
23. *Natterer F.* The Mathematics of Computerized Tomography / F. Natterer. — Stuttgart: Wiley and B.G. Teubner, 1986.
24. *Donoho D.L.* Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage / D.L. Donoho, I.M. Johnstone // *Biometrika*. — 1994. — Vol. 81, N 3. — P. 425–455.

Received 16.10.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

SYSTEM DESIGN OF VIDEO SURVEILLANCE

MOHANAD ABDULHAMID, MWONGEERA MURUNGI

Abstract. This paper describes the steps involved in designing of a video surveillance system. It discusses the theory of video surveillance types, components involved, selection of the best equipment, and also a detailed virtual design. An introduction of the concept of video surveillance systems is followed by the detailed discussion of design considerations and the design verification. The system is designed to monitor a bank floor where the monitor displays the desired output from a simulated implementation of the system.

Keywords: system design, video surveillance, CCTV.

INTRODUCTION

There are many different types of Closed Circuit Television (CCTV) systems available, analogue and digital, wired and wireless and their modes of operation vary; however, the basic components are more or less the same: a camera, a lens, a monitor, and (for wired systems) cables that carry the signal from one place to another. Many systems also use video recorders to record the video footage [1].

The camera picks up the signal from the area being monitored via the lens (which determines how far and how much the camera can see, and which is often bought separately) and can be either wired or wireless. In a wired system, the camera sends the signals through a cable to the monitor; in wireless systems, no cable is needed, and the camera broadcasts the signal straight to the monitor [2].

The monitor can be either a simple television set (without tuning capacity) or a PC or laptop. Most wired analogue systems use television monitors, while digital and wireless systems tend to use computers as monitors for which remote viewing is possible, often via the internet.

For recording purposes, the monitor is accompanied by a video recorder, a Video Cassette Recorder (VCR) for analogue systems, or a Digital Video Recorder (DVR), or Network Video Recorder (NVR) for digital systems. A DVR can actually replace the monitor as the receiving device, since many DVRs are stand-alone units that do everything a computer would do: receive, record, and store the information for later viewing [3].

Closed Circuit Television refers to a system of surveillance cameras that sends signals to a specific location, a monitor, or PC. CCTV systems are commonly used to monitor banks, shopping malls, and government facilities, and these days, as CCTV technology becomes more affordable and easier to use, more and more people are installing CCTV cameras in their homes and businesses.

Closed Circuit Television system is an integral component of the security measures that may need to be adopted by an institution. The institution's premises may need to be monitored on a regular basis to ensure safety. The need and extent

of safety required helps in deciding the investment required for the CCTV system; for example, deciding whether procuring a single camera and monitor will suffice or a complex video surveillance system with multiple cameras, multiple operators and digital recorders are required [4].

DESIGN AND METHODOLOGY

Before any installation of video surveillance system, an in-depth study of the site must be carried out with the following aims:

1. Identifying need of the system.
2. Identification of the objective of the security concern, whether it is outside or inside, near or far.
3. Identification of area needing surveillance.
4. Where the cameras will be installed.
5. Identification of the prevailing light conditions.
6. How the images will be captured, viewed, recorded and stored for observation and reference.
7. The system design.
8. Purchasing the right products and making installation decisions that help save time, effort and money.

Site study and analysis

Field view

It is important to work with the end user to understand what field of view is required to be seen on the monitor. The field of view is the width and height of the scene as viewed by the lens. It depends upon the focal length and distance of the object.

Any field of view has some critical area which is the target area. For example, when the camera is viewing a gate, the space the car is coming through is the critical viewing area or if one is watching the door, the space occupied by a person walking through the door is a critical viewing area. In the same way, every scene has a critical viewing area. This critical viewing area is usually ignored while selecting a lens for an application. After the installation is complete, it is not uncommon to hear comments that the end user wants to positively identify the person, but is not able to do so with the lens installed. The following steps outline the procedure for performing the site analysis.

Step 1

Identification of the scene area which needs to be covered by the lens and estimation of the width or vertical height of the scene is done.

Step 2

Estimation of the distance from the camera to the scene.

Step 3

To calculate the focal length of the lens, standard formula method, and lens wheel calculator method are used. In standard formula method, the focal length can be calculated using either the scene width or height formulas. In lens wheel calculator method, many lens manufacturers provide this lens calculator. It is

quite simple to use and the focal length of the lens can easily be calculated depending upon the object distance and scene dimensions. The limitation is that it does not tell how large the critical viewing area will be on the monitor.

Step 4

In any scene, there are areas or moving objects, which are critical. It is important to understand what is required, for a detection or positive identification.

Step 5

Calculating of the viewing area of the scene and also of the critical viewing area by multiplying the horizontal and vertical dimensions, and dividing the critical viewing area with the total viewing area to get the size of the critical viewing area in the monitor.

Step 6

If the proportion of the critical viewing area is as expected, then the calculated focal length is used; if not, then the focal length is changed till the correct proportion is found or the distance of the camera is changed until the correct proportion is found. If this fails, one may have to choose a lens which is the nearest to the requirement.

Prevailing light conditions

Several measurements need to be undertaken to ensure that the correct camera is chosen for the prevailing lighting conditions on the scene. Finally, a comparison of the actual light at the scene with the minimum scene illumination is made. If the light available is more than the minimum scene illumination indicated, then the current camera can be used. If the actual light at the scene is lower than the adjusted minimum scene illumination of the camera, then the camera setting may require adjustment or an alternative solution is necessary.

Choice of camera and data transmission modes

Choice of camera

There are many different camera and data relaying modes to choose from however an informed choice should be derived from the best value for money, robustness, future proofing, ease of installation and maintenance and fast deplorability.

For these reasons, fixed wired cameras are chosen over wireless ones because although wireless cameras can be moved to other locations requiring observation, they require dedicated frequencies, for data transmission to and from cameras, that are prone to interruptions and which may end up distorting the picture. The picture quality is also seriously compromised which means that if the signal to be retransmitted over the internet for remote viewing for example, any further degradation of the picture quality would result in an unusable image.

Calculations of minimum scene illumination. Various losses dramatically reduce the level of illumination reaching the faceplate. Hence, in general CCTV rules of thumb are often used to approximate a calculation. For example if the faceplate illumination is quoted as 1 lux, the actual average illumination falling onto the horizontal should be $200 \times$ lux or more to receive good pictures (e.g. 0,1 lux at faceplate = 20 lux average horizontal requirement).

If the camera illumination level is quoted then it will need $10 \times$ lux average horizontal for a good picture and $50 \times$ lux, for full video recording quality pictures.

Choice of video system

There is also the choice between using analogue or digital data transmission. DVRs have the advantages of superior search capabilities, remote access and easier integration with other security systems over traditional analogue and VCR systems. This informs the choice of digital video over the analogue type.

Choice of data transmission mode

Here, the choice of using an IP based wiring system is already dictated by the decision to use DVRs instead of VCRs for storage and retrieval of the surveillance data. The use of fibre-optics is not considered because the cost is too expensive to the end user.

Operational and equipment specifications

Equipment

The following equipment are used.

1. Stand-alone DVR(Model NVR1004+).
2. Cameras (There are many choices from CMOS to Charge Couple Device(CCD) and even IR-cameras which take images in the dark. CCD cameras are recommended over CMOS ones, as for IR-cameras, they are only good for close distances).
3. Cables (point-to-point unshielded twisted pair wire, 24–16 American Wire Gauge (AWG) (0, 5–1,5mm), stranded or solid, category 2 or better).
4. Router(s).
5. Power supply cables.
6. Electrical sockets.
7. Mounting brackets (for mounting the cameras).

The video signal may co-exist in the same wire bundle as other video, telephone, data, control signals, or low-voltage power. Shielded twisted pair wire is not recommended; however multi-pair wire (6 pair or more) with an overall shield is recommended. Un-twisted wire should also not be used. For safety, video signals should never be placed in same conduit as high voltage wiring.

After the equipment has been acquired, some other specifications that may to be identified are: operation of system, system to be installed or connected, and future expansion.

Installation of the system

After identifying the sites where the cameras are to be installed, cables are laid down from the cameras to the DVR. After the DVR is configured, it can be set to record only when there is movement in the area. This will reduce the hard disk requirements tremendously.

The system can be set up as shown in Fig. 1. The DVR is connected to the router (192.168.0.1) using LAN cables.

The following should be noted about the connection:

1. The IP addresses are arbitrarily assigned.

2. The PC computer (192.168.0.3) is there to set up the DVR via a user interface that is accessible via the LAN connection.
3. The ADSL modem provides internet access to the system.
4. Only 2 cameras are indicated to be connected here however this is determined by the number of ports available at the DVR.

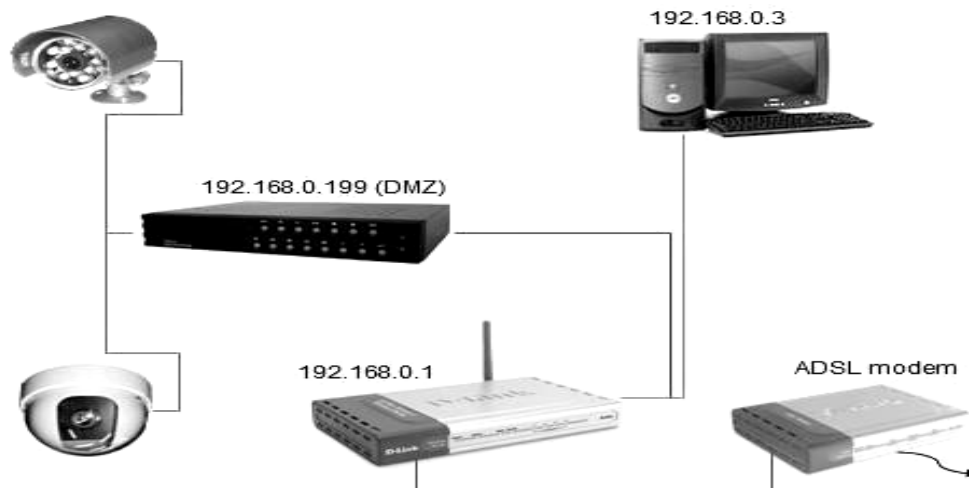


Fig. 1. DVR camera setup

Design using videoCAD

Due to various constraints pertaining physical design of the system, a more computer based approach is favored since such modeling would not only make the eventual installation more manageable but also practical results could be simulated with an aim of perfecting the proposed system way before implementation. Additionally no one company approached is willing to share their architectural plans with this designer citing, various reasons including fear of industrial espionage and the risk that such non contractual disclosure could lead to security breaches within their premises. For these reasons, this designer is inclined to model a system using CCTV system simulation software known as videoCAD which is freely available on the internet (as a Demo version) and which is adequate to accomplish the objectives of this particular paper.

The following steps are carried out in order to implement the system as a computer simulated video surveillance system:

1. Identification of the area under surveillance.
2. 3D mapping of the area.
3. Introduction of different camera types into the area under surveillance.
4. Placement of “objects” that may be construed as intrusions or otherwise, at strategic locations with a view of testing the relevance of camera placement areas.
5. Viewing of the surveyed area on a simulated monitor.
6. Calculations of illumination to ascertain that night-time surveillance is possible using the same cameras with luminaries’ where necessary.

7. Conclusion as to the success or failures of the system and what it would take to make it a reality.

Identification of the area under surveillance

For the purposes of this particular paper, a bank floor area is chosen as a good example to demonstrate the proposed system. The bank floor plan includes two floors, an upper ground floor and a lower ground floor both of which would be equipped with cameras to survey activities in the key area in an around them.

Two exterior areas are also identified; the ATM area and the car park area which also need dedicated cameras capable of night-time surveillance.

The following areas are identified as key areas requiring constant camera monitoring: lower ground floor level: front door and desk, ATM lobby and entrance, banking hall, teller booths, back office, back office-banking hall adjoining doorway and room and counting room. Upper ground floor level: open work plan area, parking area.

All cameras with the exception of the ATM entrance and front entrance cameras are Pan-Tilt-Zoom (PTZ) cameras. The use of fixed cameras is to avoid tampering with the person identification setting on those cameras surveying key areas.

All cameras installed are dome type overhead at a height of 3m (approximately) from normal floor level.

3D mapping of the area

Construction of the area in need of surveillance is done using AUTOCAD and videoCAD computer software both running on a Windows Vista operating system.

Introduction of cameras to the areas under surveillance

Cameras are placed at strategic positions in the identified areas. Care is taken not to unnecessarily place too many cameras surveying one scene leading to redundancy and unnecessary expense. For example one camera with a pan feature is installed to survey the back office and washrooms area, however the ATM area being a critical security area has dedicated cameras monitoring the entrance (to ATM booths) and another to view the ATMs.

Calculations of illumination to ascertain that night-time surveillance is possible using the same camera setup

At this stage, the following assumptions have to be made:

1. Specification of camera sensitivity would be supplied by the manufacturer.
2. A luminaire would be used also whose specifications would also be known.

RESULTS

Calculation of minimum scene illumination

Data from Field survey

The following data are considered:

1. Area to be viewed: Building wall.
2. Distance from subject to camera: 10 m.

3. Average horizontal illumination: 100 lux average (50% minimum).
4. Plane of subject to be viewed: vertical.
5. Reflectivity of subject: wall, average 30% (minimum).
6. Intensity of lighting off wall: 312,5 candelas.
7. Reflectivity of ground in front of the wall: average 37% (minimum).
8. Assume f-stop value lens and iris: F1.4.

Camera data

The following data are considered:

- Minimum faceplate illumination of the chosen camera: 0,1 lux for good pictures.
- Minimum scene illumination of chosen camera: 0,6 lux.
- F1.4.
- 50% reflection.

Available illumination at the camera lens

- Light falling in front of the wall: 100 lux average.
- Minimum light falling in front of the wall: 50% of average = 50 lux.
- Minimum light reflected from ground onto the wall: 37% of minimum at ground = 18,5 lux.
- Minimum light from the wall toward the camera: 30% of that arriving on wall from ground = $18,5 \cdot 0,3 = 5,55$ lux. Intensity at this point is 312,5 candelas(given).
- Loss of light due to distance to camera (assuming light reflected directly towards camera):

$$E = I / d^2 ,$$

where E = lux level at the camera; I = intensity in candelas at the wall; d = distance from wall to camera;

$$E = 312 / 10^2 = 3,124 \text{ lux} .$$

Theoretical illumination

At the faceplate of camera with an F1.4, c is given by

$$C = 1 / 4 f^2 ,$$

where C = illumination level at faceplate with 100% transmittance and f = f - stop value used on iris;

$$C = 1 / (4 \cdot 1,4^2) = 0,127 \text{ (Or 12,7\% of that arriving at the camera).}$$

Thus, faceplate illumination available = $3,125 \text{ lux} \cdot 0,127 = 0,39 \text{ lux}$.

Camera minimum faceplate illumination = 0,1 lux. Rule of thumb: required faceplate illumination $\times 200$ = average horizontal illumination required at scene = $0,1 \cdot 200 = 20 \text{ lux}$. Actual horizontal average (100 lux) and minimum (50 lux) are both well above 20 lux required by the rule of thumb calculation.

Camera scene illumination level

Rule of thumb: $10 \times$ camera illumination level required for good picture = $0,6 \cdot 10 = 6 \text{ lux}$, (Both 100 lux average and 50 lux minimum are well over this).

Camera distances and faceplate illuminations

Table shows faceplate illumination at different distances where faceplate illumination = $E \times C$.

Faceplate illumination at different distances

Distance from scene to camera	10	8	6	4	2	2
Faceplate Illumination (lux)	0,39	0,619	1,102	2,48	9,92	39,68

From Table, the selected camera is suitable for use within the distances shown since the calculated faceplate illumination exceeds the minimum value indicated on the camera (0,1 lux). At very large distances (see Fig. 2) however the illumination approaches 0,1 and the camera becomes unusable. Hence the selected camera is capable of effectively being used in the CCTV system.

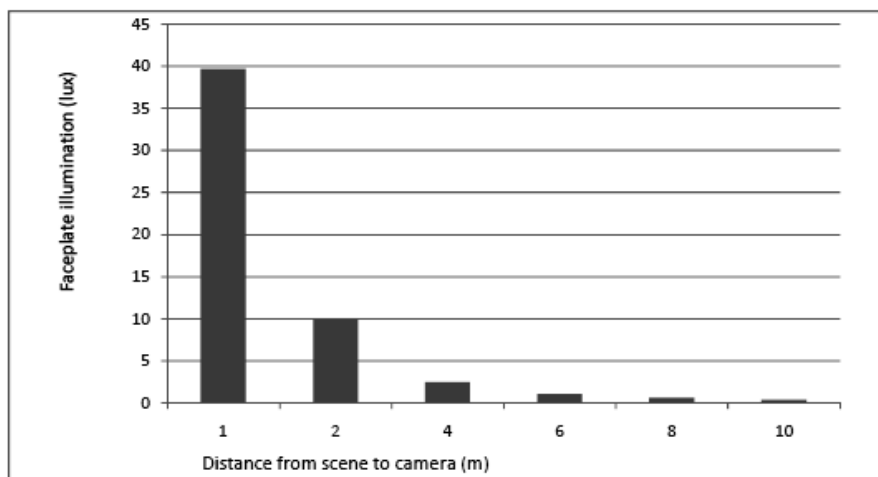


Fig. 2. Faceplate illuminations at different distances

Lighting level calculations are required to be provided by the system designer to show how a chosen camera would be suitable, many manufacturers make it difficult for the true camera needs or performance to be established by publishing either partial information, introducing unseen assumptions, which enhance apparent performance, or deliberately inflating the claims.

Viewing the surveyed area on a monitor

A total of 15 cameras in total are used to survey both the lower and upper ground floors as shown in Fig. 3.

It is possible to select a particular camera and pan to a desired angle, indicating that the user could effectively alter the view angle to a point of particular interest.

The ATM camera is installed such that it could only be used for person detection. This is done as a security measure to prevent misuse of the system to read confidential data from the ATM while a customer is using the ATM machine.

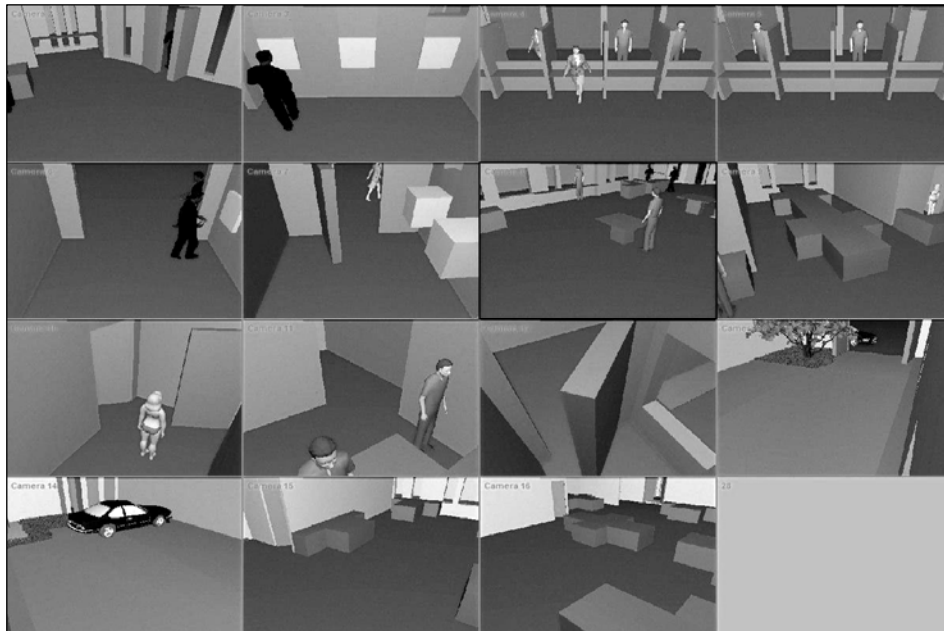


Fig. 3. View of the area under monitor

Night-time surveillance

Night-time surveillance results are obtained which proves that the system can be used (together with the appropriate luminaires) to survey a specific area at night as can be seen in Fig. 4.

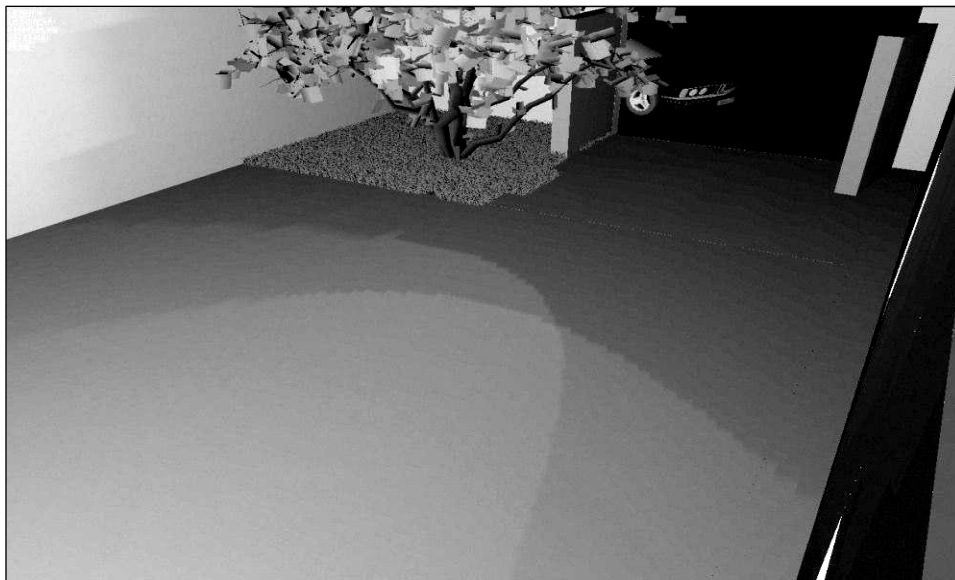


Fig. 4. Parking area under night time surveillance with illuminators

Satisfactory scene surveillance is obtained after incorporating illuminators into the system. It is possible that the luminaire(s) could double as security lamps and in so doing deter potential security threats.

A disadvantage here would be that the system would largely remain insecure if the illuminators are to be switched off during night-time surveillance hours. A possible counter to this would be to incorporate an alarm system which would be triggered by a switch off of the lighting.

CONCLUSION

The system design parameters were used to model a video surveillance system using videoCAD software, which was able to produce a useful security monitoring tool. The importance of such a model was also demonstrated by the fact that tedious camera mounting and removal exercises to ascertain optimum camera placement positions would be eliminated. This would be beneficial to fast deployment of such a system by cutting down on design time and cost of implementation. Further the design also looked at night-time surveillance and demonstrated that this could be accomplished using the software.

REFERENCES

1. *Banu V.* Intelligent video surveillance system /V. Banu, I. Costea, F. Nemtanu, B. Iulian // IEEE 23rd International Symposium for Design and Technology in Electronic Packaging. — Romania, 2017.
2. *Raghunandan A.* Object detection algorithms for video surveillance applications / A. Raghunandan, P. Raghav, H. Aradhya // IEEE International Conference on Communication and Signal Processing. — India, 2018.
3. *Zhang D.* Application of robust face recognition in video surveillance systems / D. Zhang, A. Peng, H. Zhang // Optoelectronics Letters. — 2018. — Vol. 14, Issue 2. — P. 152–155.
4. *Sreenu G.* Intelligent video surveillance: a review through deep learning techniques for crowd analysis / G. Sreenu, M. Durai // Journal of Big Data. — 2019. — Vol. 6, Issue 1. — P. 1–27.

Received 29.10.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА СИСТЕМА ОБРОБЛЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ БЛОКА КЕРУВАННЯ БЕЗПЛОТНОГО ПОВІТРЯНОГО СУДНА

М.С. ГРАФ, В.П. КВАСНІКОВ

Анотація. Показано створення експертної системи для оброблення інформації в системі керування безпілотного повітряного судна або дистанційно пілотованих авіаційних системах, її завдання та виконання. Розглянуто алгоритм побудови навчального модуля експертної системи. Наведено склад та основні компоненти експертних систем, на основі яких побудовано структуру та схему взаємодії її компонентів з урахуванням участі людини у структурі під час навчання. Подано взаємодію системи з джерелами вхідних даних та формуванням рішень. Запропоновано подання у вигляді множин, кожна з яких відповідає певному блоку, наведено відношення, що відповідають взаємодії елементів експертної системи в часі.

Ключові слова: оброблення інформації, безпілотне повітряне судно, дистанційно пілотована авіаційна система, експертна система, інформаційні технології.

ВСТУП

Інтелектуальні системи оброблення та аналізу інформації призначені для істотного зменшення часу, що витрачається на проведення випробувань, та, як наслідок, скорочення часу проектування і введення в експлуатацію нових апаратів, зокрема безпілотних повітряних суден (БПС) або дистанційно пілотованих авіаційних систем. Такі системи можна використовувати у сільськогосподарській авіації та авіації спеціального призначення для виконання таких операцій, як пожежогасіння, зондування місцевості та ін.

Згідно із працею [1] система називається інтелектуальною, якщо вона дає змогу реалізовувати такі функції, як нагромадження знань, їх оцінювання та класифікація щодо прагматичної корисності, поповнювати отримані знання за допомогою логічного виведення, уміння формувати пояснення власної діяльності, надавати користувачу допомогу за рахунок тих знань, що зберігаються в пам'яті, і тих логічних суджень, що притаманні системі, тощо.

Означені функції можна назвати функціями подання та оброблення знань, міркувань та узагальнення. Залежно від завдань та галузі застосування в конкретній системі ці функції можуть бути реалізовані різною мірою, що і буде виявляти індивідуальність архітектури.

Одним із класів інтелектуальних систем є експертні системи. Для них характерна акумуляція в системі знань та правил міркувань досвідчених спеціалістів у даній предметній галузі, а також наявність спеціальної системи пояснень.

Мета роботи — створення алгоритму побудови модуля навчання експертної системи для оброблення інформації в системі керування БПС.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА ПУБЛІКАЦІЙ

Натепер багато наукових праць присвячено інтелектуальним системам оброблення інформації, що використовуються у блоці керування БПС.

У науково-технічній літературі [2–5] пропонуються понятійний апарат, концепції створення та конкретні реалізації інтелектуальних автоматизованих систем оброблення інформації і керування. Становлення і розвиток теорії та практики таких систем значною мірою стимулюються теорією систем та системним аналізом.

Аналіз літератури [2, 6, 7] показує, що немає єдиного підходу до оброблення інформації блока керування БПС для розв'язання різних завдань. Так, у праці [2] розглядається порядок формування маршруту польоту з використанням інтелектуального керування динамічними системами тільки для завдань розвідки. На розв'язання поставленого завдання негативно впливає неможливість вироблення сигналів керування через неточну початкову інформацію, не зважаючи на достатній рівень розв'язання розрахункових задач. У праці [6] розглянуто використання технології «машинного зору» для автоматичного визначення значень поточних координат об'єктів, необхідних для формування сигналів керування рухом БПС. У працях [8, 9] наведено дані, що можуть становити основну інформацію для експертів для формування правил зі створення команд під час керування БПС.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Із розвитком комплексів апаратури з різними інформаційними каналами збільшується завантаженість ліній зв'язку інформацією, потрібною для розпізнавання та прийняття рішень. Зі збільшенням обсягу інформації зростає необхідність її скорочення з огляду на важливість та достовірність. Для зменшення спотворення вихідного сигналу на зіткненні вибірок можна використовувати дискретні лінійні динамічні системи з кінцевою імпульсною характеристикою [10]. Найбільш вживаними методами оброблення інформації, що застосовуються для оброблення даних керування БПС, є нейронні мережі, генетичні алгоритми та нечітка логіка [11].

Для ефективного інформаційного підтримання рішень у системі керування БПС необхідно аналізувати технологічні завдання. Зокрема, під час керування БПС оператором можуть виникати помилки у випадку нештатних ситуацій, коли потрібно за обмежений час оцінити ситуацію та прийняти правильне рішення [12]. Ефективність прийнятого рішення має швидко оцінюватися, що можливо тільки з використанням сучасних інформаційних систем прийняття рішень. Об'єктивна необхідність формування та реалізації таких рішень є основною особливістю інтелектуальної системи.

Нині одними з найчастіше використовуваних компонентів такої системи є проектування та розроблення спеціальних експертних систем. Для розроблення таких систем застосовують математичні моделі, математичні методи та числові методи [13].

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Експертна система — це програмний комплекс, що виконує функції експерта для розв’язання задач з певної предметної галузі. Застосування таких систем дозволяє підвищити ефективність роботи спеціалістів. Головна перевага експертних систем — можливість нагромаджувати знання та зберігати їх протягом певного часу. Дані такої системи вибудовуються на об’єктивних закономірностях роботи з інформацією. Вони призначені для моделювання або імітації поведінки досвідчених експертів з метою розв’язання певного типу задач, тобто це своєрідна трансформація досвіду експертів у форму правил та подання правил у вигляді комп’ютерних програм.

Відповідно до опису в джерелах [14–17] експертна система складається з бази знань, підсистеми виведення, підсистеми пояснення, підсистеми нагромадження знань та діалогового процесора.

За наповнення новими даними та їх модифікацію відповідає база знань як основний компонент експертної системи. Тут інформація зображується за допомогою символів, а процес її роботи — послідовністю перетворення цих символів.

Додавання та модифікація нових правил до бази знань здійснюються у підсистемі нагромадження знань. Тут усі правила зводяться до вигляду, що можна використовувати в процесі роботи.

Виконання аналізу факторів з робочої множини та правил з бази знань, додавання нових факторів та визначення порядку їх використання реалізуються у підсистемі виведення. Спираючись на праці [15, 16] та врахувавши участь людини у структурі системи, взаємодію компонентів такої експертної системи можна подати у вигляді, показаному на рис. 1.

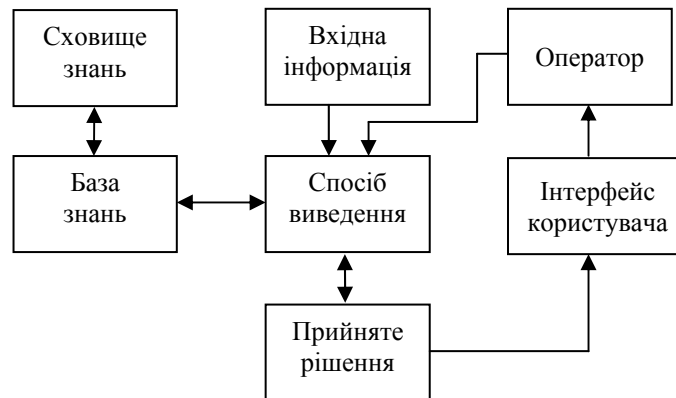


Рис. 1. Схема взаємодії компонентів експертної системи

У такій системі інтерфейс користувача — комплекс програм, за допомогою якого відбувається діалог між користувачем та експертною системою на стадії як уведення, так і отримання результатів. Компонент «Спосіб виведення інформації» можна розділити на правила типу «якщо–то» та блок логічного виведення, що взаємодіють між собою.

Як недоліки експертних систем можна відзначити неможливість їх використання у випадку, якщо інформацію подано в неякісному вигляді або умови виконуються неповністю, або вони не повністю достовірні. Апарат

нечіткої логіки дає змогу формалізувати якісну інформацію, використовуючи її в процесі прийняття рішень для створення системи правил, що дозволяють аналізувати результати роботи системи [18–20].

У праці [21] описано побудову логіко-лінгвістичної моделі експертної системи для вирішення завдань автоматичної фільтрації параметрів сигналу в бортовому комп'ютері БПС, розглянуто можливі керувальні операції для зведення точності та швидкості передаваної інформації до встановленого оптимального рівня. Наведена модель дозволяє приймати управлінські рішення за умови відхилення заданих характеристик від встановленого оптимального значення. Причому оптимальне значення може варіюватися залежно від інших характеристик та задач аналізу інформації.

Спираючись на побудовану логіко-лінгвістичну модель [21], розглянемо алгоритм побудови навчального модуля експертної системи оброблення інформації в системі керування БПС, а саме таких характеристик, як точність, швидкість та достовірність.

Будемо вважати, що експертна система складається з множини E елементів і містить блоки:

- e_1 — бази даних та знань;
- e_2 — блок аналізу та вибору рішень;
- e_3 — блок формування рішень;
- e_4 — блок формування рішень до виконання;
- e_5 — база фактів.

Кожен з указаних блоків реалізується у вигляді відповідних програмних комплексів.

Початкові дані для оброблення інформації надходять до експертної системи з множини $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ датчиків БПС та від множини $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ інших експертних систем.

За допомогою блока формування рішень до виконання прийняті системою рішення передаються до множини V_1 виконуваних механізмів систем керування БПС.

Використовуючи теорію бінарних відношень дискретних множин [19], опишемо структуру та функціонування такої експертної системи на інтервалі часу $[t_0, t_k]$.

Взаємодію елементів експертної системи та елементів інших множин, зображених на рис. 1, опишемо такими динамічними відношеннями [22]:

$$Q_1(t) \subseteq E \times E, \quad Q_2(t) \subseteq P \times E, \quad Q_3(t) \subseteq I \times E, \quad Q_4(t) \subseteq \{e_5\} \times V_1, \quad t \in [t_0, t_k].$$

Ці відношення описують взаємодію у часі елементів експертної системи. Наприклад, у деякий момент часу з проміжку $t \in [t_0, t_k]$ блок формування рішень до виконання запитує дані у відповідних датчиків про поточне значення кутів відхилення від заданих. Тоді у відношення $Q_4(t)$ входить одноелементна множина, що складається з блока формування рішень до виконання.

Аналітичним поданням таких відношень є матриця $Q = [q_{ij}]$ розміром $a \times b$ з елементами:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо пара значень входить у відношення } Q; \\ 0, & \text{в іншому випадку, } i = \overline{(1, x)}, j = \overline{(1, y)}. \end{cases} \quad (1)$$

Відповідно до праці [22] кожне з наведених відношень описується відповідними матричними функціями, елементи яких є функціями часу, що в кожен момент часу задовольняють умови (1).

Розглянемо опис функціонування елементів експертної системи. Припускаємо, що система оперує з двома видами цілей:

- основними, що зумовлені завданням на інтервалі часу $t \in [t_0, t_k]$;
- допоміжними, що виникають в умовах невизначеності.

Будемо вважати, що невизначеність може виникати у випадкові моменти часу з проміжку $t \in [t_0, t_k]$.

Позначимо через O множину цілей і через D множину цілей потенційно можливих ситуацій невизначеності. Уведемо множину часу $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, у якій передбачається оброблення інформації для досягнення конкретної цілі з множини O .

Зв'язок елементів множини O та D відобразимо відношенням

$$Q_5 \subseteq O \times D. \quad (2)$$

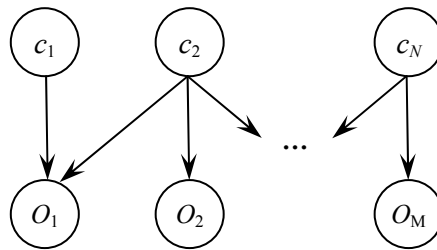


Рис. 2. Графічне зображення відношення (2)

Позначимо досягнуті цілі підмножиною O_d , а недосягнуті — O_{nd} . Обидві підмножини є частиною множини O . Спочатку виділимо в момент часу $c_x \in C$ невиконані цілі $O_y \in O_{nd}$. Використаємо множину продукційних правил [23]:

ЯКЩО < умова >, *ТО* < рішення >, *ІНАКШЕ* < перехід >.

Подамо їх у вигляді

$$R_1 = \{r_{xy}^{(1)} \mid x = \overline{(1, N)}, y = \overline{(1, M)}\}$$

та правил: $r_{xy}^{(1)}$:

$r_{xy}^{(1)}$: *ЯКЩО* $\{D_y^1(p(c_1)i(c_1)) = 1\}$, *ТО* $\{O_y \in O_d\}$, *ІНАКШЕ* $\{O_y \in O_{nd}\}$.

У правилах для виконання аналізу визначення досягнення кожною запланованою в момент часу $t = c_1$ цілі використовуються відповідні предикати $D_y^{(1)}$, значення яких описують факти виконання умов як «1» або невиконання «0», за яких ціль O_y вважається досягнутою.

Аргументами таких предикатів є значення векторів даних $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$, що надходять в момент часу $t = c_1$ від датчиків та інших експертних систем БПС.

