

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ КОМПЛЕКС
«ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»
НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

МІЖНАРОДНИЙ НАУКОВО-ТЕХНІЧНИЙ ЖУРНАЛ

№ 3

2018

ЗАСНОВАНО У ЛИПНІ 2001 р.

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

Головний редактор

М.З. ЗГУРОВСЬКИЙ, акад. НАН України

Заступник головного редактора

Н.Д. ПАНКРАТОВА, чл.-кор. НАН України

Члени редколегії:

П.І. АНДОН, акад. НАН України

А.В. АНІСІМОВ, чл.-кор. НАН України

Г.-В. ВЕБЕР, проф., Турція

О.Д. ГВІШАНИ, акад. РАН, Росія

П.О. КАСЬЯНОВ, проф., д.ф.-м.н.,
Україна

В.М. КУНЦЕВИЧ, акад. НАН України

О.А. ПАВЛОВ, проф., д.т.н., Україна

Л. САКАЛАУСКАС, проф., Литва

А.М. САЛЕМ, проф., Єгипет

І.В. СЕРГІЄНКО, акад. НАН України

Х.-М. ТЕОДОРЕСКУ, проф., Румунія

Е.О. ФАЙНБЕРГ, проф., США

Я.С. ЯЦКІВ, акад. НАН України

АДРЕСА РЕДАКЦІЇ:

03056, м. Київ,

просп. Перемоги, 37, корп. 35,

ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Тел.: 204-81-44; факс: 204-81-44

E-mail: journal.iasa@gmail.com

http://journal.iasa.kpi.ua

У номері:

• **Прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи**

• **Проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі**

• **Математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем**

• **Методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності**

NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF UKRAINE
EDUCATIONAL AND SCIENTIFIC COMPLEX
«INSTITUTE FOR APPLIED SYSTEM ANALYSIS»
OF THE NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF UKRAINE
«IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE»

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

INTERNATIONAL SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

№ 3

2018

IT IS FOUNDED IN JULY 2001

EDITORIAL BOARD:

The editor – in – chief

M.Z. ZGUROVSKY, Academician of
NASU

Deputy editor – in – chief

N.D. PANKRATOVA, Correspondent
member of NASU

Associate editors:

F.I. ANDON, Academician of
NASU

A.V. ANISIMOV, Correspondent
member of NASU

E.A. FEINBERG, Prof., USA

A.D. GVISHIANI, Academician of RAS,

P.O. KASYANOV, Prof., Ukraine

V.M. KUNTHEVICH, Academician of NASU

A.A. PAVLOV, Prof., Ukraine

L. SAKALAIUSKAS, Prof., Lithuania

A.M. SALEM, Prof., Egypt

I.V. SERGIENKO, Academician of NASU

H.-N. TEODORESKU, Prof., Romania

G.-W. WEBER, Prof., Turkey

Ya.S. YATSKIV, Academician of NASU

In the issue:

• **Progressive information technologies, high-efficiency computer systems**

• **Problem- and function-oriented computer systems and networks**

• **Mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research**

• **Methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty**

THE EDITION ADDRESS:

03056, Kyiv,
av. Peremogy, 37, building 35,
Institute for Applied System Analysis
at the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute
Phone: **204-81-44**; Fax: **204-81-44**
E-mail: journal.iasa@gmail.com
<http://journal.iasa.kpi.ua>

Шановні читачі!

Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» видає міжнародний науково-технічний журнал

«СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ».

Журнал публікує роботи теоретичного та прикладного характеру в широкому спектрі проблем, пов'язаних із системними дослідженнями та інформаційними технологіями.

Провідні тематичні розділи журналу:

Теоретичні та прикладні проблеми і методи системного аналізу; теоретичні та прикладні проблеми інформатики; автоматизовані системи управління; прогресивні інформаційні технології, високопродуктивні комп'ютерні системи; проблеми прийняття рішень і управління в економічних, технічних, екологічних і соціальних системах; теоретичні та прикладні проблеми інтелектуальних систем підтримки прийняття рішень; проблемно і функціонально орієнтовані комп'ютерні системи та мережі; методи оптимізації, оптимальне управління і теорія ігор; математичні методи, моделі, проблеми і технології дослідження складних систем; методи аналізу та управління системами в умовах ризику і невизначеності; евристичні методи та алгоритми в системному аналізі та управлінні; нові методи в системному аналізі, інформатиці та теорії прийняття рішень; науково-методичні проблеми в освіті.

Головний редактор журналу — ректор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», академік НАН України Михайло Захарович Згуровський.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» включено до переліку фахових видань ВАК України.

Журнал «Системні дослідження та інформаційні технології» входить до таких наукометричних баз даних: EBSCO, Google Scholar, DOAJ, Index Copernicus, реферативна база даних «Україніка наукова», український реферативний журнал «Джерело», наукова періодика України, ВІНТІ РАН.

Статті публікуються українською, російською та англійською мовами.

Журнал можна передплатити. **Наш індекс 23918.** Якщо ви не встигли передплатити журнал, його можна придбати безпосередньо в редакції. Наша адреса: 03056, м. Київ, просп. Перемоги, 37, корп. 35.

Завідуюча редакцією **С.М. Шевченко**
Редактор **Р.М. Шульженко**
Молодший редактор **Л.О. Тарин**
Комп'ютерна верстка та набір **А.А. Патіоха**

Підписано до друку 16.10.2018. Формат 70x108/16.
Папір офс. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14. Ціна договірна.
Свідоцтво про реєстрацію КВ № 23234–13074 ПР від 22.03.2018 р.

Видавництво «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
Тел.. (044) 204-81-78
Наклад 128 пр. Зам. № 16-163

Dear Readers!

Educational and Scientific Complex «Institute for Applied System Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute» is published of the international scientific and technical journal

«SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES».

The Journal is printing works of a theoretical and applied character on a wide spectrum of problems, connected with system researches and information technologies.

The main thematic sections of the Journal are the following:

Theoretical and applied problems and methods of system analysis; theoretical and applied problems of computer science; automated control systems; progressive information technologies, high-efficiency computer systems; decision making and control in economic, technical, ecological and social systems; theoretical and applied problems of intellectual systems for decision making support; problem- and function-oriented computer systems and networks; methods of optimization, optimum control and theory of games; mathematical methods, models, problems and technologies for complex systems research; methods of system analysis and control in conditions of risk and uncertainty; heuristic methods and algorithms in system analysis and control; new methods in system analysis, computer science and theory of decision making; scientific and methodical problems in education.

The editor-in-chief of the Journal is rector of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», academician of the NASU Michael Zaharovich Zgurovsky.

The articles to be published in the Journal in Ukrainian, Russian and English languages are accepted. Information printed in the Journal is included in the Catalogue of periodicals of Ukraine.

СИСТЕМНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

3 • 2018

ЗМІСТ

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ

- Аксак Н.Г., Кораблев Н.М.* Дистанционный мониторинг пациента на основе концепции агент–группа–роль 7
- Matsuki Yoshio, Bidyuk Petro I.* Analysis of Moon's gravitational-wave and Earth's global temperature: influence of time-trend and cyclic change of distance from Moon 19
- Мамедов Дж.Ф., Абдуллаев Г.С., Генжелиева Г.Г., Насирова Е.А.* Автоматизация этапов проектирования компоновочной схемы производственной линии для технологического парка 31

ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНІ КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ

- Поліщук О.Д., Яджак М.С.* Мережеві структури та системи: II. Серцевини мереж та мультиплексів 38
- Ткачук В.М., Ткачук О.М.* Квантовий генетичний алгоритм вищих порядків для 0–1 задачі пакування рюкзака 52

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

- Кирилюк В.С., Левчук О.І.* Математичне моделювання електронапруженого стану ортотропного п'єзоелектричного тіла з довільно орієнтованою круговою тріщиною за одновісного розтягу 68
- Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V.* On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito–Skorokhod equation with random parameters 80
- Потапенко А.Ю.* Пример исследования корректности краевых задач на основе метода диффеоморфизмов 91
- Пономаренко Р.Н.* Организация нечеткого логического вывода на основе многоуровневого параллелизма 98

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

- Циганок В.В., Роїк П.Д.* Метод визначення та підвищення узгодженості експертних оцінок за підтримання прийняття групових рішень 110
- Иванов С.Н., Яценко В.А.* Вычисление размерности по Ляпунову и применение для прогнозирования геомагнитных индексов 122
- Борозенец Д.А.* Адаптивная лазерная терапия 133
- Реферати 140
- Відомості про авторів 148

SYSTEM RESEARCH AND INFORMATION TECHNOLOGIES

3 • 2018

CONTENTS

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES, HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS	
<i>Axak N.G., Korablyov M.M.</i> Remote patient monitoring based on the agent–group–role concept	7
<i>Matsuki Yoshio, Bidyuk Petro I.</i> Analysis of Moon’s gravitational-wave and Earth’s global temperature: influence of time-trend and cyclic change of distance from Moon	19
<i>Mamedov J.F., Abdullaev G.S., Gengeliyeva G.G., Nasirova E.A.</i> Automation of the stages of designing the layout diagram of the production line for technopark	31
PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS	
<i>Polishchuk O.D., Yadzhak M.S.</i> Network structures and systems: II. Network and multiplex cores	38
<i>Tkachuk V.M., Tkachuk O.M.</i> Higher-order quantum genetic algorithm for 0–1 knapsack problem	52
MATHEMATICAL METHODS, MODELS, PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR COMPLEX SYSTEMS RESEARCH	
<i>Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.</i> Mathematical modeling of the electrostressed state in the orthotropic piezoelectric space with an arbitrary orientated circle crack under uniaxial tension	68
<i>Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V.</i> On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito–Skorokhod equation with random parameters	80
<i>Potapenko O. Yu.</i> An example of researching boundary value problems correctness using diffeomorphism method	91
<i>Ponomarenko R.M.</i> Organizing the fuzzy inference based on multilevel parallelism	98
METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND CONTROL IN CONDITONS OF RISK AND UNCERTAINTY	
<i>Tsyganok V.V., Roik P.D.</i> Method for evaluating and improving of the expert estimates consistency in group decision-making	110
<i>Ivanov S.M., Yatsenko V.O.</i> Computing Lyapunov dimension and applying it for geomagnetic indices prediction	122
<i>Borozenets D.A.</i> Adaptive laser therapy	133
References	140
Information about the authors	148

ДИСТАНЦИОННЫЙ МОНИТОРИНГ ПАЦИЕНТА НА ОСНОВЕ КОНЦЕПЦИИ АГЕНТ–ГРУППА–РОЛЬ

Н.Г. АКСАК, Н.М. КОРАБЛЕВ

Аннотация. Разработана мультиагентная система удаленного оценивания состояния здоровья человека на примере мониторинга артериального давления пациента. Система позволяет экстренно реагировать на критическое изменение состояния здоровья с целью оказания скорой медицинской помощи. Предложен метод координации агентов в системе оценивания состояния человека, который позволяет для каждого зарегистрированного пациента распределить поставленные задачи между агентами для своевременного обнаружения и устранения критических состояний здоровья пациента. Для описания мультиагентной системы использована концепция агент–группа–роль, которая способствует разработке структуры адаптивной организационной модели процесса удаленного мониторинга. Анализ данных, полученных во время наблюдения за состоянием здоровья пациента, выполнен с помощью программного моделирования Leadsto Editor.

Ключевые слова: диагностика, удаленный мониторинг, организационная мультиагентная система, агент, группа, роль.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие технологий распределенных вычислений и средств коммуникации открывают большие возможности для повышения качества обслуживания в здравоохранении. Перспективным направлением в этой области является удаленный on-line мониторинг пациентов, способный помогать больным и врачам контролировать не только физиологическое, а также эмоциональное и поведенческое состояние здоровья, что позволяет своевременно оказывать медицинскую помощь. В таком случае для быстрого принятия решений важную роль играют скоординированные действия всех участников мониторинга.

АНАЛИЗ ПУБЛИКАЦИЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Применению агентных технологий для решения задач диагностики, мониторинга, планирования и управления уделяется все большее внимание. В работе [1] предложена концепция планирования в сервис-ориентированных архитектурах (SOA) и агентных средах посредством их слияния, что спо-

способствует разработке автономных и распределенных систем, которые могут стандартно подключаться к широкому спектру доступных функциональных возможностей реального мира (или услуг). Указаны проблемы использования агентных технологий при решении задач реального мира в теории и на практике. Сервис определяется как семантически описанное действие агента, а также как базовый строительный блок конструкции, называемый «планом».

Несмотря на то, что разработано большое разнообразие методов и моделей описания поведения агента в чрезвычайных ситуациях, по-прежнему актуальна проблема синтеза систем, поддерживающих наилучшие стратегии эволюции агентов-спасателей в обстановках, характеризующихся высоким уровнем неопределенности. В работе [2] проведено моделирование поведения агентов-спасателей в чрезвычайных ситуациях и предложена эффективная модифицированная нечеткая процедура для динамической кластеризации толпы, определяющая оптимальные значения параметров управления агентами-спасателями (скорость движения агентов, время ожидания, распределение агентов-спасателей между кластерами толпы и др.).

Каждая фаза обработки потока пациентов в медицинском учреждении связана с документооборотом; мероприятиями, проводимыми на протяжении этого периода; консультациями у различных специалистов. В работе [3] разработана система управления потоком пациентов на основе мультиагентной технологии, основная цель которой – помощь лечащему персоналу в процессе медицинского обслуживания с возможностью быстрого доступа ко всем необходимым документам. Предложенный инструментарий может быть использован для оценки и сравнения различных клинических путей обслуживания с целью выявления возможного улучшения и оптимального потока пациентов.

В работе [4] в контексте мультиагентных систем (МАС) было введено понятие задачи непрерывного транспорта, в которой группа с несколькими агентами посещает множество фиксированных местоположений, собирает объекты и доставляет их в транспортный центр. Цель работы заключается в минимизации времени транспортировки пополняющихся во времени объектов. Представлен гибридный централизованного и распределенного подходов, позволяющий минимизировать распределение работ агентов в команде.

Механизм мониторинга размещения контента в Интернете, позволяющий агентам МАС контролировать действия других агентов во избежание нарушения норм опубликования (например, не должны размещаться на сайтах изображения, защищенные авторским правом, комментарии не должны быть оскорбительными или дискредитирующими), описан в работе [5]. Поэтому в интересах МАС проверить на соответствие норме поданную корреспонденцию до того, как она появится в Интернете. При обнаружении нарушения нормы представляется доказательство, и такая информация отбрасывается.

Применение МАС является перспективным подходом, способным реализовать функциональные возможности и услуги в сети распределения электроэнергии. С одной стороны, агент предоставляет возможности мониторинга и диагностики, необходимые для надежного функционирования компонентов в распределенной среде. С другой стороны, чтобы координи-

ровать потребление энергии, поддерживать узловые напряжения в заранее определенных границах и избегать перенапряжения оборудования, такие системы могут предоставлять услуги прогнозирования. Так, в работе [6] предлагается интеллектуальная МАС принятия решений для передачи данных в энергосистеме. Проведенные эксперименты продемонстрировали свой потенциал для принятия решений в существующей системе электросвязи.

Таким образом, современная тенденция заключается в том, чтобы двигаться в сторону решений, объединяющих распределенные системы, которые совместно управляют сложными задачами в исключительных ситуациях. В результате этой тенденции возникает потребность разработки систем обработки и анализа распределенных контролируемых данных большого объема. Из-за ограничений на время принятия решений такие системы нуждаются в инфраструктуре распределения работ участников мониторинга для оптимизации скоординированных действий групп участников во времени и пространстве.

Цель работы — разработка МАС процесса удаленного оценивания состояния здоровья человека на основе показаний датчиков. Для достижения поставленной цели необходимо разработать метод координации агентов системы оценивания состояния человека.

КООРДИНАЦИЯ АГЕНТОВ МАС ДИСТАНЦИОННОГО МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ ЗДОРОВЬЯ ЧЕЛОВЕКА

Мультиагентная система процесса удаленного оценивания состояния здоровья человека представляется тройкой

$$MAS = \{A, E, Res\},$$

где $A = \{A_{user}, A_{expert}, A_{data}\}$ — множество агентов, функционирующих в среде E ; E — множество состояний среды; Res — *WEB*-портал службы здравоохранения, построенный на основе организационной модели для взаимодействия агентов.

Основными действующими лицами системы дистанционного мониторинга являются:

- пациенты, зарегистрированные на медицинском *WEB*-портале, нуждающиеся в постоянном наблюдении, и которым, возможно, необходимо оказать скорую помощь;

- высококвалифицированные врачи, зарегистрированные в учреждении здравоохранения, контролирующие состояние здоровья пациентов и назначающие соответствующее лечение;

- медсестры, сиделки и некоторые медицинские работники также зарегистрированные на медицинском *WEB*-портале, которые выполняют назначенные лечебные манипуляции наблюдаемым пациентам.

У пациентов имеются *WEB*-камера и специализированные приборы, считывающие наиболее важные показатели здоровья и соединяющиеся с мобильным устройством, которое доставляет полученные данные посредством Интернета на основной сервер.

Для описания МАС с организационной точки зрения, используется модель агент–группа–роль (АГР) [7]. Организация представлена структурой для активной деятельности и взаимодействия с помощью трех основных концепций: агент — активный «общающийся» объект, который играет роли внутри группы; группы — наборы ролей; роль — абстрактное представление функции или услуги, выполняемой агентом. Понятие роли становится независимым от любого конкретного агента, агент может играть не одну роль, а несколько агентов способны выполнять одинаковые роли. Взаимодействия определяют связь ролей между собой.

Групповая структура является набором ролей и взаимосвязей между ними, обеспечивая общий контекст и логическое объяснение. Устанавливаются определения взаимосвязей между ролями в группе, которые могут вовлекать несколько ролей в диалог. Преимуществом организационной концепции является возможность моделирования сложного неоднородного поведения системы в целом, что помогает верифицировать спроектированную систему.

Поведенческие или динамические характеристики организации выражаются во временных связях входных и выходных состояний ролей. Описание динамических характеристик выполнено с помощью языка темпоральной трассировки (Temporal Trace Language — TTL). Для выражения динамики в TTL важными понятиями являются состояния, моменты времени и трассировка. Характеристики на разных уровнях могут быть структурированы в иерархическом порядке.

Характеристики роли описывают поведение отдельной роли, передаточные характеристики представляют собой динамику внутригрупповых передач между ролями. Для ролей их характеристики вместе с передаточными характеристиками составляют групповые характеристики, которые показывают поведение группы в целом. Групповые характеристики вместе с характеристиками межгрупповых связей составляют общие характеристики организации. Использование концепции АГР позволяет проектировать и анализировать организационную модель для решения проблемы удаленного мониторинга, где имеет место непредсказуемость.

Организационная структура модели процесса обнаружения и устранения критических состояний здоровья пациента, позволяющая адаптироваться к непредвиденным обстоятельствам, отображена на рис. 1.

Организационная модель G представлена группами $G = G_W, G_H, G_S$, где G_W — распределение; G_H — обслуживание пациентов; G_S — решение. Роли в группах таковы:

- распределение – администратор группы, информатор пользователей, пользователь;
- обслуживание пациентов – администратор группы, участники мониторинга;
- решение – администратор группы, диспетчер, решатель.

В группе G_W осуществляется регистрация участников удаленного мониторинга посредством взаимодействия между информатором пользователя и пользователем (это происходит на медицинском WEB-портале). Агент WEB-портала соединяется с администратором лечебного учреждения, а затем администратор лечебного учреждения — со своими сотрудниками.

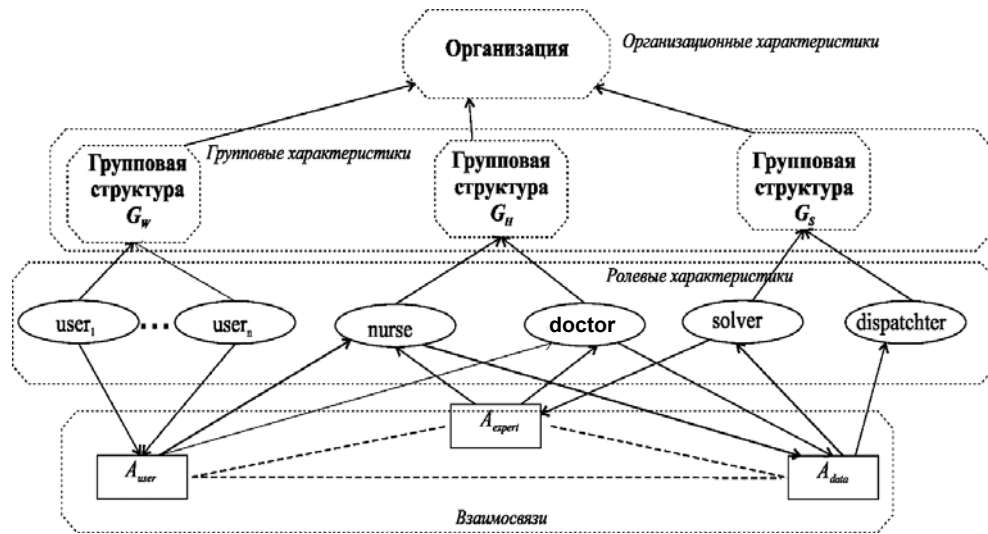


Рис. 1. Структура адаптивной организационной модели процесса удаленного мониторинга

В группе G_H организуются взаимосвязи между идентифицированными участниками удаленного мониторинга. Информатор пациента агрегирует и переводит показания измерительных приборов и изображения камеры видеонаблюдения в форму, пригодную для дальнейшей обработки. По обработанным данным врач назначает лечение пациенту и дает предписания обслуживающему персоналу.

В группе G_S диспетчер распределяет решения задач:

- обработки изображений исследуемого объекта в состоянии покоя и/или движения;
- классификации агрегированных показаний измерительных приборов и т.п.

По результатам обработки данных администратор группы определяет срочность устранения критических состояний здоровья пациента.

Для достижения целей организации поддерживается выделенный ряд контролируемых аспектов $D = D_{H_1}, \dots, D_{H_n}$ — обработка медико-регистрационных данных и анализ изображений (распознавание жестов руки, идентификация мимики человека, распознавание кожных заболеваний и т.д.). Соблюдение своевременного обслуживания указанных аспектов может быть описано динамической характеристикой организации OP :

$$OP = \forall t: TIME \quad state(\gamma, t, O) = satisfied(combination(D_{H_1}, \dots, D_{H_n})),$$

где $state(\gamma, t, O) \models satisfied(combination(D_{H_1}, \dots, D_{H_n}))$ определено, что в состоянии $state(\gamma, t, O)$ в момент времени t в организации O в трассировке γ представлена характеристика $satisfied(combination(D_{H_1}, \dots, D_{H_n}))$ с индексным предикатом \models , обозначающим отношение соответствия между состоянием и характеристикой состояния. Трассировка означает временную последовательность трехзначных информационных операторов системы, включая входные и выходные операторы всех агентов и их среды.

Для динамики МАС используем неформально выраженное условие:

D3: Каждый запрос пользователя должен быть обслужен надлежащим образом после некоторой временной задержки:

Если в момент времени t_1

агент A_{user} выдает запрос на медицинскую помощь агенту A_{expert}

Тогда в момент времени t_2

после t_1 агент A_{expert} посылает предложение агенту A_{user} подключить измерительные приборы и камеру видеонаблюдения

В момент времени t_3 после t_2

агент A_{user} посылает запрос агенту A_{data} на обработку агрегированной информации от подключенных устройств пользователя

В момент времени t_4 после t_3

агент A_{data} выдает результаты обработки агенту A_{expert}

В момент времени t_5 после t_4

агент A_{expert} посылает сообщение о предназначении лечения агенту A_{user}

Временная формализация может быть выражена как динамическая характеристика в *TTL* (со свободной переменной для трассировки γ) следующим образом:

$$\forall M, t, A_{user} \exists A_{expert}$$

$$[state(M, t_1, output(A_{user})) \models communication_from_to$$

$$(request_for_medical\ care(r), A_{user}, A_{expert}) \Rightarrow [\exists t_2 > t_1$$

$$state(M, t_2, output(A_{expert})) \models communication_from_to$$

$$(proposal_to_connect_devices(p, r), A_{expert}, A_{user})].$$

$$\Rightarrow [\exists t_3 > t_2$$

$$state(M, t_3, output(A_{user})) \models communication_from_to$$

$$(request_for_information\ processing(r, p), A_{user},$$

$$A_{data})] \Rightarrow [\exists t_4 > t_3$$

$$state(M, t_4, output(A_{data})) \models communication_from_to$$

$$(processing_results(pr, r), A_{data}, A_{expert})] \Rightarrow$$

$$[\exists t_5 > t_4$$

$$state(M, t_5, output(A_{expert})) \models$$

$$communication_from_to$$

$$(message_for_purpose_treatment(m, pr) A_{expert},$$

$$A_{user})].$$

$$]$$

Кроме требований к динамике всей МАС, выделим характеристики группового и ролевого уровней, а также адаптационные характеристики.

Для надежного функционирования МАС организация должна прикладывать определенные усилия для каждого аспекта. Необходимо постоянно контролировать, чтобы все аспекты поддерживались надлежащим образом. Чтобы обеспечить достаточные усилия в данный момент времени и при заданных условиях, для поддержки аспектов существуют соответствующие группы:

GME 1 (D, G): группа прикладывает требуемое усилие.

Для всех моментов времени t усилие, приложенное группой G_j ($j = W, H, S$) для аспекта D_{H_i} , является достаточным:

$\forall t: \text{TIME}, E: \text{EFFORT}$

$$[\text{state}(\gamma, t, G_j) \models \text{group_relates_to}(G_j, D_{Hi}) \wedge \\ \text{provides_group_effort_for}(G_j, E, D_{Hi}) \\ \Rightarrow \text{state}(\gamma, t, O) \models \text{satisfies_required_effort_for}(E, D_{Hi})]$$

Здесь антецедент означает, что в состоянии $\text{state}(\gamma, t, G_j)$ в момент времени t группы G_j в трассировке γ представлена характеристика состояния:

$\text{group_relates_to}(G, X) \wedge \text{provides_group_effort_for}(G_j, E, D_{Hi})$, которая выражает, что группа G_j относится к аспекту D_{Hi} и прикладывает усилие E . Более того,

$$\text{state}(\gamma, t, O) \models \text{satisfies_required_effort_for}(E, D_{Hi})$$

означает, что в момент времени t в трассировке γ усилие E является достаточным для удовлетворения аспекта D_{Hi} . Считается, что когда усилие, приложенное группой G_j по отношению к D_{Hi} , является достаточным для аспекта D_{Hi} , то аспект D_{Hi} удовлетворен:

$$\text{group_relates_to}(G_j, D_{Hi}) \wedge \\ \text{provides_group_effort_for}(G_j, E, D_{Hi}) \wedge \\ \text{satisfies_required_effort_for}(E, D_{Hi}) \Rightarrow \text{satisfied}(D_{Hi}).$$

Графическое представление иерархии характеристик показано в виде И/ИЛИ дерева на рис. 2.

На уровне ниже каждый отдельный аспект D_{Hi} должен быть удовлетворен, например, обработка медико-регистрационных данных $OAP(D_{Hi})$. За этот аспект несет ответственность лечащий состав. Характеристика группового уровня GP^G требует четкого удовлетворения усилия: требуемое усилие всегда удовлетворительно, если определяемые диапазоны измеряемых значений (кардиограмма, кровяное давление, уровень сахара, температура тела и т.д.) поддерживаются в норме на протяжении интервала времени d с начала инцидента. Другими словами, желаемое усилие констатирует, что должен присутствовать комплексный план лечения до наступления предельного срока.

С точки зрения характеристики AP^G это означает, что если комплексный план лечения не был сформирован лечащим составом с начала инцидента, то в этот момент будет запущена адаптация с целью достижения требуемого усилия, т.е. составление комплексного плана лечения. Неудача означает, что в медицинском учреждении нет роли, которая бы AP^R сформировала корректный план лечения. Характеристика предполагает наличие адаптированного медицинского отделения с ролями, которые выполняют желаемое усилие. Чтобы сделать это изменение возможным, адаптеры (агенты A_{expert}) в группе *ReformGroup* используют стандартное

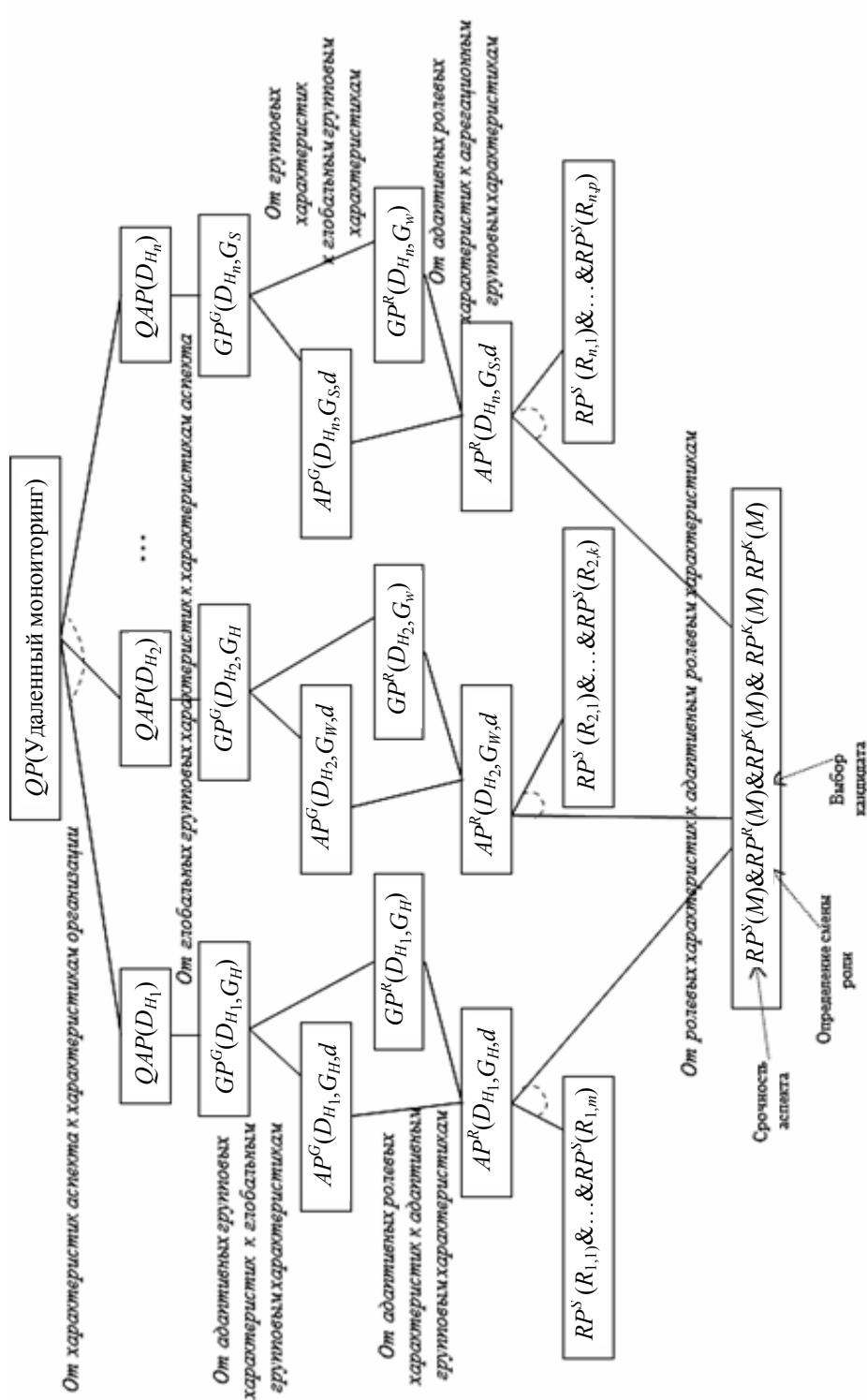


Рис. 2. Иерархия характеристик организации

определение отношения срочности для лечащего состава, выражающее, что аспект обработки медико-регистрационных данных имеет срочность в случае отсутствия комплексного плана лечения на протяжении желаемого интервала времени d .

Для каждого из аспектов существует одна из групп G_H, G_W, G_S для обеспечения усилий поддержки аспекта в данный момент времени и при данных условиях. Характеристика $GP^G(D_{H_i}, G_H)$ означает: группа медицинского учреждения прикладывает требуемое усилие. Для приложения требуемого усилия необходимо, чтобы соответствующие роли группы приложили достаточное совместное усилие $GP^R(D_{H_i}, G_H)$.

На следующем уровне приведена ролевая характеристика $RP^S(R_{i,j})$, которая обозначает, что активные роли выполняют определенный объем работ, срочность аспекта $RP^S(M)$; $RP^R(M)$ — определение смены роли; $RP^K(M)$ — выбор кандидата; $RP_r^K(M)$ — выбор кандидата – запрос, $RP_q^K(M)$ — выбор кандидата – ответ.

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАС УДАЛЕННОГО МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ ЗДОРОВЬЯ ПАЦИЕНТА

Для того чтобы показать, как МАС функционирует с использованием организационной модели, выполнено моделирование, основанное на наблюдениях за пациентом по показаниям датчиков [8]. Адаптационные процессы моделировались как характеристики низшего уровня (например, ролевые характеристики), которые были переведены в исполнимое подмножество TTL , называемое *Leadsto* [9]. Упрощенный формат *Leadsto* позволяет моделировать прямые временные зависимости между двумя характеристиками состояния следующим образом. Пусть α и β — характеристики состояния конъюнкции литералов (литерал — это атом или согласование атома) и e, f, g, h — неотрицательные вещественные числа. В языке *Leadsto* выражение $\alpha \rightarrow_{e,f,g,h} \beta$ означает: что если характеристика состояния α находится на определенном интервале времени с продолжительностью g , то после некоторой задержки (между e и f) характеристика состояния β будет находиться на определенном интервале времени длиной h .

Реализована частная постановка задачи — наблюдение за уровнем артериального давления пациента. Для моделирования и реализации использован язык *Leadsto*, а также *TTL Editor* для проверки правильности моделирования.

Для контроля артериального давления введены его параметры: `high_stress_lvl`, `normal_stress_lvl`, `low_stress_lvl`, а также действия, которые необходимо выполнить: `home_care`, `call_amb`, `do_not_call_amb`. Задано время для конечного моделирования и добавлены интервалы для каждой из указанных переменных (например, 10 единиц), а также начало и конец следа (рис. 3). Конец следа обозначает начало последствия для данной переменной. Переменная `high_stress_lvl` сигнализирует, что нужно оказывать скорую

помощь пациенту. По значениям темпоральных переменных определяется истинность выражения продолжительностью g (рис. 3).

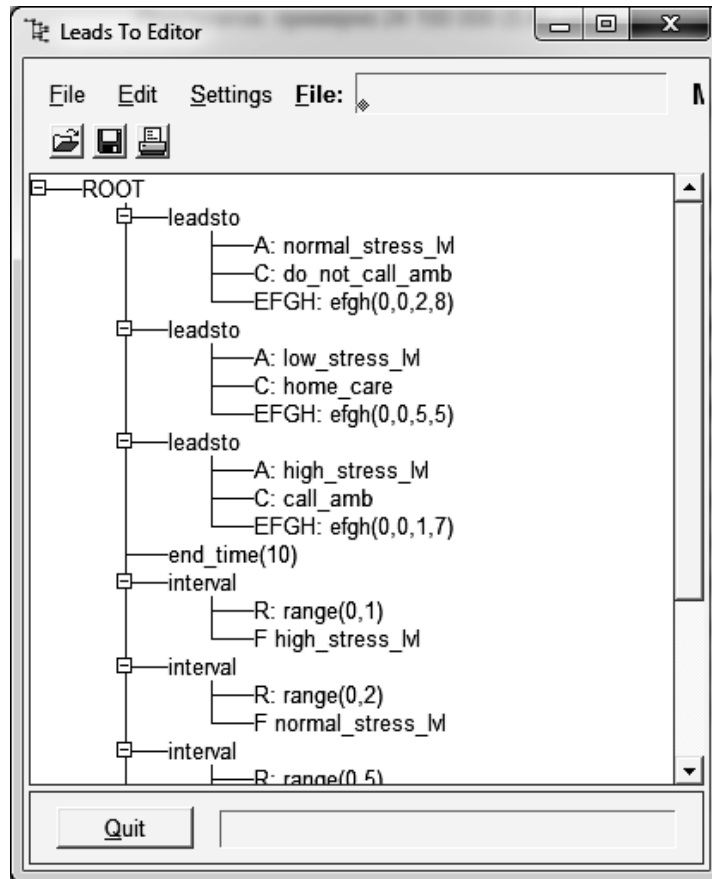


Рис. 3. Временные интервалы для всех LEADSTO-условий

Для проверки корректной работы спецификации запускается *Leadsto Simulation Tool*. При вводе спецификации без ошибок результат представлен на рис. 4 и 5.

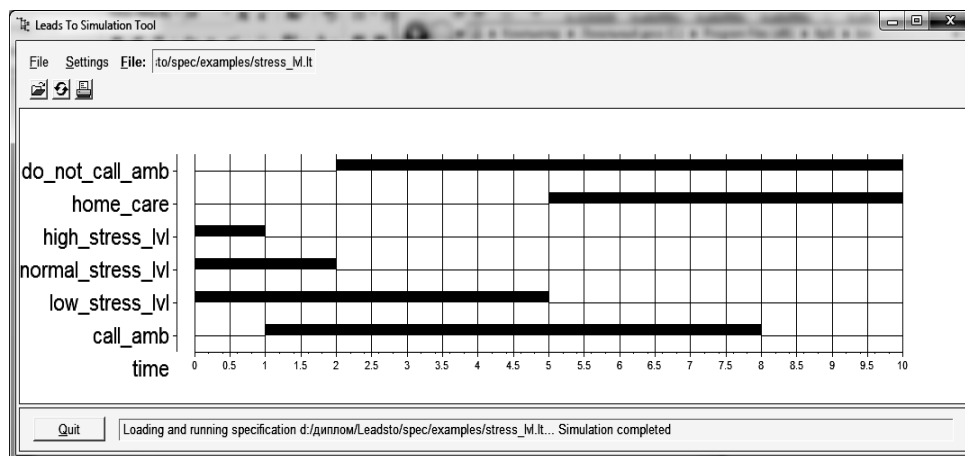


Рис. 4. Успешно выполнена спецификация (1)

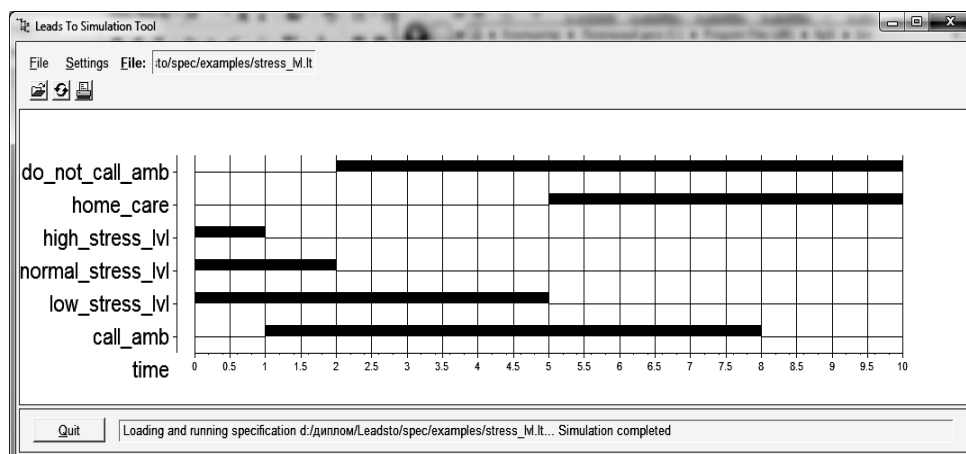


Рис. 5. Успешно выполнена спецификация (2)

Таким образом, по результатам проведенной работы была разработана система удаленного наблюдения за состоянием здоровья пациента, которая позволяет своевременно оказывать медицинскую помощь.

ВЫВОДЫ

Разработана система удаленного мониторинга артериального давления пациента на основе показаний датчика, которая позволяет своевременно оказать скорую медицинскую помощь. Такая система реализована благодаря предложенному методу координации агентов в системе оценивания состояния человека, который дает возможность для каждого зарегистрированного пациента распределить поставленные задачи между агентами для своевременного реагирования на критическое изменение его состояния.

Динамическое распределение ролей между агентами системы удаленного мониторинга способствовало адаптации для управления такими инцидентами, как мониторинг состояния здоровья, постановка диагноза и медицинская помощь. Использование предложенного метода позволит повысить эффективность совместных действий участников удаленного мониторинга пациента на основе медико-регистрационной информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lützenberger M.* Multi-Agent System in Practice: When Research Meets Reality / M. Lützenberger // Proceedings of the 2016 International Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems. — International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems. — 2016. — P. 796–805.
2. *Beklaryan A.L.* Simulation of Agent-rescuer Behaviour in Emergency Based on Modified Fuzzy Clustering / A.L. Beklaryan, A.S. Akopov // Proceedings of the 2016 International Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems. — International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems. — 2016. — P. 1275–1276.

3. *Rosati S.* A multi-agent system for monitoring patient flow / S. Rosati, A. Tralli, G. Balestra // *Studies in health technology and informatics*. — 2012. — Т. 192. — P. 944–948.
4. *Wang C.* Multi-agent continuous transportation with online balanced partitioning / C. Wang, S. Liemhetcharat, K.H. Low // *Proceedings of the 2016 International Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems*. — International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems. — 2016. — P. 1303–1304.
5. *Alechina N.* Decentralised Norm Monitoring in Open Multi-Agent Systems / N. Alechina // *Proceedings of the 2016 International Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems*. — International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems. — 2016. — P. 1399–1400.
6. *Li W.* Intelligent Multi-Agent System for Power Grid Communication / W. Li // *Region 10 Conference (TENCON)*. — IEEE. — 2016. — P. 3386–3389.
7. *Ferber J.* A meta-model for the analysis and design of organizations in multiagent systems / J. Ferber, O. Gutknecht // *Proceedings of ICMAS'98*, IEEE Computer Society Press. — 1998. — P. 128–135.
8. *Axak N.G.* Development of multi-agent system of neural network diagnostics and remote monitoring of patient / N.G. Axak // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. — Vol. 4, N 9(82). — 2016. — P. 4–11.
9. *Bosse T.* LEADSTO: a Language and Environment for Analysis of Dynamics by SimulaTiOn / T. Bosse, C.M. Jonker, L. van der Meij, J. Treur // In: *Proceedings of MATES' 05*. LNAI 3550. Springer Verlag, 2005. — P. 165–178.

Поступила 06.08.2018

ANALYSIS OF MOON'S GRAVITATIONAL-WAVE AND EARTH'S GLOBAL TEMPERATURE: INFLUENCE OF TIME- TREND AND CYCLIC CHANGE OF DISTANCE FROM MOON

YOSHIO MATSUKI, PETRO I. BIDYUK

Abstract. This research examined the influence of Moon's gravitational-wave to Earth's global warming process and the effects of time-trend and cyclic change of the distance between Moon and Earth. In the pervious research [1], we found that the Moon's gravitational-wave could influence the process of the Earth's global warming; and, we also found that Moon's cyclic movement around Earth needed to be further investigated, because it gave a unique pattern of distribution in the data for the empirical analysis; while both global temperature and global carbon-dioxide increase almost linearly in the time-series. In this research we added dummy binary variables that simulate the trend of time and the cyclic changes. As a result we confirmed that the influence of Moon's gravitational-wave is significant in the process of rising global temperature on Earth.

Keywords: global temperature, Moon's gravitational-wave, trend removal, cyclic change.

INTRODUCTION

Our previous research [1] investigated the influence of Moon's gravitational-wave to the process of Earth's global warming with the methodology of empirical analysis with the database of Earth's global temperature and global carbon dioxide as well as the distance between Moon and Earth. Then, the result of the analysis suggested that there was a possibility such that Moon's gravitational-wave influenced Earth's atmospheric temperature than global carbon dioxide could do. However, the uncertainty of the analysis [1] was also large, due to the cyclic change of the distance between Moon and Earth. In the previous research [1], we attempted to reduce this uncertainty, by assuming pure-heteroskedasticity and the first-order autoregressive process of Generalized Classical Regression models; however, we didn't know if these assumptions were appropriate in order to explain the cyclic change of the distance between Moon and Earth.

Considering the above result [1], in this research, we continued the empirical analysis of the same database with different techniques: maximum-likelihood estimation, trend removal, and removal of the influence of the cyclic change of the distance between Moon and Earth, by adding binary variables.

The gravitational-wave was a theoretical possibility when we made the previous research [1]; also, we didn't calculate the intensity of the gravitational-wave. Instead, we used the inverse of the squared distance between Moon and Earth as the surrogate of the gravitational-wave, because our mathematical method uses the deviations of the values of the variables, not necessarily the intensities of physical energy.

METHOD

The descriptive statistics of the data, from 1987 till 2009, of the global temperature (increased degree Celsius since 1978) [2], the global carbon dioxide (million tons) [3], the distance between Moon and Earth (r : kilometers) [4], and calculated $\frac{1}{r^2}$ ((kilometers)⁻²), are shown in Table 1.

Table 1. Descriptive statistics

Variable	Global Temperature °C *	CO ₂ mil. tons**	Distance between Moon and Earth r , km	$\frac{1}{r^2}$, km ²
Mean	0,29130	$1,25165 \cdot 10^3$	$3,62618 \cdot 10^5$	$7,60509 \cdot 10^{-12}$
Standard deviation	0,12125	$2,14245 \cdot 10^2$	$5,98411 \cdot 10^2$	$2,51097 \cdot 10^{-14}$
Minimum	0,10000	$8,92000 \cdot 10^2$	$3,61583 \cdot 10^5$	$7,56999 \cdot 10^{-12}$
Maximum	0,43000	$1,62600 \cdot 10^3$	$3,63483 \cdot 10^5$	$7,64865 \cdot 10^{-12}$
Skewness	-0,21063	0,14292	-0,15249	0,15787
Kurtosis	1,29401	1,82491	1,67498	1,67879
Valid number of observations	23	23	23	23

* Increased degree Celsius since 1978.

** To convert these estimates to units of carbon dioxide (CO₂), simply multiply these estimates by 3,667 [3].

Analysis is made on the global temperature, the global CO₂ and $\frac{1}{r^2}$, with the following methods:

1. Maximum Likelihood Estimation. This method is an alternative approach, beside the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model. The global temperature $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, the constant value 1 (x_1), the measured global CO₂ (x_2), and $\frac{1}{r^2}$ (x_3), are transformed into the forms of $n \times 1$ vectors, y , x_1 , x_2 , x_3 , where n is the number of observation, 23. Then $n \times k$ matrix $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ is defined, where $k = \text{rank}(X) = 3$ and X is non-stochastic. And, we assume that the data in Table 1 are samples from a real nature, which are multivariate normally distributed i.e. $Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$, where $X\beta = \mu = E(Y)$, $\sigma^2 I = \Sigma = V(Y)$, I is a unit matrix whose diagonal elements are 1, and non-diagonal elements are 0, and $E(Y)$ is a mean value of Y ($\sigma_{ii} = \sigma^2$ for all i , and that $\sigma_{hi} = 0$ for all $h \neq i$). And $f(Y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{w}{2}\right)$, where $w = \varepsilon' \Sigma^{-1} \varepsilon$, $\varepsilon = Y - \mu$, $|\Sigma|^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\det(\Sigma)}}$, and in this model, $\Sigma^{-1} = \left(\frac{1}{\sigma^2}\right) I$, $|\Sigma| = (\sigma^2)^n$, $\varepsilon = Y - X\beta$.

And then $f(Y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{-\varepsilon'\varepsilon}{2\sigma^2}\right]$. Now, the Maximum Likelihood estimates of β and σ^2 are the values that maximize $\log L = -\left(\frac{n}{2}\right)\log(2\pi) - \left(\frac{n}{2}\right)\log(\sigma^2) - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon'\varepsilon}{\sigma^2}$. Then L is maximized by minimizing $\varepsilon'\varepsilon$ with respect to β . So, β is identical to the coefficients of the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model ([1]). Now, inserting solution value for β makes $\varepsilon'\varepsilon = e'e$, with $e = Y - Xb$, which leaves the “concentrated log-likelihood function”, as $L^*(\sigma^2) = L(b, \sigma^2) = -\left(\frac{n}{2}\right)\log(2\pi) - \left(\frac{n}{2}\right)\log(\sigma^2) - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{e'e}{\sigma^2}$, to be maximized with respect to σ^2 . The first derivative is $\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2} = -\frac{(n/2)}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{e'e}{\sigma^4}$. Equating $\frac{\partial L^*}{\partial \sigma^2}$ to zero and solving it gives the Maximum Likelihood estimator of σ^2 as $\frac{e'e}{n}$.

