ISSN 2519–206X

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Том 21. Випуск 2(28).

Volume 21. Issue 2(28).

2016

RM&M RM&M RM&M RM&M RM&M

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ДОСЛІДЖЕННЯ в МАТЕМАТИЦІ і МЕХАНІЦІ

Науковий журнал

Виходить 2 рази на рік

Журнал заснований у січні 1997 р.

Том 21. Випуск 2(28). 2016

Одеса
«Астропринт»
2016

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

RESEARCHES in MATHEMATICS and MECHANICS

Scientific journal

Published twice a year

Journal founded in January, 1997

Volume 21. Issue 2(28). 2016

Odesa
«Astroprint»
2016

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

The certificate of mass media state registration under the number № 21400—11200ПР issued on June 17, 2015.

ЗМІСТ

CONTENTS

ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 2(28).– С. 7–11

УДК 551.577

С. К. Асланов, М. Б. Косой, А. П. Царенко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

РАСПАДЕНИЕ ГАЗОВОЙ СТРУИ ВНУТРИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ НА ПУЗЫРЬКИ

На основе уравнений баланса массы и энергии построена теория для приближённого описания распада на пузырьки тонкой струи идеального газа, истекающей в окружающую идеальную жидкость. Под действием силы поверхностного натяжения, распределённой по поверхности раздела сред, и внутренних сил давления внутри струи, обусловленных сжимаемостью газа, поверхность струи деформируется и, при росте конечных возмущений, распадается на пузырьки. Произведенный математический анализ позволил однозначно оценить относительную величину среднего диаметра образующихся пузырьков газа и расстояний между ними. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами Рэлея из линейной теории неустойчивости струи.
MSC: 76B10.
Ключевые слова: струя газа, распад струи, поверхностное натяжение, работа расширения пузырька, неустойчивость возмущений.

Введение. Настоящая работа является продолжением построения аналитической теории распада тонких струй на капли, начатой в работе [1], в которой исследован процесс распада тонкой жидкой струи в окружающей атмосфере на основе законов сохранения массы и энергии, применённых к оконечному участку волнообразно возмущённой струи. В [1] были получены аналитические соотношения между геометрическими характеристиками невозмущённой струи и характеристиками образованной после дробления струи капельной структуры. В этой работе исследуется процесс образования пузырьков при регулярном распаде тонкой газовой струи, которая истекает внутрь окружающей жидкости. Анализу это явления посвящены исследования Рэлея [2]. Он подошел к решению задачи с позиции линейной теории гидродинамической неустойчивости поверхности раздела газовой струйки и окружающей жидкости, и получил оценку длины волны максимальной неустойчивости этой поверхности: $\lambda_* = 6,48 \times 2a$.

Однако линейный анализ, проведенный Рэлеем, не может дать решения задачи на стадии разрыва струйки газа, вызванного ростом возмущений на поверхности струи, поскольку эти возмущения уже нельзя считать малыми, а, следовательно, и оценить размеры пузырьков газа и расстояние между ними. Применение же законов сохранения массы и энергии в интегральной форме позволяет сделать оценку значений указанных параметров.

Основные результаты. Механизм истечения тонкой струи газа в жидкость аналогичен механизму истечения тонкой струи жидкости в газ, поэтому в исследовании можно использовать методы и приёмы, аналогичные тем, что использовались в работе [1], конечно учитывая принципиальные различия физических свойств сред (жидкости и газа). По сравнению со струёй жидкости, выпускаемой в газ, при исследовании распада газовой струи следует учесть эффект сжимаемости в законах сохранения массы и энергии. А именно, в разных

Получена 11.10.2016

частях уравнения баланса массы (статья, формула) будут фигурировать различные плотности:

$$\pi\rho_{cl}a^2(2l+\Delta l)=\tfrac{4}{3}\pi\rho_{sf}R^3, \qquad (1)$$

справа – плотность газа ρ_{cl} в невозмущённой струе радиуса a, а слева – плотность $\rho_{sf}=\tilde{\rho}\rho_{cl}$ окончательно сформированного пузырька радиуса R после отрыва. Процесс отрыва пузырька с конца струи, в силу его быстроты, считать адиабатическим, т. е. подчинённым адиабате Пуассона: $\tilde{\rho}=\tilde{p}^{1/\gamma}$, где $\gamma=A_p/c_v$. Таким образом, закон сохранения массы имеет вид

$$\pi a^2(2l+\Delta l)=\tfrac{4}{3}\pi\tilde{\rho}R^3. \qquad (2)$$

По той же причине в уравнении баланса энергии должна присутствовать работа расширения газа (в отличие от случая жидкой струи). При квазистатическом подходе давление в тонкой струйке и пузырьке соответственно можно считать преимущественно формирующимися за счёт сил поверхностного натяжения окружающей жидкости, т. е. соответственно $p_{sf}\approx 2\sigma/R$ и $p_{cl}\approx\sigma/a$, или $\tilde{p}=2\eta$ и $\tilde{\rho}=(2\eta)^{1/\gamma}$, где $\eta=a/R$ и для воздуха $\gamma=1,4$. Работа разрастания сферического пузырька от радиуса a до радиуса R равна $W_5=\int_{V_a}^{V_R}pdV$, где $dV=\frac{4}{3}\pi\left(R^3-a^3\right)d\tilde{\rho}$ – элементарное изменение объёма пузырька за счёт изменения плотности газа, V_a и V_R – объёмы пузырьков радиуса a и R соответственно. Заменим интеграл среднеинтегральным значением: $W_5=<p>\Delta V$, где ΔV– приращение объёма пузырька, а $<p>$ среднее по объёму пузырька давление. Так как $\Delta\tilde{\rho}=\tilde{\rho}-1$ есть относительное изменение плотности газа в сферическом слое (a,R), то $\Delta V=\frac{4}{3}\pi R^3\left(1-\eta^3\right)\left((2\eta)^{1/\gamma}-1\right)$.

Модель отрыва и формирования пузырька включает два этапа. Вначале образуется цилиндрическое тело вращения вместе с двумя сферическими закруглениями радиуса r, где r меняется от значения a до R.

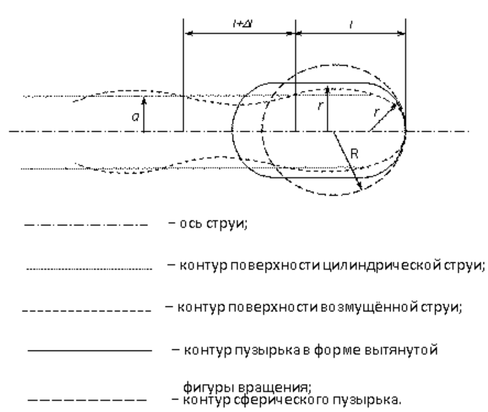

Рис. 1. Отрыв и формирование пузырька

В дальнейшем эта фигура деформируется в сферу за счёт того, что на сферических частях напряжение равно $2\sigma/R$, а на цилиндрической части – σ/R.

Поэтому для оценки среднего давления в газе $< p >$ принято давление равновесного состояния газа выше описанной фигуры среднего радиуса $r = \frac{(a+R)}{2}$, то есть $< p > \approx \frac{2\sigma}{R(1+\eta)}$. В итоге $W_5 = \frac{8}{3}\pi\sigma R^2 \frac{\left(1-\eta^3\right)\left((2\eta)^{1/\gamma}-1\right)}{(1+\eta)}$. Таким образом, уравнение баланса энергии имеет вид $W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$, где $W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4$ получены в [1] и имеют вид:

$$W_1 = 2\pi\sigma a\left(l + \Delta l\right);\ W_2 = 2\pi\sigma a^2\left(1 - 0.25\pi\right);$$
$$W_3 = 2\pi\sigma\left\{aR\left(1 - \sqrt{1 - (a/R)^2}\right) + 0.5\left[aR\sqrt{1 - (a/R)^2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -R^2\left(0.5\pi - \arcsin\sqrt{1 - (a/R)^2}\right)\right]\right\}.$$
$$W_4 = 4\pi\sigma R^2\left(1 - (a/R)^2\right).$$

Безразмерное уравнение баланса энергии имеет вид:

$$f\left(\eta,\varepsilon\right) = \left(3 - \tfrac{\pi}{4}\right)\eta^{(3-1/\gamma)} + 0,5\left(\arcsin\sqrt{1-\eta^2} - \eta\sqrt{1-\eta^2} - 4 - 0,5\pi\right)\eta^{(1-1/\gamma)} +$$
$$+\eta^{(2-1/\gamma)} + \frac{4}{3}\frac{\left(1-\eta^3\right)}{(1+\eta)}\left(\eta^{-1/\gamma} - 2^{1/\gamma}\right)\eta + \frac{2^{(1+1/\gamma)}}{3}q = 0, \tag{3}$$

где η — неизвестная величина, $q = \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}$, $\varepsilon = \frac{\Delta l}{2l}$ — параметр уравнения.

Для определения корней уравнения [3] проведём исследование функции $f\left(\eta,\varepsilon\right)$. После дифференцирования $f\left(\eta,\varepsilon\right)$ по η при фиксированном параметре ε и умножения f'_η на $\frac{\eta^{1/\gamma}}{(3-1/\gamma)}$ получаем

$$f'_\eta = \left(3 - 0,25\pi\right)\eta^2 + A_2\eta + 0,5A_1\left(\arcsin\sqrt{1-\eta^2} - 2 - 0,5\pi\right) -$$
$$-0,5\eta\sqrt{1-\eta^2} - \frac{(2\eta)^{1/\gamma}}{3-1/\gamma} + \frac{4}{3(3-1/\gamma)}\frac{1}{(1+\eta)^2}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\gamma}\left(\eta^3 - 1\right)\left(\eta + 1\right) + \left[1 - (2\eta)^{1/\gamma}\right]\left(1 - 4\eta^3 - 3\eta^4\right)\right\} = 0, \tag{4}$$

где $A_k = \frac{k-1/\gamma}{3-1/\gamma}$ (для $\gamma = 1.4:\quad A_1 \approx 0.125;\ A_2 \approx 0.563;\quad \frac{4}{3(3-1/\gamma)} \approx 0.583$). При фиксированном ε при $\eta_* \simeq 0,46$ $f'_\eta \approx 0,006$ с точностью, меньшей 1%. Причём, при переходе через $\eta = \eta_*$ значение f'_η меняет знак с "$-$" на "+" , т. е. $\eta_* \simeq 0.46$ есть точка минимума функции $f\left(\eta,\varepsilon\right)$. Из уравнения $f\left(\eta_*,\varepsilon\right) = 0$ находится критическое значение $\varepsilon_* = 0.076$ и $q_* = 1.07$. Таким образом, при $\eta = \eta_*,\ \varepsilon = \varepsilon_*$ минимум функции $f\left(\eta,\varepsilon\right)$ выходит на ось абсцисс η. Поскольку в нелинейной стадии симметрия волнообразования утрачивается, и участок перешейка растягивается по отношению к разбухающему участку, то ε $-$ величина неотрицательная и $\varepsilon = 0$ есть предельное значение. При подстановке $\eta_* = 0.46$ и $\varepsilon = 0$ в функцию $f\left(\eta,\varepsilon\right)$ имеем $f\left(0.46, 0\right) = -0.044$. Сравнение этого значения функции со значениями $f\left(0,0\right) = 1.043$ и $f\left(1,0\right) = 1.523$ свидетельствует о том, что минимум функции $f\left(\eta,0\right)$ мало отличается от нуля. Значит при $\varepsilon = 0$ существуют два близких между собой корня и близких к $\eta_* = 0.46$, поэтому это значение можно принять в качестве оценки корня. Действительно, при фиксированном ε кривая $f\left(\eta,\varepsilon\right)$ не может опуститься ниже своего минимума. При $\varepsilon = \varepsilon_*$ и $\eta = \eta_*$ $f\left(\eta,\varepsilon\right) = 0$, а значит, при $\varepsilon > \varepsilon_*$ решение уравнения отсутствует, т. е. отрыва пузырька не будет.

Поэтому $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*$. С другой стороны, $\varepsilon \geqslant 0$. Таким образом, в интервале $[0, \varepsilon_*]$ должен быть заключен показатель ε асимметрии волнообразования на поверхности струи газа.

Заключение. Для полученных значений $\varepsilon = \varepsilon_*$ и $\eta = \eta_*$ сделаны средние оценки характерных величин изучаемого процесса. Для диаметра регулярно образующихся пузырьков газа получено значение $2R \approx 2.17 \times 2a$, при этом расстояние между ними имеет значение $L = \frac{2}{3}\frac{(2\eta_*)^{1/\gamma}}{(\eta_*)^3} \approx 6.45 \times 2a$. Последнее хорошо согласуется с результатом Рэлея [2] для длины волны λ_* максимальной неустойчивости, полученным с позиции линейной теории возмущений.

1. **Асланов С. К.** К теории распада жидкой струи на капли // Журнал технической физики. – 1999. – Т. 69, № 11. – С. 132–133.
2. **Стрэтт Дж. В.** Теория звука. Т. 2. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 455 с.
3. **Lord Rayleigh.** On the instability of jets // Proc. Lond. Math. Soc. – 1879. – V. 10. – P. 4–10.
4. **Lord Rayleigh.** On the instability of cylindrical fluid surfaces // Phil. Mag. – 1892. – V. 34. – P. 177.

Асланов С. К., Косой М. Б., Царенко О. П.
Розпадання газового струменя всередині рідини на бульбашки

Резюме

На основі рівнянь балансу маси і енергії побудована теорія для наближеного опису розпаду на бульбашки тонкого струменя ідеального газу, що витікає в навколишню ідеальну рідину. Під дією сили поверхневого натягу, розподіленої по поверхні розділу середовищ, і внутрішніх сил тиску всередині струменя, обумовлених стисливістю газу, поверхня струменя деформується і, при рості кінцевих обурень, розпадається на бульбашки. Вироблений математичний аналіз дозволив однозначно оцінити відносну величину середнього діаметра утворюваних бульбашок газу і відстаней між ними. Отримані результати добре узгоджуються з результатами Релея з лінійної теорії нестійкості струменя.
Ключові слова: струмінь газу, розпад струменю, поверхневий натяг, робота розширення бульбашки, нестійкість збурення

Aslanov S. K., Kosoy M. B., Carenko A. P.
Split of gas stream onto the bubbles inside liquid

Summary

A theory of the approximate description of the splitting of the thin jat of ideal gas flowing into the incompressible frictionless liquid is constructed on the base of the balance equations of mass and energy. Under the surface tension force influence, distributed over surface of division of environments, and the internal pressure forces inside the stream, caused by the compressibility of the gas, stream surface is deformed, and with the growth of finite indignations, is being broken up into the bubbles. Made mathematical analysis allowed unambiguously to evaluate the relative value of the average diameter of the formed gas bubbles

and the distances between them. The results are in good agreement with the Rayleigh results of the linear theory of stream instability.
Key words: gas stream, split of the gas stream, work of bubble's expansion, instability of the perturbations.

References

1. **Aslanov S. K.** (1999), K teorii raspada zhidkoj strui na kapli, *Zhurnal tekhnicheskoj fiziki*, vol. 69, no. 11, pp. 132–133.
2. **Strehtt Dzh. V.** (1955), Teoriya zvuka [Theory of sound], Volume 2, M.: GITTL, 455 p.
3. **Lord Rayleigh** (1879), On the instability of jets *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 10, pp. 4–10.
4. **Lord Rayleigh** (1892), On the instability of cylindrical fluid surfaces *Phil. Mag.*, vol. 34, p. 177.

ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 2(28).–С. 12–18

УДК 514.76

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ПРО КВАЗІАРЕАЛЬНУ НЕСКІНЧЕННО МАЛУ ДЕФОРМАЦІЮ КАТЕНОЇДА

В даній роботі розглянута квазіареальна нескінченно мала деформація катеноїда, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі.
MSC: 53A10.
Ключові слова: деформація, катеноїд, вектор зміщення, варіація .

Вступ. Основні рівняння квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні (квазіареальної н. м. д.) були здобуті в роботі [1]. В [2] розглядалася задача про квазіареальну н. м. д., при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі. В цій роботі встановлено, що для існування зазначеної деформації необхідно і достатньо, щоб система рівнянь

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - T^{\alpha} b^{\beta}_{\alpha} + \mu_{\alpha} c^{\alpha\beta} = 0, \\ c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T^{\alpha}_{,j} - b_{ij}\mu = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

мала ненульовий розв'язок $(T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}, \mu)$. Тут через $c_{\alpha\beta}$ позначено дискримінантний тензор поверхні ($c_{11} = c_{22} = 0, c_{12} = -c_{21} = \sqrt{g}, g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2, g_{ij}-$ метричний тензор, $\alpha, \beta, i, j = 1, 2$), $b_{ij}-$ коефіцієнти другої квадратичної форми. Симетричний тензор $T^{\alpha\beta} \in C^2$, контраваріантний вектор $T^{\alpha} \in C^2$ і функція $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$ входять до розкладу частинних похідних вектора зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$ квазіареальної н. м. д. поверхні за базисом $\overline{r_1}, \overline{r_2}, \overline{n}$

$$\overline{U_i} = \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} - \mu \delta^{\beta}_{i} \right) \overline{r_{\beta}} + c_{i\alpha} T^{\alpha} \overline{n}, \tag{2}$$

де $\overline{r_i} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^i}, \overline{n}-$ орт нормалі поверхні, $\delta^{\alpha}_{\beta}-$символи Кронекера.
Має місце

Теорема 1. *[3] Будь-яка мінімальна поверхня ненульової гаусової кривини S допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. При цьому тензорні поля $T^{\alpha\beta} \in C^2, T^{\alpha} \in C^2$ та функція $\mu = \mu(x^1, x^2) \in C^2$ явно виражаються через довільну гармонічну функцію $\psi = \psi(x^1, x^2)$:*

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2K} \psi_{\gamma,k} \left(c^{\alpha\gamma} b^{k\beta} + c^{\beta\gamma} b^{k\alpha} \right), \ T^{\alpha} = c^{\alpha\gamma} \psi_{\gamma}, \ \mu = \frac{1}{2K} \psi_{\alpha,\beta} b^{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Об'єктом дослідження в [3] була квазіареальна н. м. д. мінімальної поверхні, при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі. Оскільки отримані результати носять виключно теоретичний характер, то надалі ми маємо намір на прикладі поверхні катеноїда продемонструвати викладену в роботі [3] теорію.

Надійшла 12.10.2016

Основні результати. Катеноїд — це єдина мінімальна поверхня обертання ненульової гаусової кривини, яка утворюється обертанням ланцюгової лінії

$$x^2 = a \operatorname{ch} \frac{x^1}{a}$$

навколо вісі OX^1 [4,5]. Форму катеноїда набуває мильна плівка, натягнута на два дротяних кола, площини яких перпендикулярні до лінії, що з'єднує їх центри.