ВИСНОВКИ

У роботі розписано алгоритм побудови модуля навчання експертної системи. Розглянуто її структуру та побудовано схему взаємодії компонентів експертної системи з урахуванням участі людини у структурі. Запропоновано взаємодію системи з джерелами вхідних даних та формуванням рішень за допомогою правил дискретної математики та комп'ютерної логіки. Запропоновано створення експертної системи для оброблення інформації в системі керування БПС, її завдання та виконання.

Аналізуючи досвід створення експертних систем [15, 16] та спираючись на виконану побудову, можна стверджувати, що найбільші складності виникають під час створення бази знань та правил для способу виведення. Застосовуючи таку задачу для оброблення інформації у системі керування БПС створення таких блоків ускладнюється у зв'язку з високим ступенем невизначеності даних, що виникають у разі виникнення нештатних ситуацій та поступового збільшення кількості інформації в умовах часових обмежень [12].

Для забезпечення надійного передавання інформації між бортовим комп'ютером БПС та оператором доцільно будувати базу знань на основі штучних нейронних мереж [24] і застосовувати апарат нечіткої логіки для реалізації умов типу «якщо–то». Штучні нейронні мережі мають здатність до адаптивного навчання. Така їх властивість має перевагу перед традиційними експертними системами: складності, що виникають у міру набуття інформації, зменшуються порівняно з процесом, що значною мірою залежить від людини-експерта, його досвіду та знань.

Створення такої нейромережевої бази знань дозволить підвищити достовірність інформації та трудомісткість, що виникають при адаптації бази.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Поспелов Г.С.* Искусственный интеллект — основа новой информационной технологи / Г.С. Поспелов. — М.: Высш. шк., 1988. — 278 с.
2. *Васильев С.Н.* Интеллектуальное управление динамическими системами / С.Н. Васильев, А.К. Жерлов, Е.А. Федосов, Б.Е. Федунов. — М.: Физматлит, 2000. — 352 с.
3. *Захаров В.Н.* Интеллектуальные системы управления: основные понятия и определения / В.Н. Захаров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 138–145.
4. *Захаров В.Н.* Современная информационная технология в системах управления / В.Н. Захаров // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 70–78.
5. *Юсупов Р.М.* К 90-летию академика Е.П. Попова / Р.М. Юсупов // Информационно-управляющие системы. — 2005. — № 1. — С. 51–57.
6. *Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий* / Под ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Себрякова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 280 с.

7. Кузнецов А.Г. Система ориентации мобильного робота относительно внешних ориентиров на основе обработки изображений / А.Г. Кузнецов, И.Г. Крылов, А.В. Лебедев // Труды 18 МНТС. — Алушта, 2009. — С. 69.
8. Цепляева Т.П. Анализ применения беспилотных комплексов / Т.П. Цепляева, Е.М. Поздышева, А.Г. Поштаренко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. — Х.: НАКУ «ХАИ», 2008. — Вып. 39. — С. 149–154.
9. Сучасний стан і перспективи розвитку розвідувальних безпілотних літальних апаратів тактичної та оперативної-тактичної дії // Вісник військово-наукової інформації. — Суми: НЦ БЗ РВиА, 2013. — 31 с.
10. Граф М.С. Обробка сигналів при передачі інформації в безпілотному повітряному судні за допомогою алгоритму перетворення Фур'є / М.С. Граф // XII міжнар. наук.-практ. конф. «ПРТК» / Збірник тез. — К., 2019. — С.182–183.
11. Граф М.С. Аналіз існуючих методів обробки інформації в блоці керування безпілотного повітряного судна / М.С. Граф. — К.: Вісник інженерної академії України. — 2016. — Вип. 4. — С. 20–22.
12. Граф М.С. Прийняття рішень в системі керування безпілотним повітряним судном / М.С. Граф // XIII Міжнар. наук.-техн. конф. «Авіа-2017» / Збірник тез. — К.: НАУ, 2017. — С. 4.36–4.38.
13. Мокшин В.В. Параллельный генетический алгоритм отбора значимых факторов, влияющих на эволюцию сложной системы / В.В. Мокшин // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. — 2009. — № 3. — С. 89–93.
14. Жернаков С.В. Нейросетевая база знаний прецедентов активной экспертной системы для комплексного контроля и диагностики параметров авиационного двигателя / С.В. Жернаков // Информационные технологии. — 2002. — № 5. — С. 45–53.
15. Савушкин С.А. Нейросетевые экспертные системы / С.А. Савушкин // Нейрокомпьютер. — 1992. — №2. — С. 29–36.
16. Сафонов В.О. Экспертные системы – интеллектуальные помощники специалистов / В.О. Сафонов. — СПб: Санкт-Петербургская организация общества «Знания» России, 1992. — 256 с.
17. Тузовский А.Ф. Системы управления знаниями (методы и технологии) / А.Ф. Тузовский, С.В. Чириков, В.З. Ямпольский. — Томск: Изд-во НТЛ, 2005. — 260 с.
18. Bergmann M. An Introduction to Many-Valued and Fuzzy-Logic. Semantics, Algebras and Derivation Systems / M. Bergmann. — Cambridge University Press. — 2008. — P. 126–135.
19. Zadeh L.A. Fuzzy set / L.A. Zadeh // Information and control. — 1965. — N 8. — P. 338.
20. Mamdani E.A. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis / E.A. Mamdani // IEEE Trans. Computers. — 1977. — Vol. C26. — N 12. — P. 1182–1191.
21. Граф М.С. Метод автоматичного підбору способу коригування точності та швидкості передачі інформації в безпілотному повітряному судні / М.С. Граф // VII Міжнар. наук.-техн. конф. «ITSEC» / Збірник тез. — К.: НАУ, 2017. — С. 46–47.
22. Кривий С.Л. Дискретна математика / С.Л. Кривий // Букрек. — 2014. — 568 с.
23. Федунцов Б.И. Базовая алгоритмическая оболочка бортовых оперативно-советующих экспертных систем типовых ситуаций функционирования объекта / Б.И. Федунцов // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 5. — С. 82–93.
24. Graf M. The Construction of the Algorithm Study Based on the Mathematical Model of Motion / M. Graf, V. Kvasnikov. — In: ICTERI 2018. — P. 235–242.

Надійшла 03.10.2019

A LITERATURE REVIEW OF ABSTRACTIVE SUMMARIZATION METHODS

D.V. SHYPIK, P.I. BIDYUK

Abstract. The paper contains a literature review for automatic abstractive text summarization. The classification of abstractive text summarization methods was considered. Since the emergence of text summarization in the 1950s, techniques for summaries generation were constantly improving, but because the abstractive summarization require extensive language processing, the greatest progress was achieved only recently. Due to the current fast pace of development of both Natural Language Processing in general and Text Summarization in particular, it is essential to analyze the progress in these areas. The paper aims to give a general perspective on both the state-of-the-art and older approaches, while explaining the methods and approaches. Additionally, evaluation results of the research papers are presented.

Keywords: natural language processing, text summarization, abstractive text summarization, sequence to sequence models.

INTRODUCTION

Today there is a problem of processing large amounts of text information caused by a constantly growing volume of textual information. It is possible that this issue can be addressed by using natural language processing approaches, in particular, text summarization.

The main goal of Text Summarization (TS) is to create a summary — “a reductive transformation of source text to summary text through content reduction by selection and/or generalization on what is important in the source.”

In the future, TS may be essential for users to efficiently manage information, allowing saving time and resources, as well as to quickly find the specific information they are looking for within documents.

TS has experienced great development in recent years, and a wide range of techniques and paradigms have been proposed to tackle this research field. However, to produce a summary automatically is very challenging [2].

Extraction methods reached some serious progress [3], but there is an empirical limit intrinsic to pure extraction, as compared to abstraction [4]. Also, Laura Hasler claims that the technique humans practice is to copy and paste the same material present in the source documents [5]. However, some slight changes are applied in most of the cases, and two types of operations, atomic and complex, are identified, involving deletion, insertion, replacement, reordering or merging (the first two are atomic operations while the last three are complex). From the coherency evaluation standpoint, the results showed that 78% of the abstracts were more coherent than extracts.

GRAPH-BASED APPROACHES

The studies for abstractive sentence summarization used to be largely based on sentence compression [6, 7] and sentence fusion [8, 9]. Graph-based approaches also were very popular among older abstractive approaches, in particular, they were shown to be very successful for producing multi-document summaries [10].

Ganesan, Zhai, and Han in their work [11] proposed Opinosis – graph-based summarization framework, which generates abstractive summaries of opinions. The system considers a high redundancy of opinions. Opinosis employs shallow NLP. Firstly, the input text is represented as a textual directed graph. The work introduces lexical links usage in graph building, which should help with discovering new sentences or reinforcing existing ones. Then, candidate abstractive summaries are generated by choosing various sub-paths in the graph. They are analyzed and scored by using three unique properties of graphs (redundancy capture, gapped subsequence capture, collapsible structures), duplicated or extremely similar paths are excluded by using similarity measure. Authors created a dataset, consisting of reviews of various products. The evaluation of the created dataset shows that the summaries generated by the system have a higher correlation with human-made summaries than baseline extractive method. Evaluation conducted on dataset created by authors, resulting in recall for ROUGE-1 – 28,3; ROUGE-2 – 8,53; ROUGE-SU4 – 8,51; F-score for ROUGE-1 – 32,7; ROUGE-2 – 9,98; ROUGE-SU4 – 10,27. Unfortunately, as with all custom datasets, the results are not directly comparable to other algorithms. The authors also point out that this solution is more extractive than abstractive, as only the words from the original text can occur in the summary. It is abstractive in the sense that generated sentences are in general not from the original sentences set.

Lloret and Palomar [12] proposed to combine Graph-based abstractive approach with extractive approach (COMPENDIUM) in several ways. The graph-based approach is used to create new sentences by computing the shortest ‘valid’ path on word graph. The validity of resulting sentences is checked using several heuristics (sentence should have more than 3 words, one of the words is a verb, the sentence doesn’t end in an article). The performance is tested on the DUC 2002 test set, resulting in F-Measure ROUGE-1 – 20,85; ROUGE-2 – 6,68; ROUGE-SU4 – 7,04 for the best of proposed models. Authors state that even though the results are not very high, the approach is promising for future research.

Banerjee and Sugiyama [13] described new multi-document abstractive summarizer. Authors state that documents are not equal by information quantity about the topic, so initially the system evaluates the most important document from the set by using Lex Rank, Pairwise Cosine Similarity, and Overall Document Collection Similarity. Then each sentence from the selected document is used to generate separate clusters or appended to existing. Each cluster consists of a word-graph structure. Clusters are further constructed by including sentences from other documents that have high similarity with them. For each one, K-shortest paths are selected, which are then used to construct the sentences by using a proposed integer linear programming problem that maximizes information content and linguistic quality and reduces redundancy in the final summary. The system outperforms the best extractive summarizer by ROUGE scores on both DUC 2004 and DUC 2005 datasets. For DUC-2004 best proposed system reached

recall for ROUGE-2 – 11,99; ROUGE-SU4 – 14,76. Other metrics were used for DUC-2005 – recall for ROUGE-L – 35,77; ROUGE-SU4 – 12,41. Also, the work included manual evaluation of Informativeness and Language Quality by 10 evaluators – the proposed system reached 4,1 / 5 in Informativeness, 3,63 / 5 in Language Quality on randomized set of summaries.

HEURISTIC BASED METHODS

Some researchers use heuristic methods for sentence generation, for example, the article of **Ganest and Lapalme** [14]. The work introduces the concept of Information Items (INIT). INIT is “the smallest element of coherent information in the text or a sentence”. The framework consists of the following steps:

1) INIT retrieval. Proposed: As the definition of INIT is intentionally vague and leaves out implementation details, authors proposed two candidates for this step: Semantic Role Labeling (SRL) and predicate-logic analysis. Implemented: extraction of subject–verb–object triples, with tags for date and location;

2) INIT selection. Proposed and implemented: frequency-based models (as in extractive summarization);

3) Sentence generation. Proposed: text generation patterns or heuristic rules. Implemented: heuristic engine (implementing linguistic rules) for sentence generation (SimpleNLG) is used.

Evaluation results on the TAC 2010 dataset are – Pyramid Score – 0,315; Linguistic Quality – 2,17 and overall responsiveness – 2,30.

It is also interesting to note, that in fact, part of the implementation of Khan, Salim, and Kumar [15] were close to some of the proposed ideas of Ganest and Lapalme [14] (former proposed SRL usage, sentence generation through using heuristics on the last step).

The proposed framework of **Khan, Salim, and Kumar** [15] uses heuristics for sentence generation, genetic algorithm for information selection.

Novelty:

1) The first work to implement semantic role labeling (SRL) in multi-document abstractive summarization. Rather than simply selecting sentences from source documents, semantic representation is used to represent source documents;

2) Proposed clustering of the semantically similar PASEs (Predicate Argument Structures) by utilizing semantic similarity measure;

3) Ranking PAS based on the features weighted and optimized by genetic algorithm; since text features are sensitive to the quality of the generated summary.

Algorithm:

1) the document is split into sentences;

2) PASEs are selected from each sentence in the document collection using semantic role labeler (SENNA);

3) semantic similarity matrix of PAS is computed;

4) semantically similar PASEs are clustered using ‘Agglomerative hierarchical clustering’ (HAC) algorithm based on the average linkage method;

5) the PASs in each cluster are scored based on features, weighted and optimized by genetic algorithm. Highest ranked PASEs are selected from each cluster;

6) heuristic engine for generation sentences in English (SimpleNLG) is used to generate sentences from argument structures.

Content selection is conducted by ranking PASEs based on optimized features (step 4, 5). In step 6 language generation is used to generate sentences from PASEs.

On DUC 2002 dataset evaluation of Pyramid Score (0,5) and Average Precision (0,7) showed that authors' approach outperforms comparison models. Human-written summaries reached 0,69 for Pyramid Score, 0,85 for Average Precision.

HYBRID METHODS

TOPIARY, the system described by Zajic and Dorr [16], combines sentence compression algorithm by means of linguistically-motivated heuristics (modified Hedge Trimmer) and Unsupervised Topic Discovery (UTD) – statistical method, which generates a set of topics from document corpus. Hedge Trimmer algorithm is modified in order to take a list of topics with relevance scores as additional input, dynamically change compression rate in order to include highest scoring topic if it is missed. The algorithm won a prize on Document Understanding Conference 2004 Workshop as best performing by ROUGE-1, ROUGE-2 and ROUGE-L measures, scoring 24,9; 6,45; 19,95 respectively.

Compress (Clarke and Lapata, 2008) [17] – uses integer linear programming (ILP) to infer globally optimal compressions in the presence of linguistically motivated constraints. The authors introduced the usage of global constraints, designed their system to use less local syntactic knowledge. Three models are presented and compared – unsupervised, semi-supervised, and fully supervised approaches. The results have shown that semi-supervised model with the proposed constraints performing the best in terms of human-evaluated Grammaticality and Importance (information content of summary). Evaluation conducted on data-set created by author. The best scores are 3,76 for Grammaticality, 3,53 for Importance.

Woodsend and others proposed a novel model [18], which consists of three components. Content selection was performed by an SVM, which gave a salience score for each phrase. To generate compressions and paraphrases the model used Quasi-Synchronous Grammar (QG) rules. The third component, an Integer Linear Programming ILP model combined the output of previously mentioned components into an output summary by optimizing content selection and surface realization preferences jointly. Similar to Clarke and Lapata, the ILP model includes global constraints relating to sentence length, overall summary length, grammaticality and topics inclusion. The work is evaluated by humans on DUC-2004 headlines dataset, by means of Grammaticality and Importance, reaching scores 5,36 and 4,94 respectively. In comparison conducted by authors, proposed model outperformed TOPIARY by 2,33 points in Grammaticality, 1,49 points in Importance.

Bing and others [19] proposed an abstraction-based multi-document summarization system that creates new sentences by employing the proposed integer linear optimization model. The system operates syntactic units like a noun or verb phrases instead of whole sentences. In the first step, a noun or verb phrases are

extracted from the documents via constituency trees. Then, for each phrase, a saliency score is calculated using concept-based weight incorporating position information. New sentences are created by selecting and merging phrases, insuring their validity by solving a proposed linear optimization model. Performance evaluations are carried out on TAC 2011 dataset. The system reached recall for ROUGE-2 – 11,7; ROUGE-SU4 – 14,7; F-score for ROUGE-2 – 11,7; ROUGE-SU4 – 14,8. The average Linguistic Quality assessed for resulting summaries was 3,43.

METHODS BASED ON SEQUENCE TO SEQUENCE MODELS

The task of abstractive sentence summarization i.e. generating a shorter sentence version while trying to preserve its original meaning is increasingly intriguing for researchers, especially with the development of sequence-to-sequence framework [20].

Creation of Encoder-Decoder Recurrent Neural Networks and their utilization for encoding variable sentence length with further decoding into variable sentence length [21, 22] lead to significant progress in machine translation. Together with previously proposed Bidirectional Neural [23], it led to the invention of Attentional Encoder-Decoder RNNs [24] and their usage in the field of abstractive sentence summarization [25]. Also, creation of Gigaword dataset [26] had a huge role in providing the previously inaccessible amount of training data.

Rush, Chopra, and Weston [25] proposed a fully data-driven approach to abstractive sentence summarization (which authors call ABS – Attention-Based Summarization). The method utilizes a local attention-based model that generates each word of the summary conditioned on the input sentence. The work tries several encoder architectures:

1. Bag-of-word encoder ignores properties of original order and relationships between neighboring words. This model can capture the importance of words, potentially can learn to combine words, but is inherently limited in representing continuous phrases.

2. The convolutional encoder allows capturing local interactions between words. Standard TDNN is used. Minuses: it produces a single representation (vector) of the entire sentence, ignoring length and other differences.

3. Attention-based encoder based on the article of Bahdanau, Cho, and Bengio [24], removes the need for single representation. The author proposes to think of this as of “soft alignment” between input and output summary.

Generation model uses a feed-forward neural network – Neural Network Language Model (NNLM). The encoder and the generation model are trained jointly on the sentence summarization task. Expectedly, the Attention-based encoder significantly outperforms other proposed encoders and baseline.

Several other articles significantly influenced the further route of research:

1. Gated Recurring Unit (GRU) was proposed [27], as an alternative to Long Short-Term Memory (LSTM) gated unit in RNN. The article of Chung and others [28] has shown that proposed units are comparable or better than LSTM in the task of sequence modeling. Also, the additive nature of both models has advantages over classical tanh units:

- the unit can remember existence of a specific feature in the input stream for a long sequence of steps. Forget gate of the LSTM unit or the update gate of the GRU should specifically decide when the feature is forgotten;
- the memory of these units effectively creates shortcut paths that bypass multiple temporal steps. This property allows to back-propagate the error easily, as it vanishes longer.

2. Large Vocabulary Trick (LVT) was proposed [29] for machine translation. The approach is an approximate training algorithm based on (biased) importance sampling that allows training neural models with a much larger target vocabulary. The algorithm effectively keeps the computational complexity during training at the level of using only a small subset of the full vocabulary. Authors claim that the proposed approach allows us to efficiently use a fast computing device with limited memory, such as a GPU, to train a neural machine translation model with a much larger target vocabulary.

In “**sequence-to-sequence RNNs for text summarization**” Nallapati, Xiang and Zhou [30] demonstrated that the sequence-to-sequence models are extremely promising for summarization. Full seq2seq model is used, as previously proposed [24], with encoder Bidirectional GRU-RNN as and Unidirectional Attentional GRU-RNN as the decoder. Their experiments showed that LVT-trick significantly improves training speed without sacrificing performance. Also, more classic features, like PoS tags, named-entity tags, TF-, IDF that are encoded together with words provided an additional performance improvement. Results of this works have shown that the proposed model outperforms the previous state-of-art [25] on Gigaword, DUC 2003, DUC 2004 corpora.

During further research Nallapati and others in their work “**Abstractive text summarization using sequence-to-sequence RNNs and beyond**” [31] proposed Switching Pointer-Generator to avoid the generation of “UNK” token (a token that is generated by most summarization systems, which try to generate a word that is out of their training dictionary). Authors show, that even though the model learns to use pointers very accurately not only for named entities but also for multi-word phrases, the performance improvement of the overall model is not significant. It is proposed, that model impact may be clearer in other document sets, where the tail distribution of rare words is heavier. Hierarchical attention model is proposed (attention not only on the word level, but also on sentence level), but it didn't show a significant difference on all datasets. Also the work introduced a new large scale dataset “CNN/Daily Mail”, which is very important due to the lack of the former.

The next year, same authors published **new work** [32] which proposed new extractive approach and compared the results with their previous model on the CNN/Daily Mail dataset using ROUGE metric. The comparison showed that extractive model *significantly outperformed* abstractive on the longer texts.

See, Liu, and Manning pointed [33], that even though the system proposed in “Abstractive text summarization using sequence-to-sequence RNNs and beyond” [31] reached a new level of accuracy, it still has typical drawbacks of sequence to sequence models – it inaccurately reproduces factual details, has high level of repeating themselves and not always deals with out-of-vocabulary (OOV) words. The work tries to address this issue through a proposed novel variant of coverage vector and modified pointer-generator network. In contrast to the

abovementioned work where pointer-generator network is activated only for OOV words or named entities, the model is allowed to learn when to apply the network. The proposed model is evaluated to have higher both ROUGE and METEOR scores than the predecessor, was shown to reduce inaccuracies and repetition.

In “**Selective encoding for abstractive sentence summarization**” [34] it is pointed, that unlike machine translation, where alignment between all parts of input and output is required, there is no explicit alignment between input sentences in sentence summarization. The challenge is not to infer the alignment, but to select the highlights and filter secondary information. To solve this task, it is proposed to extend seq2seq framework with additional selective encoding model. The result consists of sentence encoder (bidirectional GRU), and attention equipped decoder (attentional GRU). The selective gate network constructs a second level sentence representation by controlling the information flow from the encoder to the decoder. Also, the proposed layer was shown to perform as expected – it has highlighted the representation of important words from the input sentence. The model is evaluated on the Gigaword, DUC 2004 and MSR abstractive sentence summarization datasets. The proposed selective encoding model outperformed the state-of-art baseline models.

As it was shown, seq2seq framework performance quickly deteriorates with a length of the generated sequence [27]. So, in “Retrieve, rerank and rewrite: Soft template based neural summarization.” authors point that similar sentences should hold similar summary patterns, so existing summaries can be used as “soft templates” to guide the seq2seq model [20]. As the name of the article hints, the model has three steps:

1. Retrieve step: Popular IR platform (Lucene) is used to retrieve candidate templates. The system finds out analogies of the given sentence in the corpus and picks their summaries as candidate templates. Recurrent Neural Network (RNN) encoder is applied to convert the input sentence and each candidate template into hidden states, encoder output is shared by “rerank” and “rewrite” steps.

2. Rerank: In Retrieve, the template candidates are ranked according to the text similarity between the corresponding indexed sentences and the input sentence. However, for the summarization task, the soft template is expected to resemble the actual summary as much as possible. So, this step tries to choose the “closest” template to the processed sentence.

3. Rewrite: summary generation. The summary is generated according to the hidden states of both the sentence and template. Concatenation function is applied to combine the hidden states of the sentence and template.

By comparison to other strategies of choosing soft templates, the authors show that proposed “Rerank” step has a room for improvement. Also, the quality of the summaries depends on the quality of the imported external summaries, which shows that soft templates themselves, not other architecture changes have great importance. In total, the proposed model significantly outperforms the state-of-art seq2seq models, and even soft templates themselves demonstrate high competitiveness.

Inspired by results of “Retrieve, rerank and rewrite” [20] with soft templates **Wang and others** [35] proposed a new model called BiSET (Bi-directional Selective Encoding with Template for Abstractive Summarization) to enhance soft template usage in text summarization. The work introduces:

1. A novel bi-directional selective mechanism with two gates to mutually select important information from both article and template to assist with summary generation. The mechanism is inspired by the research of “bidirectional attention flow mechanism” in machine reading comprehension [36] and the selective mechanism described earlier [34].

2. Fast Rerank method to automatically select high-quality templates from the training corpus. The method is based on Convolutional Encoder, Similarity Matrix, and Pooling layer.

F-1 scores for ROUGE-1, ROUGE-2, ROUGE-L were used as metrics. Removal of template-to-article attention or article-to-template attention lead to reduction in all used metrics, showing that every part of proposed bi-directional selective mechanism is improving performance. Comparison with simple ‘Concatenation’ approach to soft templates showed that proposed selective mechanism significantly outperformed in all metrics.

Results of the works, presented in this section are shown in Tables 1–4.

Table 1. Comparison of methods’ performance on Gigaword dataset, full-length ROUGE F1

Model	ROUGE-1	ROUGE-2	ROUGE-L
ABS (Rush 2015) [25]	29,55	11,32	26,42
ABS+ (Rush 2015) [25]	29,78	11,89	26,97
CA2s2 (Chopra 2016)	33,78	15,97	31,15
FeatSeq2Seq (Nallapati 2016) [30]	32,67	15,59	30,64
SEASS (Zhou 2017) [34]	36,15	17,54	33,63
R ³ Sum (Cao 2018) [20]	37,04	19,03	34,46
BiSET (Wang 2019) [35]	39,11	19,78	36,87

Table 2. Comparison of methods’ performance on Gigaword dataset, ROUGE Recall (output capped at 75 bytes)

Model	ROUGE-1	ROUGE-2	ROUGE-L
Compress (Clarke and Lapata, 2008) * [17]	19,63	5,13	18,28
ABS (Rush 2015) [25]	30,88	12,22	27,77
ABS+ (Rush 2015) [25]	31,00	12,65	28,34

* provided in the work of Rush and others [25], not in original work

Table 3. Comparison of methods’ performance on DUC-2004 dataset, ROUGE Recall (output capped at 75 bytes)

Model	ROUGE-1	ROUGE-2	ROUGE-L
Compress (Clarke and Lapata) * [17]	19,77	4,02	17,3
W&L (Woodsend) * [18]	22	6	17
TOPIARY (Zajic) * [19]	25,12	6,46	20,12
ABS (Rush) [25]	26,55	7,06	22,05
ABS+ (Rush) [25]	28,18	8,49	23,81
FeatSeq2Seq (Nallapati 2016) [30]	28,35	9,46	24,59
SEASS (Zhou 2017) [34]	29,21	9,56	25,51

* provided in the work of Rush and others [25], not in original work.

Table 4. Comparison of methods' performance on CNN/Daily Mail dataset, ROUGE Recall (output capped at 75 bytes)

Model	ROUGE-1	ROUGE-2	ROUGE-L
Nallapati 2016 [30]	35,46	13,30	32,65
Nallapati 2017 (extractive) [32]	39,6	16,2	35,3
Nallapati 2017 (abstractive) [32]	37,5	14,5	33,4
See 2017 ** [33]	39,53	17,28	36,38

** uses non-anonymized dataset, so not directly comparable.

CONCLUSIONS

This paper introduces some important information concerning both state-of-art and older approaches of abstractive text summarization. This review could serve as a starting point for novice researchers to get familiar with the field. Modern data-driven methods had more focus, as they are mostly left out from the topic literature reviews, and also as they tend to give better results and have pretty substantial differences from the older approaches, that were more structure-based or linguistic-focused. However, in contrary to more classical models, sequence to sequence-based ones tend to “lose control” on the long text samples, and also they require much bigger datasets. As we can see, Gigaword dataset is dominating in training new models, as older ‘DUC’ and ‘TAC’ datasets do not provide the desired sample quantity.

To summarize, further research seems to be aligned with improving the quality of the sequence to sequence models on the long texts or proposing an alternative machine learning method.

REFERENCES

1. Jones S.K. Automatic summarizing: factors and directions [Электронный ресурс] / S.K. Jones // MIT Press. — 1999. — Available at: <https://www.cl.cam.ac.uk/archive/ksj21/ksjdigipapers/summbok99.pdf>.
2. Multi-document summarization by sentence extraction [Электронный ресурс] / J.S. Goldstein, V. Mittal, J.G. Carbonell, M. Kantrowitz. — 2000. — Available at: http://scholar.google.com.ua/scholar_url?url=https://kilthub.cmu.edu/articles/Multi-Document_Summarization_By_Sentence_Extraction/6624470/files/12121496.pdf&hl=uk&sa=X&scisig=AAGBfm3dUni3D9yq1qbG7bN3z4ow9ChpyA&nossl=1&oi=scholar.
3. Lloret E. Text summarisation in progress: a literature review / E. Lloret, M. Palomar // Artificial Intelligence Review. — 2011. — N 37. — P. 1–41.
4. Genest P. HEXTAC: the Creation of a Manual Extractive Run [Электронный ресурс] / P. Genest, G. Lapalme, M. Yousfi-Monod. — 2009. — Available at: <http://www.mymcorner.net/files/Genest-Lapalme-Yousfi-Monod-09.pdf>.
5. Hasler L. From extracts to abstracts: human summary production operations for computer-aided summarisation [Электронный ресурс] / L. Hasler. — 2007. — Available at: <http://rgcl.wlv.ac.uk/events/CALP07/papers/10.pdf>.
6. Erkan G. Lexrank: graph-based lexical centrality as salience in text summarization / G. Erkan, D. Radev // Journal of Artificial Intelligence Research. — 2004. — Vol. 22. — P. 457–479.
7. A perspective-based approach for solving textual entailment recognition [Электронный ресурс] / O.Ferrandez, D. Micol, R. Munoz, M. Palomar. —

2007. — Available at: https://www.researchgate.net/profile/Joao_Cordeiro11/publication/234803426_Biology_Based_Alignments_of_Paraphrases_for_Sentence_Compression/links/560fa81b08ae0fc513ef311e/Biology-Based-Alignments-of-Paraphrases-for-Sentence-Compression.pdf#page=80.
8. *Filippova K.* Multi-Sentence Compression: Finding Shortest Paths in Word Graphs [Електронний ресурс] / К. Filippova. — 2010. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/C10-1037.pdf>.
 9. *Gardner J.* An integrated framework for de-identifying unstructured medical data [Електронний ресурс] / J. Gardner, L. Xiong // Elsevier. — 2009. — Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.157.7185&rep=rep1&type=pdf>.
 10. *Hliaoutakis A.* The AMTE_x approach in the medical document indexing and retrieval application / A. Hliaoutakis, K. Zervanou, E. Petrakis // *Data & Knowledge Engineering*. — 2009. — N 68. — P. 380–392.
 11. *Ganesan K.* Opinosis: A Graph Based Approach to Abstractive Summarization of Highly Redundant Opinions [Електронний ресурс] / К. Ganesan, C. Zhai, H. Jiawei. — 2010. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/C10-1039.pdf>.
 12. *Lloret E.* Analyzing the Use of Word Graphs for Abstractive Text Summarization [Електронний ресурс] / E. Lloret, M. Palomar. — 2011. — Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/7d25/67d7eefc772865992e93996c1cd7f6ba6319.pdf>.
 13. *Banerjee S.* Multi-document abstractive summarization using ILP based multisentence compression [Електронний ресурс] / S. Banerjee, P. Mitra, K. Sugiyama. — 2015. — Available at: <https://www.ijcai.org/Proceedings/15/Papers/174.pdf>.
 14. *Ganest P.* Framework for Abstractive Summarization — Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/fdf9/e7d06bf21093e29923742d2040b0e495bc1d.pdf>.
 15. *Khan A.* A framework for multi-document abstractive summarization based on semantic role labelling / A. Khan, N. Salim, Jaya Kumar Y. // *Appl Soft Comput* 30:737–747. — 2015. — doi:10.1016/j.asoc.2015.01.070
 16. *Zajic D.* BBN/UMD at DUC-2004: Topiary [Електронний ресурс] / D. Zajic, B. Dorr, R. Schwartz. — 2004. — Available at: <http://users.umiacs.umd.edu/~bonnie/Publications/Attic/DUC2004-HEADLINE.pdf>.
 17. *Clarke J.* Global inference for sentence compression an integer linear programming approach / J. Clarke, M. Lapata // *Journal of Artificial Intelligence Research*. — 2008. — N 31. — P. 399–429.
 18. *Woodsend K.* Title Generation with Quasi-Synchronous Grammar [Електронний ресурс] / K. Woodsend, Y. Feng, M. Lapata. — 2010. — Available at: https://www.research.ed.ac.uk/portal/files/23634327/2010_Woodsend_Feng_ET_AL_Title_Generation_with_Quasi_Synchronous_Grammar.pdf.
 19. *Abstractive Multi-Document Summarization via Phrase Selection and Merging* [Електронний ресурс] / L. Bing, P. Li, Y. Liao et al. — 2015. — Available at: <https://www.cs.cmu.edu/~lbing/pub/acl2015-bing.pdf>.
 20. *Retrieve, Rerank and Rewrite: Soft Template Based Neural Summarization* [Електронний ресурс] / Z. Cao, W. Li, F. Wei, S. Li. — 2018. — Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/c93b/8518204ef722f4c749628023c6d5d061a5fa.pdf>.
 21. *Learning Phrase Representations using RNN Encoder–Decoder for Statistical Machine Translation* [Електронний ресурс] / K. Cho, B. Merriënboer, C. Gulcehre et al. — 2014. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/D14-1179.pdf>.
 22. *Sutskever I.* Sequence to Sequence Learning with Neural Networks [Електронний ресурс] / I. Sutskever, O. Vinyals, Q.V. Le. — 2014. — Available at:

- <https://papers.nips.cc/paper/5346-sequence-to-sequence-learning-with-neural-networks.pdf>.
23. *Schuster M.* Bidirectional recurrent neural networks / M. Schuster, K. Paliwal // IEEE Transactions on Signal Processing. — 1997. — N 45. — P. 2673–2681.
 24. *Bahdanau D.* Neural machine translation by jointly learning to align and translate [Электронный ресурс] / D. Bahdanau, K. Cho, Y. Bengio. — 2015. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1409.0473.pdf>.
 25. *Rush A.M.* A Neural Attention Model for Sentence Summarization [Электронный ресурс] / A.M. Rush, S. Chopra, J. Weston. — 2015. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/D15-1044.pdf>.
 26. *Napoles C.* Annotated Gigaword [Электронный ресурс] / C. Napoles, M. Gormley, B. Van Durme. — 2012. — Available at: <https://www.cs.cmu.edu/~mgormley/papers/napoles+gormley+van-durme.naaclw.2012.pdf>.
 27. *On the Properties of Neural Machine Translation: Encoder–Decoder Approaches* [Электронный ресурс] / K.Cho, B. Van Merriënboer, D. Bahdanau, Y. Bengio. — 2014. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1409.1259.pdf>.
 28. *Empirical evaluation of gated recurrent neural networks on sequence modeling* [Электронный ресурс] / J.Chung, Ç. Gülçehre, K. Hyun Cho, Y. Bengio. — 2014. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1412.3555.pdf>.
 29. *On Using Very Large Target Vocabulary for Neural Machine Translation* [Электронный ресурс] / S. Jean, K. Cho, R. Memisevic, Y. Bengio. — 2014. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/P15-1001.pdf>.
 30. *Nallapati R.* Sequence-to-sequence RNNs for text summarization [Электронный ресурс] / R. Nallapati, B. Xiang, B. Zhou. — 2016. — Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/033b/c4febf590f6e011e9b0f497cadfe6a4c292d.pdf>.
 31. *Abstractive text summarization using sequence-to-sequence RNNs and beyond* [Электронный ресурс] / R. Nallapati, B. Zhou, C. Santos et al. — 2016. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1602.06023.pdf>.
 32. *Nallapati R.* SummaRuNNer: A Recurrent Neural Network based Sequence Model for Extractive Summarization of Documents [Электронный ресурс] / R. Nallapati, F. Zhai, B. Zhou. — 2017. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1611.04230>.
 33. *See A.* Get To The Point: Summarization with Pointer-Generator Networks [Электронный ресурс] / A. See, P.J. Liu, C.D. Manning. — 2017. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1704.04368>.
 34. *Selective Encoding for Abstractive Sentence Summarization* [Электронный ресурс] / Q. Zhou, N. Yang, F. Wei, M. Zhou. — 2017. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/P17-1101.pdf>.
 35. *Wang K.* BiSET: Bi-directional Selective Encoding with Template for Abstractive Summarization [Электронный ресурс] / K. Wang, X. Quan, R. Wang. — 2017. — Available at: <https://www.aclweb.org/anthology/P19-1207.pdf>.
 36. *Bidirectional attention flow for machine comprehension* [Электронный ресурс] / M. Seo, A. Kembhavi, A. Farhadi, H. Hajishirzi. — 2017. — Available at: <https://arxiv.org/pdf/1611.01603.pdf>.