2. Trend Removal. At first, we define $x_1 = 1$ and $x_2 = t$, where t is a series of time. (Here we simply use a series of the values from 1 to 23 as the values of t). Then $X_1 = \{x_1, x_2\}$ and $X_2 = \{x_3, x_4\}$, where x_3 is the measured global CO₂, and x_4 is the $\frac{1}{r^2}$. And then, we calculate the residuals X_2^* from the regression of X_2 on X_1 , following the matrix algebra bellow:

$$\begin{aligned} Q_1 &= X_1' X_1, \text{ where } X_1' \text{ is a transposed matrix of the matrix } X_1; \\ b &= Q_1^{-1} X_1' X_2, \text{ where } Q_1^{-1} \text{ is an inversed matrix of the matrix } Q_1; \\ \hat{X}_2 &= X_2 b; \\ X_2^* &= X_2 - \hat{X}_2. \end{aligned}$$

Now X_2^* is the de-trended values of $X_2 = \{x_3, x_4\}$. We also calculate the de-trended values of Y (global temperature), by calculating $\hat{Y} = Yb$, and then $Y^* = Y - \hat{Y}$, where Y^* is the de-trended values of Y .

And then, we implement the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model of the de-trended global temperature Y^* over X_2^* , with the following steps:

$$\begin{aligned} Q^* &= X_2^{*'} X_2^*; \\ b_1 &= Q^{*-1} X_2^{*'} Y^*; \\ \hat{Y}^* &= Y^* b_1; \text{ expected de-trended global temperature } Y; \\ e &= Y^* - \hat{Y}^*; \end{aligned}$$

$$V(b_1) = \frac{e'e}{n-k} Q_1^{*-1}.$$

And square-root of the diagonal elements of $V(b_1)$ are the standard errors of elements of the estimated coefficient-vector, b_1 .

3. Removal of Seasonal (cyclic) Influence. Moon and Earth became closer every 4 years as shown in Fig. 1. In order to remove (de-seasonalize) the influence of the cyclic pattern from the explanatory variables (the measured global CO₂ and $\frac{1}{r^2}$), at first, we define four binary dummy variables:

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{in } 1987, 1991, 1995, 1999, 2003, 2007 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases};$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{in } 1988, 1992, 1996, 2000, 2004, 2008 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases};$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{in } 1989, 1993, 1997, 2001, 2005, 2009 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases};$$

$$x_4 = \begin{cases} 1 & \text{in } 1990, 1994, 1998, 2002, 2006 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Then we set $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Then we calculate the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model of the global temperature Y over X_1 in order to get residuals $Y^* = Y - \hat{Y}$, with the following steps:

$$Q = X_1' X_1;$$

$$b_1^* = Q^{-1} X_1' Y;$$

$$\hat{Y} = X_1 b_1^* : \text{expected global temperature } Y;$$

$$Y^* = Y - \hat{Y}.$$

Now the elements of Y^* are the de-seasonalized values of global temperature.

And then we remove the influence of the cyclic change of the distance between Moon and Earth from the measured global CO₂ (z_2), and $\frac{1}{r^2}$ (z_3). For this purpose, at first, we regress $X_4 = \{z_2, z_3\}$ on the dummy variables X_1 , to get the coefficient $F = (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_4$ and residuals $X_4^* = X_4 - X_1 F$, which removes the influence of the cyclic change of the distance between Moon and Earth from X_4 . Then we make the Least Squares Estimation of the de-seasonalized variable Y^* on the de-seasonalized explanatory variables X_4^* , from which the influence of cyclic change of the distance between Moon and Earth has been removed, with the following steps:

$$Q_5 = X_4^*{}' X_4^* ;$$

$$b_5 = Q_5^{-1} X_4^*{}' Y^* ;$$

$$e_5 = Y^* - X_4^* b_5 ;$$

$$V(b_5) = \frac{e_5^*{}' e_5}{n - k} Q_5^{-1} .$$

And square-root of each diagonal element of $V(b_5)$ is the standard error of each element of the estimated coefficient-vector b_5 .

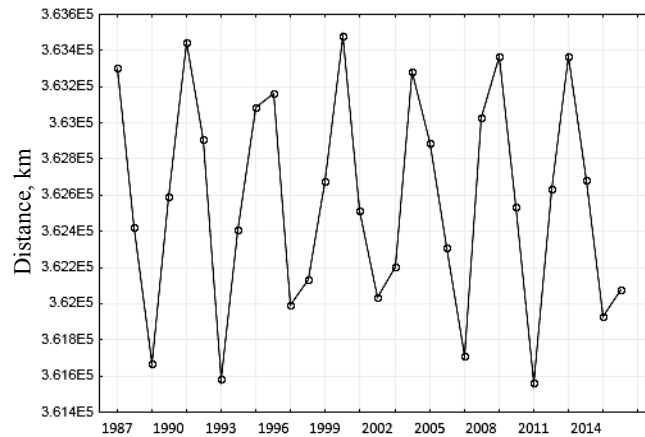


Fig. 1. Distance between Moon and Earth [1]

RESULTS

1. Result of Maximum Likelihood Estimation. Table 2 and Table 3 show the result of the Maximum Likelihood Estimation.

Table 2. Maximum Likelihood Estimation: coefficients and standard errors

Variable	Coefficient	Standard error*
Intercept (1)	-1,17897	$1,67861 \cdot 10^3$
CO ₂	$5,32537 \cdot 10^{-4}$	$2,95105 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{r^2}$	$1,05675 \cdot 10^{11}$	$2,19071 \cdot 10^{14}$

*Each standard error of each coefficient is square-root of diagonal element in Table 3.

Table 3. Variances and Covariances of Maximum Likelihood Estimation

Variable	Intercept	CO ₂	$\frac{1}{r^2}$
Intercept (1)	$2,81774 \cdot 10^6$	-16,03004	$-3,67640 \cdot 10^{17}$
CO ₂	-16,03004	$8,70867 \cdot 10^{-4}$	$1,95292 \cdot 10^{12}$
$\frac{1}{r^2}$	$-3,67640 \cdot 10^{17}$	$1,95292 \cdot 10^{12}$	$4,79922 \cdot 10^{28}$

2. Result of Trend Removal. At first, we made the regression of X_2 on X_1 . The calculated coefficient b is shown in Table 4.

Table 4. Computing $b: b = Q_1^{-1} X_1' X_2$

$8,75075 \cdot 10^2$	$7,60732 \cdot 10^{-12}$
31,38142	$-1,85867 \cdot 10^{-16}$

And then we calculated the de-trended values of $X_2 = \{x_3, x_4\}$, where x_3 is CO₂ and x_4 is $1/r^2$, by calculating $\hat{X}_2 = X_2 b$, and then $X_2^* = X_2 - \hat{X}_2$, where X_2^* is the de-trended values of X_2 . We also calculated the de-trended values of Y (global temperature), by calculating $\hat{Y} = Yb$, and then $Y^* = Y - \hat{Y}$, where Y^* is the de-trended values of Y . The descriptive statistics of the adjusted (de-trended) values (Y^* and X_2^*) are shown in Table 5. The global temperatures before and after the removal of trend are shown in Fig. 2, and the values of CO₂ and $1/r^2$ before and after the removal of trend are shown in Fig. 3.

Table 5. Descriptive statistics of de-trended values of global temperature, CO₂ and $1/r^2$

Variable	Global Temperature °C	CO ₂ , mil. tons	$1/r^2$, km ²
Mean	$-1,48809 \cdot 10^{-9}$	$-7,25622 \cdot 10^{-8}$	$-9,10100 \cdot 10^{-21}$
Standard deviation	$3,07795 \cdot 10^{-2}$	24,50602	$2,50781 \cdot 10^{-14}$
Minimum	$-6,15217 \cdot 10^{-2}$	-33,79644	$-3,59113 \cdot 10^{-14}$
Maximum	$4,22332 \cdot 10^{-2}$	60,53360	$4,26366 \cdot 10^{-14}$
Skewness	-0,28508	0,41789	0,14935
Kurtosis	1,89185	2,41821	1,66733
Valid number of observations	23	23	23

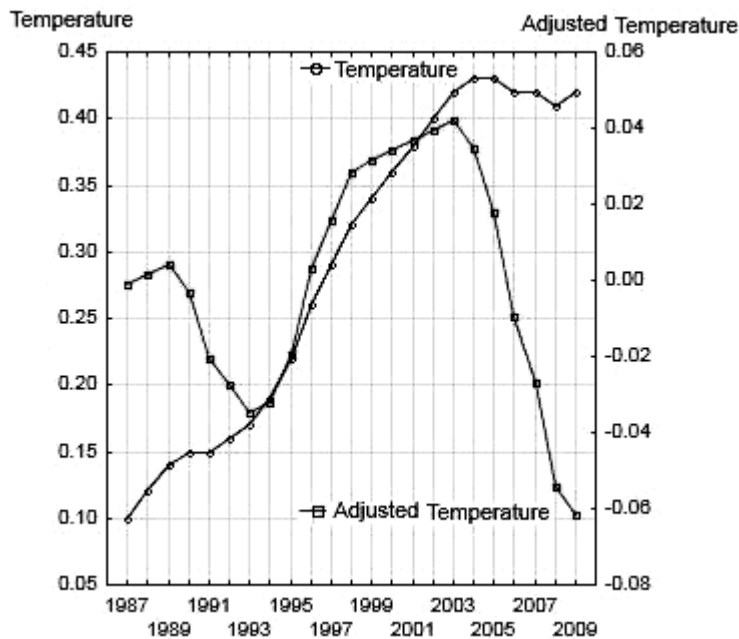


Fig. 2. Global temperatures with and without trend removal (Y^* and Y)

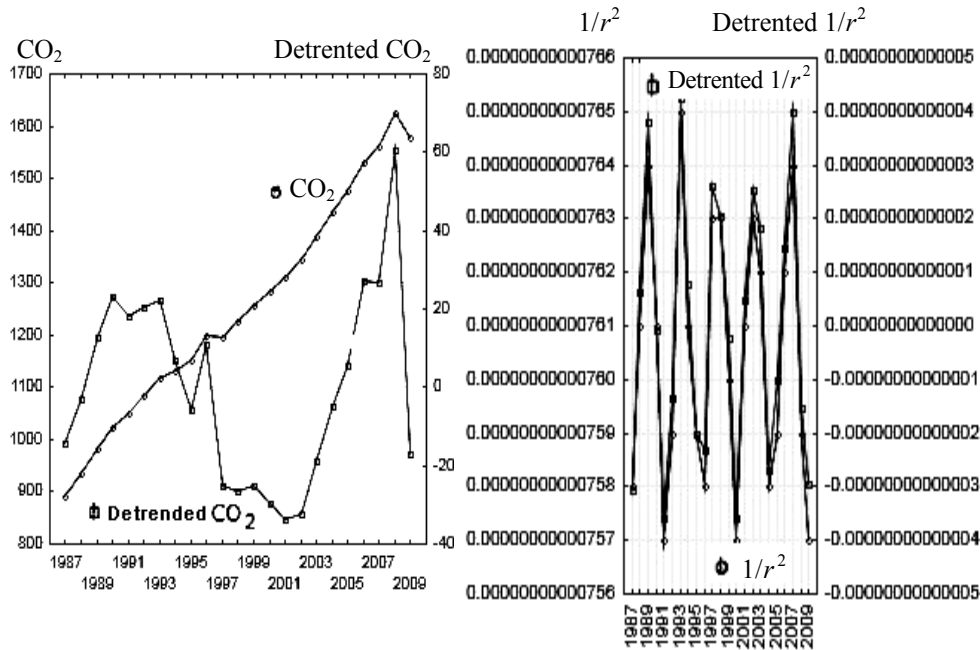


Fig. 3. Comparing CO_2 and $1/r^2$ before and after trend removal (X_4 and X_4^*)

And then we calculated the Least Squares Estimation of the de-trended global temperature Y^* over X_2^* . At first, we calculated $Q^* = X_2^{*'} X_2^*$, and $b_1 = Q^{*-1} X_2^{*'} Y^*$. Table 6 shows the calculated b_1 .

Table 6. Comparing b_1 : $b_1 = Q^{*-1} X_2^{*'} Y^*$

Variable	Values of b_1
Intercept* for $x_1 = 1$	$b_1' : 7,94412 \cdot 10^{-2}$
Intercept* for $x_2 = t$	$b_1' : 1,76544 \cdot 10^{-2}$
CO_2	$-1,15220 \cdot 10^{-5}$
$1/r^2$	$1,89763 \cdot 10^9$

To calculate b_1' for the intercepts (each of x_1 and x_2), we calculated $b^ = Q_1^{-1} X_1' Y$, and then $F = Q_1^{-1} X_1' X_2$, and then $b_1' = b^* - F b_1$.

And then we calculated $e = Y^* - \hat{Y}^*$ and $V(b_1) = \frac{e'e}{n-k} Q_1^{*-1}$ to calculate the standard errors of elements of the estimated coefficient-vector b_1 . Table 7 shows the calculated values of $V(b_1)$, and Table 8 shows the calculated values of standard errors of b_1 .

Table 7. Comparing V : $V(b_1)$

Variable	CO_2	$1/r^2$
CO_2	$1,02316 \cdot 10^{-9}$	$-1,68386 \cdot 10^5$
$1/r^2$	$-1,68386 \cdot 10^5$	$2,84905 \cdot 10^{19}$

Table 8. Standard errors of b_1

Variable	Standard errors of b_1
Intercept* for $x_1 = 1$	$1,39138 \cdot 10^{-2}$
Intercept* for $x_2 = t$	$1,01477 \cdot 10^{-3}$
CO ₂	$3,19869 \cdot 10^{-5}$
$1/r^2$	$5,33765 \cdot 10^9$

To calculate standard errors for the intercepts (x_1 and x_2), we calculated $N_1 = X_1 Q_1^{-1} X_1'$ and $e_1 = (I_1 - N_1) Y^$, $V(b_1) = \frac{e_1' e_1}{n - k} Q_1^{-1}$, and then calculated the square root of the diagonal element of $V(b_1)$.

3. Result of Removal of Seasonal (cyclic) Influence. At first, we set $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Then, we calculated the Least Squares Estimation of the global temperature Y over X_1 in order to get the de-seasonalized values of global temperature $Y^* = Y - \hat{Y}$ (Fig. 4), after calculating $Q = X_1' X_1$, $b_1^* = Q^{-1} X_1' Y$ (Table 9), and $\hat{Y} = X_1 b_1^*$.

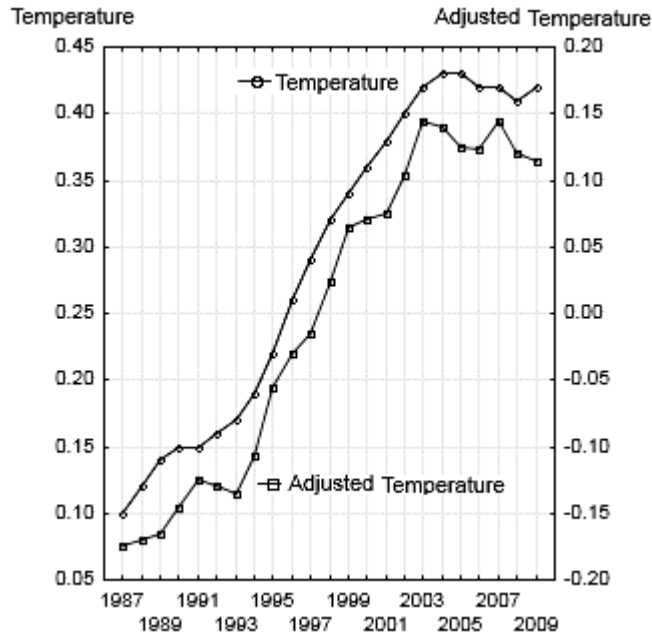


Fig. 4. Global temperatures with and without seasonal adjustment (Y^* and Y)

Table 9. Computing b_1^* : $b_1^* = Q^{-1} X_1' Y$

Variable	x_1	x_2	x_3	x_4
Coefficient	0,27500	0,29000	0,30500	0,29600

And then, we implemented the Least Squares Estimation of X_4 on the dummy variables X_1 , to get the coefficient $F = (X_1' X_1)^{-1} X_1' X_4$ (Table 10) and re-

siduals $X_4^* = X_4 - X_1F$ (Fig. 5), to de-seasonalize X_4 (to remove the influence of the cyclic change of the distance between Moon and Earth from X_4). ($X_4 = \{z_2, z_3\}$, where z_2 is the measured global CO_2 , and z_3 is $1/r^2$). Table 11 shows descriptive statistics of de-seasonalized values of global temperature, CO_2 and $1/r^2$.

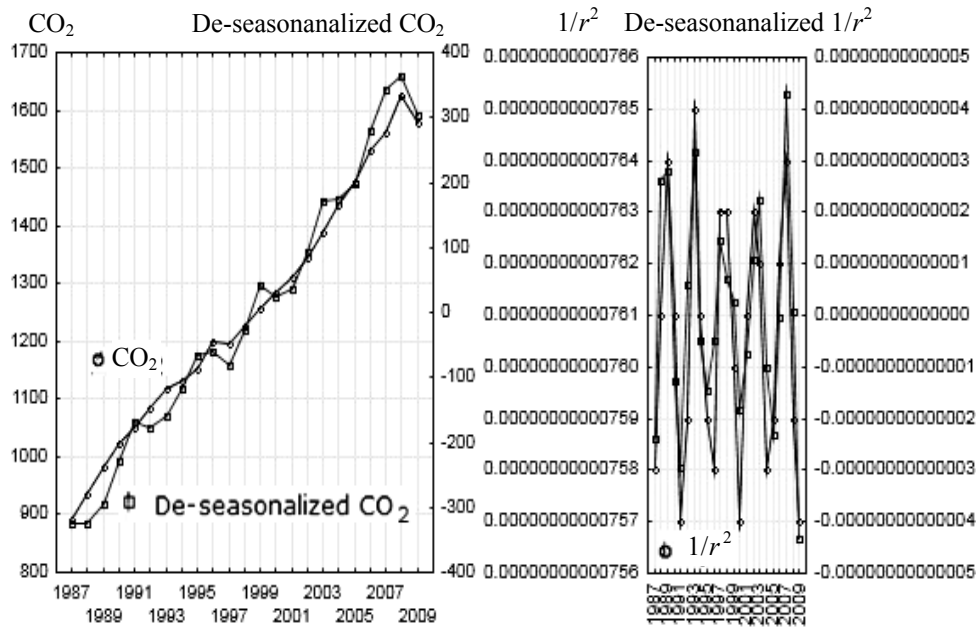


Fig. 5. Values of CO_2 and $1/r^2$ after removal of the influence of the cyclic change (X_4 and X_4^*)

Table 10. Coefficient F

Variable	CO_2	$1/r^2$
x_1	$1,21717 \cdot 10^3$	$7,60012 \cdot 10^{-12}$
x_2	$1,26083 \cdot 10^3$	$7,58701 \cdot 10^{-12}$
x_3	$1,27717 \cdot 10^3$	$7,61690 \cdot 10^{-12}$
x_4	$1,25140 \cdot 10^3$	$7,61857 \cdot 10^{-12}$

Table 11. Descriptive statistics of de-seasonalized values of global temperature, CO_2 and $1/r^2$

Variable	De-seasonalized global temperature, °C	De-seasonalized CO_2 , mil. tons	De-seasonalized $1/r^2$, km
Mean	$-3,64431 \cdot 10^{-10}$	$-5,80497 \cdot 10^{-5}$	$1,13682 \cdot 10^{-20}$
Standard deviation	0,12072	$2,13017 \cdot 10^2$	$2,13368 \cdot 10^{-14}$
Minimum	-0,17500	$-3,25833 \cdot 10^2$	$-4,33389 \cdot 10^{-14}$
Maximum	0,14500	$3,65167 \cdot 10^2$	$4,30634 \cdot 10^{-14}$
Skewness	-0,19145	0,15571	$9,76442 \cdot 10^{-2}$
Kurtosis	1,28736	1,79673	2,29807
Valid number of observations	23	23	23

Then we implemented the Least Squares Estimation of the de-seasonalized global temperature Y^* on the de-seasonalized explanatory variables X_4^* , from which the influence of cyclic movement of Moon has been removed. Table 12 shows the result of the Least Squares Estimation.

Table 12. Result of the Least Squares Estimation of Y^* on the de-seasonalized explanatory variables X_4^*

Parameter		Coefficient	Standard error
Intercept *	1 st cycle	-0,77339	$5,16897 \cdot 10^{-2}$
	2 nd cycle	-0,78101	$5,16897 \cdot 10^{-2}$
	3 rd cycle	-0,77630	$5,16897 \cdot 10^{-2}$
	4 th cycle	-0,77163	$5,66233 \cdot 10^{-2}$
CO ₂		$5,33726 \cdot 10^{-4}$	$4,29402 \cdot 10^{-5}$
$1/r^2$		$5,24677 \cdot 10^{10}$	$4,28696 \cdot 10^{11}$

To get the coefficients of intercepts for 4 periods of the cycle, at first we calculated $b_1^ = Q^{-1}X_1Y$, and then, $b_1 = b_1^* - Fb_2$, where b_2 is the coefficients of CO₂ and $1/r^2$ in Table 12. And, to get the standard errors for the intercepts, we calculated $N_1 = X_1Q^{-1}Y$ and $e_1 = (I_1 - N_1)Y$, $V(b_1) = \frac{e_1'e_1}{n-k}Q^{-1}$, and then calculated the square root of the diagonal element of $V(b_1)$.

ANALYSIS OF THE RESULTS

In this research, we investigated influence of the trend (time) and the cyclic change of the distance between Moon and Earth. For this purpose, we set dummy binary variables, which replaced the intercept vectors of the Classical Regression Model, and then we calculated the coefficients of the Least Square Estimations between these binary variables and the global temperature and the explanatory variables (CO₂ and $\frac{1}{r^2}$), and then, we calculated expected influences to those variables from each of the trend (time) and the cyclic change; and then, we subtracted those expected values from the original values of the variables, in order to make the de-trended variables and the de-seasonalized variables. As the result, we observed that the coefficient of $1/r^2$ is larger than the coefficient of CO₂. This observation suggests that there is the influence of Moon's gravitational-wave to Earth's global temperature, which we also observed in our previous research [1].

In addition, the Maximum Likelihood Estimation shows almost as same values of the coefficients as in the Least Squares Estimation of Linear Classical Regression Model [1], while their standard errors of the coefficients are larger than those of the Least Squares Estimation. These differences of the standard errors are due to the difference of the algorithm of these two approaches: the values of the standard errors of the Least Squares Estimation are algebraically calculated, while the values of the Maximum Likelihood Estimation were searched numerically.

With the trend removal, the coefficient of global CO₂ became negative, because this process deformed the values of the global temperature and CO₂, as Fig. 2, 3 show.

Table 13, Table 14 and Table 15 show the results of the analysis, including the results of our previous research [1]. Among these 7 models in Table 13, 14, 15, the Pure Heteroskedasticity model and the Cobb-Douglas model (non-linear) show the larger coefficient of CO₂ than to the coefficient of $\frac{1}{r^2}$. Here, the Pure Heteroskedastic model assumes uneven distribution of the data, although the deviations of the values do not reflect the uneven distributions of global temperature and CO₂, which are as shown from Fig. 2–5; therefore, this model does not describe the data correctly. Also, the Cobb-Douglas model does not describe the distributions of the global temperature and CO₂, which are almost linearly distributed as Fig. 2, 3 show. On the other hand, the values of $\frac{1}{r^2}$ are on a same curve, therefore they are neither uniformly distributed, nor unevenly distributed; and, we conclude that this characteristic of $\frac{1}{r^2}$ gives the relatively large standard errors of the coefficient of $\frac{1}{r^2}$.

Table 13. Comparison of calculated coefficients and standard errors

Variable and coefficients		Classical Regression [1]	Maximum Likelihood Estimation	Trend removal	Removal of seasonal (cyclic) influence
Coefficient	Intercept	-1,17863	-1,17897	See Table 6	See Table 12
	CO ₂	$5,33150 \cdot 10^{-4}$	$5,32537 \cdot 10^{-4}$	$-1,15220 \cdot 10^{-5}$	$5,33726 \cdot 10^{-4}$
	$1/r^2$ *	$1,05537 \cdot 10^{11}$	$1,05675 \cdot 10^{11}$	$1,89763 \cdot 10^9$	$5,24677 \cdot 10^{10}$
Standard error	Intercept	2,77830	$1,67861 \cdot 10^3$	See Table 8	See Table 12
	CO ₂	$4,27704 \cdot 10^{-5}$	$2,95105 \cdot 10^{-2}$	$3,19869 \cdot 10^{-5}$	$4,29402 \cdot 10^{-5}$
	$1/r^2$ **	$3,64933 \cdot 10^{11}$	$2,19071 \cdot 10^{14}$	$5,33765 \cdot 10^9$	$4,28696 \cdot 10^{11}$

* : ** 1 ; 3,46 1 ; 2070 1 ; 2,81 1 ; 8,17

Table 14. Coefficients and standard errors of the coefficients in Generalized Classical Regression Model [1]

Variable	Pure Heteroskedasticity		First-Order Autoregressive Process	
	Coefficient	Standard error	Coefficient	Standard error
for 1 (x_1)	-9,72055	22,91283	0,37507	0,78957
for Carbon dioxide (x_2)	0,94202	$7,55710 \cdot 10^{-2}$	$1,36503 \cdot 10^{-5}$	$1,17412 \cdot 10^{-4}$
for $\frac{1}{r^2}$ (x_3)	$2,18557 \cdot 10^{-2}$ *	$7,55709 \cdot 10^{-3}$ **	$6,61708 \cdot 10^9$ *	$9,71690 \cdot 10^{10}$ **

* : ** 2,89 : 1 1 : 14,7

Table 15. Coefficients of Cobb-Douglas model, $y = b_1 x_2^{b_2} x_3^{b_3}$ [1]

Coefficients	Estimated coefficient	Standard error
b_1 , coefficient of 1	0,000103	0,02761
b_2 , coefficient of x_2	2,126546	0,23431
b_3 , coefficient of x_3	0,283107 *	10,62035 **

* : ** 1 : 37,5.

Note: y : global temperature; x_2 : carbon-dioxide; x_3 : $\frac{1}{r^2}$.

CONCLUSION AND RECOMMENDATION

We have examined the potential influence of Moon's gravitational-wave to Earth's global temperature, in comparison with global CO₂, using 7 mathematical models for the empirical analysis. As the result, the influence of Moon's gravitational-wave was found to have some relation with Earth's temperature rise, with the Least Squares Estimation of Classical Regression Model, the First-Order Autoregressive Process of Generalized Classical Regression Model, the Maximum Likelihood Estimation, the Least Squares Estimation after the removal of trend (time), and after the removal of seasonal (cyclic) influence; while, the assumption of Pure Heteroskeasticity and Cobb-Douglas model (non-linear) are not appropriate for this analysis, in regard to the linearly distributed Earth's global temperature and global CO₂ in time series.

The further study is needed to identify the meaning of the uncertain relation between the inverse of squared distance between Moon and Earth and Earth's temperature rise.

REFERENCE

1. *Matsuki Y.* Empirical analysis of moon's gravitational wave and earth's global warming / Y. Matsuki, P.I. Bidyuk // System Research & Information Technology. — 2018. — N 1. — P. 107–118.
2. *UK Department of Energy and Climate Change (DECC).* — Available at: <http://en.openei.org/datasets/dataset/b52057cc-5d38-4630-8395-b5948509f764/resource/f42998a9-071e-4f96-be52-7d2a3e5ecef3/download/england.surface.temp1772.2009.xls>
3. *Boden T.A.* Global Regional and National Fossil-Fuel CO₂ Emissions / T.A. Boden, G. Marland, R.J. Andres. — Available at: cdiac.ornl.gov/trends/emits/tre_glob.html (last access, 8 August 2017)
4. *Moon Distance Calculator – How Close is Moon to Earth?* — Available at: <https://www.timeanddate.com/astronomy/moon/distance.html?year=1987&n=367>.

Received 02.05.2018

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ЭТАПОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОМПОНОВОЧНОЙ СХЕМЫ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛИНИИ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПАРКА

ДЖ.Ф. МАМЕДОВ, Г.С. АБДУЛЛАЕВ, Г.Г. ГЕНЖЕЛИЕВА, Э.А. НАСИРОВА

Аннотация. В результате анализа этапов разработки компоновочной схемы технологических единиц в производственной линии технологического парка в зависимости от специфики предприятия поэтапно определен объем входной информации и количество проектных процедур для автоматизированного проектирования. Для выбора лучших вариантов компоновок производственных линий технологического парка предложен алгоритм с допустимыми критериями ограничений рабочих зон и безопасности движения технических единиц производственной линии. Разработано программное обеспечение для выбора компоновочной схемы FMS с технологического парка.

Ключевые слова: автоматизация проектирования, компоновочная схема, производственная линия, этапы проектирования, технологический парк.

Разработка компоновочной схемы производственной линии (ПЛ) для технологического парка как сложный итерационный процесс реализуется поэтапно на основе всех критериев и ограничений, определенных в техническом задании проекта и уточняемых на последующих этапах. Для решения задачи автоматизированного проектирования [1, 2] компоновочной схемы ПЛ на начальных этапах проектирования требуется определить особенности технологического процесса, расположения основного оборудования и промышленных роботов, манипуляторов, а также способы передачи изготавливаемого изделия между технологическим оборудованием, загрузочно-разгрузочными и транспортно-ориентирующими устройствами, размещения межоперационных заделов и транспортных систем в технологическом парке.

На примере гибкого автоматизированного механического участка (ГАМУ) для изготовления опытных образцов проектов в технологического парка (рис. 1) рассмотрим процесс поэтапного выбора и проектирования компоновочной схемы

Этап технического предложения при проектировании общей компоновочной схемы ГАМУ, состоящий из множества входной информации ($I_{вх}$), проектных процедур решения данной задачи и выходных результатов ($I_{вых_i}$), включает стадии: определения основных производственных подразделений ГАМУ; проектные процедуры определения структурных и функциональных схем производственных модулей и участков ГАМУ; выбор готовых компоновочных схем производственных модулей ГАМУ, а также их активных элементов существующих баз данных графических и информационных систем; определение функциональных связей между технологическими единицами ГАМУ.

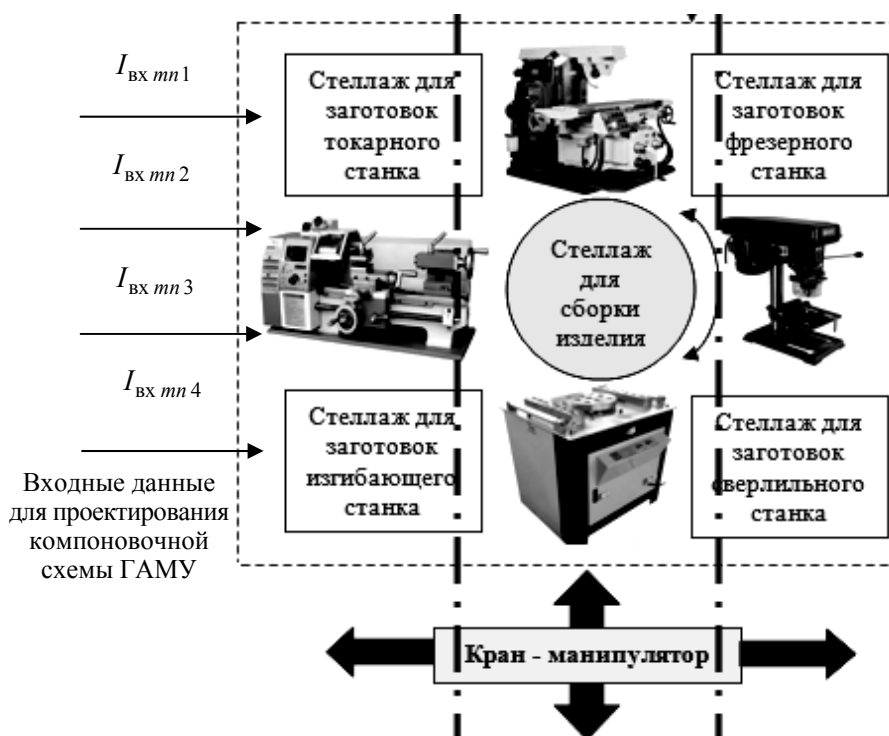


Рис. 1. Круговая компоновочная схема ГАМУ для изготовления опытных образцов проектов в технологического парке

На этапе технического предложения [3, 4, с. 45–78] автоматизированного проектирования сложных технических систем из множества входных воздействий $I_{вх mn j}$ с критериями $K_{вх mn j}$ формируются модели $M_{mn j}$ для представления результатов диалогового поиска готовых компоновочных схем ГАМУ требуемого назначения, математического исследования задач по определению позиций основного оборудования в ГАМУ, программного представления отдельных чертежей частей ГАМУ_{ij}. Множества входных воздействий $I_{вх mn j} = \{I_{вх mn 1}, I_{вх mn 2}, \dots, I_{вх mn n}\}$ включают информационные данные: $I_{вх mn 1}$ — последовательность технологических операций основного оборудования; $I_{вх mn 2}$ — типы основного оборудования; $I_{вх mn 3}$ — виды загрузочно-разгрузочных манипуляционных операций; $I_{вх mn 4}$ — типы загрузочно-разгрузочных манипуляционных роботов; $I_{вх mn 5}$ — технико-габаритные размеры основного оборудования; $I_{вх mn 6}$ — расстояния безопасного перемещения между технологическими единицами, роботами и транспортными проездами.

Множество графического представления $M_{mn j}$ по результатам диалогового поиска готовых компоновочных схем ГАМУ из базы данных графических систем с учетом входных данных $I_{вх mn j}$ для проектирования формируется поэтапно. Сначала составляются экстремальные условия ограничения в виде [5]

$$G(I_{\text{ВХ } mn j}) = \sum_{j=1}^n M_{mn j}(I_{\text{ВХ } mn j}) \leq K_{\text{ВХ } mn j},$$

где $K_{\text{ВХ } mn j} \in \{K_{\text{ВХ } mn 1}^j, K_{\text{ВХ } mn 2}^j, \dots, K_{\text{ВХ } mn n}^j\}$; $K_{\text{ВХ } mn 1}^j$ — допустимая рабочая зона технологического оборудования (ТО) и промышленного робота (ПР) в каждом производственном модуле (ПМ_{ji}), где j -число производственных модулей в ГАМУ_{ji}; $K_{\text{ВХ } mn 2}^j$ — допустимое число ТО и ПР в ГАМУ_{ji}; $K_{\text{ВХ } mn 3}^j$ — допустимая площадь складского помещения ГАМУ; $K_{\text{ВХ } mn 4}^j$ — допустимое расстояние между ПМ_{ji} и зоной перемещения электрокары в ПС; $K_{\text{ВХ } mn 5}^j$ — допустимая высота помещения ГАМУ.

Множество графического представления компоновочных схем ПМ_{ji} и соответственно ГАМУ в комплексе задаются в виде:

$$\forall M_{mni} \in \begin{bmatrix} M_{mn\text{ПМ}1} \oplus M_{mn\text{ПМ}2} \oplus \dots \oplus M_{mn\text{ПМ}k} \\ M_{mn\text{ПМ}21} \oplus M_{mn\text{ПМ}22} \oplus \dots \oplus M_{mn\text{ПМ}2m} \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\ M_{mn\text{ПМ}n1} \oplus M_{mn\text{ПМ}n2} \oplus \dots \oplus M_{mn\text{ПМ}s} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{mn\text{ПЛ}},$$

где $M_{mn\text{ПМ}i} \oplus \dots \Rightarrow M_{mn\text{ПЛ}i}$ ($i = \overline{1, k}$, $i = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, s}$) — логическое сложение моделей графического представления готовых компоновочных схем ПМ_{ji} в ГАМУ.

Далее с целью редактирования графической информации с последующими допустимыми ограничениями по минимизации количества стандартных элементов и соответственно обеспечению минимизации рабочей площади и цикловых заделов в множестве выбранных графических представлений готовых компоновочных схем производственных модулей в ГАМУ могут изменяться позиционные координаты оборудования, промышленных роботов и других элементов, производиться операции удаления элементов чертежа или изменяться форма размещения производственного модуля. Для уточнения проектных операций составляются математические и алгоритмические модели, результаты которых вводятся проектировщиком в спецификации координат позиций активных элементов ПМ_{ji} в ГАМУ [6]. Данные проектные операции проводятся с учетом выполнения условий:

$$K_{\text{ВХ } mn 1}^j \geq M_{\text{рз } j}, K_{\text{ВХ } mn 4}^j \geq M_{\text{рм } j},$$

где $M_{\text{рз } j}$, $M_{\text{рм } j}$ — соответственно математические модели по определению рабочей зоны ТО и ПР в каждом ПМ_{ji} и их координат с учетом безо-

пасности расстояния между ПМ_{ji} и зоной перемещения электрокары в ГАМУ.

В результате диалогового поиска (запросов) готовых компоновочных схем из базы данных выбираются множества подходящих по условию ограничений $K_{вх mn j}$ компоновочные схемы ПМ_{ji} в ГАМУ. При этом многообразие системных вариантов компоновочных структур ГАМУ определяется большим количеством варьируемых вариантов. Перед проектировщиком ставится задача анализа максимального количества вариантов компоновочных схем ГАМУ с целью выбора лучших вариантов. Компоновочная схема ГАМУ выбирается на основе варьирования дискретных параметров: набор ТО; множество структур размещения ТО и ПР; последовательность технологических операций.

На этапе эскизного проектирования компоновочной схемы ПЛ в соответствии с конечными результатами этапа технического предложения [6, с. 67–72] разрабатываются готовые структурные и функциональные схемы; определяются значения рабочей зоны ТО и ПР в каждом ПМ_{ji} ($I_{кон эп} \in \{I_{кон эп1}, I_{кон эп2}, \dots, I_{кон эпn}\}$) и их координат ($K_{кон эп} \in \{K_{кон эп1}, K_{кон эп2}, \dots, K_{кон эпn}\}$) с учетом безопасного функционирования активных элементов, расстояния между ПМ_{ji} и зоной перемещения электрокары в ГАМУ и другими дискретными параметрами; выполняются проектные процедуры. При решении рассматриваемых проектных задач на этапе эскизного проекта должно выполняться условие

$$\forall MI_j \vee II_j \vee PI_j \in \vee PV_j,$$

где $\forall MI_j, II_j, PI_j$ — соответственно разработанные математические, информационные и программные инструментарии (МИ, ИИ, ПИ) автоматизированного выбора компоновочной схемы ПЛ, которые соответствуют процедурам выбора (PV_j).

Множество ИАП компоновочной схемы ГАМУ можно представить в виде блочной матрицы [6, с. 87]:

$$И = \begin{pmatrix} MI_{11} & MI_{12} & \dots & MI_{1n} \\ II_{21} & II_{22} & \dots & II_{2n} \\ PI_{31} & PI_{32} & \dots & PI_{3n} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{Mj} \\ \mathcal{E}_{Ij} \\ \mathcal{E}_{Pj} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} PV_{1i} \\ PV_{2i} \\ PV_{3i} \end{pmatrix},$$

где \mathcal{E}_{Ij} — эксперты, создающие программные инструментарии автоматизированного проектирования компоновочной схемы ГАМУ.

Проектные процедуры разработки компоновочной схемы ГАМУ $PV_{1j} \in \{PV_{11}, PV_{12}, \dots, PV_{1n}\}$, $PV_{2j} \in \{PV_{21}, PV_{22}, \dots, PV_{2k}\}$, созданные в области математического и информационного обеспечения, на подэтапах эскизного проекта представляются в качестве исходных данных для процедур по разработке специальных программных средств $PV_{3j} \in \{PV_{31}, PV_{32}, \dots, PV_{3m}\}$.

При организации проектной процедуры с помощью автоматизированного проектирования поэтапно формируются математические модели по определению координат позиций активных элементов, производственных модулей и участков ГАМУ [7], математические модели по определению рабочих зон и погрешностей позиционирования ПР и ТО, математические модели структурного и функционального анализа [8]. Управляющая программа посредством операционной системы активизирует соответствующие пакеты прикладных программ математического, информационного и конструкторского назначения. При этом проектные процедуры осуществляются по следующей схеме: $P_j : M_j \rightarrow M_{j+1}$.

Разработанный экспертом \mathcal{E}_{M_i} комплекс математического инструментария (МИ) позволяет $\mathcal{E}_{И_1}$ использовать эти модели для разработки базы данных и знаний как основные условия выбора компоновочной схемы ГАМУ в зависимости от специфики конкретного объекта проектирования. Далее $\mathcal{E}_{И_2}$ на основе интеллектуальных моделей разрабатывает информационно-поисковую модель, позволяющую осуществлять более эффективный поиск компоновочной схемы ГАМУ. С применением комплекса МИ и ИИ, созданных соответственно \mathcal{E}_{M_i} и $\mathcal{E}_{И_i}$, экспертами-программистами $\mathcal{E}_{П_i}$ разрабатывается комплекс ПИ.

Выбор компоновочной схемы каждого производственного участка гибких производственных систем осуществляется в соответствии с целевой функцией:

$$W = \text{extr}_{i,j=1,n} \left\{ \begin{array}{cccc} f_1^1 & f_2^1 & \dots & f_n^1 \\ f_1^2 & f_2^2 & \dots & f_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^m & f_2^m & \dots & f_n^m \end{array} \right\},$$

где $f_1^i, f_2^i, \dots, f_n^m$ — составляющие целевой функции; n, m , — соответственно количество ПМ_{*i*} в ГАМУ; количество строк обозначает типы компоновочных схем.

На основе результатов математических моделей по расчету рабочей зоны активных элементов и их временных цикловых переходов в производственных модулях различной компоновочной схемы ГАМУ и условия $f_i \leq \Delta K_{\text{вх эп } i}$ (где $f_i \rightarrow \text{МИ}_i$ — математические модели; $\Delta K_{\text{вх эп } i}$ — допустимые значения параметров, подобные результатам математических моделей) имеем:

$$f_1 \in \{S_i \rightarrow \text{КС}_{\text{ПЛ}}^j\};$$

$$f_2 = \{[T_i \rightarrow \text{ТО}, T_j \rightarrow \text{ПР}] \in [\text{КС}_{\text{ПЛ}}^1 \vee \text{КС}_{\text{ПЛ}}^2 \vee \text{КС}_{\text{ПЛ}}^3]\},$$

где $\text{КС}_{\text{ПЛ}}^1 \rightarrow \text{ПЛ}$ круговой структуры; $\text{КС}_{\text{ПЛ}}^2 \rightarrow \text{ПЛ}$ параллельной структуры; $\text{КС}_{\text{ПЛ}}^3 \rightarrow \text{ПЛ}$ угловой структуры;

$$f_3 = R_{\max} \int_0^{\varphi} \cos^2 \varphi + \sum_{i=1}^5 S_i \equiv \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \sum_{i=1}^5 S_i ;$$

$$f_4 = \sum_{i=1}^4 t_l + \sum_{i=1}^3 t_{\varphi} + \sum_{i=1}^4 t_z ,$$

где $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{4\pi}{3}$ — угол размещения ТО и обслуживания ПР в зависимости от структуры ГАМУ ($2\pi/3$ — круговая структура ГАМУ; π — параллельная структура ГАМУ; $4\pi/3$ — угловая структура ГАМУ); R_{\max} — максимальный вылет руки ПР вместе с заготовкой; t_l — общее время выполнения линейных перемещений ПР при обслуживании ТО ГАМУ (в трехмерной координатной системе ПР выполняет 4 линейных перемещений, т.е. $n = 4$ (рис. 2)); t_{φ} — общее время выполнения вращательных перемещений ПР при обслуживании ТО ПЛ (в трехмерной координатной системе ПР выполняет 3 вращательных перемещений, т.е. $m = 3$, рис. 2); t_z — общее время выполнения операций закрытия и открытия захватом ПР при обслуживании ТО ГАМУ (в трехмерной координатной системе захват ПР выполняет 4 захватывающих и открывающих операций); S_i — площадь размещения модулей ГАМУ.

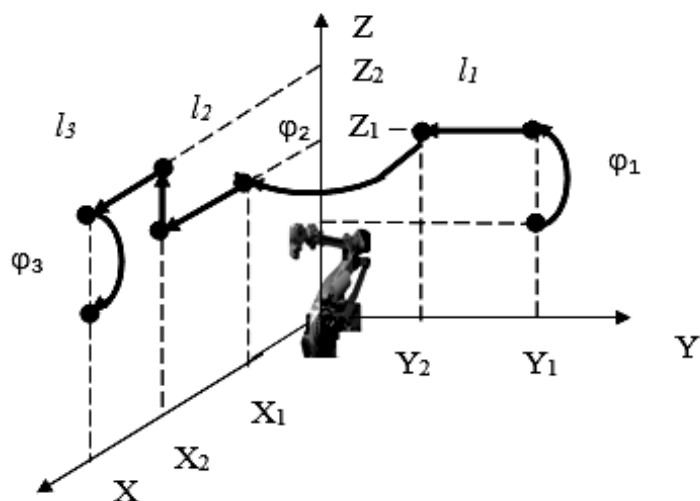


Рис. 2. Траектория движения ПР

Для информационно-технологического и структурного исследований и анализа компоновочных схем производственных модулей, участков ГАМУ формируется структура этапов алгоритмического и программного обеспечения автоматизированного проектирования [9, с. 22–85]. В алгоритмическое обеспечение исследуемого ГАМУ входят проектные модели, включающие информацию о выборе каждого ПР, манипуляторов, видах оборудования, устройств и других активных элементов; порядок выполнения операций активными элементами ГАМУ и время, расходуемое на выполненные операции оборудования. Логическое представление типов активных

элементов и их технологических операций, выбора промышленных роботов, манипуляторов и ТО, устройств управления и контроля для каждого модуля ГАМУ в зависимости от допустимых параметров ограничений является основной алгоритмического обеспечения.

На базе логических моделей алгоритмического обеспечения и рассматриваемых математических моделей (MM_i) разрабатывается программное обеспечение автоматизированного выбора и проектирования компоновочной схемы ГАМУ технологического парка.

ВЫВОДЫ

1. На основе анализа этапов автоматизированного проектирования производственных процессов поставлен вопрос о создании инструментария поэтапной разработки компоновочной схемы технологических единиц в производственной линии.

2. В соответствии с этапами автоматизированного проектирования предложен алгоритм с использованием входной информации и проектных процедур для выбора и разработки компоновочной схемы производственной линии.

3. С применением метода логического моделирования разработан алгоритм выбора наилучшего варианта компоновочной схемы производственного модуля с точным размещением его активных элементов.

4. Разработано программное обеспечение для выбора компоновочной схемы ГАМУ из гибкой производственной системы технологического парка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зинченко Ю.В.* Обзор современных систем автоматизированного проектирования. Потенциал современной науки / Ю.В. Зинченко, А.А. Голобородько / Омск: Омск. гос. техн. ун-тет. — 2016. — № 4(21). — С. 68–71.
2. *Meguid S.A.* Integrated computer-aided design of mechanical systems / S.A. Meguid. — London: Elsevier Applied Science, 2007. — P. 34–42.
3. *Норенков И.П.* Основы автоматизированного проектирования: учеб. для вузов / И.П. Норенков. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. — 430 с.
4. *Малюх В.Н.* Введение в современные САПР: курс лекций / В.Н. Малюх. — М.: ДМК Пресс, 2010. — 192 с.
5. *Singh N.* System Approach to Computer-Integrated Design and Manufacturing / N. Singh. — USA. — 2002.
6. *Норенков И.П.* Автоматизированное проектирование: учебник / И.П. Норенков. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 188 с.
7. *Боровков А.И.* Компьютерный инжиниринг. Аналитический обзор: учеб. пособие / А.И. Боровков. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 93 с.
8. *Муромцев Ю.Л.* Информационные технологии в проектировании радиоэлектронных средств: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Ю.Л. Муромцев, Д.Ю. Муромцев, И.В. Тюрин и др. — М.: Издат. центр «Академия», 2010. — 384 с.
9. *Cunvu Li.* Basis CAD of CAD/CAM/CAE "Peter" / Li. Cunvu. — Moscow–Sankt Peterburg, 2004. — 560 p.

Поступила 05.04.2018

**МЕРЕЖЕВІ СТРУКТУРИ ТА СИСТЕМИ:
II. СЕРЦЕВИНИ МЕРЕЖ ТА МУЛЬТИПЛЕКСІВ**

О.Д. ПОЛІЩУК, М.С. ЯДЖАК

Анотація. Уведено поняття потокової серцевини мережевої системи та проаналізовано функціональні переваги її структури порівняно із серцевиною складної мережі. Показано, що потокові серцевини дозволяють будувати значно адекватніші з функціонального погляду моделі мережевих систем, ніж серцевини складних мереж. Це продемонстровано на прикладі практично важливих задач керованості, спостережуваності та синхронізації складних мереж. На підставі аналізу структур реальних систем запропоновано узагальнене визначення мультиплексу та введено поняття його ядра. Розглянуто низку задач моделювання мультиплексів і встановлено, що ефект «тісного світу» у них посилюється. Побудовано потокову матрицю суміжності системи мультиплексного типу. На її основі визначено деякі локальні та глобальні характеристики мультиплекс-системи і досліджено властивості її потокової серцевини. Проаналізовано способи зменшення розмірності моделей мультиплекс-систем з одночасним відстеженням кількісної міри збереження їх адекватності.

Ключові слова: складна мережа, мережева система, потік, мультиплекс, модель, серцевина, ядро.