Нехай рівняння катеноїда S задано у параметричному вигляді

$$\overline{r} = \left\{\operatorname{ch} x^1 \cos x^2, \operatorname{ch} x^1 \sin x^2, x^1\right\}. \tag{4}$$

Обчислимо

$$\begin{gathered}
\overline{r_1} = \{\, shx^1 \cos x^2,\ shx^1 \sin x^2, 1\},\\
\overline{r_2} = \{-\, chx^1 \sin x^2,\ chx^1 \cos x^2, 0\},\\
\overline{n} = \{\frac{-\cos x^2}{chx^1}, \frac{-\sin x^2}{chx^1}, \frac{shx^1}{chx^1}\},\\
g_{11} = g_{22} = \operatorname{ch}^2 x^1,\ g_{12} = 0,\\
b_{11} = -1,\ b_{22} = 1,\ b_{12} = 0, \qquad\qquad (5)\\
b_1^1 = \frac{-1}{\operatorname{ch}^2 x^1},\ b_2^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x^1},\ b_2^1 = b_1^2 = 0,\\
d_1^1 = -\operatorname{ch}^2 x^1,\ d_2^2 = \operatorname{ch}^2 x^1,\ d_2^1 = d_1^2 = 0,\\
H = 0, K = -\frac{1}{\operatorname{ch}^4 x^1},\\
\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = thx^1,\ \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0,
\end{gathered}$$

де $d_j^i = d^{i\alpha} g_{\alpha j}, d^{i\alpha}-$ тензор, обернений до тензора $b_{i\alpha}$, $H-$ середня кривина поверхні, $K-$ повна кривина поверхні, Γ_{ij}^k- символи Христофеля. Оскільки $g_{11} = g_{22},\ g_{12} = 0$, то поверхня катеноїда, задана у вигляді (4), віднесена до ізотермічної координатної сітки. Має місце

Теорема 2. *Поверхня катеноїда допускає квазіареальну нескінченно малу деформацію зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі з вектором зміщення*

$$\overline{U} = \left\{c \operatorname{sh} x^1 \cos x^2 + c_1;\ c \operatorname{sh} x^1 \sin x^2 + c_2;\ 0\right\},\ c \neq 0, c, c_1, c_2 = const. \tag{6}$$

Доведення. В теоремі 1 обґрунтовується існування квазіареальної н. м. д. довільної мінімальної поверхні, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі. Доведено, що тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ та функція μ виражаються через довільну гармонічну функцію за формулами (3).

Задамо гармонічну функцію $\psi(x^1, x^2)$ як лінійну функцію, а саме

$$\psi(x^1, x^2) = cx^1 + c_0,\ c \neq 0,\ c, c_0 = const, \tag{7}$$

і знайдемо тензорні поля $T^{\alpha\beta}, T^{\alpha}$ та функцію μ у випадку катеноїда.

З (7) маємо

$$\psi_1 = c,\ \psi_2 = 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \psi_i. \tag{8}$$

Для обчислення компонентів $\psi_{1,1},\ \psi_{2,2},\ \psi_{1,2} = \psi_{2,1}$ використаємо формулу для визначення коваріантної похідної від градієнтного вектора ψ_i у розгорнутому вигляді

$$\psi_{i,j} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^j} - \psi_\alpha \Gamma^\alpha_{ij}. \tag{9}$$

З урахуванням $(5)_9$ і (8) з (9) здобудемо

$$\psi_{1,1} = \frac{-c}{2}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^1} = -c\ thx^1,\ \psi_{2,2} = \frac{c}{2}\frac{\partial \ln g_{11}}{\partial x^1} = c\ thx^1,\ \psi_{1,2} = \psi_{2,1} = 0. \tag{10}$$

Внаслідок підставляння в (3) відповідних значень з формул (5), (8) і (10) для поверхні катеноїда дістанемо вирази для компонентів тензорів деформації $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$ і функції μ

$$T^{11} = T^{12} = T^{22} = 0,\ T^1 = 0,\ T^2 = \frac{-c}{\operatorname{ch}^2 x^1},\ \mu = -c\ thx^1,\ c \neq 0, c = const. \tag{11}$$

Внесемо в (2) замість $T^{\alpha\beta},\ T^\alpha$ та функції μ їх відповідні значення з (11), тоді у випадку катеноїда отримаємо систему двох векторних рівнянь відносно однієї невідомої — вектор-функції $\overline{U}(x^1, x^2)$

$$\begin{cases} \overline{U_1} = c\ thx^1\overline{r_1} - c\overline{n}, \\ \overline{U_2} = c\ thx^1\overline{r_2}. \end{cases} \tag{12}$$

Знайдемо розв'язок цієї системи рівнянь. Для цього спочатку з другого рівняння визначимо

$$\overline{U} = c\ thx^1\overline{r} + \overline{\varphi}(x^1), \tag{13}$$

де $\overline{\varphi}(x^1)$– довільна векторна функція від однієї змінної x^1. Отриманий вираз (13) підставимо в перше рівняння системи (12), звідки дістанемо умову на вектор-функцію $\overline{\varphi}(x^1)$

$$\overline{\varphi\prime} = \frac{-c}{ch^2x^1}\overline{r} - c\overline{n}. \tag{14}$$

Проінтегруємо (14) з урахуванням формул (4), $(5)_3$:

$$\overline{\varphi}(x^1) = \{c_1;\ c_2;\ -cx^1\ thx^1\}, c \neq 0, c, c_1, c_2 = const. \tag{15}$$

Нарешті внесемо в (13) замість функції $\overline{\varphi}$ її представлення з (15), тоді отримаємо компоненти вектора зміщення $\overline{U}$ квазіареальної н. м. д. катеноїда у явному вигляді

$$\overline{U} = \left\{c \operatorname{sh} x^1 \cos x^2 + c_1;\ c \operatorname{sh} x^1 \sin x^2 + c_2;\ 0\right\},\ c \neq 0, c, c_1, c_2 = const.$$

Таким чином, внаслідок деформування катеноїда S дістали поверхню S^* :

$$\overline{r^*} = \overline{r} + t\overline{U}, \tag{16}$$

де $\overline{U}$ — вектор-функція (6). Теорема доведена.

Наявність вектора зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$, а також його вигляд (6) дає змогу сформулювати таку теорему

Теорема 3. *Якщо катеноїд закріпити лише в одній точці, то він буде жорстким відносно квазіареальної н. м. д., при якій відхилення від дотичної площини є стаціонарним у будь-якому напрямі.*

Має місце також

Теорема 4. *Квазіареальна нескінченно мала деформація катеноїда з вектором зміщення (6) має такі властивості:*

1) *деформація катеноїда не зводиться до ареальної;*
2) *асимптотичні лінії катеноїда при цій деформації залишаються стаціонарними;*
3) *здеформована поверхня катеноїда S^* є мінімальною;*
4) *варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми катеноїда мають вигляд*

$$2\varepsilon_{11} = 2\varepsilon_{22} = c \operatorname{sh} 2x^1, \ 2\varepsilon_{12} = 0, \ c \neq 0; \tag{17}$$

5) *варіація гаусової кривини катеноїда*

$$\delta K = \frac{4c \ thx^1}{\operatorname{ch}^4 x^1}, \ c \neq 0. \tag{18}$$

Доведення. Насамперед відзначимо, що квазіареальна н. м. д. катеноїда з вектором зміщення (6) не зводиться до ареальної. Дійсно, необхідною і достатньою умовою того, що квазіареальна н. м. д. поверхні зводиться до ареальної, є рівність $\mu \equiv 0$ [1]. У нашому випадку функція μ дорівнює

$$\mu = -c \ thx^1, \ c \neq 0, c = const.$$

Доведемо, що при квазіареальній н. м. д. катеноїда зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі асимптотичні лінії також залишаються стаціонарними. Мінімальна поверхня є поверхнею від'ємної гаусової кривини і на такій поверхні існує регулярна сітка дійсних асимптотичних ліній. На поверхні S рівняння асимптотичних ліній має вигляд

$$b_{ij} dx^i dx^j = 0, \tag{19}$$

а на здеформованій поверхні S^* (16) асимптотичні лінії слід шукати з рівняння

$$b^*_{ij} dx^i dx^j = 0. \tag{20}$$

Аналітичною умовою того, що при зазначеній деформації відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі, є умови $\beta_{ij} = 0$, де $\beta_{ij}-$ це варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми [2]. Використовуючи розкладення коефіцієнтів другої квадратичної форми b^*_{ij} поверхні S^* в ряд за степенями t, дістанемо

$$b^*_{ij} dx^i dx^j = b_{ij} dx^i dx^j + t\beta_{ij} dx^i dx^j + o(t^2). \tag{21}$$

З останнього співвідношення маємо, що за умов $\beta_{ij} = 0$ формули (19) та (20) визначають одні і ті ж геометричні образи. Звідси випливає, що у випадку, коли при квазіареальній нескінченно малій деформації катеноїда відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі, то асимптотичні лінії зберігаються.

Для подальшого нам знадобляться наступні формули, отримані в роботі [1]

$$2\delta H = T^{\alpha\beta} c_{\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\beta} + T^{\alpha}_{,\beta} c^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + 2H\mu, \tag{22}$$

$$2H^* = 2H + t\left(T^{\alpha\beta} c_{\alpha\gamma} b^{\gamma}_{\beta} + T^{\alpha}_{,\beta} c^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} + 2H\mu\right) + o(t^2), \tag{23}$$

$$2\varepsilon_{ij} = T^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta}\right) - 2\mu g_{ij}, \tag{24}$$

$$\delta K = K(d^{\alpha\beta}\beta_{\alpha\beta} + 4\mu). \tag{25}$$

Покажемо, що здеформована поверхня катеноїда S^* є мінімальною. Для цього підставимо в (22) замість тензорів деформації $T^{\alpha\beta}$, T^{α} їх представлення через гармонічну функцію ψ з (3), тоді для мінімальної поверхні отримаємо

$$\delta H = 0.$$

На підставі формули (23) одержуємо, що середня кривина H^* поверхні S^* дорівнює нулю. Отже, поверхня S^* є мінімальною.

Тепер переконаємося в тому, що варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми катеноїда мають вигляд (17). Внесемо в (24) замість поля деформації $T^{\alpha\beta}$ та функції μ їх відповідні представлення з (11), тоді, беручи до уваги формулу $(5)_4$, врешті решт для поверхні катеноїда знайдемо явні вирази компонентів першого тензора деформації ε_{ij}

$$2\varepsilon_{11} = 2\varepsilon_{22} = c \operatorname{sh} 2x^1,\ 2\varepsilon_{12} = 0,\ c \neq 0.$$

Далі доведемо, що варіація гаусової кривини поверхні катеноїда при її квазіареальній н. м. д. зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі виражається за формулою (18). Дійсно, оскільки при зазначеній деформації варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми дорівнюють нулю, то з (25) маємо

$$\delta K = 4K\mu.$$

Звідси для варіації гаусової кривини катеноїда остаточно дістанемо

$$\delta K = \frac{4c\ thx^1}{\operatorname{ch}^4 x^1},\ c \neq 0.$$

Теорему доведено.

Висновки. В даній роботі розглянуто квазіареальну н. м. д. катеноїда, при якій відхилення від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі. В теоремі 2 доведено, що така деформація існує і в явному вигляді здобуто поле зміщення $\overline{U}$. До того ж встановлено, що зазначена деформація має властивості, викладені в теоремі 4.

1. **Безкоровайна Л. Л.** Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3 / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Proc. Intern.Geom. Center. – 2014. – № 2. – С. 6–19.
2. **Безкоровайна Л. Л.** Аналітичне моделювання однієї задачі квазіареальної нескінченно малої деформації поверхні / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Proc. Intern.Geom. Center. – 2015. – № 2. – С. 34–42.
3. **Безкоровайна Л. Л.** Деформація з заданим законом змінювання елемента площі мінімальної поверхні / Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич // Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р., Київ: матеріали конф. Т.2: Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – С. 52–56.
4. **Основы теории поверхностей в тензорном изложении** Ч. 1: Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности / [сост. Каган В. Ф ; ред. Гуревича Г. Б.]. – Москва: ОГИЗ, 1947. – 512 с.
5. **Основы теории поверхностей в тензорном изложении** Ч. 2: Поверхности в пространстве. Отображения и изгибания поверхностей. Специальные вопросы / [сост. Каган В. Ф ; ред. Гуревича Г. Б.]. – Москва: ОГИЗ, 1948. – 410 с.

Безкоровайная Л. Л., Хомич Ю. С.
О КВАЗИАРЕАЛЬНОЙ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ДЕФОРМАЦИИ КАТЕНОИДА

Резюме

В данной работе рассмотрена квазиареальная бесконечно малая деформация катеноида, при которой отклонение от касательной плоскости сохраняется в любом направлении.
Ключевые слова: деформация, катеноид, вектор смещения, вариация.

Bezkorovaina L. L., Khomych. Y. S.
ABOUT THE QUASIAREAL INFINITESIMAL DEFORMATION OF CATENOID

Summary

In this paper we considered the quasiareal infinitesimal deformation of catenoid under which the deviation from the tangent plane is preserved in all directions.
Key words: deformation, catenoid, vector of displacement, variation.

REFERENCES

1. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Yu. S. (2014), Quasiarial infinitesimal deformation of surfaces in E_3 [Kvaziarealna neskinchenno mala deformaciya poverxni v E_3], *Proc. Intern. Geom. Center*, no. 2, pp. 6–19.
2. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Yu. S. (2015), Analytical modeling of a problem of quasiareal infinitesimal deformation of surfaces [Analitychne modelyuvannya odniyeyi zadachi kvaziarealnoyi neskinchenno maloyi deformaciyi poverxni], *Proc. Intern. Geom. Center*, no. 2, pp. 34–42.
3. Bezkorovaina, L. L., Khomych, Yu. S. (2015), Deformation of the given law of changing the element area of a minimal surface [Deformaciya z zadanym zakonom zminyuvannya elementa ploshhi minimalnoyi poverxni], *Sixteenth International Conference named. Acad. Michail Kravchuck, May 14-15, 2015, Kyiv*, Conf. proc., Vol. 2, Algebra. Geometry. Mathematical Analysis, K.: NTUU «KPI», pp. 52–56.

4. Kagan, V. F. et al. (1947), Fundamentals of the theory of surfaces in tensor presentation. Part 1. The studies apparatus. General foundations of the theory and the intrinsic geometry of the surface, (comp. Kagan V. F.; ed. Gurevich G. B.), Moscow: OGIZ, 512 p.
5. Kagan, V. F. et al. (1948), Fundamentals of the theory of surfaces in tensor presentation. Part 2. Surfaces in space. Imaging and deformation of surfaces. Special issue, (comp. Kagan V. F.; ed. Gurevich G. B.), Moscow: OGIZ, 410 p.

УДК 517.5

М. М. Бокало, О. Я. Сус
Львівський національний університет імені Івана Франка

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ ТА ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

Досліджено мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними операторами типу Вольтерра. Доведено існування та єдиність узагальнених розв'язків таких задач у відповідних узагальнених просторах Соболєва. Також отримано апріорні оцінки узагальнених розв'язків досліджуваних задач.

MSC: 33C50, 33C52, 42B15, 42C10.

Ключові слова: інтегро-диференціальне рівняння, параболічне рівняння, змінні показники нелінійності, метод Гальоркіна, метод монотонності .

Вступ. Інтегро-диференціальні рівняння параболічного типу широко використовуються у математичному моделюванні складних явищ в сучасному природознавстві, економіці та техніці [18–23, 29]. Зокрема такі рівняння зустрічаються в задачах опису еволюції популяцій [20], в теорії ядерних реакцій при вивченні процесу уповільнення нейтронів [29], в дифузії заряджених частинок в плазмі та в інших різноманітних задачах. В даній роботі розглядаються нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами типу операторів Вольтерра або, як їх ще називають, операторів пам'яті.

Сформулюємо досліджувану тут задачу. Нехай $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$ — лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $x = (x_1, \ldots, x_n)$ дійсних чисел і наділений нормою $|x| := (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{1/2}$; Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$; $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 — замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема $\Gamma_0 = \emptyset$ або $\Gamma_0 = \partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$; $T > 0$; $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u)+$$

$$+ \int\limits_0^t h(x, t, s, u(x, s))\, ds = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x, t) + f_0(x, t)\,, \quad (x, t) \in Q\,, \tag{1}$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0 \tag{2}$$

Надійшла 05.09.2016

і початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Тут $a_i : Q \times \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $f_i : Q \to \mathbb{R}$, $h : Q \times (0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ – задані дійснозначні функції, $\frac{\partial u}{\partial \nu_a}(x,t) := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)\,\nu_i$, $(x,\,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі".

Типовим прикладом рівнянь вигляду (1), які ми вивчатимемо, є рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u +$$
$$+\int\limits_0^t \widehat{h}_0(x,t,s)\widehat{h}_1(u(x,s))\,ds = f(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q\,, \tag{4}$$

де $\widehat{a}_i > 0$ $(i = \overline{0,n})$, $p_i > 1$ $(i = \overline{0,n})$, $\widehat{h}_0$ — вимірні обмежені функції, $\widehat{h}_1$ — ліпшицева функція. Відмітимо, що величини p_i $(i = \overline{0,n})$, які називають показниками нелінійності, є змінними.

Нелінійні диференціальні рівняння подібні до (4) з $\widehat{h}_0 \equiv 0$ (зі змінними показниками нелінійності) у наш час вивчаються дуже активно (див. [2–7,9,10,13,17]). Мішані задачі для цих рівнянь описують багато фізичних процесів (див. [13,16]), зокрема електромагнітні поля, електрореологічні рідини, процеси відновлення зображення, потік струму в змінних температурних полях. Розв'язки цих задач належать до відповідних узагальнених просторів Лебега і Соболєва. Вперше ці простори були введені у роботі [15], а їх властивості були вивчені у працях [8,11,14,15] та інших.

Рівняння вигляду (4) зі сталими показниками нелінійності та інтегральними операторами досліджувались у роботах [24, 25, 27, 28] та інших. Зокрема у [28] було досліджено мішану задачу для інтегро-диференціального рівняння вигляду

$$u_t(t,x) - \triangle u(t,x) + \int\limits_0^t g(t-s, u(s,x))\,ds = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{на } (0,+\infty) \times \partial\Omega, \quad u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

У праці [25] вивчається скійкість глобального розв'язку нелокального рівняння Вольтерра

$$u_t - \triangle u = (a - bu)u - \int\limits_0^t K(t-s)u(x,s)\,ds, \ \ x \in \Omega,\, t > 0.$$

В даній роботі, на відміну від відомих нам робіт, ми розглядаємо нелінійні рівняння зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами, в яких невідома функція входить під знак інтеграла за часовою змінною, тобто, коли значення розв'язку в актуальний момент часу залежить і від значень розв'язку у попередні моменти часу. Основний результат даної роботи стосується однозначної розв'язності задачі (1) – (3) в узагальнених просторах Лебега і Соболєва.

Структура роботи така. У першому розділі введено основні позначення та допоміжні факти. Формулювання задачі і основного результату містить другий розділ. У третьому розділі обґрунтовано основний результат.

Основні результати

1. Основні позначення і факти. Введемо деякі потрібні нам далі позначення і функційні простори. Нехай $G = \Omega$ або $G = Q$. Припустимо, що функція $r \in L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x) \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Через $L_{r(\cdot)}(G)$ позначимо лінійний простір, який складається з вимірних функцій $v : G \to \mathbb{R}$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де

$$\rho_{G,r}(v) := \int\limits_\Omega |v(x)|^{r(x)}\,dx, \text{ якщо } G = \Omega, \text{ і}$$

$$\rho_{G,r}(v) := \iint\limits_Q |v(x,t)|^{r(x)}\,dxdt, \text{ якщо } G = Q.$$

Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\}$ (див.: [11, p. 599]) і його називають *узагальненим простором Лебега*. Зауважимо, що якщо $r(x) = r_0 = \text{const} \geqslant 1$ для м.в. $x \in \Omega$, то норма $||\cdot||_{L_{r(\cdot)}(G)}$ співпадає зі стандартною нормою $||\cdot||_{L_{r_0}(G)}$ простору Лебега $L_{r_0}(G)$. Згідно з [11, p. 599], якщо $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ можна ототожнити з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де r' визначено рівністю $1/r(x)+1/r'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$. Зауважимо, що множина $C(\overline{G})$ є щільною в $L_{r(\cdot)}(G)$ (див.: [11, p. 603]).