Received 25.09.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

**ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ КЛАСИФІКАТОРІВ
МАШИННОГО НАВЧАННЯ
У КОНТЕКСТІ ГОЛОСОВОЇ БІОМЕТРІЇ**

В.Я. ДАНИЛОВ, Я.В. ГРУШКО

Анотація. Порівняно сім популярних класифікаторів Python-бібліотеки scikit-learn у контексті ефективності роботи системи голосової біометрії. Для виділення векторів ознак голосу особи, що верифікується, застосовано метод MFCCs (Mel Frequency Cepstral Coefficients). У дослідженні використано такі класифікатори: K-NN (K-Nearest neighbours classifier), MLP (Multilayer perceptron), SVM (Support vector machine), DTC (Decision tree classifier), GNB (Gaussian Naive Bayes classifier), ABC (AdaBoost classifier), RFC (Random forest classifier). Як аналізовану вибірку взято голосові зразки 40 осіб тривалістю в середньому дев'ять хвилин на особу. Критерії ефективності класифікаторів вибрано відповідно до потреб систем голосової біометрії. У межах роботи виконано моделювання шахрайства у процесі аутентифікації. Найефективнішим у голосовому розпізнаванні виявився класифікатор K-NN, який за нульової кількості неправильно допущених осіб, забезпечив на 3–85% вищу точність верифікації, ніж інші класифікатори.

Ключові слова: голосова біометрія, MFCC, порівняння класифікаторів, класифікатор K-NN, машинне навчання, штучний інтелект.

ВСТУП

Натепер стало популярним поняття «штучний інтелект» як серед науковців, так і серед програмістів. Зазвичай під цим поняттям мають на увазі здатність комп'ютерів до певного сприйняття, мислення та дій, притаманних людині. Сюди можна віднести такі популярні течії штучного інтелекту, як машинний зір (CV — Computer Vision), оброблення природної мови (NLP — Natural-Language processing), голосова біометрія (VB — Voice Biometrics) та ін. Зауважимо, що NLP у поєднанні з VB можуть слугувати для підвищення комфорту комунікації між людьми з обмеженими можливостями та комп'ютером.

Яскравим прикладом актуальності досліджень з VB є опитування 500 компаній із США та Європи, проведене Pindrop у 2018 р., згідно з яким 57% з опитаних планують упровадити найближчим часом голосові технології для більшого комфорту клієнтів, а 28% уже застосовують такі технології [1].

У світі вже існує досить багато готових рішень голосової біометрії, запропонованих рядом комерційних компаній, серед яких можна виділити такі великі компанії, як Nuance, Agnitio, VoiceVault. Але, на жаль, теоретична база цих розробок у відкритий доступ майже (або зовсім) не надходить. Саме тому цю роботу спрямовано на підвищення конкурентоспроможності української наукової спільноти в галузі штучного інтелекту — Voice Biometrics.

СТАН ДОСЛІДЖЕННЯ В УКРАЇНІ ТА ЗА КОРДОНОМ

Огляд сучасної літератури свідчить, що тематика систем голосової біометрії не дуже популярна в україномовному науковому середовищі. Попри це, праці, присвячені даній тематиці, є цікавими. Так, у праці [3] В.П. Захарова та О.І. Зачека описано особливості застосування ідентифікації за голосом порівняно з іншими методами біометрії (ідентифікацією за відбитками пальців, сітківкою ока, клавіатурним почерком, венами руки, термографічною картиною обличчя, ДНК тощо). Переваги мультимодальної біометрії (за голосом та обличчям особи) та огляд інших видів біометрії досліджено у дисертації [4] Ю.О. Кумченка. Однак основну увагу автор приділив саме біометрії за обличчям. Безперечно цікавою є також праця [5] О.А. Мясіщева, де описано програму на операційній системі Android, за допомогою якої можна віддалено керувати контролером Arduino через Bluetooth, подаючи відповідні голосові команди.

Деяко ближчою за проблематикою запропонованої роботи є стаття [6] Є.Ю. Щербакова, основна мета якої полягала у визначенні оптимального методу та параметрів голосового розпізнавання особи. Найбільша точність розпізнавання, якої, як повідомляється, вдалося досягнути, становить 98,6%. Однак вибірка голосових зразків тут складалась лише з 10 осіб і кількість класифікаторів дорівнювала трьом. Крім того, автор не врахував похибки другого роду — найістотнішого параметра в роботі системи у режимі захисту від несанкціонованого доступу.

Огляд зарубіжної літератури за тематикою систем голосової біометрії також не виявив великої кількості праць із вільним доступом до параметрів ідентифікації та верифікації. Утім такі праці є і вони цікаві. Так, наприклад, у [7] Н.Н.М. Shah і М.З. Ab Rashid побудували систему голосової біометрії, в основу якої покладено метод MFCCs отримання голосового відбитка, а також описали такі методи, як SVM (Support Vector Machine), GMM (Gaussian Mixture Model), VQ (Vector Quantization) і DTW (Dynamic Time Warping). Метод MFCC опробовано авторами на 10 голосових зразках.

У статті [8] А. Shour, Т. Talkar проаналізували наявні системи голосової аутентифікації та розробили дві власні системи. Схема першої системи включає два основні модулі: MFCCs, що був використаний для виділення векторів ознак голосу, і класифікатор GMM. Другу систему голосової біометрії виконано на базі Python-бібліотеки Dejavu [9]. На жаль, автори не надали порівняльного аналізу ефективності застосованих класифікаторів.

Отже, з огляду літератури, що є у відкритому доступі, можна зробити висновок, що питання вибору найкращого класифікатора та оптимальних параметрів ідентифікації є досить дискусійним і привертає увагу багатьох дослідників, які працюють у галузі ВБ.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Мета роботи — порівняння семи популярних класифікаторів бібліотеки з машинного навчання scikit-learn [2] у контексті розроблення консольного додатка (мовою Python) розпізнавання людини за голосом (Voice Biometrics). Основним функціоналом такого додатка є те, що під час навчання системи голосом певної людини виділяється набір векторів голосового відбитка особи за допомогою методу MFCCs (Mel-Frequency Coefficients) [10–11], а також виконується навчання класифікатора векторами ознак. У процесі аутентифікації набір векторів ознак з голосу, отриманий за допомогою MFCCs, подається на навчену модель класифікатора для ідентифікації та верифікації особи. Обсяг вибірки голосів становить 80 зразків, які належать 40 різним дикторам. Ставиться завдання встановити найкращий класифікатор для розпізнавання.

СХЕМА РОБОТИ СИСТЕМИ

Система, що використана в дослідженні, складається з двох основних модулів: модуля MFCCs [12] отримання набору векторів ознак з голосу (теоретичну складову методу добре описав Джеймс Ліонс [13]) та модуля класифікатора бібліотеки scikit-learn [2]. Спрощену схему роботи системи в режимі навчання зображено на рис. 1.



Рис. 1. Спрощена схема роботи системи в режимі навчання

Як випливає з рис. 1, навчання системи голосу особи відбувається за рахунок навчання моделі класифікатора. Спрощену схему роботи системи в режимі проходження аутентифікації невідомою особою зображено на рис. 2.

Як видно з рис. 2, ідентифікація особи виконується безпосередньо за допомогою класифікатора. Ідентифіковану особу верифікують з використанням деякого встановленого порога для певного параметра. Цей параметр ніщо інше, як відношення імовірності правильної ідентифікації найімовірнішої особи до ймовірності другої найімовірнішої особи. Для детальнішого пояснення припустімо, що система була навчена голосами п'ятох осіб

(Ярослава, Володимира, Ігоря, Олександра, Євгенія). Тепер нехай невідома особа проходить аутентифікацію. Її голос подається на вхід системи розпізнавання, метод MFCCs виділяє з голосу вектори ознак, які подаються на класифікатор, з метою ідентифікації особи. Зрозуміло, що система зможе ідентифікувати особу, яка проходить аутентифікацію, тільки як одну з тих п'яти осіб, голосами яких вона була навчена попередньо. Нехай імовірності правильної ідентифікації невідомої особи, що відповідають відомим навченим особам, наведено у таблиці.

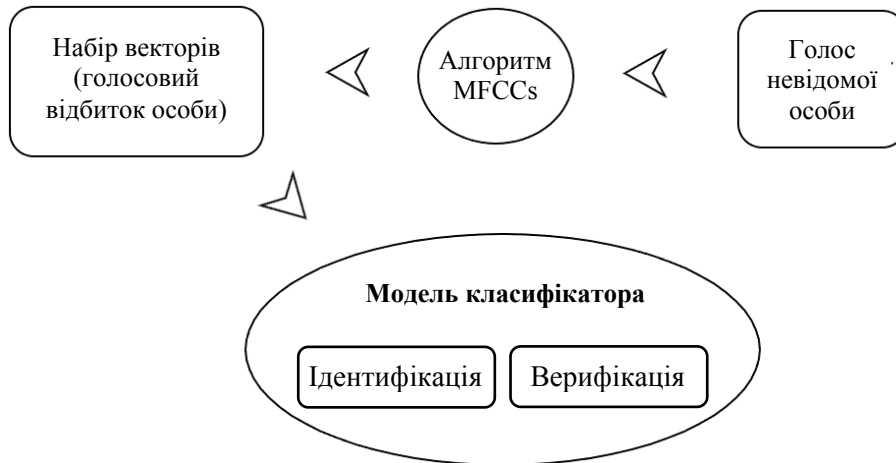


Рис. 2. Спрощена схема роботи системи в режимі аутентифікації невідомою особою

Імовірності правильної ідентифікації невідомої особи, що відповідають особам, які відомі системі

Ідентифікована особа	Імовірність правильної ідентифікації, %
Ярослав	70
Володимир	12
Ігор	8
Олександр	5
Євгеній	5

Таким чином, параметр, на базі якого відбувається верифікація, розраховується як $\text{Ident_varif} = 70/12 = 5,83$. Отже, чим більший цей параметр, тим більша ймовірність, що ідентифікована особа є тією самою особою, яка проходить аутентифікацію. Тому для цього параметра можна установити певний поріг (у цьому випадку не більше як 5,83). І якщо значення параметра Ident_varif більше від заданого порога, то приймається рішення, що особа верифікована правильно, тобто є тією особою, що проходить верифікацію. Інакше робиться висновок, що особа не пройшла верифікацію і не може бути допущеною до охоронних даних.

ОПИС КРИТЕРІЮ ТОЧНОСТІ КЛАСИФІКАТОРА

Відповідно до основної мети роботи порівнюється точність деяких класифікаторів, наявних у бібліотеці `scikit-learn`. Оскільки класифікатори розгляда-

ються як частина системи голосової біометрії, то і критерії точності мають бути актуальними для систем голосової біометрії. Для таких систем як різновидів біометрії безперечно важливою є здатність недопустити зловмисника до даних. Виміряти таку здатність можна кількістю неправильно допущених (allow-false) до закритих даних осіб, інакше кажучи, ця кількість — це кількість помилок другого роду. Зрозуміло, що чим менша кількість неправильно допущених осіб для певної вибірки, тим кращий застосований класифікатор.

Іншою, напевно, не менш важливою здатністю систем біометрії є здатність допустити відомих системі осіб, адже система не матиме сенсу, якщо вона не буде допускати ані зловмисників, ані власників приватного контенту. Кількісно цю здатність можна виміряти кількістю правильно допущених (allow-true) осіб до закритих даних.

Маючи ці два протилежні критерії (allow-true та allow-false), можна досить точно виміряти ефективність класифікатора для верифікації. Саме ці два критерії і були використані для знаходження точності класифікаторів.

ОСОБЛИВОСТІ ВИБІРКИ

Класифікатори тестувалися на вибірці голосів, які належать 40 різним дикторам. Вибірку голосів взято з інтернет-ресурсу OpenSLR [14], де вона перебуває у вільному доступі. Як вибірку голосів використано голосові зразки 40 різних дикторів з тривалістю в середньому дев'ять хвилин. Такої тривалості виявилось цілком достатньо, щоб розбити ці зразки на менші фрагменти та утворити 160 зразків і подати їх на вхід системи, змодельовавши тим самим 80 спроб запису та аутентифікації 40 різними особами.

Особливістю цього дослідження є моделювання зловмисної атаки на систему. Моделювання реалізовано таким чином. Голосові зразки 10 осіб не подавалися на навчання системи, хоча вони подавалися на подальшу аутентифікацію, а отже, були для системи чужими. Таке моделювання щодо зловмисників є цілком виправданим, оскільки, як відомо, для будь-якої системи біометрії однією з найважливіших особливостей є здатність недопустити зловмисника до конфіденційних даних.

Таким чином, у режимі моделювання маємо лише 80 спроб виконання аутентифікації, 20 з яких напевне є зловмисними (оскільки система не була навчена зразками голосів 10 з 40 дикторів), однак система наперед не знає, які саме з цих спроб є зловмисними і повинна саме їх визначити такими. Тому максимально можлива кількість спроб правильної аутентифікації становить 60 спроб, мінімальна — 0. Максимально можлива кількість неправильної аутентифікації (кількість помилок другого роду) дорівнює 80, мінімальна — 0.

Зіставивши ці критичні кількості з конкретними показниками відповідних протестованих класифікаторів, можна зробити висновок про ефективність цих класифікаторів відповідно до завдання розпізнавання.

ПОРІВНЯННЯ СЕМИ КЛАСИФІКАТОРІВ

У роботі протестовано сім популярних класифікаторів Python-бібліотеки scikit-learn [2], а саме:

- 1) K-NN (K-Nearest neighbours classifier – K-найближчих сусідів);
- 2) MLP (Multilayer perceptron – багатошаровий перцептрон);
- 3) SVM (Support vector machine – метод опорних векторів);
- 4) DTC (Decision tree classifier – класифікатор дерев ухвалення рішень);
- 5) GNB (Gaussian Naive Bayes classifier – наївний байесів класифікатор);
- 6) ABC (AdaBoost classifier – адаптивний бустінг);
- 7) RFC (Random forest classifier – класифікатор випадкового лісу).

Кількісні характеристики за критеріями allow-true та allow-false цих класифікаторів зображено на рис. 3.

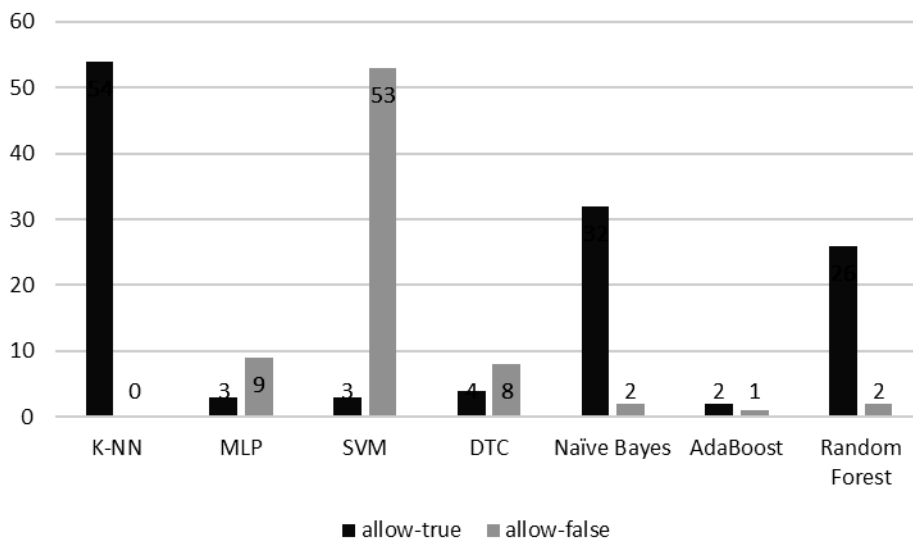


Рис. 3. Кількісні характеристики за критеріями allow-true та allow-false семи класифікаторів (у контексті додатка голосової біометрії)

Як впливає з рис. 3, найменші значення за критерієм allow-false (кількість помилок другого роду) та найбільше значення allow-true має класифікатор K-NN. Таким чином, класифікатор K-NN виявився найкращим у дослідженні. Крім того, цей класифікатор виявився точним за абсолютними показниками, набравши мінімально можливе значення кількості помилок другого роду (0 {allow-false: 0%}) і досить близьке до максимально можливого значення кількості правильно розпізнаних і верифікованих осіб (54 із 60 максимально можливих {allow-true: 90%}). Друге і третє місця посіли відповідно GNB (allow-true: 32 {на 36,7% менше за K-NN}, allow-false: 2 {на 2,5% більше за K-NN}) та RFC (allow-true: 26 {на 46,6% менше за K-NN}, allow-false: 2 {на 2,5% більше за K-NN}). Четверте місце ділять між собою одразу три класифікатори: DTC, ABC і MLP (allow-true: на 83,3% менше за K-NN, allow-false: на 10% більше за K-NN). Найгірше значення в цьому дослідженні показав метод SVM, набравши максимальне, порівняно з іншими класифікаторами, значення за критерієм allow-false (53, що на 67% більше за K-NN). Значення allow-true для класифікатора SVM становить усього 3 (тобто на 85% менше за K-NN).

ВИСНОВКИ

Порівняно з наведеними у відкритих джерелах працях з аналізу класифікаторів, які використовуються для ідентифікації та верифікації особи у голосовій біометрії, виконане дослідження відрізняється такими характерними ознаками:

- виконано на найбільшій з відомих праць вибірці голосів осіб (40 осіб);
- застосовано моделювання шахрайства під час проходження аутентифікації;
- розраховано кількість помилок другого роду;
- проаналізовано найбільшу з відомих праць кількість класифікаторів (сім).

Описано загальну схему системи голосової біометрії, використану для тестування класифікаторів із посиланням на використані Python-бібліотеки.

У результаті дослідження встановлено, що серед семи протестованих класифікаторів python-бібліотеки scikit-learn найвищі значення показників ефективності відносно як правильно допущених осіб, так і похибки другого роду має класифікатор K-NN. Абсолютні значення ефективності класифікатора K-NN (з використанням моделювання зловмисного вторгнення в систему) становлять: кількість спроб правильно допущених осіб — 54 із 60 максимально можливих (точність верифікації 90%) і кількість спроб неправильно допущених осіб — 0 (стовідсотковий захист від зловмисників).

ЛІТЕРАТУРА

1. *Pindrop 2018 voice intelligence report*. — Available at: <https://www.pindrop.com/2018-voice-intelligence-report/> (дата звернення: 11.11.2019).
2. *Classifier comparison*. — Available at: https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/classification/plot_classifier_comparison.html (дата звернення: 11.11.2019).
3. *Захаров В.* Тенденції використання в діяльності правоохоронних органів біометричних технологій, які не входять до «трьох великих біометрик» / В. Захаров, О. Зачек // *Наук. вісн. Львів. держ. ун-ту внутрішніх справ. Серія юридична*. — 2015. — № 2. — С. 285–291.
4. *Кумченко Ю.О.* Інформаційна технологія ідентифікації персоналу на основі комплексу біометричних параметрів : дис. ... канд. техн. наук: 05.13.06 / Ю.О. Кумченко. — Херсон, 2017. — 129 с.
5. *Мясіщев О.* Голосове керування віддаленими пристроями через мережу інтернет / О. Мясіщев, І. Муляр // *Зб. наук. пр. Військ. ін-ту Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка*. — 2017. — № 55. — С. 62–71.
6. *Щербаков Є.Ю.* Застосування математичних моделей для голосової ідентифікації суб'єктів у сфері фінансової безпеки / Є.Ю. Щербаков // *Нейронетіткі технології моделювання в економіці*. — 2017. — № 6. — С. 158–190.
7. *Shah H.N.M.* Biometric Voice Recognition in Security System / H.N.M. Shah, M.Z. Ab Rashid // *Indian Journal of Science and Technology*. — 2014. — Vol. 7, N 1. — P. 104–112.
8. *An Overview and Analysis of Voice Authentication Methods*. — Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/An-Overview-and-Analysis-of-Voice->

- Authentication-Shoup-Talkar/572af444f0382b8e7e156ab36192da95a3b8dec4
(дата звернення: 11.11.2019).
9. *Dejavu*: Audio Fingerprinting and Recognition in Python. Available at: <https://github.com/worldveil/dejavu> (дата звернення: 11.11.2019).
 10. *Martinez J.* Speaker recognition using Mel frequency Cepstral Coefficients (MFCC) and Vector quantization (VQ) techniques / J. Martinez, H. Perez, E. Escamilla // CONIELECOMP 2012, 22nd International Conference on Electrical Communications and Computers. — 2012. — N 1. — P. 248–251. — DOI: 10.1109/CONIELECOMP.2012.6189918
 11. *Kelly A.* The Effects of Windowing on the Calculation of MFCCs for Different Types of Speech Sounds / A. Kelly, C. Gobl // Advances in Nonlinear Speech Processing. NOLISP 2011. — Vol. 7015. — 2011.
 12. *Welcome* to python_speech_features's documentation! — Available at: <https://python-speech-features.readthedocs.io/en/latest/> (дата звернення: 11.11.2019).
 13. *Mel frequency cepstral coefficient (mfcc) tutorial.*— Available at: <http://www.practicalcryptography.com/miscellaneous/machine-learning/guide-mel-frequency-cepstral-coefficients-mfccs/> (дата звернення: 11.11.2019).
 14. *Open Speech and Language Resources.* — Available at: <http://www.openslr.org/12> (дата звернення: 11.11.2019).

Надійшла 12.11.2019

USING CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORKS FOR BREAST CANCER DIAGNOSING

M. NADERAN, Yu. ZAYCHENKO, A. NAPOLI

Abstract. During the last few years, Convolutional Neural Networks (CNN) have been widely used in Computer-Aided Detection and the medical image analysis. The main idea of this paper is to modify CNN's architectures to achieve the better sensitivity and the precision for detecting breast cancer at an early stage compared to existing methods. For this purpose, several factors were considered before CNN training such as the data processing, model, dataset, etc. In the proposed model the following hyperparameters were the following: the dropout rate 0,2, epoch 38 and batch size 33. Besides the hyperparameters, two fully connected layers in the modified model were used. An average recall (sensitivity) in the recent works was 74%. The precision and recall of proposed model for breast cancer classification were 66,66% and 85,7%, respectively.

Keywords: convolutional neural networks, deep learning, computer-aided detection, breast cancer diagnosis, classification.

INTRODUCTION

Breast cancer is one of the most invasive cancers between women. The number of patients who have this type of cancer is increasing not only in poor countries but also in developed countries. Based on World Health Organization (WHO) [1], mammography is cost-effective for analyzing presence of breast cancer in patients. In other words, mammography is expensive but is the only method for screening breast cancer that has proven effective. In [2], the authors indicated that digital mammography (DM) produces the best medical image and is highly recommended for computer aided detection. In this paper, mammography scans were used for experiments, since they are of high quality.

The object of this study is mammography screening and the subject of this study is deep learning methods for diagnosing breast cancer.

In this paper, all methods for diagnosing breast cancer were implemented in jupyter notebook using keras libraries [3]. We consider recall and precision as evaluation metrics, since for detecting breast cancer, accuracy cannot be the only indicator for making decision.

NOVELTY

In this work, we proposed modified Inception V3 model to gain better results comparing to previous works. In order to that, the best values of hyperparameters that are playing an important role in the model were chosen. Also, before fully connected layer dropout with 0.2 rate was added for making model more inde-

pendent to training data. Besides that, two fully connected layers were used in the modified model to achieve the goal.

RELATED WORKS

Systematic review (SR) has been done in [2]. In this paper authors illustrated how choosing the right medical images is important. Digital Mammography (DM) is the most important technique in medicine screening. DM helps to detect tumor before it develops further. Moreover, authors compare different methods that were used from 2011–2017 and conclude that SVM has the best result based on [4, 5, 6, 7].

Currently, there are few works that are considering using convolutional neural networks for the task. In [8], authors compare machine learning methods, such as Support Vector Machine (SVM), Decision Tree (C4.5), Naive Bayes (NB) and k-Nearest Neighbors (k-NN) on white blood cell (WBC) datasets. Based on their experiments, SVM has the best accuracy with 97,13%. However, for cancer diagnosis task precision and recall should be considered as evaluation metrics. In [9], a modified CNN architecture with nine layers was proposed. From these layers, six of them were convolution and pooling layers and three were fully connected layers. The result of this work shows 69,99% and 81,44% accuracy for cancer classification and necrosis detection respectively.

Authors in [10] consider factors, such as true positive, false positive, precision and recall for classification using HPBCR (hybrid predictor of breast cancer recurrence). Sensitivity of the performance in [10] was 77% and the accuracy was 95%, and the same values for SVM and decision tree were 67%, 78% and 75%, 77% respectively.

Authors in [11] propose an [“end-to-end” approach in which a model to classify local image patches is pre-trained using a fully annotated dataset with region of interest (ROI) information]. The experiment results show ResNet 50 has better accuracy (97%) comparing to VGG(84%). End-to-end learning process is a type of Deep learning process when all the parameters are trained jointly, rather than step by step. The weakness of [11] is that authors are using simple validation. Simple validation means that the training dataset is split in training and validation sets such as 70% of the data is used for training and 30% for validation. Instead K-fold cross validation divides the data into K number of sections/folds where each fold is used as a testing set at some point. Using K-fold cross validation helps to prevent overfitting without losing any data [12, 13].

CONVOLUTIONAL NEURAL NETWORK

A Neural Network (NN) is a network of neurons that are used to process information. A simple NN includes three layers: input, hidden and output. A Convolutional Neural Network (CNN) is a Deep Learning network which can take in an input image, assign importance (learnable weights and biases) to various aspects/objects in the image and be able to differentiate one from the other. Convolutional neural network has three main layers: Convolutional layer, Pooling layer and Fully Connected layer. Fig. 1 illustrates the architecture of CNN. The main

difference between Convolutional Neural Network CNN and Neural Network (NN), is a convolutional part. CNN has extra Convolutional and Pooling layers. Basically, a fully connected (FC) layer is simple NN. The number of convolutional and pooling layers depend on the model which is used. For example, in [9] there is no pooling layer but six convolutional layers.

There are three main operation illustrated in fig. 1:

1. Convolution and Non-Linearity (ReLU).
2. Pooling or Sub Sampling.
3. Classification (Fully Connected Layer).

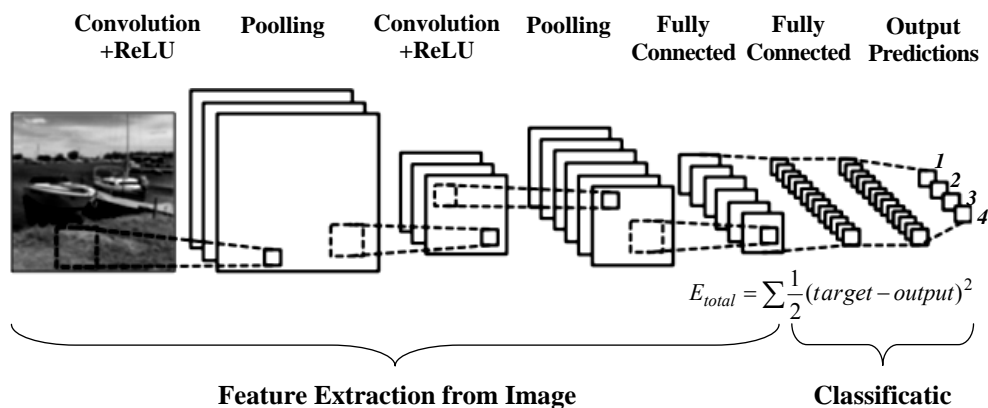


Fig. 1. A simple ConvNet; 1 — Dog (0), 2 —Cat (0), 3 — Boat (1), Bird — (0)

These operations are the main building blocks of each convolutional neural network. The first three operations are used for features extraction and the outputs of convolutional part (convolutional, ReLU and pooling) are used as input to the fully connected layers where classification happens.

The convolutional layer and ReLU function

The main idea of convolutional layer is features extraction. At this stage filters are applied to the input image for features extraction. In order to this, the filter slides (orange matrix is called “kernel”) over the image (green matrix) by 1 pixel (stride) for every position, element wise multiplication is computed (between the two matrices) and outputs are added in order to get the final integer that forms a single element of the output matrix (pink matrix), (fig. 2). For example, the number “4”, the first pixel on left side, calculated as $4 = 1 * 1 + 1 * 0 + 1 * 1 + 0 * 0 + 1 * 1 + 1 * 0 + 0 * 1 + 0 * 0 + 1 * 1$. By applying one filter to the image, we will get the first feature. By applying several filters to the same image, we will get several features that constitute a feature map [14].

The ReLU operation (also called activation function) is performed right after convolution. At this stage, all negative pixels are changed to zero in order to introduce non-linearity in ConvNet, since most of the real world data would be non-linear (Convolution is a linear operation – element wise matrix multiplication and addition, so we account for non-linearity by introducing a non-linear function like ReLU) [23]. Operation ReLU is calculated using the formula below:

$$Y = \max(0, X) .$$

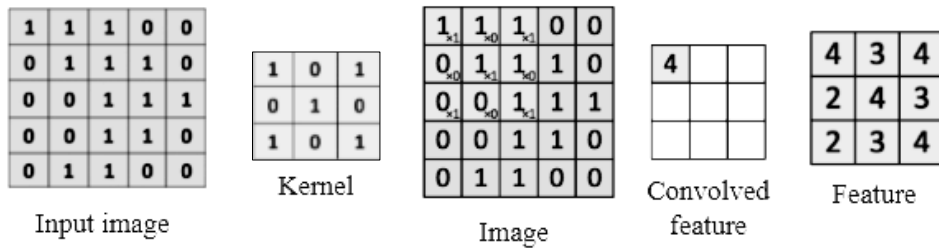


Fig. 2. Convolutional operation on one input image

The pooling layer

Pooling layer (also called subsampling), (fig. 3) changes the dimensionality of the feature maps. The input for this layer is the output of convolution (feature maps) and output is compressed version of the feature maps. Pooling can be calculated by Max, Average or Sum operation. The example of max pooling is illustrated in figure 2 where filter 2x2 with stripe 2 is applied to one feature. In this case, we slide filter over the feature map with stride equal 2. For instance, in order to calculate the first pixel of max pooling matrix in this example “6”, the follow operation will be considered: $\text{Max}(1,1,5,6) = 6$

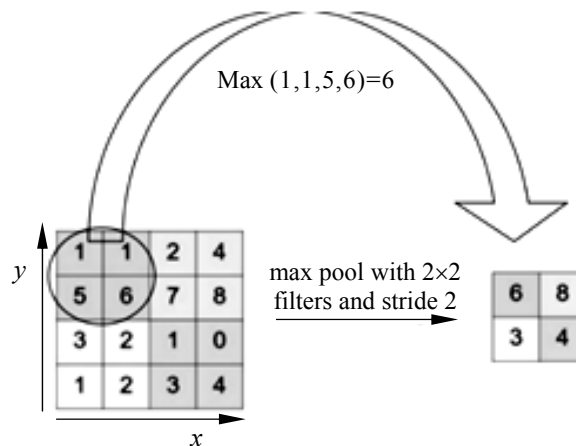


Fig. 3. Max pooling operation on one of the features

The fully connected layer

The Fully Connected layer is a traditional Multi-Layer Perceptron that uses Soft-max activation function in the output layer. This function calculates the probabilities of each target class for the given input. The output of the convolutional and pooling layers represents high-level features of the input image. The purpose of the fully connected layer is to use these features for classifying the input image into various classes based on the training dataset.

METHODS

There are various machine learning algorithms and methods that could be used for diagnosing breast cancer with mammography, such as Support Vector Machine, Random Forest, K-Nearest Neighbor, etc. Even though support vector machines

are widely used for different tasks, and have shown good results, convolutional neural networks are showing better performance among computer vision algorithms because of the ability to extract important features. After each convolutional operation, some features will be extracted and passed to the deeper layers, these features will become more specific and unique for the input image. For instance, for detecting a face in the picture, at first layer lines and curves of nose are extracted. In deeper layers, these lines and curves will be used as one feature (nose) of the face. By doing the same process, features like eyes, ears, lips etc. are extracted from the input image.

In [15] three different CNN architectures Cifar Net, AlexNet and GoogLeNet (Inception) were compared. It requires 5,37 GB of memory and 2h49m to apply GoogLeNet. While for applying CifarNet, it takes 2,25 GB and 7m16s.

Some of the existing CNN models are very well realized. In this case to improve the precision and recall for our task, we can fine tune pre-trained models. Because, training model from scratch sometimes does not give the expected results. Since, training network from the scratch requires so many training datasets. Unfortunately, it is challenging to get access to the vast mammography screens. Transfer learning is a machine learning technique that helps reuse previous models for a running task and improve the used model architecture to reach higher accuracy and f-score.

EXPERIMENT

For conducting experiment Jupiter notebook was used. The machine where the program was run had an Intel Core i7 processor and NVIDIA GeForce driver.

In this paper two open-source datasets BreKHis, Breast histology and Kaggle [16,17,18] were used during the experiment. In BreKHis dataset, 1271 images were used for training and 70 images were used for testing, in Breast histology set, 200 images are used for training and 37 are used for testing. The dataset in Kaggle is numerical and 500 data were used for training and 70 data were used for testing.

Results show that small dataset could affect the accuracy and CNNs cannot be trained well leading to overfitting or underfitting. Chart 1 (fig. 4) shows accuracy comparison of Inception V3 for BreKHis and Breast histology datasets.

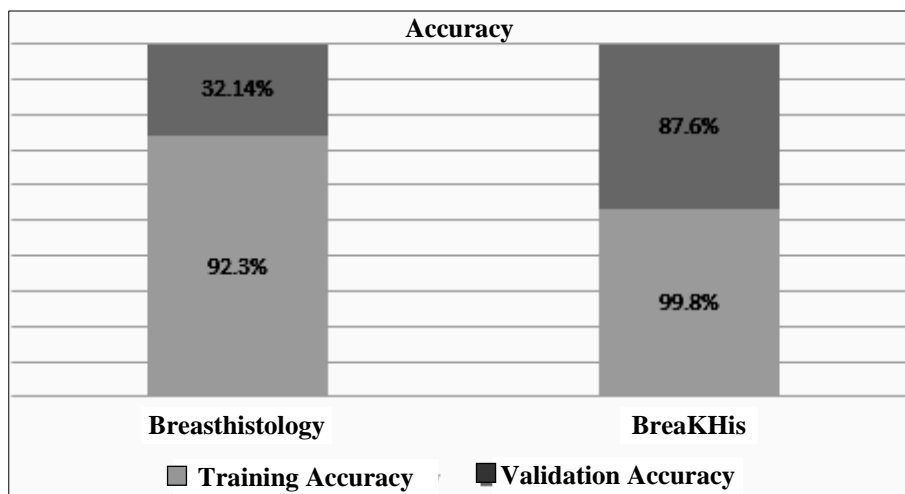


Fig. 4. Comparing accuracy for training and validation sets

According to the chart 1, accuracy for validation set in Breast histology dataset is noticeably lower value than in BreaKHis dataset. In this case our model is over fitted. This means that the model is doing well on the training set but not for those data which were never seen before (validation set). Thus, using a large dataset prevents model from overfitting during training and fine tuning.

Data preprocessing

Data preprocessing is an integral step in Machine Learning as the quality of data and the useful information that is derived from it directly affects the ability of the model. Also, it is used to transform the raw data in a useful and efficient format. Therefore, it is extremely important that the data are preprocessed before feeding it into the model [19]. Basically, we preprocess the raw data by importing libraries, read data, checking for missing values, checking for categorical data etc. Image Data Generator module [20] was used for augmentation data and make dataset bigger by creating different versions of one image.

After preprocessing data, we need to separate data into training and validation sets. Basically, validation set helps model to be well trained for data which were never seen before. There are two ways to separate the data into training and validation sets: simple validation and K-fold cross validation. Simple validation splits data into two sets where one part of data is used for training and another part is used for validation, whereas, in K-fold cross validation, dataset is split into K fold (part). At the first iteration, the first fold is used for validation set and (K-1) folds are used for training set. At the second iteration, the second fold is used for validation and the rest of the folds are used for training. This process is repeated until each fold has been used as validation set.

In Table 1, sensitivity (Recall) with K-fold validation is higher than with simple validation, 70% and 31,3% respectively. When simple validation is used during the experiment, some data could be missed in case when some images are not considered. As a result, CNN won't be trained well or over fitted.