ВСТУП

Під час дослідження складних мережевих систем (СМС) виникає проблема розмірності їх моделей. Складні мережі (СМ) можуть налічувати мільйони та мільярди елементів (вузлів і ребер, що їх поєднують) [1]. Кількість процесів, які перебігають у системах з такою структурою, є принаймні на порядок більшою [2]. Зазвичай основний спосіб вирішення проблеми розмірності полягає у спрощенні моделі завдяки відкиданню найменш важливих з погляду дослідника елементів [3]. Однак у разі такого спрощення виникає проблема збереження адекватності моделі. У праці [4] розглянуто один з варіантів зменшення розмірності моделі без утрати її адекватності, який полягає у видаленні зі структури системи фіктивних вузлів та зв'язків. Ще один спосіб спрощення моделей СМ — уведення поняття k -серцевини мережі [5], тобто найбільшої підмережі вихідної СМ, усі вузли якої мають структурний ступінь не менший за k , та вилученні зі структури мережі вузлів зі ступенем, що менший за k [6]. Використання поточкових характеристик СМС [4] дозволяє ввести поняття потокової серцевини мережевої сис-

теми. Потоків серцевини СМС дають змогу будувати функціонально значно адекватніші спрощені моделі мереж, ніж їх k -серцевини.

Будь-яка реальна система є відкритою, тобто вона взаємодіє з іншими системами [7]. Одними з різновидів міжсистемних взаємодій є мультиплекси [8], у яких вузли однієї мережі можуть одночасно бути вузлами багатьох інших мереж. Так, кожна країна є об'єктом (або вузлом) міжнародної політичної, економічної, військової, безпекової, культурної, спортивної співпраці і т.ін. Кожне місто країни є вузлом кількох транспортних мереж різних типів, мереж державного та місцевого управління, економічних та фінансових мереж тощо. Кожна людина також є вузлом багатьох мереж (родинної, професійної, соціальної, релігійної і т.ін.). Кожну мережу, яка є складовою мультиплексу, називають шаром. Наведені приклади показують, що між вузлами окремих мережевих шарів існують різні види взаємодій. Ці взаємодії можуть мати різну природу, призначення та матеріальний носій. Оскільки кожна мережа є структурою певної мережевої системи [4], то один і той же вузол мультиплексу є елементом багатьох систем і реалізує в них різні функції. Під час дослідження мультиплексів також використовується поняття k -серцевини [9, 10] як поєднання k -серцевин окремих шарів-мереж. Уводимо поняття ядра мультиплексу як структури та потокової серцевини мультиплексу як системи взаємодіючих у процесі свого функціонування шарів — мережевих систем. Ці поняття дозволяють спрощувати моделі системних взаємодій мультиплексного типу.

Мета роботи — визначити, наскільки поняття потокової серцевини мережі дає змогу спростити дослідження мережевих систем і мультиплекс-систем та зменшити розмірності їх моделей без утрати адекватності.

СЕРЦЕВИНИ СКЛАДНИХ МЕРЕЖ ТА МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Нехай до складу мережі входить N вузлів. У праці [4] визначено потокову матрицю суміжності мережевої системи $\mathbf{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^N$ за співвідношенням $f_{ij} = V_{ij} / \max_{m,l=1,N} \{V_{ml}\}$, $f_{ij} \in [0,1]$, де V_{ij} — об'єм потоку, який проходить із вузла n_i у вузол n_j за проміжок часу $[0, T]$, $i, j = \overline{1, N}$. Позначимо $\mathbf{F}^* = \{f_{ij}^*\}_{i,j=1}^N$, де $f_{ij}^* = f_{ji}^* = (f_{ij} + f_{ji})/2$, $f_{ij}^* \in [0, 1]$, $i, j = \overline{1, N}$. Визначимо потокову λ -серцевину СМС як найбільшу підмережу вихідної мережі, для якої усі елементи матриці \mathbf{F}^* мають значення, не менші за λ , де $\lambda \in [0, 1]$. Невеликий фрагмент реальної автотранспортної мережі великого міста схематично зображено на рис. 1, а; цей же фрагмент з відображенням об'ємів руху потоків, величина яких є пропорційною до товщини ліній, — на рис. 1, б, 4-серцевину фрагмента СМ та потокову 0,9-серцевину відповідної складової СМС — на рис. 1, в, г. Очевидно, що структури цих серцевин істотно відрізняються, причому потокова λ -серцевина СМС містить значно важливішу інформацію для системних досліджень, ніж k -серцевина її структури. Так, вилучення вузла B зі структурним ступенем 3, який лежить на шляху інтенсивного руху великих об'ємів потоків, призведе до значно біль-

ших проблем у функціонуванні транспортної системи (перерозподілу потоків альтернативними шляхами), ніж вилучення вузла A зі структурним ступенем 4. Зазначимо, що розмірність λ -серцевини зі значеннями λ , близькими до 1, зазвичай значно менша за розмірність k -серцевини з великим значенням k .

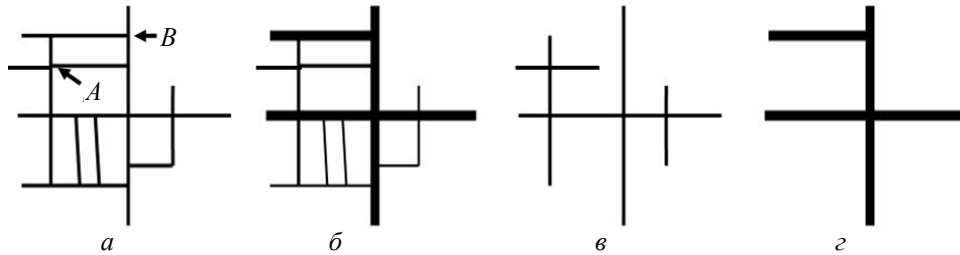


Рис. 1. Фрагмент складної мережі (а), мережевої системи (б), її 4-серцевини (в) та потокової 0,9-серцевини (г)

Вирішення проблеми розмірності моделей великих СМ можна спростити, досліджуючи не всю мережу, а лише її λ -серцевину. При цьому, чим більшою є питома вага λ -серцевини в системі, тим адекватніший результат дослідження. Можна використовувати різні способи визначення питомої ваги λ -серцевини у вихідній мережі, наприклад, рівні покриття λ -серцевиною її вузлів та/або зв'язків.

Уведемо потокову матрицю суміжності λ -серцевини $\mathbf{F}_\lambda^* = \{f_{ij}^{*,\lambda}\}_{i,j=1}^N$ за співвідношенням

$$f_{ij}^{*,\lambda} = \begin{cases} f_{ij}^*, & \text{якщо } f_{ij}^* \geq \lambda; \\ 0, & \text{якщо } f_{ij}^* < \lambda; \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Для визначення питомої ваги λ -серцевини використовуватимемо параметр σ_λ , що визначає відношення об'ємів потоків, які проходять λ -серцевиною, до об'ємів потоків, які проходять мережею загалом за період $[0, T]$, тобто

$$\sigma_\lambda = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}^{*,\lambda}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}^*}.$$

Оскільки основною метою більшості мережевих систем є забезпечення руху певного типу потоків [4], то параметр σ_λ кількісно визначає наскільки λ -серцевина забезпечує реалізацію цієї мети. Якщо замість моделі всієї системи досліджувати модель її λ -серцевини, то значення параметра σ_λ можна інтерпретувати як міру адекватності цієї моделі. Позначимо через λ_{\min} мінімальне, відмінне від 0, значення f_{ij}^* , $i, j = \overline{1, N}$. Якщо значення $\sigma_{\lambda_{\min}}$ близьке до 1, то це означає, що потоки рівномірно розподілені мережею, тобто її λ_{\min} -серцевина загалом збігається з вихідною СМ. Чим більше значення σ_λ наближене до 1 за значень λ , близьких до 1, тим меншою є частина СМС, у якій зосереджені основні об'єми потоків. У цьому випадку дослідження можна зосередити насамперед на цій частині системи (рис. 2).

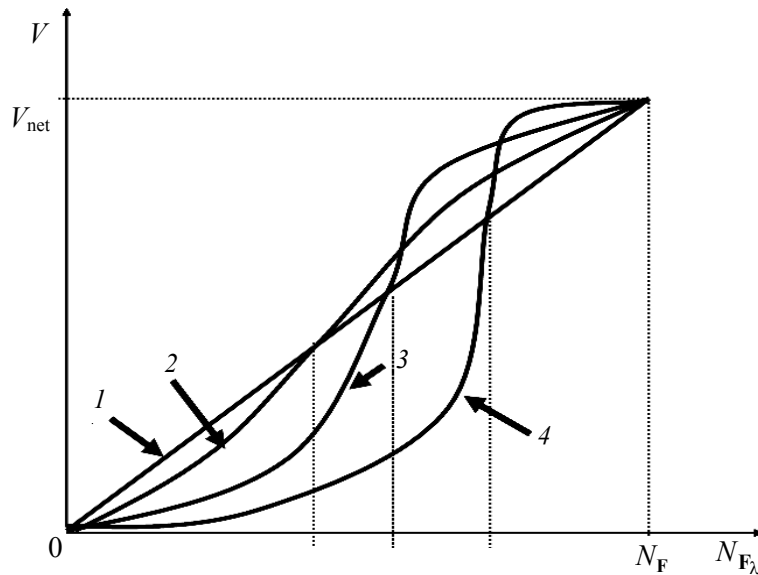


Рис. 2. Графіки розподілу об'ємів потоків у λ -серцевинах мережевих систем: V — об'єм потоків; V_{net} — сумарний об'єм потоків у мережі; N_{F_λ} — кількість зв'язків λ -серцевини мережі (кількість ненульових елементів потокової матриці суміжності λ -серцевини); N_F — сумарна кількість зв'язків мережі (кількість ненульових елементів потокової матриці суміжності мережі)

Зв'язки мережі впорядковані за ознакою збільшення об'ємів потоків. Лінія 1 відповідає випадку, коли потоки рівномірно розподілені ребрами мережі, лінії 2–4 — випадкам, коли потоки нерівномірно розподілені ребрами мережі, зокрема лінія 4 визначає, що основна маса потоків рухається у невеликій підмережі вихідної мережі.

Таким чином, виділення та дослідження потокової серцевини СМС порівняно з дослідженням усієї мережі дозволяє зменшити розмірність задачі завдяки відкиданню функціонально найменш важливих вузлів та зв'язків, що не призводить до значних збоїв у роботі системи. Унаслідок цього дослідження мережі зводиться до аналізу або математичного моделювання найбільш пріоритетних її підструктур. У людському організмі серцево-судинна система включає в себе як основні, так і периферійні вени та артерії. Розрив однієї з основних судин може призвести до швидкого летального кінця. У великому місті перекриття основних автомагістралей може спричинити колапс усієї його транспортної системи. Аварії на магістральних лініях електропередач під час стихійних лих часто призводили до відключення від електроенергії цілих регіонів країни. Однак це не означає, що зв'язки з малим значенням λ можна повністю ігнорувати. Невеликі населені пункти також потрібно забезпечувати продуктами, транспортом, фінансовими, медичними, освітніми та іншими послугами, незважаючи на незначні об'єми потоків. Наприклад, перекриття периферійних судин зумовлює розвиток некротичних явищ в органах людського тіла. У людському соціумі та у фізичному світі важливими є слабкі взаємодії, завдяки яким можливе існування мереж «тісного світу» [11]. Для кожної реальної СМС можна знайти таке значення λ_i , яке поділяє множину всіх зв'язків мережі на підмножини сильних та слабких взаємодій (λ_i -серцевину та її доповнення) і досліджувати

реальний вплив слабких взаємодій на процес функціонування системи. Ітераційне дослідження поточкових серцевин СМС із послідовним зменшенням значення λ дозволяє спростити цей процес, зосереджуючись насамперед на найбільш важливих ділянках системи. Інший шлях визначення поточної серцевини СМС полягає у включенні до її структури лише тих вузлів мережі, які мають поточковий ступінь не менший за наперед визначене значення [4]. Недоліком такого підходу в окремих випадках є неоднозначність визначення зв'язків між вузлами такої серцевини.

РОЗМІРНІСТЬ ТА АДЕКВАТНІСТЬ МОДЕЛЕЙ ПОТОКОВИХ СЕРЦЕВИН СКЛАДНИХ МЕРЕЖЕВИХ СИСТЕМ

Модель СМС для дослідження найбільш пріоритетних її підсистем можна спростувати шляхом вилучення не тільки фіктивних та найменш пріоритетних з функціонального погляду вузлів і зв'язків, які входять до складу мережі, але й вузлів-посередників. Найпростішим прикладом вузла-посередника є вузол зі структурним ступенем 2, у якому не відбувається відбору або додавання нових об'ємів потоків. Нехай маємо деяку вихідну мережу (рис. 3, *а*). Тоді, взявши її поточкову 0,5-серцевину (рис. 3, *б*) та 3-серцевину цієї 0,5-серцевини (рис. 3, *в*), отримуємо підмережу вихідної СМ, яка містить лише ті елементи, які важливі для дослідження системи без вузлів-посередників. Такі структури називатимемо $\lambda(k)$ -серцевинами (на рис. 3, *в* зображено 0,5(3)-серцевину вихідної СМС). Спрощуючи моделі систем, слід враховувати, що оброблення потоку у вузлі-посереднику може бути досить складним процесом [12]. Дестабілізація роботи такого вузла може зупинити рух усіх потоків на шляхах, які проходять через цей вузол. Однак загалом вилучення таких вузлів суттєво зменшує розмірність моделей СМС майже без втрати їх адекватності (17 вузлів та 33 ребра у моделі, зображеній на рис. 3, *а*, та 5 вузлів і 15 ребер у моделі — на рис. 3, *в*).

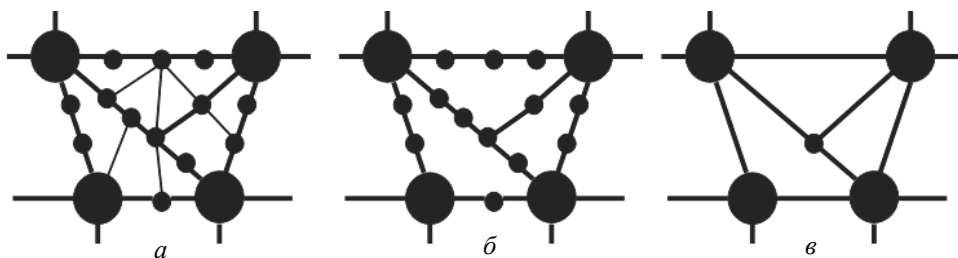


Рис. 3. Моделі фрагмента СМС та її λ - і $\lambda(k)$ -серцевин: *а* — вихідна мережа; *б* — 0,5-серцевина; *в* — 0,5(3)-серцевина

Залізничну мережу західного регіону України без вузлів-посередників схематично зображено на рис. 4, *а*. Ця мережа містить 29 вузлів та 62 ребра (загалом у ній 354 вузли). На рис. 4, *б* зображено 0,7(3)-серцевину цієї системи, яка забезпечує понад 80% усіх перевезень, на рис. 4, *в* — доповнення до цієї серцевини, яке забезпечує менше ніж 20% перевезень. Зазначимо, що 0,7(3)-серцевина цієї системи є зв'язною мережею, тоді як її доповнення — незв'язною мережею. При цьому розмірність 0,7(3)-серцевини СМС, яка нараховує 4 вузли та 12 зв'язків, є меншою, ніж розмірність її доповнення

(8 вузлів та 27 зв'язків). Подібне явище спостерігається у багатьох природних та штучних СМС. Утрата зв'язності λ -серцевини зі зростанням значення λ дозволяє виділяти із СМС спільноти, рух потоків у яких, тобто сила зв'язку між елементами яких, є значно сильнішою, ніж між іншими складовими мережі. Очевидно, що видалення частини λ -серцевини СМС з великим значенням λ значно більше дестабілізує роботу системи, ніж видалення частини її доповнення. При цьому недосяжність навіть невеликої частини λ -серцевини може призвести до невирішуваних проблем (наприклад, втрати зв'язності мережі) з пошуку альтернативних шляхів руху потоків (рис. 4, з) [4].

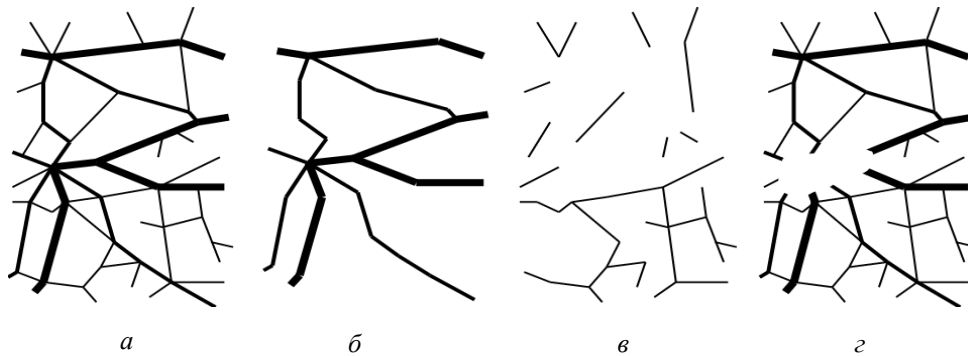


Рис. 4. Фрагмент залізничної мережі та її 3(0,7)-серцевини

Розмірність моделей СМС відіграє вагомую роль у розв'язанні багатьох важливих задач моделювання складних мереж та мережевих систем: керуваності, спостережуваності, синхронізації [13–15] тощо. Серед найважливіших проблем керуваності СМС можна назвати боротьбу з розгортанням так званих каскадних явищ або, навпаки, сприяння цьому процесу [16], спрямування потоків по альтернативних шляхах, динамічну синхронізацію руху потоків, швидку адаптацію до зміни графіка руху в системах із повністю або частково впорядкованим рухом, розширення та звуження мережі залежно від стадії її життєвого циклу тощо. Натепер задачі керуваності та спостережуваності складних мереж обмежуються найпростішими лінійними моделями для орієнтованих щільних однорідних мереж [13, 14]. Навіть за допомогою числових методів установити виконання критерію Калмана вдається лише для лінійних моделей СМ, кількість вузлів яких обмежується кількома десятками [17, 18]. Тому зменшення розмірності задач керуваності та спостережуваності стає вирішальним для можливого їх розв'язання, яке доцільно починати з $\lambda(k)$ -серцевини СМС з великими значеннями k і λ . Так, для наведеного вище прикладу залізничної мережі, до складу якої входить 354 вузли, задачі керуваності та спостережуваності розв'язати не вдається. Однак для її 0,7(3)-серцевини, яка складається лише з 4 вузлів та 12 зв'язків, розв'язок цих задач знайти досить просто. Ще однією важливою проблемою, пов'язаною із задачами керуваності та спостережуваності, є визначення таких значень λ_C і λ_O , для яких λ_C -серцевина та/або λ_O -серцевина СМС втрачають свою повну керуваність або спостережуваність відповідно. Очевидно, що якщо некерованою (неспостережуваною) є певна $\lambda(k)$ -серцевина СМС, то некерованою (неспостережуваною) є і система загалом.

Аналітичні або геометричні методи розв'язання задач керованості та спостережуваності СМ обмежуються пошуком мінімальної кількості вузлів, управління якими є достатнім для забезпечення повної або часткової керованості мережі, або мінімальної кількості вузлів-сенсорів, які забезпечують її спостережуваність. У праці [13] припускається, що такими СМ можуть керувати вузли з високим структурним ступенем, тобто їх k -серцевини з великим значенням k . Ці вузли також пропонується розглядати як вузли спостереження [14]. Однак з функціонального погляду та самої постановки задачі впливає, що як вузли керування доцільно обирати вузли-генератори потоків, а як вузли спостереження — вузли-приймачі потоків. Найпростішою ознакою вузла-генератора є переважання об'ємів вихідних потоків над об'ємами вхідних, а вузла-приймача — навпаки. Однак таке визначення є далеко неоднозначним. Наприклад, у великих металургійних центрах об'єми вхідних потоків (сировини) значно перевищують об'єми вихідних (готової продукції). Подібну ситуацію можна спостерігати у містах-виробниках високотехнологічної продукції. З огляду на наведене визначення ці вузли є приймачами потоків. Але якщо за ознаку «об'єму потоку» вважати його вартість, то згадані вище вузли стають генераторами потоків. Таким чином, залежно від заданої ознаки об'єму потоку один і той же вузол може бути як генератором, так і приймачем потоків, тобто як вузлом керування, так і вузлом спостереження.

Рух потоків у мережі є динамічним процесом і потребує динамічної синхронізації. При цьому синхронізація СМ є необхідною, але не достатньою умовою для синхронізації мережевої системи. У відомих моделях синхронізації [19–21] зазвичай використовують сам факт взаємозв'язку між вузлами, який визначається елементами матриці суміжності мережі. Утім не менш важливою для адекватності моделі синхронізації є точність визначення сили цього взаємозв'язку. Потоківі характеристики СМС та врахування впорядкованості руху потоків дозволяють удосконалити відомі моделі синхронізації складних мереж [22]. У таких моделях синхронізація системи забезпечується синхронізацією об'ємів потоків, які рухаються мережею, а сила зв'язку між вузлами набуває предметного змісту.

Розповсюдження епідемій зазвичай відбувається на шляхах найбільш інтенсивного пересування великих мас людей, а розповсюдження комп'ютерних вірусів найбільш імовірно на шляхах найбільш інтенсивного інформаційного трафіку. Потоківі серцевини СМС з великими значеннями λ визначають найбільш імовірні шляхи поширення таких процесів. Тому, ізолюючи певні зони мережі [4], особливу увагу потрібно приділяти саме цим складовим СМС.

МУЛЬТИПЛЕКС-СТРУКТУРИ ТА МУЛЬТИПЛЕКС-СИСТЕМИ

Мультиплекси є найбільш поширеним видом міжсистемних взаємодій. Транспортна система країни — це відомий та зрозумілий приклад мультиплексу. Окремі мережеві шари цієї структури утворюють транспортні системи різного типу — залізничні, автомобільні, авіаційні, морські та річкові, вузлами яких є окремі населені пункти. Лінгвістичні (мовні) мультиплекси, вузлами яких є окремі особи, утворюють різномовні групи населення Землі.

Мультиплекси соціальних мереж, вузлами яких є окремі їх користувачі, є поєднанням глобальних (Facebook, Twitter, LinkedIn, pinterest, Google Plus і т.ін.) та локальних (UkrOpen, ukrface, українці тощо) соціальних мереж. Мультиплекси є динамічними структурами. Поява нового виду взаємодій між вузлами мереж, які входять до складу мультиплексу, породжує новий його шар. Навпаки, якщо якийсь вид взаємодій зникає, то зникає і відповідний шар. Часто новий шар та відповідний вид взаємодій розширюють можливості існуючих зв'язків у мультиплексі (стаціонарний та мобільний телефонний зв'язок, пошта та E-mail). Отже, у більшості випадків різні мережеві шари мультиплексу мають різний склад вузлів та структуру зв'язків. Тому, узагальнюючи відоме визначення [8], мультиплексом або M -структурою називатимемо поєднання кількох взаємодійних мереж, перетин множин вузлів яких є непорожнім. Ядром мультиплексу називатимемо мережу, яка складається з вузлів та зв'язків, що входять до кожного мережевого шару M -структури (рис. 5 — чорним позначено вузли, які належать ядру мультиплексу, сірим — вузли, які належать лише частині мережевих шарів). Кожний вузол ядра мультиплексу є «точкою переходу» з довільного шару мережі на будь-який інший шар.

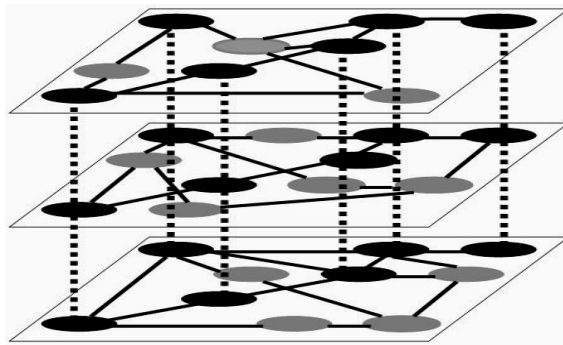


Рис. 5. Фрагмент мультиплексу та його ядра

Під час дослідження M -структур виникає багато важливих проблем: існування шляху з довільного вузла одного шару у довільний вузол іншого шару, побудова найкоротших шляхів руху через мультиплекс (зміна видів транспорту може суттєво пришвидшити час руху пасажирів та вантажів); пошук альтернативних шляхів через інші мережеві шари під час ізоляції певної зони в окремому мережевому шарі (використання метрополітену у великих містах у разі виникнення заторів на автошляхах) [4]; протидія розповсюдженню епідемій, комп'ютерних вірусів тощо, які через мультиплексні взаємодії можуть поширюватися значно швидше, ніж в одному шарі. Здатність переходу через вузли ядра з одного мережевого шару на інший і навпаки розширює можливості доступу до вузлів, недосяжних в окремих шарах-мережах, та дозволяє здійснювати зв'язок між незв'язними складовими таких шарів. Окремим питанням є явище «тісного світу» у мультиплексі, оскільки більшість реальних складних мереж мають цю властивість. Мережі «тісного світу» характеризуються малою середньою довжиною шляху l між вузлами та високим ступенем кластеризації C . Загалом залежно від типу мережі параметр l є обернено пропорційний, а параметр C прямо пропорційний деякій додатній монотонно зростаючій функції від середньої

кількості зв'язків вузла мережі [11]. Навіть не вважаючи міжшарові взаємодії додатковими зв'язками вузла та відкидаючи дублювальні його зв'язки у тих шарах мультиплексу, до яких він належить, отримуємо більшу середню кількість зв'язків вузла у M -структурі, ніж в окремо взятому шарі. Це означає, що ефект «тісного світу» у мультиплексі лише посилюється.

Нехай мультиплекс складається з M шарів-мереж, S_m — множина вузлів його m -го шару, N_m — їх кількість, $m = \overline{1, M}$; $S = \bigcup_{m=1}^M S_m$ — загальна множина вузлів M -структури і N_S — кількість цих вузлів. Різні вузли мультиплексу зазвичай мають різне значення у M -структурі. В окремому мережевому шарі структурний ступінь вузла визначається кількістю його зв'язків з іншими вузлами цього шару. Структурний мультиплексний ступінь вузла визначатимемо за кількістю мережевих шарів, до складу яких він входить. Позначимо через $K_M = \bigcap_{m=1}^M S_m$ множину вузлів ядра мультиплексу, а через N_K — кількість цих вузлів. Питому вагу ядра у m -му шарі визначаємо параметром $\eta_m = N_K / N_m$, а питому вагу ядра у мультиплексі — параметром $\eta_M = N_K / N_S$. Очевидно, що параметр η_m визначає кількісну міру можливості взаємодій m -го шару з іншими шарами M -структури, $m = \overline{1, M}$, а параметр η_M — загальну кількісну міру можливості міжшарових взаємодій у мультиплексі. Можна ввести ще ряд інших параметрів мультиплексу, які визначають структурні особливості його вузлів, мережевих шарів і M -структури загалом (переважне приєднання, кластеризація тощо).

Кожний мережевий шар мультиплексу відображає структуру певної мережевої системи. Мультиплекс-системою (M -системою) називатимемо сукупність мережевих шарів-систем, структури яких поєднані у M -структуру, які спільно функціонують для забезпечення руху певного типу потоків. Таким чином, M -структура породжує M -систему лише у разі можливості переходу потоку з довільного шару мультиплексу на інший і навпаки. Такою мультиплекс-системою є вже згадана вище транспортна система країни, потоками в якій є пасажирів та/або вантажі, M -систему породжує мультиплекс соціальних мереж і т. ін. Носії потоків у різних шарах M -системи можуть бути однотипними, як у соціальних мережах, або різнотипними, як у транспортному мультиплексі.

Як і у випадку мережевих систем [4], процес функціонування M -системи для загальної сукупності вузлів S_M можна описати її потоковою матрицею суміжності $\mathbf{F}_M = \{\mathbf{F}_{ij}\}_{i,j=1}^{N_S}$. Блоки $\mathbf{F}_{ij} = \{f_{ij}^{km}\}_{k,m=1}^M$, $i, j = \overline{1, N_S}$, цієї матриці визначаються таким чином. Для випадку $i = j$ блоки $\mathbf{F}_{ii} = \{f_{ii}^{km}\}_{k,m=1}^M$ є поточковими матрицями суміжності міжшарових взаємодій для i -го вузла загальної сукупності вузлів M -системи, $i = \overline{1, N_S}$. Ці блоки є нульовими матрицями, якщо вузол належить лише одному системному шару. Оскільки зв'язки-петлі у M -структурі виключаються, то елементи f_{ii}^{mm} , $m = \overline{1, M}$, матриці \mathbf{F}_{ii} також є нульовими. Інші значення f_{ii}^{km} дорівнюють об'ємам потоків, які з i -го вузла k -го шару надходять в i -й вузол m -го шару

M -системи за період $[0, T]$, $k, m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N_S}$. Для випадку $i \neq j$ блоки $\mathbf{F}_{ij} = \{f_{ij}^{km}\}_{k,m=1}^M$ і $\mathbf{F}_{ji} \in$ потоковими матрицями суміжності вихідних та вхідних внутрішньосферних взаємодій для i -го вузла загальної сукупності вузлів у різних шарах M -системи відповідно, $i, j = \overline{1, N_S}$. При цьому, оскільки у M -системі різні вузли різних шарів не взаємодіють, то $f_{ij}^{km} = 0$ для $k \neq m$, $k, m = \overline{1, M}$, тобто матриці \mathbf{F}_{ij} і \mathbf{F}_{ji} , $i, j = \overline{1, N_S}$, є діагональними. Елементи f_{ij}^{mm} потокової матриці суміжності m -го системного шару $\mathbf{F}^{(m)} = \{f_{ij}^{mm}\}_{i,j=1}^{N_m}$, $m = \overline{1, M}$, визначають об'єми потоків, які проходять між вузлами цього шару за період $[0, T]$. Як і в разі формування потокової матриці суміжності мережевої системи [4], елементи матриці \mathbf{F}_M нормуються шляхом ділення на максимальне значення об'ємів потоків, які проходять між довільними двома вузлами M -системи за період $[0, T]$, тобто $f_{ij}^{km} \in [0, 1]$, $k, m = \overline{1, M}$, $i, j = \overline{1, N_S}$.

Уведемо деякі потокові характеристики, які визначають особливості функціонування складових M -системи. Потоковий ступінь i -го вузла ϕ_i^m у m -му системному шарі визначається об'ємами потоків, які проходять через нього у цьому шарі за період $[0, T]$ [4], тобто

$$\phi_i^m = \left(\sum_{j=1}^{N_m} (f_{ij}^{mm} + f_{ji}^{mm}) \right) / (2N_m), \quad i = \overline{1, N_m}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Потоковий мультиплексний ступінь i -го вузла ψ_i визначається об'ємами потоків, які проходять через нього в інші шари M -системи і у зворотному напрямку за період $[0, T]$, тобто

$$\psi_i = \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M f_{ii}^{km} / M^2, \quad \psi_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, N_S}.$$

Аналогічно [4] можемо визначити внутрішньосферову та міжшарову функціональну важливість вузлів і зв'язків M -системи, а також рівень їх критичної завантаженості.

Для M -системи розглянемо підсистему, структура якої є ядром відповідної M -структури. Цю підсистему називатимемо K -системою. Потокова матриця суміжності K -системи $\mathbf{F}_K = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^{N_K}$ легко визначається з описаної вище матриці \mathbf{F}_M . Визначаємо сумарні об'єми потоків V_M , які проходять M -системою за період $[0, T]$, за співвідношенням

$$V_M = \sum_{i=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{N_S} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M f_{ij}^{km},$$

а сумарні об'єми потоків V_K , які проходять її ядром, — співвідношенням

$$V_K = \sum_{i=1}^{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M f_{ij}^{km}.$$

Параметр $\vartheta_{KM} = V_K / V_M$ визначає питому вагу K -системи у процесі функціонування M -системи або, інакше кажучи, дозволяє відстежувати

кількісну міру адекватності моделі K -системи порівняно з моделлю всієї системи. Якщо значення Θ_{KM} близьке до 1, то замість моделі M -системи доцільно досліджувати модель K -системи, зменшуючи при цьому розмірність вихідної моделі без істотної втрати її адекватності. Якщо ж значення Θ_{KM} близьке до 0, то можна зробити висновок, що системні шари M -системи слабо взаємодіють, а отже, їх можна досліджувати незалежно, розділяючи вихідну модель на M моделей меншої розмірності.

Визначаємо сумарні об'єми потоків V_m , які проходять у m -му шарі M -системи за період $[0, T]$, за співвідношенням

$$V_m = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} f_{ij}^{mm},$$

а сумарні об'єми потоків $V_{K,m}$, які проходять у m -му шарі K -системи за період $[0, T]$:

$$V_{K,m} = \sum_{i=1}^{N_K} \sum_{j=1}^{N_K} f_{ij}^{mm}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Параметр $\theta_m = V_{K,m} / V_m$ визначає питому вагу m -го шару K -системи у процесі функціонування цього шару в межах усієї системи. Зокрема, якщо значення θ_m близьке до 1, то без істотної втрати адекватності можна замість моделі всього системного шару досліджувати модель його проекції на ядро. Якщо ж значення θ_m , $m = \overline{1, M}$, близьке до 0, то можна зробити висновок, що цей шар бере незначну участь у функціонуванні M -системи і його можна вилучити з її моделі.

Сумарні об'єми потоків, які рухаються окремим шаром, є локальною характеристикою цього шару в M -системі. Глобальною характеристикою системного шару можна вважати сумарні об'єми потоків, які проходять через його вузли в інші шари M -системи та у зворотному напрямку. Визначаємо сумарні об'єми міжшарових потоків m -го шару $V_{I,m}$ за період $[0, T]$ за співвідношенням

$$V_{I,m} = \sum_{i=1}^{N_m} \sum_{k=1}^M f_{ik}^{mk},$$

а сумарні об'єми міжшарових потоків V_I у M -системі за період $[0, T]$:

$$V_I = \sum_{m=1}^M V_{I,m}.$$

Параметр $\xi_m = V_{I,m} / V_I$ визначає питому вагу m -го шару у процесі міжшарових взаємодій M -системи. Якщо значення ξ_m близьке до 1, то цей шар є основою в процесі організації міжшарових взаємодій, якщо ж близьке до 0, то його без істотної втрати адекватності можна вилучити з моделі M -системи і досліджувати незалежно.

Аналогічно на основі потокової матриці суміжності M -системи можемо виділяти шари-генератори та шари-приймачі потоків, визначати рівень пріоритетності для кожного шару внутрішньошарових та/або міжшарових взаємодій, обчислювати силу взаємозв'язку між окремими шарами тощо. Загалом уведені вище параметри дозволяють кількісно оцінювати окремі

складові у процесі функціонування M -системи і суттєво спрощувати її модель.

Для визначення особливостей M -структур та систем використано найпростіший метод лінійної агрегації. Для отримання більш точних висновків про питому вагу окремих складових у структурі і процесі функціонування системи та використання їх моделей для спрощення процесу дослідження доцільно враховувати пріоритетність цих складових і застосовувати методи зваженої лінійної, нелінійної або гібридної агрегації [23].

У праці [5] k -серцевина мультиплексу $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_M\}$ визначається як поєднання k_m -серцевин його шарів, $m = \overline{1, M}$. У кожному системному шарі M -системи можемо визначити його потокову λ -серцевину, $\lambda \in [0, 1]$. λ -серцевиною M -системи називатимемо сукупність λ -серцевин її шарів, пов'язаних міжшаровими потоками, об'єми яких за період $[0, T]$ є не меншими за значення λ . Потокова матриця суміжності λ -серцевини M -системи визначається з матриці \mathbf{F}_M . Очевидно, що структури ядра та λ -серцевини M -системи можуть значно відрізнятися. Потоківі характеристики λ -серцевини у процесі функціонування M -системи та окремих її шарів (питома вага λ -серцевини у M -системі, питома вага λ -серцевини m -го шару у процесі функціонування цього шару в межах всієї системи, питома вага λ -серцевини у процесі міжшарових взаємодій тощо) визначаються аналогічно до поточкових характеристик K -системи і відіграють таку саму роль у спрощенні моделі вихідної системи. Очевидно, що нові вузли M -системи з більшою ймовірністю переважно приєднуються до вузлів ядра, оскільки це дозволяє швидше переходити до інших шарів мультиплексу. Серед вузлів ядра переважно приєднання більш імовірно до вузлів потокової λ -серцевини M -системи.

Подальшим способом спрощення моделі M -системи є введення поняття її $\lambda(k, l)$ -серцевини, тобто такої підсистеми вихідної системи, структурний ступінь вузлів якої є не меншим за значення k , мультиплексний ступінь вузлів є не меншим за значення l і елементи потокової матриці суміжності \mathbf{F}_M є не меншими за значення λ , $\lambda \in [0, 1]$. Очевидно, що $\lambda(k, M) \subset K_M$. Відзначимо також, що $\lambda(k, l)$ -серцевина дозволяє без істотної втрати адекватності вилучити з моделі M -системи вузли-посередники та елементи, які беруть незначну участь у процесі її функціонування.

ВИСНОВКИ

Дослідження складних мережевих систем — складна проблема. Це насамперед зумовлено проблемою розмірності та адекватності моделей таких систем. Поняття k -серцевини SM та потокової серцевини SMC дозволяє принаймні частково вирішити цю проблему, виділяючи найбільш важливі зі структурного та функціонального погляду складові системи. Ці поняття дають змогу на порядки зменшувати розмірність моделей реальних SMC , розширюючи можливості розв'язання низки важливих прикладних задач: керуваності, спостережуваності, синхронізації тощо. Для мультиплекс-систем,

які є значно складнішими утвореннями, ніж СМС, проблема розмірності стає ще більш актуальною. Уведені в роботі поняття ядра та потокової серцевини M -системи дозволяють зменшувати розмірність моделі такої системи, розщеплювати її на моделі окремих системних шарів, одночасно відстежуючи кількісну міру збереження їх адекватності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Barabási A.-L.* Linked: the new science of networks / A.-L. Barabási, J. Frangos. — New York: Basic Books, 2002. — 280 p.
2. *Polishchuk O.* Issues of regional development and evaluation problems / O. Polishchuk, D. Polishchuk, M. Tyutyunnyk, M. Yadzhak // AASCIT Communications. — 2015. — Vol. 2 (4). — P. 115–120.
3. *Polishchuk D.* Solution of some problems of evaluation of the complex systems / D. Polishchuk, O. Polishchuk, M. Yadzhak // Proc. of the 15th Int. conf. on automatic control, 23–26 September 2008. — Odesa: ONMA. — P. 968–976.
4. *Поліщук О.Д.* Мережеві структури та системи: I. Потоківі характеристики складних мереж / О.Д. Поліщук, М.С. Яджак // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 2. — С. 42–54.
5. *Dorogovtsev S.N.* k-core organization of complex networks / S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes // Physical review letters. — 2006. — Vol. 96(4). — 040601. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.040601>.
6. *Alvarez-Hamelin J.I.* k-core decomposition: A tool for the visualization of large scale networks / J.I. Alvarez-Hamelin, L. Dall'Asta, A. Barrat, A. Vespignani // arXiv preprint. — arXiv: 0504107 [cs]. — 28 Apr 2005. — 13 p.
7. *Scott W.R.* Organizations and organizing: Rational, natural and open systems perspectives / W.R. Scott, G.F. Davis. — London: Routledge, 2015. — 464 p.
8. *Boccaletti S.* Structure and Dynamics of Multilayer Networks / S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado et al. // Physics Reports. — 2014. — Vol. 544(1). — P. 1–122. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.07.001>.
9. *Corominas-Murtra B.* Detection of the elite structure in a virtual multiplex social system by means of a generalised K-core / B. Corominas-Murtra, B. Fuchs, S. Thurner // PloS one. — 2014. — Vol. 9 (12). — e112606. DOI: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0112606>.
10. *Azimi-Tafreshi N.* k-core percolation on multiplex networks / N. Azimi-Tafreshi, J. Gómez-Gardeñes, S.N. Dorogovtsev // Physical Review E. — 2014. — Vol. 90. — 032816. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.032816>.
11. *Головач Ю.* Складні мережі / Ю. Головач, О. Олемской, К. фон Фербер та ін. // Журнал фізичних досліджень. — 2006. — **10**, №4. — С. 247–289.
12. *Поліщук Д.О.* Моніторинг потоку транспортних мереж із частково впорядкованим рухом / Д.О. Поліщук, О.Д. Поліщук // XXIII наук.-техн. конф. молодих науковців Фізико-механічного інституту ім. Г.В. Карпенка НАНУ: зб. наук. праць. — 23–25 жовт., 2013. — Львів. — С. 326–329.
13. *Liu Y.-Y.* Controllability of complex networks / Y.-Y. Liu, J.-J. Slotine, A.-L. Barabási // Nature. — 2011. — Vol. 473. — P. 167–173. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature10011>.
14. *Liu Y.-Y.* Observability of complex systems / Y.-Y. Liu, J.J. Slotine, A.L. Barabási // Proc. of the National Academy of Sciences. — 2013. — Vol. 110(7). — P. 2460–2465. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.1215508110>.
15. *Novikov A.V.* Oscillatory neural networks based on the Kuramoto model for cluster analysis / A.V. Novikov, E.N. Benderskaya // Pattern Recognition and Image

- Analysis. — 2014. — Vol. 24(3). — P. 365–371. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1054661814030146>.
16. *Buldyrev S.V.* Catastrophic cascade of failures in interdependent networks / S.V. Buldyrev, R. Parshani, G. Paul et al. // *Nature*. — 2010. — Vol. 464(15). — P. 1025–1028. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature08932>.
 17. *Lombardi A.* Controllability analysis of networks / A. Lombardi, M. Hörnquist // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75(5). — 056110. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.056110>.
 18. *Sedoglavic A.* A probabilistic algorithm to test local algebraic observability in polynomial time / A. Sedoglavic // *Proc. of the 2001 Intern. Symp. on Symbolic and algebraic computation*. — 23–29 July 2001. — P. 309–317. DOI: <https://doi.org/10.1145/384101.384143>.
 19. *Gomez-Gardennes J.* Paths synchronization on complex networks / J. Gomez-Gardennes, Y. Moreno, A. Arenas // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 98. — 034101. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.034101>.
 20. *Kuramoto Y.* *Chemical oscillations waves, and turbulence* / Y. Kuramoto. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 157 p.
 21. *Daido H.* Quasientrainment and slow relaxation in a population of oscillators with random and frustrated interactions / H. Daido // *Physical Review Letters*. — 1992. — Vol. 73. — P. 1073–1076. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.68.1073>.
 22. *Polishchuk O.* Flows characteristics and cores of complex network and multiplex type systems / O. Polishchuk // *arXiv preprint*. — arXiv:1702.02730 [physics.soc-ph]. — 9 Feb 2017. — 22 p.
 23. *Polishchuk D.* Global network structures and problems of aggregative evaluations / D. Polishchuk, O. Polishchuk // *International frontier science letters*. — 2016. — Vol. 8. — P. 31–45. DOI: <http://doi.org/10.18052/www.scipress.com/IFSL.8.31>.

Надійшла 08.02.2018

КВАНТОВИЙ ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ДЛЯ 0–1 ЗАДАЧІ ПАКУВАННЯ РЮКЗАКА

В.М. ТКАЧУК, О.М. ТКАЧУК

Анотація. Для підвищення ефективності роботи квантового генетичного алгоритму (QGA) запропоновано в поданні квантової хромосоми перейти до квантових реєстрів вищих порядків. Таке подання дозволяє використати такий потужний механізм квантових обчислень, як заплутаність квантових станів. Для реалізації алгоритму використано адаптивний оператор квантового гейту та запропоновано технологію відновлення квантової хромосоми для розв'язання комбінаторних задач з обмеженнями. Досліджено вплив розміру квантового реєстра на ефективність роботи алгоритму. Переваги запропонованого підходу порівняно із традиційною реалізацією QGA проілюстровано на прикладі 0–1 задачі пакування рюкзака великої розмірності та різного рівня кореляції вхідних даних.

Ключові слова: квантовий генетичний алгоритм, 0–1 задача пакування рюкзака, оператор квантового гейту, кубіт, квантовий реєстр, заплутаність квантових станів.

ВСТУП

Класичний генетичний алгоритм є стохастичним алгоритмом оптимізації, робота якого ґрунтується на принципах еволюції біологічних систем [1]. Для пошуку оптимального значення використовується випадковим чином згенерована множина можливих розв'язків – популяція, за допомогою якої досліджується область пошуку. Алгоритм використовує кращі з них для їх відтворення та поступового ітераційного наближення до оптимуму в ході еволюції популяції в часі [2].

Квантовий генетичний алгоритм (QGA) є відносно новим еволюційним алгоритмом, який ґрунтується на поєднанні принципів квантових обчислень, таких як квантові біти, квантові гейти, суперпозиція станів і технології класичних генетичних алгоритмів [3,4]. Він проілюстрував свою ефективність для широкого класу задач оптимізації та пошуку, які потребують наближених, по можливості максимально близьких до оптимуму, розв'язків [4–8]. Порівняно з класичним підходом QGA забезпечує кращий баланс між глобальним пошуком і технологією локальної збіжності [4, 5].

Алгоритм QGA працює також із множиною потенційних розв'язків, але ймовірнісний механізм роботи квантових генетичних операторів забезпечує глобальний пошук за швидкої локальної збіжності та невеликого розміру популяції. Замість бінарного подання популяції QGA використовує її квантово-механічне, імовірнісне подання, що також забезпечує збереження різноманітності популяції в ході еволюції.

Згідно із працею [3] мінімальною одиницею інформації у квантових обчисленнях є кубіт $|q\rangle$ — квантова система, що може перебувати в двох основних станах: $|0\rangle$ та $|1\rangle$. Відповідно до принципу суперпозиції він може перебувати у довільному стані, що є лінійною комбінацією базових:

$$|q\rangle = \alpha_1|0\rangle + \alpha_2|1\rangle. \quad (1)$$

Інформація, що міститься в амплітудах α_1 та α_2 , власне є квантовою частиною інформації. Фактично α_1^2 та α_2^2 — імовірності знаходження кубіта у станах $|0\rangle$ та $|1\rangle$ відповідно, тому вони повинні задовольняти умову нормування:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1.$$

Якщо скористатися матричним поданням квантових станів

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то стан кубіта (1) можна задати як

$$|q\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Для реалізації QGA [4, 5] зазвичай заплутаність квантових станів не використовується, тому хромосома являє собою впорядкований набір незалежних кубітів. Так, якщо довжина $N = 16$ кубітів, її можна подати у вигляді

$$|q_1\rangle |q_2\rangle |q_3\rangle |q_4\rangle |q_5\rangle |q_6\rangle |q_7\rangle |q_8\rangle |q_9\rangle |q_{10}\rangle |q_{11}\rangle |q_{12}\rangle |q_{13}\rangle |q_{14}\rangle |q_{15}\rangle |q_{16}\rangle$$

Для задачі 0–1 пакування рюкзака довжина хромосоми N визначається загальною кількістю предметів, які можна помістити в нього.

ЗАСТОСУВАННЯ QGA ДО ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Загальна схема роботи QGA аналогічна класичному генетичному алгоритму. Принципова відмінність виявляється у способі подання потенційних розв'язків, використовуваних квантових генетичних операторах, особливостях їх реалізації з урахуванням подання хромосоми як системи кубітів, принципу суперпозиції та заплутаності квантових станів.

Алгоритм QGA можна реалізувати у такому вигляді:

Квантовий генетичний алгоритм

- 1 $t \leftarrow 0$
- 2 ініціалізація $Q(t)$
- 3 квантове вимірвання $Q(t)$ та перехід до $P(t)$
- 4 оцінка пристосованості $P(t)$

```

5   відновлення  $P(t)$ 
6   відновлення  $Q(t)$ 
7   знаходження  $b$  – найкращого розв'язку в  $P(t)$ 
8   while (умова завершення еволюції)
9        $t \leftarrow t+1$ 
10  оновлення  $Q(t)$  за допомогою квантового гейту
11  квантове вимірювання  $Q(t)$  та перехід до  $P(t)$ 
12  оцінка пристосованості  $P(t)$ 
13  відновлення  $P(t)$ 
14  відновлення  $Q(t)$ 
15  знаходження  $b$  – найкращого розв'язку в  $P(t)$ 
16  end while

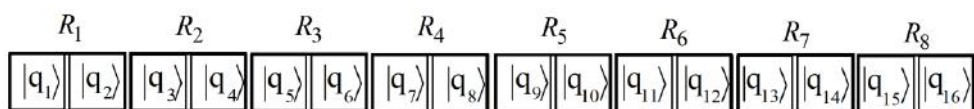
```

Тут $Q(t)$ — квантова популяція розв'язків на момент часу t ; $P(t)$ — класичне (бінарне) подання популяції, отримане в результаті квантового вимірювання.

МЕТА ДОСЛІДЖЕННЯ

Мета дослідження — включення в роботу QGA такого потужного механізму квантових обчислень, яким є заплутаність квантових станів. Можливості реалізації цього алгоритму частково проаналізовано у праці [6], де проілюстровано ефективність такого підходу до задач комбінаторної оптимізації. Загальну ідею його реалізації в задачах функціональної оптимізації детально розглянуто у праці [7].