Нехай $p = (p_0, \dots, p_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ – вектор-функція, яка задовольняє таку умову:

$(\mathcal{P})$ для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ є вимірною і $p_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_i(x) > 1$, $p_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_i(x) < +\infty$.

Через $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ позначимо узагальнений простір Соболєва, що складається з функцій $v \in L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ таких, що $v_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(\Omega), \dots, v_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(\Omega)$. Цей простір є банаховим з нормою $||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} := ||v||_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega)} + \sum_{i=1}^n ||v_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ – розумітимемо замикання простору $\widetilde{C}^1(\overline{\Omega}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$ в $W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$.

Покладемо $V_p(\Omega) := \widetilde{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$. Легко переконатися, що $V_p(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $||v||_{V_p(\Omega)} := ||v||_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)} + ||v||_{L_2(\Omega)}$.

Під $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ розумітимемо простір функцій $w \in L_{p_0(\cdot)}(Q)$ таких, що $w_{x_1} \in L_{p_1(\cdot)}(Q), \dots, w_{x_n} \in L_{p_n(\cdot)}(Q)$. Розглядатимемо цей простір з нормою $||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} := ||w||_{L_{p_0(\cdot)}(Q)} + \sum_{i=1}^n ||w_{x_i}||_{L_{p_i(\cdot)}(Q)}$. Визначимо простір $\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$ як замикання простору

$$\widetilde{C}^{1,0}(\overline{Q}) := \left\{w \in C(\overline{Q}) \;\middle|\; w_{x_i} \in C(\overline{Q}) \ (i = \overline{1,n}),\ \ w|_{\Sigma_0} = 0\right\}$$

в $W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)$. Очевидно, що для будь-якої функції $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \bigcap L_2(Q)$ маємо $w(\cdot,t) \in V_p(\Omega)$ для м.в. $t \in (0,T)$.

Покладемо

$$U_p(Q) := \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q) \cap C([0,T]; L_2(\Omega)).$$

Легко переконатися, що це банахів простір з нормою

$$||w||_{U_p(Q)} := ||w||_{W^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)} + ||w||_{L_2(Q)} + \max_{t\in[0,T]} ||w(\cdot,t)||_{L_2(\Omega)}\,.$$

Очевидно, що для будь-якої функції $w \in U_p(Q)$ маємо $w(\cdot,t) \in V_p(\Omega)$ для м.в. $t \in [0,T]$.

І нарешті визначимо простори

$$F_{p'}(Q) := \big\{(f_0, f_1, \ldots, f_n) \;\mid\; f_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q) \;\; (i = \overline{0,n}),$$

$$f_i = 0 \quad \text{в деякому околі поверхні} \quad \Sigma_1 \text{ для кожного } i \in \{1, ..., n\}\big\},$$

де $1/p_i(x) + 1/p_i'(x) = 1$ для м.в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$,

$$C^1_c(0,T) := \{\varphi \in C^1([0,T]) \;\mid\; \operatorname{supp}\varphi \subset (0,T)\}.$$

2. Постановка задачі та формулювання основного результату. Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1) – (3). Для їх означення спочатку введемо відповідні класи вихідних даних.

Нехай p — вектор-функція, яка задовольняє умову $(\mathcal{P})$. Позначимо через $\mathbb{AH}_p$ множину наборів дійснозначних функцій $(a_0, a_1, \ldots, a_n, h)$, які мають такі властивості:

$(\mathcal{A}_1)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $Q \times \mathbb{R}^{1+n} \ni (x,t,\rho,\xi) \mapsto a_i(x,t,\rho,\xi) \in \mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,\rho,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $a_i(x,t,0,0) = 0$ для м.в. $(x,t) \in Q$ $(i = \overline{0,n})$;

$(\mathcal{A}_2)$ для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(\rho,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$|a_i(x,t,\rho,\xi)| \leqslant C_1\big(|\rho|^{2/p_i'(x)} + |\rho|^{p_0(x)/p_i'(x)} + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i'(x)}\big) + h_i(x,t),$$

де $C_1 = \text{const} > 0$, $h_i \in L_{{p'}_i(\cdot)}(Q)$;

$(\mathcal{A}_3)$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і для всіх (ρ_1, ξ^1), $(\rho_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_i(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$
$$+ \big(a_0(x,t,\rho_1,\xi^1) - a_0(x,t,\rho_2,\xi^2)\big)(\rho_1 - \rho_2) \geqslant K_1|\rho_1 - \rho_2|^2\,, \qquad (5)$$

де $K_1 = \text{const} > 0$;

$(\mathcal{A}_4)$ для м.в. $(x,t)\in Q$ і для всіх $(\rho,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,\rho,\xi)\xi_i + a_0(x,t,\rho,\xi)\rho \geqslant K_2\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{p_i(x)} + |\rho|^{p_0(x)}\Big) - g(x,t)\,,$$

де $K_2=\mathrm{const}>0$, $g\in L_1(Q)$ (очевидно, що $g\geqslant 0$);

$(\mathcal{H}_1)$ функція $Q\times(0,T)\times\mathbb{R}\ni(x,t,s,\rho)\mapsto h(x,t,s,\rho)\in\mathbb{R}$ є каратеодорівською, тобто, для м.в. $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$ функція $h(x,t,s,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\rho\in\mathbb{R}$ функція $h(\cdot,\cdot,\cdot,\rho):Q\times(0,T)\to\mathbb{R}$ є вимірною; крім того, $h(x,t,s,0)=0$ для м.в. $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$;

$(\mathcal{H}_2)$ для майже всіх $(x,t,s)\in Q\times(0,T)$ і для будь-яких $\rho_1,\rho_2\in\mathbb{R}$ маємо

$$|h(x,t,s,\rho_1)-h(x,t,s,\rho_2)|\leqslant M|\rho_1-\rho_2|, \tag{6}$$

де $M=\mathrm{const}>0$.

Тепер дамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Означення. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\ldots,a_n,h)\in\mathbb{AH}_p$, $(f_0,f_1,...,f_n)\in F_{p'}(Q)$, $u_0\in L_2(\Omega)$. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) називають функцію $u\in U_p(Q)$, яка задовольняє початкову умову (3) та інтегральну рівність*

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u,\nabla u)v_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)v\varphi +$$
$$+v\varphi\int\limits_0^t h(x,t,s,u(x,s))\,ds - uv\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n} f_i v_{x_i}\varphi + f_0 v\varphi\Big\}\,dxdt \tag{7}$$

для будь-яких $v\in V_p(\Omega)$ і $\varphi\in C_c^1(0,T)$.

Теорема. *Нехай p задовольняє умову $(\mathcal{P})$, $(a_0,a_1,\ldots,a_n,h)\in\mathbb{AH}_p$, $(f_0,f_1,...,f_n)\in F_{p'}(Q)$, $u_0\in L_2(\Omega)$. Припустимо, що*

$$K_1 - MT > 0. \tag{8}$$

Тоді задача (1)–(3) має единий узагальнений розв'язок і для нього правильна оцінка

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big|u_{x_i}(x,t)\big|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)} + |u(x,t)|^2\Big\}\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_2\Big[\iint\limits_Q\Big\{\sum_{j=1}^{n}\big|f_j(x,t)\big|^{p_j'(x)} + g(x,t)\Big\}dxdt + \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\,dx\Big], \tag{9}$$

де $C_2 > 0$ – стала, яка залежить тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i = \overline{0,n})$.

3. Обґрунтування основного результату. Для будь-якої функції $w \in L_1(Q)$ такої, що $w_{x_1}, \dots, w_{x_n} \in L_1(Q)$, введемо позначення

$$\partial_0 w := w, \ \partial_i w := w_{x_i} \ (i = \overline{1,n}),$$
$$a_j(w)(x,t) := a_j(x,t,w(x,t), \nabla w(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \quad j = \overline{0,n},$$
$$h(w)(x,t,s) := h(x,t,s,w(x,s)).$$

При доведенні теореми важливу роль відіграватиме таке твердження (див.:: [26, лема 2])

Лема 1. *Нехай* $w \in \widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q) \cap L_2(Q)$ *та* $g_i \in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i = \overline{0,n})$ *такі, що правильна інтегральна тотожність*

$$\iint\limits_Q \left\{ \sum_{i=0}^n g_i \partial_i v \varphi - w v \varphi' \right\} dxdt = 0, \ v \in V_p(\Omega), \ \varphi \in C_c^1(0,T). \tag{10}$$

Тоді $w \in C([0,T]; L_2(\Omega))$ *і для всіх* $\theta \in C^1([0,T])$, $v \in V_p(\Omega)$ *і* $t_1, t_2 \in [0,T]$ $(t_1 < t_2)$ *правильні рівності*

$$\theta(t_2) \int\limits_\Omega w(x,t_2) v(x)\, dx - \theta(t_1) \int\limits_\Omega w(x,t_1) v(x)\, dx +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=0}^n g_i \partial_i v \theta - w v \theta' \right\} dxdt = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\theta(t_2) \int\limits_\Omega |w(x,t_2)|^2\, dx - \frac{1}{2}\theta(t_1) \int\limits_\Omega |w(x,t_1)|^2\, dx -$$
$$-\frac{1}{2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega |w|^2 \theta'\, dxdt + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=0}^n g_i \partial_i w \right\} \theta\, dxdt = 0\,. \tag{12}$$

Доведення теореми. Спочатку доведемо єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3). Припустимо протилежне і нехай u_1 та u_2 – різні узагальнені розв'язки даної задачі. Розглянемо різницю між тотожностями, отриманими з (7) при підстановці замість u спочатку u_1, а потім – u_2. Із здобутої тотожності на підставі леми 1 при $w = u_1 - u_2$, $\theta \equiv 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = T$, матимемо (див. (12)) рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_\Omega |w(x,T)|^2\, dx + \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) +$$
$$+ (u_1 - u_2) \int\limits_0^t \Big(h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s) \Big) ds \Big\}\, dxdt = 0. \tag{13}$$

Розглянемо члени лівої частини рівності (13). З умови $(\mathcal{A}_3)$ маємо нерівність

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (a_i(u_1) - a_i(u_2))(\partial_i u_1 - \partial_i u_2) \Big\}\, dxdt \geqslant K_1 \iint\limits_Q |u_1 - u_2|^2\, dxdt. \tag{14}$$

На підставі умови $(\mathcal{H}_2)$ (див. (6)) отримаємо

$$|h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)| \leqslant M|u_1(x,s) - u_2(x,s)| \tag{15}$$

для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$.

Використавши нерівність Коші—Буняковського та оцінку (15), матимемо

$$\Big| \iint\limits_Q \Big\{ \big(u_1(x,t) - u_2(x,t)\big) \int\limits_0^t \big(h(u_1)(x,t,s) - h(u_2)(x,t,s)\big) ds \Big\} dxdt \Big| \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^T |w(x,t)| dt \Big) \Big(\int\limits_0^T |w(x,s)| ds \Big) dx = M \int\limits_\Omega \Big(\int\limits_0^T |w(x,t)| dt \Big)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant MT \iint\limits_Q |w(x,t)|^2 dxdt\,. \tag{16}$$

На підставі оцінок (14) та (16) з (13) отримаємо

$$\big(K_1 - MT\big) \iint\limits_Q |w(x,t)|^2\, dxdt \leqslant 0\,.$$

Звідси, врахувавши нерівність (6), отримаємо рівність $\iint\limits_Q |w(x,t)|^2\, dxdt = 0$, тобто, рівність $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ для м.в. $(x,t) \in Q$. Це суперечить нашому припущенню, що і доводить єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Тепер доведемо існування узагальненого розв'язку задачі (1)–(3), використавши метод Фаедо—Гальоркіна. Отож, нехай $\{w_j \in V_p(\Omega) \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ — лінійно незалежна сім'я функцій, яка є повною в просторі $V_p(\Omega)$. Очевидно, що ця сім'я функцій є повною і в $L_2(\Omega)$. Покладемо $V_{p,m}(\Omega) = \Big\{ \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k w_k \Big| \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R} \Big\}$, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що замикання простору $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} V_{p,m}(\Omega)$ за нормою $V_p(\Omega)$ співпадає з простором $V_p(\Omega)$.

Оскільки сім'я функцій $\big\{w_j \mid j \in \mathbb{N}\big\}$ є повною в $L_2(\Omega)$, то можна вибрати послідовність функцій $\{u_{0,m}\}_{m=1}^{\infty}$ таку, що $u_{0,m} \in V_{p,m}(\Omega)$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і

$$||u_0 - u_{0,m}||_{L_2(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{17}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до використання методу Фаедо—Гальоркіна. Для кожного $m \in \mathbb{N}$ гальоркінське наближення u_m шукаємо у вигляді

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_{m,k}(t) w_k(x)\,, \quad (x,t) \in \overline{Q}\,,$$

де $c_{m,1},\dots,c_{m,m}$ – абсолютно неперервні функції, які є розв'язками задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int\limits_{\Omega_t} u_{m,t} w_j\,dx + \int\limits_{\Omega_t}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m)-f_i)\partial_i w_j + \qquad (18)$$

$$+w_j\int\limits_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\,dx = 0\,,\quad j=\overline{1,m}\,,\ t\in\,[0,T]\,,$$

$$u_m|_{t=0} = u_{0,m}\,, \qquad (19)$$

де $\Omega_t := \{(x,t)|\, x\in\Omega\}$, $t\in\,[0,T]$.

Доведемо існування та єдиність розв'язку задачі (18), (19). Оскільки функції $w_1,\dots,w_m$ — лінійно незалежні, то матриця $\Big(a^m_{k,j} := \int\limits_\Omega w_k w_j\,dx\Big)^m_{k,j=1}$ — додатно визначена. Отже систему звичайних диференціальних рівнянь (18) можна записати в нормальній формі. За теоремою Каратеодорі (див.: [1]) отримаємо існування та єдиність глобального розв'язку $c_{1,m},\dots..,c_{m,m}$ задачі (18), (19). Цей розв'язок визначений на проміжку $[0,T_m\rangle$, де $T_m\leqslant T$. Тут кутова дужка "$\rangle$" означає або круглу ")", або квадратну "]" дужку. Далі ми отримаємо оцінки, з яких, зокрема, випливатиме, що $[0,T_m\rangle=[0,T]$.

Для кожного $j\in\{1,...,m\}$ і майже кожного $t\in(0,T)$ домножимо рівність з номером j системи (18) на $c_{m,j}(t)$ і підсумуємо отримані рівності. У результаті для м.в. $t\in(0,T)$ здобудемо

$$\int\limits_{\Omega_t} u_{m,t}u_m\,dx + \int\limits_{\Omega_t}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m)-f_i)\partial_i u_m + u_m\int\limits_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\,dx = 0. \qquad (20)$$

Проінтегруємо рівність (20) за t від 0 до $\tau\in(0,T_m\rangle$, використавши формулу інтегрування частинами. У результаті отримаємо рівність

$$\frac12\int\limits_\Omega |u_m(x,\tau)|^2\,dx - \frac12\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\,dx +$$

$$+[\delta+(1-\delta)]\int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=0}^{n} a_i(u_m)\partial_i u_m\Big\}\,dxdt +$$

$$+\int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega\Big\{u_m\int\limits_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\,dxdt = \int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=0}^{n} f_i\partial_i u_m\Big\}\,dxdt, \qquad (21)$$

де $\delta\in(0,1)$ – довільне число.

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (21). На підставі умов $(\mathcal{A}_1)$ і $(\mathcal{A}_3)$ маємо таку оцінку

$$\int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega\Big\{\sum_{i=0}^{n} a_i(u_m)\partial_i u_m\Big\}\,dxdt \geqslant K_1\int\limits_0^\tau\!\!\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dxdt, \qquad (22)$$

а з умови $(\mathcal{A}_4)$ здобуваємо

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m \Big\}\, dxdt \geqslant K_2 \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)} \Big\}\, dxdt - \int_0^\tau\int_\Omega g(x,t)\, dxdt. \tag{23}$$

З умов $(\mathcal{H}_1)$ і $(\mathcal{H}_2)$ легко випливає нерівність

$$|h(u_m)(x,t,s)| \leqslant M|u_m(x,s)| \tag{24}$$

для м.в. $(x,t,s) \in Q \times (0,T)$.

Врахувавши оцінку (24) та використавши нерівність Коші—Буняковського, матимемо

$$\Big|\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{u_m(x,t)\int_0^t h(u_m)(x,t,s)ds\Big\}dxdt\Big| \leqslant \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{|u_m(x,t)|\cdot\int_0^t |h(u_m)(x,t,s)|ds\Big\}dxdt \leqslant$$
$$\leqslant M\int_\Omega \Big\{\Big(\int_0^\tau |u_m(x,t)|dt\Big)\Big(\int_0^\tau |u_m(x,s)|ds\Big)\Big\}dx \leqslant MT\int_0^\tau\int_\Omega |u_m(x,t)|^2 dxdt\,. \tag{25}$$

Далі використовуватимемо нерівність Юнга:

$$ab \leqslant \varepsilon|a|^q + \varepsilon^{-\frac{1}{q-1}}|b|^{q'}, \quad a,b \in \mathbb{R},\ q>1,\ \varepsilon>0, \tag{26}$$

де $q' = q/(q-1)$.

Виберемо довільним чином значення $\varepsilon \in (0,1)$. Використовуючи нерівність (26), отримаємо

$$\int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i(x,t)\partial_i u_m(x,t)\Big\}\, dxdt \leq$$
$$\leqslant \varepsilon \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{ \sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\, dxdt +$$
$$+ \int_0^\tau\int_\Omega \Big\{\sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- - 1}} |f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}\, dxdt. \tag{27}$$

З (21) на підставі (22), (23), (25) та (27) отримаємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_m(x,\tau)|^2\,dx + \delta K_1 \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} |u_m(x,t)|^2\,dxdt +$$
$$+(1-\delta)K_2 \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt \leqslant MT \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} |u_m(x,t)|^2 dxdt +$$
$$+\varepsilon \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}} |f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\Big\} +$$
$$+(1-\delta)\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} g(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_{0,m}(x)|^2\,dx, \tag{28}$$

де $\tau \in (0, T_m\rangle$.