Table 1. Comparing simple validation and K-fold validation for Inception V3

Simple validation			K-fold validation		
Precision	Recall	F1-score	Precision	Recall	F1-score
30,59%	31,3%	30,11%	65,7%	70%	67,78%

Table 2 shows the difference between our modified model and pre-trained model. Modified model is using the best weight to achieve better results, and based on Table 3, precision and recall (sensitivity) in the modified model are 66,66% and 85,7% respectively. In cancer diagnosing, the more important factor is sensitivity, which can be calculated as (6,1). In other word, we should avoid misclassification in case when the actual class is yes (cancer) and model prediction is no (no cancer).

Table 2. Comparing fine tune and pre-trained model (Inception V3)

Model	Accuracy, %	Precision, %	Recall, %	F1-Score, %
Inception V3	79,31	65,7	70	67,78
Modified Model	78,59	66,66	85,7	74,99

Based on Table 3, sensitivity (recall), precision and f1-score are calculated as following:

$$Sensitivity = \frac{TP}{Actual\ yes} = \frac{12}{14} = 85,7\% ;$$

$$Precision = \frac{TP}{Predicted\ yes} = \frac{12}{18} = 66,66\% ;$$

$$Sensitivity = \frac{Sensitivity * Precision}{Sensitivity + Precision} = 745,99\% .$$

Table 3. Confusion matrix

Index	Predicted No	Predicted Yes
Actual No	TN = 9	FP = 5
Actual Yes	FN = 1	TP = 12

Table 4 shows the comparison of machine learning algorithms on Kaggle dataset.

Table 4. Comparing machine learning algorithms on Kaggle dataset

ML algorithms	Accuracy	F1_score	Recall	Precision
LR	0,964912281	0,953846154	0,98412698	0,925373134
KNN	0,947368421	0,929133858	0,93650794	0,921875
SVM	0,959064327	0,945736434	0,96825397	0,924242424
NB	0,923976608	0,897637795	0,9047619	0,890625
DT	0,935672515	0,916030534	0,95238095	0,882352941
RF	0,964912281	0,950819672	0,92063492	0,983050847

Based on results in Table 4, Logistic Regression (LR) has shown better results comparing to other methods. Using LR method, we have achieved F1_Score and Recall 95,38% and 98,41% respectively. In future work, we will use CNN in numerical dataset and then will compare the obtained results with LR.

CONCLUSION AND DISCUSSION

Convolutional neural networks (CNN) is a special architecture of artificial neural networks. One of the most popular uses of this architecture is image classification. The reason is that it starts from lower abstraction and go deeper into higher abstraction. Convolutional neural network first starts to define curve and line in an image at higher layers and extracts general feature maps. While going deeper in lower (deeper) layers, the feature maps become more and more specific and unique.

The modified model has dropout rate = 0,2, epochs = 38 and batch size = 33. Besides choosing the right hyperparameters, in the model two fully connected

layers were used. The model shows better result comparing the pre-trained model (Inception V3) with sensitivity of 85,7%.

Besides choosing the right model, the quality of the image is selected has an essential role on the result. In this paper, Digital Mammography (DM) is used, since the quality of scans in mammography is better than other medical scans. Even though DM is expensive but is the only effective method for screening breast cancer that has proven effective. Moreover, it helps to detect tumors at a very early stage.

In future, we plan to improve the architecture of the current model to reach better results.

REFERENCE

1. *Breast cancer: prevention and control.* — Available at: <https://www.who.int/cancer/detection/breastcancer/en/>
2. *Yassin N.* Machine learning techniques for breast cancer computer aided diagnosis using different image modalities: A systematic review / N. Yassin, S. Omran, E. El Houbay, H. Allam // *Computer Methods and Programs in Biomedicine.* — 2018. — Vol. 156. — P. 25–45.
3. *Keras:* The Python Deep Learning library. — Available at: <https://keras.io/>
4. *Sharma S.* Computer-aided diagnosis of malignant mammograms using zernike moments and SVM / S. Sharma, P. Khanna // *Journal of Digital Imaging.* — 2015. — **28** (1). — P. 77–90.
5. *Beheshti S.M.A.* An efficient fractal method for detection and diagnosis of breast masses in mammograms / S.M.A. Beheshti et al. // *Journal of Digital Imaging.* — 2014. — **27** (5). — P. 661–669.
6. *Azar A.T.* Decision tree classifiers for automated medical diagnosis / A.T. Azar, S.M. El-Metwally // *Neural Comput. Appl.* — 2013. — **23** (7). — P. 2387–2403.
7. *Jian W.* Computer-aided diagnosis of breast microcalcifications based on dual-tree complex wavelet transform / W. Jian, X. Sun, S. Luo // *Biomed. Eng. Online.* — 2012. — **11** (1). — p. 96.
8. *Hiba A.* Using Machine Learning Algorithms for Breast Cancer Risk Prediction and Diagnosis / A. Hiba, M. Hajar, M. Hassan, N. Thomas // *The 6th International Symposium on Frontiers in Ambient and Mobile Systems. Procedia Computer Science* 83. — 2016. — P. 1064–1069.
9. *Sharmaa H.* Deep convolutional neural networks for automatic classification of gastric carcinoma using whole slide images in digital histopathology / H. Sharmaa, N. Zerbe, I. Klempert et al. // *Computerized Medical Imaging and Graphics.* — 2017. — **61**. — P. 2–13.
10. *Mohammad M.* A Hybrid Computer-aided-diagnosis System for Prediction of Breast Cancer Recurrence (HPBCR) Using Optimized Ensemble Learning / M. Mohammad, M. Hamid, M. Marjan et al. // *Computational and Structural Biotechnology Journal.* — 2017. — **15**. — P. 75–85.
11. *Shen Li.* Deep Learning to Improve Breast Cancer Early Detection on Screening Mammography / Li Shen, Laurie R. Margolies, Joseph H. Rothstein et al. Published online Mar 15. — doi: 10.1038/s41598-018-22437-z. 2018.
12. *K-Fold Cross Validation.* — Available at: <https://medium.com/datadriveninvestor/k-fold-cross-validation-6b8518070833>
13. *Rakhlin A.* Deep Convolutional Neural Networks for Breast Cancer Histology Image Analysis / A. Rakhlin, A. Shvets, V. Igloukov. — ICIAR 2018 Grand Challenge. arXiv:1802.00752v2. 2018.

14. *An Intuitive Explanation of Convolutional Neural Networks*. — Available at: <https://ujjwalkarn.me/2016/08/11/intuitive-explanation-convnets/>
15. *Shin Hoo-Chang*. Deep Convolutional Neural Networks for Computer-Aided Detection: CNN Architectures, Dataset Characteristics and Transfer Learning / Hoo-Chang Shin, Holger R. Roth, Mingchen Gao et al. // *IEEE Transactions on medical imaging*. — 2016. — Vol. 35, N 5.
16. *Breast cancer dataset from breakhis*. — Available at: <https://www.kaggle.com/kritika397/breast-cancer-dataset-from-breakhis>
17. *Bioimaging Challenge 2015 Breast Histology Dataset*. — Available at: <https://rdm.inesctec.pt/dataset/nis-2017-003>
18. *Breast histopathology*. — Available at: https://www.kaggle.com/paultimothymooney/breast-histopathology-images#IDC_regular_ps50_idx5.zip
19. *Sharmaa H*. Deep convolutional neural networks for automatic classification of gastric carcinoma using whole slide images in digital histopathology / H. Sharmaa, N. Zerbe, I. Klempert // *Computerized Medical Imaging and Graphics*. — 2017. — **61**. — P. 2–13.
20. *Image Preprocessing*. — Available at: <https://keras.io/preprocessing/image/>

Received 21.11.2019

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

**ДОСЛІДЖЕННЯ АДЕКВАТНОСТІ ІНТЕРВАЛЬНИХ
НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ ТИПУ 2 В ЗАДАЧАХ
ІДЕНТИФІКАЦІЇ СКЛАДНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Н.Р. КОНДРАТЕНКО, О.О. СНИГУР

Анотація. Запропоновано метод побудови множини нечітких моделей типу 2 з інтервальними функціями належності, який має властивість узагальнювати кінцеві результати і адекватний експериментальним даним. Запропоновано також процедуру узагальнення інтервальних виходів нечітких моделей з отриманої множини. Окрім усіх переваг побудови нечітких моделей з експериментальних даних, запропонований підхід дає змогу врахувати думку кількох експертів і на її основі скоригувати вхідний вектор даних. Кінцевий результат має вигляд інтервалу, за шириною якого можна зробити висновок про адекватність відображення моделлю предметної галузі. Шляхом експериментальних досліджень, пов'язаних із прикладною задачею оцінювання артезіанської свердловини з точки зору перспективності її подальшої експлуатації, показано, що за допомогою отриманого інтервалу, який узагальнює результати роботи всіх моделей, можна знайти рішення, придатне для розв'язання поставленої задачі.

Ключові слова: нечітка модель типу 2, інтервальна функція належності, інформаційна міра ідентичності.

ВСТУП

Як відомо [1], ідентифікація складних об'єктів, що слабо формалізуються, передбачає побудову певної сукупності логічних висловлень «якщо–то», які пов'язують лінгвістичні оцінки вхідних та вихідних параметрів об'єкта. Моделюючи такі об'єкти, розробники спрямовують зусилля на підвищення адекватності опису моделювання об'єктів, ураховуючи численні фактори, які, на думку експерта, можуть вплинути на процеси прийняття рішень. Використання емпіричних знань для побудови нечіткої моделі означає, що адекватність нечітких моделей відносно реальних даних експерименту істотно залежатиме від кваліфікації експертів. У крайньому випадку, коли експерти не володіють у повному обсязі знаннями, необхідними для побудови нечіткої моделі, виникають питання з визначення міри їх участі в процесі моделювання та міри використання експериментальних даних. Тоді, як правило, генерація нечіткої моделі відбувається з доступних експериментальних даних. Перетворення експериментальних даних у нечіткі бази знань використовують у нечіткому моделюванні [2]. Поширеним використанням експери-

ментальних даних є побудова нечітких моделей у випадку недовизначеності вхідних даних, наприклад, для моделювання складних природних систем, коли про характер роботи системи можна судити лише за вибіркою експериментальних даних.

Проте недостатньо дослідженими є методи побудови нечітких моделей з інтервальними функціями належності, що здатні в умовах невизначеності зберігати адекватність експериментальним даним, на основі яких відбувається генерація нечіткої моделі.

Резюмуючи наведене, актуальним постає питання аналізу нечітких систем, що генеруються з експериментальних даних, щодо їх властивості якісного відображення предметної галузі в задачах ідентифікації складних об'єктів.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Сучасний підхід до розв'язання задач ідентифікації складних об'єктів, що слабо формалізуються, пов'язують з нечітким моделюванням. Залежно від ступеня нечіткості нечітких множин, що враховується під час побудови нечіткої моделі, розрізняють нечіткі моделі типу 1, загальні моделі типу 2 та інтервальні моделі типу 2 [3].

У праці [4] для розв'язання задачі медичної діагностики використовуються нечіткі моделі типу 1. Побудова нечіткої логічної системи, яка буде адекватною предметній галузі, здійснюється шляхом налаштування параметрів нечіткої логічної системи за методом найменших квадратів. З метою забезпечення адекватності в цій роботі пропонується використовувати потужні оптимізаційні методи на основі випадкового пошуку.

Побудова нечіткої логічної системи типу 2 з інтервальними функціями належності для забезпечення придатних результатів на виході системи теж допускає процедури налаштування параметрів функцій належності. У праці [5] для налаштування параметрів інтервальних функцій належності нечіткої моделі типу 2 з багатьма входами та багатьма виходами також використовується генетичний алгоритм.

У праці [6] для підвищення точності прогнозування часових послідовностей пропонується будувати декілька моделей. Практична користь розроблених моделей та методів щодо підвищення адекватності відображення предметної галузі досліджується за допомогою критеріїв максимального відхилення (MAE), середнього відхилення (MSE) та середньоквадратичного відхилення ($RMSE$), за якими визначається близькість розрахункових (\tilde{y}_i) та експериментальних (y_i) даних:

$$MAE = \max_i |y_i - \tilde{y}_i|;$$
$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2;$$
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \tilde{y}_i)^2},$$

де N — кількість спостережень.

Проблема забезпечення точності в задачі прогнозування часових послідовностей розглядається також у праці [7]. Обґрунтовується доцільність використання інтервальної нечіткої логічної системи типу 2 для прогнозування послідовностей, що мають значну зашумленість. Для порівняння результатів прогнозування використано критерій *RMSE*. У праці [8] пропонується підхід для оцінювання якості виготовлення промислової продукції декількома моделями, які будуються на основі інтелектуальних технологій, у тому числі і з використанням інтервальних нечітких моделей типу 2. Зазначено, що для оцінювання якості результатів, які отримують за допомогою кожної із запропонованих моделей, рішення приймає експерт. Указано на переваги використання саме інтервальної нечіткої моделі, яка дає змогу побудувати більш згладжену поверхню для отримання вихідного значення.

Інтервальному прогнозуванню часових послідовностей за умов невизначеності присвячено працю [9], у якій також використано декілька моделей, але на відміну від попередніх для прогнозування пропонуються лише інтервальні нечіткі моделі. На базі множини інтервальних нечітких моделей побудовано узагальнювальну модель, що складається з множини часткових різновходових моделей та блока агрегації \cap/\cup , який виконує обчислення результуючого інтервального прогнозу.

Інтервальні нечіткі множини використано для моделювання складних систем в умовах недовизначеності вхідних даних у праці [10]. З урахуванням неточності вимірювань, відсутності можливостей для безпосереднього спостереження об'єкта, неповноти та неоднозначності знань про предметну галузь було побудовано агреговану інтервальну нечітку модель типу 2, яка складалася з множини інтервальних нечітких моделей.

У праці [11] розглядаються переваги інтервальних нечітких моделей типу 2 щодо адекватності відображення предметної галузі. Для обґрунтування переваг пропонується відомий підхід теорії ідентифікації до оцінювання ступеня ідентичності між об'єктом та моделлю на основі інформаційної міри невизначеності:

$$H(Y) = I(X, Y) + H(Y/X), \quad (1)$$

де $H(Y)$ — ентропія вихідної величини, що дорівнює сумі кількості інформації про Y , яка міститься у вхідній величині X , та середньої умовної ентропії Y відносно X . Тобто за класичною теорією інформації безумовна ентропія величини Y складається з двох частин: перша — це міра кількості інформації про величину Y , яку можна отримати на основі вхідної величини X , а друга — міра апіорної невизначеності, що зумовлюється впливом інших величин, крім X .

Таким чином, у випадку побудови нечіткої моделі з урахуванням виразу (1) збільшення кількості інформації про Y , що міститься у вхідній величині X , забезпечуватиметься підвищенням адекватності відображення предметної галузі. Виконати цю умову можна, збільшивши ентропію вхідів $H(X)$, як видно з такого виразу, отриманого завдяки властивості симетрії з виразу (1):

$$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y).$$

Зменшенню впливу $H(X/Y)$ буде сприяти також процес оптимізації параметрів нечіткої моделі. Тобто виникає задача параметричної ідентифі-

кації, що зводиться до знаходження таких оцінок параметрів математичної моделі, які забезпечують найкращу, відповідно до обраного критерію, близькість розрахункових і експериментальних даних.

Для реалізації згаданого підходу пропонуємо будувати множину нечітких моделей з інтервальними функціями належності та інтервальним виходом. Нечіткі моделі цієї множини будуються з експериментальних даних. Кожна з таких моделей генеруватиметься з однієї й тієї самої експериментальної вибірки, але з урахуванням думки незалежних експертів на вектор вхідних змінних, що допоможе врахувати вплив шумів та недовизначеність, наявну у вхідних даних. Для отримання кінцевого результату введемо процедуру узагальнення виходів моделей, що генеруються. Оскільки кінцевий результат буде мати вигляд інтервалу, то за шириною інтервалу можна зробити висновок про адекватність відображення моделлю предметної галузі. Шляхом експериментальних досліджень, пов'язаних із прикладною задачею оцінювання артезіанської свердловини з точки зору перспективності її подальшої експлуатації, покажемо, що за допомогою отриманого інтервалу, який буде узагальнювати результати роботи всіх моделей, можна знайти рішення, придатне для розв'язання поставленої задачі.

Виходячи з розглянутих праць і теоретичних передумов, є підстави вважати, що проблема забезпечення адекватності інтервальних нечітких моделей, пристосованих для розв'язання задач ідентифікації складних об'єктів, є актуальною.

МЕТА ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Метою дослідження є підвищення адекватності нечітких моделей предметній галузі шляхом побудови множини інтервальних нечітких моделей з подальшим узагальненням кінцевих результатів.

Для досягнення поставленої мети потрібно:

- побудувати множину інтервальних нечітких моделей типу 2 з інтервальними функціями належності;
- запропонувати процедуру узагальнення виходів інтервальних нечітких моделей залежно від характеру інтервальних виходів кожної з моделей з урахуванням думки експерта;
- дослідити адекватність побудованих нечітких моделей типу 2 для задач ідентифікації складних об'єктів.

ГЕНЕРАЦІЯ НЕЧІТКОЇ МОДЕЛІ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ НАЛЕЖНОСТІ З ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

Нечітка модель будується на основі експериментальних даних, які визначають центри нечітких множин антецедентів і консеквентів правил.

Генерування нечіткої моделі з інтервальними функціями належності на базі експериментальних даних виконується за алгоритмом із праці [12]. На основі цього алгоритму буде одночасно зменшуватися вибірка та генеруватися нечітка модель з інтервальними функціями належності. Центри інтервальних функцій належності визначаються за відповідними експериментальними даними. Цей алгоритм є алгоритмом контрольованого розтягу одного з параметрів функцій належності вхідних змінних з одночасним збе-

реженням адекватності прийняття рішень нечіткою системою. Алгоритм дозволяє побудувати інтервальні функції належності типу 2 для вхідних змінних та забезпечує функціонування інтервальної нечіткої моделі як такої, що є максимально адекватною предметній галузі.

Структуру нечіткої моделі з інтервальними функціями належності зображено на рис. 1 [3].

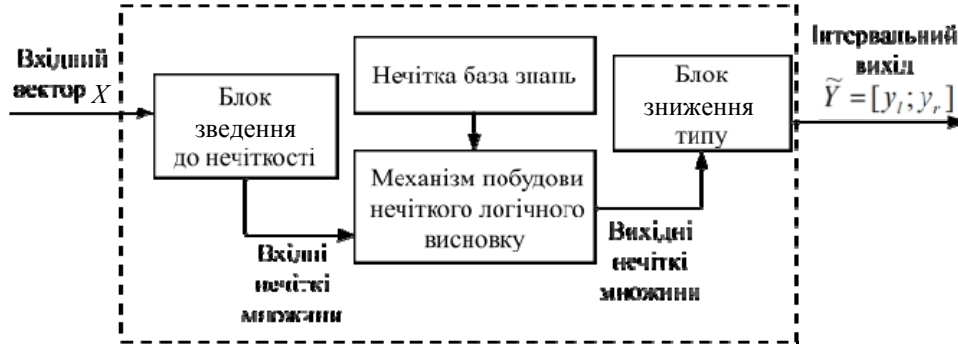


Рис. 1. Структура інтервальної нечіткої моделі типу 2

Модель відображає чіткі входи (x_1, \dots, x_p) в інтервальні та чіткі виходи: $\tilde{Y} = [y_l; y_r]$. Для опису нечітких термів лінгвістичних змінних використаємо інтервальні нечіткі множини типу 2. Тоді математична модель буде являти собою інтервальну нечітку модель типу 2, що включає базу правил (нечітку базу знань), процедуру зведення до нечіткості, процедуру нечіткого логічного виведення, процедуру зниження типу та процедуру зведення до чіткості (рис. 2).

У загальному випадку для $n \geq 1$ виходів базу правил нечіткої моделі визначимо таким чином:

$$R^1 : \text{якщо } x_1 = \tilde{F}_1^1 \text{ I } \dots \text{ I } x_p = \tilde{F}_p^1, \text{ то } y_1 = G_1^1, \dots, y_n = G_n^1;$$

$$R^l : \text{якщо } x_1 = \tilde{F}_1^l \text{ I } \dots \text{ I } x_p = \tilde{F}_p^l, \text{ то } y_1 = G_1^l, \dots, y_n = G_n^l;$$

$$R^M : \text{якщо } x_1 = \tilde{F}_1^M \text{ I } \dots \text{ I } x_p = \tilde{F}_p^M, \text{ то } y_1 = G_1^M, \dots, y_n = G_n^M,$$

де \tilde{F}_k^l , $k=1, \dots, p$, $l=1, \dots, m$ — інтервальна нечітка множина типу 2 k -го антецедента l -го правила; G_k^l , $k=1, \dots, n$, $l=1, \dots, M$, — інтервальна множина типу 1 k -го консеквента l -го правила, яка визначається крайньою лівою $y_{kl}^{G^l}$ та крайньою правою $y_{kr}^{G^l}$ точками: $G_k^l = [y_{kl}^{G^l}; y_{kr}^{G^l}]$; M — число правил.

Для опису інтервальних нечітких множин типу 2 термів лінгвістичних змінних використаємо гаусові первинні функції належності зі сталим центром та невизначеним відхиленням.

Гаусова первинна функція належності зі сталим центром і невизначеним відхиленням $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_u]$ задається як

$$\mu_A(x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{[\sigma_1, \sigma_2]} \right)^2} \quad (2)$$

Графік гаусової первинної функції належності зі сталим центром і невизначеним відхиленням (2) зображено на рис. 2.

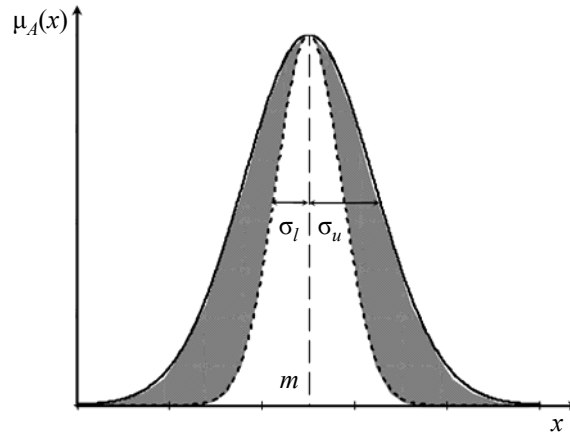


Рис. 2. Гаусова первинна функція належності зі сталим центром і невизначеним відхиленням

Для обчислення вихідних нечітких множин правил використаємо t -норму мінімуму. Тоді вихідна множина правила R^l визначиться за формулою

$$\mu_{\tilde{B}^l}(y_k) = \int_{b^l} 1/b^l, \quad b^l \in [\underline{f}^l * \mu_{G^l}(y_k), \bar{f}^l * \mu_{G^l}(y_k)],$$

де $*$ — оператор t -норми; \underline{f}^l і \bar{f}^l — нижня і верхня границі інтервалу активізації $[\underline{f}^l, \bar{f}^l]$, які визначаються такими формулами:

$$\underline{f}^l = \frac{p}{T} \mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k); \quad \bar{f}^l = \frac{p}{T} \bar{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k),$$

де $\mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k)$ і $\bar{\mu}_{\tilde{F}_k^l}(x_k)$ — нижній та верхній ступені належності $\mu_{\tilde{F}_k^l}(x_k)$.

Вихідні нечіткі множини правил \tilde{B}^l без об'єднання в єдину множину будемо відразу подавати на блок зниження типу нечіткої моделі.

Зниження типу вихідних інтервальних нечітких множин типу 2 до інтервальних типу 1 виконуватимемо методом центра множин, що виражається формулою

$$Y_k(x) = [y_{kl}, y_{kr}] = \int_{y_{kl}^{G^1}, y_{kr}^{G^1}} \dots \int_{y_{kl}^{G^M}, y_{kr}^{G^M}} \int_{\underline{f}^1, \bar{f}^1} \dots \int_{\underline{f}^M, \bar{f}^M} 1 / \frac{\sum_{l=1}^M f^l y_k^l}{\sum_{l=1}^M f^l},$$

де $Y_k(x)$, $k=1, \dots, n$, — інтервальна множина, що визначається крайніми точками y_{kl} і y_{kr} .

Для обчислення крайніх точок y_{ki} і y_{kr} використовуємо алгоритм Карніка–Менделя [4] (інтервальний вихід).

МЕТОД ПОБУДОВИ МНОЖИНИ НЕЧІТКИХ МОДЕЛЕЙ ТИПУ 2 З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ НАЛЕЖНОСТІ, ЯКІ МАЮТЬ МОЖЛИВІСТЬ УЗАГАЛЬНЕННЯ І АДЕКВАТНІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМ ДАНИМ

Теоретичні передумови. Для реалізації методу задається вибірка експериментальних даних. Наступним кроком є пряме генерування нечітких моделей типу 2 з інтервальними функціями належності з експериментальних даних. Наведемо його основні етапи.

Нехай є експериментальна вибірка X :

$$X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

де $X_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}, y_i)$, $i = 1, \dots, n$; n — кількість експериментальних прикладів; k — кількість вхідних змінних; y — вихідна величина.

Виконуємо генерування звичайної нечіткої моделі на основі експериментальної вибірки X . Для цього використовуємо підхід до побудови нечітких моделей, коли нечітка модель будується на основі експериментальних даних, що визначають центри нечітких множин антецедентів та консеквентів правил. У ролі функції належності для вхідних змінних обираємо модифіковану гаусову функцію належності, більш детальний опис якої подано вище.

Генерація множини нечітких моделей. Кількість нечітких моделей, які генеруються, залежить від думки незалежних експертів на необхідні зміни у вихідних даних та від наявності доступних експериментальних даних. Далі буде описано дії кожного експерта з групи незалежних експертів.

За визначенням експерта коригуємо вхідний вектор та експериментальну вибірку. Перетворення вибірки здійснюється за допомогою алгоритму, який враховує неповноту експериментальних даних [12]. За цим алгоритмом процедура коригування поєднується з побудовою інтервальної нечіткої моделі. А саме, з початкової експериментальної вибірки видаляються стовпці зі значеннями змінних, які, на думку експерта, є неважливими для розв'язання задачі; на перетвореній вибірці генерується нова нечітка модель. Таким чином, відбувається генерація множини інтервальних нечітких моделей, кожна з яких відображає предметну галузь з урахуванням думки експерта.

Перехід до процедури узагальнення інтервальних виходів нечітких моделей та визначення кінцевого виходу. Процедура узагальнення може мати декілька варіантів отримання кінцевого результату. Найбільш бажаний — це наявність перетину у виходах інтервальних нечітких моделей. Тоді розв'язок майже очевидний і в більшості випадків становить перетин виходів часткових моделей. Розглянемо найгірший випадок — відсутність

перетину у виходах нечітких моделей. Цей випадок вказує на наявність моделі, що не є адекватною предметній галузі; його зображено на рис. 3. Виникає потреба у формуванні кінцевого інтервалу, який буде узагальнювати роботу множини інтервальних нечітких моделей.

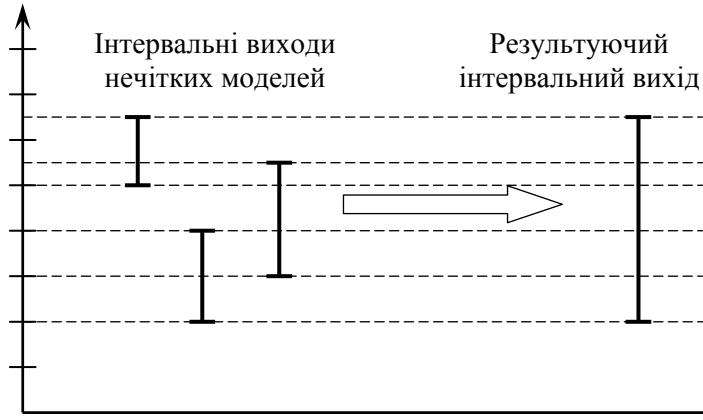


Рис. 3. Приклад обчислення результуючого інтервального виходу у випадку, коли перетину інтервальних виходів окремих моделей не існує

Запропонуємо процедуру узагальнення інтервальних виходів. Рішення про ширину результуючого інтервалу прийматиметься з урахуванням думки експерта залежно від задачі, що розв'язується за допомогою нечіткого моделювання. Уведемо відповідні позначення:

Y^Σ — результуючий інтервальний вихід множини нечітких моделей;

$Y^\Sigma = [y_l^\Sigma, y_r^\Sigma]$ — межі результуючого інтервального виходу моделі;

$\bigcap_{i=1}^l Y^{inm}$ — перетин інтервальних виходів нечітких моделей Y^{inm} ,
 $i = 1, \dots, t$;

$\bigcup_{i=1}^l Y^{inm}$ — об'єднання інтервальних виходів нечітких моделей Y^{inm} ,
 $i = 1, \dots, t$.

Правило узагальнення: якщо перетин інтервальних моделей існує $\bigcap_{i=1}^l Y^{inm} \neq \emptyset$, то результуючим інтервальним виходом є цей перетин

$Y^\Sigma = \bigcap_{i=1}^l Y^{inm}$; інакше результуючим інтервальним виходом є об'єднання ін-

тервальних виходів нечітких моделей: $Y^\Sigma = \bigcup_{i=1}^l Y^{inm}$. Цей результат може ко-

ригуватися за допомогою перетину з інтервальним виходом моделі, що є найбільш вагомою за думкою експерта або має найбільшу кількість вхідних

змінних, а саме: $Y^\Sigma = \bigcup_{i=1}^l Y^{inm} \cap Y^{enm}$, де Y^{enm} — інтервальний вихід нечіткої

моделі, яку вибрав експерт як більш вагому.

ПРИКЛАД ПРАКТИЧНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ЗАПРОПОНОВАНОГО МЕТОДУ

Покажемо роботу запропонованого методу в задачі оцінювання стану артезіанської свердловини. Свердловина як складна природна система характеризується значною надлишковістю простору параметрів. На її стан та потенційні експлуатаційні характеристики безпосередньо або опосередковано впливає велика кількість природних та антропогенних чинників. Спроби врахувати та математично описати їх вплив на загальний стан досліджуваної системи і породжують надлишковість.

Відповідно до запропонованого методу множину вхідних змінних скорочено шляхом залучення декількох експертів, у результаті чого отримано такі моделі:

- M_{E1} — модель, згенерована на основі набору ознак, виділеного з основного набору першим експертом (10 ознак з 24);
- M_{E2} — модель, згенерована на основі набору ознак, виділеного з основного набору другим експертом (11 ознак з 24);
- M_{E3} — модель, згенерована на основі набору ознак, виділеного з основного набору третім експертом (12 ознак з 24);
- M_{Π} — модель, згенерована на основі повного набору ознак.

Результати застосування методу, отримані на тестовому наборі даних, наведено в таблиці. Виходом методу є інтервальне та лінгвістичне значення змінної «перспективність артезіанської свердловини для подальших досліджень та експлуатації», що оцінюється за шкалою від 0 до 10, а також лінгвістичними термами «Висока» (В), «Достатня» (Д), «Недостатня» (Н).

Результати застосування методу

Шкала	M_{E1}	M_{E2}	M_{E3}	M_{Π}	Вихід методу	Оцінка експерта
1	[0; 0,02]	[0; 0]	[0; 0,01]	[0; 2,64]	[0; 0] – Н	1 / Н
2	[2,42; 3,44]	[3,11; 3,76]	[1,17; 1,68]	[0,08; 2,81]	[1,17; 1,68] – Н	1 / Н
3	[6,72; 6,99]	[6,8; 6,82]	[6,43; 6,65]	[0,46; 5,81]	[6,43; 6,65] – Д	2 / Н
4	[5,56; 5,6]	[5,61; 5,62]	[5,53; 5,56]	[4,91; 6,48]	[5,53; 5,56] – Д	6 / Д
5	[5,11; 5,42]	[4,78; 5,22]	[5,83; 6,02]	[3,9; 5,71]	[5,83; 6,02] – Д	6 / Д
6	[6,82; 7,3]	[7,75; 7,85]	[6,25; 6,62]	[5,08; 7,82]	[6,25; 6,62] – Д	5 / Д
7	[5,84; 6,24]	[6,96; 7]	[6,04; 6,21]	[0,82; 7,61]	[6,04; 6,21] – Д	6 / Д
8	[7,93; 8,12]	[8,17; 8,24]	[9,98; 9,99]	[9,92; 10]	[9,98; 9,99] – В	8 / В
9	[7,94; 8,07]	[8,36; 8,39]	[9,7; 9,81]	[9,89; 9,94]	[9,7; 9,81] – В	9 / В
10	[9,1; 9,54]	[9,21; 9,29]	[9,66; 9,83]	[9,89; 9,98]	[9,66; 9,83] – В	9 / В

Так, для першого зразка тестової вибірки вихід методу Y^{Σ} визначається як $Y^{\Sigma} = \bigcap_{i=1}^l Y^{imm} = [0; 0,02] \cap [0; 0] \cap [0; 0,01] = [0; 0] \neq \emptyset$. Для зразка 2

перетину $\bigcap_{i=1}^N Y^{imm}$ не існує: $Y^{\Sigma} = \bigcap_{i=1}^l Y^{imm} = [2,42; 3,44] \cap [3,11; 3,76] \cap$

$\cap [1,17;1,68] = \emptyset$, тому визначальну роль відіграє вихід моделі M_3 :

$Y^\Sigma = \bigcup_{i=1}^l Y^{imm} \cap Y^{M_3} = Y^{M_3} = [1,17;1,68]$. Зразок 3 являє собою особливий випадок.

Вихід методу, отриманий як перетин виходів усіх трьох моделей $\bigcap_{i=1}^l Y^{imm}$, не збігається з оцінкою експерта-гідрогеолога, запропонованою для цієї свердловини. Така розбіжність свідчить про недосконалість множини моделей, що беруться до розгляду. Цей результат вказує на існування змінної, що не входить до вихідного набору ознак жодної з трьох розглянутих часткових моделей. Усунути цей недолік можна, розширивши множину використовуваних моделей.

Оцінюючи адекватність отриманих результатів на тестовому наборі даних, за винятком зразка 3, дістаємо значення $MAE = 1,99$ і $RMSE = 0,97$, у той час, як для моделі на основі повного набору даних вони становлять $MAE = 1,96$; $RMSE = 1,19$. З урахуванням зразка 3 ці оцінки становлять $MAE = 4,45$ та $RMSE = 1,71$ для запропонованого методу та $MAE = 1,96$; $RMSE = 1,18$ для виходу моделі на основі повного набору ознак.

Якщо ж оцінювати ширину інтервалу значення, отриманого на виході, то в результаті застосування запропонованого методу інтервал зменшується в середньому на понад 90% (0,17 на виході методу проти 2,1 на виході моделі M_{II} без урахування x_3 ; 0,18 проти 2,39 з урахуванням x_3). Таким чином, за умови правильного вибору множини моделей запропонований метод дає змогу суттєво зменшити значення умовної ентропії у виразі (1). За рахунок побудови множини інтервальних нечітких моделей і введення процедури узагальнення їх виходів вдасться отримати прийнятні для цієї галузі розв'язки.

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ

Дослідження результатів роботи запропонованого методу показують, що модель, побудована на повному наборі вхідних змінних, дає досить широкий інтервал значень вихідної змінної внаслідок надлишковості множини вхідних ознак. Водночас за умови правильного вибору множини моделей запропонований метод дає змогу істотно зменшити значення умовної ентропії і таким чином скоротити ширину інтервалу отриманого значення, або ж зробити висновок про доцільність доповнення вхідного вектора.

Проведена робота є продовженням досліджень адекватності нечіткої логічної системи в працях [10, 11].

ВИСНОВКИ

Запропоновано метод побудови множини нечітких моделей типу 2 з інтервальними функціями належності, які мають можливість узагальнення кінцевих результатів та адекватні експериментальні дані. Наведено процедуру узагальнення виходів інтервальних нечітких моделей залежно від отриманих інтервальних виходів моделей з урахуванням думки експерта.

Проведено дослідження адекватності побудованих нечітких моделей типу 2 для задач ідентифікації складних об'єктів.