Принципова відмінність у реалізації QGA вищих порядків полягає у потребі під час реалізації квантових операторів урахувати заплутаність станів квантових регістрів. Якщо кожен два кубіти хромосоми попарно перебувають у заплутаному стані, то її можна подати у такому вигляді:



Тут R_i — квантовий регістр, що складається із двох кубітів ($r = 2$), які перебувають у заплутаному стані. Кількість можливих станів такого регістра

$$n = 2^r = 2^2 = 4 .$$

У результаті квантового вимірювання він може перейти в один із чотирьох можливих основних станів:

$$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle .$$

У загальному випадку така система перебуває в стані, що є лінійною комбінацією базових:

$$|q\rangle = \alpha_1|00\rangle + \alpha_2|01\rangle + \alpha_3|10\rangle + \alpha_4|11\rangle .$$

Тут $|\alpha_1^2\rangle$, $|\alpha_2^2\rangle$, $|\alpha_3^2\rangle$ та $|\alpha_4^2\rangle$ — імовірності перебування квантового регістра у відповідному стані. У разі переходу до $r=2$ розмір матриці M , потрібний для подання квантової хромосоми, залишається незмінним. Так, для подання одного кубіта засобами класичного комп'ютера потрібні два елементи матриці, тому

$$M = 2 \cdot N = \frac{N}{2} \cdot 2^r = \frac{N}{2} \cdot 4 = 32.$$

У разі переходу до квантових регістрів вищих порядків, тобто, якщо $r > 2$,

$$M = \frac{N}{r} \cdot 2^r > 2 \cdot N.$$

Це означає, що в цьому випадку для подання квантової хромосоми необхідно додатково збільшити розмір матриці, потрібний для подання як однієї особини, так і популяції в цілому. Так, якщо $r = 4$, квантова хромосома складатиметься із чотирьох регістрів (R_1, R_2, R_3, R_4):

R_1				R_2				R_3				R_4			
$ q_1\rangle$	$ q_2\rangle$	$ q_3\rangle$	$ q_4\rangle$	$ q_5\rangle$	$ q_6\rangle$	$ q_7\rangle$	$ q_8\rangle$	$ q_9\rangle$	$ q_{10}\rangle$	$ q_{11}\rangle$	$ q_{12}\rangle$	$ q_{13}\rangle$	$ q_{14}\rangle$	$ q_{15}\rangle$	$ q_{16}\rangle$

Кількість основних станів регістра дорівнює $2^4 = 16$:

$$|0000\rangle, |0001\rangle, |0010\rangle, \dots, |1111\rangle.$$

Згідно з принципом суперпозиції (1) стан одного регістра можна подати як

$$|q\rangle = \alpha_1|0000\rangle + \alpha_2|0001\rangle + \alpha_3|0010\rangle + \dots + \alpha_{16}|1111\rangle.$$

Розмір матриці, потрібний для подання однієї такої квантової хромосоми,

$$M = \frac{N}{r} \cdot 2^r = \frac{16}{4} \cdot 2^4 = 64 > 2 \cdot N = 32.$$

Для реалізації QGA вищого порядку для подання особини популяції зручно використати структуру, що складається з $k = N/r$ квантових регістрів відповідно до такої схеми:

R_1	R_2	R_3	...	R_i	...	R_k
α_1^1	α_1^2	α_1^3	...	α_1^i	...	α_1^k
α_2^1	α_2^2	α_2^3	...	α_2^i	...	α_2^k
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	...	\vdots
$\alpha_{2^r}^1$	$\alpha_{2^r}^2$	$\alpha_{2^r}^3$...	$\alpha_{2^r}^i$...	$\alpha_{2^r}^k$

Тут $\{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i, \dots, \alpha_{2^r}^i\}$ визначає стан одного квантового регістра R_i , а множина $\{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k\}$ формує одну особину популяції.

ІНІЦІАЛІЗАЦІЯ ПОЧАТКОВОЇ КВАНТОВОЇ ПОПУЛЯЦІЇ

Початковий стан як кубіта, так і квантового регістра в цілому не містить інформації про задачу та алгоритм її розв’язання, тому найпростішим способом його ініціалізації є рівність усіх амплітуд між собою [3,4]. Це означає, що на початку еволюції кожен квантовий регістр розміру r перебуває в стані:

$$|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^r}}|00\dots00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^r}}|00\dots01\rangle + \dots + \frac{1}{\sqrt{2^r}}|11\dots10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2^r}}|11\dots11\rangle.$$

УМОВА ЗАВЕРШЕННЯ ЕВОЛЮЦІЇ

Як умовою завершення еволюційного процесу можна скористатися одним із таких критеріїв:

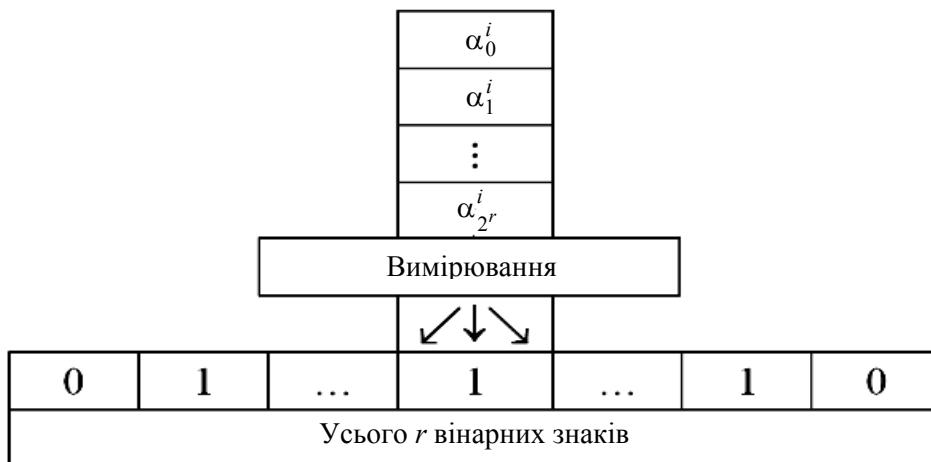
- кількість звернень до функції пристосованості. Це 5000 звернень до функції пристосованості [4–7]. Ця умова використовується для порівняння ефективності різного типу еволюційних алгоритмів;
- загальний час роботи. Дозволяє порівняти ефективність однотипних алгоритмів, що відрізняються тими чи іншими особливостями реалізації;
- усереднене значення ймовірностей квантових станів популяції [9].

Для подання хромосоми з використанням квантових регістрів критерій можна задати у такий спосіб:

$$c_{avr}^i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k |1 - 2 \cdot \alpha_i^b|^2 ; \quad C_{avr} = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s c_{avr}^i > \gamma,$$

де стан b визначається класичним значенням відповідного квантового регістра, отриманого в результаті квантового вимірювання; s — потужність популяції. Так, якщо $\gamma = 0.99$, у середньому 99% імовірностей квантових станів майже збігаються до значення одного з основних станів регістра.

Операція вимірювання (етапи 3 та 11 роботи QGA) стану квантового регістра реалізовано згідно із запропонованим у праці [6, 7] підходом і додаткового пояснення не потребує. Схематично процес вимірювання стану регістра R_i та перехід до класичного його подання можна зобразити таким чином:



ОПЕРАТОР КВАНТОВОГО ГЕЙТУ

Для реалізації обертання квантових станів для визначення кута та напрямку повороту традиційно використовується таблиця пошуку [4,5], що принципово обмежує універсальність роботи QGA. Фіксоване значення кута, яке використовується при цьому, також негативно впливає на швидкість збіжності, тому QGA інколи реалізують як адаптивний процес зміни його величини у процесі еволюції [5]. Більш ефективним, як показали проведені моделювання, може бути адаптивний характер роботи самого оператора квантового гейту.

Роботу оператора можна поділити на два етапи. На першому етапі збільшується амплітуда ймовірності вибраного стану квантового регістра R_i :

$$(\alpha_i^b)' = \sqrt{[\alpha_i^b]^2 + \mu(1 - [\alpha_i^b]^2)}, \quad (2)$$

де стан b визначається класичним поданням квантового регістра R_i найкращої особини популяції, що була отримана на попередній ітерації за часом. Функціональна залежність (2) забезпечує також той факт, що α_i^b не може перевищувати 1. Параметр μ визначає кут повороту квантових станів, підбирається за результатами модельних досліджень і перебуває в межах $[0,1]$.

На другому етапі необхідно зменшити амплітуди ймовірностей інших станів квантового регістра R_i для виконання умови нормування. Таким чином, у кожному новому поколінні забезпечується збільшення ймовірності того, що в результаті спостереження генеруються класичні особини, більш схожі на найкращу.

У цілому алгоритм роботи оператора до квантової хромосоми, що складається із $k = N/r$ регістрів, можна реалізувати таким чином:

Оператор квантового гейту

```

1  for  $i \in \{1, \dots, N/r\}$  do
2       $s \leftarrow 0$ 
3      for  $j \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$  do
4           $s \leftarrow s + b_{i \cdot 2^r + j} \cdot 2^j$ 
5      end for
6       $M \leftarrow 1 - [\alpha_i^s]^2$ 
7       $\alpha_i^s \leftarrow \sqrt{[\alpha_i^s]^2 + \mu(1 - [\alpha_i^s]^2)}$ 
8       $M \leftarrow \sqrt{(1 - [\alpha_i^s]^2) / M}$ 
9      for  $j \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$  do
10         if  $j \neq s$  then
11              $\alpha_i^j \leftarrow M \cdot \alpha_i^j$ 
12         end if

```

```

13     end for
14 end for

```

Динаміку поведінки пристосованості найкращої особини популяції залежно від величини μ ілюструє рис. 1. З огляду на ймовірнісний характер роботи алгоритму надалі всі значення наведено як результат усереднення за 100 запусками QGA. Як випливає із наведених даних, розмір квантового регістра не впливає на величину оптимального значення параметра μ . Під час проведення експерименту за оптимальне значення можна взяти $\mu \approx 0,09$.

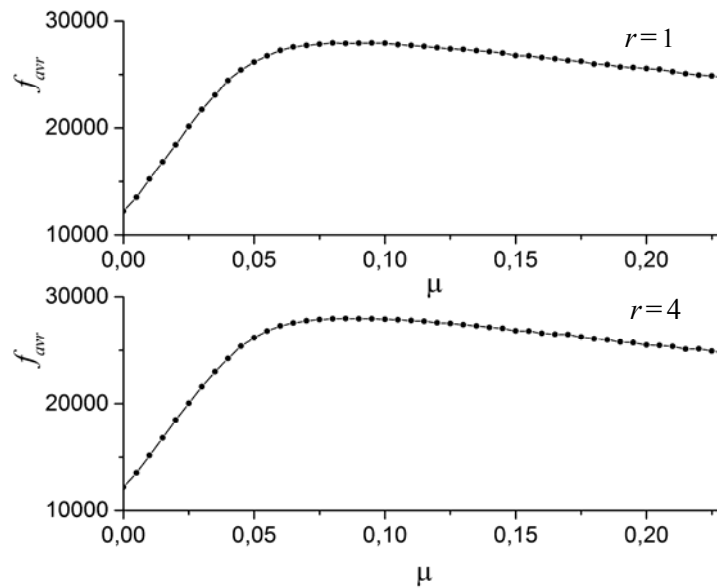


Рис. 1. Вплив параметра μ на середню пристосованість найкращої особини f_{avr} за різних розмірів квантового регістра для $N = 500$ некорельованих вхідних даних

ЗАДАЧА ПАКУВАННЯ РЮКЗАКА

Проблема 0–1 пакування рюкзака є NP — повною задачею дискретної комбінаторної оптимізації, яка традиційно використовується для тестування пошукових алгоритмів. Вона зводиться до знаходження для скінченної множини N речей такого бінарного вектора заповнення $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$, який забезпечує максимальне значення функції

$$f(X) = \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

і задовольняє обмеження

$$\sum_{i=1}^N \omega_i x_i \leq C, \tag{3}$$

де p_i — вартість i -го предмета; ω_i — маса i -го предмета; C — максимально можлива маса рюкзака.

У процесі ініціалізації популяції чи її еволюції завжди є ймовірність отримати ряд «поганих» особин, для яких не виконується обмеження (3) і які необхідно «відремонтувати». Процедура «ремонт» може бути зведена до видалення випадковим чином елементів з рюкзака доти, доки не виконається обмеження (3). Після відновлення функція пристосованості набуде вигляду

$$f(X') = \sum_{i=1}^N p_i x'_i,$$

де $X' = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_N\}$ — відновлена версія бінарного вектора X .

Процедура відновлення в QGA принципово інша, ніж в класичному генетичному алгоритмі, оскільки потребує коригування і ймовірностей квантових станів. На першому, традиційному етапі, якщо рюкзак надто важкий, елементи видаляються з нього доти, доки не буде задоволено обмеження (3). Якщо рюкзак надто легкий, то в рюкзак випадковим чином додаються речі, поки це дозволяє обмеження маси.

Перший етап роботи оператора можна подати у вигляді такого алгоритму:

«Ремонт» класичної хромосоми $P(t)$

```

// видалення випадковим чином речей з рюкзака
1  переповнення_рюкзака ← false
2      if  $\left( \sum_{i=1}^N \omega_i x_i > C \right)$  then
3          переповнення_рюкзака ← true
4      end if
5      while (переповнення_рюкзака ← true)
6           $k \leftarrow \text{random} \{1 \dots N\}$  — вибір випадковим чи-
ном предмета з рюкзака
7           $x_k \leftarrow 0$  — видалення предмета з рюкзака
8          if  $\left( \sum_{i=1}^N \omega_i x_i \leq C \right)$  then
9              переповнення_рюкзака ← false
10             end if
11            end while
// додавання випадковим чином речей до рюкзака
12            for  $i \in \{1, \dots, D\}$ 
13                 $k \leftarrow \text{random} \{1 \dots N\}$  — вибір випадковим чи-
ном предмета для рюкзака
14                if  $\left( \sum_{i=1}^N \omega_i x_i + \omega_k > C \right)$  or  $(x_k = 1)$  then
15                    continue
16                end if
17                 $x_k = 1$ 
18            end for

```

Тут $D = 0,02dN$ — параметр роботи оператора відновлення. Його величина визначає кількість спроб випадковим чином додавання предметів до рюкзака. Згідно з проведеними дослідженнями за оптимальне можна взяти значення $d = 4 \dots 6$; воно забезпечує ефективність процесу відновлення за незначного, у межах 15%, зростання часу роботи алгоритму в цілому (рис. 2). Такий алгоритм «ремонт» забезпечує різноманітність популяції та ефективний глобальний пошук за множиною всіх допустимих розв'язків.

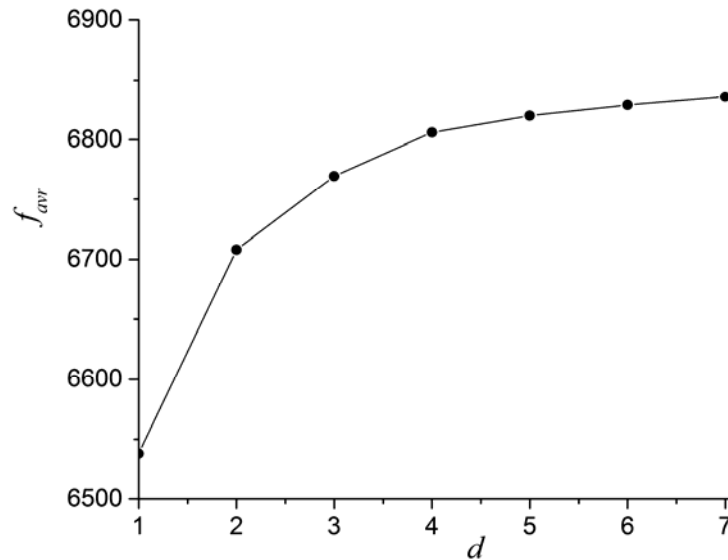


Рис. 2. Вплив параметра відновлення d на ефективність роботи алгоритму, якщо $N = 500$, сильнокорельованих вхідних даних ($r = 2$)

На другому етапі необхідно відкоригувати амплітуди ймовірностей квантової хромосоми відповідно до нової, відновленої класичної хромосоми X' . Процес відновлення реалізовано як оператор квантового гейту, напрямку кута повороту, у якому визначається значенням відновленої класичної хромосоми. Такий алгоритм забезпечує збереження генетичної інформації, яку нагромадила особина в процесі всієї своєї попередньої еволюції:

Відновлення квантової хромосоми

```

1   for  $i \in \{1, \dots, N/r\}$  do
2        $s \leftarrow 0$ 
3       for  $j \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$  do
4            $s \leftarrow s + x_{i \cdot 2^r + j} \cdot 2^j$ 
5       end for
6        $M \leftarrow 1 - [\alpha_i^s]^2$ 
7        $\alpha_i^s \leftarrow \sqrt{[\alpha_i^s]^2 + \beta(1 - [\alpha_i^s]^2)}$ 
8        $M \leftarrow \sqrt{(1 - [\alpha_i^s]^2) / M}$ 
9       for  $j \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$  do

```

```

10         if    $j \neq s$  then
11              $\alpha_i^j \leftarrow M\alpha_i^j$ 
12         end if
13     end for
14 end for

```

Тут $\beta \in [0, 1]$ — параметр відновлення. Його вплив на ефективність роботи QGA ілюструє рис. 3. Така поведінка є типовою, не залежить від рівня кореляції вхідних даних та розміру квантового регістра. Як випливає з рис. 3, оптимальним для подальших досліджень можна вважати $\beta \approx 0.15$.

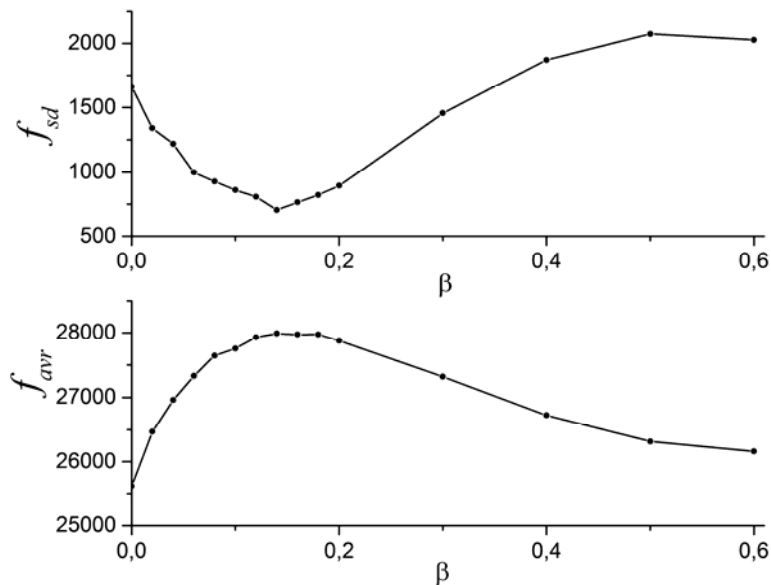


Рис. 3. Вплив β на середню пристосованість найкращої особини f_{avr} та середньо-квадратичне відхилення f_{sd} для $N = 500$ некорельованих вхідних даних, якщо $r = 3$

РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЛОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

Квантовий генетичний алгоритм вищого порядку реалізовано на C++, а моделювання виконано на процесорі Intel Celeron CPU G1840 2,80 GHz, 4,0 Гб оперативної пам'яті. Для ілюстрації ефективності роботи алгоритму розглянуто ряд задач комбінаторної оптимізації великої розмірності та різного рівня кореляції вхідних даних (рис. 4). Задачі малої розмірності не розглядаються, оскільки за умови $N \leq 100$ отримуються майже точні результати, що не дозволяє оцінити вплив розміру квантового регістра на ефективність запропонованого алгоритму. Розмір популяції $s = 10$, що забезпечує 5000 звернень до функції пристосованості за часу еволюції $t = 500$.

Вплив розміру квантового регістра на середній час роботи QGA показано на рис. 5. Якщо $r = 1$, маємо випадок класичного квантового генетичного алгоритму і власне відносно нього виконано порівняння ефективності переходу до QGA вищого порядку. Середній час роботи t_{avr} залежить тіль-

ки від розмірів області пошуку, яка для задачі пакування рюкзака визначається лише довжиною квантової хромосоми N (множиною речей).

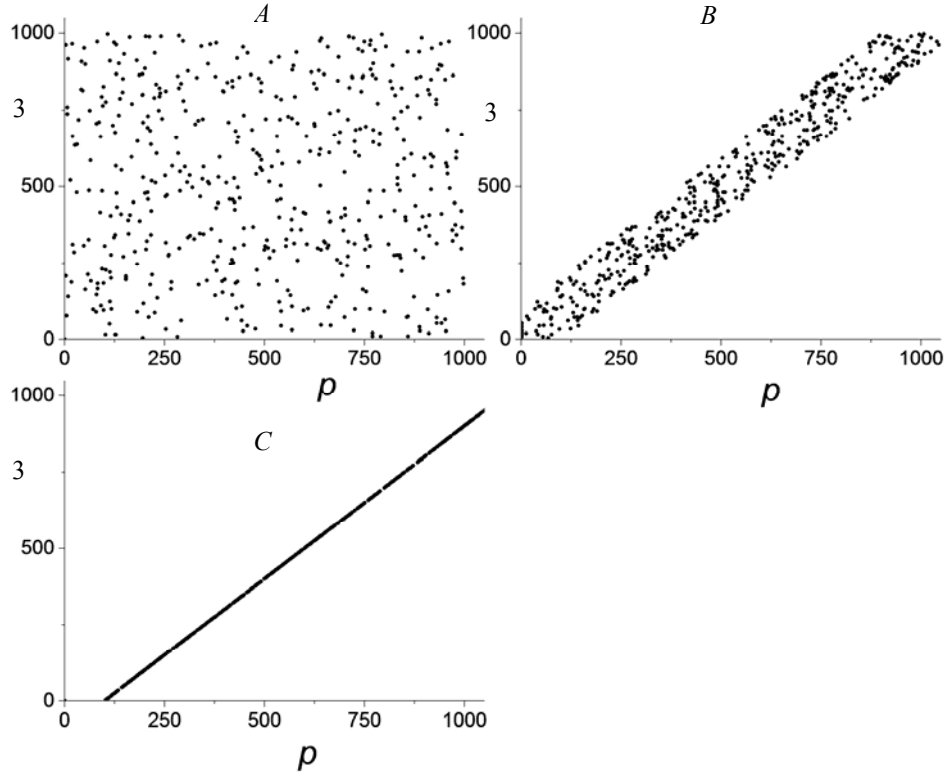


Рис. 4. Розподіл вартості предметів ω як функція їх маси ρ для різного рівня кореляції вхідних даних: A — некорельовані дані; B — слабкорельовані дані; C — сильнокорельовані дані

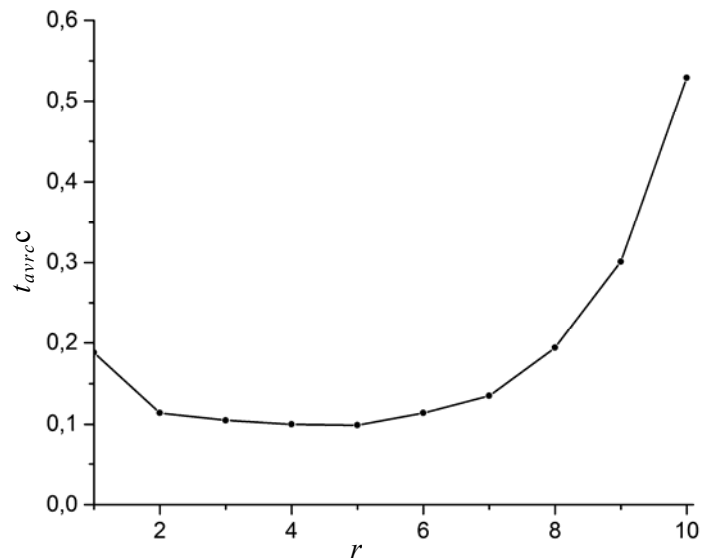


Рис. 5. Середній час роботи t_{avr} як функція розміру квантового регістра r для $N = 500$ некорельованих вхідних даних

Як видно з рис. 6, якщо як критерій зупинки використати середній час роботи QGA першого порядку ($r = 1$), то найефективнішими можна вважати розміри квантового регістра 3 та 6 кубітів.

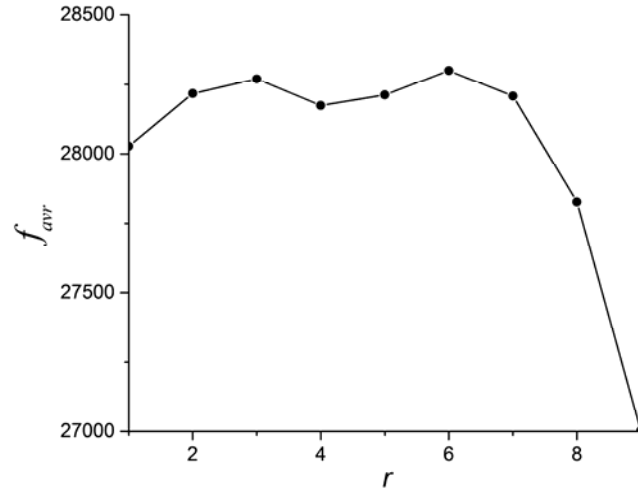


Рис. 6. Вплив розміру квантового регістра r на величину f_{avr} для $N = 500$ некорельованих вхідних даних

Згенерована на початку роботи QGA популяція ($t = 0$) включає широкий спектр усіх можливих розв'язків (рис. 7), які однак достатньо далекі від оптимального значення. Це означає, що робота QGA починається з випадкового пошуку. На початкових етапах еволюції в межах часу до $t = 100 \dots 150$ основним механізмом пошуку є глобальний пошук, зумовлений імовірнісним характером роботи оператора квантового вимірювання. Розподіл розв'язків поступово зсувається до оптимального значення за майже незмінної величини середньоквадратичного відхилення (різноманітності розв'язків).

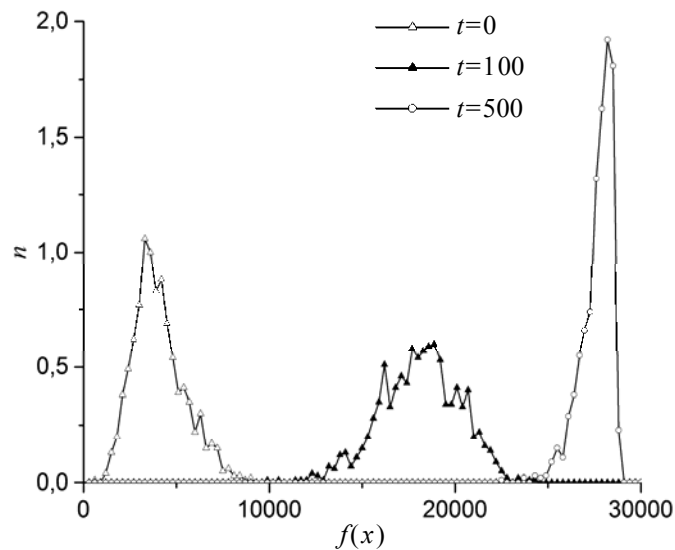


Рис. 7. Усереднений розподіл розв'язків по області пошуку залежно від часу еволюції популяції t

На кінцевих етапах еволюції ($t = 500$) характер розподілу знає принципів змін, що означає включення механізму локального пошуку за рахунок оператора квантового гейту. Детальніше механізм роботи QGA на різних етапах еволюції проаналізовано у праці [7].

Статистичні результати моделювання — середнє значення найкращої особини популяції f_{avr} , середньоквадратичне відхилення f_{sd} , найкращий та найгірший результати, середній час роботи t_{avr} при розв'язанні тестових задач великої розмірності — наведено в табл. 1–9. Розрахунки виконано за розмірів квантового регістра в межах 1–7 кубітів, бо власне за таких значень час роботи не перевищує час роботи традиційного QGA.

Таблиця 1. Результати оптимізації, якщо $N = 200$ некорельованих даних (точне значення — 11238)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,066	10903	651,9	11238	8872
2	0,042	10848	708,7	11238	9020
3	0,036	11137	131,4	11238	10630
4	0,034	10861	674,7	11238	8767
5	0,035	10825	708,7	11238	8989
6	0,040	11135	133,2	11238	10693
7	0,048	11119	157,3	11238	10509

Таблиця 2. Результати оптимізації, якщо $N = 500$ некорельованих даних (точне значення — 28857)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,175	27984	730,4	28623	25207
2	0,116	27987	741,3	28703	22020
3	0,098	28048	396,1	28834	27244
4	0,095	27974	735,4	28834	22926
5	0,097	27936	747,9	28834	22751
6	0,109	28041	416,3	28801	26746
7	0,136	28023	398,1	28790	26988

Таблиця 3. Результати оптимізації, якщо $N = 1000$ некорельованих даних (точне значення — 54503)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,372	49802	1243,3	52610	46101
2	0,233	49785	1224,3	52511	46127
3	0,203	50330	971,9	53482	47600
4	0,197	49882	1270,6	52598	46414
5	0,202	49780	1310,0	52338	46737
6	0,233	50311	982,6	52203	47434
7	0,281	50319	922,1	52348	47871

Таблиця 4. Результати оптимізації, якщо $N = 200$ слабокорельованих даних (точне значення — 1634)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,068	1542,1	31,3	1634	1486
2	0,044	1544,0	33,5	1627	1478
3	0,039	1608,3	16,6	1624	1544
4	0,036	1542,3	33,0	1633	1497
5	0,038	1543,5	32,5	1634	1495
6	0,044	1608,0	17,2	1634	1567
7	0,054	1608,1	17,6	1634	1541

Таблиця 5. Результати оптимізації, якщо $N = 1000$ слабокорельованих даних (точне значення — 4566)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,194	4309,6	152,5	4493	3899
2	0,127	4313,5	128,3	4517	3933
3	0,101	4373,0	61,9	4506	4179
4	0,098	4302,1	157,4	4514	3953
5	0,100	4301,6	155,0	4489	3950
6	0,114	4371,8	62,9	4508	4176
7	0,141	4376,6	63,2	4512	4130

Таблиця 6. Результати оптимізації, якщо $N = 1000$ слабокорельованих даних (точне значення — 9052)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,368	8260,6	139,8	8582	7918
2	0,239	8267,9	139,0	8621	7830
3	0,203	8309,1	129,2	8697	7945
4	0,197	8261,3	142,9	8604	7917
5	0,202	8253,1	146,8	8579	7973
6	0,227	8311,7	129,5	8679	7991
7	0,300	8309,7	138,4	8668	7818

Таблиця 7. Результати оптимізації, якщо $N = 200$ сильнокорельованих даних (точне значення — 2697)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,066	2580,3	86,5	2697	2397
2	0,043	2579,7	84,0	2697	2494
3	0,037	2661,6	47,1	2697	2594
4	0,035	2578,5	85,4	2697	2493
5	0,035	2574,1	84,2	2697	2491
6	0,041	2659,9	48,5	2697	2593
7	0,050	2663,4	46,7	2697	2594

Таблиця 8. Результати оптимізації, якщо $N = 500$ сильнокорельованих даних (точне значення — 7117)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,184	6791,2	175,2	7017	6409
2	0,115	6784,3	177,9	7017	6315
3	0,099	6898,9	76,3	7017	6716
4	0,097	6788,9	178,2	7017	6317
5	0,098	6787,6	172,8	7017	6417
6	0,112	6896,5	73,4	7017	6717
7	0,142	6891,2	75,3	7017	6714

Таблиця 9. Результати оптимізації, якщо $N = 1000$ сильнокорельованих даних (точне значення — 14390)

r	t_{avr}, c	f_{avr}	f_{sd}	Найкраще значення	Найгірше значення
1	0,361	13532,0	157,0	13887	13074
2	0,234	13528,2	157,2	13884	13089
3	0,203	13577,8	155,3	13890	13186
4	0,197	13534,2	156,6	13883	13088
5	0,204	13529,7	161,2	13874	13162
6	0,228	13567,0	156,2	13890	13190
7	0,287	13564,0	155,7	13889	13190

ВИСНОВКИ

У роботі запропоновано новий квантовий генетичний алгоритм вищого порядку та проілюстровано ефективність його роботи на прикладі задач 0–1 пакування рюкзака великої розмірності та з різним рівнем кореляції даних. Для подання квантової хромосоми застосовано квантові реєстри вищих порядків ($r > 1$), використання яких дозволяє включити в роботу такий механізм інтенсифікації квантових обчислень, як заплутаність квантових станів. Такий перехід зменшує час роботи алгоритму майже в два рази, точність пошуку розв'язку залишається незмінною, а за деяких розмірів реєстра навіть зростає.

Використання адаптивного оператора квантового гейту та оператора відновлення квантової хромосоми забезпечує ефективне поєднання глобального та локального пошуку алгоритму. Запропонований оператор відновлення квантової хромосоми, робота якого реалізована аналогічно до принципів роботи квантового гейту, забезпечує збереження генетичної інформації, що набула особина в ході всієї своєї попередньої еволюції.

Ефективність роботи запропонованого QGA вищого порядку оцінено порівняно із традиційним QGA ($r = 1$). Порівняння з іншими алгоритмами розв'язку задач оптимізації не виконувалося, бо, як впливає з багатьох публікацій [6, 10, 11], його можна вважати одним з найефективніших.

Експериментальні результати 0–1 задачі пакування рюкзака ілюструють можливості застосування QGA до задач великої розмірності за розмірів популяції, що не перевищують 10 особин. За співвідношенням швидкодія/ефективність оптимальним можна вважати розмір квантового регістра $r = 3$ і $r = 6$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Holland J.H.* Adaptation in natural and artificial systems. An introductory analysis with application to biology, control, and artificial intelligence / J.H. Holland. — London: Bradford book edition, 1994. — 211 p.
2. *Simon D.* Evolutionary Optimization Algorithms: Biologically Inspired and Population-Based Approaches to Computer Intelligence / D. Simon. — John Wiley & Sons, 2013. — 742 p.
3. *Narayanan A.* Quantum-inspired genetic algorithms / A. Narayanan, M. Moore // Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation (ICEC'96), Nagoya, Japan, 1996. — P.61–66.
4. *Han K.–H.* Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problem / K.–H. Han, J.–H. Kim // Proc.Congress on Evolutionary Computation. — Vol. 2. — La Jolla, CA, July 2000. — P. 1354–1360.
5. *Wang H.* The improvement of quantum genetic algorithm and its application on function optimization / H. Wang, J. Liu, J. Zhi, C. Fu // Math. Probl. Eng. — 2013. — P.1–10.
6. *Nowotniak R.* Higher-Order Quantum-Inspired Genetic Algorithms / R. Nowotniak, J. Kucharski // Federated Conference on Annals of Computer Science and Information Systems, 2014. — P. 465–470.
7. *Tkachuk V.* Quantum Genetic Algorithm Based on Qutrits and Its Application / V. Tkachuk // Mathematical Problems in Engineering. — Vol. 2018, Article ID 8614073, 8 p.
8. *Zhang G.* Quantum-inspired evolutionary algorithms: a survey and empirical study / G. Zhang // Journal of Heuristics. — 2010. — P. 1–49.
9. *Han K.* Quantum-inspired evolutionary algorithms with a new termination criterion, h-epsilon gate, and two-phase scheme / K. Han, J. Kim // IEEE Trans. Evol. Comput. — 2014. — 8 (2). — P. 156–169.
10. *Iimura I.* Integer-Type Gene-Coding Method Based on Quantum Bit Representation in Quantum-Inspired Evolutionary Algorithm: Application to Integer Knapsack Problem / I. Iimura // Journal of Signal Processing. — 2012. — Vol. 16, N 6. — P. 495–502.
11. *Takata T.* Performance Analysis of Quantum-Inspired Evolutionary Algorithm / T. Takata, T. Isokawa, A. Saitoh et al // SCIS & ISIS 2010, Dec. 8-12, Okayama Convention Center, Okayama, Japan.

Надійшла 10.07.2018

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
ЕЛЕКТРОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОГО
П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ТІЛА З ДОВІЛЬНО ОРІЄНТОВАНОЮ
КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ОДНОВІСНОГО РОЗТЯГУ**

В.С. КИРИЛЮК, О.І. ЛЕВЧУК

Анотація. Розвинуто математичну модель для аналізу напруженого стану в ортотропному електропружному матеріалі з довільно орієнтованою круговою тріщиною. Модель ґрунтується на розгляді зв'язаної системи рівнянь статичної електропружності. Розглянуто задачу про електричний та напружений стани в ортотропному електропружному просторі з довільно орієнтованою круговою тріщиною за однорідних навантажень. Розв'язок задачі отримано за допомогою потрійного перетворення Фур'є та Фур'є-образу функції Гріна для нескінченного анізотропного п'єзоелектричного середовища. Тестування підходу виконано для випадку розташування тріщини у площині ізотропії трансверсально-ізотропного п'єзоелектричного матеріалу, для якого існує точний розв'язок задачі. Порівняння результатів обчислень підтверджує ефективність використаного підходу. Проведено числові дослідження, вивчено розподіл напружень вздовж фронту кругової тріщини за різних її орієнтацій в електропружному ортотропному матеріалі в разі одновісного розтягу.

Ключові слова: математичне моделювання, зв'язана система рівнянь електропружності, ортотропний п'єзоелектричний матеріал, кругова тріщина, довільна орієнтація, одновісний розтяг, напружений стан.

ВСТУП

Використання у процесі створення перетворювачів енергії та датчиків для вимірювальних приладів п'єзоелектричних крихких матеріалів стимулює інтерес до вивчення та аналізу розподілу напружень та концентрації силових і електричних полів у п'єзоелектричних тілах з дефектами типу порожнини, включень, тріщин. Але розв'язання просторових задач електропружності пов'язане зі значними труднощами математичного характеру, оскільки основна система рівнянь електропружності є зв'язаною стосовно силових і електричних полів системою диференціальних рівнянь у частинних похідних [1, 4], розв'язок якої отримати набагато важче, ніж розв'язок чисто пружної задачі. Тому на цей час з більшою повнотою вивчено простіші дво-

вимірні задачі електропружності, серед яких можна вирізнити праці [11, 13, 14, 23, 27], присвячені дослідженню електропружного стану як поблизу одиночних порожнин, включень, тріщин, так і у взаємодії кількох концентраторів електричних і механічних полів. У працях [5, 24] запропоновано методологічно подібні підходи до побудови загальних розв'язків зв'язаної системи тривимірних статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропних тіл, за допомогою яких отримано точні розв'язки низки задач електропружності за спеціальної орієнтації концентратора напружень відносно осі симетрії трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу. З метою їх використання традиційно припускається, що вісь симетрії матеріалу збігається з віссю обертання концентратора напружень або вона перпендикулярна до площини розташування плоскої тріщини [6, 8–12, 16–18, 20–24, 27]. За інших орієнтацій концентратора силових та електричних полів відносно осі симетрії трансверсально-ізотропного електропружного матеріалу для тривимірних задач електропружності ці підходи є неефективними.

Відзначимо, що результати досліджень коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для кругових тріщин у пружних тілах з достатньою повнотою відображено у монографіях [3, 7, 15, 26]. Для електропружних трансверсально-ізотропних тіл (за обмежень на орієнтацію концентраторів напружень) подібні дослідження проведено у працях [6, 8, 9, 10, 16–18, 22]. Розподіл КІН для довільної орієнтації кругової тріщини відносно осі симетрії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу вивчено у праці [12]. Напружений і електричний стани в ортотропному електропружному матеріалі з круговою та еліптичною тріщинами у площині ортотропії матеріалу (за спеціальної орієнтації плоскої тріщини) у разі однорідних навантажень досліджено у працях [2, 17] відповідно.

У роботі вперше вивчено розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень для довільно орієнтованої кругової тріщини в ортотропному електропружному матеріалі за одновісного розтягу. Робота ґрунтується на узагальненні підходу [26] (для анізотропного чисто пружного простору з еліптичною тріщиною) на випадок ортотропного електропружного матеріалу. Під час розв'язання задачі використано потрійне (по просторових координатах) перетворення Фур'є, Фур'є-образ функції Гріна для електропружного анізотропного матеріалу і теорему Коші про лишки. Спеціальні контурні інтеграли, що виникають у процесі розв'язання задачі, обчислено за квадратурними формулами Гауса. Для окремого випадку (розташування тріщини у площині ізотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу) отримані результати узгоджуються з даними, знайденими іншими методами. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень і коефіцієнти інтенсивності електричної індукції вздовж межі кругової тріщини за різних її орієнтацій в ортотропному п'єзоелектричному матеріалі.

ОСНОВНІ РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай ортотропний електропружний простір містить кругову тріщину. Припустимо, що одна з осей симетрії матеріалу збігається з віссю Oz , кут між

якою і нормаллю до площини тріщини α , а на електропружний простір діють однорідні силові та електричні поля. Наявність тріщини у матеріалі як концентратора призводить до виникнення збурень електричного і напруженого станів.

Повна система статичних рівнянь електропружності набуває такого вигляду:

рівняння рівноваги за відсутності об'ємних сил

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (1)$$

рівняння вимушеної електростатики

$$D_{i,i} = 0; E_i = -\Psi_{,i}; \quad (2)$$

співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

рівняння стану

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \quad (3)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , D_i , E_i , Ψ — компоненти напружень, деформацій, переміщень, електричних переміщень (електричної індукції), напруженість електричного поля і електричний потенціал відповідно. Також уведено позначення тензорів: C_{ijmn} , e_{imn} , k_{ij} — пружні модулі, п'езомодулі, діелектричні проникності. Для п'езоелектричних тіл, які є ортотропними за своїми властивостями, пружні характеристики матеріалу описуються дев'ятьма незалежними сталими $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$, п'езомодулі — п'ятьма величинами $e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33}$, діелектричні проникності — трьома незалежними сталими k_{11}, k_{22}, k_{33} . Компоненти вказаних тензорів пов'язані з відповідними незалежними сталими таким чином:

$$C_{1111} = c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; C_{1122} = C_{2211} = c_{12};$$

$$C_{1133} = C_{3311} = c_{13}; C_{2233} = C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44};$$

$$C_{3131} = C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}; \quad (4)$$

$$e_{113} = e_{131} = e_{15}; e_{223} = e_{232} = e_{24}; e_{311} = e_{31}; e_{322} = e_{32}; e_{333} = e_{33}; k_{11}; k_{22}; k_{33}.$$

Інші компоненти цих трьох тензорів дорівнюють нулю.

Відзначимо, що зі співвідношень (1)–(3) і наведених компонентів тензорів (4) впливають рівняння статички електропружного ортотропного тіла стосовно переміщень та електричного потенціалу.

Для розв'язання задачі зручно ввести нову систему координат, у якій напрямком однієї з осей збігається з напрямком нормалі до площини тріщини. Припустимо, що вихідна система координат $Oxuz$ залежить від нової (локальної) системи $Ox^1y^1z^1$, оскільки вона отримана з вихідної системи

координат обертанням навколо осі Ox на кут α . Тоді тензори пружних модулів, п'езомодулів і діелектричних сталих C_{ijkl}^α , e_{ijk}^α , k_{ij}^α у новій системі координат отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних рангів: $C_{ijkl}^\alpha = C_{mnpk} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq}$; $e_{ijk}^\alpha = e_{mnp} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp}$; $k_{ij}^\alpha = k_{mn} \alpha_{im} \alpha_{jn}$, де α_{ij} — матриця перетворення вигляду

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Довільну орієнтацію тріщини у матеріалі можна отримати за допомогою послідовного обертання на кути α, β, γ навколо осей старої системи координат $0x, 0y, 0z$ відповідно. Тоді матриця перетворень T_{ij} матиме вигляд

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Вона є результатом послідовного перемноження трьох матриць, подібних до виразу (5), що відображають праві обертання навколо кожної з осей координат:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Нові тензори пружних модулів, п'езомодулів і діелектричних сталих $C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$, $e_{ijk}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$, $k_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ отримаємо за допомогою перетворень тензорів відповідних порядків:

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = C_{mnpk} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}; \quad e_{ijk}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = e_{mnp} T_{im} T_{jn} T_{kp}; \quad k_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = k_{mn} T_{im} T_{jn},$$

де за індексами, що повторюються, виконується підсумовування.

Далі у тексті роботи використано звичайний тензорний запис виразів, тобто за індексами, що повторюються у виразах, виконується підсумовування. Без жодних змін у схемі розв'язання задачі замість перетворення T_{ij} , зумовленого обертанням навколо осей координат $0x, 0y, 0z$, цілком аналогічно можна було б увести інше перетворення, наприклад, з використанням кутів Ейлера. Але для наочності у роботі вибрано перетворення, що відповідає послідовним обертанням навколо трьох різних осей координат.

Для опису електропружного стану введемо більш уніфіковані позначення [12], на основі яких запишемо такі вирази:

Пружні переміщення і електричний потенціал

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi, & M = 4. \end{cases} \quad (6)$$

Пружні деформації або електричне поле

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi_n, & M = 4. \end{cases} \quad (7)$$

Напруження або електричні переміщення

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3; \\ D_i, & j = 4. \end{cases} \quad (8)$$

Електропружні модулі

$$E_{iJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = \begin{cases} C_{ijmn}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, & J = 1, 2, 3; M = 4; \\ e_{imn}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, & J = 4; M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}^{(\alpha, \beta, \gamma)}, & J, M = 4. \end{cases} \quad (9)$$

За допомогою позначень (6)–(9) рівняння стану (3) можна подати як

$$\Sigma_{iJ} = E_{iJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} Z_{Mn}. \quad (10)$$

Задачу для плоскої кругової тріщини не поділяють, як у випадку розташування тріщини в площині ізотропії для трансверсально-ізотропного матеріалу, на дві — симетричну і антисиметричну. Її розглядають у загальній постановці, коли у граничні умови одночасно входять і нормальні, і дотичні зусилля, а також нормальна складова вектора електричної індукції на поверхні тріщини. За однорідних силових і електричних навантажень маємо такі граничні умови:

$$\tau_{13}^{\pm}|_S = f^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad \tau_{23}^{\pm}|_S = g^{(\alpha, \beta, \gamma)};$$

$$\sigma_{33}^{\pm}|_S = -P^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad D_3^{\pm}|_S = -D^{(\alpha, \beta, \gamma)}; \quad U_M(\vec{x}) \rightarrow 0, \text{ якщо } |\vec{x}| \rightarrow \infty,$$

де S — поверхня тріщини, віднесена до нової системи координат (отримана послідовним обертанням на кути α, β, γ навколо осей старої системи); навантаження подано у новій системі координат. За заданого основного напруженого стану та електричної індукції в середовищі і вільної від силових і електричних навантажень поверхні тріщини, виразивши електронапружений стан суперпозицією основного і збуреного станів, отримаємо граничні умови для визначення збуреного стану.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Функція Гріна $G_{IJ}(\vec{x} - \vec{x}')$ для нескінченного електропружного анізотропного простору (фундаментальний розв'язок) задовольняє рівняння:

$$E_{kJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} G_{JM, kn} + \delta_{JM} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0; \quad (11)$$

де $\delta(\bar{x} - \bar{x}')$ — дельта функція Дірака; δ_{JM} — символ Кронекера. Кома після індексу означає диференціювання за відповідною змінною. Скористаємось інтегральним виразом фундаментального розв'язку

$$G_{JM}(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{JM}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) e^{i\bar{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (12)$$

де $A_{JM}(\bar{\xi})$ — відповідні алгебричні доповнення елементів матриці

$$\{K_{JM}(\bar{\xi})\} = \{E_{iJMn}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_i \xi_n\}; \quad (13)$$

$D(\bar{\xi})$ — її визначник, який є багаточленом восьмого порядку.

Використовуючи у подальших перетвореннях вирази (10)–(13), подамо збудований електричний і напружений стани, узагальнюючи чисто пружний випадок, за допомогою невідомих стрибків переміщень і електричного потенціалу через двосторонню поверхню тріщини:

$$U_I(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{N=1-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{iJM3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_i^N A_{IJ}(\bar{\xi}^N)}{\partial D(\bar{\xi}^N) / \partial \xi_3} \iint_S b_M(\bar{x}') e^{-i\bar{\xi}^N \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2, \quad (14)$$

де для кругової тріщини невідомий вектор $\vec{b}(\bar{x})$ набуває вигляду

$$\vec{b}(\bar{x}) = \vec{b}^{(0)} (1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/a^2)^{1/2}; \quad (15)$$

a — радіус кругової тріщини; $\vec{b}^{(0)}$ — сталий вектор четвертого порядку, компоненти якого у загальному випадку є комплексними числами. Підсумування у формулі (14) з використанням виразу (15) виконуємо для ξ_3^M — коренів рівняння $D(\bar{\xi}) = 0$ з від'ємною уявною частиною для $x_3 > 0$; вектор $\vec{\xi}^M$ має вигляд $\vec{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$. Компоненти напружень і електричної індукції визначаємо за виразом

$$\begin{aligned} \Sigma_{iJ}(\bar{x}) &= E_{iJKl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} U_{K,l} = \\ &= \left(\frac{-i}{4\pi^2} \right) \sum_{N=1-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \iint_S \frac{E_{iJKl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} E_{pQM3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_p^N \xi_l^N A_{KQ}(\bar{\xi}^N)}{\partial D(\bar{\xi}^N) / \partial \xi_3} \times \\ &\quad \times b_M(\bar{x}') e^{-i\bar{\xi}^M \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Використовуючи перетворення, аналогічні пружному випадку [26], у площині тріщини за однорідних силових і електричних навантажень у матеріалі знаходимо компоненти напружень і електричної індукції в площині тріщини у вигляді

$$\Sigma_{iJ}(\bar{x}) = \left(\frac{-i}{4} \right) \int_0^{2\pi} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}^{(\alpha, \beta, \gamma)} (\eta_1/a_1, \eta_2/a_2, \xi_3^N(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2)) b_M^{(0,0)} d\varphi, \quad (16)$$

де функція

$$F_{iJM}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = E_{iJKL}^{(\alpha,\beta,\gamma)} E_{pQMN}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_p^N \xi_l^N \frac{A_{KQ}(\vec{\xi}^N)}{\partial D(\vec{\xi}^N) / \partial \xi_3}. \quad (17)$$

Одновимірний інтеграл у формулах (16) (з використанням позначень (17)) обчислюємо за квадратурними формулами Гауса.