З (28) безпосередньо отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_m(x,\tau)|^2\,dx + (\delta K_1 - MT) \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} |u_m(x,t)|^2\,dxdt +$$
$$+[(1-\delta)K_2 - \varepsilon] \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=0}^n \varepsilon^{-\frac{1}{p_i^- -1}} |f_i(x,t)|^{p_i'(x)}\Big\}\,dxdt +$$
$$+(1-\delta)\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} g(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |u_{0,m}(x)|^2\,dx, \quad \tau \in (0, T_m\rangle\,. \tag{29}$$

Виберемо і зафіксуємо значення $\delta \in (0,1)$ таке, що $\delta K_1 - MT > 0$ (це можна зробити на підставі (8)), а потім – значення $\varepsilon \in (0,1)$ таке, що $(1-\delta)K_2 - \varepsilon > 0$ і підставимо їх в (29). У результаті здобудемо нерівність

$$\int\limits_{\Omega} |u_m(x,\tau)|^2\,dx + C_3 \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} \Big\{\sum_{i=0}^n |\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}\Big\}\,dxdt + C_4 \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega} |u_m(x,t)|^2\,dxdt \leqslant$$
$$\leqslant C_5\Big[\iint\limits_{Q} \Big\{\sum_{i=0}^n |f_i(x,t)|^{p_i'(x)} + g(x,t)\Big\}\,dxdt + \int\limits_{\Omega} |u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big], \tag{30}$$

де $\tau \in (0, T_m\rangle$ – довільне, а C_3, C_4, C_5 – додатні сталі, яка залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i = \overline{0,n})$ (але не залежать від m).

З (17) випливає, що

$$\int\limits_{\Omega} |u_{0,m}(x)|^2\,dx \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^2\,dx\,. \tag{31}$$

Отже, послідовність $\Big\{\int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою, а тому на підставі нерівності (30) можна зробити висновок, що існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функцію $t\mapsto\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dx$ на $[0,T_m\rangle$, а отже існує незалежна від T_m стала, яка обмежує функції $c_{m,1},\dots,c_{m,m}$ на $[0,T_m\rangle$. Звідси випливає, що $[0,T_m\rangle=[0,T]$. Враховуючи це, з (30) отримаємо нерівність

$$\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega |u_m(x,t)|^2\,dx+\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}+|u_m(x,t)|^2\Big\}\,dxdt\leqslant$$

$$\leqslant C_6\Big[\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n|f_i(x,t)|^{p_i'(x)}+g(x,t)\Big\}\,dxdt+\int\limits_\Omega|u_{0,m}(x)|^2\,dx\Big],\qquad(32)$$

де $C_6>0$ – стала, яка залежать тільки від K_1, K_2, M, T і p_i^- $(i=\overline{0,n})$.

На підставі (31) і (32) здобуваємо

$$\sup_{t\in[0,T]}\int\limits_\Omega|u_m(x,t)|^2\,dx\leqslant C_7\,,\qquad(33)$$

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=0}^n|\partial_i u_m(x,t)|^{p_i(x)}+|u_m(x,t)|^2\Big\}\,dxdt\leqslant C_7\,,\qquad(34)$$

де $C_7>0$ – стала, що не залежить від m.

З умов $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, нерівності (24) та оцінки (34) і (34) отримаємо

$$\iint\limits_Q|a_i(u_m)(x,t)|^{p_i'(x)}\,dxdt\leqslant C_8\,,\quad i=\overline{0,n}\,,\qquad(35)$$

$$\iint\limits_Q\Big|\int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds\Big|^2\,dxdt\leqslant C_9,\qquad(36)$$

де C_8 та C_9 — додатні сталі, що не залежать від m.

Оскільки простори $L_2(Q)$, $L_{p_i(\cdot)}(Q)$, $L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ рефлексивні (див.: [11, ст. 600]), то з оцінок (33)–(36) випливає існування підпослідовності послідовності $\{u_m\}$ (позначатимемо її так само, як і саму послідовність) та функцій $u_*\in L_2(\Omega)$, $u\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)$, $\chi_i\in L_{p_i'(\cdot)}(Q)$ $(i=\overline{0,n})$ і $\zeta\in L_2(Q)$ таких, що

$$u_m(\cdot,T)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u_*(\cdot)\quad\text{слабко в}\quad L_2(\Omega),\qquad(37)$$

$$u_m\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u\quad\text{слабко в}\quad L_2(Q)\quad\text{і слабко в}\quad\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q),\qquad(38)$$

$$a_i(u_m)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\chi_i\ \text{ слабко в }\ L_{p_i'(\cdot)}(Q)\quad(i=\overline{0,n}),\qquad(39)$$

$$\int_0^t h(u_m)\,ds \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \zeta \quad \text{слабко в} \quad L_2(Q). \tag{40}$$

Доведемо, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Виберемо довільним чином і зафіксуємо числа $j, m \in \mathbb{N}$ такі, що $m \geqslant j$. Рівність системи (18) під номером j помножимо на довільну функцію $\theta \in C^1([0,T])$ і проінтегруємо здобуту рівність по $t \in [0,T]$. У результаті після нескладних перетворень, використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\theta(T)\int_\Omega u_m(x,T)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega u_{0,m}(x)w_j(x)\,dx-$$

$$-\iint_Q u_m w_j \theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (a_i(u_m)-f_i)\partial_i w_j + w_j\int_0^t h(u_m)\,ds\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{41}$$

Спрямувавши m до ∞ в (41) і взявши до уваги (17), (37), (38), (39) та (40), отримаємо

$$\theta(T)\int_Q u_*(x)w_j(x)\,dx - \theta(0)\int_Q u_0(x)w_j(x)\,dx-$$

$$-\iint_Q u w_j \theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i w_j + \zeta w_j\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{42}$$

Оскільки j – довільне число, а система функцій $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ повна в просторі $V_p(\Omega)$, то з (42) маємо, що для всіх $v \in V_p(\Omega)$ і $\theta \in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int_\Omega u_*(x)v(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega u_0(x)v(x)\,dx-$$

$$-\iint_Q uv\theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v + \zeta v\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{43}$$

Зауважимо, що оскільки $C_c^1(0,T) \subset C^1([0,T])$, то з (43) отримаємо тотожність

$$\iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v\varphi + \zeta v\varphi - uv\varphi'\Big\}dxdt = 0, \quad v \in V_p(\Omega), \varphi \in C_c^1(0,T). \tag{44}$$

На підставі леми 1 з (44) маємо, що

$$u \in C([0,T]; L_2(\Omega)) \tag{45}$$

і для всіх $v \in V_p(\Omega)$, $\theta \in C^1([0,T])$ правильна рівність

$$\theta(T)\int_\Omega u(x,T)v(x)\,dx - \theta(0)\int_\Omega u(x,0)v(x)\,dx -$$

$$-\iint_Q uv\theta'\,dxdt + \iint_Q \Big\{\sum_{i=0}^n (\chi_i - f_i)\partial_i v + \zeta v\Big\}\theta\,dxdt = 0\,. \tag{46}$$

Порівнюючи (43) і (46), отримаємо рівності

$$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{для м. в.} \quad x\in\Omega\,, \quad u(x,T)=u_*(x) \quad \text{для м. в.} \quad x\in\Omega. \tag{47}$$

Отож, ми встановили, що функція u належить простору $U_p(Q)$ (див. (38) і (45)), задовольняє початкову умову (3) (див. першу з рівностей (47)) та інтегральну тотожність (44). З тотожності (44) випливає тотожність (7), якщо для будь-яких $v\in V_p(\Omega)$ і майже всіх $t\in(0,T)$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}\chi_i\partial_i v+\zeta v\Big\}\,dx=\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=0}^{n}a_i(u)\partial_i v+\Big(\int\limits_0^t h(u)\,ds\Big)v\Big\}\,dx\,. \tag{48}$$

Отож, якщо тотожність (48) правильна, то u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3).

Для доведення тотожності (48) використаємо метод монотонності (див.: [12]). Нехай w – довільна функція з простору $\in\widetilde{W}^{1,0}_{p(\cdot)}(Q)\cap L_2(Q)$. Для кожного $m\in\mathbb{N}$ визначимо

$$W_m:=\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m)-a_i(w))(\partial_i u_m-\partial_i w)+ \\ +(u_m-w)\Big(\int\limits_0^t h(u_m)\,ds-\int\limits_0^t h(w)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt. \tag{49}$$

Використавши умову $(\mathcal{A}_3)$, для довільного $m\in\mathbb{N}$ отримаємо таку оцінку

$$\iint\limits_{Q}\Big\{\sum_{i=0}^{n}(a_i(u_m)-a_i(w))(\partial_i u_m-\partial_i w)\Big\}\,dxdt\geqslant K_1\iint\limits_{Q}|u_m-w|^2\,dxdt. \tag{50}$$

Провівши міркування, аналогічні до тих, які привели нас до (16), отримаємо оцінку

$$\Big|\iint\limits_{Q}\Big\{(u_m(x,t)-w(x,t))\Big(\int\limits_0^t h(u_m)(x,t,s)\,ds-\int\limits_0^t h(w)(x,t,s)\,ds\Big)\Big\}\,dxdt\Big|\leqslant \\ \leqslant MT\iint\limits_{Q}|u_m-w|^2\,dxdt,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{51}$$

Отже, врахувавши (8), здобудемо

$$W_m\geq\big(K_1-MT\big)\iint\limits_{Q}|u_m-w|^2\,dxdt\geqslant 0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{52}$$

Запишемо (49) у вигляді

$$W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m)\, ds \Big\}\, dxdt -$$

$$- \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$

$$+w \int\limits_0^t h(u_m)\, ds + (u_m - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\}\, dxdt, \qquad m \in \mathbb{N}\,. \tag{53}$$

Візьмемо $\tau = T$ в (21). Отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n a_i(u_m)\partial_i u_m + u_m \int\limits_0^t h(u_m) ds \Big\}\, dxdt = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_m(x,T)|^2\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\, dx, \quad m \in \mathbb{N}\,. \tag{54}$$

З (53) на підставі (54) отримаємо

$$0 \leqslant W_m = \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u_m \Big\}\, dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_m(x,T)|^2\, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_{0,m}(x)|^2\, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[a_i(u_m)\partial_i w + a_i(w)(\partial_i u_m - \partial_i w)\big] +$$

$$+w \int\limits_0^t h(u_m)\, ds + (u_m - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\}\, dxdt, \qquad m \in \mathbb{N}\,. \tag{55}$$

На підставі (37) та другої з рівностей (47) маємо

$$\liminf_{m\to\infty} ||u_m(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)} \geqslant ||u(\cdot,T)||_{L_2(\Omega)}\,. \tag{56}$$

Зважаючи на (17), (38) – (40), (56), з (55) здобуваємо

$$0 \leqslant \limsup_{m\to\infty} W_m \leqslant \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n f_i \partial_i u \Big\}\, dxdt - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u(x,T)|^2\, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_\Omega |u_0(x)|^2\, dx - \iint\limits_Q \Big\{ \sum_{i=0}^n \big[\chi_i \partial_i w + a_i(w)(\partial_i u - \partial_i w)\big] +$$

$$+w\zeta + (u - w) \int\limits_0^t h(w)\, ds \Big\} dxdt\,. \tag{57}$$

Із (44), використовуючи лему 1 при $\theta \equiv 1$ і першу з рівностей (47), отримаємо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} \chi_i \partial_i u + \zeta u \Big\} \, dxdt = \iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i \partial_i u \Big\} \, dxdt - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u(x,T)|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^2 \, dx \, . \qquad (58)$$

Отже, з (57) і (58) отримаємо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(w))(\partial_i u - \partial_i w) + \Big(\zeta - \int\limits_{0}^{t} h(w) \, ds \Big)(u - w) \Big\} dxdt \geqslant 0 \, . \qquad (59)$$

Приймемо $w = u - \lambda v \varphi$ в (59), де $v \in V_p(\Omega)$, $\varphi \in C_c^1(0,T)$, $\lambda > 0$ – довільні, і поділимо отриману нерівність на λ. У результаті матимемо

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(u - \lambda v \varphi)) \partial_i v \varphi + \big(\zeta - \int\limits_{0}^{t} h(u - \lambda v \varphi) \, ds \big) v \varphi \Big\} \, dxdt \geqslant 0 \, . \qquad (60)$$

Перейдемо в (60) до границі при $\lambda \to 0+$, використавши умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_2)$ і теорему Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла (див.: [30, ст. 648]). У результаті отримаємо рівність

$$\iint\limits_{Q} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} (\chi_i - a_i(u)) \partial_i v + \big(\zeta - \int\limits_{0}^{t} h(u) \, ds \big) v \Big\} \varphi \, dxdt = 0$$

для будь-яких $v \in V_p(\Omega)$ і $\varphi \in C_c^1(0,T)$. Звідси легко випливає тотожність (48).

Покажемо, що виконується оцінка (9). На підставі леми 1 з інтегральної тотожності (7), враховуючи (3), отримаємо рівність

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u(x,\tau)|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |u_0(x)|^2 \, dx + \\ + [\delta + (1-\delta)] \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i(u) \partial_i u \Big\} \, dxdt + \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \Big\{ u \int\limits_{0}^{t} h(u) \, ds \Big\} \, dxdt = \\ = \int\limits_{0}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=0}^{n} f_i \partial_i u \Big\} \, dxdt, \quad \tau \in [0,T]. \qquad (61)$$

де $\delta \in (0,1)$ – довільне число. Далі, міркуючи цілком аналогічно, як при переході від (21) до (32), здобудемо (9). Теорема повністю доведена.

Висновки. В даній роботі досліджено мішані задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності та інтегральними членами типу Вольтерра. Наскільки нам відомо, раніше такі задачі не розглядалися. Тут доведено однозначну розв'язність таких задач в узагальнених просторах Лебега і Соболєва. При доведенні існування узагальнених розв'язків досліджуваних задач використано методи Гальоркіна і монотонності. Також отримано відповідні оцінки узагальнених розв'язків задач, які тут розглянуті.

Бокало М. М., Сус О. Я.

Смешанные задачи для нелинейных параболических уравнений с переменными показателями нелинейности и интегральными операторами типа Вольтерра

Резюме

Исследованы смешанные задачи для нелинейных параболических уравнений с переменными показателями нелинейности и интегральными операторами типа Вольтерра. Доказано существование и единственность обобщенных решений таких задач в соответствующих обобщенных пространствах Соболева. Также установлены оценки обобщенных решений рассматриваемых задач.

Ключевые слова: интегро-диференциальное уравнение, параболические уравнения, переменные показатели нелинейности, метод Галеркина, метод монотонности.

Bokalo M. M., Sus O. Y.

Initial-boundary value problems for nonlinear parabolic equations with the variable exponents of nonlinearity and integral operators type Volterra

Summary

Initial-boundary value problems for nonlinear Volterra integro-differential equations with the variable exponents of nonlinearity are investigated. Weak solutions which belong to the generalized Sobolev and Lebesgue spaces are considered. Under certain conditions on data-in the uniqueness and existence of the solutions are proved. Also estimates of the solutions are obtained.

Key words: integro-differential equation, parabolic equation, variable exponents of nonlinearity, Galerkin's method, monotone method.

References

1. Alexiewicz, A. and Orlicz, W. (1955) 'On a theorem of C. Caratheodory', *Annales Polonici Mathematici*, 1, pp. 414–417.
2. Alkhutov, Y., Antontsev, S. and Zhikov, V. (2009) 'Parabolic equations with variable order of nonlinearity', *Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine*, 6, pp. 23–50.
3. Antontsev, S. and Shmarev, S. (2008) 'Extinction of solutions of parabolic equations with variable anisotropic nonlinearities', *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 261, pp. 11–21.
4. Bokalo, M. and Domanska, O. (2007) 'On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces', *Matematychni Studii*, 28(1), pp. 77–91.

5. Bokalo, M. and Pauchok, I. (2006) 'On the well-posedness of a Fourier problem for nonlinear parabolic equations of higher order with variable exponents of nonlinearity', *Matematychni Studii*, 24(1), pp. 25–48.
6. Buhrii, O. and Lavrenyuk, S. (2001) 'On a parabolic variational inequality that generalizes the equation of polytropic filtration', *Ukrainian Mathematical Journal*, 53(7), pp. 1027–1042.
7. Buhrii, O. and Mashiyev, R. (2009) 'Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity', *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 70(6), pp. 2335–2331.
8. Fan, X. and Zhao, D. (2001) 'On the space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 263, pp. 424–446.
9. Fu, Y. and Pan, N. (2010) 'Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 362, pp. 313–326.
10. Kováčik, O. (1995) 'Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$', *Fasciculi Mathematici*, 25, pp. 87–94.
11. Kováčik, O. and Rákosníc, J. (1991) 'On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$', *Czechoslovak Mathematical Journal*, 41(116), pp. 592–618.
12. Lions, J. (1969) 'Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires', *Dunod Gauthier-Villars*, Paris.
13. Mashiyev, R. and Buhrii, O. (2011) 'Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377, pp. 450–463.
14. Musielak, J. (1983) 'Orlicz spaces and modular spaces', *Lecture Notes in Mathematics*, (Springer Verlag, Berlin-Heidelberg).
15. Orlicz, W. (1931) 'Uber konjugierte Exponentenfolgen', *Studia Mathematica (Lwow)*, 3, pp. 200–211.
16. Rŭžička, M. (2000) 'Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory', *Lecture Notes in Mathematics*, 1748, (Springer-Verlag, Berlin).
17. Zhikov, V. and Pastukhova, S. (2010) 'Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations', *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 270, pp. 104–131.
18. Abbasbandy and Ghehsareh, H. (2010) 'The He's Variational Iteration Method for Solving the Integro-differential Parabolic Problem with Integral Conditions', *Department of Mathematics Imam Khomeini International University Ghazvin.An International Journal(AAM) Special Issue*, 1, pp. 12—23.
19. Colombo, F. (2001) 'Direct and Inverse Problems for a Phase-Field Model with Memory', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 260, pp. 517—545.
20. I. Kozhanov, A. (1994) 'Parabolic equations with nonlocal nonlinear source', *Siberian Mathematical Journal*, 35(5).
21. Kumar, K., Kumar, R. and Shukla, R. (2012) 'Nonlocal Parabolic Integro-differential Equations with Delays', *International Journal of Applied Mathematical Research*, 1(4), pp. 549–564.
22. Loayza, M. (2013) 'Asymptotic behavior of solutions to parabolic problems with nonlinear nonlocal terms', *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013(228), pp. 1–12.
23. Souplet, P. (1999) 'Uniform blow-up profiles and boundary behavior for diffusion equations with nonlocal nonlinear source', *Journal of differential equations*, 153, pp. 374–406.

24. Yamada, Y. (1984) 'Asymptotic stability for some system of semilinear Volterra diffusion equations', *Journal Differential Equations*, 52, pp. 295–326.

25. Yamada, Y. (1982) 'On a certain class of semilinear Volterra diffusion equations', *J. Math. Anal. Appl.*, 88, pp. 443–457.

26. Bokalo, M., Buhrii, O. and Mashiyev, R. (2014) 'Unique solvability of initial-boundary-value problems for anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity', *J. Nonlinear Evolution Equations and Appl.*, 2013(6), pp. 67–87.

27. Engler, H. (1983) 'On some parabolic integro-differential equations: existence and asymptotics of solutions', *Lecture Notes in Math.*, 1017, pp. 161–167.

28. Heard, M. and Rankin, S. (1988) 'A semilinear parabolic Volterra integro-differential equation', *J. Differential Equations*, 71(2), pp. 201–233.

29. Liut, D. and Mu, C. (2010) 'Blow-up analysis for a semilinear perabolic equation with nonlinear memory and nonlocal nonlinear boundary condition', *Electronic Jornal of Qualitative Theory of Differentuial Equations*, 51, pp. 1–17.

30. Evans, L.C. (1998) 'Partial Differential Equations', *Graduate studies in mathematics*, American Mathematical Society, Volume 19, 662 p.

ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 2(28).– С. 37–45

УДК 517.95

Н. М. Гузик
Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕЛОКАЛЬНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З СИЛЬНИМ СТЕПЕНЕВИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта у одновимірному параболічному рівнянні з виродженням. Задано крайові умови Неймана та нелокальну умову перевизначення. Досліджено випадок сильного степеневого виродження.
MSC: 35R30, 35K65.
Ключові слова: нелокальна обернена задача, параболічне рівняння, сильне степеневе виродження .

Вступ. У роботі розглядається обернена задача визначення залежного від часу коефіцієнта перед першою похідною невідомої функції у одновимірному параболічному рівнянні. Відомо, що старший коефіцієнт рівняння є добутком строго додатної функції, що залежить як від просторової змінної, так і від часу, та спепеневої функції від часу, що спричиняє виродження рівняння. Задано крайові умови Неймана та нелокальну умову перевизначення. Наша мета — встановити умови існування та єдиності класичного розв'язку згаданої задачі у випадку сильного степеневого виродження.

Обернені задачі визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні без виродження на сьогодні вивчені достатньо повно (див., наприклад: [1–6] та бібліографію у них). Роботи [1–4] об'єднує ще й те, що старший коефіцієнт у параболічному рівнянні залежить лише від часової змінної. Це дає можливість використати при дослідженні явний вигляд функції Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності. У роботах [5, 6] старший коефіцієнт у параболічному рівнянні залежить і від просторової і від часової змінних. У цьому випадку при дослідженні використовується функція Гріна першої крайової задачі для повного параболічного рівняння, яка існує при виконанні деяких умов на вихідні дані задачі.

Обернені задачі визначення коефіцієнта $a = a(t),\ t \in [0, T]$ у параболічному рівнянні зі степеневим виродженням

$$u_t = a(t)t^{\beta}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t)$$

розглядались у роботах М. І. Іванчова, Н. В. Салдіної [7,8]. Авторами встановлено, що на відміну від слабкого степеневого виродження $(0 < \beta < 1)$, для розв'язності задачі у випадку сильного степеневого виродження $(\beta \geqslant 1)$ на молодші коефіцієнти рівняння потрібно накладати певну поведінку при $t \to 0$.

Умови розв'язності обернених задач визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні зі слабким степеневим виродженням в області з фіксованими межами знайдено в [9, 10]. Коректність оберненої задачі визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні з сильним степеневим виродженням встановлено в [11]. У цій роботі старший

Надійшла 10.09.2016

коефіцієнт рівняння залежить лише від часу, задаються крайові умови Діріхле та інтегральна умова перевизначення.

Основні результати

1. Формулювання задачі та основні результати. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $b = b(t)$ в рівнянні

$$u_t = a(x,t)t^{\beta}u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами Неймана

$$u_x(0,t) = \mu_1(t),\ u_x(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та нелокальною умовою перевизначення

$$\gamma_1(t)u(0,t) + \gamma_2(t)u(h,t) = \mu_3(t),\ t \in [0,T]. \tag{4}$$

Досліджується випадок сильного виродження, коли $\beta \geqslant 1$.

Умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(4) містяться у такій теоремі.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^3[0,h],\ a,c,f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T),\ \mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2,3,\ \gamma_i \in C^1[0,T], i = 1,2$*;*

2) $a(x,t) > 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T,\ \gamma_1(t)\mu_1(t) + \gamma_2(t)\mu_2(t) \neq 0, \in [0,T],\ |f(x,t)| \leqslant A_1t^{\gamma},\ |c(x,t)| + |c_x(x,t)| \leqslant A_2t^{\gamma}, (x,t) \in \overline{Q}_T,\ |\mu_3'(t)| \leqslant A_3t^{\gamma},\ |\gamma_1'(t)| + |\gamma_2'(t)| \leqslant A_4t^{\gamma},\ t \in [0,T]$*, де* $A_i,\ i = 1,2,3,4$ *— довільні додатні сталі,* $\gamma > \frac{\beta-1}{2}$ *— довільне число;*

3) $\mu_1(0) = \varphi'(0), \quad \mu_2(0) = \varphi'(h),\ \gamma_1(0)\varphi(0) + \gamma_2(0)\varphi(h) = \mu_3(0).$

Тоді існує єдиний розв'язок $(b,u) \in C[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $|b(t)| \leqslant M_0t^{\eta}$ *з* $\eta = \min\{\gamma, \frac{\beta+1}{2}\}$ *задачі (1)–(4), де числа* $M_0 > 0$ *та* T_0, $0 < T_0 \leqslant T$ *визначаються вихідними даними цієї задачі.*

2. Зведення задачі (1)–(4) до системи рівнянь. Позначимо $v(x,t) \equiv u_x(x,t),\ w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Пряму задачу (1)–(3) замінимо інтегральним рівнянням

$$u(x,t) = x(\mu_2(t) - \mu_1(t)) + \frac{x^2}{2h}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\big) +$$
$$+\varphi(x) + \int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)(f(\xi,\tau) - \xi\mu_1'(\tau) - \frac{\xi^2}{2h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) +$$
$$+a(\xi,\tau)\tau^{\beta}(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))))d\xi d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)b(\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau = \sum_{i=1}^{5} I_i, \tag{5}$$

де $G_2 = G_2(x,t,\xi,\tau)$ — функція Гріна другої крайової задачі для рівняння

$$u_t = a(x,t)t^\beta u_{xx}. \tag{6}$$

Відомо [12, с. 460], що за умов теореми ця функція існує та для неї виконується рівність

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1. \tag{7}$$

Побудуємо задачу для функції $v = v(x,t)$. Для цього продиференціюємо (1) та використаємо (2), (3). Отримаємо

$$v_t = a(x,t)t^\beta v_{xx} + (b(t) + a_x(x,t))v_x + c(x,t)v + c_x(x,t)u + f_x(x,t), \tag{8}$$

$$v(x,0) = \varphi'(x),\ x \in [0,h], \tag{9}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t),\ v(h,t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T]. \tag{10}$$

За допомогою функції Гріна $G_1 = G_1(x,t,\xi,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$u_t = a(x,t)t^\beta u_{xx} + a_x(x,t)t^\beta u_x,$$

задачу (8)–(10) зведемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $v = v(x,t), w = w(x,t)$:

$$v(x,t) = \mu_2(t) - \mu_1(t) + \frac{x}{h}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\big) + \varphi'(x) +$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(f_\xi(\xi,\tau) - \mu_1'(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\xi,\tau)\tau^\beta\varphi'''(\xi) +$$

$$+a_\xi(\xi,\tau)\tau^\beta(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))))d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\tau)w(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau = \sum_{i=1}^6 J_i, \tag{11}$$

$$w(x,t) = \mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0) + \varphi''(x) + \int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(f_\xi(\xi,\tau) -$$

$$-\mu_1'(\tau) - \frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\xi,\tau)\tau^\beta\varphi'''(\xi) + a_\xi(\xi,\tau)\tau^\beta(\varphi''(\xi) + \frac{1}{h}(\mu_2(\tau) -$$

$$-\mu_1(\tau) - \mu_2(0) + \mu_1(0))))d\xi d\tau + \int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\tau)w(\xi,\tau) +$$

$$+c(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau = \sum_{i=1}^7 K_i. \tag{12}$$

Зауважимо, що рівняння (12) отримане з (11) шляхом диференціювання за просторовою змінною. Щоб отримати рівняння стосовно функції $b=b(t)$ здиференціюємо нелокальну умову (4) та використаємо (1)–(3):

$$b(t)=\Big(\mu_3'(t)-(\gamma_1'(t)+\gamma_1(t)c(0,t))u(0,t)-(\gamma_2'(t)+\gamma_2(t)c(h,t))u(h,t)-$$

$$-\gamma_1(t)a(0,t)t^\beta w(0,t)-\gamma_2(t)a(h,t)t^\beta w(h,t)-\gamma_1(t)f(0,t)-\gamma_2(t)f(h,t)\Big)\times$$

$$\times(\gamma_1(t)\mu_1(t)+\gamma_2(t)\mu_2(t))^{-1},\ t\in[0,T]. \tag{13}$$

Таким чином задачу (1)–(4) зведено до еквівалентної системи рівнянь (5), (11)–(13). Еквівалентність розуміємо так: якщо $(b,u)\in C[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ є розв'язком задачі (1)–(4), то (u,v,w,b) — неперервний розв'язок системи рівнянь (5), (11)–(13) і навпаки.

3. Існування розв'язку задачі (1)–(4). Для доведення існування розв'язку задачі (1)–(4) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку до еквівалентної системи рівнянь (5), (11)–(13). Для цього встановимо апріорні оцінки розв'язків цієї системи рівнянь.

Позначимо $U(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|u(x,t)|, V(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|v(x,t)|,\ W(t)=\max\limits_{x\in[0,h]}|w(x,t)|,$ $\widetilde{b}(t)=\max\limits_{\tau\in[0,t]}|b(\tau)|,\ t\in[0,T]$. Використовуючи (7) та оцінки [12, с. 468]

$$|D_t^rD_y^sG_1(y,t,\eta,\tau)|\leqslant C_1(t-\tau)^{-\frac{1+2r+s}{2}}\exp\left(-C_2\frac{(y-\eta)^2}{t-\tau}\right), \tag{14}$$

де $r\in\{0,1\}, s\in\{0,1,2\}, 2r+s=1$ або $2r+s=2, \tau<t$, з (5), (11)–(13) знаходимо

$$U(t)\leqslant C_3+C_4\int\limits_0^t\left(\widetilde{b}(\tau)V(\tau)+\tau^\gamma U(\tau)\right)d\tau,\ t\in[0,T], \tag{15}$$

$$V(t)\leqslant C_5+C_6\int\limits_0^t\left(\widetilde{b}(\tau)W(\tau)+\tau^\gamma(V(\tau)+U(\tau))\right)d\tau,\ t\in[0,T], \tag{16}$$

$$W(t)\leqslant\frac{C_7}{t^{\frac{\beta-1}{2}}}+C_8\int\limits_0^t\frac{\widetilde{b}(\tau)W(\tau)+\tau^\gamma(V(\tau)+U(\tau))}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}d\tau,\ t\in(0,T], \tag{17}$$

$$|b(t)|\leqslant C_9t^\gamma+C_{10}t^\beta V(t)+C_{11}t^\gamma U(t),\ t\in[0,T]. \tag{18}$$

Розв'язуючи систему інтегральних нерівностей як в [11], одержимо

$$|W(x,t)|\leqslant\frac{M_1}{t^{\frac{\beta-1}{2}}},\ (x,t)\in[0,h]\times(0,t_1], \tag{19}$$

$$|u(x,t)|\leqslant M_2,\ (x,t)\in[0,h]\times[0,t_1], \tag{20}$$

$$|v(x,t)|\leqslant M_3,\ (x,t)\in[0,h]\times[0,t_1], \tag{21}$$

$$|b(t)| \leqslant M_0 t^{\eta},\ t \in [0, t_1], \tag{22}$$

де число $t_1, 0 < t_1 \leqslant T$ визначається вихідними даними задачі (1)-(4).

Введемо нові функції $p(t) = b(t)t^{-\eta}, \widetilde{w}(x,t) = t^{\frac{\beta-1}{2}} w(x,t)$. Тоді з (5), (11)–(13), отримаємо

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{4} I_i + \int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\tau^{\eta} p(\tau) v(\xi,\tau) d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}, \tag{23}$$

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{5} J_i + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} p(\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c_{\xi}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\Big) d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}, \tag{24}$$

$$\widetilde{w}(x,t) = t^{\frac{\beta-1}{2}} \sum_{i=1}^{6} K_i + t^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} p(\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c_{\xi}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\Big) d\xi d\tau,\ (x,t) \in \overline{Q}_{t_1}, \tag{25}$$

$$p(t) = \Big(\mu_3'(t) - (\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)c(0,t))u(0,t) - (\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)c(h,t))u(h,t) -$$

$$- \gamma_1(t)a(0,t)t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{w}(0,t) - \gamma_2(t)a(h,t)t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{w}(h,t) - \gamma_1(t)f(0,t) - \gamma_2(t)f(h,t)\Big) \times$$

$$\times t^{-\eta}(\gamma_1(t)\mu_1(t) + \gamma_2(t)\mu_2(t))^{-1},\ t \in [0, t_1]. \tag{26}$$

Візьмемо довільні $(u, v, \widetilde{w}, p)$, для яких справедливі оцінки (19)–(22). Оцінимо праві частини рівнянь (23)–(26), використовуючи при цьому (19)–(22):

$$|P_1(u,v,\widetilde{w},p)| \equiv \left| \sum_{i=1}^{4} I_i + \int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\tau^{\eta} p(\tau)v(\xi,\tau) d\xi d\tau \right| \leqslant C_3 + C_{12} t^{\eta+1},$$

$$|P_2(u,v,\widetilde{w},p)| \equiv \left| \sum_{i=1}^{5} J_i + \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} p(\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c_{\xi}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\Big) d\xi d\tau \right| \leqslant C_5 + C_{13} t^{\eta-\frac{\beta-3}{2}} + C_{14} t^{\gamma+1}.$$

$$|P_3(u,v,\widetilde{w},p)| \equiv \left| t^{\frac{\beta-1}{2}} \sum_{i=1}^{6} K_i + t^{\frac{\beta-1}{2}} \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} p(\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c_{\xi}(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\Big) d\xi d\tau \right| \leqslant C_7 + C_{15} t^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} + C_{16} t^{\gamma}.$$

Зауважимо, що в отриманих оцінках сталі C_3, C_5, C_7 менші за M_2, M_3, M_1 відповідно. Виберемо число $t_2, 0 < t_2 \leqslant T$ так, щоб виконувались нерівності

$$C_3 + C_{12}t^{\eta+1} \leqslant M_2,$$

$$C_5 + C_{13}t^{\eta-\frac{\beta-3}{2}} + C_{14}t^{\gamma+1} \leqslant M_3,$$

$$C_7 + C_{15}t^{\eta-\frac{\beta-1}{2}} + C_{16}t^{\gamma} \leqslant M_1.$$

У результаті отримаємо

$$|P_1(u,v,\widetilde{w},p)| \leqslant M_2,\ (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2], \tag{27}$$

$$|P_2(u,v,\widetilde{w},p)| \leqslant M_3,\ (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2], \tag{28}$$

$$|P_3(u,v,\widetilde{w},p)| \leqslant M_3,\ (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2]. \tag{29}$$

Крім того, враховуючи (27)–(29), з (26) знаходимо

$$|P_4(u,v,\widetilde{w},p)| \equiv \Bigg|\Bigg(\mu_3'(t) - \gamma_1(t)a(0,t)t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{w}(0,t) - \gamma_2(t)a(h,t)t^{\frac{\beta+1}{2}}\widetilde{w}(h,t) -$$

$$-(\gamma_1'(t) + \gamma_1(t)c(0,t))u(0,t) - (\gamma_2'(t) + \gamma_2(t)c(h,t))u(h,t) - \gamma_1(t)f(0,t) -$$

$$-\gamma_2(t)f(h,t)\Bigg)t^{-\eta}(\gamma_1(t)\mu_1(t) + \gamma_2(t)\mu_2(t))^{-1}\Bigg| \leqslant M_0,\ t \in [0,t_2]. \tag{30}$$

У банаховому просторі $\mathbb{B} = (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 \times (C[0,T_0])$ визначимо множину $N = \{(u,v,\widetilde{w},p) \in (C(\overline{Q}_{T_0}))^3 \times (C[0,T_0]) : |u(x,t)| \leqslant M_2,\ \ |v(x,t)| \leqslant M_3, |\widetilde{w}(x,t)| \leqslant M_1, |p(t)| \leqslant M_0\}$, де $T_0 = \min\{t_1,t_2\}$. Очевидно, що множина N замкнена і опукла. Систему (23)–(26) подамо у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (u,v,\widetilde{w},p)$, а оператор $P = (P_1,P_2,P_3,P_4)$ визначається правими частинами рівнянь (23)–(26). Згідно з вище наведеними міркуваннями, оператор P переводить множину N в себе. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться, як в [13, с. 27]. Тоді, згідно з теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, існує неперервний розв'язок системи (23)–(26), а отже і розв'язок задачі (1)–(4) при $x \in [0,h],\ t \in [0,T_0]$.

4. Єдиність розв'язку задачі (1)–(4). Єдиність розв'язку задачі (1)–(4) будемо доводити методом від супротивного, виходячи з системи рівнянь (23)–(26). Припустимо, що існують два розв'язки $(u_i, v_i, \widetilde{w}_i, p_i), i = 1,2$ системи рівнянь (23)–(26). Тоді в області $\overline{Q}_{T_0}$ для різниць $u = u_1 - u_2, v = v_1 - v_2, \widetilde{w} = \widetilde{w}_1 - \widetilde{w}_2, p = p_1 - p_2$ отримуємо систему

$$u(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\tau^{\eta}\Big(p_1(\tau)v(\xi,\tau) + v_2(\xi,\tau)p(\tau)\Big)d\xi d\tau, \tag{31}$$

$$v(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}(p_1(\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau) + \widetilde{w}_2(\xi,\tau)p(\tau)) +$$

$$+c(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau, \tag{32}$$

$$w(x,t)=t^{\frac{\beta-1}{2}}\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Big(\tau^{\eta-\frac{\beta-1}{2}}(p_1(\tau)\widetilde{w}(\xi,\tau)+\widetilde{w}_2(\xi,\tau)p(\tau))+$$

$$+c(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\Big)d\xi d\tau, \tag{33}$$

$$p(t)=-t^{-\eta}\Big((\gamma_1'(t)+\gamma_1(t)c(0,t))u(0,t)+(\gamma_2'(t)+\gamma_2(t)c(h,t))u(h,t)+$$

$$+t^{\frac{\beta+1}{2}}(\gamma_1(t)a(0,t)\widetilde{w}(0,t)+\gamma_2(t)a(h,t)\widetilde{w}(h,t))\Big)(\gamma_1(t)\mu_1(t)+\gamma_2(t)\mu_2(t))^{-1}. \tag{34}$$

Підставимо (34) в (31)–(33). У результаті отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду відносно невідомих $u=u(x,t)$, $v=v(x,t), w=w(x,t)$. Враховуючи (14), можемо стверджувати, що ядра цієї системи мають інтегровні особливості, а сама система, відповідно, лише тривіальний розв'язок. Використовуючи цей факт в (34), знаходимо

$$p(t)=0,\ t\in[0,T_0],$$

що й завершує доведення теореми.

Зауваження. *З доведення теореми випливає, що функції* $u=u(x,t)$, $v=v(x,t)$ *неперервні в* $\overline{Q}_{T_0}$, *функція* $w=w(x,t)$ *поводить себе як* $t^{\frac{1-\beta}{2}}$ *при* $t\to 0$, *а* $b(t)$ *прямує до нуля при* $t\to 0$ *як степенева функція* t^η. *Поведінка функції* $b=b(t)$ *при* $t\to 0$ *зумовлена тим, щоб забезпечити збіжність інтеграла* K_7 *та встановити поведінку функції* $w=w(x,t)$ *як розв'язку інтегрального рівняння (12).*

Висновки. В роботі встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу молодшого коефіцієнта у параболічному рівняння з сильним степеневим виродженням. Для доведення існування розв'язку використано теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, а при доведенні єдиності — властивості розв'язків систем однорідних інтегральних рівнянь Вольтера другого роду з ядрами, що мають інтегровні особливості.