Робота надає обґрунтування доцільності використання нечітких множин типу 2 в математичних моделях, що оперують недовизначеними входними даними. Обґрунтування виконано теоретично з позицій теорії інформації та підтверджено експериментально.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Liang Q.* Interval Type-2 fuzzy logic systems: theory and design / Q. Liang, J.M. Mendel // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2000. — Vol. 8. — P. 535–550.
2. *Зайченко Ю.П.* Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах / Ю.П. Зайченко. — К.: Издат. дом «Слово», 2008. — 344 с.
3. *Mendel J.M.* Interval Type-2 Fuzzy logic systems made simple / J.M. Mendel, R.I. John // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. — 2006. — Vol. 14, N 6. — P. 808–821.
4. *Кондратенко Н.Р.* Генетичне настроювання нечіткої моделі в задачі діагностики гіпотиреозу / Н.Р. Кондратенко, С.М. Куземко // Вісник ВПІ. — 2003. — №6. — С.278–283.
5. *Кондратенко Н.Р.* Інтервальні нечіткі моделі типу-2 в задачах ідентифікації об'єктів з багатьма входами та виходами / Н.Р. Кондратенко, О.В. Чеборака, О.А. Ткачук // Системи обробки інформації. — 2011. — № 3(93). — С. 48–52.
6. *Saima H.* ARIMA based Interval Type-2 Model for Forecasting / H. Saima, J. Jaafar, S. Belhaouari, T.A. Jillani // International Journal of Computer Applications. — 2011. — Vol. 28, N 3. — P. 17–21.
7. *Khanesar M.A.* Extended Kalman Filter Based Learning Algorithm for Type-2 Fuzzy Logic Systems and its Experimental Evaluation / M.A. Khanesar, E. Kayacan, M. Teshnehlab, O. Kaynak // IEEE Transactions on Industrial Electronic. — 2012. — Vol. 59, N 11. — P. 4443–4455.
8. *Melin P.* An intelligence hybrid approach for industrial quality control combining neural networks, fuzzy logic and fractal theory / P. Melin, O. Castillo // Information Sciences. — 2007. — Vol. 147, N. 177. — P. 1543–1557.
9. *Кондратенко Н.Р.* Дослідження можливостей узагальнювальної інтервальної типу-2 нечіткої моделі для прогнозування часових послідовностей / Н.Р. Кондратенко, О.В. Чеборака // Вісник ВПІ. — 2008. — №6. — С. 22–27.
10. *Kondratenko N.* Interval Fuzzy Modeling of Complex Systems under Conditions of Input Data Uncertainty / N. Kondratenko, O. Snihur // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. — 2016. — Vol. 4/4 (82). — P. 20–28.
11. *Кондратенко Н.Р.* Підвищення адекватності нечітких моделей за рахунок використання нечітких множин типу 2 / Н.Р. Кондратенко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2014. — № 6. — С. 56–61.
12. *Кондратенко Н.Р.* Нечіткі логічні системи з врахуванням пропусків в експериментальних даних / Н.Р. Кондратенко, Н.Б. Зелінська, С.М. Куземко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2004. — № 5. — С. 37–41.

Надійшла 16.10.2019

ІГРОВІ СТРАТЕГІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ. II. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ

П.О. КРАВЕЦЬ

Анотація. Розроблено алгоритм розв'язування стохастичної гри для прийняття рішень в ієрархічних системах в умовах невизначеності. Виконано аналіз результатів комп'ютерного моделювання стохастичної гри для автократичної, анархічної та демократичної систем прийняття рішень зі структурою бінарного дерева. Установлено, що найменший період навчання для досягнення близького до консенсусного рішення мають автократично-центричні ієрархічні системи. Вивчено вплив параметрів на збіжність ігрового методу у процесі пошуку консенсусного або мажоритарного колективного рішення.

Ключові слова: прийняття рішень, ієрархічна система, умови невизначеності, стохастична гра, комп'ютерне моделювання.

ВСТУП

Ієрархічна система прийняття рішень — це багаторівнева система з розміщенням елементів від вищого до нижчого рангу [1–4]. У такій організаційній структурі можна виокремити елементи вищого, середнього та нижчого рівнів. Елементи одного рівня зазвичай мають однаковий ранг або однакові можливості щодо прийняття рішень.

Елементи найвищого рівня генерують керувальні рішення для елементів нижчого рівня. Елементи середнього рівня на основі рішень, надісланих від елементів вищого рівня, виробляють власні рішення для елементів нижчого рівня. Рішення елементів найнижчого рівня спрямовані на виконання конкретних робіт.

Для дослідження ієрархічних систем прийняття рішень в основному використовують методи теорії ігор — некоаліційних або коаліційних, детермінованих або стохастичних, дискретних або диференціальних, у нормальній формі (з одночасним вибором варіантів дій) або ієрархічних ігор (з правом першого ходу) [3–8]. Залежно від постановки завдання досліджуються стратегії прийняття рішень, які забезпечують досягнення класичних колективних розв'язків, оптимальних за Нешем, Парето, Слейтером, Джофріоном, Байесом, Штакельбергом або інших [9, 10]. Серед різноманіття ігрових задач виділимо підклас стохастичних ігор у нормальній формі, які дають можливість знаходити колективні розв'язки гри в умовах стохастичної невизначеності матриць платежів [8].

Гравець є активною інформаційною сутністю, здатною взаємодіяти з іншими гравцями, навчатися і приймати самостійні рішення на основі опрацювання поточних даних. Використовуючи термінологію мультиагентних систем [11–15], таку активну сутність назовемо агентом прийняття рішень.

Оскільки прийняття рішень в ієрархічній системі спрямоване на колективне розв'язування конкретного завдання, то дії агентів повинні бути скоординованими. Координація — це узгодження дій агентів системи прийняття рішень з метою досягнення поставлених цілей. Координація здійснюється шляхом виконання керівних рішень або через домовленості між елементами системи [13, 14]. У цій роботі розглядаються обидва варіанти: 1) рішення вважається сформованим, якщо у ході стохастичної гри більшість агентів вибрали стратегії, що збігаються з наперед заданою керівною стратегією; 2) агенти приймають скоординоване колективне рішення у ході взаємодії і самонавчання.

Поряд з теоретичним дослідженням систем прийняття рішень важливим є розроблення комп'ютерних засобів моделювання для апробації та доповнення теоретичних результатів на практиці.

Комп'ютерне моделювання ієрархічних систем прийняття рішень є актуальною прикладною проблемою, вирішення якої дозволяє уточнити результати теоретичного оцінювання умов збіжності методів прийняття рішень у конкретних практичних ситуаціях.

Практичні проблеми прийняття рішень в ієрархічних системах досліджуються спеціалістами з багатьох предметних галузей, пов'язаних з колективною поведінкою та колективною взаємодією. Для цього використовують або готові інструментальні засоби, або спеціально розроблені програмні продукти, коли необхідно врахувати певні особливості постановки завдання колективного прийняття рішень [15–17].

Мета роботи — розроблення алгоритмічних та програмних засобів моделювання стохастичних ігор у нормальній формі для координації рішень в ієрархічних системах та визначення факторів, які впливають на збіжність ігрового методу в умовах стохастичної невизначеності.

Результати роботи можуть бути використані для підтримання прийняття скоординованих колективних рішень у системах з ієрархічною організацією.

ІЄРАРХІЧНІ СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Нехай платежі ігрових агентів ієрархічної системи є функцією власних стратегій, стратегій агентів вищого і нижчого рівнів, зважених коефіцієнтом $\lambda \in [0,1]$. Значення коефіцієнта визначає ступінь впливу стратегій сусідніх агентів на формування платежів кожного агента i , відповідно, напрямки потоків інформації між рівнями ієрархії системи прийняття рішень. Відхилення від стратегії агента-керівника враховується з коефіцієнтом λ , а відхилення від стратегій агентів-виконавців — з коефіцієнтом $1 - \lambda$. Залежно від значень цього коефіцієнта отримаємо різні види ієрархічних систем:

$\lambda = 1$ — автократична;

$\lambda = 0$ — анархічна;

$0 < \lambda < 1$ — множина демократичних систем.

Назви ієрархічних систем є умовними, а їх інтерпретація у цій роботі не замінює їх відомі трактування.

В автократичній системі агенти нижчого рівня беруть до виконання вказівні рішення агента вищого рівня. Поток керування спрямований згори вниз. Ієрархію анархічної системи слід розуміти як делегування повноважень на вищі рівні від самоорганізованих спільнот агентів найнижчого рівня. Поток інформації в анархічній системі спрямований знизу вгору. У демократичних системах на вироблення рішень впливають потоки інформації як згори вниз, так і знизу вгору.

Експериментальне дослідження ігрового методу прийняття рішень виконаємо для стохастичної гри зі структурою бінарного дерева. Симетричне бінарне дерево складається з $L = 2^m - 1$ вузлів, де m — кількість рівнів ієрархічної системи прийняття рішень ($m = 1, 2, \dots$). Вузли дерева позначають гравців, а дуги — їх стратегії, які впливають на формування поточних програвів гравців. Нехай поточні втрати гравців визначаються власними стратегіями та стратегіями сусідніх гравців так, як це показано на рис. 1, що відповідає структурі демократичної системи з параметром $0 < \lambda < 1$.

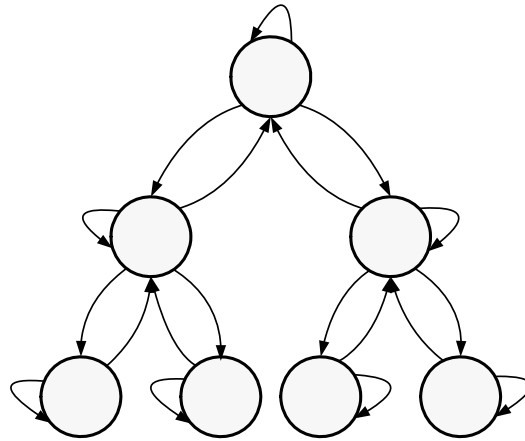


Рис. 1. Структура демократичної системи

Для граничних значень параметра $\lambda = 1$ та $\lambda = 0$ зі структури демократичної системи відповідно отримаємо структури автократичної та анархічної систем прийняття рішень, зображені на рис. 2–5.

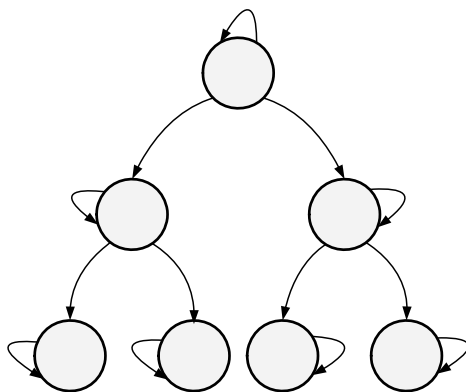


Рис. 2. Структура автократичної системи

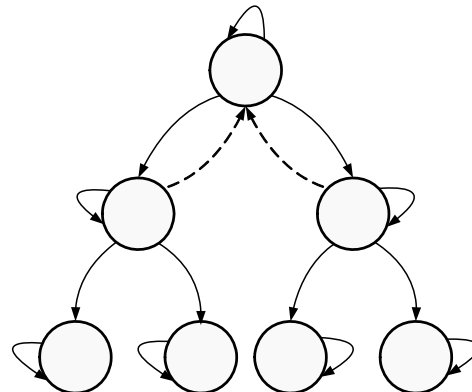


Рис. 3. Структура автократичної системи з колегальним центром

Поведінка гравця найвищого рівня в автократичній системі, зображеній на рис. 2, є вільною від впливу стратегій інших гравців. Якщо кореневий гравець вибирає власні стратегії $u_n^{\text{root}} \in U^{\text{root}}$ за деяким дискретним розподілом $p^{\text{root}} \in S^{N_{\text{root}}}$, то його стратегія змінюється у часі: $u_n^{\text{root}} = \text{var}$, $n=1,2,\dots$. Чим ближче розподіл p^{root} до рівномірного вибору чистих стратегій, тим більше кореневий гравець дезорієнтує гравців нижчих рівнів. У результаті вихід системи на узгоджене колективне рішення є проблематичним або неможливим.

Можливі такі два працездатні способи формування чистих стратегій цього гравця, які забезпечують координацію автократичної системи. Перший спосіб полягає в тому, що стратегії кореневого гравця є постійними $u_n^{\text{root}} = u^{\text{root}} = \text{const}$ у часі $n=1,2,\dots$. У цьому випадку маємо *автократичну систему з догматичним центром*. Другий спосіб відповідає структурі *автократичної системи з колегіальним центром*, як це показано на рис. 3. У цьому випадку на формування втрат кореневого гравця впливають власні стратегії та стратегії хоча б одного із гравців нижчого рівня.

Аналогічно, якщо гравці найнижчого рівня анархічної системи обирають власні стратегії $u_n^i \in U^i$ з дискретними розподілами $p^i \in S^{N_i}$ (рис. 4), то вони генеруватимуть змінні стратегії $u_n^i = \text{var}$ поведінки у часі і з близькою до 1 імовірністю система не зможе досягнути скоординованого консенсусного (вирівнювального) рішення.

Для того щоб анархічна система вийшла на узгоджене рішення, можна скористатися одним із двох способів. Перший полягає у тому, що всі гравці найнижчого рівня, попередньо домовившись, дотримуються однакових стратегій поведінки $u_n^i = u = \text{const}$ у часі. У цьому випадку маємо *анархічну систему з догматичною спільнотою*. Другий спосіб полягає у тому, що гравці найнижчого рівня об'єднуються у спільноту і їх поточні втрати визначаються як власними стратегіями, так і стратегіями інших гравців спільноти. У цьому випадку (рис. 5) маємо *анархічну систему з горизонтальними зв'язками* на найнижчому рівні (з *організованою спільнотою*). Для працездатності такої анархічної системи повинен існувати циклічний шлях залежностей платіжних функцій від стратегій гравців, яким можна обійти усі елементи найнижчого рівня. Тоді однакові стратегії дерева агентів будуть формуватися динамічно в часі, у процесі навчання гравців.

Розглянуті ієрархічні системи є *активними* системами прийняття рішень, оскільки агенти не просто транслюють рішення між рівнями ієрархії, а мають власні стратегії поведінки.

Крім того, ієрархічні системи є системами з *розподіленням* (або колективним) прийняттям рішень, виходячи з того, що вони складаються з організованої за рангами множини автономних агентів (ураховано структурний аспект).

Якщо у процесі навчання (вироблення рішень) розподілена система прагне вийти на рішення центру, то вона є *централізованою*. Рішення центру відоме до початку гри і не змінюється у ході гри. Центром може бути

один агент або група агентів з наперед узгодженим рішенням. Якщо ж у процесі навчання розподілена система формує узгоджене колективне рішення, яке не відоме до початку гри, то вона є *децентралізованою* (ураховано функціональний аспект).

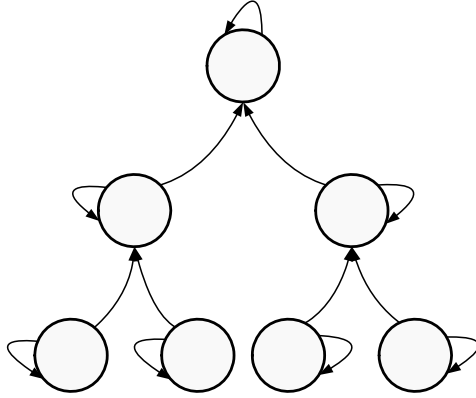


Рис. 4. Структура анархічної системи

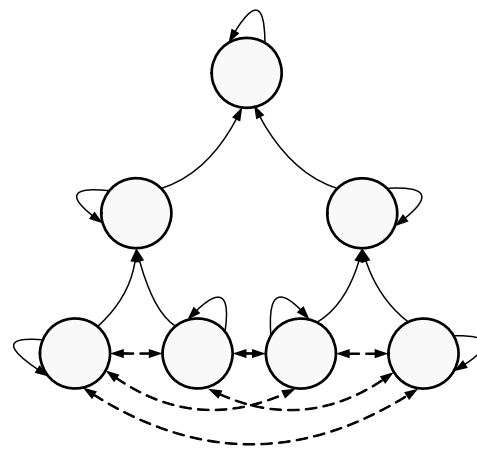


Рис. 5. Структура анархічної системи з горизонтальними зв'язками

Із цих міркувань догматична автократична система є централізованою (з потоками керівних рішень згори вниз), автократична система з колегіальним центром — децентралізованою, анархічна система з догматичною спільнотою — централізованою (знизу вгору), анархічна система з горизонтальними зв'язками — децентралізованою, демократичні системи є децентралізованими.

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ГРИ

Крок 1. Задати початкові значення параметрів гри: $n=0$ — початковий момент часу; D — множина (дерево) гравців; $L=|D|$ — потужність множини (кількість) гравців; N_i — кількості чистих стратегій гравців $\forall i \in D$; $U^i = \{u^i(1), u^i(2), \dots, u^i(N_i)\}$ $\forall i \in D$ — вектори чистих стратегій гравців; $p_0^i = (1/N_i, \dots, 1/N_i)$ $\forall i \in D$ — змішані стратегії гравців; $\gamma > 0$ — параметр кроку навчання; $\alpha \in (0, 1]$ — порядок кроку навчання; $\varepsilon > 0$ — параметр ε -симплексу; $\beta > 0$ — порядок швидкості розширення ε -симплексу; $\lambda \in [0, 1]$ — ваговий коефіцієнт поточних програшів; n_{\max} — максимальна кількість кроків стохастичної гри.

Крок 2. Вибрати поточні чисті стратегії:

$$u_n^i = \left\{ u^i(j) \mid j = \arg \min_j \sum_{k=1}^j p_n^i(k) > \omega \ (j=1..N_i) \right\} \quad \forall i \in D,$$

де $\omega \in [0, 1]$ — випадкова величина з рівномірним розподілом.

Крок 3. Отримати значення поточних програшів:

$$\xi_n^i(u_n^{D_i}) = |D_i|^{-1} \left(\lambda |u_n^i - u_n^k| + (1-\lambda) \sum_{j \in D_i \setminus \{k\}} |u_n^i - u_n^j| \right) + \mu_n \quad \forall i \in D,$$

де D_i — множина сусідніх гравців i -го гравця; $u_n^{D_i} \in U^{D_i} = \times_{j \in D_i} U^j$ — колек-

тивна стратегія множини гравців D_i ; $u_n^i \in R^1$ — числовий еквівалент варіанта рішення; k — гравець вищого рівня (керівник); i — гравець середнього рівня; j — гравець нижчого рівня; $\mu_n \sim Normal(0, d)$ — білий гауссівський шум з дисперсією $d \geq 0$; $\lambda \in [0, 1]$ — ваговий коефіцієнт. Для кореневого гравця $\lambda = 0$, а для гравців найнижчого рівня $\lambda = 1$.

Крок 4. Обчислити значення параметрів:

$$\gamma_n = \gamma n^{-\alpha}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon n^{-\beta},$$

де $\gamma_n > 0$ — монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює величину кроку методу; $\varepsilon_n > 0$ — монотонно спадна послідовність додатних величин, яка регулює швидкість розширення ε -симплексу.

Крок 5. Визначити нові значення векторів змішаних стратегій:

$$p_{n+1}^i = \pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \{p_n^i - \gamma_n \xi_n^i [e(u_n^i) - p_n^i]\} \quad \forall i \in D,$$

де $\pi_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i}$ — проектор на одиничний ε -симплекс $S_{\varepsilon_{n+1}}^{N_i} \subseteq S^{N_i}$ [18]; $p_n^i \in S_{\varepsilon_n}^{N_i}$ — змішані стратегії i -го гравця; $\xi_n^i \in R^1$ — поточний програш гравця; $e(u_n^i)$ — одиничний вектор-індикатор вибору варіанта $u_n^i \in U^i$.

Крок 6. Розрахувати характеристики якості ігрового прийняття рішень:

1) функція усереднених у часі втрат системи:

$$\Xi_n = (nL)^{-1} \sum_{t=1}^n \sum_{i \in D} \xi_t^i;$$

2) коефіцієнт узгоджених рішень гравців:

$$K_n = (nL)^{-1} \sum_{t=1}^n \sum_{i \in D} \chi \left(\sum_{s \in D_i} |u_t^i - u_t^s| = 0 \right),$$

де $\chi(\cdot) \in \{0, 1\}$ — індикаторна функція події;

3) середня похибка відхилення змішаних стратегій гравців від змішаної стратегії гравця-керівника найвищого рівня:

$$\Delta_n = (nL)^{-1} \sum_{t=1}^n \sum_{i \in D} \|p_{i,t} - p_{\text{root},t}\|,$$

де $\|\cdot\|$ — евклідова норма вектора.

Крок 7. Задати наступний момент часу $n := n + 1$.

Крок 8. Якщо $n < n_{\text{max}}$, то перейти до кроку 2, інакше — кінець гри.

РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Результати комп'ютерного моделювання процесу ігрового прийняття рішень в ієрархічних системах зі структурою симетричного бінарного дерева подано у вигляді графіків на рис. 6 – рис. 15. Результати отримано для таких значень параметрів гри: $L = 7$ (для $m = 3$ рівнів ієрархічної системи прийняття рішень), $N_i = N = 4$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0,999/N$, $\alpha = 0,01$, $\beta = 1$, крім випадків, коли вивчається вплив цих параметрів на збіжність ігрового методу. Для компактного зображення результатів моделювання з великим діапазоном значень використано логарифмічну шкалу.

Ураховуючи те, що метою гравців ієрархічної системи є вирівнювання чистих стратегій, їх матриці платежів (програші) задаються так: $[v^i] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \forall i \in D$. Якщо гравцями вибрано однакові стратегії, то їх програш дорівнює 0, інакше — 1.

Для таких матриць платіжні функції

$$\begin{aligned} V^i &= p_1^1 p_1^2 v_{1,1} + p_1^1 p_2^2 v_{1,2} + p_2^1 p_1^2 v_{2,1} + p_2^1 p_2^2 v_{2,2} = \\ &= p_1^1 (1 - p_1^2) + (1 - p_1^1) p_1^2 = p_1^1 + p_1^2 - 2p_1^1 p_1^2 \end{aligned}$$

мають вигляд сідлової поверхні у просторі змішаних стратегій гравців.

На рис. 6 зображені зрізи значень сідлової платіжної функції, отримані з кроком $h = 1/16$, і траєкторія навчання ланки ієрархічної стохастичної гри «керівник – підлеглий», кожен з яких має по два варіанти прийняття рішень (гра 2×2). Показано зрізи платіжної функції без дії завод ($d = 0$) та в умовах дії завод ($d = 0,01$). У вершинах та в центрі квадрата позначено значення платіжної функції для комбінованих стратегій двох гравців.

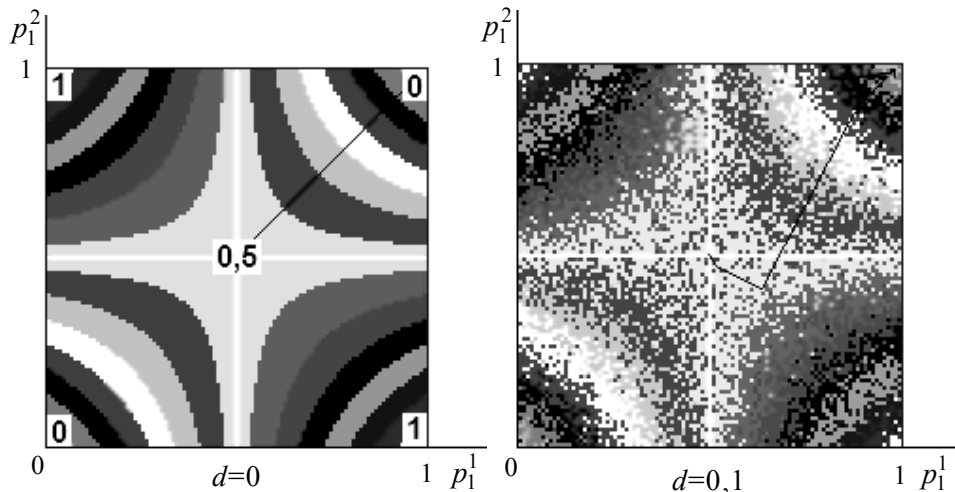


Рис. 6. Проекція зрізів платіжної функції на площину

Гра з вирівнювання стратегій має два стійкі рівноцінні розв'язки у чистих стратегіях, розміщені у вершинах $(0, 0)$ та $(1, 1)$ зі значеннями платіжних

функцій $V^i = 0$, та нестійкий розв'язок у змішаних стратегіях у точці (0,5; 0,5) зі значеннями платіжних функцій $V^i = 0,5$. Для розв'язків у чистих стратегіях справедливі умови рівноваги за Нешем та оптимальності за Парето для гри у нормальній формі, а також умова оптимальності за Штакельбергом для послідовної гри. Розв'язок у змішаних стратегіях задовольняє умову рівноваги за Нешем.

Якщо гравці дотримуються оптимальних стратегій у точці рівноваги за Нешем, то зі зміною стратегії одного з них він не зможе зменшити свій програш (для задачі мінімізації середніх втрат). Оптимальність за Парето впливає з тотожності матриць платежів гравців. У точці оптимальності за Парето не існує спільної стратегії, яка дозволить зменшити середній програш одночасно для всіх гравців. Оптимальність за Штакельбергом визначається за деревом можливих комбінацій чистих стратегій, які мінімізують втрати гравців, з урахуванням попередніх ходів гравців вищих рівнів ієрархії, виходячи із оптимістичної гіпотези про те, що гравці сприяють один одному у виборі ходів гри.

За відсутності дії завад ($d = 0$) пошукова траєкторія стохастичної гри прямує до однієї з точок рівноваги за найкоротшим, близьким до лінійного, шляхом. Дія завад ($d > 0$) призводить до викривлення траєкторії пошуку.

Графіки однієї з реалізацій функцій коефіцієнта скоординованих стратегій K_n , середніх програшів гравців Ξ_n та похибки змішаних стратегій Δ_n , які характеризують ефективність стохастичної гри демократичної ($\lambda = 0,5$) системи прийняття рішень, зображено на рис. 7. Результати отримано для системи без завад ($d = 0$) та в умовах дії завад ($d = 1$). Загальний вигляд та взаємне розташування графіків функцій зберігається у разі повторення експерименту для різних послідовностей випадкових величин. Для автократичної ($\lambda = 1$, з догматичним або колегіальним центром) та анархічної ($\lambda = 0$, з догматичною або організованою спільнотою) систем отримаємо подібні залежності [3, 4].

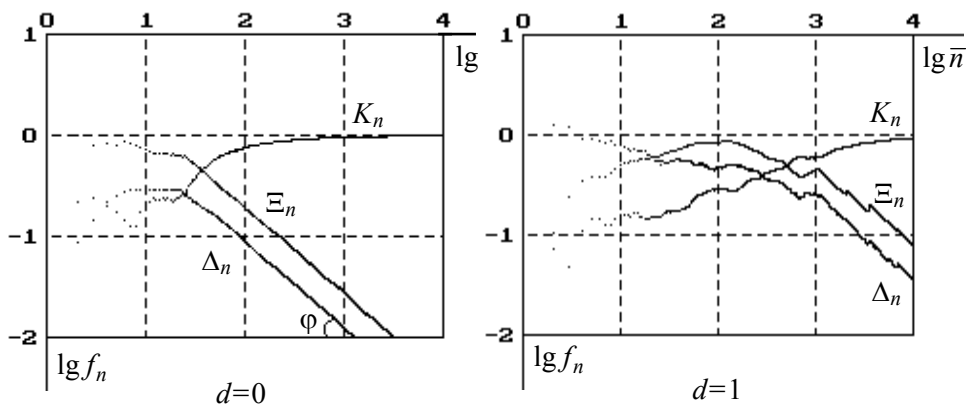


Рис. 7. Характеристики ігрового прийняття рішень в демократичній системі

Спадання функцій Ξ_n , Δ_n та зростання коефіцієнта координації K_n у часі свідчать про збіжність ігрового методу згідно із сформульованою метою. Порядок швидкості збіжності може бути оцінений тангенсом кута φ

лінійної апроксимації графіка норми Δ_n відхилення змішаних стратегій гравців від контрольних значень та вісью часу. Як видно з рис. 7, за відповідного підбору параметрів досягається близький до 1 порядок степеневі швидкості збіжності розглянутої стохастичної гри.

У системах із завадами для збіжності ігрового методу необхідна більша кількість пошукових кроків для досягнення оптимального колективного розв'язку.

Запропонований метод розв'язування ієрархічної стохастичної гри прийняття рішень належить до класу реактивних методів і має відносно невелику швидкість збіжності. Це зумовлено тим, що на початок гри немає ніякої інформації про середовище, з яким взаємодіють гравці. Інформація збирається у процесі навчання шляхом адаптивної перебудови векторів змішаних стратегій пропорційно до значень поточних програшів.

Графіки на рис. 8–15 усереднено за 100 реалізаціями стохастичної гри з різними послідовностями випадкових величин.

Графік залежності періоду \bar{n} навчання гравців вибирати скоординовані рішення з коефіцієнтом $K_n = 0,9$ показано на рис. 8, а залежності коефіцієнта координації K_n на момент $n_{\max} = 10^4$ кроків гри від параметра λ ієрархічної системи — на рис. 9. Значення параметра $0 < \lambda < 1$ відповідає одній з демократичних (див. рис. 1), $\lambda = 1$ — автократичній (рис. 2) і $\lambda = 0$ — анархічній (рис. 3) системам прийняття рішень.

Як видно з рис. 9, близьке до консенсусного рішення отримується для діапазону значень параметра $\lambda \in [0,3; 0,9]$. У цей діапазон потрапляють анархічно-центричні ($0 < \lambda < 0,5$), нейтральна ($\lambda = 0,5$) та автократично-центричні ($0,5 < \lambda < 1$) демократичні системи прийняття рішень.

Аналіз графіка на рис. 8 показує, що анархічно-центричним системам необхідний більший період навчання для прийняття скоординованих рішень, ніж автократично-центричним. Для заданих початкових даних найменший середній час навчання має автократично-центрична система з параметром $\lambda = 0,8$, значення якого вказує на те, що у ході формування колективного рішення стратегії гравців середнього рівня ієрархії на 80% визначаються стратегіями керівника і на 20% стратегіями підлеглих працівників.

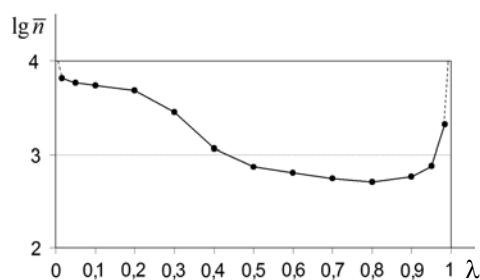


Рис. 8. Залежність періоду навчання гри від параметра λ

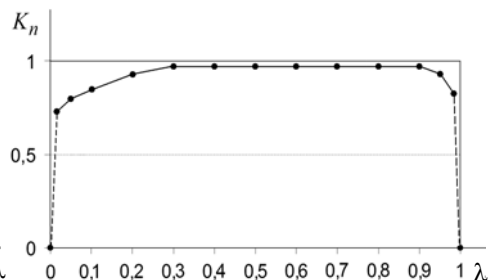


Рис. 9. Залежність коефіцієнта координації від параметра λ

Ігрові моделі автократичної та анархічної систем, отримані з демократичної системи для крайніх значень параметра λ , не забезпечують коорди-

нації стратегій гравців. Для $\lambda = 1$ кореневий гравець, а для $\lambda = 0$ гравці найнижчого рівня є ізольованими від інших гравців і вибирають змінні стратегії: $u_n^{\text{root}} = \text{var}$, $u_n^i = \text{var}$, $n=1,2,\dots$. У результаті це дезорганізує роботу інших агентів відповідно автократичної або анархічної систем прийняття рішень.

Для координації автократичної системи кореневий гравець повинен дотримуватися постійної стратегії $u_n^{\text{root}} = u = \text{const}$ у часі $n=1,2,\dots$. Така стратегія задається ще до початку гри (догматичний центр), або може бути сформована за взаємодії з агентами нижчого рівня у процесі навчання (колегіальний центр).

Аналогічно для координації анархічної системи потрібна попередня домовленість між усіма агентами спільноти найнижчого рівня ієрархії $u_n^i = u = \text{const}$, $n=1,2,\dots$ (догматична спільнота), або наявність горизонтальних зв'язків між агентами спільноти з можливістю навчання агентів у ході гри.

Значний вплив на координацію рішень гравців має розмірність стохастичної гри, яка визначається кількістю гравців та кількістю їх чистих стратегій.

Залежність періоду \bar{n} навчання (середньої кількості кроків гри), необхідного для досягнення коефіцієнта узгоджених рішень $K_n = 0,9$, від кількості агентів $L = 2^m - 1$, організованих у вигляді симетричного бінарного дерева прийняття рішень з $m=1,2,\dots$ рівнями зображено на рис. 10, а від кількості чистих стратегій N для усіх вище розглянутих видів ієрархічних систем прийняття рішень за відсутності дії завад — на рис. 11. Номери графіків відповідають таким ієрархічним системам: 1 — демократична ($\lambda = 0,5$), 2 — догматична автократична, 3 — автократична з колегіальним центром, 4 — анархічна з догматичною спільнотою, 5 — анархічна з горизонтальними зв'язками на найнижчому рівні ієрархії у вигляді повнозв'язного мультиграфу.

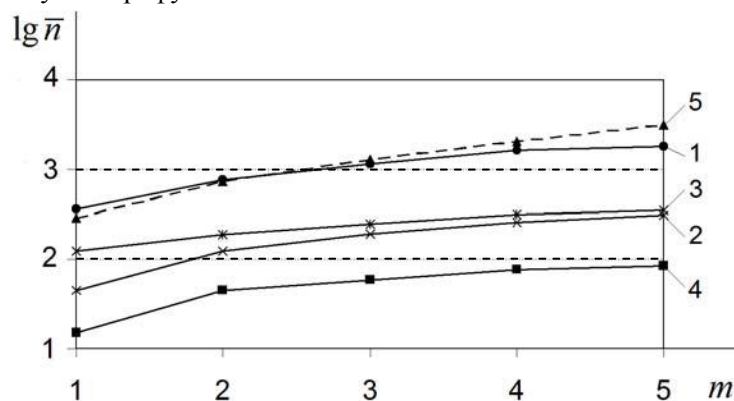


Рис. 10. Залежність періоду навчання гри від кількості агентів

Як видно з рис. 10 та 11, зростання кількості гравців та їх чистих стратегій призводить до збільшення періоду навчання усіх видів ієрархічних стохастичних ігор.

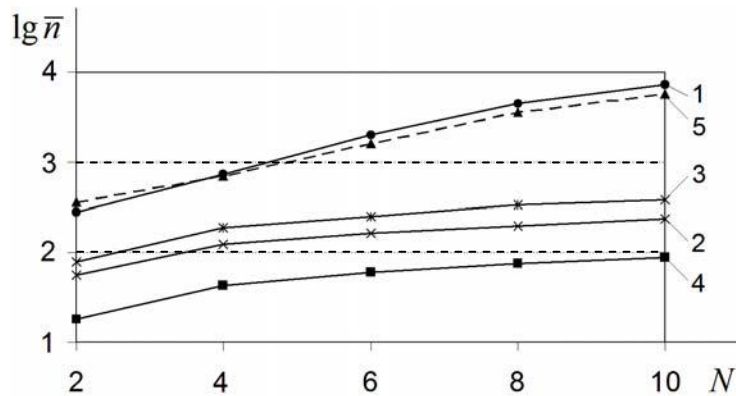


Рис. 11. Залежність періоду навчання гри від кількості стратегій агентів

Час збіжності ігрового процесу прийняття рішень в ієрархічних системах залежить від того, які домовленості прийнято в системі перед початком гри. Чим більше агентів мають початкове узгоджене рішення, тим менший час навчання системи. Те, що анархічна система з догматичною спільнотою (графік 4) має найменший час вироблення рішення (час навчання) визначається початковими умовами — усі 2^{m-1} агентів найнижчого рівня (половина від загальної кількості агентів) мають узгоджені (однакові) рішення ще до початку гри.

Зі збільшенням кількості зв'язків між агентами зростає кількість станів ієрархічної системи, які використовуються для випадкового пошуку оптимальних рішень і, відповідно, зростає час такого пошуку. У зв'язку з цим автократична система (графіки 2 та 3) є ефективнішою від демократичної системи (графік 1), догматична автократична система (графік 2) буде ефективнішою від автократичної системи з колегіальним центром (графік 3), а анархічна система з догматичною спільнотою (графік 4) — ефективнішою від анархічної системи з горизонтальними зв'язками (графік 5) між агентами найнижчого рівня ієрархії.