Після додаткового аналізу асимптотичних виразів для напружень і електричної індукції в площині тріщини і, скоротившись визначенням коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I, K_{II}, K_{III} та електричної індукції K_D , отримуємо:

$$k_{iJ} = i\sqrt{\pi a} (x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{-1/4} \sum_{N=1}^4 F_{iJM}(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2, \xi_3^N(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2)) b_M^{(0,0)};$$

$$K_I = k_{33}; K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1; K_{IV} = K_D = k_{34}. \quad (18)$$

Для кругової тріщини компоненти вектора нормалі мають вигляд $n_1 = (x_1/a^2)/(x_1^2/a^4 + x_2^2/a^4)^{1/2}$; $n_2 = (x_2/a^2)/(x_1^2/a^4 + x_2^2/a^4)^{1/2}$. Використовуючи для обчислення одновимірних інтегралів метод квадратур Гауса і задовольняючи граничні умови на поверхні тріщини, знаходимо невідомі значення стрибків переміщень і електричної індукції, а потім за формулами (18) обчислюємо коефіцієнти інтенсивності напружень і електричної індукції.

Для апробації використовуваного підходу спочатку розглянемо задачу про кругову тріщину в електропружному трансверсально-ізотропному матеріалі, яка розташована у площині його ізоотропії, за сталого тиску P_0 на поверхні тріщини та зсувних зусиль $\sigma_{13}^0 \neq 0$. Нормальна компонента електричної індукції D_3^0 у розгляді задачі вважалась нульовою. У цьому випадку коефіцієнти інтенсивності напружень K_I згідно з результатами праці [16] не залежать від властивостей матеріалу і збігаються з їх виразом для чисто пружного ізотропного матеріалу (для такої самої форми тріщини і того ж симетричного навантаження), а значення $K_D = 0$. Водночас коефіцієнти інтенсивності напружень K_{II}, K_{III} у разі зсуву залежать від пружних і електричних властивостей матеріалу [14]. Згідно з дослідженнями [14] для знаходження КІН K_{II}, K_{III} в електропружному трансверсально-ізотропному матеріалі з плоскою тріщиною у площині ізоотропії матеріалу достатньо взяти їх вирази для ізотропного пружного матеріалу за тих самих зсувних навантажень, а замість коефіцієнта Пуасона ν у відповідних виразах КІН підставити значення ν_{PIEZO} , яке обчислюється з урахуванням властивостей електропружного матеріалу за спеціальною процедурою. Оскільки формула для визначення цієї величини надто громіздка, а процедура її отримання детально описана у праці [14], наведемо значення ν_{PIEZO} для окремих п'єзоелектричних матеріалів у таблиці [14]. Вихідні дані про електричні і пружні властивості відповідають наведеним у працях [1, 9, 12, 14] характеристикам. Значення ν_{ELAST} , знайдено тільки за пружними властивостями трансверсально-ізотропного матеріалу (без урахування його електричних властивостей) згідно з результатами [14]. Значення $\nu_{CONTROL}$ отримано

з виразу ν_{PIEZO} за наявності дуже слабких електричних властивостей у матеріалів (під час розрахунків їх знайдено домноженням значень п'езомодулів e_{31} , e_{15} , e_{33} і діелектричних проникностей k_{11} , k_{33} відповідних матеріалів на 10^{-12}). Видно, що згідно з даними таблиці значення $\nu_{CONTROL}$ і ν_{ELAST} збігаються з високою точністю.

Значення ν_{PIEZO} для деяких електропружних матеріалів

Значення	PZT-4	PXE-5	ЦТС-19	PZT-5	PZT-7A	BaTiO3	PZT-5H
ν_{PIEZO}	0,48513	0,48815	0,45958	0,51190	0,47324	0,34369	0,37867
ν_{ELAST}	0,35034	0,34591	0,36359	0,36965	0,35239	0,29768	0,30074
$\nu_{CONTROL}$	0,35034	0,34591	0,36359	0,36965	0,35239	0,29768	0,30074

Згідно з результатами праць [13, 14] для електропружного простору, що містить дископодібну тріщину, за внутрішнього тиску P_0 на поверхні тріщини і зсуву σ_{13}^0 у п'єзоелектричному матеріалі маємо такі вирази КІН уздовж фронту тріщини:

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (P_0 \sqrt{a}); \quad K_{II} = \frac{4}{(2 - \nu_{PIEZO}) \sqrt{\pi}} (\sigma_{13}^0 \sqrt{a}) \cos \varphi;$$

$$K_{III} = \frac{-4(1 - \nu_{PIEZO})}{(2 - \nu_{PIEZO}) \sqrt{\pi}} (\sigma_{13}^0 \sqrt{a}) \sin \varphi. \quad (19)$$

Для апробації використовуваного підходу виконано розрахунки КІН K_I , K_{II} і K_{III} для випадку розташування кругової тріщини у площині ізотропії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу за допомогою аналітичних виразів (19) і (18). Для п'єзоелектричних матеріалів з таблиці результати досліджень узгоджувались між собою (до 7 значущих цифр). Для обчислень одновимірних інтегралів у виразах (16) використано квадратурну формулу Гауса за 24 вузлами.

Подальше тестування підходу та розробленої на його основі комп'ютерної програми для електропружного ортотропного матеріалу з круговою тріщиною для окремих випадків (довільно орієнтована дископодібна тріщина у пружному ортотропному та електропружному трансверсально-ізотропному матеріалах, кругова тріщина у площині ортотропії електропружного ортотропного матеріалу) підтвердило узгодженість результатів досліджень з даними праць [2, 12, 15].

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ЧИСЛОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Розглянемо такі матеріали: 1) п'єзоелектричний ортотропний матеріал $Ba_2NaNb_5O_{15}$, електропружні властивості якого (усього 17 незалежних параметрів) наведено у праці [3]; 2) електропружний п'єзокерамічний матеріал PZT-4 (10 незалежних електропружних параметрів, значення яких наведено у праці [1]); 3) пружний ортотропний матеріал, пружні властивості якого

(усього 9 незалежних параметрів) відповідають значенням ортогонально-армованого 2:1 склопластику і наведені у праці [18]. Вважатимемо, що кругова тріщина довільним чином розташована в електропружному матеріалі, її орієнтація визначається кутом обертання α навколо осі Ox і відповідно матрицею перетворення координат (5). На рис. 1, 2, 3 зображено зміну КІН K_I вздовж фронту кругової тріщини одиничного радіуса у п'єзоелектричному ортотропному матеріалі $Ba_2NaNb_5O_{15}$, електропружному п'єзокерамічному матеріалі PZT-4 і ортогонально-армованому 2:1 склопластику відповідно для різних випадків орієнтації кругової тріщини. Криві 1, 2, 3, 4 на цих рисунках відповідають значенням $\alpha = 0^\circ; 30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$ для випадку одновісного розтягу в напрямку, перпендикулярному до площини розташування тріщини.

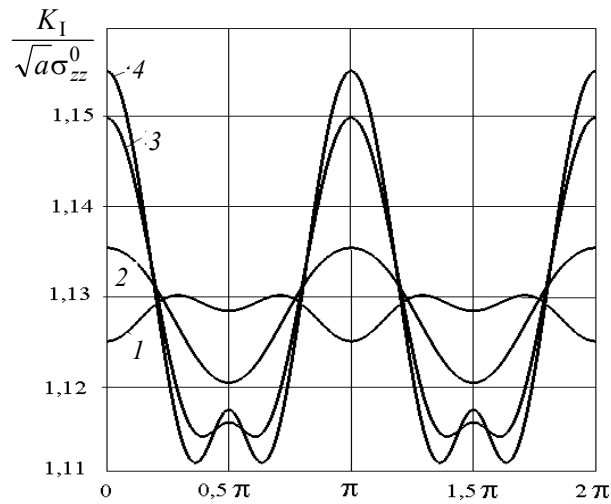


Рис. 1

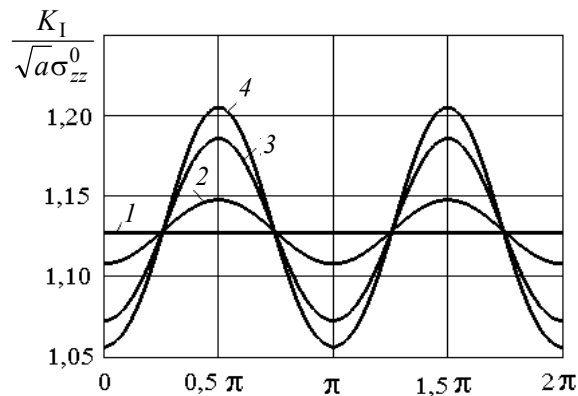


Рис. 2

Видно, що орієнтація тріщини у матеріалі істотно впливає на значення і характер розподілу коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж фронту тріщини. В окремих випадках вплив орієнтації на значення КІН K_I перевищував 22%.

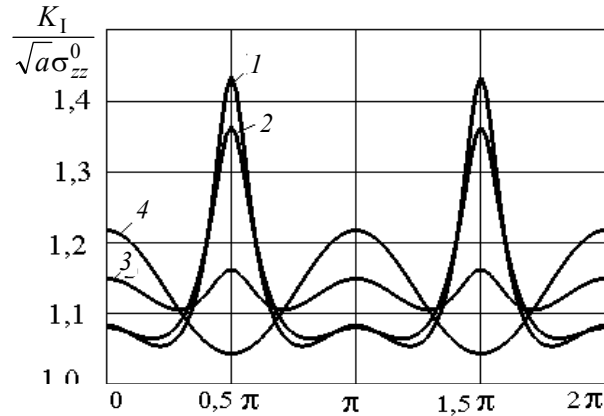


Рис. 3

На рисунках 4, 5 відображено появу ненульових значень коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} і K_{III} за симетричного навантаження (одновісного розтягу) за рахунок орієнтації тріщини у K_{II} і K_{III} ортогонально-армованому 2:1 склопластику (якщо її розташування не в площині симетрії матеріалу).

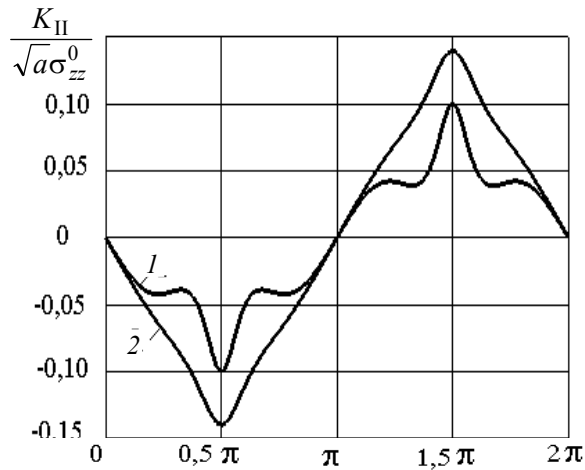


Рис. 4

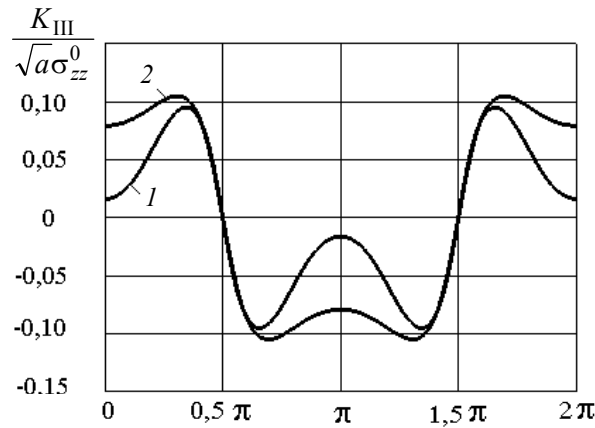


Рис. 5

Криві 1 і 2 на цих рисунках відповідають значенням $\alpha = 30^\circ$ і $\alpha = 60^\circ$. Для матеріалів $Ba_2NaNb_5O_{15}$ і PZT-4 у разі розташування тріщини не в площині симетрії матеріалу внаслідок симетричного навантаження також виникають ненульові значення КІН K_{II} і K_{III} , але за величиною вони дещо менші, ніж для ортогонально-армованого 2:1 склопластику.

ВИСНОВОК

У роботі за допомогою математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів у матеріалі, досліджено електронапружений стан у ортотропному п'єзоелектричному просторі з довільно орієнтованою круговою тріщиною. Вивчено розподіл напружень вздовж фронту кругової тріщини для різних випадків її орієнтації у матеріалі за одновісного розтягу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // Механика связанных полей в элементах конструкций: в 6 т.; Т. 1. — К.: Наук. думка, 1989. — 279 с.
2. Кирилюк В.С. Математическое моделирование и анализ напряженного состояния в ортотропной пьезоэлектрической среде с круговой трещиной / В.С. Кирилюк, О.И. Левчук, Е.В. Гавриленко // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2017. — № 3. — С.117–126.
3. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш. — К.: Наук. думка, 2008. — 270 с.
4. Chen W.Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / W.Q. Chen, C.W. Lim // Int. J. Fract. — 2005. — **131**, N 3. — P. 231–246.
5. Chen W.Q. Exact three-dimensional solutions of laminated orthotropic piezoelectric rectangular plates featuring interlaminar bonding imperfections modeled by a general spring layer / W.Q. Chen, J.B. Cai, G.R. Ye, Y.F. Wang // International Journal of Solids and Structures. — 2004. — **41**, N 18–19. — P. 5247–5263.
6. Chiang C.R. The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material / C.R. Chiang, G.J. Weng // Int. J. Fract. — 2005. — **134**, N 3–4. — P. 319–337.
7. Dai L. Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids / L. Dai, W. Guo, X. Wang // Int. J. Solids and Struct. — 2006. — **43**, N 6. — P. 1818–1831.
8. Dunn M.L. Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneities in piezoelectric solids / M.L. Dunn, M. Taya // J. Appl. Mech. — 1994. — **61**, N 4. — P. 474–475.
9. Kaloerov S.A. Problem of Electromagnetoviscoelasticity for Multiply Connected Plates / S.A. Kaloerov, A.A. Samodurov // International Applied Mechanics. — 2015. — **51**, N 6. — P.623–639.
10. Kaloerov S.A. Determining the intensity factors for stresses, electric-flux density, and electric-field strength in multiply connected electroelastic anisotropic media / S.A. Kaloerov // Int. Appl. Mech. — 2007. — **43**, N 6. — P. 631–637.
11. Karnaukhov V.G. Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolution Made of a Viscoelastic Piezoelectric Material / V.G. Karnaukhov, V.I. Kozlov, A.V. Zavgorodnii, I.N. Umrykhin // International Applied Mechanics. — 2015. — **51**, N 6. — P. 614–622.
12. Kirilyuk V.S. Elastic state of a transversely isotropic piezoelectric body with an arbitrarily oriented elliptic crack / V.S. Kirilyuk // Int. Appl. Mech. — 2008. — **44**, N 2. — P. 150–157.

13. *Kirilyuk V.S.* On the stress state of a piezoceramic body with a flat crack under symmetric loads / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2005. — **41**, N 11. — P. 1263–1271.
14. *Kirilyuk V.S.* Stress state of a piezoelectric ceramic body with a plane crack under antisymmetric loads / V.S. Kirilyuk // *Int. Appl. Mech.* — 2006. — **42**, N 2. — P. 152–161.
15. *Kirilyuk V.S.* Stress state of an elastic orthotropic medium with elliptical crack under tension and shear / V.S. Kirilyuk // *International Applied Mechanics.* — 2005. — **41**, N 4. — P.358–366.
16. *Kirilyuk V.S.* Thermostressed state of a piezoelectric body with a plane crack under symmetric thermal load / V.S. Kirilyuk // *International Applied Mechanics.* — 2008. — **44**, N 3. — P. 320–330.
17. *Kirilyuk V.S.* Stress State of an Orthotropic Piezoelectric Material with an Elliptic Crack / V.S. Kirilyuk, O.I. Levchuk // *International Applied Mechanics.* — 2017. — **53**, N 3. — P.305–312.
18. *Lekhnitskii S.G.* Theory of Elasticity of an Anisotropic Body (in English) / S.G. Lekhnitskii. — Moscow: Mir Publ. — 1981. — 430 p.
19. *Lin S.* Electroelastic analysis of a penny-shaped crack in a piezoelectric ceramic under mode I loading / S. Lin, F. Narita, Y. Shindo // *Mech. Res. Com.* — 2003. — **30**, N 4. — P. 371–386.
20. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the general solution of statics equations of the electroelasticity of a transversally isotropic piezoceramic body in terms of harmonic functions / Yu.N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics.* — 1998. — **34**, N 7. — P. 623–628.
21. *Podil'chuk Yu.N.* Electroelastic equilibrium of transversally isotropic, piezoceramic media containing cavities, inclusions, and cracks / Yu. N. Podil'chuk // *International Applied Mechanics.* — 1998. — **34**, N 10. — P.1023–1034.
22. *Shang F.* Theoretical investigation of an elliptical crack in thermopiezoelectric material. Part 1: Analytical development / F. Shang, M. Kuna, T. Kitamura // *Theor. Appl. Fract. Mech.* — 2003. — **40**, N 3. — P. 237–246.
23. *Sladek J.* Crack analyses in porous piezoelectric brittle materials by the SBFEM // *Engineering Fracture Mechanics* / J. Sladek, V. Sladek, S. Krahulec, C. Song. — 2016. — V. 160. — P. 78–94.
24. *Wang Y.J.* The anti-plane solution for the edge cracks originating from an arbitrary hole in a piezoelectric material / Y.J. Wang, C.F. Gao, H.P. Song // *Mechanics Research Communications.* — 2015. — V. 65. — P. 17–23.
25. *Wang Z.K.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media / Z.K. Wang, B.L. Zheng // *Int. J. Solids Structures.* — 1995. — **32**, N 1. — P. 105–115.
26. *Willis J.R.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium / J.R. Willis // *Int. J. Eng. Sci.* — 1968. — **6**, N 5. — P. 253–263.
27. *Zhang T.Y.* Fracture behaviors of piezoelectric materials / T.Y. Zhang, C.F. Gao // *Theor. Appl. Fract. Mech.* — 2004. — **41**, N 1–3. — P. 339–379.
28. *Zhao M.H.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method / M.H. Zhao, Y. Li, Y. Yan, C.Y. Fan // *Engineering Analysis with Boundary Elements.* — 2016. — V. 67. — P. 115–125.
29. *Zhao M.H.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors / M.H. Zhao, Y.B. Pan, C.Y. Fan, G.T. Xu // *International Journal of Solids and Structures.* — 2016. — V. 94–95. — P. 50–59.
30. *Zhou Y.* Semi-analytical solution for orthotropic piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections / Y. Zhou, W.Q. Chen, C.F. Lu // *Composite Structures.* — 2010. — **92**, N 4. — P. 1009–1018.

Надійшла 10.09.2018

**ON EXISTENCE AND STABILIZATION OF THE STRONG
SOLUTION OF THE AUTONOMOUS STOCHASTIC PARTIAL
DIFFERENTIAL ITO-SKOROKHOD EQUATION
WITH RANDOM PARAMETERS**

V.K. YASYNSKYI, I.V. YURCHENKO

Abstract. This paper considers the asymptotic behavior of the strong solution of the linear partial stochastic differential Ito–Skorokhod equation in the corresponding space with random parameters. An existence of the strong solution is proved and sufficient conditions for the asymptotic stability and the mean square instability of a strong solution of a similar equation are obtained. The stochastic model of complex systems, which is proposed in this paper, is an attempt to take into consideration the full extent of randomness in the studying of real processes, which are described by differential equations in partial derivatives, on the right side of which a diffuse perturbations of the Brownian process type and random perturbations of other types are taken into consideration.

Keywords: stochastic partial differential equation, mean square stability, asymptotic stability.

INTRODUCTION

Deterministic partial differential equations were considered by many authors, see, for example [1–3] and bibliography therein.

Since the concepts of stochastic differential and integral and change of variables for a stochastic differential have been introduced and a strong solution to a stochastic differential equation (SDE) has been defined in the well-known monographs [4–6] and then propagated to classes of stochastic functional differential equations [7–9] (see the extensive bibliography in these studies), it became possible to investigate an asymptotically strong solution for SPDE (see, for example [5, 10–12]).

The further analysis of SPDE involves the construction of mathematical models of complicated real systems, which need random parameters to be considered in these equations [6, 7, 12, 13].

In the paper, we will analyze the asymptotic behavior of strong solution of LSPDISE taking into account random parameters in the right-hand side [10, 12].

PROBLEM STATEMENT

Consider a stochastic experiment with the basic probability space [1, 4, 5, 7] $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$, $F \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ is filtration, where function $u(t, x, \omega) \in \mathbb{R}^1$ is given, which is measurable with probability one in t and x with respect to the

minimum σ -algebra $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$ of Borel sets on the plane [13, 15] and for which

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\} dx < \infty \quad (1)$$

for all $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}\{\bullet\}$ is expectation [14], and $T \subset [0, \infty)$. Denote by \mathcal{M}_T the space of function $\{u(t, x, \omega)\}$, which possesses the integrability property (1).

Introduce the norms [6, 15]:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbb{R}^1}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx; \quad (2)$$

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2T}}^2 \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt; \quad (3)$$

$$\mathbb{E}_u(t) \equiv \mathbb{E}\left\{\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbb{R}^1}}^2\right\}, \quad (4)$$

where $L_{2\mathbb{R}^1}$ and L_{2T} are spaces of functions $\{u(t, x, \omega)\}$, which have the corresponding norms (2)–(4).

In space \mathcal{M}_T , it is necessary to introduce the norm

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx\right] dt. \quad (5)$$

Denote

$$\mathcal{Q}(A(\xi(\omega)), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}(\xi(\omega)) q^k p^j, \quad (6)$$

where $A \equiv \{a_{kj}\}$ is a real $n \times m$ matrix composed of elements $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$.

In space \mathcal{M}_T with (5), consider a subspace $\mathcal{M}_{1T} \subset \mathcal{M}_T$, for whose elements the inclusion

$$\mathcal{Q}\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \in \mathcal{M}_T \quad (7)$$

takes place.

On $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ consider the Cauchy problem for the linear stochastic partial differential equation (LSPDISE)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\mathcal{Q}\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \right] + \mathcal{Q}\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) = \\ & = \mathcal{Q}\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt} + \\ & + \int_{\mathbf{v}} \mathcal{Q}\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{v}\right)u(t, x, \omega) \tilde{v}(dt, dv), \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega)\Big|_{t=0} = [Qu]_0, \tag{9}$$

where Q is defined by (6), (7) matrices $B \equiv \{b_{ij}(\xi_2(\omega))\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij}(\xi_2(\omega)) \in \mathbb{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}(\xi_3(\omega))\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij}(\xi_3(\omega)) \in \mathbb{R}^1$, $D \equiv \{d_{ij}(\xi_4(\omega), \nu)\}_{i,j=1}^{k,n}$, $d_{ij}(\xi_4(\omega), \nu) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbf{V}$, where $\xi_i(\omega), i=1,2,3,4$, are random value specified by the density $p_{\xi_i}(x), i=1,2,3,4$, (or by the distribution function $F_{\xi_i}(x) \equiv P\{\omega: \xi_i(\omega) < x \forall x \in \mathbb{R}^1\}$, $i=1,2,3,4$ [14]), $w(t, \omega)$ is a one-dimensional Wiener process [11], and $\xi_i(\omega), i=1,2,3,4$, does not depend on $w(t, \omega)$. $\tilde{v}(dt, A) \equiv v(dt, A) - \Pi(A)dt$ is the centered Poisson measure.

By a strong solution of the Cauchy problem (8), (9) we will understand function $u(t, x, \omega)$ continuous in $t \in [0, T]$ with probability one, consistent with filtration $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, and such that with probability one for each pair (t, x) it satisfies the integral stochastic equation [1, 4, 11]:

$$\begin{aligned} Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) &= [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s, x, \omega)ds + \\ &+ \int_0^t Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s, x, \omega)d\omega(s, \omega)ds + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, \nu\right)u(s, x, \omega)\tilde{v}(ds, d\nu) \end{aligned} \tag{10}$$

with the nonrandom initial conditions (9).

EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LSPDISE (8), (9) IN SPACE \mathcal{M}_{1T}

To establish the existence of a strong solution (10) of the Cauchy problem for (8), (9), we will first prove an auxiliary result.

Lemma 1. The Fourier transform in x [1] for function $u(t, x, \omega)$:

$$v(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \tag{11}$$

does not bring it out of the space \mathcal{M}_T for any finite $T \subset \mathbb{R}^1$.

Proof. The existence of the Fourier transform follows from the fact that $u(t, x, \omega)$ lies in $L_{2\mathbb{R}^1}$ with probability one for an arbitrary $t \in [0, T]$ and

$$P\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx > N\right\} \leq \frac{E_u(t)}{N} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow +\infty. \text{ According to the Plancherel}$$

theorem [16], $\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx$, i.e. $\|v\|_{L_{2\mathbb{R}^1}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L_2\mathbb{R}^1}$; therefore $E_v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_u(t)$. Then according to (11) and the definition of a norm in space \mathcal{M}_T we get $\|v\|_{\mathcal{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{\mathcal{M}_T}$, which proves Lemma 1.

Theorem 1. Let the following conditions be satisfied for the Cauchy problem (8), (9):

(i) the roots of polynomial $P(\lambda(x), i\sigma) \equiv \lambda Q(A(x), \lambda, i\sigma) + Q(B(x), \lambda, i\sigma)$ for an arbitrary $x \in \mathbb{R}^1$ and $\sigma \neq 0$ satisfy the inequality $\operatorname{Re} \lambda(x) \leq \psi(\sigma) < 0$, $\psi(0) = 0$;

(ii) $\forall t \in [0, T]$ and $C(x) \equiv 0_{k \times n}$, $D(x) \equiv 0_{k \times n}$ the deterministic equation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) \right] + Q \left(B(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) = 0 \quad (12)$$

has the solution $\tilde{u}(t, x)$ of the Cauchy problem in $L_2\mathbb{R}^1$ with the initial conditions

$$Q \left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) = [Q\tilde{u}]_0; \quad (13)$$

(iii) random variable $\xi_i(\omega)$, $i = 1, 2, 3, 4$, does not depend on $w(t, \omega)$ and $\tilde{v}(dt, A)$.

Then the stochastic Cauchy problem (8), (9) for $C(x) \neq 0_{k \times n}$ has a solution in space \mathcal{M}_{1T} .

Proof. Since the Fourier transform [1] preserves the norm in \mathcal{M}_{1T} by Lemma 1, it will suffice to prove the existence of a strong solution of the Cauchy problem of LSDISE for $v(t, \sigma, \omega)$, given by formula (11), namely,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[Q \left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] + Q \left(B(\xi_2(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) = \\ = Q \left(C(\xi_3(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt} + \\ + \int_{\mathbb{V}} Q \left(D(\xi_4(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma, v \right) v(t, \sigma, \omega) \tilde{v}(ds, dv). \end{aligned} \quad (14)$$

Note that for an arbitrary real matrix $D(x) \equiv \{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{k,n}$ and for an arbitrary $x \in \mathbb{R}^1$ we get the inclusion $Q \left(D(x), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \in \mathcal{M}_{1T}$ and solution $v(t, \sigma, \omega)$ of the LSDE (14) for each $\sigma \neq 0$ exists and is unique up to stochastic equivalence [3, 5, 8]. LSDE (14) should be understood as an integral stochastic equation:

$$\begin{aligned} Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t, \sigma, \omega) &= [Qv]_0 + \int_0^t Q(B(\xi_2(\omega)), ds, i\sigma)v(s, \sigma, \omega) = \\ &= \int_0^t Q(C(\xi_3(\omega)), ds, i\sigma)v(s, \sigma, \omega)dw(s, \omega) + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right)v(s, \sigma, \omega)\tilde{v}(ds, dv), \end{aligned}$$

for which the conditions are satisfied that guarantee the existence and uniqueness of a strong solution up to stochastic equivalence [7, Theorem 4.1].

Let $H(t, \sigma)$ be a fundamental solution of the deterministic homogeneous unperturbed Cauchy problem (12), (13) for the LSPDISE (8), (9) for $C(x) \neq 0_{k \times n}$, then the strong solution of LSDE (14) can be written as the integral equation [9, 19]

$$\begin{aligned} v(t, \sigma, \omega) &= v_0(t, \sigma) + \int_0^t H(t-s)Q(C(\xi_3(\omega)), ds, i\sigma)v(t, \sigma, \omega)dw(s, \omega) + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{V}} y(t-s)Q(D(\xi_4(\omega)), i\sigma)\tilde{v}(ds, dv), \end{aligned} \tag{15}$$

where $v_0(t, \sigma)$ is the solution of the homogeneous unperturbed Cauchy problem

$$\frac{d}{dt} \left[Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t, \sigma, \omega) + Q\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t, \sigma, \omega) \right] = 0.$$

According to [1], the fundamental solution $H(t, \sigma)$ has the form

$$H(t, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P(\lambda(x), i\sigma)}, \tag{16}$$

where Γ is the contour enveloping all the zeroes of the polynomial $P(\lambda(x), i\sigma)$.

Applying random operator $Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)$ to both sides of (15) yields

$$\begin{aligned} Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega) &= Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v_0(t, \sigma) + \\ &+ \int_0^t Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)H(t-s, \sigma)Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma\right)v(s, \sigma, \omega)dw(s, \omega) + \\ &+ \int_0^t Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, is, v\right)v(s, \sigma, \omega)\tilde{v}(ds, dv). \end{aligned} \tag{17}$$

Considering the squared absolute value of the left- and right-hand sides of (17) and using the inequality $|a + b + c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$ yield

$$|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega)|^2 \leq 3|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + 3 \left| \int_0^t Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma\right) v(s, \sigma, \omega) dW(s, \omega) \right|^2 + \\
 & + 3 \left| \int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu) H(t-s, \sigma) Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, \nu\right) v(s, \sigma, \omega) \tilde{v}(ds, d\nu) \right|^2. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Let

$$z_1(t, \sigma) \equiv \mathbb{E}\{|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega)|^2\};$$

$$z_2(t, \sigma, \omega) \equiv \mathbb{E}\{|Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu)v(t, \sigma, \omega)|^2\},$$

where $\mathbb{E}\{\bullet\}$ denotes expectation [14]. Applying the operation $\mathbb{E}\{\bullet\}$ to the left- and right-hand sides of inequality (18), considering the property of the Ito integral on the evaluation of $\mathbb{E}\{\bullet\}$ of the squared Ito integral [7, p. 245–249] and taking into account condition (iii) of Theorem 1, we get the following inequality:

$$\begin{aligned}
 z(t, \sigma) & \leq 3\mathbb{E}|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 + \\
 & + 3 \int_0^t \mathbb{E} \left| Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma\right) H(t-s, \sigma) \right|^2 z_1(s, \sigma) ds + \\
 & + 3 \int_0^t \int_{\mathbf{V}} \mathbb{E} \left\{ \left| Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, \nu\right) H(t-s, \sigma) \right|^2 \right\} z_2(s, \sigma, \nu) ds. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Condition (i) of Theorem 1 makes it possible to obtain the inequality [1] $\mathbb{E}|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)H(t-s, \sigma)|^2 \leq L$, and condition (ii) defines the uniform boundedness

$$\mathbb{E}|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 \leq \frac{K}{2},$$

$$\mathbb{E}|Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu)v_0(t, \sigma)|^2 \leq \frac{K}{2}.$$

The inequalities obtained above and (19) yield the estimate $z_i(t, \sigma) \leq \frac{K}{2} + L \int_0^t z_i(s, \sigma) ds$, $i=1,2$, whence according to the Gronwall inequality [1] we get the exponential estimate

$$z_i(t, \sigma) \leq Ke^{Lt} \quad \forall t \in [0, T] \subset [0, \infty), i=1,2. \quad (20)$$

Thus, the inclusion

$$Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega) \in \mathcal{M}_T,$$

$$Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu)v(t, \sigma, \omega) \in \mathcal{M}_T \quad (21)$$

is guaranteed. Applying random operator $Q(D(\xi(\omega)), dt, i\sigma)$ to (16), similarly to the above reasoning, we can write the corresponding inequality for any real matrix $D(x) \equiv \{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{k,n}$. Therefore, considering estimate (20) and condition (i), we obtain the statement of Theorem 1.

ASYMPTOTIC MEAN SQUARE BEHAVIOR OF THE STRONG SOLUTION OF THE LSPDISE

First, let us prove an auxiliary statement.

Lemma 2. Let conditions of Theorem 1 be satisfied for the LSPDISE (8), (9). Then:

(i) for an arbitrary matrix $C(x) \neq 0_{k \times n}$ the inclusion holds

$$E|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)|^2 H(t, \sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}; \tag{22}$$

(ii) for the corresponding norm of this space, the equality is true

$$E\|Q(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma H(t, \sigma)\|_{L_{2T}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E|Q(\xi_3(\omega)), i\lambda, i\sigma|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \equiv S(\sigma); \tag{23}$$

(iii) for an arbitrary matrix $D(x) \neq 0_{k \times n}$ the inclusion holds

$$\int_{\mathbf{v}} E|Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu)|^2 H(t, \sigma) \Pi(d\sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}; \tag{24}$$

(iv) for the corresponding norm of this space, the equality is true

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{v}} E\{Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu)H(t, \sigma)\} \Pi(d\nu) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E|Q(D(\xi_4(\omega)), i\lambda, i\sigma, \nu)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \Pi(d\nu) \equiv S_1(\sigma). \end{aligned} \tag{25}$$

Proof. Using condition (i) of Theorem 1 and formula (16), we can calculate

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)H(t, \sigma)e^{-i\lambda t}] = \frac{1}{2\pi} \frac{Q(C(\xi_3(\omega)), i\lambda, i\sigma)}{P(i\lambda, i\sigma)}; \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbf{v}} [Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu)H(t, \sigma)e^{-i\lambda t}] \Pi(d\nu) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{v}} \frac{Q(D(\xi_4(\omega)), i\lambda, i\sigma, \nu)}{P(i\lambda, i\sigma)} \Pi(d\nu) \end{aligned}$$

and multiplying the left- and right-hand sides of abovementioned equalities by $E\{|\bullet|^2\}$ we obtain statements (22), (24).

To prove (23) and (25), let us apply the Plancherel theorem [1]:

$$\|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)H(t, \sigma)\|_{L_{2(0, \infty)}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q(C(\xi_3(\omega)), i\lambda, i\sigma)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda;$$

$$\int_{\mathbf{v}} Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \nu) H(t, \sigma) \Pi(d\nu) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q(D(\xi_4(\omega)), i\lambda, i\sigma, \nu)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \Pi(d\nu).$$

Multiplying the left- and right-hand sides of the resultant equality by $E\{|\bullet|^2\}$, we get $S(\sigma)$, $S_1(\sigma)$ in formula (23), (25).

Theorem 2. Let the conditions of Theorem 1 be satisfied. Then:

(i) if $\sup_{\sigma} S(\sigma) < 1$, then $\lim_{t \rightarrow \infty} E_U(t) = 0$, where

$$U(t, x, \omega) \equiv Q\left(R(\xi(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)$$

for an arbitrary real matrix R ;

(ii) if $S(\sigma) > 1$ on the set Λ of the positive Lebesgue measure, then $\lim_{t \rightarrow \infty} E_U(t) = +\infty$.

Proof. Since the positive kernel tends to zero as $t \rightarrow +\infty$, from inequality (18) it follows that $z(t, \sigma)$ tends to zero for $S(\sigma) < 1$, $\sigma \neq 0$.

If the inequality $S(\sigma) < 1$, in (24) holds, then it can be easily seen that as $t \rightarrow +\infty$, the absolute value of the Fourier transform $U(t, x, \omega)$ tends to zero for an arbitrary real matrix $R(x) \forall x \in \mathbf{R}^1$ [19], uniformly with respect to σ if $\sup_{\sigma} S(\sigma) < 1$. It remains to pass to the limit under the sign of the Lebesgue integral to prove the first part of Theorem 2.

To prove the second part of Theorem 2, it will suffice to prove that $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t, \sigma) d\sigma = \infty$, since (24) holds.

Indeed, let $S(\sigma) > 1$ on the set Λ of the positive Lebesgue measure, then $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t, \sigma) = +\infty$, since $z(t, \sigma) > 0$. Theorem 2 is proved.

PROBLEM OF THE LOSS OF STABILITY OF A ROD

In [12], the behavior of a rod subject to "white noise" is analyzed. Let the mathematical model of this process be the following stochastic partial differential equation with the derivative of the Wiener process that does not exist with probability one and in the generalized sense the one is a normal "white noise" (see [20]), namely:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a(\xi_1(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(\xi_2(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(\xi_3(\omega)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \quad (26)$$

with the initial conditions

$$u(0, x) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_2(x) \quad (27)$$

and boundary conditions

$$u(t,0) = u(t,l) = \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t,l)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t,l)}{\partial x^2} = 0. \quad (28)$$

Here $a(\xi_1(\omega)) > 0$, $b(\xi_2(\omega)) > 0$, $c(\xi_3(\omega)) > 0$ with probability 1. Function $u(t,x,\omega)$ is random function, which has no gaps of the second type, i.e., is integrable in the sense of paragraph 1. Similarly to the discrete case [12], the statistical stability margin S_a^2 with respect to the parameter $a(x) \forall x \in \mathbb{R}^1$, is determined as the most admissible intensity of processes with mutually independent values for which the system is stable in l.i.m., i.e., the solution is stabilized to zero.

As a result, we can calculate the statistical stability margin [17] $S_{k_1 k_2}$ of system (26)–(28)

$$S_{k_1 k_2} \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1 k_2}(\xi(\omega)) \frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \quad (29)$$

with respect to parameters $a_{k_1 k_2}(\xi_1(\omega))$, $k = k_1 + k_2$.

If we denote $P(\lambda, \sigma, \omega) \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1 k_2}(\xi_1(\omega)) \lambda^{k_1} (i\sigma)^{k_2}$, then the statistical stability margin $S_{k_1 k_2}(x)$ of the system can be calculated by the formula

$$S_{k_1 k_2}(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{k_1} |\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda, \sigma, x)|} d\lambda \right]^{-1}. \quad (30)$$

Using the above statements (29), (30), the statistical stability margin $S(x)$ with respect to the parameters $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ of system (26)–(28) is found:

$$S(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a(x)\sigma^2 - b(x)\lambda^2)^2 + c(x)^2 \lambda^2} \right]^{-1} = 2a(x)c(x), \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Thus, system (26)–(28) is stable in l.i.m., for which $S(x) > \varepsilon^2, \forall x \in \mathbb{R}^1$.

Let the right-hand side of Eq. (26) in system (26)–(28) be subject to external random disturbances $\xi(\omega)$. This becomes possible if we place the system on a platform whose inching movement can be described by $\varphi_i(\xi(\omega)), i = 1, 2$. Then (26) becomes

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(\xi(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t,\omega)}{dt}. \quad (31)$$

Using the definition of the statistical stability margin for system (31), (27), (28), we get

$$S(\varphi_i) \equiv \left[E\{\varphi_i(\xi)^2\} \sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2)^2 + c^2 \lambda^2} \right]^{-1} = E\{\varphi_i(\xi)^2\} 2ac.$$

Applying the sufficient conditions of stability in l.i.m. from Theorem 2, we conclude that system (27), (28) is stable in l.i.m. if

$$E\{\varphi_1^2(\xi(\omega))\}2ac < 1, \quad (32)$$

and is unstable in l.i.m. otherwise.

Let $\varphi_2(\xi(\omega)) \equiv 0$, $\varphi_1(\xi(\omega)) \equiv \varphi(\xi(\omega))$; $\xi(\omega)$ have the distribution law $P\{\omega : \xi \equiv 1\} = P\{\omega : \xi = -1\} = \frac{1}{2}$ and $\varphi(\xi(\omega)) \equiv \xi(\omega)$. Then $E\{\xi\} = 0$, $D\{\xi\} = 1$ and condition coincides with (32).

Let $\varphi_2(\xi(\omega)) \equiv 0$, $\varphi_1(\xi(\omega)) \equiv \varphi(\xi(\omega))$. If for the distribution law of $\xi(\omega)$ we take the Poisson law $P\{\omega : \xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ and $\varphi(\xi) = \xi$, тоді $E\xi = D\xi = \lambda$.

Therefore, the condition of stability in l.i.m. of system (31), (27), (28) becomes $2ac\lambda < 1$, and that of instability, respectively, $2ac\lambda > 1$.

CONCLUSIONS

The stochastic model of complicated systems proposed in the paper is apparently the first attempt to take randomness into account to the fullest extent in the analysis of real processes described by partial differential equations whose right-hand sides consider not only diffusion disturbances such as Brownian process [5, 10, 18, 19] but random disturbances of other types as well.

REFERENCES

1. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1997. — 495 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. — М.: Наука, 1978. — 521 с.
4. Гулинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Гулинский, А.Н. Ширяев. — М.: Физ матлит, 2005. — 408 с.
5. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1980. — 612 с.
6. Гихман И.И. Управляемые случайные процессы / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Наук. думка, 1977. — 251 с.
7. Королюк В.С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика: в 3-х т. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика / В.С. Королюк, С.Ф. Царков, В.К. Ясинський. — Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009. — 798 с.
8. Царьков Е.Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е.Ф. Царьков, В.К. Ясинский. — Рига: Ориентир, 1992. — 301 с.
9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров Е.Ф. Царьков. — Рига: Зинатне, 2009. — 421 с.

10. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными: сб. науч. тр / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — К.: Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С. 25–59.
11. Дороговцев А.Я. поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части / А.Я. Дороговцев, С.Д. Ивасишен, А.Г. Кукуш // Укр. мат. журн. — 1985. — 37, №1. — С.13–20.
12. Перун Г.М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г.М. Перун, В.К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1993. — Т.45, № 9. — С.1773–1781.
13. Дынкин Е.Б. Марковские процессы / Е.Б. Дынкин. — М.: Физматгиз, 1969. — 859 с.
14. Королюк В.С. Ймовірність, статистика та випад ко ві процеси. Теорія та комп'ютерна практика: в 3 т. Т.1.: Ймовірність / В.С. Королюк, Є.Ф. Царков, В.К. Ясинський. — Теорія та комп'ютерна практика. — Чернівці: Золоті литаври, 2007. — 444 с.
15. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 541 с.
16. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р.З. Хасьминский. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
17. Эйдельман С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. — М.: Наука, 1964. — 445 с.
18. Donez N.P. Mean Square Behavior of the Strong Solution of a Linear non-Autonomous Stochastic Partial Differential Equation with Markov Parameters / N.P. Donez, I.V. Yurchenko, V.K. Yasynskyy // Cybernetics and System Analysis. — 2014. — Vol. 50, N 6. — P. 930–939. doi:10.1007/s10559-014-9683-8
19. Koroliuk V.S. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side / V.S. Koroliuk, I.V. Yurchenko, V.K. Yasynskyy // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 51, N 1. — P. 56–63. doi:10.1007/s10559-015-9697-x
20. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. — Москва: Физматлит, 2005. — 402 с.

Received 19.07.2018

From the Editorial Board: the article corresponds completely to submitted manuscript.

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

А.Ю. ПОТАПЕНКО

Аннотация. Одной из задач бесконечномерного анализа является поиск методов исследования корректности краевых задач в пространстве бесконечномерного аргумента. Предложен метод расширения класса корректных задач сведением их к задачам «канонического типа», рассмотренным ранее. Процесс такого сведения состоит в поиске диффеоморфизма определенного класса между римановыми многообразиями, в том числе между областями гильбертового пространства, при котором удастся исходную задачу преобразовать в более простую. Краевая задача рассматривается в « L_2 -версии». Приведен пример такой задачи; для его реализации найдены производные в сильном смысле диффеоморфизма и обратного отображения. Доказана ограниченность диффеоморфизма — условие использования теоремы о краевой задаче, ассоциированной с диффеоморфизмом.

Ключевые слова: гильбертово пространство, риманово многообразие, диффеоморфизм, борелевская мера, дифференцирование мер, оператор Лапласа, задача Дирихле.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работы [1]. Основным результатом работы [1] является теорема, позволяющая расширить класс корректных краевых задач на римановом многообразии, и, в частности, на гильбертовом пространстве, путем сведения *ассоциированной с диффеоморфизмом* краевой задачи к задаче Дирихле определенного вида (задаче Дирихле на гильбертовом пространстве [2]). Представлен пример использования основного результата работы [1] для сведения определенного класса краевых задач на гильбертовом пространстве к задаче, ранее исследованной в работе [2].

Цель работы — проиллюстрировать метод расширения класса корректных краевых задач из работы [1] конкретным примером.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть M — риманово сепарабельное многообразие класса C^2 с модельным пространством H . Риманов тензор позволяет для каждого $p \in M$ задать на $T_p M$ скалярное произведение $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_p$, а следовательно, и соответствующую норму $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$. Таким образом, следующее определение корректно.

Определение. Пусть M_1, M_2 — римановы многообразия; диффеоморфизм $F: M_1 \rightarrow M_2$ будем называть *ограниченным*, если существует такое

$K > 0$, что для всяких $p \in M_1$ и $q \in M_2$ выполняются неравенства $\|F'(p)\| \leq K$ и $\|(F^{-1})'(q)\| \leq K$.

Определение. Атлас $\Omega = \{(\varphi, U_\varphi)\}$ ($\varphi: U_\varphi \rightarrow H$) риманового многообразия M будем называть *равномерным* [3], если существуют такие $r > 0$, $\delta^-, \delta^+ > 0$, что

1) для каждой точки $p \in M$ существует такая карта (φ_p, U_p) , что $\varphi_p(U_p) \supset B_r(\varphi_p(p)) = \{q \in H : \|\varphi_p(p) - q\| < r\}$;

2) для каждого $p \in M$, $q \in U_p$, $\xi \in T_q M$ выполняется $\delta^- \|\xi^{\varphi_p}\|_H^2 \leq \|\xi\|_q^2 \leq \delta^+ \|\xi^{\varphi_p}\|_H^2$ для карты (φ_p, U_p) из п. 1).

Обозначим через $C_b(M)$ пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на M , через $C_b(M; TM)$ пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей на M , через $C_b^1(M)$ (соответственно, $C_b^1(M; TM)$) пространство всех функций $f \in C_b(M)$ (соответственно, полей $\mathbf{X} \in C_b(M; TM)$), дифференцируемых в каждой точке $x \in M$ с непрерывной и ограниченной на всем M производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$). Здесь $f'(p) \in T_p^* M$ определен формулой $f'(p): T_p M \ni \mathbf{Y}_p \mapsto \mathbf{Y}_p f \in \mathbb{R}$; $\mathbf{X}'(p)$ — линейный оператор в $T_p M$, определённый формулой $\mathbf{X}'(p): \mathbf{Y}_p \mapsto \nabla_{\mathbf{Y}_p} \mathbf{X}$, где ∇ — связность Леви-Чивиты на M (бесконечномерный вариант [4, с. 83]). Через $\Phi_t^Z x$ обозначим поток векторного поля Z .

Пусть M_1, M_2 — сепарабельные римановы многообразия с равномерными атласами; G_1 — область с гладкой границей в M_1 ; $S_1 = \partial(G_1)$; $G_2 = F(G_1)$ — область с гладкой границей в M_2 ; $S_2 = F(S_1) = \partial(G_2)$; на M_1 задана мера с полным носителем μ_1 .

Пусть известно, что оператор градиента на G_1 \mathbf{grad}_{G_1} замыкаем; на M_1 фиксировано *строго трансверсальное* к S_1 поле $\mathbf{n}_1 \in C_b^1(M_1)$. Под *строгой трансверсальностью* понимается существование такого $T > 0$, что для всех $p \in S_1$ выполняется неравенство $(\mathbf{n}_1(p), \mathbf{n}_{S_1}(p))_p \geq T$, где \mathbf{n}_{S_1} — поле внешней единичной нормали. Пусть также логарифмическая производная $\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1$ меры μ_1 вдоль поля \mathbf{n}_1 обладает свойством

$$\operatorname{div}_{\mu_1} \mathbf{n}_1|_{G_1} \in L_\infty(G_1) = L_\infty(G_1, \mu_1).$$

Данное условие, вместе с замыкаемостью \mathbf{grad}_{G_1} , позволяет корректно определить граничный оператор следа

$$\gamma_1 : D(\overline{\mathbf{grad}_{G_1}}) \rightarrow L_2(S_1) = L_2(S_1, \tau_1),$$

который является расширением на $D(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1})$ оператора ограничения: $u \mapsto u|_{S_1}$ для функций $u \in C^1(\overline{G_1})$ — непрерывно дифференцируемых на $\overline{G_1}$ функций. На гильбертовом пространстве граничный оператор следа введен в работе [2], случай риманового многообразия аналогичен. Поверхностная мера τ_1 на S_1 задается соотношением

$$\int_{S_1} f d\tau_1 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Phi_t^{n_1} G_1} f d\mu_1,$$

справедливым для всякой $f \in C_b(M)$ [5].