1. **Cannon J. R.** Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation / J. R. Cannon, S. Peres-Esteva // Inverse Problems. – 1993. – V.10, №3. – P. 521–531.
2. **Yin Hong-Ming.** Global solvability for some parabolic inverse problems / Hong-Ming Yin // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – P. 392–403.
3. **Trong D. D.** Coefficient identification for a parabolic equation / D. D. Trong, D. D. Ang // Inverse Problems. – 1994. – V. 10, № 3. – P. 733–752.

4. **Пабирівська Н.** Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні / Н. Пабирівська, О. Вареник // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 181–189.
5. **Снітко Г. А.** Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / Г. А. Снітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 4. – С. 7–18.
6. **Snitko H.** On a coefficient inverse problem for a parabolic equation in a domain with free boundary / H. Snitko // J. of Math. Sciences. – 2014. – V. 200, 3. – P. 374–388.
7. **Салдіна Н. В.** Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням / Н. В. Салдіна // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2006. – Вип. 288. Матем. – С. 99–106.
8. **Іванчов М. І.** Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням / М. І. Іванчов, Н. В. Салдіна // Укр. мат. ж. – 2006. – Т. 58, №11. – С. 1487–1500.
9. **Гринців Н.** Визначення коефіцієнта перед першою похідною у параболічному рівнянні з виродженням / Н. Гринців // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. — С. 78–87.
10. **Hryntsiv N. M.** Non-local inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation / N. Hryntsiv // Вісн. нац. ун-ту «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки. – 2011. — Вип. 696, № 696. – С. 32–39.
11. **Гузик Н. М.** Визначення молодшого коефіцієнта у параболічному рівнянні з сильним степеневим виродженням / Н. М. Гузик // Укр. мат. журн. – 2016. – 68, № 6. – С. 922–932.
12. **Ладыженская О. А.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа /О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева – М.: Наука, 1967.
13. **Ivanchov M.** Inverse problems for equations of parabolic type / M. Ivanchov. – Lviv: VNTL Publishers, 2003. – 240 p.

Гузык Н. Н.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНЫМ СТЕПЕННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Резюме

Установлены условия существования и единственности классического решения обратной задачи определения зависящего от времени младшего коэффициента в одномерном параболическом уравнении с вырождением. Заданы краевые условия Неймана, а также нелокальное условие переопределения. Исследован случай сильного степенного вырождения.

Ключевые слова: нелокальная обратная задача, параболическое уравнение, сильное степенное вырождение.

Huzyk N. M.

NON-LOCAL INVERSE PROBLEM FOR THE PARABOLIC EQUATION WITH STRONG POWER DEGENERATION

Summary

There are established conditions of existence and uniqueness of the classical solution to the inverse problem of identification the time dependent minor coefficient in a one-dimensional

degenerate parabolic equation. The Neuman boundary conditions and non-local overdetermination condition are given. It is investigated the case of strong power degeneration.
Key words: non-local inverse problem, parabolic equation, strong power degeneration.

References

1. Cannon J. R., Peres-Esteva S. (1993). Determination of the coefficient of u_x in a linear parabolic equation *Inverse Problems,* V.10, №3, P. 521-531.
2. Hong - Ming Yin. (1991). Global solvability for some parabolic inverse problems *J. Math. Anal. Appl,* P. 392-403.
3. Trong D. D., Ang D. D. (1994). Coefficient identification for a parabolic equation *Inverse Problems,* V. 10, № 3, P. 733-752.
4. Pabyrivska N., Varenyk O. (2005). Vyznachennya molodshogo koefitciyenta u parabolochnomu rivnyanni [An identification of the minor coefficient in a parabolic equation]. *Visnyk Lviv. un-tu. Seriya mech.-mat.,* V. 64, P. 181-189.
5. Snitko H. (2007). Obernena zadacha dlya parabolichnogo rivnyannya v oblasti z vilnoyu megeyu [An inverse problem for the parabolic equation in a free boundary domain]. *Mat. metody ta fiz.-mech. polya,* V.50, № 4, P. 7-18.
6. Snitko H. (2014). On a coefficient inverse problem for a parabolic equation in a domain with free boundary. *J. of Math. Sciences,* V. 200, 3, P. 374-388.
7. Saldina N. V. (2006). Identyfikatsiya starshogo koefitsiyenta v parabilichnomu rivnyanni z vyrodgennyam [An identification of the major coefficient in a parabolic equation with degeneration.] *Nauk. visnyk Chernivetskogo un-tu.* V. 288, Math., P. 99-106.
8. Ivanchov M. I., Saldina N. V. (2006). Obernena zadacha dlya parabolichnogo rivnyannya z sylnym stepenevym vyrodgennyam [Inverse problem for parabolic equation with strong power degeneration]. *Ukr. math. j.* V. 58, №11, P. 1487-1500.
9. Hryntsiv N. (2009). Vyznachennya koefitsienta pered pershoyu pochidnoyu u parabolichnomu rivnyanni z vyrodgennyam [An identification of the minor coefficient in a parabolic equation with degeneration]. *Visnyk Lviv. un-tu. Seriya mech.-mat.,* V. 71, P. 78-87.
10. Hryntsiv N. M. (2011). Non-local inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation. *Visn. nats. un-tu. «Lvivska politechnika». «Fizyko-matematychni nauky».* V. 696, № 696, P. 32-39.
11. Huzyk N. (2016). Vyznachennya molodshogo koefitsienta u parabolichnomu rivnyanni z sylnym stepenevym vyrodgennyam [An identification of the minor coefficient in a parabolic equation with strong power degeneration]. *Ukr. math. j.* V. 68, № 6, P. 922-932.
12. Ladyzhenskaya O. A., Uralcevav N. N., Solonnikov V. A. (1973). *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* Moscow: Nauka, 736 p.
13. Ivanchov M. (2003). *Inverse problems for equations of parabolic type.* Lviv: VNTL Publishers, 240 p.

УДК 517.968

Т. А. Комлева[1], Л. И. Плотникова[2], А. В. Плотников[1,3]
[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры
[2]Одесский национальный политехнический университет
[3]Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

В 1969 г. F. S. de Blasi и F. Iervolino рассмотрели многозначное дифференциальное уравнение (дифференциальное уравнение с производной Хукухары). В дальнейшем многие авторы изучали вопросы существования, единственности и свойства решений многозначных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, уравнений высших порядков, исследовали импульсные и управляемые системы, а также для таких систем была обоснована возможность применения асимптотических методов (метод усреднения). В последнее время все эти исследования трансформировались в теорию многозначных уравнений в качестве самостоятельной теории. Также данная теория имеет широкое применение в теории управления, дифференциальных включений, нечетких системах и др. В данной работе доказана теорема существования и единственности для одного из типов многозначных интегральных уравнений Вольтерра.
MSC: 45D05, 03E75.
Ключевые слова: многозначность, интегральное уравнение, существование, единственность .

Введение. Развитие дифференциального и интегрального исчисления в метрических пространствах стало объектом пристального внимания многих исследователей, что привело к появлению теории многозначных уравнений. В последнее время в рамках этой теории были рассмотрены свойства решений многозначных дифференциальных уравнений, многозначных дифференциальных включений, многозначных интегро-дифференциальные уравнений и многозначного интегральные уравнения, а также исследовались импульсные многозначные системы и управляемые многозначные системы. Обоснована возможность применения для таких систем асимптотических методов (см.: [1–6] и ссылки в них).

В данной работе мы докажем теорему существования и единственности для одного из типов многозначных интегральных уравнений Вольтерра.

Основные результаты

1. Основные определения и обозначения. Пусть $conv(R^n)$ — метрическое пространство всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min_{r\geqslant 0}\left\{B\subset S_r(A),\ \ A\subset S_r(B)\right\},$$

где $A,B\in conv(R^n)$, $S_r(A)$ — r-окрестность множества A.

Кроме обычных теоретико-множественных операций рассмотрим в пространстве $conv(R^n)$ еще две: операции суммы и умножения на скаляр:

$$A+B=\{a+b\,:\,a\in A,\,b\in B\}\quad\text{и}\quad \lambda A=\{\lambda a\,:\,a\in A,\,\lambda\in R\}.$$

Получена 28.08.2016

Также справедливы следующие свойства

1. $(conv(R^n), h)$ — полное метрическое пространство.

2. $h(A + C, B + C) = h(A, B)$.

3. $h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| h(A, B)$ для всех $A, B, C \in conv(R^n)$ и $\lambda \in R$.

Однако пространство $conv(R^n)$ не является линейным пространством относительно приведенных операций, так как в общем случае нельзя ввести понятие противоположного для $A \in conv(R^n)$ элемента, то есть в общем случае $A + (-1)A \neq \{0\}$, хотя, если $A \in R^n$, то для него противоположный элемент существует.

Отсутствие противоположного элемента в пространстве $conv(R^n)$ приводит к неоднозначному введению понятия разности множеств и условиям ее существования. В данной статье мы будем использовать разность Хукухары [11].

Определение 1. *[11] Пусть $X, Y \in conv(R^n)$, а множество $Z \in conv(R^n)$ такое, что $X = Y + Z$. Тогда множество Z мы будем называть разностью по Хукухаре множеств X и Y и писать $Z = X \overset{h}{-} Y$.*

Основными свойствами разности Хукухары являются следующие:

1) если разность Хукухары двух множеств $A \overset{h}{-} B$ существует, то она единственная;

2) $A \overset{h}{-} A = \{0\}$, $\forall\, A \in conv(R^n)$;

3) $(A + B) \overset{h}{-} B = A$, $\forall\, A, B \in conv(R^n)$.

2. Интегральные уравнения. Рассмотрим следующие многозначные интегральные уравнения Вольтерра

$$X(t) + \int\limits_0^t F(t, s, X(s))ds = G(t), \tag{1}$$

и

$$X(t) = G(t) + \int\limits_0^t F(t, s, X(s))ds, \tag{2}$$

где $s \leqslant t$, $s, t \in [0, T]$, $X : [0, T] \to conv(R^n)$, $F : [0, T] \times [0, T] \times conv(R^n) \to conv(R^n)$ и $G : [0, T] \to conv(R^n)$ — известные многозначные отображения. Интеграл понимается в смысле Хукухары [11].

Определение 2. *Многозначное отображение $X : [0, \tau] \to conv(R^n)$ называется решением интегрального уравнения (1) ((2)) на $[0, \tau]$, если оно непрерывно и удовлетворяет интегральному уравнению (1) ((2)) на интервале $[0, \tau] \subset [0, T]$.*

Замечание 1. *Условия существования решения для многозначного интегрального уравнения (2) при различных условиях были получены в работах [7–10]. Они обобщают результаты, полученные для обычных интегральных уравнений на многозначный случай.*

В данной работе мы рассмотрим уравнение (1). Используя определение 1, представим многозначное интегральное уравнение (1) в следующем виде

$$X(t) = G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t, s, X(s))ds. \tag{3}$$

Замечание 2. *Очевидно, разность Хукухары в (3) может не существовать для всех* $t > 0$. *Например, если* $n = 2$ *и* $A = \{a \in R^2 : \|a\| \leqslant 1\}$, $B = \{b \in R^2 : |b_i| \leqslant 1, i = 1, 2\}$, *то разность Хукухары* $A \overset{h}{-} tB$ *не существует для всех* $t > 0$. *Для* $t \in (0, \sqrt{2})$ *будет выполняться условие* $A \supset tB$. *Следовательно, если* $G(t) \equiv A$ *и* $F(t, s, X(s)) \equiv B$, *то разность в (3) не существует для всех* $t > 0$.

Также, если $n \geqslant 1$, $A, B \in conv(R^n)$ *и* $diam(A) < diam(B)$, *то разность Хукухары* $A \overset{h}{-} B$ *не существует. Например,* $A = B = \{a \in R^2 : \|a\| \leqslant 1\}$, *то разность Хукухары* $A \overset{h}{-} tB$ *не существует для всех* $t > 1$. *Следовательно, если* $G(t) \equiv A$ *и* $F(t, s, X(s)) \equiv B$, *то разность в (3) не существует для всех* $t > 1$.

Пусть $CC(R^n)$ $(n \geqslant 2)$ — пространство непустых строго выпуклых замкнутых подмножеств пространства R^n [5, 12, 13] и всех элементов пространства R^n.

Замечание 3. *Если* $A, B \in CC(R^n)$ *и* $A + C = B$, *то* $C \in CC(R^n)$ *[5, 12, 13].*

Замечание 4. *Если* $A, B \in CC(R^n)$ *и существует* $c \in R^n$ *такое, что* $A + c \subset B$, *то существует* $C \in CC(R^n)$ *такое, что* $A + C = B$, *то есть* $C = B \overset{h}{-} A$ *[5, 12, 13].*

Теперь докажем существование единственного решения уравнения (3) на интервале $[0, d] \subset [0, T]$.

Теорема 1. *Пусть в области* $Q = \{(t, s, X) \in [0, T] \times [0, T] \times CC(R^n)\}$ *выполняются следующие условия:*

1) для каждого фиксированного X *многозначное отображение* $F(t, s, X)$ *непрерывно на* $[0, T] \times [0, T]$;

2) многозначное отображение $F(t, s, X)$ *удовлетворяет условию Липшица по переменной* X *с постоянной* $L > 0$, *то есть* $h(F(t, s, X'), F(t, s, X'')) \leqslant Lh(X', X'')$ *для всех* $(t, s, X'), (t, s, X'') \in Q$;

3) существует непрерывная функция $m(s) > 0$ *такая, что* $h(F(t, s, X), \{0\}) \leqslant m(s)$ *для всех* $(t, s, X) \in Q$;

4) многозначное отображение $G(\cdot)$ *непрерывно на* $[0, T]$;

5) $intG(t) \neq \emptyset$ *для всех* $t \in [0, T]$.

Тогда уравнение (3) имеет единственное решение на интервале $[0, d]$ *и* $d \in (0, T]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_0^t m(s)ds \leqslant \frac{\theta(t)}{2} \quad \text{для всех } t \in [0, d],$$

где $\theta(t) = \min\limits_{\|\psi\|=1} |C(G(t), \psi) - C(G(t), -\psi)|$, $C(G, \psi) = \max\limits_{x \in G}(x_1\psi_1 + ... + x_n\psi_n)$.

Доказательство. Вначале докажем существование решения уравнения (3) на интервале $[0, d]$.

а) Так как $|F(t, s, X)| \leqslant m(s)$ for $(t, s, X) \in [0, T] \times [0, T] \times CC(R^n)$, тогда $F(t, s, X) \subset S_{m(s)}(0)$. Следовательно,

$$\int_0^t F(t, s, X) ds \subset \int_0^t S_{m(s)}(0) ds = S_{\int_0^t m(s)ds}(0).$$

Обозначим через $S(t) = S_{\int_0^t m(s)ds}(0)$. Очевидно, что если $0 < t_1 < t_2 < T$, то $\{0\} \subset S(0) \subset S(t_1) \subset S(t_2) \subset S(T)$.

Так как $G(t) \in CC(R^n)$ и $intG(t) \neq \emptyset$, то существует такое $d > 0$, что множество $S(t)$ может быть вложено в множество $G(t)$ для всех $t \in [0, d]$ (то есть существует $\zeta(t) \in R^n$ такое, что $S(t) + \zeta(t) \subset G(t)$) и не может быть вложено для $t > d$. И, следовательно, $d \in [0, T]$ такое, что должно выполняться неравенство $\int_0^t m(s)ds \leqslant \frac{\theta(t)}{2}$ для всех $t \in [0, d]$.

Отсюда, для всех $(t, s, X) \in Q_1 = \{(t, s, X) \in [0, d] \times [0, d] \times CC(R^n)\}$ множество $\int_0^t F(t, s, X)ds$ вложимо в множество $G(t)$.

b) Так как $F(t, s, X) \in CC(R^n)$ для всех $(t, s, X) \in Q_1$, то $\int_0^t F(t, s, X)ds \in CC(R^n)$ для всех $(t, s, X) \in Q_1$ [12]. Следовательно, так как $G(t) \in CC(R^n)$ и множество $\int_0^t F(t, s, X)ds$ может быть вложено в множество $G(t)$ для всех $t \in [0, d]$, то разность Хукухары $G(t) \overset{h}{-} \int_0^t F(t, s, X)ds$ существует для всех $(t, s, X) \in Q_1$ [12].

c) Теперь возьмем $b > 0$ такое, что $b = \lambda M \int_0^d m(s)ds$. Построим следующую последовательность многозначных отображений

$$X^0(t) = G(t),\ X^k(t) = G(t) \overset{h}{-} \lambda \int_0^t K(t, s) F(s, X^{k-1}(s)) ds \text{ для } 0 \leqslant t \leqslant d. \tag{4}$$

Из пункта b), $X^k(t)$ существует и $X^k(t) \in CC(R^n)$ для всех $k \in N$ и $t \in [0, d]$. Также из условий 1), 2) и 4) теоремы многозначные отображения $X^k(t)$ непрерывны на $[0, d]$ для всех $k \in N$.

Также

$$h(X^k(t), G(t)) \leqslant h\left(G(t) \overset{h}{-} \int_0^t F(t, s, X^{k-1}(s))ds, G(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant h\left(\int_0^t F(t, s, X^{k-1}(s))ds, \{0\}\right) \leqslant \int_0^t m(s)ds \leqslant b.$$

Отсюда получаем, что последовательность отображений $\{X^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно ограничена: $h(X^k(t), G(t)) \leqslant h(G(t), \{0\}) + b \leqslant g + b$, где $g = \sup\limits_{t\in[0,d]} h(G(t), 0)$.

Теперь покажем, что последовательность $\{X^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является фундаментальной последовательностью. Возьмем произвольные $m, p \in N$. Тогда

$$h(X^{m+p}(t), X^p(t)) \leqslant h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X^{m+p-1}(s))ds, \int\limits_0^t F(t,s,X^{p-1}(s))ds\right) \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^t h(X^{m+p-1}(s), X^{p-1}(s))ds.$$

Отсюда,

$$h(X^{m+p}(t), X^p(t)) \leqslant L^p \overbrace{\int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^{t_{p-1}}}^{p} h(X^m(t_p), G(t_p))dt_p \ldots dt_1 \leqslant \frac{(g+b)L^p d^p}{p!}.$$

Следовательно, последовательность $\{X^k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ является последовательностью Коши. Ее предел существует и является непрерывным многозначным отображением, которое обозначим через $X(t)$. В силу условий теоремы в уравнение (4) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Мы получаем, что многозначное отображение $X(t)$ удовлетворяет уравнению (3) на интервале $[0,d]$, то есть $X(t)$ является решением уравнения (3) на интервале $[0,d]$.

Теперь докажем единственность. Предположим, что существуют два различных решения $X(\cdot)$ и $Y(\cdot)$ уравнения (3) на $[0,d]$, тогда $\delta = \max\limits_{t\in[0,d]} h(X(t), Y(t)) > 0$.