Період навчання стохастичної гри залежить від коефіцієнта координації $K_n \in (0,1]$, який задає потрібну частку гравців з узгодженими рішеннями. Залежність періоду навчання від коефіцієнта координації для різних видів ієрархічних систем за відсутності дії завад зображено на рис. 12.

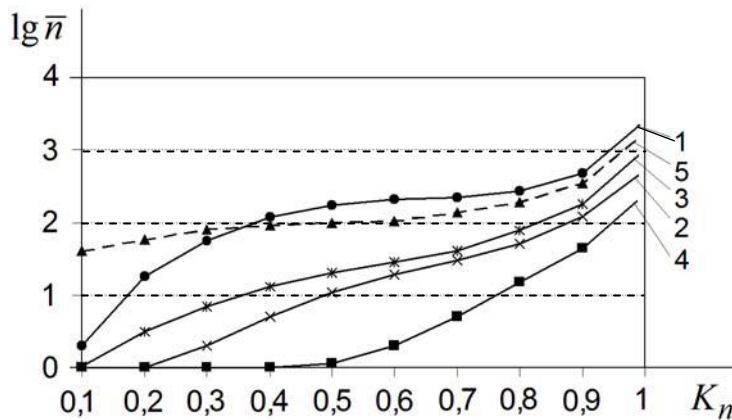


Рис. 12. Залежність періоду навчання гри від коефіцієнта координації

Як видно з рис. 12, зі зростанням вимог до ступеня координації ієрархічних систем зростає період їх навчання, причому зберігається порядок ранжування систем за швидкістю збіжності стохастичної гри так, як це зображено на рис. 10 та 11.

Крім розмірності гри, на швидкість збіжності ігрового методу впливають його параметри α та β , співвідношення яких повинні задовольняти фундаментальні умови стохастичної апроксимації [18–20]. Залежність періоду навчання гри \bar{n} від параметрів α та β зображено на рис. 13, а залежність коефіцієнта координації від цих параметрів — на рис. 14. Результати отримано для демократичної системи з параметром $\lambda = 0,5$ за відсутності завад.

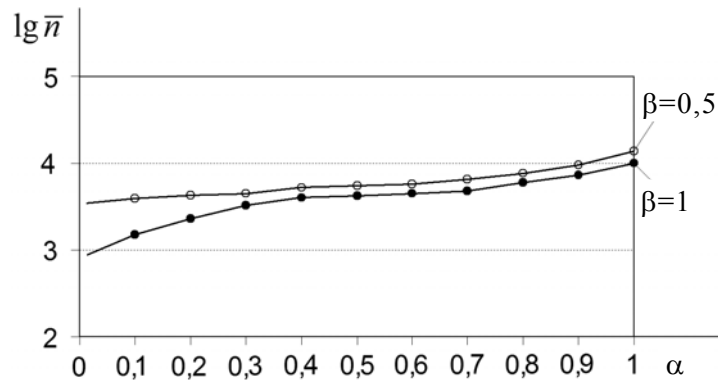


Рис. 13. Залежність періоду навчання гри від параметрів ігрового методу

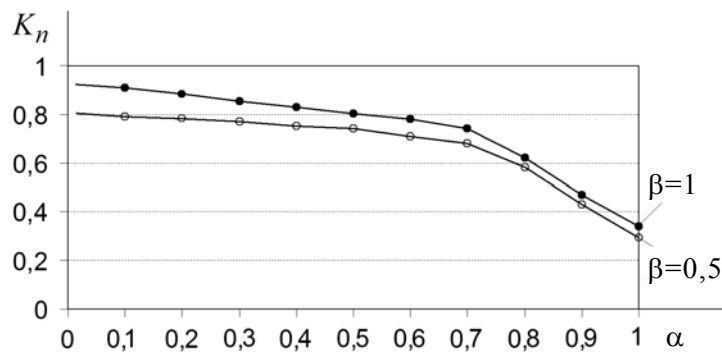


Рис. 14. Залежність коефіцієнта координації від параметрів ігрового методу

Зростання параметра $\alpha \in (0; 1]$ призводить до зменшення кроку навчання стохастичної гри (кроку зміни ймовірностей вибору чистих стратегій). Зменшення параметра $\beta \in (0; 1]$ сповільнює швидкість розширення ε -симплексу, що є додатковим фактором обмеження кроку навчання. Результатом цього є зменшення коефіцієнта координації та збільшення періоду навчання стохастичної гри.

Для заданих параметрів ігрового методу мінімальна кількість кроків навчання стохастичної гри, яка забезпечує координацію понад 90% гравців, досягається для $\alpha \in (0; 0,1]$ та $\beta = 1$.

Вплив випадкових завад у вигляді білого шуму з дисперсією d на період \bar{n} навчання стохастичної гри для різних видів ієрархічних систем зображено на рис. 15.

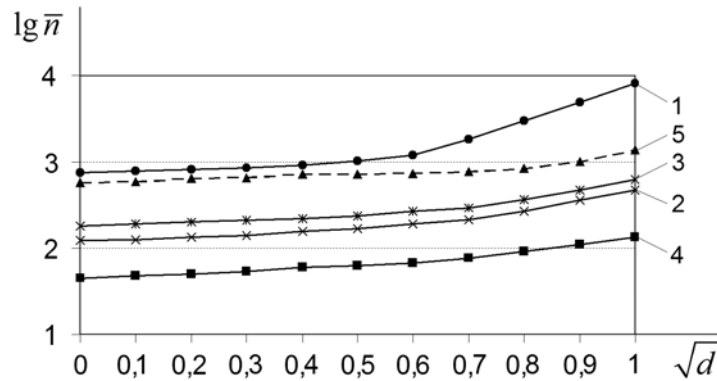


Рис. 15. Вплив завад на період збіжності стохастичної гри

Дія завад призводить до спотворення потоків даних між рівнями ієрархії системи прийняття рішень. Відповідно зі зростанням дисперсії завади збільшується період вироблення скоординованого колективного рішення в ієрархічній системі.

Позитивним фактором практичної реалізації розглянутого ігрового алгоритму внаслідок дії завад є забезпечення координації автократичної системи прийняття рішень з недогматичним центром ($\lambda = 1$, $u_n^{\text{root}} = \text{var}$, $n = 1, 2, \dots$). Дія білого шуму зумовлює диференціацію елементів вектора змішаних стратегій гравців і за рахунок підсилювальної властивості рекурентного методу кореневий гравець навчиться вибирати одну із чистих стратегій ($u_n^{\text{root}} = u^{\text{root}} = \text{const}$, $n = 1, 2, \dots$) з близькою до 1 імовірністю. У результаті проведення самонавчальної стохастичної гри автократична система з недогматичним центром вийде на консенсусне рішення.

ВИСНОВКИ

Проведені експериментальні дослідження підтверджують збіжність стохастичної гри для координації рішень в ієрархічних системах. Аналіз результатів комп'ютерного моделювання дозволяє зробити такі узагальнення:

1. Розроблений алгоритм та виконане на його основі комп'ютерне моделювання стохастичної гри забезпечують узгоджене прийняття рішень в ієрархічних системах за рахунок вирівнювання стратегій гравців на основі збирання поточної інформації та її адаптивного опрацювання.

2. Час збіжності стохастичної гри визначається розмірністю ієрархічної системи (кількістю учасників прийняття рішення і кількістю чистих стратегій гравців) та співвідношенням параметрів ігрового методу. Оптимізація параметрів ігрового методу за обмежувальної дії фундаментальних умов стохастичної апроксимації забезпечує близький до 1 степеневий порядок швидкості збіжності.

3. Достовірність результатів забезпечується належним плануванням комп'ютерного експерименту та підтверджується повторюваністю значень характеристик стохастичної гри, отриманих у ході імітаційного моделювання для різних послідовностей випадкових величин.

4. Виконані у цій роботі дослідження можна розвинути в напрямі моделювання ресурсних обмежень на інформаційні потоки між рівнями

ієрархії і врахування відновлювальних відмов агентів для вивчення надійності та гнучкості ієрархічних систем прийняття рішень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Hierarchies in Distributed Decision Making* / Christoph Schneeweiss. — Springer, 2013. — 341 p.
2. *Недашківська Н.І.* Методологія та інструментарій підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей: дис. ... доктора техн. наук: 01.05.04 / Н. І. Недашківська. — К.: ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», 2018. — 407 с. — [Електрон. ресурс]. — Режим доступу: http://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/25119/1/Nedashkivska_diss.pdf.
3. *Кравець П.О.* Ігрова модель прийняття рішень в ієрархічних системах / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2017. — № 872. — С. 111–120.
4. *Кравець П.О.* Ігрова модель системи з авторитарним прийняттям рішень / П.О. Кравець // Інформаційні системи та мережі: вісн. НУ «Львівська політехніка». — 2018. — № 901. — С. 61–67.
5. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. — М.: Наука, 1976. — 328 с.
6. *Harrington J. E., Jr.* Games, Strategies, and Decision Making / J.E. Harrington, Jr. — Worth Publishers, 2014. — 540 p.
7. *Grabisch M.* Set Functions, Games and Capacities in Decision Making / M. Grabisch. — Springer, 2016. — 473 p. — DOI: 10.1007/978-3-319-30690-2.
8. *Ummels M.* Stochastic Multiplayer Games: Theory and Algorithms / M. Ummels. — Amsterdam University Press, 2014. — 174 p.
9. *Petrosjan L.A.* Game Theory and Application / L.A. Petrosjan, V.V. Mazalov. — Nova Science Publishers, 2002. — 295 p.
10. *Ungureanu V.* Pareto-Nash-Stackelberg Game and Control Theory: Intelligent Paradigms and Applications / V. Ungureanu. — Springer, 2018. — 343 p.
11. *Wooldridge M.* An Introduction to Multiagent Systems / M. Wooldridge. — John Wiley & Sons, 2009. — 461 p.
12. *Radley N.* Multi-Agent Systems – Modeling, Control, Programming, Simulations and Applications / N. Radley. — Scitus Academics LLC, 2017. — 284 p.
13. *Iterative Learning Control for Multi-agent Systems Coordination* / S. Yang, J.-X. Xu, X. Li, D. Shen. — John Wiley & Sons, 2017. — 272 p.
14. *Sun Z.* Cooperative Coordination and Formation Control for Multi-agent Systems / Zhiyong Sun. — Springer, 2018. — 179 p.
15. *Agent for Games and Simulations: Trends in Techniques, Concepts and Design* / F. Dignum, J. Bradshaw, B. G. Silverman, W. van Doesburg. — Springer, 2009. — 237 p.
16. *Bekker K.* The Guide to Computer Simulation and Games / K. Bekker, J.R. Parker. — John Wiley and Sons, 2011. — 456 p.
17. *Simulation of Decision-Making as Active Learning Tools: Design and Effects of Political Science Simulations* / P. Bursens, V. Donche, D. Gijbels, P. Spooren (Editors). — Springer, 2018. — 206 p.
18. *Назин А.В.* Адаптивный выбор вариантов / А.В. Назин, А.С. Позняк. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
19. *Kushner H.* Stochastic Approximation and Recursive Algorithms and Applications / H. Kushner, G. G. Yin. — Springer Science & Business Media, 2013. — 417 p.
20. *Benveniste A.* Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations / A. Benveniste, M. Metivier, P. Priouret. — Springer Science & Business Media, 2012. — 365 p.

Надійшла 07.06.2019

УДК 517.518.11+517.518.18
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2019.4.12

ПОВЕРХНЕВІ МІРИ, АСОЦІЙОВАНІ З НЕІНВАРІАНТНОЮ МІРОЮ У СКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ПРОСТОРІ

Б.М. СНІЖКО

Анотація. Запропоновано узагальнення класичної конструкції поверхневої міри для гладких елементарних поверхонь довільної корозмірності, укладених у скінченновимірний евклідов простір, а саме: висвітлено підхід до побудови поверхневої міри, асоційованої з мірою у просторі, абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега. Наведена конструкція асоційованої поверхневої міри є коректною в тому сенсі, що значення вказаної міри поверхні не залежить від вибору її параметризації у класі еквівалентних параметризацій. Адекватність запропонованого підходу підтверджується тим, що поверхнева міра, асоційована з інваріантною мірою Лебега, збігається з відомою класичною конструкцією поверхневої міри, частинний випадок якої (площа двовимірної гладкої параметризованої поверхні у тривимірному просторі) розглядається в курсі математичного аналізу.

Ключові слова: асоційована поверхнева міра, гладка елементарна поверхня, міра Жордана, міра Лебега, неінваріантна міра.

ВСТУП

Методи і результати нескінченновимірного аналізу знаходять нині широке застосування у теорії випадкових процесів, теоретичній фізиці тощо. Особливістю нескінченновимірного аналізу є відсутність інваріантних мір (тобто ненульових мір, які не змінюються у разі зсувів множин) у нескінченновимірних просторах. Тому актуальною задачею постає дослідження неінваріантних мір на лінійних просторах та на нелінійних багатовидах.

Водночас одним із найбільш актуальних питань нескінченновимірного аналізу натеper є проблема конструювання поверхневих мір на поверхнях, укладених у простір довільної (скінченної або нескінченної) розмірності. У праці [1] розроблено метод побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності, укладених у банахів багатовид з рівномірною структурою, у [2] виконано аналіз транзитивності поверхневих мір, уведених у [1]. А у [3] для випадку поверхонь, укладених у скінченновимірний простір, досліджено питання узгодженості вказаного підходу до побудови поверхневої міри із класичною конструкцією площі (об'єму) поверхні.

Роботу присвячено розробленню коректної конструкції міри на поверхнях у скінченновимірному евклідовому просторі, асоційованої з неінваріантною

мірою, заданою у цьому просторі, та дослідженню властивостей вказаної конструкції.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай X — абстрактна множина, \mathfrak{A} — алгебра підмножин в X . Мірою на вимірному просторі (X, \mathfrak{A}) будемо називати довільну зліченно-адитивну функцію ν на \mathfrak{A} зі значеннями в $(-\infty, +\infty]$ або $[-\infty, +\infty)$, яка задовольняє умову $\nu(\emptyset) = 0$ [4].

Нехай $m \in \mathbb{N}$; λ_m — інваріантна міра Лебега в \mathbb{R}^m . Введемо позначення \mathfrak{A}_m для σ -алгебри вимірних за Лебегом підмножин \mathbb{R}^m . Через μ тут і далі позначатимемо міру, яка задана на $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{A}_m)$ і є абсолютно неперервною відносно міри λ_m . Вважатимемо також, що відповідна похідна Радона–Нікодима $f := \frac{d\mu}{d\lambda_m}$ є неперервною функцією на \mathbb{R}^m . При цьому для кожної множини $A \in \mathfrak{A}_m$ виконується рівність $\mu(A) = \int_A f d\lambda_m$ [4].

Мета роботи — запропонувати конструкцію поверхневої міри, асоційованої з мірою μ , яка задовольняла б такі умови:

- а) асоційована поверхнева міра має бути визначена принаймні для тих гладких елементарних поверхонь в \mathbb{R}^m , для яких існує класична поверхнева міра;
- б) за умови $f \equiv 1$ (тобто у випадку $\mu = \lambda_m$) асоційована поверхнева міра має збігатися з класичною;
- в) асоційована міра гладкої елементарної поверхні не повинна змінитися, якщо параметризацію цієї поверхні замінити на еквівалентну параметризацію.

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Зафіксуємо довільне натуральне число m . Якщо не вказано інше, вважається, що k — таке натуральне число, що $k \leq m$.

Означення 1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^k$ — вимірна за Жорданом множина; $\vec{r}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ — таке відображення, що $\vec{r} \in C^1(D; \mathbb{R}^m)$, а також $\text{rang } \vec{r}'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in D$. Тоді множину $\vec{r}(D)$ будемо називати гладкою k -вимірною елементарною поверхнею в \mathbb{R}^m . Водночас відображення \vec{r} називають параметризацією цієї поверхні.

Означення 2. Нехай $S := \vec{r}(D)$ — гладка k -вимірна елементарна поверхня в \mathbb{R}^m . Класичною поверхневою мірою S будемо називати число

$$\sigma_k(S) := \int_D \sqrt{\det \Gamma_{\vec{u}}} du_1 \dots du_k, \quad (1)$$

де $\Gamma_{\vec{u}}$ — матриця Грама системи векторів $\{\dot{r}_1(\vec{u}), \dots, \dot{r}_k(\vec{u})\}$; $\dot{r}_i(\vec{u})$ — i -й стовпець матриці $\vec{r}'(\vec{u})$.

Зауваження 1. Означення 2 є коректним лише в тому разі, коли інтеграл у формулі (1) існує. Зокрема він існує, якщо D — вимірна за Жорданом область в \mathbb{R}^k і $\vec{r} \in C^1(\bar{D}; \mathbb{R}^m)$ [5].

Означення 3. Нехай S — гладка k -вимірна елементарна поверхня в \mathbb{R}^m . Параметризації $\vec{r}_1 : D_1 \rightarrow S$ та $\vec{r}_2 : D_2 \rightarrow S$ поверхні S називатимемо еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм $\vec{F} : D_1 \rightarrow D_2$, для якого $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \vec{F}$.

Можна узагальнити результат, наведений у посібнику [6], і отримати таке твердження: якщо $S = \vec{r}(D)$ — гладка k -вимірна елементарна поверхня в \mathbb{R}^m , $U \subset \mathbb{R}^k$ — відкрита множина, $\bar{D} \subset U$, $\vec{r} \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, $\text{rang } \vec{r}'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in U$, то класична поверхнева міра S існує і не змінюється у разі заміни \vec{r} на еквівалентну параметризацію.

Нехай (X, d) — довільний метричний простір. Через $B^X(a, \varepsilon)$ будемо позначати відкриту кулю із центром у точці $a \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$ у просторі X . Таким чином, $B^X(a, \varepsilon) := \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Уведемо також позначення $B^X[a, \varepsilon]$ для замкненої кулі із центром у точці $a \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$ у просторі X , тобто $B^X[a, \varepsilon] := \{x \in X : d(x, a) \leq \varepsilon\}$. Якщо (X, d) — метричний простір і ε — додатне число, то через W_ε позначаємо ε -оکیل множини $W \subset X$. Виконується рівність $W_\varepsilon = \bigcup_{y \in W} B^X(y, \varepsilon)$.

Зафіксуємо на \mathbb{R}^m канонічний скалярний добуток (\cdot, \cdot) , узгоджену з ним евклідову норму $\|\cdot\|$ та метрику ρ , породжену евклідовою нормою. Для відкритої та замкненої куль (за метрикою ρ) в \mathbb{R}^m із центром у точці $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ радіуса $\varepsilon > 0$ будемо використовувати дещо спрощені позначення $B^m(\vec{a}, \varepsilon)$ та $B^m[\vec{a}, \varepsilon]$ відповідно.

Уведемо до розгляду такі лінійні оператори:

– оператор $\pi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ проектування на перші k координат, який кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ставить у відповідність $\pi_k(\vec{x}) := (x_1, \dots, x_k)^T$;

– оператор $\tilde{\pi}_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ проектування на останні k координат, який кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{m-k+1}, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ставить у відповідність $\tilde{\pi}_k(\vec{x}) := (x_{m-k+1}, \dots, x_m)^T$;

– оператор вкладення $i_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, який кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ зівставляє $i_m(\vec{x}) := (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$.

Тут і далі через $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ позначаємо стандартний ортонормований базис \mathbb{R}^m , а через $\{\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k\}$ — стандартний ортонормований базис \mathbb{R}^k . Словосполучення «лінійна оболонка» будемо скорочено писати так: «л. о.».

Також замість «лінійно незалежний» писатимемо «л. н. з.». Якщо X, Y — множини, то запис $X \vee Y$ (диз'юнктне об'єднання множин X і Y) означає $X \cup Y$ і вказує на те, що $X \cap Y = \emptyset$.

ДОПУСТИМИ МНОЖИНИ В АФІННОМУ ПІДПРОСТОРИ СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Нехай $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ і Q — ортогональна матриця розмірності $m \times m$. Уведемо відображення $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ таким співвідношенням: $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q} : \vec{x} \mapsto Q \cdot i_m(\vec{x}) + \vec{a}$. Розглянемо множину $L_k(\vec{a}, Q) := \vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(\mathbb{R}^k) = \{\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^k\}$. Легко бачити, що множина $L_k(\vec{0}, Q) \in \mathbb{R}^m$ є k -вимірним лінійним підпростором \mathbb{R}^m , причому система векторів $\{Q \cdot i_m(\vec{h}_1), \dots, Q \cdot i_m(\vec{h}_k)\}$ є базисом $L_k(\vec{0}, Q)$.

Означення 4. Множину $X \subset L_k(\vec{a}, Q)$ будемо називати допустимою, якщо існує така вимірна за Жорданом множина $Y \subset \mathbb{R}^k$, що $X = \vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(Y)$.

Відображення $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q} : \mathbb{R}^k \rightarrow L_k(\vec{a}, Q)$ є взаємно однозначним, причому $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}^{-1}(\vec{y}) = \pi_k(Q^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{a}))$. Можна довести, що завдяки бієктивності $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q} : \mathbb{R}^k \rightarrow L_k(\vec{a}, Q)$ сім'я всіх допустимих підмножин в $L_k(\vec{a}, Q)$ утворює кільце множин. Будь-яку множину вигляду $[a_1, a_1 + \delta] \times \dots \times [a_k, a_k + \delta] \subset \mathbb{R}^k$, де $a_i \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, будемо називати замкненим кубом в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям. Якщо Z — довільний замкнений куб в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям, то сукупність усіх допустимих підмножин $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(Z)$ (цю сукупність позначатимемо через $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$) утворює алгебру підмножин в $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}(Z)$.

Лема 1. Довільна множина $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ є гладкою k -вимірною елементарною поверхнею в \mathbb{R}^m . Крім того, $\sigma_k(A)$ існує і дорівнює $\lambda_k(\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}^{-1}(A))$.

Доведення. Множина $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}^{-1}(A)$ є жордановою в \mathbb{R}^k . Нехай $\vec{F}_{\vec{a}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — відображення, задане рівністю $\vec{F}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$; нехай $\vec{\Psi}_Q : \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto Q\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Тоді $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q} = \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\Psi}_Q \circ i_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. $i'_m(\vec{z}) = \begin{pmatrix} I_k \\ \Omega \end{pmatrix}$ у кожній точці $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$ (тут I_k — одинична матриця розмірності $k \times k$; Ω — нульова матриця розмірності $(m - k) \times k$). Для всіх $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ маємо $\vec{\Psi}'_Q(\vec{u}) = Q$. Водночас для всіх $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$ виконується $\vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{t}) = I_m$. Позначимо стовпці матриці Q через $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m$. Тоді $\vec{\Phi}'_{\vec{a}, Q}(\vec{z}) = I_m \cdot Q \cdot \begin{pmatrix} I_k \\ \Omega \end{pmatrix} =$

$= (\bar{q}_1 \dots \bar{q}_k)$ у кожній точці $\bar{z} \in \mathbb{R}^k$. Отримано, що $\text{rang } \bar{\Phi}'_{\bar{a},Q}(\bar{z}) = k$ в усіх точках $\bar{z} \in \mathbb{R}^k$. Крім того, з вигляду $\bar{\Phi}'_{\bar{a},Q}$ випливає, що $\bar{\Phi}_{\bar{a},Q} \in C^\infty(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m)$. Отже, параметризація $\bar{\Phi}_{\bar{a},Q}$ множини A задовольняє всі умови означення 1, тому A є гладкою k -вимірною елементарною поверхнею в \mathbb{R}^m .

Нехай $\bar{u} \in \mathbb{R}^k$; $\Gamma_{\bar{u}}$ — матриця Грама системи векторів $\{\dot{\Phi}_1(\bar{u}), \dots, \dot{\Phi}_k(\bar{u})\}$; тут $\dot{\Phi}_i(\bar{u})$ — i -й стовпець матриці $\bar{\Phi}'_{\bar{a},Q}(\bar{u})$. Матриця $\bar{\Phi}'_{\bar{a},Q}(\bar{u})$ співпадає з $(\bar{q}_1 \dots \bar{q}_k)$. Оскільки Q — ортогональна матриця, то $\{\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_k\}$ — ортонормована система векторів в \mathbb{R}^m . Тому $\Gamma_{\bar{u}} \equiv I_k$ і $\sqrt{\det \Gamma_{\bar{u}}} \equiv 1$ на \mathbb{R}^k . Отже, $\sigma_k(A) = \int_{\bar{\Phi}_{\bar{a},Q}^{-1}(A)} 1 du_1 \dots du_k = \lambda_k(\bar{\Phi}_{\bar{a},Q}^{-1}(A))$.

Лема 1 показує, що класична поверхнева міра σ_k коректно визначена на алгебрі множин $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$. Доведемо тепер, що σ_k є мірою на $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ (покажемо зліченну адитивність σ_k на вказаній алгебрі). Візьмемо таку послідовність множин $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$, що вони попарно не перетинаються та $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$. Тоді існує послідовність $\{J_n\}$ жорданових підмножин у $Z \subset \mathbb{R}^k$ така, що $A_n = \bar{\Phi}_{\bar{a},Q}(J_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Бієктивність відображення $\bar{\Phi}_{\bar{a},Q}$ гарантує, що множини J_n теж попарно не перетинаються. Множина $J := \bar{\Phi}_{\bar{a},Q}^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ є жордановою. До того ж, $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{\Phi}_{\bar{a},Q}^{-1}(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Користуючись зліченною адитивністю міри λ_k на алгебрі жорданових підмножин в Z , отримуємо

$$\sigma_k\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lambda_k(J) = \lambda_k\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} J_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(A_n).$$

Означення 5. Паралелепіпедом в \mathbb{R}^m будемо називати довільну множину вигляду $\{\bar{a} + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$, де $\bar{a}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^m$.

Означення 6 [7]. Паралелепіпедом в \mathbb{R}^m , натягнутим на k векторів $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^m$, називають множину $\{t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$.

Означення 7. Нехай $\Pi = \{\bar{a} + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$ — паралелепіпед в \mathbb{R}^m (згідно з означенням 5). Розмірністю Π будемо називати розмірність л. о. $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$.

Лема 2. Нехай $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ — довільна л. н. з. система векторів в \mathbb{R}^m . Тоді існує така ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$, що лінійний

оператор $\bar{\Psi}_Q : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, заданий рівністю $\bar{\Psi}_Q(\bar{x}) = Q \cdot \bar{x}$, взаємно однозначно переводить $L_k(\bar{0}, I_m)$ на л. о. $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$.

Доведення. Лінійний простір $L_k(\bar{0}, I_m)$ збігається з л. о. $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$. Виконаємо ортогоналізацію та нормування системи векторів $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$. Отримаємо систему $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k\}$, еквівалентну системі $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$. Нехай $\{\bar{g}_{k+1}, \dots, \bar{g}_m\}$ — ортонормований базис ортогонального доповнення до л. о. $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k\}$. Тоді система векторів $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k, \bar{g}_{k+1}, \dots, \bar{g}_m\}$ утворює ортонормований базис \mathbb{R}^m . Уведемо до розгляду матрицю $Q = (\bar{g}_1 \dots \bar{g}_m)$ (j -й стовпець Q містить запис вектора \bar{g}_j у декартових координатах, $j = \overline{1, m}$) і відображення $\bar{\Psi}_Q(\bar{x}) = Q \cdot \bar{x}$. За будь-якого $i \in \{1, \dots, m\}$ маємо: $\bar{\Psi}_Q(\bar{e}_i) = Q \cdot \bar{e}_i = \bar{g}_i$. Таким чином, відображення $\bar{\Psi}_Q$ переводить ортонормований базис $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ в ортонормований базис $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m\}$ і матриця Q є ортогональною. З ортогональності Q випливає, що $\det Q \in \{-1; 1\}$, тому відображення $\bar{\Psi}_Q$ взаємно однозначно відображає \mathbb{R}^m на \mathbb{R}^m . Перевіримо, що л. о. $\{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k\}$ (яка збігається з л. о. $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$) є образом л. о. $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ під дією відображення $\bar{\Psi}_Q$. Це справді так, адже $Q(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_k \bar{e}_k) = \alpha_1 Q \bar{e}_1 + \dots + \alpha_k Q \bar{e}_k = \alpha_1 \bar{g}_1 + \dots + \alpha_k \bar{g}_k \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Твердження 1. Нехай $\Pi = \{\bar{a} + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в \mathbb{R}^m . Тоді існують така ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$ і такий замкнений куб Z в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям, що $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$.

Доведення. Система $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ — л. н. з., адже Π має розмірність k . Нехай Q — така ортогональна матриця, що лінійний оператор $\bar{\Psi}_Q : \bar{x} \mapsto Q \cdot \bar{x}$ переводить $L_k(\bar{0}, I_m)$ на л. о. $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ (існування вказаної матриці гарантується лемою 2). Нехай M — паралелепіпед в \mathbb{R}^k , натягнутий на вектори $\pi_k(Q^{-1} \bar{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1} \bar{v}_k)$. І нехай Z — такий замкнений куб в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям, що $M \subset Z$. M є жордановою підмножиною Z . Можна перевірити, що $\Pi = \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(M)$. Отже, $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$.

Твердження 2. Нехай $\bar{a} \in \mathbb{R}^m$; Q — ортогональна матриця розмірності $m \times m$; Z — замкнений куб в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям. Нехай $f_1, f_2 \in C(\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z))$. Нехай v_1, v_2 — функції на алгебрі $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$, задані рівностями $v_1(A) = \int_A f_1 d\sigma_k$ та $v_2(A) = \int_A f_2 d\sigma_k$ для всіх множин $A \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$. Тоді:

- 1) v_1, v_2 — міри на $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$;

2) якщо міри ν_1 і ν_2 збігаються на всіх паралелепіпедах $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ розмірності k , то рівність $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ виконується для довільної допустимої множини $A \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$.

Доведення.

1. Покажемо, що ν_1 — міра на $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ (для ν_2 міркування цілком аналогічні). Функція ν_1 набуває лише скінченних значень. Дійсно, якщо $A \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$, то $A \subset \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z)$. Оскільки Z — компакт в \mathbb{R}^k і $\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q} \in C^\infty(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m)$, то $\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z)$ — компакт в \mathbb{R}^m . За теоремою Вейерштраса існує $C_1 := \max \{|f_1(\bar{x})| : \bar{x} \in \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z)\} < \infty$. Тоді $|\nu_1(A)| = \left| \int_A f_1 d\sigma_k \right| \leq C_1 \sigma_k(A) < \infty$. Адитивність ν_1 на $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ очевидна. Доведемо неперервність ν_1 . Візьмемо таку послідовність множин $\{A_n\} \subset \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$, що $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ та $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Тоді $|\nu_1(A_n)| \leq C_1 \sigma_k(A_n)$. Послідовність $\{C_1 \cdot \sigma_k(A_n)\}$ прямує до 0, адже неперервність міри σ_k уже відома. Тому і $\nu_1(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

2. Нехай $\tilde{C} := \max \{|f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x})| : \bar{x} \in \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z)\}$. Якщо $\tilde{C} = 0$, то $f_1 \equiv f_2$ на $\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z)$, тому $\nu_1 \equiv \nu_2$ на $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$. Припустимо, що $\tilde{C} > 0$. Беремо будь-яку множину $A \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$. Позначимо: $J = \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}^{-1}(A)$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки J — жорданова підмножина Z , то існує множина $J^\varepsilon \subset J$ така, що J^ε є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості паралелепіпедів розмірності k у Z з ребрами, паралельними ортам $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k$, і виконується нерівність $\lambda_k(J \setminus J^\varepsilon) < \varepsilon$. Тоді, за лемою 1, $\sigma_k(\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(J \setminus J^\varepsilon)) < \varepsilon$. Водночас, позначивши $A^\varepsilon := \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(J^\varepsilon)$, отримаємо $\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(J \setminus J^\varepsilon) = \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(J) \setminus \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(J^\varepsilon) = A \setminus A^\varepsilon$. Множина A^ε є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості паралелепіпедів розмірності k в $\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z)$. Тому за умовою твердження $\nu_1(A^\varepsilon) = \nu_2(A^\varepsilon)$. Зауважимо, що із вкладення $J^\varepsilon \subset J$ випливає вкладення $A^\varepsilon \subset A$, тому $A = A^\varepsilon \vee (A \setminus A^\varepsilon)$. Оскільки $\int_{A^\varepsilon} (f_1 - f_2) d\sigma_k = 0$, то $\nu_1(A) - \nu_2(A) = \int_{A \setminus A^\varepsilon} (f_1 - f_2) d\sigma_k$. Водночас $\left| \int_{A \setminus A^\varepsilon} (f_1 - f_2) d\sigma_k \right| \leq \tilde{C} \cdot \sigma_k(A \setminus A^\varepsilon) < \tilde{C} \cdot \varepsilon$. З урахуванням довільності вибору $\varepsilon > 0$ отримано, що величина $|\nu_1(A) - \nu_2(A)|$ строго менша за будь-яке додатне число. Отже, $\nu_1(A) = \nu_2(A)$.

АСОЦІЙОВАНА ПОВЕРХНЕВА МІРА ДОПУСТИМИХ МНОЖИН

Означення 8. Міру σ_k^μ на алгебрі $\mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ будемо називати поверхневою мірою, асоційованою з мірою μ , якщо виконано такі дві умови:

1. Існує така функція $\phi \in C(\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}(Z))$, що $\sigma_k^\mu(A) = \int_A \phi d\sigma_k$ для всіх $A \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$.

2. Якщо $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ — паралелепіпед розмірності k в \mathbb{R}^m , то у випадку $m > k$ виконується рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\bar{0}, \varepsilon))}, \tag{2}$$

а у випадку $m = k$ справедливою є рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \mu(\Pi). \tag{3}$$

Перевірка коректності означення 8 включає в себе декілька аспектів.

1. Існування такої міри σ_k^μ , що задовольняє всі умови означення 8, буде доведено далі (див. наслідок 1). Поки факт існування вказаної міри не доведено, користуватимемося записом σ_k^μ на позначення функції, визначеної на множині всіх паралелепіпедів розмірності k в \mathbb{R}^m і заданої рівністю (2) або (3) залежно від співвідношення між k та m .

2. Єдиність міри, що задовольняє всі умови означення 8, слідує з твердження 2.

3. Для перевірки коректності формули (2) потрібно звернути увагу на таке. По-перше, варто перевірити, що для довільного паралелепіпеда Π множина Π_ε належить \mathfrak{A}_m . Це справді так, адже для кожної множини $A \subset \mathbb{R}^m$ множина A_ε є відкритою в \mathbb{R}^m , водночас всі борелівські множини належать σ -алгебрі \mathfrak{A}_m . По-друге, треба перевірити, що відповідна границя існує для довільного паралелепіпеда $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ розмірності k в \mathbb{R}^m . Це буде показано далі (див. твердження 5).

4. Формула (3) є коректною, адже паралелепіпед Π , як впливає з означення 5, є замкненою, а отже, і лебегівською множиною в \mathbb{R}^m .

5. Можна довести, що у випадку $\mu = \lambda_m$ значення $\sigma_k^\mu(\Pi)$, де $\Pi = \{\bar{a} + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\} \subset \mathbb{R}^m$, збігається з класичним k -вимірним об'ємом Π , що задається формулою $\sqrt{\det((\bar{v}_i, \bar{v}_j))_{i,j=\overline{1,k}}}$ (див. зауваження 3).