Дивергенция по мере на G_1 определяется следующим образом:

$$\operatorname{div}_{G_1} = -(\overline{\mathbf{grad}}_{G_1}|_{\operatorname{Ker} \gamma_1})^*.$$

Пусть теперь $\mathbf{n}_2(\cdot) = F'(F^{-1}(\cdot))\mathbf{n}_1(F^{-1}(\cdot))$ и $\mu_2(A) = \mu_1(F^{-1}(A))$. В работе [1] доказано, что в случае замыкаемости \mathbf{grad}_{G_1} и выполнения приведенных выше достаточных условий корректности определения γ_1 и div_{G_1} на G_1 соответствующие операторы $\overline{\mathbf{grad}}_{G_2}$, γ_2 и div_{G_2} также корректно определены.

Рассмотрим следующую краевую задачу в области риманового многообразия, корректность которой (под корректностью здесь и далее понимается существование и единственность решения) на гильбертовом пространстве обоснована в работе [6], на римановом многообразии для случая $k \equiv 1$ — в работах [7–8]:

$$\operatorname{div}_{G_1} (k \overline{\mathbf{grad}}_{G_1} u) - au = f; \tag{1}$$

$$\gamma_1(u) = \varphi, \tag{2}$$

где $f \in L_2(G_1)$, $k \in C^1(G_1)$, $a \in C(G_1)$, $k(x) \geq \delta > 0$, $a(x) \geq \alpha > 0$, $\varphi \in \operatorname{Im} \gamma_1$.

Следующая теорема, доказанная в работе [1], позволяет расширить класс корректных краевых задач.

Теорема 1. Функция $u = u_2$ будет решением (F -ассоциированной) краевой задачи на $G_2 \subset M_2$:

$$\operatorname{div}_{G_2} ((k \circ F^{-1})F'(F^{-1}(\cdot))(F'(F^{-1}(\cdot)))^* \overline{\mathbf{grad}}_{G_2} u) - (a \circ F^{-1})u = f \circ F^{-1};$$

$$\gamma_2(u) = \varphi \circ F^{-1}$$

в том и только том случае, если $u = u_1 = u_2 \circ F$ будет решением задачи Дирихле (1)–(2).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть H — гильбертово пространство; G_2 — область в H с гладкой границей $S_2 = \partial G_2$; пусть также $G_2 \subset \{y \in H : 0 < K_1 \leq \|y\| \leq K_2\}$; γ_2 — гранич-

ный оператор следа на G_2 . Пусть $h \in L_2(G_2)$; $k \in C^1(G_2)$; $a \in C(G_2)$; $k(y) \geq \delta > 0$; $a(y) \geq \alpha > 0$; $\varphi \in \text{Im} \gamma_2$. Рассмотрим краевую задачу относительно $u = u(y)$:

$$\text{div}_{G_2}(k(y)\|y\|^2 \overline{\text{grad}}_{G_2} u(y) + \beta \overline{\text{grad}}_{G_2} u(y), y) - a(y)u(y) = h(y), \quad (3)$$

где $\beta > -1$, с краевым условием

$$\gamma_2(u) = \varphi. \quad (4)$$

Докажем при помощи теоремы 1, что задача (3)–(4) сводится к рассмотрению варианта задачи Дирихле в гильбертовом пространстве, исследованного в работе [6].

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕОМОРФИЗМА

Пусть $\alpha = \sqrt{1+\beta} - 1 > -1$. Рассмотрим отображение

$$F : x \mapsto \|x\|^\alpha x.$$

Не составляет труда найти обратное к F отображение:

$$F^{-1} : y \mapsto \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} y.$$

Заметим, что тут неравенство $\beta \neq -1 \Rightarrow \alpha \neq -1$ критично, иначе F не будет обратимым.

Обозначим

$$G_1 = F^{-1}(G_2) \subset \{x \in H : 0 < K_1 \leq \|F(x)\| \leq K_2\} = \{x \in H : 0 < K_1^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq \|x\| \leq K_2^{\frac{1}{1+\alpha}}\}.$$

Для удобства обозначим $T_1 = K_1^{\frac{1}{1+\alpha}}$, $T_2 = K_2^{\frac{1}{1+\alpha}}$, тогда G_1 является подмножеством кольца $\{x \in H : 0 < T_1 \leq \|x\| \leq T_2\}$. Поскольку F^{-1} — гладкое отображение, то граница G_1 $S_1 = \partial G_1 = F^{-1}(S_2)$ будет гладкой.

Везде в дальнейшем рассматриваем F как функцию из G_1 в G_2 , а F^{-1} , соответственно, как функцию из G_2 в G_1 .

ПРОИЗВОДНАЯ ДИФФЕОМОРФИЗМА

Лемма 1. $F'(x)z = \|x\|^\alpha z + \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x, z)x$.

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$\|F(x+h) - F(x) - \|x\|^\alpha h - \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x, h)x\| = o(\|h\|).$$

Используя формулу производной сложной функции и тождество $(\|x\|^2)' = 2x$, получаем

$$\begin{aligned} (\|x\|^\alpha)' &= \frac{\alpha}{2} (\|x\|^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} 2x = \alpha \|x\|^{\alpha-2} x \Rightarrow \\ \Rightarrow \|x+h\|^\alpha - \|x\|^\alpha - \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x, h) &= o(\|h\|), \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - \|x\|^\alpha h - \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x, h)x &= (\|x+h\|^\alpha - \|x\|^\alpha - \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x, h))x + \\ &+ (\|x+h\|^\alpha - \|x\|^\alpha)h = o(\|h\|)x + o(1)h \Rightarrow \\ \Rightarrow \|F(x+h) - F(x) - \|x\|^\alpha h - \alpha \|x\|^{\alpha-2} (x, h)x\| &= o(\|h\|). \end{aligned}$$

Следствие 1. Для $x \in G_1$ выполняется $\|F'(x)\| \leq \begin{cases} (1+\alpha)T_2^\alpha, & \alpha \geq 0; \\ (1-\alpha)T_1^\alpha, & \alpha \in (-1, 0). \end{cases}$

Доказательство. Поскольку для любого $x \in G_1$ $\|x\| \in [T_1, T_2]$, то

$$\frac{\|F'(x)z\|}{\|z\|} \leq \frac{\|x\|^\alpha \|z\|}{\|z\|} + |\alpha| \frac{\|x\|^{\alpha-1} |(x, z)|}{\|z\|} \leq (1+|\alpha|)\|x\|^\alpha \leq \begin{cases} (1+\alpha)T_2^\alpha, & \alpha \geq 0; \\ (1-\alpha)T_1^\alpha, & \alpha \in (-1, 0). \end{cases}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ К ДИФФЕОМОРФИЗМУ

Лемма 2. $(F^{-1})'(y)z = z\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y, z)y$.

Доказательство. Необходимо доказать, что

$$\left\| F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y, h)y \right\| = o(\|h\|).$$

Используя формулу производной сложной функции и тождество $(\|y\|^2)' = 2y$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)' &= -\frac{\alpha}{2+2\alpha} (\|y\|^2)^{-\frac{\alpha}{2+2\alpha}-1} 2y = -\frac{\alpha}{1+\alpha} \|y\|^{-\frac{2+3\alpha}{1+\alpha}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y, h)y &= o(\|h\|), \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y, h)y &= \\ = \left(\|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha}\|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y, h)y \right) &+ \\ + \left(\|y+h\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} - \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right)h &= o(\|h\|)y + o(1)h \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| F^{-1}(y+h) - F^{-1}(y) - h \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \frac{\alpha}{1+\alpha} \|y\|^{-\frac{3\alpha+2}{1+\alpha}}(y,h)y \right\| = o(\|h\|).$$

Следствие 2. Для $y \in G_2$ выполняется

$$\left\| (F^{-1})'(y) \right\| \leq \begin{cases} \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} K_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \geq 0; \\ \frac{1}{1+\alpha} K_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \in (-1,0). \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку для любого $y \in G_2$ $\|y\| \in [K_1, K_2]$, то

$$\begin{aligned} \frac{\left\| (F^{-1})'(y)z \right\|}{\|z\|} &\leq \frac{\|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \|z\|}{\|z\|} + \frac{|\alpha|}{1+\alpha} \frac{\|y\|^{-\frac{2\alpha+1}{1+\alpha}}(y,z)}{\|z\|} \leq \\ &\leq \frac{1+\alpha+|\alpha|}{1+\alpha} \|y\|^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq \begin{cases} \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} K_1^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \geq 0; \\ \frac{1}{1+\alpha} K_2^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}, & \alpha \in (-1,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, из следствий 1 и 2 следует, что F является *ограниченным диффеоморфизмом*.

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (3)–(4) К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Заметим, что оператор $F'(x)$ является самосопряженным, следовательно

$$\begin{aligned} F'(x)(F')^*(x)z &= \\ &= \|x\|^\alpha \left(\|x\|^\alpha z + \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x,z)x \right) + \alpha \|x\|^{\alpha-2} \left(x, \|x\|^\alpha z + \alpha \|x\|^{\alpha-2}(x,z)x \right) x = \\ &= \|x\|^{2\alpha} z + \alpha(2+\alpha) \|x\|^{2\alpha-2}(z,x)x = \|x\|^{2\alpha} z + \beta \|x\|^{2\alpha-2}(z,x)x, \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} F'(F^{-1}(y))(F')^*(F^{-1}(y)) &= \|y\|^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} z + \beta \|y\|^{-\frac{2}{1+\alpha}}(z,y)y = \\ &= \|y\|^{-\frac{2}{1+\alpha}} (\|y\|^2 z + \beta(z,y)y) = \left\| F^{-1}(y) \right\|^{-2} (\|y\|^2 z + \beta(z,y)y). \end{aligned}$$

Пусть γ_1 — граничный оператор следа на G_1 . Опираясь на теорему 1 и полученные выше результаты, доказываем следующую теорему.

Теорема 2. Функция $u(y) = u_2(y)$ будет решением задачи (3)–(4) на области G_2 тогда и только тогда, когда функция $u(x) = u_1(x) = u_2(F(x))$ станет решением такой задачи Дирихле на области $G_1 = F^{-1}(G_2)$:

$$\operatorname{div}_{G_1} \left(((k \circ F) \|\cdot\|^2 \overline{\operatorname{grad}}_{G_1} u) - (a \circ F)u \right) = h \circ F, \tag{5}$$

$$\gamma_1(u) = \varphi \circ F. \quad (6)$$

Замечание. Задача (5)–(6) действительно будет задачей Дирихле в терминах работы [6], задачей вида (1)–(2), так как для любого $u \in G_1$: $\|u\|^2 \geq T_1^2 > 0$.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен пример краевой задачи, ассоциированной с диффеоморфизмом между областями в гильбертовом пространстве, и проиллюстрирован метод доказательства корректности определенного класса краевых задач. В контексте дальнейших исследований видится целесообразным продолжение рассмотрения пар диффеоморфных римановых многообразий и получение таким образом новых классов корректных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапенко А.Ю.* Краевая задача, ассоциированная с диффеоморфизмом между римановыми многообразиями / А.Ю. Потапенко // Системные исследования и информационные технологии. — 2018. — № 1. — С. 132–140.
2. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2 -версии / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2011. — 63, № 9. — С. 1169–1178.
3. *Потапенко О.Ю.* Нескінченновимірні ріманові многовиди з рівномірною структурою / О.Ю. Потапенко // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 2016. — Т. 108, № 4. — С. 73–79.
4. *Далецкий Ю.Л.* Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия / Ю.Л. Далецкий, Я.И. Белополюская. — К.: Вища шк., 1989. — 296 с.
5. *Богданский Ю.В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра / Ю.В. Богданский // Укр. мат. журн. — 2015. — 67, № 11. — С. 1450–1460.
6. *Богданский Ю.В.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве / Ю. В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский // Укр. мат. журн. — 2014. — 66, № 6. — С. 733–739.
7. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. I / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // Укр. мат. журн. — 2016. — 68, № 7. — С. 897–907.
8. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на римановом многообразии и задача Дирихле. II / Ю.В. Богданский, А.Ю. Потапенко // Укр. мат. журн. — 2016. — 68, № 11. — С. 1443–1449.

Поступила 15.03.2018

ОРГАНИЗАЦИЯ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА НА ОСНОВЕ МНОГОУРОВНЕВОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА

Р.Н. ПОНОМАРЕНКО

Аннотация. Разработан, теоретически обоснован и реализован метод построения иерархических систем нечеткого логического вывода на основе многоуровневого параллелизма, в частности параллелизма второго уровня. Сформулирована концепция многоуровневого параллелизма, введено понятие уровня параллелизма. Сформулирована и доказана теорема, разработан метод теоретической оценки максимально возможного ускорения для систем, построенных на базе параллелизма уровня n , а также подход к проектированию иерархических нечетких систем на основе многоуровневого параллелизма для графических ускорителей NVIDIA. Спроектирована экспериментальная программная система для иерархических нечетких систем на основе многоуровневого параллелизма и технологии CUDA, имеющих сложные графы зависимостей между блоками нечетких правил. На основе разработанного метода вычислены теоретические оценки максимального ускорения; получены экспериментальные оценки ускорения для иерархических сложных систем нечеткого логического вывода.

Ключевые слова: нечеткий логический вывод, многоуровневый параллелизм, ускорение, нечеткие системы типа Такаги–Сугено, теоретическая оценка ускорения.

ВСТУПЛЕНИЕ

Математический аппарат нечеткой логики [1] зарекомендовал себя в тех системах, где существует неопределенность в той или иной степени, и применяется все шире в ряде направлений: наука, медицина, принятие решений в условиях неопределенности и т. д. В основе нечетких систем лежит нечеткий логический вывод, который позволяет применять нечеткую логику для построения интеллектуальных и экспертных систем, существенно расширяя круг решаемых задач.

При проектировании масштабных систем нечеткого логического вывода главной проблемой является необходимость существенного расширения нечеткой базы знаний, возникающая при увеличении количества входящих посылок (входных переменных). При увеличении количества входных переменных в рамках элементарной нечеткой системы количество правил растет экспоненциально [2]. Количество нечетких правил в пределах элементарной системы нечеткого логического вывода, которое должен написать эксперт [2]

$$N = M^K,$$

где K — количество нечетких входных переменных элементарной нечеткой системы; M — количество термов для каждой нечеткой переменной.

Единственным эффективным способом борьбы с количеством правил является декомпозиция на уровне входных переменных. Такие системы называются иерархическими системами нечеткого логического вывода, где в качестве посылок одних систем могут выступать заключения других систем, нижележащих по иерархии [3–6]. Таким образом, с увеличением количества элементарных систем суммарное количество правил при масштабировании иерархической системы увеличивается в арифметической прогрессии, давая возможность строить нечеткие системы с неограниченным количеством входных переменных. Так возник вопрос о повышении производительности вычислений иерархических систем нечеткого логического вывода.

Цель данной работы — предоставить теоретическую базу и способы реализации иерархических систем нечеткого логического вывода на основе концепции многоуровневого параллелизма с целью повышения быстродействия таких систем в масштабируемых задачах, имеющих сложные иерархические зависимости между блоками нечетких правил.

За основу взят нечеткий логический вывод типа Такаги–Сугено, однако не исключается (как и не утверждается) распространение представленной теории на нечеткие системы другого типа, базы знаний которых состоят из блоков нечетких правил.

НЕЧЕТКИЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД ТАКАГИ–СУГЕНО

Система нечеткого логического вывода типа Такаги–Сугено основывается на блоках нечетких предикатных правил ЕСЛИ–ТО [7]:

$$R_j : \text{ЕСЛИ } x_1 \text{ есть } A_{1j} \text{ И } x_2 \text{ есть } A_{2j} \text{ И } \dots \text{ И } x_n \text{ есть } A_{nj} \\ \text{ТО } y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где функция нахождения подзаключения правила $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n$ — линейная функциональная зависимость от четких величин входных посылок нечеткой системы; N — общее количество правил в пределах блока. Вычисление общего заключения нечеткой системы типа Такаги–Сугено имеет вид:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^N g_j \prod_{i=1}^{m_j} \mu_{ij}(x_i)}{\sum_{j=1}^N \prod_{i=1}^{m_j} \mu_{ij}(x_i)}, \quad (1)$$

где $\mu_{ij}(x_i)$ — функция принадлежности входных посылок нечеткому терму; T — T -норма, в которой в качестве конъюнкции обычно используется операция нахождения минимума.

КОНЦЕПЦИЯ МНОГОУРОВНЕВОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА

Любой параллельный алгоритм можно представить в виде ярусно-параллельной вычислительной формы [8]. То есть представить в виде дерева

операций, вершины которого означают множество операций, а дуги – информационные зависимости между операциями (рис. 1). Пусть имеется ациклический ориентированный мультиграф $G = \{V, E\}$, где V — множество операций (множество вершин); E — множество зависимостей между операциями (множество дуг). Приведем понятие яруса [8].

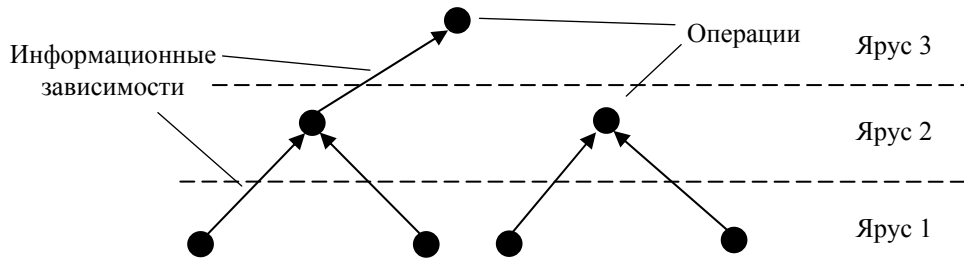


Рис. 1. Ярусно-параллельная форма вычислений

Пусть s, q — вершины с индексами i, j соответственно, где s — операция приемник данных; q — операция поставщик данных. Тогда, если индексы i, j номера соответствующих ярусов, то всегда $i > j$. В этом случае множество вершин, имеющих одинаковый индекс, является ярусом ярусно-параллельной формы вычислений. Количество систем в пределах одного яруса называется шириной данного яруса. Естественно, чем шире ярусы алгоритма, тем выше его степень параллелизма и, как следствие, возможности для распараллеливания. Степень параллелизма определяет соотношение количества вершин к количеству ярусов алгоритма.

Для обеспечения доступа к вершинам ярусно-параллельной схемы автором разработан метод, позволяющий, используя для хранения графа одномерный массив вершин, получать доступ к любой вершине любого яруса графа. Используемая структура данных состоит из двух одномерных массивов данных: массива вершин и массива номеров вершин.

Представим метод обеспечения доступа к вершинам каждого яруса [9]. Пусть N — количество вершин графа (количество блоков правил в ярусе), s — количество ярусов. Тогда, если количество систем в i -м ярусе $l_i, i = \overline{1, s}$, то имеем следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^s l_i = N.$$

Пусть V — множество вершин; M — множество номеров вершин графа. Определим для каждого яруса i -ю группу вершин $D_i = \{d_p^{(i)}\}, p = \overline{1, l_i}$ на множестве V . Тогда каждую вершину i -го яруса на множестве V можно найти по формуле

$$d_p^{(i)} = M_{z_p^{(i)}}, z_p^{(i)} = p + \sum_{k=1}^i l_k, \quad (2)$$

где i — номер яруса; p — номер вершины в i -м ярусе; $z_p^{(i)}$ — индекс номера вершины p i -го яруса на множестве M ; $M_{z_p^{(i)}}$ — найденный индекс вершины $d_p^{(i)}$ на множестве V .

При этом операции рассматриваются как элементарные, однако операциями чаще всего являются именно блоки операций, примерно равные между собой по количеству атомарных вычислений и контексту логических действий. Концепция многоуровневого параллелизма предполагает рассмотрение вершин графа в качестве сложных операционных блоков. Такие блоки, притом, что имеют подобно элементарной операции один вход – один выход, могут иметь возможности внутреннего распараллеливания. Пример отдельного яруса ярусно-параллельной схемы вычислений, вершины которой рассматриваются как вычислительные блоки и обладают внутренним параллелизмом, показан на рис. 2.

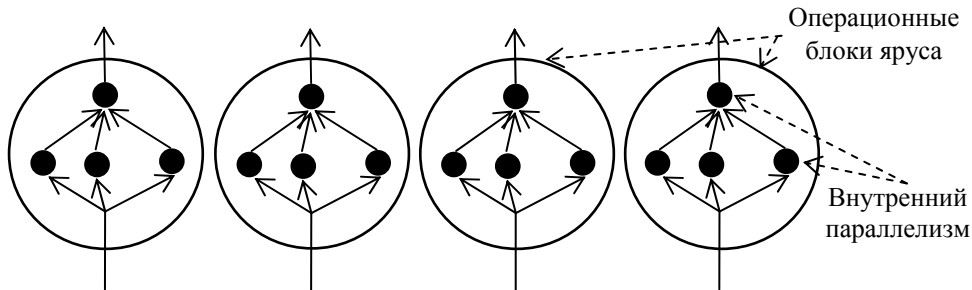


Рис. 2. Пример яруса вычислительной ярусно-параллельной схемы с внутренним параллелизмом

Введем понятие уровня параллелизма. Пусть имеется граф алгоритма $G = (V, E)$, где V — множество операций; E — множество зависимостей между операциями. В общем виде множество операций $V = \{v_i\}, i = \overline{1, M}$, обозначает операции именно элементарные, где M — количество операций. Однако каждая отдельно взятая операция v_i также может подразумевать блок операций. То есть можно утверждать, что в этом случае $v_i = \{Q, W\}$, где Q — множество операций блока v_i ; W — множество зависимостей операций блока v_i .

Пусть k — количество ярусов блока операций v_i ; M — количество операций блока v_i . Тогда можно утверждать, что уровень параллелизма возрастает на единицу, если соблюдаются следующие условия: $M \geq 2, k < M$. Иными словами, количество операций блока v_i должно быть не менее двух, а количество ярусов меньше общего количества вершин множества v_i . Алгоритм, все операции которого выполняются строго последовательно (последовательный алгоритм), является алгоритмом нулевого уровня параллелизма.

Примем изначально весь алгоритм G как единый блок операций. Поскольку уровни параллелизма начинают исчисление с нулевого уровня (уровня последовательной программы), то начальный уровень алгоритма G будет также нулевым. Таким образом, если $N \geq 2, s < N$, тогда наблюдается параллелизм первого уровня, а если $M \geq 2, k < M$, то параллелизм второго уровня. При дальнейшем исследовании алгоритма количество уровней па-

раллелизма может возрасти до некоего максимального значения. Это значение назовем верхней границей параллелизма и обозначим ω .

В работе сформулирована теорема [9] для нахождения теоретической оценки максимально возможного ускорения для вычислительных систем, имеющих параллелизм уровня больше единицы.

Теорема. Для параллелизма уровня n , суммарное максимально возможное ускорение вычисляется как произведение максимально возможных ускорений каждого из уровней:

$$S_P^{\text{sum}} = s_{p_1}^1 s_{p_2}^2 \times \dots \times s_{p_n}^n = \prod_{i=1}^n s_{p_i}^i, \quad (3)$$

где S_P^{sum} — суммарное ускорение параллелизма уровня n ; $s_{p_i}^i$ — ускорение уровня i при условии использования на данном уровне количества процессоров равном p_i .

Следует уточнить, что в формуле (3) присутствует также нулевой уровень $s_{p_0}^0$, $p_0 = 1$ (последовательный вариант), который в большинстве случаев полагается равным единице и может быть опущен при вычислении теоретической оценки максимального ускорения. Однако теоретически не исключается использование для нулевого уровня значения, отличного от единицы ($s_{p_0}^0 \geq 1$). Таким примером может послужить случай, когда ускорение возможно за счет использования более быстрой памяти. Таким образом, обозначив нулевой уровень, формула (3) примет вид:

$$S_P^{\text{sum}} = s_{p_0}^0 s_{p_1}^1 s_{p_2}^2 \times \dots \times s_{p_n}^n = \prod_{i=0}^n s_{p_i}^i.$$

Доказательство. Максимально возможное ускорение в пределах параллелизма первого уровня можно вычислить за законом Амдала [8], который находит теоретическую оценку ускорения с учетом того, какая доля вычислений выполняется строго последовательно:

$$S_P = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}} = \frac{p}{\alpha p + 1 - \alpha}, \quad (4)$$

где p — количество используемых процессоров; α — доля вычислений, выполняющихся строго последовательно. При вычислении α обычно сложную структуру разбивают на вычислительные блоки примерно одинакового размера для нахождения доли блоков, выполняющихся последовательно. При этом, в свою очередь, каждый из блоков может иметь свой внутренний параллелизм, который невозможно достичь между блоками, однако достигается в пределах блока (рис. 2).

Из изложенного следует, что переменная α будет также иметь коэффициент внутреннего ускорения, который при строго последовательном выполнении операций блока будет равняться единице и не рассматривается. Введем новый коэффициент γ при α , обозначив его как коэффициент внутреннего ускорения. Тогда формула (4) примет вид

$$S_p = \frac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\left(\frac{1-\alpha}{\gamma}\right)}{p}} = \frac{1}{\alpha\gamma^{-1} + \frac{(1-\alpha)\gamma^{-1}}{p}}.$$

Поскольку каждый блок можно рассматривать как отдельную подсистему, то коэффициент γ также будет вычисляться по формуле (4). При этом уровень параллелизма будет увеличен на единицу. Тогда, применяя метод математической индукции для доказательства данной теоремы, получим выражение при параллелизме уровня $n = 2$:

$$\begin{aligned} S_p^{\text{sum}} &= \frac{1}{\alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_2 + \frac{1-\alpha_2}{p_2}} \right)^{-1} + \frac{(1-\alpha_1) \left(\frac{1}{\alpha_2 + \frac{1-\alpha_2}{p_2}} \right)^{-1}}{p_1}} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1 (S_{p_2}^2)^{-1} + \frac{(1-\alpha_1)(S_{p_2}^2)^{-1}}{p_1}} = \frac{1}{\alpha_1 (S_{p_2}^2)^{-1} p_1 + (1-\alpha_1)(S_{p_2}^2)^{-1}} = \\ &= \frac{p_1}{(\alpha_1 p_1 + (1-\alpha_1))(S_{p_2}^2)^{-1}} = \frac{S_{p_2}^2 p_1}{\alpha_1 p_1 + 1 - \alpha_1} = S_{p_1}^1 S_{p_2}^2 = \prod_{i=1}^n s_{p_i}^i. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Иерархические нечеткие системы строятся на основе ярусно-параллельной схемы вычислений [8] и информационных зависимостей между элементарными нечеткими системами. Под информационной зависимостью имеется в виду зависимость входных параметров одних нечетких систем (приемников данных) от выходных значений других (поставщиков данных).

Представим иерархическую нечеткую систему по аналогии с ярусно-параллельной формой в виде ациклического ориентированного мультиграфа $G = \{V, E\}$, где V — множество элементарных нечетких систем; E — множество информационных зависимостей между элементарными нечеткими системами. Общая схема иерархических систем нечеткого логического вывода представлена на рис. 3. Прямоугольниками обозначены элементарные нечеткие системы (FS), где верхний индекс — номер яруса; нижний индекс — номер системы в данном ярусе. Типы иерархических структур нечеткого логического вывода приведены в работе [2].

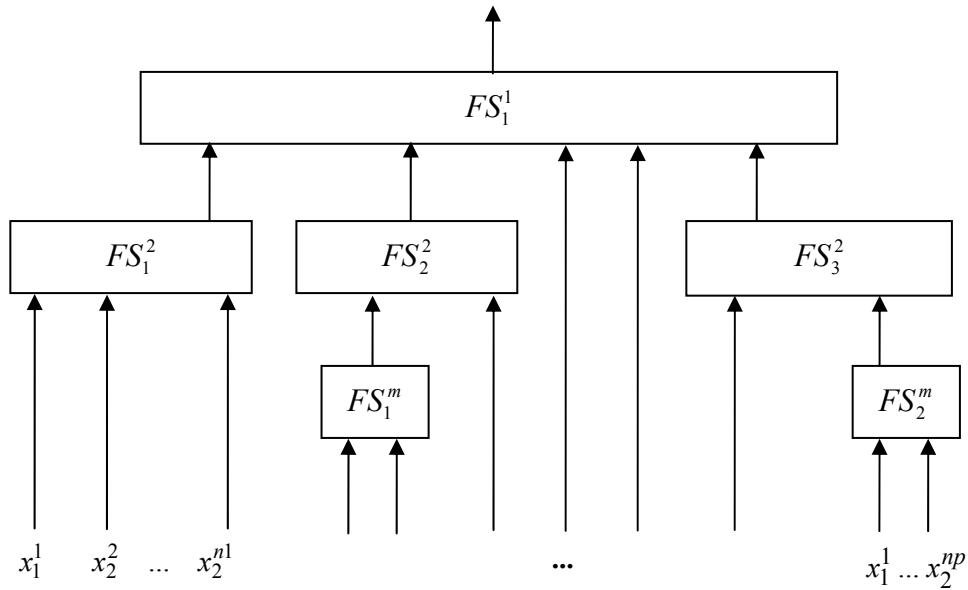


Рис. 3. Схема иерархической системы нечеткого логического вывода

ПАРАЛЛЕЛИЗМ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО УРОВНЯ

Параллелизм первого уровня в иерархических нечетких системах — это параллелизм на уровне иерархической связки нечетких систем между собой. Под операцией понимается элементарная нечеткая система. Непосредственно параллельное исполнение операций происходит в пределах яруса, т.е. осуществляется последовательная обработка параллельно исполняемых ярусов. Представим всю иерархию элементарных систем множеством $Y = \{y^d\}$, $d = \overline{1, L}$, где L — общее количество нечетких систем. Также представим подмножество множества Y нечетких систем в пределах яруса в виде $Q = \{y^q\}$, $q = \overline{1, P}$, где P — количество нечетких систем в пределах одного яруса. Тогда в пределах яруса Q присутствует параллелизм, где доступ к элементарным системам параллельно исполняемого яруса Q будет происходить в соответствии с (2).

Представим множество потоков для параллелизма первого уровня множеством $PLI = \{p_t\}$, $t = \overline{1, K}$, где K — общее количество доступных потоков первого уровня. Каждый элемент p_t содержит номера обрабатываемых элементарных нечетких систем. Номера этих систем для каждого потока

$$p_t = \left\{ \begin{array}{l} q, \text{ если } P \leq K \\ t + \sum_r K, r = 0, \dots, \left\lfloor \frac{P}{K} \right\rfloor, \text{ если } P > K \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Следовательно, каждый параллельный поток p_t выполняет вычисления:

$$y^q = \frac{\sum_{j=1}^{N^q} g_j^q w_j^q}{\sum_{j=1}^{N^q} w_j^q},$$

где q — индекс элементарной нечеткой системы яруса Q , рассчитанный по формуле (5).

ПАРАЛЛЕЛИЗМ НЕЧЕТКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО УРОВНЯ

Параллелизм второго уровня является ускорителем на уровне элементарной нечеткой системы. Как упоминалось выше, элементарная нечеткая система состоит из блока нечетких предикатных правил $RB = \{R_j\}, j = \overline{1, N}$. Нахождение заключения нечеткой системы предполагает последовательную обработку всего множества правил блока. Причем не играет роли последовательность обработки данного множества, каждый элемент которого является независимым. Представим множество потоков для параллелизма второго уровня множеством $PL2 = \{p_l\}, l = \overline{1, M}$, где M — общее доступное количество потоков второго уровня. Каждый элемент p_l содержит номера обрабатываемых правил. Номера этих правил для каждого потока p_l определяются согласно формуле:

$$p_l = \left\{ \begin{array}{l} j, \text{ если } N \leq M; \\ l + \sum_k M, k = 0, \dots, \left[\frac{N}{M} \right], \text{ если } N > M \end{array} \right\}. \quad (6)$$

Следовательно, каждый параллельный поток p_l выполняет следующие вычисления:

- $\prod_{i=1}^{m_j} \mu_{ij}(x_i)$ — активацию предусловий нечеткого правила;
- $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — нахождение подзаключения нечеткого правила в случае успешной его активации (если $\min_{i=1, 2, \dots, m_j} \mu_{ij}(x_i) \neq 0$),

где j — индекс правила в блоке нечетких правил, рассчитанный согласно выражению (6).

Важно отметить, что после синхронизированной обработки всего множества нечетких правил следует нахождение заключения по формуле (1), что несколько снижает эффективность параллелизма, так как данная операция выполняется строго последовательно относительно параллельной обработки правил [10]. Нахождение заключения в большинстве случаев полагается на первый поток параллельной вычислительной системы.

МНОГОУРОВНЕВЫЙ ПАРАЛЛЕЛИЗМ НА БАЗЕ ТЕХНОЛОГИИ NVIDIA CUDA

Многоуровневый параллелизм предполагает, что для каждого из уровней должно быть зарезервировано n параллельных потоков. Это количество не обязательно должно удовлетворять степень параллелизма, однако от этого количества зависят возможности распараллеливания. Еще одна задача реализации многоуровневого параллелизма — организация взаимодействия потоков. При увеличении уровня параллелизма хотя бы до второго уровня размер блоков операций на этом уровне заметно падает. Исходя из этого, распределенные системы типа MPI, действующие на основе обмена сообщениями между процессорами, являются неэффективными. Время вычислений замедляется учащающейся передачей данных. Также стоит отметить сложную индексацию процессов в распределенных системах.

Технология NVIDIA CUDA относится к технологиям мелкозернистого параллельного программирования с использованием в качестве вычислительного устройства видеокарты. Отметим, что графические ускорители призваны решать масштабные вычислительные задачи, которые имеют высокую степень параллелизма. Главными достоинствами CUDA, отмеченными при реализации многоуровневого параллелизма, являются: наличие общей памяти, трехмерная индексация, большое количество параллельных потоков.

Элементарной вычислительной единицей на графических ускорителях NVIDIA являются нити. Нити собираются в блоки, блоки, в свою очередь, в сетку (рис. 4). Такая вычислительная архитектура, позволяет использовать более мелкие вычислительные единицы для реализации параллелизма последующих уровней. Пример реализации многоуровневого параллелизма второго уровня на базе технологии графических ускорителей NVIDIA проиллюстрирован на рис. 4. Блоки (blocks) в пределах сетки (grid) реализуют параллелизм первого уровня, тогда как нити (threads) — параллелизм второго уровня (рис. 4). Построение иерархических систем нечеткого логического вывода на основе графических ускорителей изложено в работах [9–11].

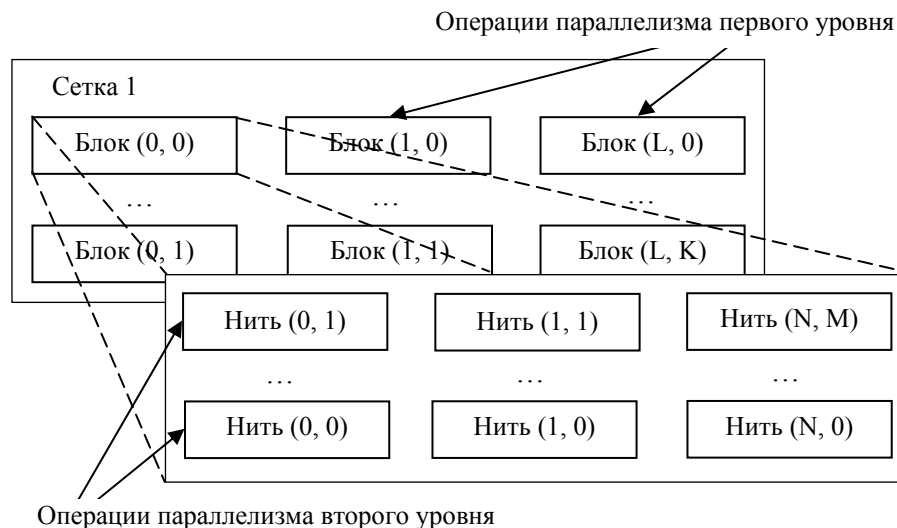


Рис. 4. Организация параллелизма второго уровня на графических ускорителях NVIDIA CUDA

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ПРОГРАММНЫЕ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МНОГОУРОВНЕВОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА И ТЕХНОЛОГИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ CUDA

В работах [10–12] автором было разработано и спроектировано несколько иерархических параллельных интеллектуальных систем нечеткого логического вывода с применением разных уровней параллелизма и способов распараллеливания [11]. Среди таких систем целесообразно отметить работы «Интеллектуальная система оценивания качества научных работ, что подаются на конференцию» [11, 12] и «Интеллектуальная система оценивания привлекательности стартапов» [10].

С целью исследования свойств параллельных иерархических нечетких систем следует рассмотреть результаты ускорения иерархических нечетких систем второго уровня параллелизма на основе технологии графических ускорителей NVIDIA CUDA [10]. Для этого была спроектирована экспериментальная программная система, генерирующая иерархию систем нечеткого логического вывода по заданным критериям. Полученные результаты сравним с теоретической оценкой максимально возможного ускорения, воспользовавшись сформулированной теоремой (3). Проведем теоретическую оценку ускорения для параллелизма второго уровня системы на 1000 блоков нечетких правил согласно этой теореме. В качестве эксперимента была сгенерирована система, обладающая следующими свойствами: количество ярусов, зададим равным 20, количество входов для каждой элементарной системы — 3, количество нечетких правил в пределах блока — 27, количество параллельных CUDA-поток для 1-го и 2-го уровней параллелизма выбрано 100 и 27 соответственно.

Согласно формуле (4) вычислим оценку максимально возможного ускорения на каждом из уровней. Далее по формуле (3) найдем суммарное ускорение для всех уровней одновременно:

$$S_P^{\text{sum}} = s_{p_1}^1 s_{p_2}^2;$$

$$p_1 = 100; p_2 = 27;$$

$$\alpha_1 = s / M = 20 / 1000 = 0,02; \alpha_2 = 0,01;$$

$$s_{p_1}^1 = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1 - \alpha_1}{p_1}} = \frac{1}{0,02 + \frac{1 - 0,02}{100}} \approx 33;$$

$$s_{p_2}^2 = \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1 - \alpha_2}{p_2}} = \frac{1}{0,01 + \frac{1 - 0,01}{27}} \approx 22;$$

$$S_P^{\text{sum}} = s_{p_1}^1 s_{p_2}^2 \approx 33 \cdot 22 \approx 726,$$

где M — количество элементарных нечетких систем; s — количество ярусов графа зависимостей между блоками нечетких правил.

Экспериментальные оценки ускорения иерархических систем нечеткого логического вывода второго уровня параллелизма в сравнении с теоретическими оценками ускорения, а также с экспериментальными оценками ускорения таких же систем для первого уровня параллелизма (использовалась технология параллельных вычислений с распределенной памятью MPI [11, 12]) показаны на рис. 5. Оценки ускорения получены для разного количества элементарных нечетких систем.

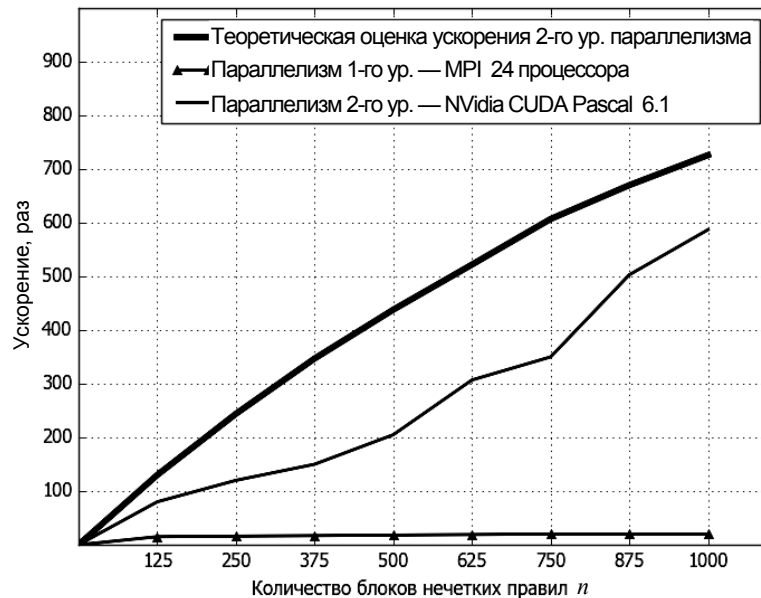


Рис. 5. Сравнительная характеристика теоретической и экспериментальных оценок ускорения для иерархических нечетких систем

Экспериментальная оценка ускорения несколько ниже теоретической, что обусловлено накладными расходами при работе с глобальной памятью графических ускорителей. Однако в целом наблюдается тенденция наращивания продуктивности вычислений с увеличением количества блоков нечетких правил. Таким образом, в пределах 1000 блоков нечетких правил решена проблема скорости вычислений при проектировании сложных иерархических нечетких систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе сформулирована концепция многоуровневого параллелизма на основе внутреннего распараллеливания, которая позволяет значительно ускорить выполнение сложных высоконагруженных вычислений. Введено и обосновано понятие уровня параллелизма. Разработан метод нахождения теоретической оценки ускорения для параллельных вычислений уровня n , а также метод распараллеливания иерархических нечетких систем до второго уровня параллелизма на примере элементарных нечетких систем типа Такаги–Сугено. Спроектирована экспериментальная программная система для исследования высоконагруженных иерархических систем нечеткого логического вывода на основе многоуровневого параллелизма второго уровня с поддержкой вычислений на графических ускорителях NVIDIA.

Полученные оценки ускорения демонстрируют, что параллельная схема второго уровня параллелизма при одних и тех же экспериментальных данных дает ускорение значительно больше, нежели распараллеливание первого уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zadeh L.A.* The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning / L.A. Zadeh // *Information Sciences*. — 1975. — Vol. 8, N 8. — P. 199–249, 301–357.
2. *Wang D.* A survey of hierarchical fuzzy systems (invited paper) / D. Wang, X. Zeng, J.A. Keane // *International journal of computational cognition*. — 2006. — Vol. 4, N 1. — P.18–29.
3. *Єршов С.В.* Принципи побудови нечітких мультиагентних систем в розподіленій середі / С.В. Єршов // *Комп'ютерна математика*. — 2009. — № 2. — С. 54–61.
4. *Yager R.R.* On a hierarchical structure for fuzzy modeling and control / R.R. Yager // *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* — 1993. — N 23. — P. 1189–1197.
5. *Cordon O.* Linguistic modeling by hierarchical systems of linguistic rules / O. Cordon, F. Herrera, I. Zwir // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* — 2002. — N 10. — P. 2–20.
6. *Torra V.A.* review of the construction of hierarchical fuzzy systems / V.A. Torra // *Int. J. Intell. Syst.* — 2002. — N 17. — P. 531–543.
7. *Леоненков А.В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А.В. Леоненков. — СПб.: БХВ, 2005. — 736 с.
8. *Воеводин В.В.* Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. — СПб.: БХВ-Петербург, 2002. — 608 с.
9. *Пономаренко Р.М.* Моделі паралельних ієрархічних систем для нечіткого логічного виведення / Р.М. Пономаренко // *Комп'ютерна математика*. — 2017. — № 2. — С. 37–45.
10. *Єршов С.В.* Метод побудови паралельних систем нечіткого логічного виведення на основі графічних прискорювачів / С.В. Єршов, Р.М. Пономаренко // *Проблеми програмування*. — 2017. — № 4. — С. 3–15.
11. *Єршов С.В.* Паралельні моделі багаторівневих нечітких систем Такагі-Сугено / С.В. Єршов, Р.М. Пономаренко // *Проблеми програмування*. — 2016. — № 1. — С. 141–149.
12. *Єршов С.В.* Ярусно-паралельна модель обчислень для логічного виведення у нечітких багаторівневих системах / С.В. Єршов, Р.М. Пономаренко // *Комп'ютерна математика*. — 2016. — № 1. — С. 28–36.

Поступила 03.09.2018



МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

УДК 519.816

DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.10

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПІДВИЩЕННЯ УЗГОДЖЕНОСТІ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК ЗА ПІДТРИМАННЯ ПРИЙНЯТТЯ ГРУПОВИХ РІШЕНЬ

В.В. ЦИГАНОК, П.Д. РОЇК

Анотація. Розглянуто проблему визначення рівня узгодженості оцінок під час групової експертизи. Завданням дослідження є розроблення методу визначення узгодженості експертних оцінок, позбавленого ряду ключових недоліків, притаманних наявним методам. Запропоновано індекс узгодженості визначати з використанням спектрального підходу, відповідно до якого оцінки експертів відображаються у вигляді спектра на обмеженій, безперервній або дискретній шкалі. Індекс обчислено як нормоване значення суми відстаней між оцінками експертів для всіх можливих пар оцінок. Індекс узгодженості досліджено також для функції квадрата попарних різниць у парах оцінок. Проведений аналіз засвідчив, що функція відстані більш придатна для ґрунтового практичного визначення узгодженості експертних оцінок. Проведено імітаційне моделювання та запропоновано визначення порогового значення узгодженості, вище якого стає допустимою агрегація експертних оцінок. Для підвищення рівня узгодженості запропоновано процедуру зворотного зв'язку з експертом за умови неспричинення будь-якого тиску на нього.

Ключові слова: підтримання прийняття групових рішень, експертне оцінювання, індекс узгодженості експертних оцінок, спектральний підхід, поріг узгодженості, зворотний зв'язок з експертом.

ВСТУП

За підтримання прийняття рішень дуже важливо застосовувати групові експертизи, адже довіра до рекомендацій, сформованих на основі знань колективу фахівців, беззаперечно є значно вищою, ніж до сформованих однією, хоч і дуже кваліфікованою особою. У багатьох випадках оцінки експертів (їх переваги, судження тощо) можуть бути між собою недостатньо узгодженими для того, щоб у результаті їх подальшого узагальнення (агрегації) можна отримувати достовірні результати. Тому дуже важливим аспектом є визначення ступеня узгодженості суджень експертів, а також рівнів достатньої для агрегації узгодженості. Натепер відомо досить велику кількість індексів узгодженості експертних оцінок, багато з яких ґрунтуються на використанні статистичних показників, проте такий підхід вбачається не досить доцільним, оскільки зазвичай множина оцінок не є репрезентативною вибіркою

в статистичному сенсі (тобто у розгляданих випадках оцінок може бути лише декілька).

СУТНІСТЬ ПРОБЛЕМИ

У цьому дослідженні пропонується використати спектральний підхід до подання експертних оцінок, запропонований у праці [1] та удосконалений у праці [2]. Сутність цього підходу полягає у формуванні на основі експертних матриць парних порівнянь множини оцінок та поданні її у вигляді складових на обмеженій з обох кінців дискретній шкалі. Кожну цю складову можна поставити у відповідність оцінці, наданій деяким експертом під час групової експертизи. Набір таких складових зручно зображати у вигляді спектра оцінок, приклад якого показано на рис. 1.

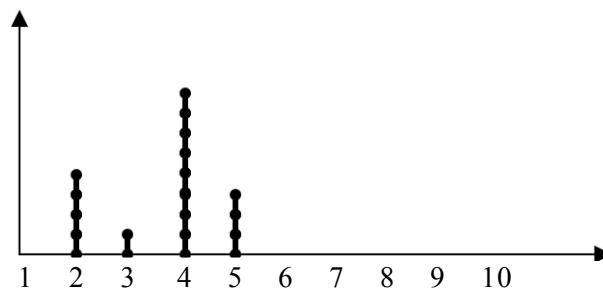


Рис. 1. Приклад зображення спектра, що відповідає набору оцінок різних експертів $\{2,2,2,2,3,4,4,4,4,4,4,4,4,4,5,5,5\}$

Застосування зазначеного підходу для визначення узгодженості з подвійним використанням формули ентропії запропоновано, як і деякі інші підходи, у праці [3], у якій подано також коригування індексу, наведеного у праці [1], з метою обмеження його області значень діапазоном $[0,1]$ і неможливості потрапляння в область від'ємних значень.

Деякі практичні приклади свідчать про те, що функція індексу узгодженості [1] інколи поводить себе немонотонно у випадку зміни положення (значення) оцінок відносно середнього узагальненого значення.

Тому завдання розроблення методу визначення узгодженості, позбавленого таких недоліків, вбачається актуальними. Актуальність ще зумовлюється тим, що експертні оцінки іноді без значної втрати точності важко подати на дискретній шкалі, і постає потреба у визначенні узгодженості з використанням оцінок як дійсних чисел на неперервних шкалах.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

Сформулюємо вимоги до індексу узгодженості, які впливають зі зручності та доцільності його використання.

Отже, щоб розробити метод визначення ступеня узгодженості, взято до уваги такі базові постулати (аксіоми).

Аксіома 1. Під час експертного оцінювання завжди існує деяка «істинна» оцінка, визначення якої є метою проведення групової експертизи.

Аксіома 2. Ця «істинна» оцінка відповідає деякому усередненому значенню множини індивідуальних оцінок експертів.

Аксиома 3. Множину індивідуальних експертних оцінок можна подати на обмеженій з обох боків на числовій неперервній або дискретній шкалі.

Аксиома 4. Максимальний рівень узгодженості (1.0) досягається тоді, і тільки тоді, коли всі експерти вибрали одну й ту саму оцінку.

Аксиома 5. Індекс узгодженості повинен бути незалежним від зсувів оцінок, тобто множина оцінок $\{1,2,5\}$ матиме той самий індекс, що і $\{4,5,8\}$.