Так как

$$X(t) = G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,X(s))ds \quad \text{и} \quad Y(t) = G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,Y(s))ds,$$

то

$$h(X(t), Y(t)) = h\left(G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,X(s))ds, G(t) \overset{h}{-} \int\limits_0^t F(t,s,Y(s))ds\right) =$$

$$= h\left(\int\limits_0^t F(t,s,X(s))ds, \int\limits_0^t F(t,s,Y(s))ds\right) \leqslant \int\limits_0^t h(F(t,s,X(s)), F(t,s,Y(s)))ds \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^t h(X(s), Y(s))ds \leqslant L\delta t \leqslant L\delta d.$$

Следовательно,

$$h(X(t),Y(t)) \leqslant L\int\limits_0^t L\delta s\,ds \leqslant \frac{L^2\delta t^2}{2!} \leqslant \frac{L^2\delta d^2}{2!},\ \ldots,\ h(X(t),Y(t)) \leqslant \frac{L^k\delta d^k}{k!}.$$

Тогда $\delta = \max\limits_{t\in[0,d]} h(X(t),Y(t)) \leqslant \frac{L^k\delta d^k}{k!}$. Отсюда, $1 \leqslant \frac{L^k d^k}{k!}$ для любого $k \in N$, что противоречит $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{L^k d^k}{k!} = 0$. Теорема доказана.

Заключение. Можно получить аналогичный результат, если вместо пространства $CC(R^n)$ рассмотреть пространство всех непустых M-строго выпуклых замкнутых подмножеств пространства R^n [13, 14] и всех элементов пространства R^n, то есть $MCC(R^n)$.

1. **Lakshmikantham V.** Theory of set differential equations in metric spaces / V. Lakshmikantham, T. Granna Bhaskar, J. Vasundhara Devi. – Cambridge Scientific Publishers, 2006. – 204 p.
2. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik // de Gruyter Stud. Math., Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co. – 2011. – Vol. 40. – 309 p.
3. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравненения с четкой и нечеткой правой частью. Асимптотические методы / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 192 с.
4. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: АстроПринт, 1999. – 355 с.
5. **Половинкин Е. С.** Многозначный анализ и дифференциальные включения / Е. С. Половинкин. – М.: Физматлит, 2014. – 597 с.
6. **Tolstonogov A.** Differential inclusions in a Banach space / A. Tolstonogov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. – 308 p.
7. **Babenko V.** Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces / V. Babenko // Applied Mathematics and Computation. – 2016. – V. 291. – P. 354–372.
8. **Plotnikov A. V.** Existence and uniqueness theorem for set integral equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik // J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. – 2013. – V. 5, № 2. – P. 65–72.
9. **Plotnikov A. V.** Existence and Uniqueness Theorem for Set-Valued Volterra Integral Equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik // American Journal of Applied Mathematics and Statistics. – 2013. – V. 1, № 3. – P. 41–45.
10. **Plotnikov A. V.** Existence and Uniqueness Theorem for Set Volterra Integral Equations / A. V. Plotnikov, N. V. Skripnik. // J. Adv. Res. Dyn. Control Syst. – 2014. – V. 6, № 3. – P. 1–7.
11. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe / M. Hukuhara // Funkcial. Ekvac. – 1967. – №10. – P. 205–223.

12. **Половинкин Е. С.** Сильно выпуклый анализ / Е. С. Половинкин // Математический сборник. – 1996. – Т. 187, № 2. – С. 103–130.

13. **Половинкин Е. С.** Элементы выпуклого и строго выпуклого анализа / Е. С. Половинкин, М. В. Балашов. – М.: Физматлит, 2007, 438 с.

14. **Балашов М. В.** М-сильно выпуклые подмножества и их порождающие множества / М. В. Балашов, Е. С. Половинкин // Математический сборник. – 2000. – Т. 191, № 1. – Р. 27–64.

Комлева Т. О., Плотнікова Л. І., Плотніков А. В.
Умови існування та єдиності розв'язку для багатозначних інтегральних рівнянь Вольтерра

Резюме

У 1969 р. F. S. de Blasi i F. Iervolino розглянули багатозначне диференціальне рівняння (диференціальне рівняння з похідною Хукухари). Надалі багато авторів вивчали питання існування, єдиності та властивості розв'язків багатозначних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, рівнянь вищих порядків, досліджували імпульсні і керовані системи, а також для таких систем була обгрунтована можливість застосування асимптотичних методів (метод усереднення). Останнім часом всі ці дослідження трансформувалися в теорію багатозначних рівнянь в якості самостійної теорії. Також дана теорія має широке застосування в теорії управління, диференціальних включень, нечітких системах та ін. У даній роботі доведена теорема існування та єдиності для одного з типів багатозначних інтегральних рівнянь Вольтерра.
Ключові слова: багатозначність, інтегральне рівняння, існування, единость.

Komleva T. A., Plotnikova L. I., Plotnikov A. V.
Conditions of existence and uniqueness of solutions for set-valued Volterra integral equation

Summary

In 1969, F. S. de Blasi and F. Iervolino examined set-valued differential equation (differential equation with derivative Hukuhara). In the future, many authors have studied the question of the existence, uniqueness and properties of set-valued solutions of differential and integral-differential equations, higher-order equations, investigated the impulse and control systems, as well as the possibility of using the asymptotic methods (the averaging method) has been proved for such systems. In recent years, all of these studies were transformed into the theory of set-valued equations as an independent theory. As this theory is widely used in control theory, differential inclusions, fuzzy systems, and others. In this paper we proved the existence and uniqueness theorem for one of the types of set-valued Volterra integral equations.
Key words: set-valued, integral equation, existence, uniqueness.

References

1. Lakshmikantham, V., Granna Bhaskar, T. and Vasundhara Devi J. (2006). *Theory of set differential equations in metric spaces.* Cambridge Scientific Publishers, 204 p.

2. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. and Skripnik, N. V. (2011). *Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities.* de Gruyter Stud. Math. Vol. 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH& Co, 309 p.
3. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2009). *Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods.* Odessa: AstroPrint, 192 p.
4. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. and Vityuk, A. N. (1999). *Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods.* Odessa: AstroPrint, 355 p.
5. Polovinkin, E. S. (2014) *Multivalued analysis and differential inclusions.* Moscow: Fizmatlit, 597 p.
6. Tolstonogov, A. (2000). *Differential inclusions in a Banach space.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 308 p.
7. Babenko, V. (2016). Numerical methods for solution of Volterra and Fredholm integral equations for functions with values in L-spaces. *Applied Mathematics and Computation*, № 291, P. 354–372.
8. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2013). Existence and uniqueness theorem for set integral equations. *J. Adv. Res. Dyn. Control Syst.*, Vol. 5, № 2, P. 65–72.
9. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2013). Existence and Uniqueness Theorem for Set-Valued Volterra Integral Equations. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, Vol. 1, № 3, P. 41–45.
10. Plotnikov, A. V., Skripnik, N. V. (2014). Existence and Uniqueness Theorem for Set Volterra Integral Equations. *J. Adv. Res. Dyn. Control Syst.*, Vol. 6, № 3, P. 1–7.
11. Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcial. Ekvac.*, № 10, P. 205–223.
12. Polovinkin, E. S. (1996). Strongly convex analysis. *Sb. Math.*, Vol. 187, № 2, P. 259–286.
13. Polovinkin, E. S., Balashov, M. V. (2004). *Elements of Convex and Strongly Convex Analysis.* Moscow: Fizmatlit, 438 p.
14. Balashov, M. V., Polovinkin, E. S. (2000). M-strongly convex subsets and their generating sets. *Sb. Math.*, Vol. 191, № 1, P. 25–60.

ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.– 2016.–Т. 21, вип. 2(28).– С. 54–62

УДК 517.911.5

Н. В. Скрипник
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Интегральные уравнения находят многочисленные приложения в различных областях знаний, таких как теория упругости, передача тепла и массы, теория колебаний, динамика жидкости, теория фильтрации, электростатика, электродинамика, биомеханика, теория игр, теория управления, теория голосования, электротехника, экономика и медицина. Исследование реальных процессов, основанных на идеализированных математических моделях, приводит чаще всего к уравнениям с малыми параметрами. Для их исследования широко используются различные асимптотические методы. Выбор конкретного асимптотического метода зависит от структуры уравнения, описывающего динамику объекта. В последнее время методы усреднения получили широкое развитие в нелинейной механике и теории колебаний. В статье обоснована возможность применения метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения с постоянным запаздыванием.

MSC: 03E72, 34A07, 34C29.
Ключевые слова: нечеткие интегральные уравнения, метод усреднения, запаздывание

Введение. Теория нечетких множеств является очень удобным аппаратом моделирования неопределенности. С одной стороны, она дает более широкие возможности, чем, например, интервальный анализ, поскольку совмещает его с использованием вероятностных оценок. С другой стороны, она отличается от теории вероятностей в основных модельных предположениях, подходе и утверждениях. Теория нечетких множеств может использоваться в ситуациях, когда применить вероятностную интерпретацию невозможно, например, если флуктуации переменной не стохастичны по своей природе, если недоступны статистические данные, если имеющейся информации недостаточно для того, чтобы утверждать выполнение вероятностных аксиом.

Поэтому нечеткие системы — очень важная тема как с теоретической точки зрения, так и с практической. Они находят применение, например, в автомобильной, аэрокосмической и транспортной промышленности, в строительстве, в создании гидравлических и популяционных моделей, в сфере финансов, анализа и принятия управленческих решений, при прогнозировании различных экономических, политических, биржевых ситуаций и т. д. Нечеткие системы являются естественным способом моделирования динамических систем в условиях неопределенности. Формализация нечетких понятий позволяет приближенно описывать поведение систем настолько сложных и плохо обусловленных, что они не поддаются точному математическому анализу. В ряде случаев такое описание является единственно возможным, потому что в реальных ситуациях закономерности, ограничения, критерии выбора в больший части субъективны и точно не определены. С 1965 г., когда L. Zadeh опубликовал свою новаторскую работу [1], были

Получена 05.10.2016

рассмотрены сотни примеров, где природа неопределенности в поведении процессов системы является нечеткой.

Пусть $conv(\mathbb{R}^n)$ — метрическое пространство непустых компактных выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа $h(\cdot,\cdot)$.

Введем в рассмотрение пространство $\mathbb{E}^n$ отображений $x:\mathbb{R}^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x — нормально, т. е. существует вектор $y_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x(y_0)=1$;

2) x — нечетко выпукло, т. е. для любых $y,z \in \mathbb{R}^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq \min\{x(y), x(z)\}$;

3) x — полунепрерывно сверху по Бэру, т. е. для любого вектора $y_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y_0,\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $y \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $||y-y_0|| < \delta$, справедливо неравенство $x(y) < x(y_0)+\varepsilon$;

4) замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве $\mathbb{E}^n$ является отображение $\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y=0, \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \backslash 0. \end{cases}$

Определение 1. α-срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in \mathbb{E}^n$ при $\alpha \in (0,1]$ назовем множество $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) \geqslant \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in \mathbb{E}^n$ назовем замыкание множества $\{y \in \mathbb{R}^n : x(y) > 0\}$.

Определим в пространстве $\mathbb{E}^n$ метрику $D:\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \to [0,+\infty)$, полагая

$$D(x,v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} h([x]^\alpha, [v]^\alpha).$$

В последнее время появилось много публикаций, посвященных нечетким дифференциальным и интегральным уравнениям, нечетким интегро-дифференциальным уравнениям, дифференциальным включениям с нечеткой правой частью и нечетким дифференциальным включениям, управляемым дифференциальным уравнениям с нечеткой правой частью, управляемым интегро-дифференциальным уравнениям, управляемым нечетким дифференциальным включениям ([2–4] и ссылки в них).

Рассмотрим нечеткое интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(t,s,x(s))ds, \tag{1}$$

где $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ время, $x:[a,b] \to \mathbb{E}^n$– фазовая переменная, нечеткое отображение $f:[a,b] \times [a,b] \times \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$.

Определение 1. *Непрерывное отображение* $x:[a,b] \to \mathbb{E}^n$ *называется решением уравнения (1) на промежутке* $[a,b]$*, если оно удовлетворяет этому уравнению для всех* $t \in [a,b]$.

Теорема 1. [5] *Пусть в области* $Q = \{(t,s,x) : t,s \in [a,b], x \in \mathbb{E}^n\}$ *нечеткое отображение* $f:Q \to \mathbb{E}^n$ *непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по* x *с постоянной* $\lambda \geq 0$. *Тогда интегральное уравнение (1) имеет единственное решение.*

Работа по математическому обоснованию метода усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений началась в 1937 г. с фундаментальной работы Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [6]. В последующем разработкой методов усреднения для различных классов дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, а также для импульсных и управляемых систем занимались Е. А. Гребенников, Ю. А. Митропольский, Н. Н. Моисеев, Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, А. Н. Филатов и др. (см.: [2, 7–10] и ссылки в них).

В [5] обоснована возможность применения метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения.

Рассмотрим нечеткое интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t f(t, s, x(s))ds, \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$ — время, $x : \mathbb{R}_+ \to G, G \subset \mathbb{E}^n,\ \varepsilon$ — малый параметр.

Уравнению (2) поставим в соответствие следующее усредненное нечеткое интегральное уравнение

$$\bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s))ds, \tag{3}$$

где

$$\bar{f}(t, x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x)ds. \tag{4}$$

Имеет место следующая теорема, устанавливающая близость решений уравнений (2) и (3) на конечном промежутке:

Теорема 2. [5] *Пусть в области $Q = \{(t, s, x) : t, s \in \mathbb{R}_+, x \in G \subset \mathbb{E}^n\}$ выполнены следующие условия:*

1) нечеткое отображение $f(t, s, x)$ непрерывно и удовлетворяет по x условию Липшица с постоянной λ;

2) нечеткое отображение $\int\limits_0^t f(t, s, x(s))ds$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}_+$ с модулем непрерывности $\omega(\cdot)$, не зависящим от выбора непрерывного нечеткого отображения $x : \mathbb{R}_+ \to G$;

3) равномерно относительно $t, t_1 \in \mathbb{R}_+, x \in G$ существует предел (4);

4) решение $\bar{x}(\cdot)$ уравнения (3) при $x_0 \in G' \subset G$ определено при $t \in \mathbb{R}_+$ для всех $\varepsilon \in (0, \sigma]$ и лежит с некоторой ρ-окрестностью в области G.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \in (0, \sigma]$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ для всех $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ выполняется неравенство

$$D(x(t), \bar{x}(t)) \leqslant \eta, \tag{5}$$

где $x(\cdot)$ и $\bar{x}(\cdot)$– решения уравнений (2) и (3) соответственно.

В данной статье рассмотрим обоснование метода усреднения для нечеткого интегрального уравнения с постоянным запаздыванием.

Основные результаты. Рассмотрим нечеткое интегральное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t f(t, s, x(s), x(s-\tau))ds \text{ при } t > 0 \\ x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-\tau, 0], \quad x_0 = \varphi(0), \end{gathered} \tag{6}$$

где $t \in \mathbb{R}_\tau = [-\tau, 0] \cup \mathbb{R}_+$ — время, $x : \mathbb{R}_\tau \to G \subset \mathbb{E}^n$ — фазовая переменная, ε — малый параметр, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times G \times G \to \mathbb{E}^n$ — нечеткое отображение, $\tau > 0$ — запаздывание, $\varphi : [-\tau, 0] \to G$ — начальное отображение.

Уравнению (6) поставим в соответствие усредненное нечеткое интегральное уравнение с запаздыванием

$$\begin{gathered} \bar{x}(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t \bar{f}(t, \bar{x}(s), \bar{x}(s-\tau))ds \text{ при } t > 0, \\ \bar{x}(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-\tau, 0], \quad x_0 = \varphi(0), \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\bar{f}(t, x, z) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x, z)ds. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть в области $Q = \{(t, s, x, z) : t, s \in \mathbb{R}_+, x, z \in G\}$, $G \subset \mathbb{E}^n$ выполнены следующие условия:*

1) нечеткое отображение $f(t, s, x, z)$ непрерывно и удовлетворяет условию Липшица по x, z с постоянной λ, т. е.

$$D(f(t, s, x, z), f(t, s, x_1, z_1)) \leqslant \lambda[D(x, x_1) + D(z, z_1)];$$

2) нечеткое отображение $\int\limits_0^t f(t, s, x(s), x(s))ds$ равномерно непрерывно на $\mathbb{R}_+$ с модулем непрерывности $\omega(\cdot)$, не зависящим от выбора непрерывного нечеткого отображения $x : \mathbb{R}_+ \to G$;

3) начальное отображение $\varphi(t)$ непрерывно на $[-\tau, 0]$;

4) равномерно относительно $t, t_1 \geqslant 0, x, z \in G$ существует предел (8);

5) решение $\bar{x}(\cdot)$ уравнения (7) при $x_0 \in G' \subset G$ существует при $t \geqslant 0$ и $\varepsilon \in [0, \tau]$ и принадлежит G с некоторой ρ-окрестностью.

Тогда для произвольных $\eta > 0$ и $L > 0$ существует $\varepsilon^0 \in (0, \sigma]$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$D(x(t), \bar{x}(t)) \leqslant \eta, \tag{9}$$

где $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ — решения уравнений (6) и (7) соответственно.

Доказательство. Покажем, что нечеткое отображение $\bar{f}(t, x, z)$ удовлетворяет условию Липшица по x, z с постоянной λ.

Выберем произвольное $\delta > 0$ и найдем $T(\delta) > 0$ такое, что для $T > T(\delta)$ и произвольного $t_1 \in \mathbb{R}_+$ имеем

$$D\left(\bar{f}(t, x, z), \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t, s, x, z)ds\right) < \delta.$$

Тогда

$$D(\bar{f}(t,x,z),\bar{f}(t,x_1,z_1)) \leqslant D\left(\bar{f}(t,x,z),\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x,z)ds\right)+$$
$$+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x,z)ds,\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x_1,z_1)ds\right)+$$
$$+D\left(\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t,s,x_1,z_1)ds,\bar{f}(t,x_1,z_1)\right)<$$
$$<2\delta+\frac{1}{T}\int\limits_{t_1}^{t_1+T} D(f(t,s,x,z),f(t,s,x_1,z_1))ds \leqslant$$
$$\leqslant 2\delta+\lambda[D(x,x_1)+D(z,z_1)].$$

В силу произвольности δ нечеткое отображение $\bar{f}(t,x,z)$ удовлетворяет условию Липшица по x,z с постоянной λ.