Твердження 3. Нехай $m > k$. Нехай $\Pi = \{\bar{a} + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в \mathbb{R}^k . Тоді

$$\sigma_k^\mu(i_m(\Pi)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\Pi \times B^{m-k}(\bar{0}, \varepsilon))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\bar{0}, \varepsilon))}. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо: $\tilde{\Pi} := i_m(\Pi)$. Очевидно, що $\tilde{\Pi} = \{i_m(\vec{a}) + t_1 i_m(\vec{v}_1) + \dots + t_k i_m(\vec{v}_k) : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$, тому $\tilde{\Pi}$ є паралелепіпедом розмірності k в \mathbb{R}^m . Нехай K — довільний компакт в \mathbb{R}^m такий, що $K \supset \tilde{\Pi}_1$ (указаний компакт існує, адже для всіх $\delta > 0$ множина $\tilde{\Pi}_\delta$ є обмеженою в \mathbb{R}^m). Тоді для кожного $\varepsilon \in (0;1]$ виконано вкладення $\tilde{\Pi}_\varepsilon \subset K$. За теоремою Вейерштрасса $\sup_K |f| = \max_K |f| < \infty$. Тоді

$$-\max_K |f| \leq f(x) \leq \max_K |f| \quad (5)$$

для всіх $x \in K$. Зафіксуємо такі числа $p_1, \dots, p_k > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (0;1]$ існує такий вектор $\vec{b}_\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, що для паралелепіпеда $A^\varepsilon := \{\vec{b}_\varepsilon + t_1(1+p_1\varepsilon)\vec{v}_1 + \dots + t_k(1+p_k\varepsilon)\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\} \subset \mathbb{R}^k$ виконується вкладення

$$\tilde{\Pi}_\varepsilon \subset A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon). \quad (6)$$

Візьмемо довільне число $\varepsilon \in (0;1]$. Легко бачити, що $\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon) \subset \tilde{\Pi}_\varepsilon$. Тому із виразу (6) отримуємо $\Pi \subset A^\varepsilon$. За адитивністю міри $\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon) = \mu(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) + \mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))$.

$$\begin{aligned} & \mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))) = \\ & = \int_{\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} f d\lambda_m \leq \max_K |f| \cdot \lambda_m(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))). \end{aligned}$$

Із формули (6) випливає, що

$$\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) \subset (A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)).$$

Водночас $(A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) = (A^\varepsilon \setminus \Pi) \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)$. Міра λ_s за будь-якого $s \in \mathbb{N}$ є s -кратним добутком $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_1$ лінійної міри Лебега λ_1 [8], тому $\lambda_m((A^\varepsilon \setminus \Pi) \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) = \lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) \cdot \lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))$. Отже, $\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))) \leq \max_K |f| \cdot \lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) \cdot \lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))$. Оскільки $\Pi \subset A^\varepsilon$, то $\lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) = \lambda_k(A^\varepsilon) - \lambda_k(\Pi)$. Користуючись інваріантністю міри λ_k відносно паралельних перенесень та однією з формул жорданової міри паралелепіпеда в \mathbb{R}^k , натягнутого на k векторів, отримуємо:

$$\begin{aligned} \lambda_k(A^\varepsilon) &= |\det((1+p_1\varepsilon)\vec{v}_1 \quad \dots \quad (1+p_k\varepsilon)\vec{v}_k)| = \\ &= |\det(\vec{v}_1 \quad \dots \quad \vec{v}_k)| \cdot \prod_{i=1}^k (1+p_i\varepsilon) = \lambda_k(\Pi) \cdot \prod_{i=1}^k (1+p_i\varepsilon). \end{aligned}$$

Якщо позначити $\frac{\lambda_k(\Pi)}{\varepsilon} \cdot \left(\prod_{i=1}^k (1 + p_i \varepsilon) - 1 \right)$ через $\phi(\varepsilon)$, то матимемо:

$\lambda_k(A^\varepsilon) = \lambda_k(\Pi) + \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon)$, причому $\phi(\cdot)$ є поліномом від ε (тому $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(\varepsilon) = \phi(0) \in \mathbb{R}$). Тоді $\lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) = \lambda_k(A^\varepsilon) - \lambda_k(\Pi) = \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon)$. Таким чином, $\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))) \leq \max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon) \cdot \lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))$. А отже,

$$\frac{\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} \leq \max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon).$$

Аналогічно з використанням формули (5) можна отримати нерівність $\frac{\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} \geq -\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon)$.

Отже, для будь-якого числа $\varepsilon \in (0; 1]$ виконується подвійна нерівність:

$$-\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon) \leq \frac{\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} \leq \max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon).$$

Із рівностей $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (-\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon)) = 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \phi(\varepsilon))$ випливає,

що границя $\frac{\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))}$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$ існує і дорівнює 0. За формулою (2) $\sigma_k^\mu(\tilde{\Pi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))}$. Оскільки

$$\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon) = \mu(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) + \mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\tilde{\Pi}_\varepsilon \setminus (\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)))}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} = 0,$$

то з урахуванням $i_m(\Pi) = \tilde{\Pi}$ отримуємо остаточний результат — формулу (4).

Лема 3 [5, с. 150]. Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ — зв'язна вимірна за Жорданом множина. Нехай $\eta: E \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція. Тоді існує така точка $\vec{\xi} \in E$, що $\int_E \eta(\vec{x}) d\vec{x} = \eta(\vec{\xi}) \cdot \lambda_m(E)$.

Лема 4. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ і $\eta \in C(B^n(\vec{0}, \alpha); \mathbb{R})$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda_n(B^n(\vec{0}, \varepsilon))} \cdot \int_{B^n(\vec{0}, \varepsilon)} \eta d\lambda_n = \eta(\vec{0}).$$

Доведення. Оскільки за будь-якого $\varepsilon > 0$ куля $B^n(\vec{0}, \varepsilon)$ є зв'язною вимірною за Жорданом множиною, то можемо скористатися лемою 3 і для всіх $\varepsilon \in (0; \alpha]$ отримати:

$$\int_{B^n(\vec{0}, \varepsilon)} \eta d\lambda_n = \eta(\vec{\xi}(\varepsilon)) \cdot \lambda_n(B^n(\vec{0}, \varepsilon)),$$

де $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\varepsilon) \in B^n(\vec{0}, \varepsilon)$. Тоді $\frac{1}{\lambda_n(B^n(\vec{0}, \varepsilon))} \cdot \int_{B^n(\vec{0}, \varepsilon)} \eta d\lambda_n = \eta(\vec{\xi}(\varepsilon))$. При $\varepsilon \rightarrow 0+$ кулі

$B^n(\vec{0}, \varepsilon)$ стягуються в точку $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Отже, $\vec{\xi}(\varepsilon) \rightarrow \vec{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$ завдяки належності $\vec{\xi}(\varepsilon) \in B^n(\vec{0}, \varepsilon)$. А оскільки функція η є неперервною в $\vec{0}$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \eta(\vec{\xi}(\varepsilon)) = \eta(\vec{0})$. Лему доведено.

Твердження 4. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_k \vec{v}_k : t_i \in [0; 1], i = 1, k\}$ — паралелепіпед розмірності k в \mathbb{R}^k . Тоді

$$\sigma_k^\mu(i_m(\Pi)) = \int_{\Pi} (f \circ i_m)(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k. \quad (7)$$

Доведення. Якщо $m = k$, згідно з означенням 8 (формула (3)), $\sigma_k^\mu(i_m(\Pi)) = \mu(i_m(\Pi)) = \int_{i_m(\Pi)} f d\lambda_m$. Крім того, i_m є тотожним відображенням

на \mathbb{R}^m при $m = k$, тому формула (7) справедлива.

Нехай тепер $m > k$. Виконано умови твердження 3, тому справедлива формула (4). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і позначимо: $G^\varepsilon := \Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)$.

$$\mu(G^\varepsilon) = \int_{G^\varepsilon} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\pi}_{m-k}(G^\varepsilon)} dx_{k+1} \dots dx_m \int_{G^\varepsilon(x_{k+1}, \dots, x_m)} f dx_1 \dots dx_k,$$

де $G^\varepsilon(x_{k+1}, \dots, x_m) := \{(x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k : (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)^T \in G^\varepsilon\}$. Очевидно, що $\tilde{\pi}_{m-k}(G^\varepsilon) = B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)$. Крім того, $G^\varepsilon(x_{k+1}, \dots, x_m) = \Pi$ для кожного $(x_{k+1}, \dots, x_m)^T \in B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)$. Отже, для всіх $\varepsilon > 0$ справедливою є формула

$$\mu(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) = \int_{B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)} dx_{k+1} \dots dx_m \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_k.$$

Візьмемо довільне число $\alpha > 0$ і розглянемо функцію $I : B^{m-k}[\vec{0}, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, задану рівністю

$$I(y_1, \dots, y_{m-k}) = \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{m-k}) dx_1 \dots dx_k.$$

$\Pi \times B^{m-k}[\vec{0}, \alpha]$ є компактом в \mathbb{R}^m , який містить G^α . Оскільки $f \in C(\mathbb{R}^m)$, то $f \in C(\Pi \times B^{m-k}[\vec{0}, \alpha])$, звідки $I \in C(B^{m-k}[\vec{0}, \alpha])$.

Таким чином, до функції I можна застосувати лему 4. Отримуємо формулу $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} \cdot \int_{B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)} I(y_1, \dots, y_{m-k}) dy_1 \dots dy_{m-k} = I(\vec{0})$. Оскільки

$$\mu(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)) = \int_{B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)} I(x_{k+1}, \dots, x_m) dx_{k+1} \dots dx_m \text{ за будь-якого } \varepsilon \in (0; \alpha], \text{ а}$$

також $I(\vec{0}) = \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) dx_1 \dots dx_k$, то з урахуванням рівності

$i_m((x_1, \dots, x_k)^T) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$ маємо остаточний результат — формулу (7).

Лема 5. Нехай (X, ρ) , (Y, d) — метричні простори; $\phi: X \rightarrow Y$ — таке відображення, що:

а) $\phi(X) = Y$ (тобто ϕ — сюр'єкція);

б) $d(\phi(x), \phi(y)) = \rho(x, y)$ для всіх $x, y \in X$ (тобто ϕ — ізометрія метричних просторів (X, ρ) та $(\phi(X), d)$).

Тоді для будь-якої множини $A \subset X$ та довільного числа $\varepsilon > 0$ виконується рівність $\phi(A_\varepsilon) = (\phi(A))_\varepsilon$.

Доведення цієї леми не наводимо, оскільки воно нескладне (слід скористатися рівностями $A_\varepsilon = \bigcup_{z \in A} B^X(z, \varepsilon)$ та $(\phi(A))_\varepsilon = \bigcup_{u \in \phi(A)} B^Y(u, \varepsilon)$).

Зауваження 2. Будь-яке відображення $\phi: X \rightarrow Y$, що має вказані у лемі 5 властивості, є оборотним. Дійсно, $(\phi(x) = \phi(y)) \Rightarrow (d(\phi(x), \phi(y)) = 0) \Rightarrow (\rho(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y)$, що означає ін'єктивність відображення ϕ . Отже, ϕ є бієкцією, тому існує відображення $\phi^{-1}: Y \rightarrow X$. Крім того, ϕ^{-1} також задовольняє всі умови леми 5.

Твердження 5. Нехай $\Pi = \{\bar{a} + t_1 \bar{v}_1 + \dots + t_k \bar{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$ — паралелепіпед розмірності k в \mathbb{R}^m . Нехай ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$ і замкнений куб Z в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям, такі, що $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\bar{a}, Q, Z)$ (відповідні Q та Z існують унаслідок твердження 1). І нехай, як і раніше, $\bar{F}_{\bar{a}}: \mathbb{R}^m \ni \bar{x} \mapsto \bar{x} + \bar{a} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\psi}_Q: \mathbb{R}^m \ni \bar{x} \mapsto Q\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\Phi}_{\bar{a}, Q} := \bar{F}_{\bar{a}} \circ \bar{\psi}_Q \circ i_m: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Тоді виконується рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \int_M (f \circ \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}) d\lambda_k, \tag{8}$$

де $M = \bar{\Phi}_{\bar{a}, Q}^{-1}(\Pi) = (\pi_k \circ \bar{\psi}_Q^{-1} \circ \bar{F}_{\bar{a}}^{-1})(\Pi)$.

Доведення. Припустимо, що $m > k$. Тоді за означенням 8 (формула (2))

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\bar{0}, \varepsilon))}. \text{ Зафіксуємо } \varepsilon > 0. \text{ Тоді } \mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{\Pi_\varepsilon} f d\lambda_m = \int_{\Pi_\varepsilon} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m. \text{ Зробимо заміну змінних: уведемо нові змінні}$$

$\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)$, пов'язані зі старими змінними $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ співвідношенням $\bar{x} = \bar{F}_{\bar{a}}^{-1}(\bar{y}) = \bar{y} + \bar{a}$. $\det \bar{F}_{\bar{a}}'(\bar{y}) = 1$ в усіх точках $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$. Можна показати, що відображення $\bar{F}_{\bar{a}}^{-1}: \bar{x} \mapsto \bar{x} - \bar{a}$ задовольняє умови леми 5, тому $\bar{F}_{\bar{a}}^{-1}(\Pi_\varepsilon) = (\bar{F}_{\bar{a}}^{-1}(\Pi))_\varepsilon$. Водночас множина $D := \bar{F}_{\bar{a}}^{-1}(\Pi)$ є паралелепіпедом в \mathbb{R}^m , натягнутим на вектори $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$. Отже, за формулою заміни змінних у кратному інтегралі,

$$\int_{\Pi_\varepsilon} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_{\vec{F}_a^{-1}(\Pi_\varepsilon)} (f \circ \vec{F}_a)(y_1, \dots, y_m) \cdot |\det \vec{F}_a'(y)| dy_1 \dots dy_m,$$

тобто $\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{D_\varepsilon} (f \circ \vec{F}_a)(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m$. Уведемо тепер змінні

$\vec{z} = (z_1, \dots, z_m)$, пов'язані зі змінними $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ співвідношенням $\vec{y} = \vec{\Psi}_Q(\vec{z}) = Q\vec{z}$. Оскільки $\det Q \in \{-1; 1\}$ та $\vec{\Psi}'_Q(\vec{z}) = Q$ в усіх точках $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$,

то $|\det \vec{\Psi}'_Q(\vec{z})| = 1$ для всіх $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$. Відображення $\vec{\Psi}_Q^{-1}: \vec{y} \mapsto Q^{-1} \cdot \vec{y}$ задовольняє умови леми 5, тому $\vec{\Psi}_Q^{-1}(D_\varepsilon) = (\vec{\Psi}_Q^{-1}(D))_\varepsilon$. Множина $G := (\vec{\Psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_a^{-1})(\Pi) = \vec{\Psi}_Q^{-1}(D)$ є паралелепіпедом в \mathbb{R}^m , натягнутим на вектори $Q^{-1}\vec{v}_1, \dots, Q^{-1}\vec{v}_k$.

До того ж, оскільки система $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ — л. н. з., система $\{Q^{-1}\vec{v}_1, \dots, Q^{-1}\vec{v}_k\}$ теж є л. н. з., тому паралелепіпед G має розмірність k . Отже,

$$\begin{aligned} & \int_{D_\varepsilon} (f \circ \vec{F}_a)(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m = \\ & = \int_{\vec{\Psi}_Q^{-1}(D_\varepsilon)} (f \circ \vec{F}_a \circ \vec{\Psi}_Q)(z_1, \dots, z_m) \cdot |\det \vec{\Psi}'_Q(\vec{z})| dz_1 \dots dz_m, \end{aligned}$$

тобто

$$\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{G_\varepsilon} (f \circ \vec{F}_a \circ \vec{\Psi}_Q)(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m. \quad (9)$$

Розглянемо міру ν на $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{A}_m)$, що є абсолютно неперервною відносно λ_m із похідною Радона–Нікодіма $f \circ \vec{F}_a \circ \vec{\Psi}_Q$, яка, очевидно, є неперервною функцією на \mathbb{R}^m . Тоді за означенням похідної Радона–Нікодіма $\nu(G_\varepsilon) = \int_{G_\varepsilon} (f \circ \vec{F}_a \circ \vec{\Psi}_Q) d\lambda_m$. Зіставляючи це із формулою (9), отримуємо:

$\mu(\Pi_\varepsilon) = \nu(G_\varepsilon)$. Тоді

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\nu(G_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon))} = \sigma_k^\nu(G).$$

Оскільки $G \subset L_k(\vec{0}, I_m)$, то $G = i_m(\pi_k(G))$. Множина $M = \pi_k(G)$ є паралелепіпедом в \mathbb{R}^k , натягнутим на вектори $\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)$, причому система $\{\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)\}$ є л. н. з. Отже, паралелепіпед M має розмірність k , і до нього можна застосувати твердження 4. Отримуємо, що

$$\begin{aligned} \sigma_k^\nu(G) &= \sigma_k^\nu(i_m(M)) = \int_M (f \circ \vec{F}_a \circ \vec{\Psi}_Q \circ i_m)(z_1, \dots, z_k) dz_1 \dots dz_k = \\ &= \int_M (f \circ \vec{\Phi}_{a,Q})(z_1, \dots, z_k) dz_1 \dots dz_k. \end{aligned}$$

Посилання на рівність $\sigma_k^\mu(\Pi) = \sigma_k^\nu(G)$ завершує доведення твердження в разі, якщо $m > k$.

Розглянемо тепер випадок $m = k$. Тоді, згідно з означенням 8 (формула (3)), $\sigma_k^{\mu}(\Pi) = \mu(\Pi) = \int_{\Pi} f d\lambda_m = \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$. Заміна змінних $\vec{x} = (\vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\Psi}_Q)(\vec{z})$ приводить до рівності

$$\sigma_k^{\mu}(\Pi) = \int_{(\vec{\Psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)} (f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\Psi}_Q)(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m.$$

З урахуванням $M = (\pi_m \circ \vec{\Psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi) = (\vec{\Psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$ та $i_m((z_1, \dots, z_m)^T) = (z_1, \dots, z_m)^T$ робимо висновок, що формула (8) справедлива й у випадку $m = k$.

Наслідок 1. В умовах твердження 5 виконується рівність

$$\sigma_k^{\mu}(\Pi) = \int_{\Pi} f d\sigma_k. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки параметризація $\vec{\Phi}_{\vec{a}, Q} := \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\Psi}_Q \circ i_m : M \rightarrow \Pi$ паралелепіпеда Π є бієктивним відображенням, то виконується рівність $\int_{\Pi} f d\sigma_k = \int_M (f \circ \vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}) \cdot \sqrt{\det \Gamma_{\vec{t}}} dt_1 \dots dt_k$, де $\Gamma_{\vec{t}}$ — матриця Грама системи векторів $\{\vec{\Phi}_1(\vec{t}), \dots, \vec{\Phi}_k(\vec{t})\}$; $\vec{\Phi}_i(\vec{t})$ — i -й стовпець матриці $\vec{\Phi}'_{\vec{a}, Q}(\vec{t})$. У доведенні леми 1 показано, що $\sqrt{\det \Gamma_{\vec{t}}} \equiv 1$ на \mathbb{R}^k . Тому $\int_M (f \circ \vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}) \times \sqrt{\det \Gamma_{\vec{t}}} dt_1 \dots dt_k = \int_M (f \circ \vec{\Phi}_{\vec{a}, Q}) d\lambda_k = \sigma_k^{\mu}(\Pi)$, а отже, рівність (10) виконується.

Наслідок 1 показує, що міра, значення якої на множині $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ дорівнює $\int_A f d\sigma_k$, задовольняє всі умови означення 8. Таким чином, існування асоційованої поверхневої міри σ_k^{μ} на $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ доведено.

Зауваження 3. Перевіримо, що у випадку $f \equiv 1$ (тобто $\mu = \lambda_m$) формула (8) дає звичний вираз $\sqrt{\det((\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{i,j=1,k}}$ для k -вимірного об'єму паралелепіпеда $\Pi = \{\vec{a} + t_1 \vec{v}_1 + \dots + t_k \vec{v}_k : t_i \in [0; 1], i = \overline{1, k}\}$ розмірності k в \mathbb{R}^m . За формулою (8) $\sigma_k^{\lambda_m}(\Pi) = \int_M 1 d\lambda_k = \lambda_k(M)$, де $M = (\pi_k \circ \vec{\Psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$. M є паралелепіпедом в \mathbb{R}^k , натягнутим на л. н. з. вектори $\pi_k(Q^{-1} \vec{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1} \vec{v}_k)$, тому $\lambda_k(M) = \sqrt{\det((\pi_k(Q^{-1} \vec{v}_i), \pi_k(Q^{-1} \vec{v}_j)))_{i,j=1,k}}$. Оскільки паралелепіпед $(\vec{\Psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1})(\Pi)$ натягнутий на вектори $Q^{-1} \vec{v}_1, \dots, Q^{-1} \vec{v}_k$ і вкладений в $L_k(\vec{0}, I_m)$, то $(\pi_k(Q^{-1} \vec{v}_i), \pi_k(Q^{-1} \vec{v}_j)) = (Q^{-1} \vec{v}_i, Q^{-1} \vec{v}_j)$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Крім того, матриця Q^{-1} є ортогональною, тому $(Q^{-1} \vec{v}_i, Q^{-1} \vec{v}_j) = (\vec{v}_i, \vec{v}_j)$. Отримуємо бажану рівність $\sigma_k^{\lambda_m}(\Pi) = \sqrt{\det((\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{i,j=1,k}} = \sigma_k(\Pi)$.

АСОЦІЙОВАНА ПОВЕРХНЕВА МІРА ГЛАДКОЇ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ПОВЕРХНІ

Для побудови асоційованої поверхневої міри на гладких елементарних поверхнях в \mathbb{R}^m будемо використовувати схему, подібну до наведеної у праці [6] схеми конструювання класичної площі двовимірної параметризованої поверхні в \mathbb{R}^3 .

Для жорданової множини $J \subset \mathbb{R}^k$ через Δ будемо позначати деяке скінченне розбиття J на жорданові підмножини (тобто таку сукупність $\{J_i : i = \overline{1, p}\}$ жорданових підмножин J , що $J = \bigvee_{i=1}^p J_i$). Дрібністю розбиття $\Delta = \{J_i : i = \overline{1, p}\}$ називають число $d(\Delta) := \max_{i=1, p} \text{diam}(J_i)$, де $\text{diam}(J_i) := \sup \{\|\bar{x} - \bar{y}\| : \bar{x}, \bar{y} \in J_i\}$ — діаметр множини J_i .

Нехай $S = \bar{r}(D)$ — гладка k -вимірна елементарна поверхня в \mathbb{R}^m . Нехай $\Delta = \{D_j : j = \overline{1, p}\}$ — розбиття D на жорданові підмножини. У кожній множині D_j фіксуємо будь-яку точку $\bar{u}_j \in D_j$. Виберемо довільний індекс $j \in \{1, \dots, p\}$. Матриця $\bar{r}'(\bar{u}_j)$ має розмірність $m \times k$ і ранг k . Якщо тим же символом $\bar{r}'(\bar{u}_j)$ позначити лінійний оператор $\mathbb{R}^k \ni \bar{x} \mapsto \bar{r}'(\bar{u}_j) \cdot \bar{x} \in \mathbb{R}^m$, то $\text{Im } \bar{r}'(\bar{u}_j)$ збігається з л. о. $\{\dot{r}_1(\bar{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\bar{u}_j)\}$, де $\dot{r}_1(\bar{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\bar{u}_j)$ — стовпці матриці $\bar{r}'(\bar{u}_j)$. Крім того, вектори $\dot{r}_1(\bar{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\bar{u}_j)$ — л. н. з., тому $\dim \text{Im } \bar{r}'(\bar{u}_j) = k$. Розглянемо множину $W_j := \{\bar{r}(\bar{u}_j) + \bar{r}'(\bar{u}_j) \cdot (\bar{x} - \bar{u}_j) : \bar{x} \in D_j\}$. Нехай $\bar{F}_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — відображення, задане рівністю $\bar{F}_j(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{r}(\bar{u}_j) - \bar{r}'(\bar{u}_j) \bar{u}_j$. Множина $\bar{F}_j^{-1}(W_j) = W_j - \{\bar{r}(\bar{u}_j) - \bar{r}'(\bar{u}_j) \bar{u}_j\} = \bar{r}'(\bar{u}_j)(D_j)$ вкладена в л. о. $\{\dot{r}_1(\bar{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\bar{u}_j)\}$. Існує ортогональна матриця Q_j розмірності $m \times m$ така, що л. о. $\{\dot{r}_1(\bar{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\bar{u}_j)\}$ збігається з $L_k(\vec{0}, Q_j)$. Тоді $W_j \subset L_k(\bar{r}(\bar{u}_j) - \bar{r}'(\bar{u}_j) \cdot \bar{u}_j, Q_j)$. Нехай $\bar{\psi}_j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — лінійний оператор, заданий рівністю $\bar{\psi}_j(\bar{x}) = Q_j \cdot \bar{x}$. Тоді $\bar{\psi}_j^{-1}(\bar{y}) = Q_j^{-1} \cdot \bar{y}$ за будь-якого $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$. Уведемо до розгляду множину $G_j := (\pi_k \circ \bar{\psi}_j^{-1} \circ \bar{r}'(\bar{u}_j))(D_j) \subset \mathbb{R}^k$. Відображення $\pi_k \circ \bar{\psi}_j^{-1} \circ \bar{r}'(\bar{u}_j)$ дифеоморфно переводить \mathbb{R}^k на \mathbb{R}^k . Оскільки D_j — жорданова підмножина \mathbb{R}^k , то і множина G_j є жордановою в \mathbb{R}^k [5, с. 165]. Нехай Z_j — такий замкнений куб в \mathbb{R}^k з ребрами, паралельними координатним осям, що $G_j \subset Z_j$. Неважко пересвідчитися, що $W_j = \bar{\Phi}_j(G_j)$, де $\bar{\Phi}_j = \bar{F}_j \circ \bar{\psi}_j \circ i_m : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Із наведених міркувань робимо висновок, що $W_j \in \mathfrak{N}_k(\bar{r}(\bar{u}_j) - \bar{r}'(\bar{u}_j) \cdot \bar{u}_j, Q_j, Z_j)$. Тому значення $\sigma_k^H(W_j)$ визначене і дорівнює $\int_{W_j} f d\sigma_k$.

Множини W_j ($j = \overline{1, p}$) утворюють «луску», що прилягає до поверхні S . На інтуїтивному рівні зрозуміло, що поверхневу міру S , асоційовану з мірою μ , доцільно вводити так, щоб сума $\sum_{j=1}^p \sigma_k^\mu(W_j)$ за достатньо дрібного розбиття множини параметрів $D = \bigvee_{j=1}^p D_j$ апроксимувала значення поверхневої міри S .

Означення 9. Нехай $S = \bar{r}(D)$ — гладка k -вимірна елементарна поверхня в \mathbb{R}^m . Нехай для кожної послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умову $d(\Delta_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, послідовність сум $\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^\mu(W_j^{(i)})$ має границю при $i \rightarrow \infty$, яка не залежить від вибору послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ (тут $\Delta_i = \{D_j^{(i)} : j = \overline{1, p(i)}\}$, $W_j^{(i)} = \{\bar{r}(\bar{u}_j^{(i)}) + \bar{r}'(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot (\bar{x} - \bar{u}_j^{(i)}) : \bar{x} \in D_j^{(i)}\}$). Тоді будемо казати, що існує величина $\sigma_k^\mu(S)$ — поверхнева міра S , асоційована з мірою μ . За значення $\sigma_k^\mu(S)$

беремо границю послідовності $\left\{ \sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^\mu(W_j^{(i)}) \right\}_{i=1}^\infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Теорема 1. Нехай $D \subset \mathbb{R}^k$ — непорожня жорданова множина, $\bar{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ — ін'єктивна параметризація гладкої k -вимірної елементарної поверхні $S := \bar{r}(D)$ в \mathbb{R}^m . Припустімо, що існує така відкрита множина $U \subset \mathbb{R}^k$, що $\bar{D} \subset U$, $\bar{r} \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, $\text{rang } \bar{r}'(\bar{u}) = k$ в усіх точках $\bar{u} \in U$. Тоді значення $\sigma_k^\mu(S)$ існує і виконується рівність:

$$\sigma_k^\mu(S) = \int_S f d\sigma_k. \tag{11}$$

Доведення. Зауважимо, що з вимірності D за Жорданом випливає обмеженість D , тому $\text{diam}(D) < +\infty$. Крім того, $S = \bar{r}(D) \subset \bar{r}(\bar{D})$, $\bar{r}(\bar{D})$ — компакт в \mathbb{R}^m , тому поверхня S теж є обмеженою ($\text{diam}(S) < +\infty$).

Нехай $\{\Delta_i\}_{i=1}^\infty$ — довільна послідовність скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умову $d(\Delta_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$. Припустімо, що $\Delta_i = \{D_j^{(i)} : j = \overline{1, p(i)}\}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ та кожного $j \in \{1, \dots, p(i)\}$ уведемо множину $W_j^{(i)} := \bar{\phi}_j^{(i)}(D_j^{(i)})$, де $\bar{\phi}_j^{(i)} : \mathbb{R}^k \ni \bar{x} \mapsto \bar{r}(\bar{u}_j^{(i)}) + \bar{r}'(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot (\bar{x} - \bar{u}_j^{(i)}) \in \mathbb{R}^m$, $\bar{u}_j^{(i)} \in D_j^{(i)}$. Беремо довільні індекси $i \in \mathbb{N}$ та $j \in \{1, \dots, p(i)\}$. Тоді $\sigma_k^\mu(W_j^{(i)}) = \int_{W_j^{(i)}} f d\sigma_k = \int_{D_j^{(i)}} (f \circ \bar{\phi}_j^{(i)})(\bar{t}) \cdot \sqrt{\det \Gamma_j^{(i)}(\bar{t})} d\bar{t}$, де $\Gamma_j^{(i)}(\bar{t})$ — матриця Грама системи векторів $\{(\dot{\phi}_j^{(i)})_1(\bar{t}), \dots, (\dot{\phi}_j^{(i)})_k(\bar{t})\}$;

$(\bar{\phi}_j^{(i)})_s(\bar{t})$ — стовпець з номером s матриці $\bar{\phi}_j^{(i)'}(\bar{t})$. Для довільного $\bar{t} \in \mathbb{R}^k$ виконується рівність $\bar{\phi}_j^{(i)'}(\bar{t}) = \bar{r}'(\bar{u}_j^{(i)})$. Таким чином,

$$\Gamma_j^{(i)}(\bar{t}) \equiv ((\dot{r}_\alpha(\bar{u}_j^{(i)}), \dot{r}_\beta(\bar{u}_j^{(i)})))_{\alpha, \beta=1, \bar{k}},$$

де $\dot{r}_s(\bar{u}_j^{(i)})$ — стовпець з номером s матриці $\bar{r}'(\bar{u}_j^{(i)})$. Уведемо функцію $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ рівністю $g(\bar{z}) = \sqrt{\det((\dot{r}_\alpha(\bar{z}), \dot{r}_\beta(\bar{z})))_{\alpha, \beta=1, \bar{k}}}$. Отримуємо

$$\sigma_k^{\#}(W_j^{(i)}) = g(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot \int_{D_j^{(i)}} (f \circ \bar{\phi}_j^{(i)})(\bar{t}) d\bar{t}. \quad (12)$$

Позначимо: $C_1 := \max_{\bar{z} \in D} \|\bar{r}'(\bar{z})\|$ (тут $\|\bar{r}'(\bar{z})\|$ — операторна норма матриці $\bar{r}'(\bar{z})$, яка підпорядкована евклідовій векторній нормі). Можна довести, що $\text{diam}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p(i)} W_j^{(i)}\right) \leq \text{diam}(S) + 2C_1 \cdot \text{diam}(D) < \infty$, тому $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p(i)} W_j^{(i)}$ є обмеженою множиною в \mathbb{R}^m . Нехай $K = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{p(i)} W_j^{(i)}}$. K є компактом в \mathbb{R}^m . Оскільки

$f \in C(\mathbb{R}^m)$, то функція f за теоремою Кантора є рівномірно неперервною на K .

Беремо довільне число $\varepsilon > 0$. Існує таке $\delta > 0$, що $(\bar{x}, \bar{y} \in K; \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \delta) \Rightarrow (|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq \varepsilon)$. Оскільки $d(\Delta_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, то існує такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $i \geq N$ виконується нерівність $d(\Delta_i) \leq (\delta / C_1)$. Нехай $i \geq N$ та $j \in \{1, \dots, p(i)\}$. Тоді для кожного $\bar{t} \in D_j^{(i)}$ справедливим є співвідношення

$$\begin{aligned} \|\bar{\phi}_j^{(i)}(\bar{t}) - \bar{r}(\bar{u}_j^{(i)})\| &= \|\bar{r}(\bar{u}_j^{(i)}) + \bar{r}'(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot (\bar{t} - \bar{u}_j^{(i)}) - \bar{r}(\bar{u}_j^{(i)})\| = \\ &= \|\bar{r}'(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot (\bar{t} - \bar{u}_j^{(i)})\| \leq C_1 (\delta / C_1) = \delta, \end{aligned}$$

а тому і нерівність $|(f \circ \bar{\phi}_j^{(i)})(\bar{t}) - (f \circ \bar{r})(\bar{u}_j^{(i)})| \leq \varepsilon$.

Розглянемо величину

$$\eta_i := \left| \sum_{j=1}^{p(i)} g(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot \int_{D_j^{(i)}} (f \circ \bar{\phi}_j^{(i)})(\bar{t}) d\bar{t} - \sum_{j=1}^{p(i)} g(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \bar{r})(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k(D_j^{(i)}) \right|,$$

якщо $i \geq N$. З урахуванням рівності $(f \circ \bar{r})(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k(D_j^{(i)}) = \int_{D_j^{(i)}} (f \circ \bar{r})(\bar{u}_j^{(i)}) d\bar{t}$

отримуємо: $\eta_i = \left| \sum_{j=1}^{p(i)} g(\bar{u}_j^{(i)}) \cdot \int_{D_j^{(i)}} ((f \circ \bar{\phi}_j^{(i)})(\bar{t}) - (f \circ \bar{r})(\bar{u}_j^{(i)})) d\bar{t} \right|$. Позначимо:

$C_2 := \max_{\vec{z} \in D} g(\vec{z})$. Тоді $\eta_i \leq C_2 \cdot \sum_{j=1}^{p(i)} \left| \int_{D_j^{(i)}} ((f \circ \vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t}) - (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)})) d\vec{t} \right|$. Водночас

$$\left| \int_{D_j^{(i)}} ((f \circ \vec{\phi}_j^{(i)})(\vec{t}) - (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)})) d\vec{t} \right| \leq \varepsilon \cdot \lambda_k(D_j^{(i)}). \quad \text{Тому} \quad \eta_i \leq C_2 \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{p(i)} \lambda_k(D_j^{(i)}).$$

Але $D = \bigvee_{j=1}^{p(i)} D_j^{(i)}$, звідки $\sum_{j=1}^{p(i)} \lambda_k(D_j^{(i)}) = \lambda_k(D)$. Таким чином, з урахуванням рівності (12) отримуємо результат: для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $i \geq N$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)}) - \sum_{j=1}^{p(i)} g(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k(D_j^{(i)}) \right| \leq \varepsilon \cdot C_2 \cdot \lambda_k(D),$$

причому $C_2 \lambda_k(D)$ — додатне число, яке не залежить ні від ε , ні від послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Це означає, що

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)}) - \sum_{j=1}^{p(i)} g(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k(D_j^{(i)}) \right) = 0. \quad (13)$$

Послідовність $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{\infty} := \left\{ \sum_{j=1}^{p(i)} g(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot (f \circ \vec{r})(\vec{u}_j^{(i)}) \cdot \lambda_k(D_j^{(i)}) \right\}_{i=1}^{\infty}$ є послідовністю інтегральних сум інтеграла $\int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t}) d\vec{t}$. Оскільки функція

$\vec{t} \mapsto (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t})$ є неперервною на U , вона є рівномірно неперервною на \overline{D} , а тому і на D . У такому випадку $\Sigma_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t}) d\vec{t}$. Тоді

з рівності (13) випливає, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)})$ існує і також дорівнює

$$\int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) g(\vec{t}) d\vec{t}, \quad \text{де} \quad g(\vec{t}) = \sqrt{\det((\dot{r}_{\alpha}(\vec{t}), \dot{r}_{\beta}(\vec{t})))_{\alpha, \beta=1, \overline{k}}}.$$

Помітимо, що $\int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) \sqrt{\det(\dot{r}_{\alpha}(\vec{t}), \dot{r}_{\beta}(\vec{t}))_{\alpha, \beta=1, \overline{k}}} d\vec{t} = \int_S f d\sigma_k$. Показано,

що для будь-якої послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умову $d(\Delta_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, послідовність

$\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu}(W_j^{(i)})$ має границю при $i \rightarrow \infty$, яка не залежить від вибору $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Отже, згідно з означенням 9 $\sigma_k^{\mu}(S)$ існує і дорівнює $\int_S f d\sigma_k$.

Теорему доведено.