Аксиома 6. За однієї і тієї самої множини оцінок збільшення розміру шкали підвищує індекс узгодженості і навпаки.

Аксиома 7. Незалежність від розміру шкали: якщо деяка множина оцінок більш узгоджена, ніж інша на певній шкалі, то вона є більш узгодженою і в будь-якій іншій шкалі.

Аксиома 8. Індекс повинен мати властивість масштабованості: за лінійних змін (одночасного пропорційного збільшення/зменшення) розмірів шкали і значень усіх оцінок індекс узгодженості залишається незмінним.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ З ВИЗНАЧЕННЯ УЗГОДЖЕНОСТІ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК

Провівши вторинний аналіз бібліографічних джерел, можна стверджувати, що у спеціалізованій літературі чимало уваги приділено окресленій задачі. Дослідниками запропоновано низку індексів для визначення рівня узгодженості експертних оцінок. Такі індекси мають як переваги, так і недоліки, однак, на нашу думку, жоден з них не гарантує необхідного рівня достовірності для застосування в практичних умовах на статистичних вибірках різного масштабу. Отже, варто проаналізувати такі запропоновані інструменти та їх специфіку.

1. Стандартне відхилення вибірки (sample standard deviation), Шмідт і Гантер [4]. Цей інструмент оцінює рівень узгодженості через дисперсію від середнього значення. Індекс демонструє високу розбіжність значень для різних вибірок і не гарантує однорідного визначення узгодженості.

2. Коефіцієнт варіації (coefficient of variation). Цей індекс визначає узгодженість через дисперсію стандартного відхилення вибірки. Його основний недолік такий самий, як і індексу стандартного відхилення.

3. Індекс скоригованого середнього відхилення (adjusted average deviation index) [5]. Цей індекс подібний до стандартного відхилення вибірки, але дозволяє досягнути більш достовірних результатів завдяки врахуванню аспекту згоди між експертами. Недолік цього інструменту — не виконується аксіома 6.

4. Індеси r_{wg} [6] і r_{wg}^* [7]. Головний недолік це те, що індекси для множин оцінок $\{1,1,1,1,10,10,10,10\}$, $\{1,1,4,4,7,7,10,10\}$ (рівномірні розподіли) є однаковими.

5. Індекс a_{wg} [8]. Цей індекс подібний до r_{wg} і доповнює його. Однак істотний недолік цього індексу — це можливість отримання від'ємних значень.

6. Спектральний показник узгодженості (spectral consistency factor) [9]. Його головний недолік — індекс не є неперервним.

7. Зважений індекс спарювання (weighted pairing index) [10]. Цей індекс ґрунтується на визначенні відстані відхилення експертних оцінок від середнього показника групи. Його основний недолік — індекс дає надто високі значення для рівномірних розподілів.

8. Критерій узгодженості Пірсона (Pearson's statistic). Його недолік — ураховуються частоти оцінок, а не їх значення, тобто $\{1,1,5,5\}$ і $\{1,1,4,4\}$ мають один і той самий індекс.

9. Індекс подвійної ентропії (double entropy index) [3]. Цей індекс враховує міру інформації оцінок і їх частоти. Його головний недолік — немонотонність оцінок (тобто з віддаленням однієї оцінки від основної множини оцінок індекс спочатку зменшується, а потім збільшується),

Таким чином, виходячи з наведеного огляду, можна дійти висновку, що наявні в літературі інструменти не надають надійних засобів для вирішення завдань, поставлених у межах поточного дослідження. Це свідчить про актуальність пошуку оптимальної функції для дослідження рівня узгодженості експертних оцінок.

ЗАПРОПОНОВАНИЙ ВАРІАНТ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Пропонується індекс узгодженості подати у вигляді такого виразу:

$$I = \frac{\sum_{i \neq j} f(|x_i - x_j|)}{M},$$

де x_i — оцінка i -го експерта; M — значення для найбільш неузгодженого випадку.

Отже, індекс узгодженості — це сума відстаней між оцінками для всіх можливих пар оцінок експертів. Запропонована функція f має таку властивість: $f(x) > 0$, якщо $x > 0$, та $f(x) = 0$, якщо $x = 0$. Тому логічно і правильно було б цей індекс називати індексом *неузгодженості*, адже мінімум функції відповідає повній / найбільшій узгодженості оцінок.

Із викладених вище умов: $I \geq 0$ і мінімум досягається тоді, і тільки тоді, коли всі значення змінних (оцінки) однакові. Крім того, для обох цих функцій максимум I досягається тоді, коли половина оцінок міститься на одному кінці шкали, а половина — на другому. У випадку, коли кількість оцінок непарна, «зайва» оцінка може бути на будь-якому кінці інтервалу.

Визначення цього максимуму в певному сенсі йде врозріз із підходами тих авторів, які вважають, що максимум повинен досягатися, коли всі оцінки рівномірно розподілені на всій шкалі. Але на практиці не дуже важливо, де функція досягає максимуму, оскільки всі випадки великої неузгодженості, описані вище (та інші), не можуть використовуватися для подальшої агрегації оцінок експертів. Узгодженість у цих випадках необхідно «покривати»; важливо лише, щоб функція задовольняла базові аксіоми.

Тепер визначимо формально, який саме набір оцінок є найбільш неузгодженим для запропонованого індексу узгодженості. Для цього, очевидно, потрібно знайти максимум $\sum_{i \neq j} f(|x_i - x_j|)$. Оскільки залежно від функції f максимум буде різним, проведемо аналіз, коли $f = x^2$ (варто зазначити, що для функції $f = |x|$ результат буде таким самим).

Отже, знайдімо максимум функції $F = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2$.

Нехай маємо n експертів, що голосують на шкалі $[1, s]$, нехай $x_i, x_i \in [1, s], i = \overline{1..n}$ — голос i -го експерта. Без втрати загальності вважаємо, що $x_i \leq x_{i+1}, i = \overline{1..n-1}$.

Розглянемо таку задачу:

$$\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \rightarrow \max \quad i, j = \overline{1..n};$$

$$x_i \leq x_{i+1}, \quad i = \overline{1..n-1};$$

$$x_1 \geq 1,$$

$$x_n \leq s.$$

Перепишемо задачу у вигляді:

$$\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \rightarrow \max \quad i, j = \overline{1..n};$$

$$x_{i+1} - x_i \geq 0, \quad i = \overline{1..n-1};$$

$$x_1 - 1 \geq 0;$$

$$s - x_n \geq 0.$$

Лагранжіван має вигляд [11]

$$L = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i (x_{i+1} - x_i) + \alpha (x_1 - 1) + \beta (s - x_n).$$

Тепер знайдемо умови оптимальності:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 \sum_{i=1}^n (x_1 - x_i) + \alpha - \mu_1 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 2 \sum_{i=1}^n (x_k - x_i) + \mu_{k-1} - \mu_k = 0, \quad k = \overline{2..n-1};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = 2 \sum_{i=1}^n (x_n - x_i) - \beta + \mu_{n-1} = 0;$$

$$\alpha (x_1 - 1) = 0;$$

$$\beta (s - x_n) = 0$$

$$\mu_i (x_{i+1} - x_i) = 0, \quad i = \overline{1..n-1};$$

$$x_i \leq x_{i+1}, \quad i = \overline{1..n-1};$$

$$x_1 \geq 1;$$

$$x_n \leq s;$$

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = \overline{1..n-1}.$$

Додаючи перші n рівнянь, отримуємо:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^n (x_1 - x_i) + \alpha - \mu_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \left(2 \sum_{i=1}^n (x_k - x_i) + \mu_{k-1} - \mu_k \right) + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n (x_n - x_i) - \beta + \mu_{n-1} = 0; \\ & 2 \left(n \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n n x_i \right) + \alpha - \beta = 0; \\ & \alpha - \beta = 0, \\ & \alpha = \beta. \end{aligned}$$

Розглянемо випадок, коли $\alpha - \beta = 0$.

Тут перші n рівнянь матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_1 - x_i) - \mu_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_k - x_i) + \mu_{k-1} - \mu_k = 0, \quad k = \overline{2..n-1}; \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_n - x_i) + \mu_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Із рівняння $2 \sum_{i=1}^n (x_1 - x_i) - \mu_1 = 0$ (оскільки x_1 найменше, а $\mu_1 \geq 0$) випливає, що $x_1 = x_i$, $i = \overline{2..n-1}$, але цей випадок мінімізує функцію, тому він не підходить.

Розглянемо тепер випадок, коли $\alpha = \beta \neq 0$. Тут $x_1 = 1$, $x_n = s$.

Рівняння набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2 \sum_{i=1}^n (1 - x_i) + \alpha - \mu_1 = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_k - x_i) + \mu_{k-1} - \mu_k = 0, \quad k = \overline{2..n-1}; \\ \frac{\partial L}{\partial x_n} &= 2 \sum_{i=1}^n (s - x_i) - \beta + \mu_{n-1} = 0; \\ \mu_i (x_{i+1} - x_i) &= 0, \quad i = \overline{1..n-1}; \\ x_i &\leq x_{i+1}, \quad i = \overline{1..n-1}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему нелінійних рівнянь числовим методом за допомогою програмних засобів, отримуємо, що коли n парне, то розв'язок має

$$\text{вигляд } \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_{\frac{n}{2}}, \underbrace{s \dots s}_{\frac{n}{2}} \right\}, \text{ а якщо } n \text{ непарне – то } \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_{\frac{n+1}{2}}, \underbrace{s \dots s}_{\frac{n-1}{2}} \right\} \text{ або } \left\{ \underbrace{1 \dots 1}_{\frac{n-1}{2}}, \underbrace{s \dots s}_{\frac{n+1}{2}} \right\}.$$

ПОРОГОВЕ ЗНАЧЕННЯ ІНДЕКСУ УЗГОДЖЕНОСТІ

Отже, узгодженість оцінок експертів визначається метою подальшої перевірки на коректність виконання агрегації цих оцінок. Тобто для отримання достовірних результатів під час агрегації потрібно, щоб рівень узгодженості був достатньо високим. Інакше може статись ситуація, як у класичному прикладі про стрільбу по мішені, коли в результаті агрегації двох неточних влучень у лівий і у правий край мішені отримано агреговане влучення у центр мішені. Таким чином, постає актуальна задача визначення цього порогового значення узгодженості, за якого агрегація є допустимою і доцільною.

Для розуміння ходу розв'язання цієї задачі наведемо деякі міркування, що впливають із проведених досліджень. Припустімо, що експерт голосує навмання, і припустімо також, що розподіл оцінок відбувається згідно з трикутним законом (рис. 2), тобто експерт має тенденцію до центрування оцінок.

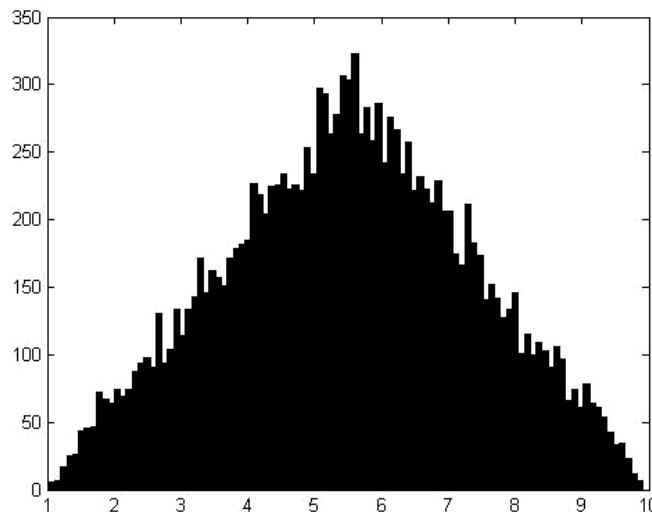


Рис. 2. Приклад зображення трикутного закону розподілу оцінок

Для перевірки результатів застосування різних функцій візьмімо до уваги ситуацію, коли 30 експертів навмання ставлять оцінку 15 000 разів: I залежно від f відповідає різним законам розподілу.

Якщо $f = x^2$, то закон розподілу має вигляд, як на рис. 3.

Як можна бачити з графіка, за $f = x^2$ розподіл виразно тяжіє правобіч на горизонтальній осі. Тенденція до тяжіння праворуч свідчить про те, що

виставлені навмання 30 експертами 15 000 оцінок демонструють дуже високий рівень узгодженості.

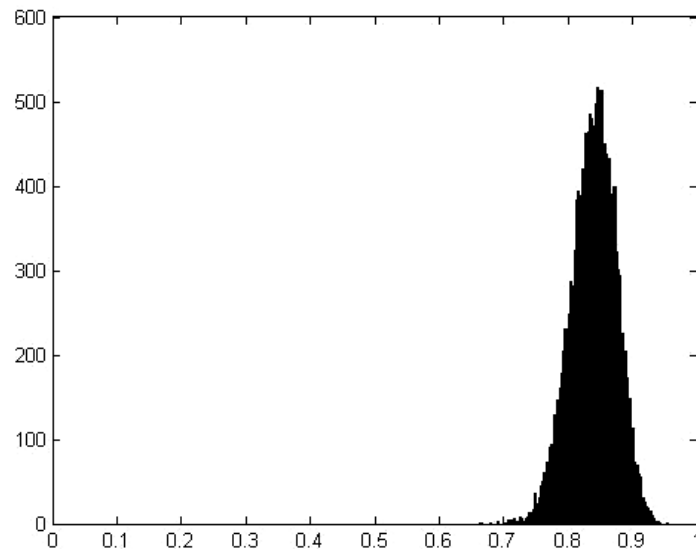


Рис. 3. Приклад зображення закону розподілу оцінок для функції $f = x^2$

Для визначення порога у межах цього дослідження пропонується взяти пороговий індекс, що дорівнює 0,95 квантилі (0,95 вибрано шляхом емпіричних досліджень). Для наведеного вище розподілу порогове значення дорівнює 0,94. Таким чином, за $f = x^2$ маємо дуже велике порогове значення, якого важко досягнути за нормальних умов, коли експерти ставлять реальні оцінки відповідно до своїх уподобань, а не діють навмання.

Також можемо констатувати, що для $f = x^2$ досягається велике значення індексу узгодженості: 0,57. В умовах реального експертного оцінювання таке велике значення вбачається малоімовірним, що ще раз підтверджує низький рівень придатності такої функції для вирішення практичних завдань у межах поставленої задачі.

Отже, варто розглянути інший варіант функції, який краще задовольнятиме встановлені вимоги.

Для $f = |x|$ закон має вигляд рис. 4.

Як видно з графіка, для $f = |x|$ досягається набагато рівномірніший розподіл, який тяжіє до центра, а не до периферії на горизонтальній осі. Порогове значення за порогового індексу 0,95 дорівнює 0,73. Таким чином, можна стверджувати, що порогове значення для $f = |x|$ істотно нижче ніж таке значення для $f = x^2$ (0,94 проти 0,73), що є свідченням більшої кореляції розподілу експертних оцінок, розставлених навмання, з можливим розподілом експертних оцінок, отриманих в умовах реального оцінювання.

Крім того, за такого рівномірного розподілу досягається істотно нижче значення узгодженості: 0,26 для $f = |x|$ проти 0,57 для $f = x^2$. Це може бути підтвердженням більшої адаптованості функції до умов реальних статисти-

чних досліджень, а тому свідчить про кращу придатність функції для використання в межах поставлених задач.

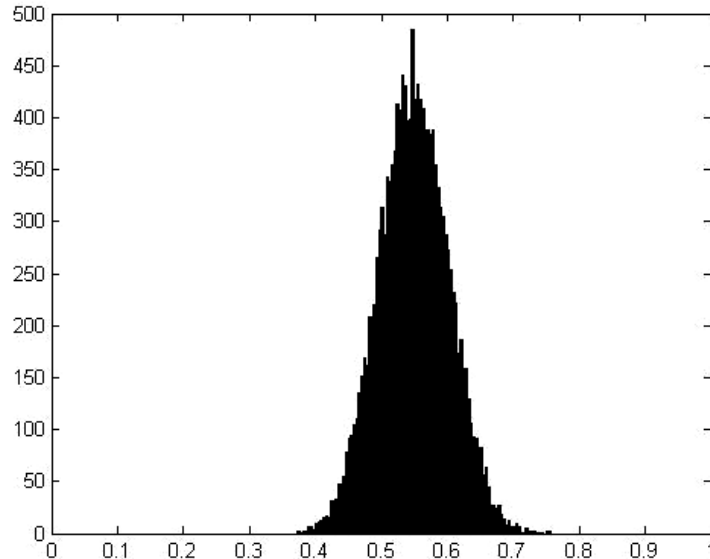


Рис. 4. Приклад зображення закону розподілу оцінок для функції $f = |x|$

ВИБІР ФУНКЦІЇ ШЛЯХОМ ПОРІВНЯЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Розглядалися функції $f = |x|$ і $f = x^2$.

Функція $f = |x|$ вбачається більш прийнятною, оскільки:

- 1) рівномірний розподіл повинен мати якомога менший індекс узгодженості, для $|x|$ це 0,26, для x^2 це 0,57;
- 2) поріг застосування множини експертних оцінок для x^2 вищий (0,94 проти 0,73).

Таким чином, функція $f = |x|$ утворює розподіл, більш придатний для ґрунтовного практичного застосування у складі індексу узгодженості.

ПРОЦЕДУРА ПОКРАЩЕННЯ УЗГОДЖЕНОСТІ

У випадку, якщо індекс узгодженості менший ніж поріг необхідної для виконання агрегації узгодженості, пропонується процедура зворотного зв'язку з експертом для її підвищення.

У ході підвищення узгодженості ставляться дві цілі: 1) питання до експерта мають бути ненав'язливими (тобто не чинити тиск на експерта); 2) кількість питань повинна бути мінімальною.

Отже, нехай експерти дали свої оцінки x_i^* , $i = \overline{1..n}$, індекс узгодженості виявився нижче від порога узгодженості.

Для кожного експерта i фіксуємо оцінки всіх інших експертів, а оцінку i -го експерта варіюємо, і знаходимо значення, за якого індекс узгоджено-

сті становиться максимальним, тобто розв'язуємо задачу максимізації функції $F(x_i) = \sum_{i \neq j} f(|x_i - x_j|)$.

У випадку якщо $f = x^2$, то $F(x_i) = \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2$, і максимум досягається, коли $F'(x_i) = 2 \sum_{i \neq j} (x_i - x_j) = 0$, $j = \overline{1..i, i+1..n}$, тобто коли $x_i = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n x_j}{n-1}$ (середнє арифметичне оцінок інших експертів).

Аналогічне значення можна знайти, коли $f = |x|$ (це буде медіана оцінок інших експертів).

Далі визначаємо експерта, який найбільше максимізував індекс узгодженості.

Запитуємо, чи бажає він змінити свою оцінку. Якщо відповідь — «ні», переходимо до наступного за ним експерта. Якщо відповідь — «так», то просимо надати нову оцінку. Якщо надана ним оцінка збільшила індекс узгодженості, замінюємо його попередню оцінку новою, якщо ні — то просто запам'ятовуємо цю ситуацію для подальшого аналізу.

Описаний вище алгоритм скінченний, оскільки кожен експерт запитується максимум один раз.

Алгоритм закінчує свою роботу у випадку, коли потрібний рівень узгодженості досягнуто або коли неможливо досягти порога.

Приклад роботи алгоритму у формі діалогових повідомлень:

Уведіть максимальне значення на шкалі (5–100): 10.

Уведіть кількість експертів (2–25): 5.

Яку функцію використовувати (модуль (1) чи квадрат (2))?: 1.

Розраховуємо порогове значення (95% перцентиль)...

Пороговий індекс узгодженості дорівнює 0,82.

Уведіть оцінку експерта 1 ([1, 10]): 7.

Уведіть оцінку експерта 2 ([1, 10]): 3.

Уведіть оцінку експерта 3 ([1, 10]): 6.

Уведіть оцінку експерта 4 ([1, 10]): 7.

Уведіть оцінку експерта 5 ([1, 10]): 1.

Розраховуємо індекс узгодженості...

Індекс узгодженості дорівнює 0,41.

Намагаємося підвищити рівень узгодженості...

Експерте 5. Чи хочете змінити вашу оцінку (була 1,0) (так (1) або ні (0))?: 1.

Експерте 5. Яка ваша нова оцінка (була 1,0)?: 7.

Індекс узгодженості підвищився, дорівнює 0,67.

Експерте 2. Чи хочете змінити вашу оцінку (була 3,0) (так (1) або ні (0))?: 1.

Експерте 2. Яка ваша нова оцінка (була 3,0)?: 6.

Індекс узгодженості підвищився, дорівнює 0,89.

Фінальний індекс узгодженості дорівнює 0,89.

Оцінки: 7.0, 6.0, 6.0, 7.0, 7.0.

ОБМЕЖЕННЯ ОБРАНОЇ МОДЕЛІ

Обрана модель ґрунтується на теоретичному дослідженні недоліків та переваг інших моделей. Вибір здійснювався шляхом порівняння потенційних експертних оцінок, отриманих оцінюванням навімання. Моделі бракує емпіричного підтвердження її застосуванням у межах реальних досліджень за участю експертів для підтвердження релевантності отриманих результатів.

Важливим є той факт, що модель може давати потенційно різні результати залежно від обсягу вибірки. На базі виконаних досліджень можна висунути припущення, що модель може демонструвати більші відхилення в межах досліджень з умовно малою вибіркою, через що застосування висунутих гіпотез на практиці може обмежуватися зазначеними відхиленнями.

Провести емпіричний аналіз для порівняння практичних і теоретичних результатів у межах цієї роботи неможливо через наявні обмеження часових, фінансових та людських ресурсів, однак можна рекомендувати його для подальшого дослідження. Можна також використати й інші функції, крім модуля та квадрата відстані між оцінками, але вони надто складні для подальшого аналізу.

ВИСНОВОК

Попри наявні обмеження, запропонована модель дозволяє ефективно забезпечувати умови узгодженості експертних оцінок у групі, необхідні для виконання агрегації. Використовуючи запропоновану модель, можна обійти або мінімізувати недоліки, притаманні іншим моделям. Зокрема для обраного підходу характерні такі переваги: він придатний для неперервного випадку, задовольняє всі описані аксіоми. Вагомою перевагою є практична простота моделі та високий рівень достовірності для оцінювання рівня узгодженості експертних оцінок за різних варіантів їх розподілу між крайніми величинами оцінок. Запропонований підхід до підвищення узгодженості оцінок у групі дає змогу не чинити тиск на експерта, оскільки напрям бажаної зміни для підвищення узгодженості попередньо наданої оцінки не вказується. Рекомендується подальше опрацювання запропонованого підходу та його дослідження в межах практичних задач аналізу розподілу експертних оцінок для різних за обсягом статистичних вибірок.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Totsenko V.G.* The Agreement Degree of Estimations Set with Regard of Experts Competency / V.G. Totsenko // *Proceedings of the Fourth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process.* Simon Fraser University. — Vancouver, Canada. — 1996. — P. 229–241.

2. Циганок В.В. Елементи комбінаторного підходу при визначенні спектрального коефіцієнта узгодженості експертних парних порівнянь / В.В. Циганок // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2012. — Т. 14, № 2. — С. 98–105.
3. Olenko A. Double Entropy Inter-Rater Agreement Indices, Applied Psychological Measurement / A. Olenko, V. Tsyganok. — 2016. — Vol. 40(1). — P. 37–55.
4. Schmidt F.L. Interrater Reliability Coefficients Cannot be Computed When Only One Stimulus is Rated / F.L. Schmidt, J.E. Hunter // Journal of Applied Psychology. — 1989. — **74**. — P. 368–370.
5. Burke M.J. On Average Deviation Indices for Estimating Interrater Agreement / M.J. Burke, L.M. Finkelstein, M.S. Dusig // Organizational Research Methods. — 1999. — **2**. — P. 49–68.
6. James L.R. Estimating Within-Group Interrater Reliability With and Without Response Bias / L.R. James, R.G. Demaree and G. Wolf // Journal of Applied Psychology. — 1984. — **69**. — P. 85–98.
7. Lindell M.K. A Revised Index of Agreement for Multi-Item Ratings of a Single Target / M.K. Lindell, C.J. Brandt, D.J. Whitney // Applied Psychological Measurement. — 1999. — **23**. — P. 127–135
8. Brown R.D. Interrater Agreement Reconsidered: An Alternative to the rwg Indices / R.D. Brown, N.M.A. Hauenstein // Organizational Research Methods. — 2005. — **8**. — P. 165–184.
9. Zgurovsky M.Z. Group Incomplete Paired Comparisons with Account of Expert Competence / M.Z. Zgurovsky, V.G. Totsenko, V.V. Tsyganok // Mathematical and Computer Modelling. — 2004. — **39**(4–5). — P. 349–361.
10. Cicchetti D.V. (1997). A New Method for Assessing Interexaminer Agreement when Multiple Ratings are Made on a Single Subject: Applications to the Assessment of Neuropsychiatric Symptomatology / D.V. Cicchetti, D. Showalter, R. Rosenheck // Psychiatry research. — 1997. — **72**(1). — P. 51–63.
11. Constrained Optimization. — Available at: <http://mat.gsia.cmu.edu/classes/QUANT/NOTES/chap4/node6.html> on 11-may-18).

Надійшла 24.05.2018

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ И ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ГЕОМАГНИТНЫХ ИНДЕКСОВ

С.Н. ИВАНОВ, В.А. ЯЦЕНКО

Аннотация. Предложен способ численного расчета размерности по Ляпунову по реализации одной переменной динамической системы. Отмечены равенство информационной и по Ляпунову размерностей, а также случай равенства этих размерностей ёмкости. Рассмотрены совместно энтропия распределения норм касательных векторов динамической системы и размерность по Ляпунову. Теоретические выкладки сопровождаются примером численного расчета размерности по Ляпунову и упомянутой энтропии для временных рядов геомагнитных Kp, Dst и AE индексов. У рассматриваемых индексов энтропия близка к максимальному значению, а это приводит к близости размерности по Ляпунову к ёмкости. Обнаружена переменная структура Dst индекса. На примере геомагнитных индексов подтверждается, что корреляционная размерность Грасбергера–Прокаччи меньше размерности по Ляпунову.

Ключевые слова: динамическая система, размерность по Ляпунову, многообразие, распределение, экспоненты Ляпунова, геомагнитные индексы.

ВВЕДЕНИЕ

Метрическая или фрактальная размерность по соответствующим определениям имеет два общих типа: размерности, зависящие от метрических свойств, и размерности, которые зависят от частоты или вероятности посещения траекторией динамической системы разных её областей [1–4]. При этом основной проблемой остается выбор той размерности, которая достаточно эффективно отражает структуру исследуемой динамической системы (заданной системой дифференциальных уравнений), например, на компактном гладком многообразии класса C^σ , $\sigma \geq 2$. Компактность многообразия гарантирует, что решения дифференциальных уравнений продолжаются неограниченно [5].

Описанная проблема возникает в задачах реконструкции динамических систем, при которой ее поведение соответствует реальным экспериментальным данным [6], а также в задачах прогнозирования временных рядов [7], анализа реконструированной системы и распространении найденных свойств на реальный процесс [5–7], оценивания размерности фазового пространства (количества экспонент Ляпунова) [8]. Понятие размерности необходимо для характеристики свойств динамической системы, которая показывает общую информацию, необходимую для указания позиции точки с заданной точностью, например на аттракторе [3]. Оценкой нижней границы количества переменных, определяющих динамику системы, является фрактальная размерность [3]. В статье [9] отмечается, что основными числами,

характеризующими «хаотическое» поведение, являются положительные экспоненты Ляпунова и наличие нецелочисленной метрической (фрактальной) размерности. Это понятие получило развитие и для оптического её измерения, используя аналоговые устройства [2], например, для некоторых простых задач, таких как двумерное отображение Пуанкаре [2]. В работе [2] описывается оптическая интерпретация корреляционного интеграла и предлагается схема экспериментальной установки.

Вычисление размерности по Ляпунову и исследование взаимосвязей с другими размерностями имеет важное прикладное применение для прогнозирования геомагнитных индексов, являющиеся неотъемлемой частью космической погоды [7].

Под метрической (фрактальной) размерностью обычно понимается размерность Хаусдорфа–Безиковича [1], основанная на покрытии некоторого исследуемого множества точек гиперкубами в фазовом пространстве, причем подсчет этих гиперкубов требует очень больших вычислительных затрат [1, 2]. Поэтому используют определения, упрощающие и допускающие численный расчет [1]. Оценкой сверху для хаусдорфовой размерности считается предельная ёмкость [1–2], которая является чисто метрической. В случае динамической системы, необходимо учитывать вероятностную меру, т.е. такую частоту, с которой фазовая траектория посещает различные части многообразия. Одной из таких оценок является информационная размерность [1–3, 8]. Грасбергер и Прокаччи показали, что размерность, названная корреляционной, учитывает совместную вероятность попадания пары точек в каждый элемент разбиения и должна быть численно меньше информационной размерности [8]. Обобщенная размерность, описываемая энтропией Реньи некоторого порядка, объединяет ёмкость, информационную и корреляционную размерности [1–2, 8, 10]. Также выделяется хаусдорфова размерность ядра, ёмкость ядра [1–2] и др. Одной из наиболее часто используемых при численном моделировании является размерность по Ляпунову [1, 3–4], предложенная Капланом и Йорки [3–4], которая устанавливает соотношение между фрактальной размерностью, информационной энтропией и экспонентами Ляпунова [1, 3]. Авторы настоящей работы придерживаются термина «экспоненты Ляпунова», чтобы отметить их значение среднего экспоненциального темпа дивергенции (конвергенции) соседних орбит в фазовом пространстве. Каплан и Йорки использовали числа Ляпунова, от которых можно перейти к экспонентам Ляпунова. Для регулярных аттракторов ляпуновская размерность совпадает с топологической размерностью Лебега [1].

В работе [3] показано, что информационная и Ляпунова размерности равны, причем возникает энтропия распределения вероятностей, количество которых равно размерности фазового пространства или количеству экспонент Ляпунова. С такими же свойствами энтропия рассматривалась в работах [6, 11]. Однако вопрос об этой энтропии и о размерности Ляпунова требует дальнейшего рассмотрения.

Цель работы — рассмотреть размерность по Ляпунову и энтропию распределения норм касательных векторов для динамических систем на компактном гладком многообразии и представить способ численного их расчета по дискретным временным рядам на примере геомагнитных индексов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть M — компактное гладкое многообразие класса C^σ , $\sigma \geq 2$ размерности фазового пространства d . Пусть имеется автономная динамическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, заданная векторным полем f на многообразии M :

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где $\dot{x} = dx/dt$, f и df/dx — определены и непрерывны на множестве $\{t \in [t_0, +\infty), x \in M\}$. Наложённые ограничения гарантируют существование и единственность решения $x(t)$ задачи Коши при любых начальных условиях. Многообразие M локально гомеоморфно некоторой области евклидова пространства \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ (размерность M принимается равной размерности пространства, $\dim M = d$), исходя из определения метрического пространства [12]. Пусть f — нелинейная вектор-функция класса гладкости C^σ , $\sigma \geq 2$.

Рассмотрим следующие траектории в d -мерном фазовом пространстве системы (1), начав с двух соседних начальных условий x_0 и $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta x_0$, которые эволюционируют во времени по следующим векторам $x(t)$ и $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$. Тогда расстояние между ними с использованием евклидовой нормы задается формулой $\|r(x_0, t)\| = \|\delta x(x_0, t)\| = (\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \dots + \delta x_d^2)^{1/2}$.

Пусть система (1) имеет нулевое решение $x(t) = 0$. Если f — вектор-функция класса гладкости C^σ , $\sigma \geq 2$, то уравнение (1) можно разложить в ряд Маклорена в некоторой окрестности начала координат и записать в следующем виде: $\dot{x} = Jx + \sum_{\zeta} \frac{1}{\zeta!} V_\zeta(x)$, $\zeta \geq 2$, где $J = df/dx|_{x=x_0}$ — матрица Якоби для f , а слагаемые $V_\zeta(x)$ описывают члены от второго и более высокого порядка малости, $\zeta \geq 2$. Эволюция касательного вектора в пространстве касательных на $x(t)$ представляется линеаризацией уравнения (1): $\dot{r}(x_0, t) = Jr(x_0, t)$.

Кроме того, имеется d ортонормальных векторов e_i на $r(x_0, t)$, $i = \overline{1, d}$. То есть имеется d норм касательных векторов $\|r(x_0^i, t)\|$, $i = \overline{1, d}$ [9], которые будем обозначать как $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1, d}$. Обозначим вероятностное распределение $p_i(\|r(x_0^i, t)\|) = \|r(x_0^i, t)\| / \sum_i \|r(x_0^i, t)\|$ этой нормы $\|r(x_0^i, t)\|$, $i = \overline{1, d}$, для каждого времени t , которое обозначим как p_i .

Определение 1. $E_p = -\sum_i p_i \ln p_i$, $i = \overline{1, d}$ [6], называется энтропией.

Определение 2. $\overline{E}_p = \lim_{t \rightarrow \infty} - \sum_i \overline{p}_i \ln \overline{p}_i$, где $\overline{p}_i = \frac{\|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}{\sum_i \|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}$, $i = \overline{1, d}$,

называется средней энтропией.

Ставятся следующие задачи.

1. Описать соотношение размерности по Ляпунову и средней энтропии распределения норм касательных векторов для линеаризованной части системы (1); рассмотреть предельность этой энтропии для случая постоянной, переменной, а также структурно переменной матрицы Якоби.

2. Представить алгоритм приближенного оценивания экспонент Ляпунова по временному ряду единственной переменной динамической системы.

3. На примере временных рядов геомагнитных Kp, Dst и AE индексов оценить корреляционную размерность Грасбергера–Прокаччи, размерность фазового пространства и энтропию \overline{E}_p и рассчитать размерность по Ляпунову.

РАЗМЕРНОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

В случае, когда система (1) — аттрактор, Каплан и Йорки предложили оценивать фрактальную размерность с помощью чисел Ляпунова, от которых можно перейти к экспонентам Ляпунова [2]. Представим упорядочение спектра экспонент Ляпунова в порядке их убывания: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, тогда ляпуновская размерность Каплана–Йорки приобретает следующий вид [1–2]:

$$D_L = \zeta + \frac{1}{\lambda_{\zeta+1}} \sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i,$$

где ζ определяется из условий $\sum_{i=1}^{\zeta} \lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\zeta+1} \lambda_i < 0$.

Отметим, что ζ — это количество первых неотрицательных экспонент Ляпунова в спектре: если экспоненты Ляпунова все отрицательны, то $\zeta = 0$ [1–2].

В работе [3] показано, что ляпуновская размерность равна информационной и определяется для двумерного случая следующим выражением:

$$D_I = D_L = 1 + \frac{H(\alpha)}{\alpha \ln(1/\lambda_1) + \beta \ln(1/\lambda_2)}, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad \alpha > 0.$$

Это равенство также отмечается в работе [2], причем энтропия $H(\alpha)$ такая, что количество вероятностей в их распределении равно размерности фазового пространства или количеству экспонент Ляпунова.

$$\text{Если } \lambda_1 = \lambda_2, \text{ то } \alpha = \beta = 0.5, \quad D_I = D_L = 1 + \frac{H(\alpha)}{p_1 \ln(1/\lambda_1) + p_2 \ln(1/\lambda_2)};$$

$$D_I = D_L = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/\lambda)} = D_C. \text{ Таким образом, для данного случая имеется}$$

равенство $D_I = D_L = D_C$, где D_C — ёмкость; D_I — информационная размерность [2–3].

Исследования информационной и ляпуновской размерностей в работе [3] важны и особенно привлекают внимание их равенство и появление энтропии распределения вероятностей со свойствами, описанными в работах [6, 11]. По-видимому, энтропия $H(\alpha)$ может быть представлена как средняя энтропия распределения норм касательных векторов $\overline{E_p}$, поэтому последняя представляет интерес для анализа, поскольку обладает экстремальными свойствами [6, 11].

ОБ ЭНТРОПИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМ КАСАТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ И ЕЕ ПРЕДЕЛЬНОСТИ

Лемма 1. Если J — ненулевая постоянная матрица Якоби и $d \geq 2$, то $\|r_i^t\|$, $i = \overline{1, d}$, имеет распределение, максимизирующее функционал

$$\Phi_p = -\sum_i p_i \ln p_i + \beta \sum_i p_i \tilde{l}_i^t + \mu \sum_i p_i \ln \|r_i^0\| + \gamma \sum_i p_i \rightarrow \max, \quad (2)$$

где β, μ, γ — множители Эйлера–Лагранжа; $\beta \tilde{l}_i^t$ — экспоненциальный темп дивергенции (конвергенции) для каждого момента t (отметим, что экспоненты Ляпунова λ_i означают средний экспоненциальный темп дивергенции); начальные условия $Con_p = \sum_i p_i \ln \|r_i^0\|$ и условие нормирования вероятностей p_i , $Nor_p = \sum_i p_i$.

Доказательство приводится в работе [6].

Распределение вероятностей, удовлетворяющее функционалу (2) имеет вид

$$p_i = \frac{\|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t)}{\sum_i \|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t)}.$$

Теорема 1. Если экспоненциальный темп дивергенции (конвергенции) равен $R_p = \beta \tilde{l}_i^t t$ в (2) и спектр экспонент Ляпунова упорядочивается в порядке их убывания: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, то $\beta \tilde{l}_i^t = \lambda_i$, а $\overline{E_p} = -\sum_i \overline{p_i} \ln \overline{p_i} = 0$, $p_1 = 1$, $p_i = 0$, $i = \overline{2, d}$, $d \geq 2$.

Доказательство. Если $R_p = \beta \tilde{l}_i^t t$, то из условия максимизации функционала (2) $d\Phi_p/dp = 0$ и с применением условия нормирования $Nor_p = \sum_i p_i = 1$, $i = \overline{1, d}$, функция распределения примет вид:

$$p_i(t) = \frac{\|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t t)}{\sum_i \|r_i^0\|^\mu \exp(\beta \tilde{l}_i^t t)}. \text{ Выразим } \beta \tilde{l}_i^t \text{ через другие переменные из этого}$$

распределения: при $\mu=1$, $\|r_i^t\| = \|r_i^0\| \exp(\beta \tilde{l}_i^t t)$, тогда $\beta \tilde{l}_i^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i^t\|}{\|r_i^0\|}$. По-

этому $\beta \tilde{l}_i^t$ имеет определение экспонент Ляпунова при $R_p = \beta \tilde{l}_i^t t$, т.е. $\beta \tilde{l}_i^t = \lambda_i$, $i = \overline{1, d}$.

$$\text{Найдем предел } p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|r_1^0\|^\mu \exp(\lambda_1 t)}{\sum_i \|r_i^0\|^\mu \exp(\lambda_i t)} = [\exp(\lambda_1 t)] = \frac{\|r_1^0\|^\mu}{[\|r_1^0\|^\mu + \dots + 0]} = 1.$$

Теперь очевидно, что $p_i = 0$, $i = \overline{2, d}$, $d \geq 2$, учитывая упорядочение $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$. При таких значениях распределения $\overline{E_p} = 0$.

Лемма 2. Если J — ненулевая постоянная матрица Якоби, то имеется следующий предел средней энтропии $\overline{E_p} = \lim_{t \rightarrow \infty} - \sum_i \overline{p}_i \ln \overline{p}_i$, $i = \overline{1, d}$, где

$$\overline{p}_i = \frac{\|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}{\sum_i \|r_i^0\| \exp(\lambda_i)}; \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|r_i^t\|}{\|r_i^0\|}, \text{ где } \lambda_i \text{ и } \overline{p}_i \text{ — предельные величины.}$$

Доказательство очевидно.

Вероятности \overline{p}_i , $i = \overline{1, d}$ неотрицательны, их сумма равна $\sum_i \overline{p}_i = 1$. Для

каждого \overline{p}_i , $i = \overline{1, d}$, имеется предел, поэтому существует предел $\overline{E_p} = \lim_{t \rightarrow \infty} - \sum_i \overline{p}_i \ln \overline{p}_i$, $i = \overline{1, d}$.

В случае переменной матрицы Якоби $J(t)$ также существует предел энтропии $\overline{E_p}$. При структурном изменении матрицы Якоби энтропия $\overline{E_p}$ может иметь локальные максимумы и минимумы, сигнализирующие об изменении структуры.

ОЦЕНИВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ ПО ВРЕМЕННОМУ РЯДУ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭКСПОНЕНТ ЛЯПУНОВА

Представляется метод оценивания локальной матрицы Якоби по временному ряду одной переменной динамической системы, а также вычисляется спектр экспонент Ляпунова.

В работе [9] приводится метод оценивания матрицы Якоби по временному ряду, где орбитальная точка фактически выбирается произвольно. Предлагаем в качестве орбитальной точки находить близкую к равновесной или часто встречающуюся.

Пусть $\{y_j\}, j = \overline{1, N}$ обозначает дискретный временной ряд в некоторый численно измеренный интервал времени Δt , т.е. $y_j = y(t_0 + (j-1)\Delta t)$, $j = \overline{1, N}$ [9], для некоторой нелинейной динамической системы $\dot{y} = F(y)$, правая часть которой представляет собой нелинейные вектор-функции.

Рассмотрим небольшой шар радиусом ξ , центрированный от орбитальной точки y_j [9], или часто встречающейся, а также найдем любое множество точек $\{y_{k_s}\}, s = \overline{1, n}$, заключенных в этом шаре, т.е.

$$\{dev_y^s\} = \{y_{k_s} - y_j \mid \|y_{k_s} - y_j\| \leq \xi\}, \quad (3)$$

где dev^s — вектор разницы, определенной в (3), а $\|y_{k_s} - y_j\|$ — евклидова норма разницы. Поскольку орбитальная точка y_j наиболее часто встречающаяся, то это обеспечит наибольшее количество соседних точек, удовлетворяющих условию (3). После эволюции временного интервала $\tau = m\Delta t$, орбитальная точка y_j стремится к y_{j+m} , а вектор разницы отображается в такой вектор:

$$\{dev_z^s\} = \{y_{k_s+m} - y_{j+m} \mid \|y_{k_s} - y_j\| \leq \xi\}.$$

Если радиус ξ — достаточно малый для векторов $\{dev_y^s\}$ и $\{dev_z^s\}$, то это дает хорошую аппроксимацию векторов касательных в пространстве касательных [9], а эволюция $\{dev_y^s\}$ к $\{dev_z^s\}$ может быть представлена матрицей Jac_j [9]:

$$dev_z^i = Jac_j dev_y^s,$$

где Jac_j — локальная матрица Якоби.

Используя алгоритм наименьшей квадратичной ошибки, как в работе [9], можно получить:

$$\min_{Jac_j} SE = \min_{Jac_j} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \|dev_z^s - Jac_j dev_y^s\|^2.$$

Оценив матрицу Якоби, можно вычислить экспоненты Ляпунова:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=1}^n \ln \|Jac_j e_i^j\|, \quad i = \overline{1, d},$$

где d — размерность фазового пространства; $\{e_i^j\}$ — множество базисных векторов пространства касательных y_j . По теореме Такенса [13], предварительно определив размерность пространства вложений d (например, с помощью алгоритма Грасбергера и Прокаччи [1]) и временную задержку t_d (например, используя автокорреляционную функцию), можно реконструировать по временному ряду одной переменной некоторой системы в d -мерном фазовом пространстве: $y_i = [x(i\tau), \dots, x(i\tau + (d-1)t_d)]$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ НА ПРИМЕРЕ ГЕОМАГНИТНЫХ ИНДЕКСОВ

Рассмотрим пример, когда векторное поле системы неизвестно, а имеется лишь временной ряд одной её переменной. Предлагается применить метод вычисления экспонент Ляпунова по временному ряду, описанный выше, а также рассчитать размерность Ляпунова и корреляционную по Грасбергеру и Прокаччи [8]. Размерность фазового пространства оценивается с использованием корреляционной размерности. В ближайшей точке насыщения корреляционной размерности выбирается размерность фазового пространства.

Возьмем временные ряды Kp, Dst и AE индексов в базе данных OMNI2 [14] (за период 07.2008 – 05.2016). Предполагается, что шумовые эффекты сведены к минимуму, поэтому шум пренебрегается. Результаты расчетов приведены ниже, причем программная реализация выполнена в MatLab 2015.

Для данных временных рядов корреляционная размерность Kp, Dst и AE индексов оценена в 6,01, 4,08 и 6,39 соответственно, а размерность фазового пространства равна 8, 6 и 10 соответственно (рис. 1). Подтверждается неравенство $D_{GP} < D_L$ (рис. 2), где D_{GP} — корреляционная размерность Грасбергера и Прокаччи.

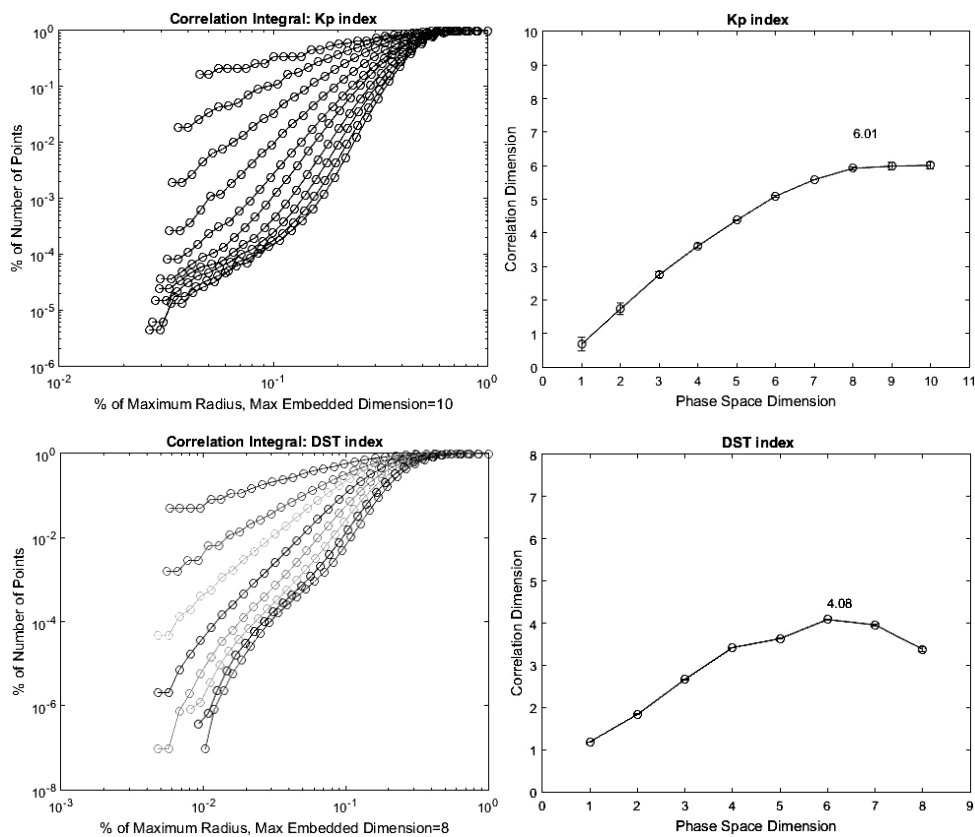


Рис. 1. Корреляционная размерность для геомагнитных индексов: а — корреляционные интегралы (Kp, Dst и AE индексов); б — оценивание размерности фазового пространства Kp, Dst и AE индексов (см. также с. 130)

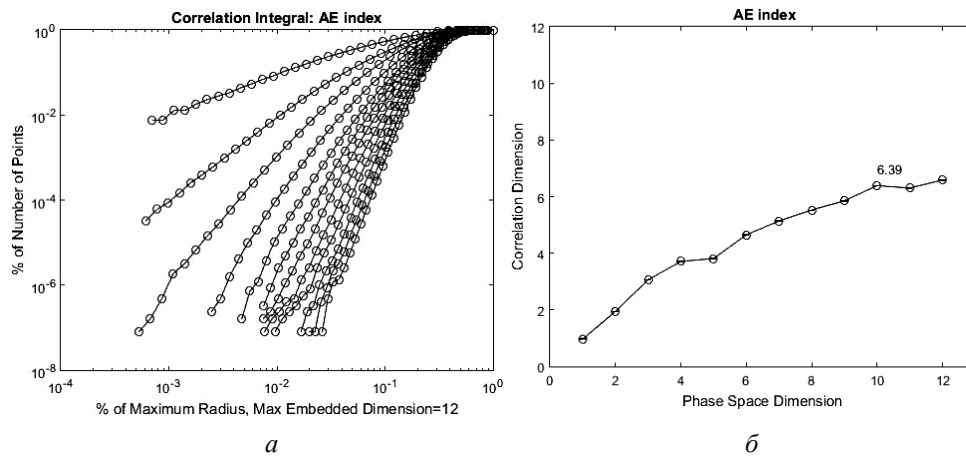


Рис. 1. Окончание

На рис. 2 отмечается энтропия Колмогорова (K) как сумма неотрицательных показателей Ляпунова, оцененных по методу, описанному выше.