Зауваження 4. Нехай S — гладка k -вимірна елементарна поверхня в \mathbb{R}^m , яка задовольняє всі умови теореми 1. Оскільки факт існування класич-

ної поверхневої міри S та її значення $\sigma_k(S)$ не залежать від вибору параметризації поверхні S серед еквівалентних параметризацій, то і факт існування та значення величини $\int_S f d\sigma_k$, яка згідно з формулою (11) збігається з $\sigma_k^\mu(S)$, теж не залежать від вибору параметризації S у класі еквівалентних параметризацій.

ВИСНОВКИ

У роботі побудовано коректну конструкцію поверхневої міри, асоційованої з такою мірою μ у просторі \mathbb{R}^m (взагалі кажучи, неінваріантною), яка є абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега λ_m з неперервною похідною Радона–Нікодіма. Спочатку асоційована поверхнева міра вводиться на кільці допустимих множин k -вимірному афінного підпростору в \mathbb{R}^m ($k \leq m$). Значення цієї міри на паралелепіпедах в \mathbb{R}^m постулюється явною формулою. Після цього поняття асоційованої поверхневої міри переноситься на гладкі k -вимірні елементарні поверхні в \mathbb{R}^m .

Показано, що запропонована асоційована поверхнева міра узагальнює класичну конструкцію поверхневої міри гладкої параметризованої поверхні в \mathbb{R}^m , тобто за умови $\mu = \lambda_m$ асоційована поверхнева міра збігається з класичною. Крім того, значення асоційованої міри гладкої елементарної поверхні не змінюється від заміни її параметризації на еквівалентну.

Отримані результати дають змогу надалі досліджувати еквівалентність конструкції поверхневої міри, асоційованої з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі, з альтернативними підходами до побудови поверхневої міри, наприклад, з конструкцією мір на поверхнях скінченної розмірності, вкладених у банахів багатovid з рівномірною структурою.

ЛІТЕРАТУРА

1. Богданский Ю.В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, № 8. — С. 1030–1048.
2. Богданский Ю.В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой / Ю.В. Богданский, Е.В. Моравецкая // Укр. мат. журн. — 2017. Т. 2 — Т. 69, № 10. — С. 1299–1309.
3. Моравецька К.В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом / К.В. Моравецька // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2017. — № 4. — С. 66–72.
4. Богачев В.И. Основы теории меры / В.И. Богачев. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — Т. 1. — 544 с.
5. Зорич В.А. Математический анализ / В.А. Зорич. — 6-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2012. — Т. 2. — 818 с.
6. Богданський Ю.В. Інтеграл у курсі математичного аналізу: навч. посіб. / Ю.В. Богданський. — К.: НТУУ «КПІ», 2013. — 180 с.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пособ. для вузов / Д.К. Фаддеев. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1984. — 416 с.
8. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1976. — 544 с.

Надійшла 12.11.2019

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 519.004.942

Аналіз негативного потоку гравітаційних хвиль / Мацукі Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 7–18.

Подано математичне пояснення антигравітаційних хвиль, зумовлене спостереженням позитрона в космічних променях. Проаналізовано математичну різницю між позитивними та негативними потоками гравітаційних хвиль; обчислено обертання негативного потоку гравітаційних хвиль, який полягає в стабілізації руху хвиль. У математичних формулах виявлено, що позитивні та негативні потоки рухаються у зворотному один до одного напрямку, тому, якщо спин (обертання) хвиль від планети, яка випускає хвилі, позитивний потік обертається проти годинникової стрілки, тоді як негативний потік — за годинниковою стрілкою. Досліджено можливе походження гравітаційних хвиль і зроблено висновок: негативний потік може виникати, коли з'являється позитивний потік, який залишає отвори в гравітаційному полі, що ініціюється рухами великої маси планети. Рис.: 2. Табл.: 2. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 519.004.942

Анализ негативного потока гравитационных волн / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 7–18.

Приведено математическое объяснение антигравитационных волн, обусловленное наблюдением позитрона в космических лучах. Проанализирована математическая разница между положительными и отрицательными потоками гравитационных волн; вычислено вращение негативного потока гравитационных волн, который заключается в стабилизации движения волн. В математических формулах обнаружено, что положительные и отрицательные потоки движутся в обратном направлении друг от друга, поэтому, если спин (вращение) волн от планеты, испускающей волны, положительный поток вращается против часовой стрелки, тогда как отрицательный поток — по часовой стрелке. Исследовано возможное происхождение гравитационных волн и сделан вывод: отрицательный поток может возникать, когда появляется положительный поток, который оставляет отверстия в гравитационном поле, что инициируется движениями большой массы планеты. Рис.: 2. Табл.: 2. Библиогр.: 6 назв.

УДК 621.313

Моделирование режимов работы двухмашинного асинхронного агрегата в трехфазной системе координат / Луцьо В.В., Сильвестров А.Н., Спинул Л.Ю. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 19–29.

Разработка экспериментальных образцов новых видов электрических машин, а также поиск наиболее перспективных направлений их использования требуют основательных теоретических исследований. Наличие адекватной математической модели позволяет предвидеть возможные ошибки в работе будущих образцов и избежать их на этапе проектировки. Предложена математическая модель двухмашинного асинхронного агрегата [1] с вращающимся индуктором в трехфазной системе координат. Модели первичной и вторичной асинхронных машин разделены на две отдельные структурные единицы. В модели вторичной машины отображено влияние вращающегося индуктора на движение ротора и обеспечена связь с первичной машиной по скорости и электромагнитному моменту. Получены графики переходных процессов для работы двухмашинного асинхронного двигателя в режимах хо-

лостого хода и под нагрузкой, а также при работе отдельно вторичной машины. На основе графиков проанализированы варианты пуска узлов двухмашинного мотора. Построенная в среде MatLab структурная схема модели наглядно отображает связь первичной и вторичной машин. Рис.: 8. Библиогр.: 6 назв.

UDC 621.313

Modeling of operating modes of two-machine induction motor in three-phase coordinate system / Lutso V.V., Silvestrov A.M, Spinul L.Yu. // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 4. — P. 19–29.

The development of experimental prototypes of new types of electric machines as well as searching for them the most effective application areas demands the profound theoretical research. An availability of an adequate mathematical model allows to predict possible errors in operating of upcoming prototypes during the design stage. The mathematical model of two-machine induction motor with the rotary inductor [1] in three-phase coordinate system is given in the article. Models of primary and secondary machines are divided into two structural units. An influence of a rotary inductor on the movement of a rotor is described in the model of the secondary machine, as well as the connection with the primary machine is provided through parameters of torque and rotating speed. Transient response plots are obtained for a two-machine induction motor operating under no load and under nominal load, as well as for the case when only the secondary machine is operating. Based on the plots, the different variants of starting of various motor parts are analyzed. The structure diagram of the model built in MatLab programming environment clearly shows the connection between the primary and secondary machines. Figs: 8. Refs: 6 titles.

УДК 004.8

Прогнозування емісії SO₂ вулкана Кілауеа з використанням інтелектуального методу аналізу даних / Забелін С.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 30–38.

Кілауеа є одним з найактивніших і відомих вулканів у світі, і велика частина знань про вулканізм ґрунтується на його дослідженнях. Під час тривалого вивчення вулканів запропоновано багато різних методів прогнозування їх активності, від сейсмологічного аналізу до статистичного аналізу їх викидів. Однак комплексний аналіз масивів даних за допомогою інтелектуальних методів аналізу даних раніше не проводився. Із використанням нечітких методів оброблення даних, нейронної мережі, вулканічних і атмосферних показників спрогнозовано викиди SO₂ на період від одного до трьох місяців. Рис.: 6. Табл.: 1. Бібліогр.: 11 назв.

УДК 004.8

Прогнозирование эмиссии SO₂ вулкана Килауэа с использованием интеллектуального метода анализа данных / Забелин С.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 30–38

Килауэа является одним из самых активных и известных вулканов в мире, и большая часть знаний о вулканизме основывается на исследованиях. Во время длительного изучения вулканов было предложено много различных методов прогнозирования их активности от сейсмологического анализа до статистического анализа их выбросов. Однако комплексный анализ массивов данных с помощью интеллектуальных методов анализа данных ранее не проводился. С использованием нечетких методов обработки данных, нейронной сети, вулканических и атмосферных показателей спрогнозированы выбросы SO₂ на период от одного до трех месяцев. Рис.: 6. Табл.: 1. Библиогр.: 11 назв.

УДК 004.93'11

Зниження шуму в КТ зображенні на основі адаптивного порогового оброблення / Петров М.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 39–48.

Шум у зрізах реконструйованої рентгенівської комп'ютерної томографії (КТ) є складним, нестационарним і невизначено розподіленим. Оброблення зображення потрібне для поставлення якісного медичного діагнозу. Це потребує досить великого відношення детальних контрастів до амплітуди шумової складової. Подано адаптивний метод зниження шуму на КТ зображеннях, що ґрунтується на локальній статистичній оцінці шумової складової в домені репагулярного вейлвет-перетворення. Ураховуючи просторову залежність інтенсивності шуму, порогова константа для оброблення високочастотних коефіцієнтів у запропонованому способі стискання є функцією локального стандартного відхилення шуму для пікселя зображення. Експертне дослідження проведено з використанням різних зображень для оцінювання ефективності запропонованого алгоритму. Рис.: 6. Табл.: 1. Бібліогр.: 24 назв.

УДК 004.93'11

Понижение шума в КТ изображении на основе локально адаптивной пороговой обработки / Петров М.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 39–48.

Шум в срезах реконструированной рентгеновской компьютерной томографии (КТ) является сложным, нестационарным и неопределенно распределенным. Обработка изображения необходима для постановки качественного медицинского диагноза. Это требует достаточно большого соотношения между детальными контрастами и амплитудой шумовой составляющей. Представлен адаптивный метод снижения шума на КТ изображениях, основанный на локальной статистической оценке шумовой составляющей в домене репагулярного вейлвет-преобразования. Учитывая пространственную зависимость интенсивности шума, пороговая константа для обработки высокочастотных коэффициентов в предлагаемом способе сжатия является функцией локального стандартного отклонения шума для каждого пикселя изображения. Экспериментальные исследования проведены с использованием разных изображений для оценки эффективности предложенного алгоритма. Рис.: 6. Табл.: 1. Библиогр.: 24 назв.

УДК 62-519.8

Проектування систем відеоспостереження / Абдулхамід М., Мурунгі М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 49–58.

Описано кроки проектування системи відеоспостереження. Розглянуто теорію типів систем відеоспостереження, їх компоненти, вибір найкращого обладнання, а також детальний віртуальний дизайн. Після уведення концепції систем відеоспостереження обговорено проектні міркування та верифікації дизайну. Системі призначено для контролю одного поверху банку; на моніторі відображається бажане зображення з імітованої реалізації системи. Рис.: 4. Табл.: 1. Бібліогр.: 4 назви.

УДК 62-519.8

Проектирование систем видеонаблюдения / Абдулхамид М., Мурунги М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 49–58.

Описаны шаги проектирования системы видеонаблюдения. Рассмотрены теория типов системы видеонаблюдения, их компоненты, выбор лучшего оборудования, а также детальный виртуальный дизайн. После введения концепции систем

видеонаблюдения обсуждены проектные соображения и верификации дизайна. Система предназначена для контроля одного этажа банка; на мониторе отображается желаемое изображение с имитированной реализацией системы. Рис.: 4. Табл.: 1. Библиогр.: 4 назв.

УДК 004

Обработка информации в системе управления беспилотного летательного аппарата / Граф М.С., Квасников В.П. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 59–65.

Показано создание экспертной системы для обработки информации в системе управления беспилотного летательного аппарата либо дистанционно пилотируемых авиационных системах, задание и выполнение. Рассмотрен алгоритм построения учебного модуля экспертной системы. Приведены состав и основные компоненты экспертных систем, на основании которых построены структура и схема взаимодействия её компонентов с учетом участия человека в структуре при обучении. Представлено взаимодействие системы с источниками входных данных и формулировкой решений. Предложено представление в виде множеств, каждое из которых отвечает определенному блоку, приведены отношения, которые отвечают за взаимодействие экспертной системы во времени. Рис.: 2. Библиогр.: 24 назв.

UDC 004

Information processing in the control system of an unmanned aerial vehicle / Graf M.S., Kvasnikov V.P. // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 4. — P. 59–65.

The creation, specification, and operation of an expert system for processing information in the control system of an unmanned or remotely operated aerial vehicle is shown. The algorithm for constructing the training module of the expert system is considered. The composition and main components of expert systems are given, on the basis of which the structure and the interaction scheme of its components are built, taking into account the participation of a person in the structure during training. The interaction of the system with the sources of input data and the formulation of solutions is presented. A representation in the form of sets is proposed, each of which corresponds to a certain block, relations are given that are responsible for the interaction of the expert system in time. Figs: 2. Refs: 24 titles.

УДК 004.89

Методи абстрактного реферування текстів: огляд літератури / Шипік Д.В., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 66–76.

Містить огляд літератури, присвяченої методам абстрактного реферування текстів. Розглянуто класифікацію методів абстрактного реферування. Із появою методів реферування текстів у 1950-х рр. техніки створення рефератів постійно покращувались, але оскільки абстрактне реферування потребує потужних технік для оброблення/генерації тексту, найбільший прогрес досягнуто в останні роки. Поточний швидкий розвиток у сфері як оброблення природної мови в цілому, так і автоматичного реферування зокрема робить особливо необхідним аналіз прогресу в цій сфері. Надано загальне уявлення як про попередні підходи, так і найновіші, включаючи пояснення методів і підходів. Додатково подано кількісні оцінки методів, запропонованих в оглянутих джерелах. Табл.: 4. Бібліогр.: 36 назв.

УДК 004.89

Методы абстрактного реферирования текстов: обзор литературы / Шипик Д.В., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 66–76.

Содержит обзор литературы, посвященной методам абстрактного реферирования текстов. Рассмотрена классификация методов абстрактного реферирования. С появлением методов реферирования текстов в 1950-х гг. техники создания рефератов постоянно улучшались, но поскольку абстрактное реферирование требует мощных техник для обработки/генерации текста, наибольший прогресс был достигнут в последние годы. Текущее быстрое развитие в сфере как обработки естественного языка в целом, так и автоматического реферирования в частности делает особенно необходимым анализ прогресса в этой сфере. Дано общее представление как про более предыдущие подходы, так и про новые, включая объяснение методов и подходов. Дополнительно представлены оценки методов, предложенных в рассмотренных работах. Табл.: 4. Библиогр.: 36 назв.

ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ
ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ СИСТЕМ ПІДТРИМАННЯ
ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

THEORETICAL AND APPLIED PROBLEMS OF
INTELLECTUAL SYSTEMS FOR DECISION
MAKING SUPPORT

УДК 004.056.53

Сравнение эффективности классификаторов машинного обучения в контексте голосовой биометрии / Данилов В.Я., Грушко Я.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 77–84.

Выполнено сравнение семи популярных классификаторов Python-библиотеки scikit-learn в контексте эффективности работы системы голосовой биометрии. Для выделения векторов признаков голоса лица, проходящего верификацию, использован метод MFCCs (Mel Frequency Cepstral Coefficients). В исследовании использованы следующие классификаторы: K-NN (K-Nearest neighbours classifier), MLP (Multilayer perceptron), SVM (Support vector machine), DTC (Decision tree classifier), GNB (Gaussian Naive Bayes classifier), ABC (AdaBoost classifier), RFC (Random forest classifier). В качестве анализируемой выборки взяты голоса 40 человек длительностью в среднем девять минут на человека. Критерии эффективности классификаторов выбраны в соответствии с потребностями систем голосовой биометрии. В рамках работы проведено моделирование мошенничества в процессе аутентификации. Наиболее эффективным в голосовом распознавании оказался классификатор K-NN, который, при нулевом количестве неверно допущенных человек, обеспечил на 3–85% высшую точность верификации, чем другие классификаторы. Рис.: 3. Табл.: 1. Библиогр.: 14 назв.

UDC 004.056.53

Comparison of the effectiveness of machine learning classifiers in the context of voice biometrics / Danilov V.Ya., Grushko Ya.G. // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 4. — P. 77–84.

The purpose of this work was to compare the seven popular classifiers of scikit-learn python-based library in the context of the performance of the voice biometrics system. The MFCCs (Mel-Frequency Cepstral Coefficients) method was used to compute the feature vectors of the person's voice undergoing verification. The classifiers involved in this study are the following: K-NN (K-Nearest neighbors classifier), MLP (Multilayer perceptron), SVM (Support vector machine), DTC (Decision tree classifier), GNB (Gaussian Naive Bayes classifier), ABC (AdaBoost classifier), RFC (Random forest classifier). As the data, we used voice samples from 40 individuals with an average duration of 9 minutes per person. The performance criteria of the classifiers were dictated by the needs of voice biometrics systems. Thus, in the framework of this work, the fraud simulation was conducted during authentication. The most effective in voice recognition was the K-NN classifier, which, with zero number of incorrectly admitted persons, provided 3-85% better accuracy of verification than other classifiers. Figs: 3. Tables: 1. Refs: 14 titles.

УДК 004.855.5

Використання згорткових нейронних мереж для діагностування раку молочної залози / Надеран М., Зайченко Ю.П., Наполі А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 85–93.

Протягом останніх кількох років згорткові нейронні мережі широко використовуються в комп'ютерній діагностиці та аналізі медичних зображень. Основна ідея роботи полягала в розробленні модифікованої архітектури CNN для досягнення більшої чутливості і точності для виявлення раку молочної залози на ранніх стадіях порівняно з уже існуючими методами. Для цього перед навчанням CNN розглянуто декілька факторів, таких як попереднє оброблення даних, модель, набір даних і т.ін. У запропонованій моделі використовувалися гіперпараметри dropout rate 0,2, epoch 38 і batch size 33, а також два повнозв'язні шари в модифікованій моделі. Середній показник повноти (чутливості) в останніх працях становить 74%. Точність і повнота запропонованої моделі класифікації раку молочної залози склали 66,66% і 85,7% відповідно. Рис.: 4. Табл.: 4. Бібліогр.: 20 назв.

УДК 004.855.5

Использование сверточных нейронных сетей для диагностики рака молочной железы / Надеран М., Зайченко Ю.П., Наполи А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 85–93.

В течение последних нескольких лет сверточные нейронные сети широко используются в компьютерной диагностике и анализе медицинских изображений. Основная идея работы состояла в модифицировании архитектуры CNN для достижения большей чувствительности и точности в целях выявления рака молочной железы на ранних стадиях по сравнению с уже существующими методами. Для этого перед обучением CNN рассмотрено несколько факторов, таких как предварительная обработка данных, модель, набор данных и др. В предложенной модели использовались гиперпараметры dropout rate 0,2, epoch 38 и batch size 33, а также два полносвязанных слоя в модифицированной модели. Средний показатель полноты (чувствительности) в последних работах составляет 74%. Точность и полнота предлагаемой модели классификации рака молочной железы составили 66,66% и 85,7% соответственно. Рис.: 4. Табл.: 4. Библиогр.: 20 назв.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 004.891.2

Исследование адекватности интервальных нечетких моделей типа 2 в задачах идентификации сложных объектов / Кондратенко Н.Р., Снигур О.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 94–104.

Предложен метод построения множества нечетких моделей типа 2 с интервальными функциями принадлежности, обладающий свойством обобщения конечных результатов и адекватный экспериментальным данным. Предложена также процедура обобщения интервальных выходов нечетких моделей из полученного множества. Помимо всех преимуществ построения нечетких моделей из экспериментальных данных, предложенный подход дает возможность учитывать мнение нескольких экспертов и на ее основании осуществлять коррекцию входного вектора данных. Конечный результат имеет вид интервала, по ширине которого возможно сделать вывод об адекватности отображения моделью предметной области. Путем экспериментальных исследований, связанных с прикладной задачей оценки артезианской скважины с точки зрения перспективности ее дальнейшей эксплуатации, показано, что с помощью полученного интервала, обобщающего результаты работы

всех моделей, возможно найти выходное значение, пригодное для решения поставленной задачи. Рис.: 3. Табл.: 1. Библиогр.: 12 назв.

UDC 004.891.2

Investigating adequacy of interval type-2 fuzzy models in complex objects identification problems / Kondratenko N.R., Snihur O.O. // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 4. — P. 94–104.

A method of building a set of type-2 fuzzy models with interval membership functions is proposed. The resulting set possesses the ability to generalize final results and is supported by experimental results. A procedure of generalizing interval outputs of fuzzy models from the obtained set is proposed. Apart from all the advantages of building fuzzy models based on experimental data, the proposed approach allows to account for multiple experts' opinions, and based on that, to perform the correction of the input vector data. The final result is presented as an interval. Based on the interval's width, it is possible to make conclusions on how adequately the model reflects the subject area. Using experimental research related to a practical problem of evaluating of how promising an artesian well is, it is shown that based on the obtained interval, that generalizes results of all models' operation, it is possible to find an output value that would be satisfactory for solving the presented problem. Figs: 3. Tables: 1. Refs: 12 titles.

УДК 004.852; 004.94

Игровые стратегии принятия решений в иерархических системах. II. Компьютерное моделирование стохастической игры / Кравец П.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 105–118.

Разработан алгоритм решения стохастической игры для принятия решений в иерархических системах в условиях неопределенности. Выполнен анализ результатов компьютерного моделирования стохастической игры для автократической, анархической и демократической иерархических систем принятия решений со структурой бинарного дерева. Установлено, что наименьший период обучения для достижения близкого к консенсусному решению имеют автократически-центричные иерархические системы. Изучено влияние параметров на сходимость игрового метода в процессе поиска консенсусного или мажоритарного коллективного решения. Рис.: 15. Библиогр.: 20 назв.

UDC 004.852; 004.94

Game strategies for decision making in hierarchical systems. II. Computer simulation of stochastic game / Kravets P.A. // System Research and Information Technologies. — 2019. — № 4. — P. 105–118.

An algorithm for solving a stochastic game for decision making in hierarchical systems under uncertainty is developed. An analysis of the results of computer modeling of a stochastic game for autocratic, anarchic and democratic hierarchical decision making systems with the binary tree structure is performed. It has been established that autocratic-centric hierarchical systems have the smallest training time for achieving a close-to-consensus solution. The influence of parameters on the convergence of the game method in the process of finding a consensus or a majoritarian collective solution is studied. Figs: 15. Refs: 20 titles.

НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ,
ІНФОРМАЦІЇ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

NEW METHODS IN SYSTEM ANALYSIS, COMPUTER
SCIENCE AND THEORY OF DECISION MAKING

УДК 517.518.11+517.518.18

Поверхностные меры, ассоциированные с неинвариантной мерой в конечномерном пространстве / Снежко Б.Н. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2019. — № 4. — С. 119–137.

Предложено обобщение классической конструкции поверхностной меры для гладких элементарных поверхностей произвольной коразмерности, вложенных в конечномерное евклидово пространство, а именно: представлен подход к построению поверхностной меры, ассоциированной с мерой в пространстве, абсолютно непрерывной относительно инвариантной меры Лебега. Приведенная конструкция ассоциированной поверхностной меры является корректной в том смысле, что значение указанной меры поверхности не зависит от выбора ее параметризации в классе эквивалентных параметризаций. Адекватность предложенного подхода подтверждается тем, что поверхностная мера, ассоциированная с инвариантной мерой Лебега, совпадает с известной классической конструкцией поверхностной меры, частный случай которой (площадь двумерной гладкой параметризованной поверхности в трехмерном пространстве) рассматривается в курсе математического анализа. Библиогр.: 8 назв.

UDC 517.518.11+517.518.18

Surface measures associated with a non-invariant measure in a finite-dimensional space / Snizhko B.M. // System Research and Information Technologies. — 2019. — N 4. — P. 119–137.

A generalization of the classical surface measure construction for smooth elementary surfaces of the arbitrary codimension embedded in a finite-dimensional Euclidean space is proposed. Namely, an approach to constructing a surface measure associated with a measure that is absolutely continuous with respect to the invariant Lebesgue measure is presented. This construction of the associated surface measure is correct in the sense that the value of the indicated surface measure does not depend on the choice of its parameterization in a class of equivalent parameterizations. An adequacy of the proposed approach is confirmed by the fact that the surface measure associated with the invariant Lebesgue measure coincides with the well-known classical surface measure construction, a particular case of which (area of a two-dimensional smooth parameterized surface in a three-dimensional space) is considered in the calculus course. Refs: 8 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Абдулхамід Моханад,

PhD в електротехніці, доцент кафедри електротехніки Університету Аль-Хікма, Ірак, Багдад

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Граф Марина Сергіївна,

здобувач освітньо-наукового рівня PhD, головний спеціаліст з розробки та впровадження систем кібербезпеки ДП ДГЗІФ «УКРІНМАШ», Україна, Київ

Грушко Ярослав Володимирович,

студент ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Данилов Валерій Якович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Забелін Станіслав Ігорович,

аспірант кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зайченко Юрій Петрович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Квасніков Володимир Павлович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютеризованих електротехнічних систем та технологій Національного авіаційного університету, Україна, Київ

Кондратенко Наталія Романівна,

доцент, кандидат технічних наук, професор кафедри захисту інформації Вінницького національного технічного університету, Україна, Вінниця

Кравець Петро Олексійович,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри інформаційних систем та мереж Національного університету «Львівська політехніка», Україна, Львів

Луцьо Валерій Валерійович,

методист ТОВ «Робот Скул», Україна, Полтава

Мацукі Йошіо,

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Мурунгі Мвонгейра,

бакалавр наук в електротехніці, асистент викладача кафедри електротехніки Університету Найробі, Кенія, Найробі

Надеран Марьям,

аспірантка кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Наполі Амадео,

професор Університету Нансі, Франція, Нансі

Петров Мирослав,

PhD, доцент кафедри комп'ютерних систем та технологій Великотирновського університету імені Св. Кирила та Св. Мефодія, Болгарія, Велике Тирново

Сільвестров Антон Миколайович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри теоретичної електротехніки КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Снігур Ольга Олексіївна,

кандидат технічних наук, приватний підприємець, Україна, Вінниця

Сніжко Богдан Миколайович,

студент магістратури ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Спінул Людмила Юріївна,

доцент, кандидат технічних наук, доцент кафедри теоретичної електротехніки КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Шипік Данило Володимирович,

аспірант кафедри математичних методів системного аналізу ІПСА КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Зміст журналу
«Системні дослідження та інформаційні технології»
за 2019 р.

ЗМІСТ № 1

<i>Згуровський М.З., Перестюк М.М.</i> Моделювання ліній розлому цивілізацій на початку XXI століття в контексті їх фундаментальних відмінностей	7
<i>Данилов В.Я., Гуськова В.Г., Бідюк П.І., Жиров О.Л.</i> Система підтримання прийняття рішень для прогнозування фінансових процесів на основі принципів системного аналізу	20
<i>Brajon Jordan, Makarenko Alexander.</i> Game of life with non-regular space with boundaries: glider case	37
<i>Мельник І.В., Починок А.В.</i> Система конструктивних геометричних параметрів моделі електронних гармат високовольтного тліючого розряду, які формують профільні електронні пучки	50
<i>Луцьо В.В., Сільвестров А.М.</i> Математична модель двомашинного асинхронного двигуна з рухомим індуктором	66
<i>Панкратова Н.Д., Хорошун Л.П., Яхин С.Л.</i> Построение модели динамики производственно-рыночных процессов в двухсекторной макроэкономике	75
<i>Zaychenko Yuriy, Zaychenko Helen.</i> Fuzzy GMDH and its application to forecasting financial processes	91
<i>Запорожко І.О., Борозенець Д.А., Зубчук В.І.</i> Оцінювання адаптивних резервів людини за даними пульсометрії	110
<i>Rysmennyi Ihor, Kyslyi Roman, Petrenko Anatoly.</i> Edge computing in multi-scope service-oriented mobile healthcare systems	118
<i>Бохонов Ю.Є.</i> Знаходження періодичного розв'язку рівняння Мат'є із запізненням	128
<i>Яковлева А.П., Круть В.М.</i> Проблема пригнічення корупції з використанням оптимального керування	132
Реферати	141
Відомості про авторів	149

ЗМІСТ № 2

<i>Мельник І.В., Починок А.В.</i> Алгоритм розрахунку фокальних параметрів профільних електронних пучків, які формуються газорозрядними гарматами	7
<i>Matsuki Yoshio, Bidyuk Petro I.</i> Empirical investigation on influence of moon's gravitational-field to earth's global temperature	18
<i>Naderan Maryam, Zaychenko Yuriy.</i> Methods for improving accuracy of the dementia diagnosis using feature dimension reduction	25
<i>Гуськова В.Г., Бідюк П.І.</i> Оцінювання кредитоспроможності позичальників кредитів методами інтелектуального аналізу даних	31
<i>Литвинов В.А., Майстренко С.Я., Хурцилава К.В., Костенко С.В.</i> Оцінювання контролювальних і коригувальних властивостей референтного словника системи перевірки і виправлення орфографії	49
<i>Махорт А.П.</i> Алгоритми визначення станів рівноваги економічної системи за наявності монополістів та з різними типами поведінки споживачів	65
<i>Марценюк В.П., Сверстюк А.С.</i> Експоненціальна оцінка для рекурентної нейронної мережі з дискретним запізненням	83
<i>Капустян О.А., Наконечний О.Г.</i> Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидкоколивними коефіцієнтами під час нелінійних спостережень	94
<i>Полищук О.Д., Яджак М.С.</i> Мережеві структури та системи. IV. Паралельне опрацювання результатів неперервного моніторингу	105
<i>Kislenko Y.I.</i> On the way to solving the problem of "Semantic Web – Data Base"	115
Реферати	141
Відомості про авторів	148

ЗМІСТ № 3

<i>Matsuki Y., Bidyuk P.I.</i> Calculating energy density and spin momentum density of Moon's gravitational waves in rectilinear coordinates (Part-4)	7
<i>Кузнєцова Н.В., Грушко Я.В.</i> Дослідження і прогнозування успішності стартапів платформи kickstarter	18
<i>Чапалюк Б.В., Зайченко Ю.П.</i> Використання рекурентних нейронних мереж для автоматичної діагностики раку легенів	33
<i>Kolyada Vladimir P.</i> To the theory of systems: a brief look at the underlying of notions in the field of conceptual content	41
<i>Криваковська Р.В.</i> Система підтримання прийняття рішень для оцінювання стану повітря за неточних вхідних даних	55
<i>Кравець П.О.</i> Ігрові стратегії прийняття рішень в ієрархічних системах. I. Математична модель стохастичної гри	63
<i>Полуциганова В.І., Смирнов С.А.</i> Методологія побудови основних метрик Q-аналізу та їх застосування	76
<i>Романенко В.Д., Милявський Ю.Л.</i> Метод автоматизації управління в когнітивних картах на основі синтезу приращених весових коефіцієнтів і координат вершин	89
<i>Зак Ю.А.</i> Алгоритми приближеного рішення многостадійних Flow-Shop-Problem	100
<i>Кирилюк В.С., Левчук О.І., Гавриленко О.В., Сукач М.К.</i> Математичне моделювання напруженого стану ортотропного п'єзоелектричного матеріалу зі сфероїдальною порожниною під внутрішнім тиском	110
<i>Бондаренко В.Г., Маркевич І.С.</i> Сходимость итераций в формуле Троттера–Далецкого для нелинейного возмущения	118
<i>Спекторский И.Я.</i> Функциональные последовательности с нечетким аргументом: сходимость множеств уровня	126
Реферати	141
Відомості про авторів	149

ЗМІСТ № 4

<i>Matsuki Y., Bidyuk P.I.</i> Analysis of negative flow of gravitational waves	7
<i>Луцьо В.В., Сільвестров А.М., Спінул Л.Ю.</i> Моделювання режимів роботи двомашинного асинхронного агрегата у трифазній системі координат	19
<i>Zabielin S.I.</i> Forecasting SO ₂ emission of Kilauea volcano using intelligent method of data analysis	30
<i>Petrov M.D.</i> CT Image denoising based on locally adaptive thresholding	39
<i>Abdulhamid Mohanad, Murungi Mwongeera.</i> System design of video surveillance	49
<i>Граф М.С., Квасніков В.П.</i> Інтелектуальна система оброблення інформації блока керування безпілотного повітряного судна	59
<i>Shypik D.V., Bidyuk P.I.</i> A literature review of abstractive summarization methods	66
<i>Данилов В.Я., Грушко Я.В.</i> Порівняння ефективності класифікаторів машинного навчання у контексті голосової біометрії	77
<i>Naderan M., Zaychenko Yu., Napoli A.</i> Using convolutional neural networks for breast cancer diagnosing	85
<i>Кондратенко Н.Р., Снігур О.О.</i> Дослідження адекватності інтервальних нечітких моделей типу 2 в задачах ідентифікації складних об'єктів	94
<i>Кравець П.О.</i> Ігрові стратегії прийняття рішень в ієрархічних системах. II. Комп'ютерне моделювання стохастичної гри	105
<i>Сніжко Б.М.</i> Поверхневі міри, асоційовані з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі	119
Реферати	138
Відомості про авторів	146
Зміст журналу «Системні дослідження та інформаційні технології» за 2019 р.	148
Автори статей за 2019 р.	150
<i>Системні дослідження та інформаційні технології, 2019, № 4</i>	149

АВТОРИ СТАТЕЙ ЗА 2019 р.

Абдулхамід Моханад, № 4
Бідюк Петро Іванович, № 1,2,3,4
Бондаренко Віктор Григорович, № 3
Борозенець Данило Андрійович, № 1
Бохонов Юрій Євгенович, № 1
Бражон Джордан, № 1
Гавриленко Олена Валеріївна, № 3
Граф Марина Сергіївна, № 4
Грушко Ярослав Володимирович, № 3,4
Гуськова Віра Геннадіївна, № 1,2
Данилов Валерій Якович, № 1,4
Жиров Олександр Леонідович, № 1
Забелін Станіслав Ігорович, № 4
Зайченко Олена Юріївна, № 1
Зайченко Юрій Петрович, № 1,2,3,4
Зак Юрій Олександрович, № 3
Запорожко Інна Олександрівна, № 1
Згуровський Михайло Захарович, № 1
Зубчук Віктор Іванович, № 1
Капустян Олена Анатоліївна, № 2
Квасніков Володимир Павлович, № 4
Кирилюк Віталій Семенович, № 3
Кисленко Юрій Іванович, № 2
Кислий Роман Володимирович, № 1
Коляда Володимир Петрович, № 3
Кондратенко Наталія Романівна, № 4
Костенко Святослав Володимирович, № 2
Кравець Петро Олексійович, № 3,4
Криваковська Регіна Володимирівна, № 3
Круть Валерія Миколаївна, № 1
Кузнєцова Наталія Володимирівна, № 3
Левчук Ольга Іванівна, № 3
Литвинов Валерій Андроникович, № 2
Луцьо Валерій Валерійович, № 1,4
Майстренко Світлана Яківна, № 2
Макаренко Олександр Сергійович, № 1
Маркевич Ігор Сергійович, № 3
Марценюк Василь Петрович, № 2
Махорт Андрій Пилипович, № 2
Мацукі Йошіо, № 2,3,4
Мельник Ігор Віталійович, № 1,2
Мілявський Юрій Леонідович, № 3
Мурунгі Мвонгейра, № 4,
Надеран Марьям, № 2,4
Наконечний Олександр Григорович, № 2
Наполі Амадео, № 4
Панкратова Наталія Дмитрівна, № 1
Перестюк Марія Миколаївна, № 1
Петренко Анатолій Іванович, № 1
Петров Мирослав, № 4,
Письменний Ігор Олександрович, № 1
Поліщук Олександр Дмитрович, № 2
Полуциганова Вікторія Ігорівна, № 3
Починок Аліна Володимирівна, № 1,2
Романенко Віктор Демидович, № 3
Сверстюк Андрій Степанович, № 2
Сільвестров Антон Миколайович, № 1,4
Смирнов Сергій Анатолійович, № 3
Снігур Ольга Олексіївна, № 4,
Сніжко Богдан Миколайович, № 4
Спекторський Ігор Якович, № 3
Спінул Людмила Юріївна, № 4
Сукач Михайло Кузьмич, № 3
Хоршун Леонід Петрович, № 1
Хурцилава Костянтин Вікторович, № 2
Чапалюк Богдан Володимирович, № 3
Шипік Данило Володимирович, № 4
Яджак Михайло Степанович, № 2
Яковлева Алла Петрівна, № 1
Яхін Сергій Леонідович, № 1