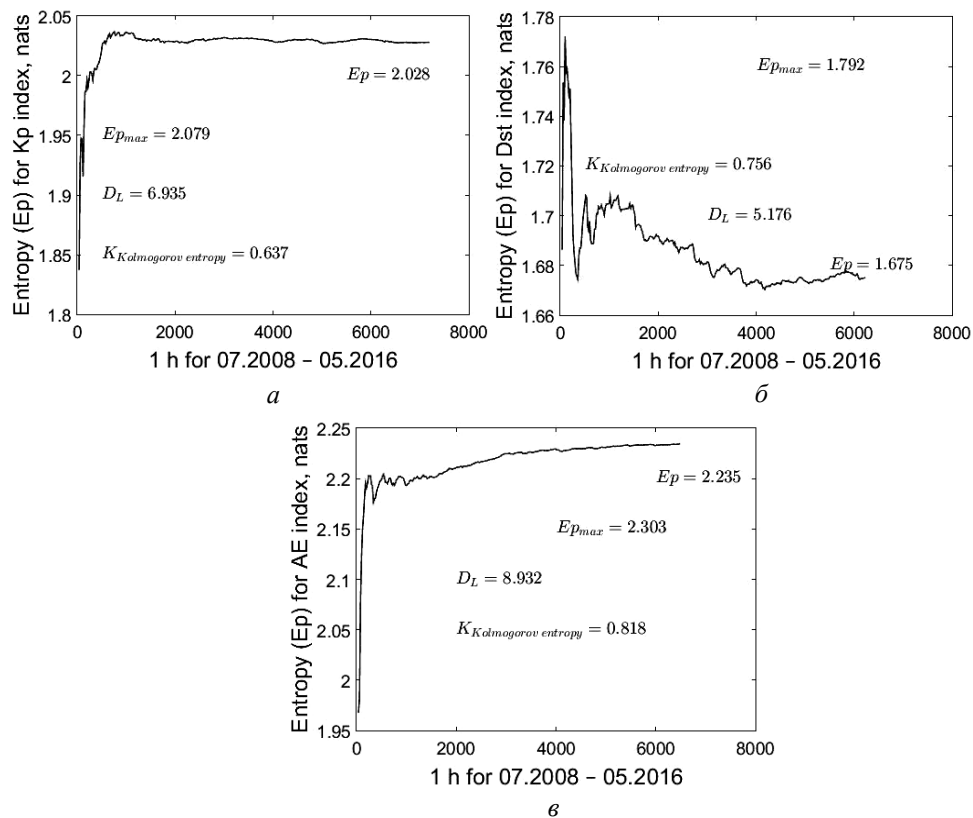


Рис. 2. Размерность по Ляпунову и энтропия $\overline{E_p}$ для временных рядов геомагнитных индексов (Kp, Dst и AE): а — Kp индекс; б — Dst индекс; в — AE индекс

Оцененная энтропия $\overline{E_p}$ близка к максимальному значению для всех рассматриваемых индексов за период с июля 2008 по май 2016 г., т.е. для Kp

индекса: $\overline{E_{p_{\max}}} = \ln(8) \approx 2,079$, Dst индекса: $\overline{E_{p_{\max}}} = \ln(6) \approx 1,792$, АЕ индекса: $\overline{E_{p_{\max}}} = \ln(10) \approx 2,303$, поэтому рассчитанная размерность Ляпунова должна быть близка к емкости.

ВЫВОДЫ

В работе обосновано совместное рассмотрение размерности по Ляпунову и энтропии распределения норм касательных векторов. Доказывается предельность этой энтропии для конечномерных динамических систем с постоянной матрицей Якоби, а также условие равенства энтропии нулю. Приводится пример численного расчета размерности по Ляпунову и упомянутой энтропии для временных рядов геомагнитных Кр, Dst и АЕ индексов. Отмечается, что у рассматриваемых индексов энтропия $\overline{E_p}$ близка к максимальному значению, а это приводит к близости размерности Ляпунова к емкости. Проведение вычисления размерности по Ляпунову и экспонент Ляпунова необходимо для реконструкции локально топологически эквивалентных динамических систем по временному ряду, а также исследования хаотической динамики. У Dst индекса средняя энтропия не стремится к пределу, что свидетельствует о переменной структуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анищенко В.С. Лекции по нелинейной динамике / В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова. — М.: Ин-т компьютер. исследований, 2011. — 516 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания: Водный курс для научных работников и инженеров / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 312 с.
3. Farmer J.D. The dimension of chaotic attractors / J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke // *Physica 7D*. — 1983. — P. 153–180.
4. Frederickson P. The Liapunov Dimension of Strange Attractors / P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, J.A. Yorke // *Journal of differential equations*. — 49. — 1983. — P. 185–207.
5. Arnold V.I. Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations / V.I. Arnold. — New York: Springer, 2011. — 351 p.
6. Иванов С.М. Виявлення екстремальних властивостей локально дифеоморфних систем / С.М. Иванов // *Вісн. Київ. ун-ту. Серія. Фізико-математичні науки*. — 2017. — №4. — С. 83–86.
7. Иванов С.М. Прогнозування геомагнітного Кр індексу за допомогою дискретної білінійної моделі / С.М. Иванов, В.О. Яценко // *Вісн. Київ. ун-ту. — Серія. Фізико-математичні науки*. — 2016. — №3. — С. 65–68.
8. Grassberger P. Characterization of strange attractors / P. Grassberger, I. Procaccia // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — 50. — P. 346–349.
9. Sano M. Measurement of Lyapunov spectrum from a chaotic time series / M. Sano, Y. Sawada // *Phys. Rev. Lett.* — 1985. — N 55. — P. 1082–1085.

10. *Renyi A.* On measures of entropy and information / A. Renyi // In Proc. of the 4th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Prob. — Univ. of Calif. Press, 1961. — Vol. 1. — P. 547–561.
11. *Іванов С.М.* Декомпозиція експонент Ляпунова хаотичних динамічних систем / С.М. Іванов // Динам. syst. model. and stab. investig.: inter. conf., 24–26 May 2017, Kyiv, Ukraine: abstracts. — Kyiv, 2017. — P. 87.
12. *Андреев Г.Н.* Тензорное исчисление: учеб. пособие / Г.И. Андреев. — М.: МГИУ, 2008. — 184 с.
13. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence / F. Takens // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics. — 1981. — N 989. — P. 366–381.
14. *GSFC/SPDF OMNIWeb* [Электронный ресурс]. — Available at: [http:// omniweb.gsfc.nasa.gov/](http://omniweb.gsfc.nasa.gov/)

Поступила 30.07.2018

АДАПТИВНАЯ ЛАЗЕРНАЯ ТЕРАПИЯ

Д.А. БОРОЗЕНЕЦ

Аннотация. Описан метод и прибор, способный повысить качество проводимых лазеротерапевтических процедур, на примере восстановления организма после стресса. Разработана методика расчёта оптимальной программы лечения. Эксперимент проведен на 13 здоровых добровольцах возрастом 20–55 лет. Оценены содержание кислорода в крови, динамика клеточного иммунитета и переход геля в золь во время неблагоприятных для организма изменений в окружающей среде. Тесты проведены в различных режимах от непрерывной подачи излучения до импульсного с различной частотой, в итоге результат совпал с прогнозируемым. Для лиц среднего возраста, над которыми проведены эксперименты, наблюдалась положительная динамика восстановления клеточного иммунитета, давления и содержания кислорода в крови при регулярном проведении процедур, хотя последний имел временный эффект. Изложены возможности системы и предложены методики усовершенствования метода и прибора.

Ключевые слова: пульсовая волна, адаптивная лазерная терапия, освечение крови.

ВВЕДЕНИЕ

Лазерная терапия имеет огромный потенциал в излечении и предупреждении воспалительных процессов и снижении уровня стресса, а также стимулирует иммунитет, активизирует эндокринные органы, способствует регенеративным процессам в организме. При этом лазерная терапия является простой и доступной процедурой из-за низкой стоимости аппаратов и их обслуживания.

Она способна не только снизить, но и в ряде случаев заменить медикаментозную терапию. В будущем возможен симбиоз лазерной терапии с другими методиками, такими как радиология, за счет схожести принципов воздействия [1].

Как и при медикаментозной терапии, устранение симптомов с помощью лазерной терапии не гарантирует того, что лечение будет иметь системный характер и нормализует работу целевого органа.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Довольно распространённым методом лазерной терапии является внутривенное лазерное освечение крови (ВЛОК), заявленный рядом авторов в качестве универсального и эффективного. Помимо «классического» варианта ВЛОК с использованием красного лазера (630 нм), всё более широко применяется методика лазерного ультрафиолетового освечения крови (ЛУФОК) — длина волны 365–400 нм, и ВЛОК-525 в зелёной области спек-

тра — длина волны 525 нм [2]. Однако параметры лазерной терапии могут оказывать различный эффект, вплоть до его полного отсутствия для различных групп пациентов. И даже для одного и того же пациента процедура проявляет разную степень эффективности в разное время суток и времени года. При использовании постоянных частот лазерного спектра случается, что излучение не способно воздействовать на целевой орган в полной мере из-за периодических процессов в организме, таких как пульс, дыхание, тремор [3].

Врачи не имеют четкой информации о том, какая именно часть лазерной энергии достигает целевой области, как она воздействует на соседние ткани, теряются ли свойства лучей, такие как монохроматичность, поляризация и когерентность [4, 5], а также нет четкого представления о механизме лечения каждого конкретного заболевания, необходимом спектре излучения, невозможности оценивать терапевтический эффект в режиме реального времени [6]. В итоге это делает невозможным подбор индивидуальной программы для каждого отдельного пациента, что существенно снижает эффективность лечения. Таким образом, проблема дозиметрии и выбора оптимальных параметров лазеротерапии является очень важной при проведении процедур лазерной терапии. Это обуславливает необходимость ввода биологической обратной связи [7, 8], которая позволит учесть изменения в организме во время проведения процедур.

ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

Разработать систему, которая позволит осуществлять автоматическую синхронизацию лазерной установки с ритмами пациента при изменении кровоснабжения тканей в режиме реального времени. Сконструировать прибор, способный реагировать на изменения показателей крови и на их основе динамически изменять программу лечения и оценивать ее эффективность. Сформировать базу оптимальных параметров для проведения процедур лазерной терапии на основе полученных результатов.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Для изучения этой проблемы был разработан прибор, условно состоящий из трех частей:

- 1) модуля автоматического измерения и регистрации пульсовой волны (рис. 1);
- 2) модуля обработки полученного сигнала и составления программы лечения на основе разбиения сигнала R-R на интервалы с их последующим анализом;
- 3) модуля управления статическими параметрами.

Для регистрации пульсовой волны использовался отражательный датчик HLC1395-002, неинвертирующий усилитель, собран на LM358, модулятор сигнала на основе транзистора 74НСТ14D, управляемого мультивибратором на триггере Шмидта для связи с персональным компьютером.

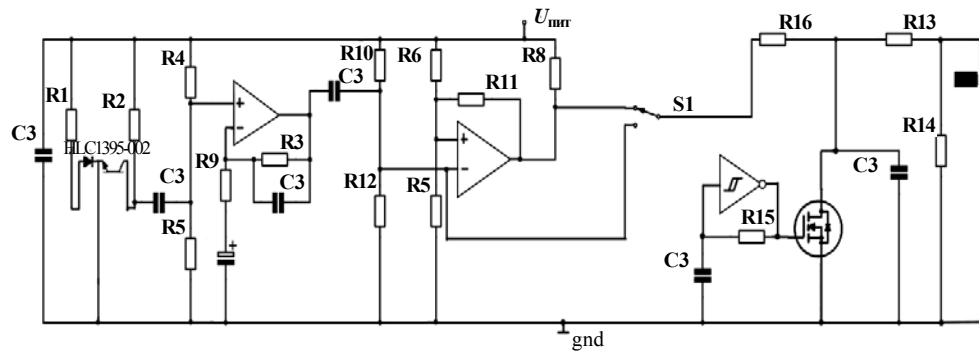


Рис. 1. Схема регистратора пульсовой волны

Полосовой фильтр обеспечивает пропускание от низких ($\sim 0,2$ Гц) до высоких (~ 26 Гц) частот.

Для реализации модуля управления и модуля генерации программы лечения был выбран микроконтроллер Atmega328 на базе Arduino, который может подключаться к компьютеру с помощью порта USB или аудиовхода микрофона.

Регистрация проводилась методом инфракрасной плетизмографии на отражение и просвет в конечностях.

Анализ результатов и их классификация проводились с помощью алгоритмов динамического программирования (DTW) и непрерывного вейвлет-преобразования (CWT) на трех основных паттернах (рис. 2):

- 1) пульсовая волна в норме;
- 2) высокого периферического сопротивления;
- 3) низкого периферического сопротивления.

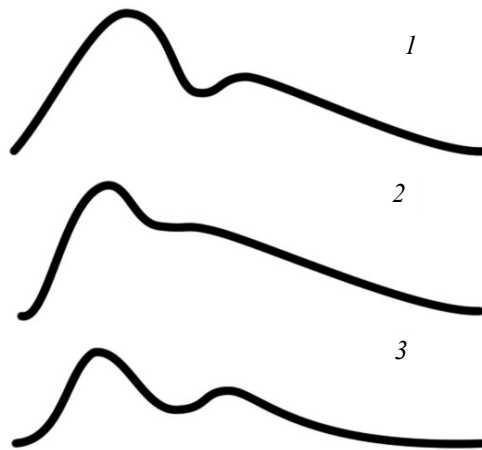


Рис. 2. Типы паттернов: 1 — пульсовая волна в норме; 2 — высокое периферическое сопротивление; 3 — низкое периферическое сопротивление

Исследования проводили на 13 здоровых добровольцах (6 женщин и 7 мужчин в возрасте от 20 до 55 лет) в течение одного месяца. Для выявления недельных различий результатов проводились еженедельные процедуры сеансами по 20 мин и соответствующими максимумами мощностей $0,5 \text{ мВт/см}^2$, 1 мВт/см^2 , 5 мВт/см^2 [9] с учетом количества крови в участке в определенный момент времени и использованием двух основных методик

лазерной терапии и двух таких же с добавлением обратной связи по пульсовой волне.

На протяжении эксперимента оценивались: содержание кислорода в крови при помощи инфракрасного и ультрафиолетового датчика на отражение; реакция иммунитета оценивалась с помощью дифференциальной термометрии при отсутствии каких-либо симптомов болезни, переход геля в золь методом скоростной киносъемки на лазерном проекционном микроскопе. Помимо этого, раз в неделю проводился общий анализ крови. Параллельно регистрировались источники неблагоприятных эффектов, таких как резкая смена погодных условий, эмоциональный стресс и пр. Отмечалось наличие или отсутствие корреляции с последующими сеансами лазерной терапии на протяжении трех дней с оценкой эффекта.

Разработанный метод позволяет минимизировать рассеивание лазерной энергии на соседние ткани путем синхронизации интенсивности лазерного излучения с количеством крови в целевом участке и позволяет внедрить собственную логику в процесс лечения, что повышает качество исследований влияния конкретно сконфигурированных лазерных установок на различные ткани человеческого организма. К сожалению, процесс таких исследований занимает длительное время, так как нет лазеров с управляемой спектральной характеристикой. Отсутствие лазерных установок с настраиваемыми спектральными характеристиками восполняется использованием нескольких установок.

Зарегистрированный сигнал и его характеристики совпадают с сигналом, полученным при кардиографическом исследовании, за исключением случаев, когда пациентом были произведены механические движения, наблюдается некоторое смещение во времени Δt , которое объясняется временем прохождения пульсовой волны до целевой точки (рис. 3).

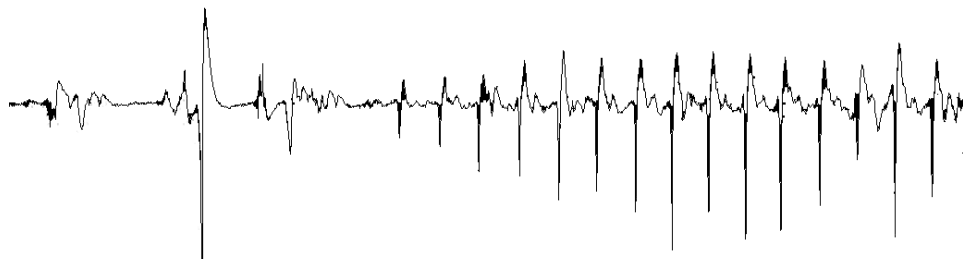


Рис. 3. Зарегистрированный сигнал пульсовой волны длительностью 25 с

Модуль обработки сигнала распознает корректный тип пульсовой волны в 89% случаев без ошибок 2-го рода (когда сигнал, не принадлежащий к определенному классу, классифицируется как принадлежащий). Это является отличным результатом для систем, в которых пульсовая волна несет корректировочную функцию. В будущем возможно улучшение данного модуля в аппаратной части путем увеличения количества различных датчиков и замены микроконтроллера на более продуктивный. В программном обеспечении можно расширять базы паттернов и добавлять новые методы классификации и фильтрации.

Минимальная частота допустимых импульсов — 10 кГц, поскольку более низкая частота способна совпадать с ритмами внутриклеточных процессов и метаболизма, вызывая нарушение временного согласования [10]. Оптимальная частота импульсов составила 23 кГц; она не воспринимается клетками как дискретные и соответствует максимуму образования синглетного кислорода. Снижение концентрации кальция в цитоплазме при этом составляет менее 1мкМ и усиливает энергетический обмен в клетке.

При проведении сеансов лазерной терапии с использованием инфракрасной лазерной установки с биосинхронизацией непосредственно после существенных изменений эмоционального состояния человека наблюдаются положительные изменения в организме, нормализуются давление, содержание кислорода в крови и клеточный иммунитет. Данный метод имеет преимущество перед классическими методами. Особенно это заметно для пожилых пациентов, в то время как эффект менее значителен для молодых во всех случаях, описанных в табл. 1.

Таблица 1. Время нормализации параметров

Параметр	Время, за которое показатели приобретают норму, ч		
	Без лазерной терапии	Классический подход	С использованием биосинхронизации
Давление	90	78	65
Содержание кислорода	30	9	7
Клеточный иммунитет	112	90	75

Следует отметить, что нормализация кислорода имеет кратковременный характер, и уже на следующий день отмечалось снижение сатурации на 1–1,5%, зарегистрированное до стресса. Замечена положительная динамика улучшения клеточного иммунитета при систематическом проведении лазеротерапевтических процедур у лиц, у которых наблюдалось его снижение. Отмечены незначительные колебания во время восстановительного процесса, характер которых установить не удалось.

Таким образом, разработаны параметры лазерной терапии для профилактики стрессов на основе следующих критериев.

1. Максимальная степень разжижения цитоплазмы в компартментах клетки, оценивая по увеличению амплитуды агрегации-деагрегации внутриклеточных микроструктур.
2. Увеличение и восстановление спектра ритмов микроциркуляции.
3. Повышение клеточного иммунитета по показателям дифференциальной термометрии между зонами подключичной впадины и проекцией тимуса.
4. Нормализация активности супероксиддисмутазы (СОД) эритроцитов крови.
5. Улучшение вегетативного статуса нормализации отношения частоты пульса к частоте дыхания.

Терапия проходила в четырех основных режимах: статическом непрерывном, статическом импульсном, динамическом непрерывном, динамическом импульсном (табл. 2).

Таблица 2. Сравнение эффектов лазерного облучения разными методиками

Критерии оптимальности	Статистически непрерывный	Статистически импульсный	Динамически непрерывный	Динамически импульсный
	Эффект лазерной терапии			
Переход части геля в золь	–	+	+	++
Активность СОД	+	+	+	+
Уровень микроциркуляции	–	++	++	++
Продукция Т-лимфоцитов	–	+	++	++
Нормализация частоты пульса	+	++	++	++
Нормализация ритмов фрактальной размерности частоты пульса	++	+	–	+

Результат обусловлен тем, что в классическом подходе не учтены соотношение поглощения отражение и рассеивания лазерной энергии, индивидуальная дозировка, мощность и спектр излучения; не контролируется его состояние и ответная реакция организма.

ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШЕГО РАЗВИТИЯ

Разработан аппарат адаптивной лазерной терапии, который синхронизируется пульсовой волной, считываемой в режиме реального времени. Это открывает возможности дальнейших исследований в этой области. Предложены альтернативные методики проведения терапевтических сеансов, которые имеют преимущество перед классическим. В дальнейшем возможны усовершенствование аппарата и применение его в других отраслях медицины.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Москвин С.В. Основы лазерной терапии / С.В. Москвин. — Серия «Эффективная лазерная терапия». — Т. 1. — Тверь: Изд-во «Триада», 2015. — 600 с.
2. Москвин С.В. Эффективность лазерной терапии / С.В. Москвин. — Серия «Эффективная лазерная терапия». — Т. 2. — Тверь: Изд-во «Триада», 2014. — 896 с.

3. Загускин С.Л. Биоритмологическое биоуправление / С.Л. Загускин // В кн.: Хронобиология и хрономедицина / Под ред. Ф.И. Комарова и С.И. Рапопорта. — М.: Триада-Х, 2012. — С. 317–328.
4. Загускин С.Л. Критерии оптимальности параметров лазерной терапии / С.Л. Загускин, С.С Загускина // Материалы Междунар. конф. «Лазерные и информационные технологии в медицине XXI века», II часть. — СПб.: МГУ им. И.П.Павлова. — 2014. — С. 349–350.
5. Шалобаев Е.В. Проблемы создания биологических обратных связей и их применение в сканирующих лазерных медицинских установках / Е.В. Шалобаев, Г.Н. Юркова, Ю.С. Монахов и др. // Известия ОрелГТУ. Серия. Машиностроение. Приборостроение. — 2011. — № 4. — С. 94–97.
6. Загускин С. Ритмы клетки и здоровье человека / С. Загускин. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010.
7. Загускин С.Л. Лазерная и биоуправляемая квантовая терапия / С.Л. Загускин, С.С. Загускина. — М.: Квантовая медицина, 2005. — 220 с.
8. Шалобаев Е.В. Проблемы лазерной терапии / Е.В. Шалобаев, А.В. Дунаев, О.Д. Козырева // Сб. тр. II Всерос. конгресса молодых ученых. — СПб.: НИУ ИТМО. — 2013. — С. 66–67.
9. Дунаев А.В. Хронодиагностика с целью индивидуального дозирования лазерной терапии / А.В. Дунаев, С.Л. Загускин // Современные информационные технологии в диагностических исследованиях: Сб. докл. Междунар. науч.-практ. конф. (Днепропетровск, 15 марта 2002 г.). — Днепропетровск: ПОРОГИ, 2010. — С. 113–116.
10. Шалобаев Е.В. Применение биологических обратных связей и средств томографии в лазерных сканирующих физиотерапевтических установках / Е.В. Шалобаев, Н.В. Леонтьева, Ю.С. Монахов и др. // Технологии живых систем. — 2010. — № 4. — С. 66–72.

Поступила 19.07.2018

ПРОГРЕСИВНІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
ВИСОКОПРОДУКТИВНІ КОМП'ЮТЕРНІ
СИСТЕМИ

PROGRESSIVE INFORMATION TECHNOLOGIES,
HIGH-EFFICIENCY COMPUTER SYSTEMS

УДК 004.272

Дистанційний моніторинг пацієнта на основі концепції агент–група–роль / Аксак Н.Г., Корабльов М.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 7–18.

Розроблено мультиагентну систему віддаленого оцінювання стану здоров'я людини на прикладі моніторингу артеріального тиску пацієнта. Система дозволяє екстренно реагувати на критичні зміни стану здоров'я з метою надання швидкої медичної допомоги. Запропоновано метод координації агентів у системі оцінювання стану людини, який дозволяє для кожного зареєстрованого пацієнта розподілити поставлені завдання між агентами для своєчасного виявлення і усунення критичних станів здоров'я пацієнта. Для опису мультиагентної системи використано концепцію агент–група–роль, яка дала змогу розробити структуру адаптивної організаційної моделі процесу віддаленого моніторингу. Аналіз даних, отриманих під час спостереження за станом здоров'я пацієнта, виконано за допомогою програмного моделювання Leadsto Editor. Рис.: 5. Бібліогр.: 9 назв.

UDC 004.272

Remote patient monitoring based on the agent–group–role concept / Axak N.G., Korablyov M.M. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 7–18.

A multi-agent system for remote assessment of a person's health status was developed using the example of monitoring the patient's blood pressure. The system allows us to respond urgently to a critical change in patient's health status in order to provide emergency medical care. A method for coordinating agents in the system of assessing the person's condition is proposed, which allows for each registered patient to distribute tasks among agents for the timely detection and elimination of critical health conditions of the patient. To describe the multi-agent system, the Agent-Group-Role concept was used, which allowed the development of an adaptive organizational model for the remote monitoring process. The analysis of the data obtained during the monitoring of the patient's health was carried out using the Leadsto Editor software modeling. Figs.: 5. Refs: 9 titles.

УДК 519.004.942

Аналіз гравітаційної хвилі Місяця та глобальної температури Землі: вплив тенденцій за часом та циклічних змін / Мацукі Й., Бідюк П.І. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 19–30.

Перевірено вплив гравітаційної хвилі на процес глобального потепління на Землі та ефекти від тенденцій за часом та циклічних змін відстані між Місяцем та Землею. У дослідженні [1] виявлено, що гравітаційна хвиля Місяця могла б вплинути на процес глобального потепління на Землі; крім того, зроблено висновок, що циклічний рух Місяця навколо Землі необхідно дослідити більш детально, оскільки він забезпечує унікальну схему розподілу даних для емпіричного аналізу, впливаючи водночас як на глобальну температуру, так і на глобальне збільшення вуглекислого газу лінійно у часових рядах. Додано контрольні бінарні змінні, що симулюють тенденції за часом та циклічні зміни. У результаті підтверджено, що гравітаційна хвиля Місяця має важливе значення у процесі підвищення глобальної температури на Землі. Рис.: 5. Табл.: 15. Бібліогр.: 4 назв.

УДК 519.004.942

Анализ гравитационной волны Луны и глобальной температуры Земли: влияние тенденций по времени и циклических изменений / Мацуки Й., Бидюк П.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 19–30.

Проверено влияние гравитационной волны на процесс глобального потепления на Земле и эффекты от тенденций по времени и циклических изменений расстояния между Луной и Землей. В исследовании [1] обнаружено, что гравитационная волна Луны могла бы повлиять на процесс глобального потепления на Земле; кроме того, сделан вывод, что циклическое движение Луны вокруг Земли необходимо исследовать более подробно, поскольку оно обеспечивает уникальную схему распределения данных для эмпирического анализа, влияя в то же время как на глобальную температуру, так и на глобальное увеличение углекислого газа линейно во временных рядах. Добавлены контрольные бинарные переменные, симулирующие тенденции по времени и циклические изменения. В результате подтверждено, что гравитационное волне Луны имеет важное значение в процессе повышения глобальной температуры на Земле. Рис.: 5. Табл.: 15. Библиогр.: 4 назв.

УДК 621.9

Автоматизация этапов проектирования компоновальной схемы производной линии технологического парка / Мамедов Дж.Ф., Абдуллаев Г.С., Генжелієва Г.Г., Насирова Е.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 31–37.

У результаті аналізу етапів розроблення компоновальної схеми технологічних одиниць у виробничій лінії технологічного парку залежно від специфіки підприємства поетапно визначено обсяг вхідної інформації та кількість проектних процедур для автоматизованого проектування. Для вибору кращих варіантів компоновки виробничих ліній технологічного парку запропоновано алгоритм з допустимими критеріями обмежень робочих зон і безпеки руху технічних одиниць виробничої лінії. Розроблено програмне забезпечення для вибору компонентів FMS з технологічного парку. Рис.: 2. Бібліогр.: 9 назв.

UDC 621.9

Automation of the stages of designing the layout diagram of the production line for technopark / Mamedov J.F., Abdullaev G.S., Gengeliyeva G.G., Nasirova E.A. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 31–37.

As a result of the analysis of the stages for the development of the layout diagram of technological units in the production line of the technological park, depending on the specifics of the enterprise, a number of input information and design procedures for automated design were determined in stages. In order to choose the best layout variants of production lines for the technological park, an algorithm was proposed with allowable criteria for work zone restrictions and traffic safety of the technical units of the production line. A software was developed to select the layout diagram FMS from the technology park. Figs.: 2. Refs: 9 titles.

**ПРОБЛЕМНО І ФУНКЦІОНАЛЬНО ОРІЄНТОВАНІ
КОМП'ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ**

**PROBLEM- AND FUNCTION-ORIENTED
COMPUTER SYSTEMS AND NETWORKS**

УДК 519.7

Сетевые структуры и системы: П. Сердцевины сетей и мультиплексов / Полищук А.Д., Яджак М.С. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 38–51.

Введено понятие потоковой сердцевины сетевой системы и проанализированы функциональные преимущества ее структуры сравнительно с сердцевиной сложной сети. Показано, что потоковые сердцевины позволяют строить существенно более адекватные с функциональной точки зрения модели сетевых систем, чем сердцевинны сложных сетей. Это продемонстрировано на примере практически важных задач

управляемости, наблюдаемости и синхронизации сложных сетей. На основании анализа структур реальных систем предложено обобщенное определение мультиплекса и введено понятие его ядра. Рассмотрен ряд задач моделирования мультиплексов и установлено, что эффект «тесного мира» в них усиливается. Построена потоковая матрица смежности системы мультиплексного типа. На ее основании определены некоторые локальные и глобальные характеристики мультиплекс-системы и исследованы свойства ее потоковой сердцевины. Проанализированы способы уменьшения размерности моделей мультиплекс-систем с одновременным отслеживанием количественной меры сохранения их адекватности. Рис.: 5. Библиогр.: 23 назв.

UDC 519.7

Network structures and systems: II. Network and multiplex cores / Polishchuk O.D., Yadzhak M.S. // *System Research and Information Technologies*. — 2018. — № 3. — P. 38–51.

The notion of the flow core of the network system is introduced and the functional advantages of its structure in comparison with the core of the complex network are analyzed. It has been shown that the flow cores allow us to construct a much more adequate with functional point of view the models of network systems than the cores of complex networks. This is demonstrated on the examples of practically important problems of controllability, observability and synchronization of complex networks. On the base of analysis of the structures of real systems, a generalized definition of the multiplex is proposed and the notion of its kernel is introduced. A few of modeling problems of multiplexes are considered and it is established that the effect of the "small world" in them increases. The flow adjacency matrix for the multiplex system is constructed. On its basis, a few of local and global characteristics of the multiplex system are determined and the properties of its flow core are investigated. Methods of reducing the dimension of models of multiplex systems with simultaneous monitoring of the quantitative measure of maintaining their adequacy are analyzed. Figs.: 5. Refs: 23 titles.

УДК 004.023, 539.18

Квантовый генетический алгоритм высших порядков для 0–1 задачи упаковки рюкзака / Ткачук В.М., Ткачук О.Н. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2018. — № 3. — С. 52–67.

Для повышения эффективности работы квантового генетического алгоритма (QGA) предложено в представлении квантовой хромосомы перейти к квантовым регистрам высших порядков. Такое представление позволяет использовать такой мощный механизм квантовых вычислений, как запутанность квантовых состояний. Для реализации алгоритма использован адаптивный оператор квантового гейта и предложена технология восстановления квантовой хромосомы для решения комбинаторных задач с ограничениями. Исследовано влияние размера квантового регистра на эффективность работы алгоритма. Преимущество предложенного подхода по сравнению с традиционной реализацией QGA проиллюстрировано на примере 0–1 задачи упаковки рюкзака большой размерности и разного уровня корреляции входных данных. Рис.: 7. Табл.: 9. Библиогр.: 11 назв.

UDC 004.023, 539.18

Higher-order quantum genetic algorithm for 0-1 knapsack problem / Tkachuk V.M., Tkachuk O.M. // *System Research and Information Technologies*. — 2018. — № 3. — P. 52–67.

In order to enhance the effectiveness of the quantum genetic algorithm (QGA), it is proposed to switch to higher-order quantum registers in the quantum chromosome representation. Such representation makes it possible to apply a powerful quantum computations mechanism – quantum state entanglement. In the algorithm implementation, we also

use an adaptive quantum gate operator and propose a quantum chromosome recovery technology for solving constrained combinatorial optimization problems. The influence of the quantum register size on the algorithm efficiency has been investigated. The advantages of the suggested approach in comparison with the QGA traditional implementation are demonstrated on the example of multidimensional 0–1 knapsack problem and different levels of input data correlation. Figs.: 7. Tables: 9. Refs: 11 titles.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ, ПРОБЛЕМИ І
ТЕХНОЛОГІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ
СИСТЕМ

MATHEMATICAL METHODS, MODELS,
PROBLEMS AND TECHNOLOGIES FOR
COMPLEX SYSTEMS RESEARCH

УДК 539.3

Математическое моделирование электроупругого состояния ортотропного пьезоэлектрического тела с произвольно ориентированной круговой трещиной при одноосном растяжении / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 68–79.

Развита математическая модель для анализа напряженного состояния в ортотропном электроупругом материале с произвольно ориентированной круговой трещиной. Модель базируется на рассмотрении связанной системы уравнений статики электроупругости. Рассмотрена задача об электрическом и напряженном состояниях в ортотропном электроупругом пространстве с произвольно ориентированной круговой трещиной при однородных нагружениях. Решение задачи получено с помощью тройного преобразования Фурье и Фурье-образа функции Грина для бесконечной анизотропной пьезоэлектрической среды. Тестирование подхода проводилось для случая расположения трещины в плоскости изотропии пьезоэлектрического трансверсально-изотропного материала, для которого существует точное решение задачи. Сравнение результатов вычислений подтверждает эффективность применяемого подхода. Проведены числовые исследования и изучено распределение напряжений вдоль фронта круговой трещины при разных ее ориентациях в электроупругом ортотропном материале при одноосном растяжении. Рис.: 5. Табл.: 1. Библиогр.: 30 назв.

UDC 539.3

Mathematical modeling of the electrostressed state in the orthotropic piezoelectric space with an arbitrary orientated circle crack under uniaxial tension / Kirilyuk V.S., Levchuk O.I. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 68–79.

A mathematical model for the analysis of the stress state in an orthotropic electroelastic material with an arbitrary orientated circular crack is developed. The model is based on the consideration of the coupled system of equations of static electroelasticity. The problem on electric and stress states in orthotropic piezoelectric space with an arbitrary orientated circular crack under homogeneous loads was considered. The solution of the problem was obtained by means of the triple Fourier transform and Fourier image of Green's function for an infinite anisotropic piezoelectric medium. This approach was tested in the case of the location crack in the isotropy plane of transversely isotropic piezoelectric material for which there was an exact solution of the problem. The comparison of the calculated results confirmed the efficiency of the used approach. Numerical experiments were carried out and distributions of stress intensity factors along the front of the arbitrary orientated circular crack in orthotropic piezoelectric materials under the uniaxial tension were studied. Figs.: 5. Tables: 1. Refs: 30 titles.

УДК 519.21

Про існування та стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних диференціальних рівнянь Іто–Скоророда в частинних похідних з випадковими параметрами / Ясинський В.К., Юрченко І.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 80–90.

Досліджено асимптотичну поведінку сильного розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння Іто–Скорохода в частинних похідних у відповідному просторі з випадковими параметрами. Доведено існування та отримано достатні умови для асимптотичної стійкості й середньоквадратичної нестійкості сильного розв'язку такого рівняння. Запропоновано стохастичну модель складних систем, яка є спробою врахування в повному обсязі випадковостей у ході дослідження реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких ураховуються не лише дифузійні збурення типу броунівського процесу, але й випадкові збурення інших типів. Бібліогр.: 20 назв.

УДК 519.21

О существовании и стабилизации сильного решения автономных стохастических дифференциальных уравнений Ито–Скорохода в частных производных со случайными параметрами / Ясинский В.К., Юрченко И.В. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 80–90.

Исследовано асимптотическое поведение сильного решения линейного стохастического дифференциального уравнения Ито–Скорохода в частных производных в соответствующем пространстве со случайными параметрами. Доказано существование и получены достаточные условия для асимптотической устойчивости и среднеквадратичной неустойчивости сильного решения подобного уравнения. Предложена стохастическая модель сложных систем, которая является попыткой учета в полном объеме случайностей при исследовании реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, в правой части которых учитываются не только диффузные возмущения типа броуновского процесса, но и случайные возмущения других типов. Библиогр.: 20 назв.

УДК 517.98+517.95

Приклад дослідження коректності крайових задач на основі методу дифеоморфізмів / Потапенко О.Ю. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 91–97.

Одним із завдань нескінченновимірної аналізу є пошук методів дослідження коректності крайових задач у просторі нескінченновимірної аргументу. Запропоновано метод розширення класу коректних задач їх зведення до задач «канонічного типу», розглянутих раніше. Процес такого зведення полягає в пошуку дифеоморфізму певного класу між рімановими багатовидами, у тому числі областями гільбертового простору, за якого вдається вихідну задачу перетворити на більш просту. Крайова задача розглядається в «версії». Подано приклад такої задачі; для його реалізації знайдено похідні в сильному сенсі дифеоморфізму і оберненого відображення. Доведено обмеженість дифеоморфізму — умову використання теореми про крайову задачу, асоційовану з дифеоморфізмом. Бібліогр.: 8 назв.

UDC 517.98+517.95

An example of researching boundary value problems correctness using diffeomorphism method / Potapenko O. Yu. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 91–97.

The search for methods for checking correctness of boundary value problems in spaces of an infinite-dimensional argument is one of the problems of the infinite-dimensional analysis. In this paper, the author proposed a method to broaden the class of correct problems by reducing them to already previously considered “canonical type” problems. The reduction process consists of searching for a special class diffeomorphism between Riemannian manifolds, areas in Hilbert’s space among them, which allows to reduce the problem to a simpler one. Boundary value problems are considered in “-version”. This paper provides an example of such a problem. To fulfill the example, Fré-

chet derivatives of the diffeomorphism and the inverse mapping are found; diffeomorphism boundedness — a condition of the theorem about a boundary value problem associated with diffeomorphism applicability — is proved. Refs: 8 titles.

УДК 681.3.06

Організація нечіткого логічного виведення на основі багаторівневого паралелізму / Пономаренко Р.М. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 98–109.

Розроблено, теоретично обґрунтовано і реалізовано метод побудови ієрархічних систем нечіткого логічного виведення на основі багаторівневого паралелізму, зокрема паралелізму другого рівня. Сформульовано концепцію багаторівневого паралелізму, уведено поняття рівня паралелізму. Сформульовано і доведено теорему, розроблено метод теоретичного оцінювання максимально можливого пришвидшення для систем, побудованих на базі паралелізму рівня n , а також підхід до проектування ієрархічних нечітких систем на основі багаторівневого паралелізму для графічних прискорювачів NVIDIA. Запроектовано експериментальну програмну систему для ієрархічних нечітких систем на основі багаторівневого паралелізму і технології CUDA, що мають складні графи залежностей між блоками нечітких правил. На підставі розробленого методу обчислено теоретичні оцінки максимального пришвидшення та отримано експериментальні оцінки пришвидшення для ієрархічних складних систем нечіткого логічного виведення. Рис.: 5. Бібліогр.: 12 назв.

UDC 681.3.06

Organizing the fuzzy inference based on multilevel parallelism / Ponomarenko R.M. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 98–109.

In this paper, a method for constructing hierarchical systems of fuzzy inference based on multilevel parallelism, in particular, second-level parallelism, is developed, theoretically substantiated and implemented. This approach is designed to accelerate the computation of hierarchical fuzzy systems having complex dependency graphs between blocks of fuzzy rules. The concept of multilevel parallelism is formulated and presented. The notion of the level of parallelism is introduced. The theorem is formulated and proved, and a method for theoretical estimation of the maximum possible acceleration for systems constructed on the basis of parallelism of the level n is developed. An approach to designing hierarchical fuzzy systems based on multilevel parallelism for NVIDIA graphics accelerators is developed. Using NVIDIA CUDA technology, an experimental software system was designed for hierarchical systems of fuzzy inference based on multilevel parallelism for systems having complex graphs of dependencies between blocks of fuzzy rules. Experimental estimates of the acceleration are obtained. Also, based on the developed method, theoretical estimates of the maximum possible acceleration are found. A comparative characteristic of the theoretical and experimental estimates of the acceleration of hierarchical fuzzy systems is given. Figs.: 5. Refs: 12 titles.

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ТА УПРАВЛІННЯ
СИСТЕМАМИ В УМОВАХ РИЗИКУ І
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

METHODS OF SYSTEM ANALYSIS AND
CONTROL IN CONDITIONS OF RISK AND
UNCERTAINTY CONDITIONS

УДК 519.816

Метод определения и повышения согласованности экспертных оценок при поддержке принятия групповых решений / Цыганок В.В., Роик П.Д. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 110–121.

Рассмотрена проблема определения уровня согласованности оценок при групповой экспертизе. Задачей исследования является разработка метода определения

уровня согласованности экспертных оценок, лишеного ряда ключевых недостатков, присущих имеющимся методам. Предложен индекс согласованности определять с использованием спектрального подхода, согласно которому оценки экспертов отображаются в виде спектра на ограниченной, непрерывной или дискретной шкале. Индекс вычислен как нормированное значение суммы расстояний между оценками экспертов для всех возможных пар оценок. Индекс согласованности исследован также для функции квадрата попарных разностей в парах оценок. Проведенный анализ подтвердил, что функция расстояния более пригодна для основательного практического определения согласованности экспертных оценок. Проведено имитационное моделирование и предложено определение порогового значения согласованности, выше которого становится допустимой агрегация экспертных оценок. Для улучшения уровня согласованности предложена процедура обратной связи с экспертом при условии непричинения какого-либо давления на него. Рис.: 4. Библиогр.: 11 назв.

UDC 519.816

Method for evaluating and improving of the expert estimates consistency in group decision-making / Tsyganok V.V., Roik P.D. // *System Research and Information Technologies*. — 2018. — № 3. — P. 110–121.

The issue of the assessment of an expert estimates consistency level for group decision making is considered. An analysis of bibliographic sources testifies that despite the availability of multiple practical tools and solutions for assessing the consistency index, all such methods have considerable shortcomings affecting significantly the accurateness of research results. The goal of this research paper is the development of a method for assessing the consistency between expert estimates, with the elimination of a number of key shortcomings of existing methods. It is suggested to calculate the consistency index using a spectral approach, under which expert estimates are presented as a spectrum on a bounded, continuous or discrete scale. The index is calculated as the normalized value of the sum of distances between expert estimates for all possible estimate pairs. This formula for calculating the consistency index has been tested for the function of squared pairwise differences in estimate pairs. The conducted analysis shows that the function of distance fits better for a detailed practical analysis of consistency between expert estimates. Imitation modeling has been carried out, and an evaluation has been offered for a threshold consistency value above which aggregation of expert estimates becomes possible. In order to make it possible to raise the level of consistency, a procedure for gathering feedback from an expert is proposed, provided that no pressure is put on him or her. Figs.: 4. Refs: 11 titles.

УДК 517.9

Обчислення розмірності за Ляпуновим і застосування для прогнозування геомагнітних індексів / Іванов С.М., Яценко В.О. // *Системні дослідження та інформаційні технології*. — 2018. — № 3. — С. 122–132.

Запропоновано спосіб числового розрахунку розмірності за Ляпуновим за реалізацією однієї змінної динамічної системи. Відзначено рівність інформаційної та за Ляпуновим розмірностей, а також випадок рівності цих розмірностей ємності. Розглянуто спільно ентропію розподілу норм дотичних векторів динамічної системи і розмірність за Ляпуновим. Теоретичні викладки супроводжуються прикладом числового розрахунку розмірності за Ляпуновим і згаданої ентропії для часових рядів геомагнітних K_p , Dst і AE індексів. У розглянутих індексах ентропія близька до максимального значення, а це призводить до близькості розмірності за Ляпуновим до ємності. Відзначено змінну структури Dst індексу. На прикладі геомагнітних індексів підтверджено, що кореляційна розмірність Грасбергера–Прокаччі менша за розмірність за Ляпуновим. Рис.: 2. Бібліогр.: 14 назв.

UDC 517.9

Computing Lyapunov dimension and applying it for geomagnetic indices prediction / Ivanov S.M., Yatsenko V.O. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 122–132.

A method for computing the Lyapunov dimension from the realization of one variable of a dynamical system is proposed. The equality of the information dimension, the Lyapunov dimension, and capacity dimension is noted. The entropy of the distribution of the norms of the tangent vectors of a dynamical system and the Lyapunov dimension are considered together. Theoretical calculations are accompanied by an example of a numerical calculation of the Lyapunov dimension and the mentioned entropy for time series of geomagnetic K_p , Dst, and AE indices. In the considered indices, the entropy is close to the maximum value, and this leads to the closeness of the Lyapunov dimension to the capacity. A variable structure of the Dst index is noted. Using the example of geomagnetic indices, it is confirmed that the Grassberger-Procaccia correlation dimension is smaller than the Lyapunov dimension. Figs.: 2. Refs: 14 titles.

УДК 612.15

Адаптивна лазерна терапія / Борозенець Д.А. // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2018. — № 3. — С. 133–139.

Описано метод і прилад, здатний підвищити якість проведених лазеротерапевтичних процедур, на прикладі відновлення організму після стресу. Розроблено методику розрахунку оптимальної програми лікування. Експеримент проведено на 13 здорових добровольцях віком 20–55 років. Оцінено вміст кисню в крові, динаміку клітинного імунітету і перехід гелю в золь під час несприятливих для організму змін у навколишньому середовищі. Тести проведено в різних режимах від безперервної подачі випромінювання до імпульсного з різною частотою, у результаті результати збігся з прогнозованими. Для осіб середнього віку, над якими проведено експерименти, спостерігалась позитивна динаміка відновлення клітинного імунітету, тиску і вмісту кисню в крові за регулярного проведення процедур, хоча останній мав тимчасовий ефект. Викладено можливості системи і запропоновано методики для удосконалення розробленого методу та приладу. Рис.: 3. Табл.: 2. Бібліогр.: 10 назв.

UDC 612.15

Adaptive laser therapy / Borozenets D.A. // System Research and Information Technologies. — 2018. — № 3. — P. 133–139.

The article describes a method and device capable of improving the quality of laser-therapy procedures based on the recovery of the body after stress. The experiment was conducted on 13 healthy volunteers aged 20-55 years. The oxygen content of the blood, the dynamics of cellular immunity, and the transition of the gel to the sol were assessed during adverse environmental changes in the body. Tests were conducted in various modes from continuous supply of emission to pulsed with different frequencies and, as a result, coincided with the predicted results. For middle-aged people, who were the subjects of these experiments, there was a positive dynamics of recovery of the cellular immunity, pressure and oxygen content in the blood with regular procedures, although the latter has a temporary effect. The conclusions outline the capabilities of the system and suggest ways for improvement. Figs.: 3. Tables: 2. Refs: 10 titles.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Абдуллаєв Гурбан Садігов огли,

доцент, кандидат технічних наук, завідувач кафедри метрології та сертифікації Сумгайтського державного університету, Азербайджанська Республіка, Сумгаїт

Аксак Наталія Георгіївна,

доцент, кандидат технічних наук, професор кафедри електронних обчислювальних машин Харківського національного університету радіоелектроніки, Україна, Харків

Бідюк Петро Іванович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського

Борозенець Данило Андрійович,

магістр кафедри біомедичної кібернетики КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Генжелієва Гюлнара Гаріб гизи,

асистент кафедри автоматизації процесів Сумгайтського державного університету, Азербайджанська Республіка, Сумгаїт

Іванов Сергій Миколайович,

аспірант Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ

Кирилюк Віталій Семенович,

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, Київ

Корабльов Микола Михайлович,

професор, доктор технічних наук, професор кафедри електронних обчислювальних машин Харківського національного університету радіоелектроніки, Україна, Харків

Левчук Ольга Іванівна,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу механіки стохастично-неоднорідних середовищ Інституту механіки імені С.П.Тимошенка НАН України, Київ

Мамедов Джаваншир Фірудін огли,

професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри автоматизації процесів Сумгайтського державного університету, Азербайджанська Республіка, Сумгаїт

Мацукі Йошіо,

доктор технічних наук, завідувач лабораторії економетрики і прогнозування Світового центру даних з геоінформатики і сталого розвитку КПІ ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Насирова Ельміра Аліш,

асистент кафедри інформатики Сумгайтського державного університету, Азербайджанська Республіка, Сумгаїт

Поліщук Олександр Дмитрович,

старший науковий співробітник, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник лабораторії моделювання та оптимізації складних сис-

тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

Пономаренко Роман Миколайович,

аспірант Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, асистент кафедри автоматизованих систем обробки інформації і управління КПП ім. Ігоря Сікорського, Україна, Київ

Потапенко Олексій Юрійович,

аспірант КПП ім. Ігоря Сікорського, аналітик систем ПП «ІСТА Груп», Україна, Київ

Роїк Павло Дмитрович,

аспірант Інституту проблем реєстрації інформації НАН України, Київ

Ткачук Валерій Михайлович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Україна, Івано-Франківськ

Ткачук Орія Миколаївна,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри педагогіки початкової освіти педагогічного факультету Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, Україна, Івано-Франківськ

Циганок Віталій Володимирович,

старший науковий співробітник, доктор технічних наук, завідувач лабораторії систем підтримки прийняття рішень Інституту проблем реєстрації інформації НАН України, Київ

Юрченко Ігор Валерійович,

доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного моделювання факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Україна, Чернівці

Яджак Михайло Степанович,

старший науковий співробітник, доктор фізико-математичних наук, завідувач лабораторії моделювання та оптимізації складних систем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

Ясинський Володимир Кирилович,

професор, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри системного аналізу і страхової та фінансової математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Україна, Чернівці

Яценко Віталій Олексійович,

професор, доктор технічних наук, завідувач відділу дистанційних методів та перспективних приладів Інституту космічних досліджень НАН України та ДКА України, Київ