Далее рассмотрим вспомогательное уравнение

$$z(t)=x_0+\varepsilon\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds, t\geq 0. \tag{10}$$

Тогда

$$\begin{gathered}
D\left(x(t),z(t)\right)= \\
=D\left(x_0+\varepsilon\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s-\tau))ds,x_0+\varepsilon\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds\right)= \\
=\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s-\tau))ds,\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds\right)\leqslant \\
\leqslant \varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s-\tau))ds,\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s))ds\right)+ \\
+\varepsilon D\left(\int\limits_0^t f(t,s,x(s),x(s)ds,\int\limits_0^t f(t,s,z(s),z(s))ds\right)\leqslant \\
\leqslant \varepsilon\lambda\int\limits_0^t D(x(s-\tau),x(s))ds+2\varepsilon\lambda\int\limits_0^t D(x(s),z(s))ds.
\end{gathered} \tag{11}$$

Отдельно оценим первое слагаемое. При $s\in[0,\tau)$, учитывая непрерывность, а, следовательно, и ограниченность начального отображения $\phi(\cdot)$, получим

$$\begin{gathered}
D(x(s-\tau),x(s))\leqslant \\
\leqslant D(\phi(s-\tau),x_0)+D\left(x_0,x_0+\varepsilon\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1\right)\leqslant \\
\leqslant M+\varepsilon D\left(\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1,\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1\right)+ \\
+\varepsilon D\left(\int\limits_0^s f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1,\hat{0}\right)\leqslant \\
\leqslant M+\varepsilon\lambda\int\limits_0^s D(x(s_1-\tau),x(s_1))ds_1+\varepsilon\omega(\tau).
\end{gathered}$$

Тогда в силу леммы Гронуолла—Беллмана имеем

$$D(x(s-\tau),x(s)) \leqslant (M+\varepsilon\omega(\tau))e^{\varepsilon\lambda s} \leqslant (M+\varepsilon\omega(\tau))e^{\varepsilon\lambda\tau}. \quad (12)$$

При $s \in [\tau, L\varepsilon^{-1}]$ имеем

$$\begin{gathered}
D(x(s-\tau),x(s)) \leqslant \\
\leqslant \varepsilon D\left(\int\limits_0^{s-\tau} f(s-\tau,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1, \int\limits_0^{s-\tau} f(s-\tau,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1\right)+ \\
+\varepsilon D\left(\int\limits_0^{s-\tau} f(s-\tau,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1, \int\limits_0^{s} f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1\right)+ \\
+\varepsilon D\left(\int\limits_0^{s} f(s,s_1,x(s_1),x(s_1))ds_1, \int\limits_0^{s} f(s,s_1,x(s_1),x(s_1-\tau))ds_1\right) \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\omega(\tau) + 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{s} D(x(s_1-\tau),x(s_1))ds_1.
\end{gathered}$$

В силу леммы Гронуолла—Беллмана имеем

$$D(x(s-\tau),x(s)) \leqslant \varepsilon\omega(\tau)e^{2\varepsilon\lambda t} \leqslant \varepsilon\omega(\tau)e^{2\lambda L}. \quad (13)$$

Из (13), (12) при $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ получаем

$$\begin{gathered}
D\left(x(t),z(t)\right) \leqslant \varepsilon\lambda\int\limits_0^{\tau} D(x(s-\tau),x(s))ds+ \\
+\varepsilon\lambda\int\limits_\tau^{t} D(x(s-\tau),x(s))ds + 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{t} D(x(s),z(s))ds \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\lambda(M+\varepsilon\omega(\tau))e^{\varepsilon\lambda\tau}\tau + 2\varepsilon\lambda\omega(\tau)e^{2\lambda L}\left(L\varepsilon^{-1}-\tau\right) + 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{t} D(x(s),z(s))ds \leqslant \\
\leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{2\lambda L} + 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^{t} D(x(s),z(s))ds,
\end{gathered}$$

откуда в силу леммы Гронуолла—Беллмана получим

$$D(x(t),z(t)) \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{2\lambda L}e^{2\varepsilon\lambda t} \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{4\lambda L}. \quad (14)$$

Аналогично для решений уравнения (7) и вспомогательного уравнения

$$w(t) = x_0 + \varepsilon\int\limits_0^{t} \bar{f}(t,w(s),w(s))ds, t \geq 0, \quad (15)$$

получим

$$D(\bar{x}(t),w(t)) \leqslant \varepsilon\lambda(M\tau+L\omega(\tau))e^{4\lambda L}. \quad (16)$$

Уравнение (15) является усредненным для уравнения (10). Соответственно в силу теоремы 2 получим, что для произвольных $\eta > 0$ и $L > 0$ можно выбрать $\varepsilon' \in [0,\sigma]$ такое, что для $\varepsilon \in (0,\varepsilon']$ и $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива оценка

$$D(w(t),z(t)) \leqslant \frac{\eta}{2}. \quad (17)$$

Из (14), (16) и (17) получаем, что для $\varepsilon^0 = \min\{\varepsilon', \frac{\eta e^{-4\lambda L}}{4\lambda(M\tau + L\omega(\tau))}\}$ справедлива оценка (9).

Заключение. В работе получено обоснование схемы усреднения для нечеткого интегрального уравнения с запаздыванием. Данный результат обобщает аналогичный результат, полученный для многозначных интегральных уравнений [11], а также результаты по обоснованию схемы усреднения для нечетких дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием [2].

1. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets / L. A. Zadeh // Inf. Control. – 1965. – № 8. – P. 338–353.
2. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с четкой и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы / А. В. Плотников, Н. В. Скрипник. – Одесса: Астропринт, 2009. – 192 с.
3. **Gomes L. T.** Fuzzy differential equations in various approaches (SpringerBriefs in Mathematics) / L. T. Gomes, L. C. de Barros, B. Bede. – Berlin: Springer, 2015. – 120 p.
4. **Lakshmikantham V.** Theory of fuzzy differential equations and inclusions / V. Lakshmikantham, R. Mohapatra. – Taylor-Francis, 2003.
5. **Skripnik N.** Averaging of fuzzy integral equations / Skripnik N. // Discrete and Continuous Dynamical Systems, series B (in press)
6. **Крылов Н.М.** Введение в нелинейную механику / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.
7. **Перестюк Н. А.** Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н. А. Перестюк, В. А. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник Н.В. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
8. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 356 с.
9. **Perestyuk N. A.** Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities (De Gruyter Studies in Mathematics: 40) / N. A. Perestyuk, V. A. Plotnikov, A. M. Samoilenko, N. V. Skripnik. – Berlin;Boston: Walter De Gruyter GmbH Co., 2011. – 307 p.
10. **Sanders J. A.** Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems (Applied Mathematical Sciences, Volume 59) / J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock. – New York: Springer, 2007. – 433 p.
11. **Кац С. В.** Усереднення багатозначних інтегральних рівнянь з постійним запізненням / С. В. Кац, Н. В. Скрипник // Інноваційний потенціал світової науки XXI сторіччя : 33 міжнар. наук.-практ. конф. (20–27 травня 2015 р.) – 2015. – Т. 2 – С. 83.

Скрипник Н. В.

Усереднення нечітких інтегральних рівнянь зі сталим запізненням

Резюме

Інтегральні рівняння знаходять численні застосування в різних галузях знань, таких як теорія пружності, передача тепла та маси, теорія коливань, динаміка рідини, теорія фільтрації, електростатика, електродинаміка, біомеханіка, теорія ігор, теорія керування, теорія голосування, електротехніка, економіка і медицина. Дослідження реальних процесів, заснованих на ідеалізованих математичних моделях, призводить найчастіше до рівнянь з малими параметрами. Для їх дослідження широко використовуються різні асимптотичні методи. Вибір конкретного асимптотичного методу залежить від структури рівняння, що описує динаміку об'єкта. Останнім часом методи усереднення отримали широкий розвиток в нелінійній механіці й теорії коливань. В статті досліджено можливість застосування методу усереднення до нечіткого інтегрального рівняння зі сталим запізненням.

Ключові слова: нечіткі інтегральні рівняння, метод усереднення, запізнення.

Skripnik N. V.

Averaging of fuzzy integral equations with constant delay

Summary

Integral equations are encountered in various fields, including elasticity, plasticity, heat and mass transfer, oscillation theory, fluid dynamics, filtration theory, electrostatics, electrodynamics, biomechanics, game theory, control, queuing theory, electrical engineering, economics and medicine. The research of the real processes based on the idealized mathematical models often leads to the equations with small parameters. For their research various asymptotic methods are widely used. The choice of a concrete asymptotic method depends on structure of the equation, that describes the dynamics of the object. Recently the averaging methods have gained broad development in nonlinear mechanics and the oscillation of fluctuations. In this paper a possibility of application of averaging method to the fuzzy integral equation with continuous delay is investigated.

Key words: fuzzy integral equations, averaging method, delay.

References

1. Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy sets, *Inf. Control.*, no. 8, pp. 338–353.
2. Plotnikov, A. V. & Skripnik, N. V. (2009), Differential equations with "clear" and fuzzy multivalued right-hand side. Asymptotics methods, Odessa: Astroprint, 192 p. (in Russian)
3. Gomes, L. T., de Barros, L. C. & Bede, B. (2015), Fuzzy differential equations in various approaches *Springer Briefs in Mathematics, Berlin: Springer*, 120 p.
4. Lakshmikantham, V. & Mohapatra, R. (2003), Theory of fuzzy differential equations and inclusions, "Taylor-Francis".
5. Skripnik, N. (in press), Averaging of fuzzy integral equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, series B.
6. Krylov, N. M. & Bogoliubov, N. N. (1947), Introduction to nonlinear mechanics, Princeton University Press, Princeton.

7. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. & Skripnik, N. V. (2007), Impulsive differential equations with multivalued and discontinuous right-hand side, Kiev, 428 p. (in Russian)
8. Plotnikov, V. A., Plotnikov, A. V. & Vityuk, A. N. (1999), Differential equations with multivalued right-hand side. Asymptotic methods, Odessa: Astroprint, 356 p. (in Russian)
9. Perestyuk, N. A., Plotnikov, V. A., Samoilenko, A. M. & Skripnik, N. V. (2011), Differential equations with impulse effects: multivalued right-hand sides with discontinuities *De Gruyter Studies in Mathematics*, volume 40, Berlin/Boston: Walter De Gruyter GmbH Co., 307 p.
10. Sanders, J. A., Verhulst, F. & Murdock, J. (2007) Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems *Applied Mathematical Sciences*, volume 59, New York: Springer, 433 p.
11. Kats, S. V. & Skripnik, N. V. (2015), Averaging of set-valued integral equations with constant delay, *Perspective directions of world science: The 33-th International conference "Innovative Potential of World Science the XXI Century"*, № 2, P. 83–84.

ISSN 2519-206X. Дослідження в математиці і механіці.–2016.–Т.21, вип. 2(28).– С. 63–75

УДК 517.926

С. А. Щёголев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

БЛОЧНАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТИПА В РЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Для линейной однородной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой имеют вид абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования линейного преобразования с коэффициентами аналогичной структуры, приводящего эту систему к блочно-диагональному виду в резонансном случае.
MSC: 34A34, 34A25.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье .

Введение. В теории дифференциальных уравнений важной задачей является задача разделения линейной однородной дифференциальной системы n-ого порядка на k независимых систем порядков $n_1, n_2, ..., n_k$ $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$, в частности, разделения этой системы на n независимых дифференциальных уравнений первого порядка (полное разделение). Эта задача рассматривалась, например, в [1–8]. Очевидно, что построение в явном виде преобразования, приводящего к разделённой системе, в общем случае невозможно. Такое построение фактически предполагает интегрирование самой исходной системы. Поэтому в указанных исследованиях не ставилась задача явного построения этого преобразования, а лишь устанавливались условия его существования, исследовались его свойства и возможность его приближённого построения, в частности, в форме асимптотических рядов. Важным также являлся вопрос о принадлежности элементов преобразующей матрицы тем же классам, что и элементы матрицы исходной системы.

В работах автора [9–12] рассматривалась задача разделения линейной однородной системы вида
$$\frac{dx}{dt} = (\Lambda(t,\varepsilon) + \mu B(t,\varepsilon,\theta))x, \tag{1}$$
где $\Lambda(t,\varepsilon) = \mathrm{diag}(\lambda_1(t,\varepsilon), ..., \lambda_n(t,\varepsilon))$, а функции $\lambda_j(t,\varepsilon)$ $(j = \overline{1,n})$ в определённом смысле медленно меняющиеся, μ – малый положительный параметр, элементы матрицы $B(t,\varepsilon,\theta)$ представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой $\varphi(t,\varepsilon) = \frac{d\theta}{dt}$. При этом были исследованы случаи как отсутствия, так и наличия резонанса, в том числе особый случай. Для каждого из этих случаев были получены условия, при которых элементы преобразующей матрицы имеют структуру, аналогичную структуре элементов матрицы $B(t,\varepsilon,\theta)$. В работе [13] исследовалась задача расщепления линейной однородной системы с коэффициентами аналогичного типа на две подсистемы меньшей размерности в резонансном случае. В настоящей статье исследуется возможность расщепления линейной системы на несколько независимых систем меньших размерностей также в резонансном случае.

Получена 29.07.2016

Обозначения. Пусть $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$.

Определение 1. Скажем, что функция $p(t, \varepsilon)$, в общем случае комплекснозначная, принадлежит классу $S(m; \varepsilon_0)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, если $t, \varepsilon \in G$ и

1) $p(t, \varepsilon) \in C^m(G)$ по t,
2) $d^k p(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k p_k^*(t, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |p_k^*(t, \varepsilon)| < +\infty$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$.

Медленная изменяемость функции понимается здесь в смысле принадлежности этой функции классу $S(m; \varepsilon_0)$. Примерами функций этого класса могут служить в общем случае комплекснозначные, ограниченные вместе со своими производными до m-го порядка включительно, функции, зависящие от "медленного времени"$\tau = \varepsilon t$: $\sin \tau, \mathrm{arctg} \tau$ и т. д.

Определение 2. Скажем, что функция $f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon))$ принадлежит классу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если эта функция представима в виде:

$$f(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t, \varepsilon) \exp{(in\theta(t, \varepsilon))},$$

причём

1) $f_n(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$, $d^k f_n(t, \varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t, \varepsilon)$ $(n \in \mathbb{Z}, \ 0 \leqslant k \leqslant m)$,
2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \overset{def}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{G(\varepsilon_0)} |f_{nk}(t, \varepsilon)| < +\infty$,
3) $\theta(t, \varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau, \varepsilon) d\tau$, $\varphi(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(t, \varepsilon) \in S(m; \varepsilon_0)$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)} \varphi(t, \varepsilon) > 0$.

В частности, если $\varepsilon = 0$: $\varphi = \mathrm{const}$, $\theta = \varphi t$, $f_n = \mathrm{const}$, то функции класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ превращаются $2\pi/\varphi$-периодические функции переменной t:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi t},$$

такие, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < +\infty.$$

Множество функций класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ образует линейное пространство, которое превращается в полное нормированное пространство ввведением нормы $\| \cdot \|_{F(m;\varepsilon_0,\theta)}$. Справедлива следующая цепочка включений:

$$F(0; \varepsilon_0; \theta) \supset F(1; \varepsilon_0; \theta) \supset \cdots \supset F(m; \varepsilon_0; \theta).$$

Пусть заданы две функции класса $F(m; \varepsilon_0; \theta)$:

$$u(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)),$$

$$v(t, \varepsilon, \theta(t, \varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t, \varepsilon) \exp(in\theta(t, \varepsilon)).$$

Определим их произведение по формуле [14]:

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, что $uv \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Сформулируем следущие свойства нормы $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$. Пусть $u,v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k = \text{const}$. Тогда
1) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k|\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,
2) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,
3) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant 2^m\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Для любой $f(t,\varepsilon,\theta) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ обозначим:

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,u)\exp(-inu)du.$$

Пусть $A(t,\varepsilon,\theta) = (a_{jk}(t,\varepsilon,\theta))$ – $(M\times K)$-матрица, элементы которой принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$. Обозначим:

$$(A)_{jk} = a_{jk}\ (j=\overline{1,M}, k=\overline{1,K}),\ \|A\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \max_{1\leqslant j\leqslant M}\sum_{k=1}^{K}\|(A)_{jk}\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Основные результаты

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_j}{dt} = H_j(\varphi)x_j + \mu\sum_{k=1}^{M} B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)x_k,\ j=\overline{1,M}, \tag{2}$$

где $x_j = \text{colon}(x_{j,1},...,x_{j,m_j})$ $(j=\overline{1,M})$, $m_1+...+m_M = \widetilde{M}$ – общий порядок системы (2),

$$H_j(\varphi) = \begin{pmatrix} ir_j\varphi & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & ir_j\varphi & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ir_j\varphi & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & ir_j\varphi \end{pmatrix}$$

— жордановы блоки размерностей n_j; $r_j \in \mathbb{Z}$; $B_{jk}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j\times n_k)$-матрицы с элементами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $\varphi(t,\varepsilon)$ – функция, фигурирующая в определении класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $\mu \in (0,1)$. В этом смысле мы имеем дело с резонансным случаем.

Изучается вопрос об условиях существования преобразования вида

$$x_j = \sum_{k=1}^{M} L_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\tilde{x}_k,\ j=\overline{1,M}, \tag{3}$$

где элементы $(n_j\times n_k)$-матриц L_{jk} $(j,k=\overline{1,M})$ принадлежат классу

$F(m-1;\varepsilon^*;\theta)$ $(0<\varepsilon^*\leqslant\varepsilon_0)$), приводящего систему (2) к виду:

$$\frac{d\tilde{x}_j}{dt} = D_{n_j}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\tilde{x}_j,\ j=\overline{1,M}, \tag{4}$$

где элементы $(n_\times n_j)$-матриц D_{n_j} $(j=\overline{1,M})$ также принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon^*;\theta)$.

В случае $M=2$ соответствующий результат был получен в работе [13].

2. Вспомогательные результаты. Рассмотрим линейную однородную систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_j}{dt} = \left(J_{n_j} + \sum_{s=1}^{q} P_{js}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)X_j - X_j\left(J_{n_k} + \sum_{s=1}^{q} P_{js}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) + \\ + \sum_{\substack{l=1 \\ (l\neq j)}}^{N}\left(\sum_{s=1}^{q} P_{jls}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)X_l,\ j=\overline{1,N}, \tag{5}$$

где X_j – $(n_j\times n_k)$-матрицы, $P_{js}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j\times n_j)$-матрицы, $P_{js}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_k\times n_k)$-матрицы, $P_{jls}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j\times n_l)$-матрицы с элементами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$; $n_1+...+n_N=\widetilde{N}$.

$$J_{n_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

– жордановы блоки размерностей n_j и n_k соответственно, все диагональные элементы которых равны нулю, $\mu\in(0,1)$.

Введём блочные матрицы

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & O_{n_1,n_k} & ... & O_{n_1,n_k} \\ O_{n_2,n_k} & X_2 & ... & O_{n_2,n_k} \\ ... & ... & ... & ... \\ O_{n_N,n_k} & O_{n_N,n_k} & ... & X_N \end{pmatrix},$$

$$J^{(1)} = \begin{pmatrix} J_{n_1} & O_{n_1,n_2} & ... & O_{n_1,n_N} \\ O_{n_2,n_1} & J_{n_2} & ... & O_{n_2,n_N} \\ ... & ... & ... & ... \\ O_{n_N,n_1} & O_{n_N,n_2} & ... & J_{n_N} \end{pmatrix},\ J^{(2)} = \begin{pmatrix} J_{n_k} & O_{n_k,n_k} & ... & O_{n_k,n_k} \\ O_{n_k,n_k} & J_{n_k} & ... & O_{n_k,n_k} \\ ... & ... & ... & ... \\ O_{n_k,n_k} & O_{n_k,n_k} & ... & J_{n_k} \end{pmatrix},$$

$$P_s^{(1)} = \begin{pmatrix} P_{1s}^{(1)} & O_{n_1,n_2} & ... & O_{n_1,n_N} \\ O_{n_2,n_1} & P_{2s}^{(1)} & ... & O_{n_2,n_N} \\ ... & ... & ... & ... \\ O_{n_N,n_1} & O_{n_N,n_2} & ... & P_{Ns}^{(1)} \end{pmatrix},\ P_s^{(2)} = \begin{pmatrix} P_{1s}^{(2)} & O_{n_k,n_k} & ... & O_{n_k,n_k} \\ O_{n_k,n_k} & P_{2s}^{(2)} & ... & O_{n_k,n_k} \\ ... & ... & ... & ... \\ O_{n_k,n_k} & O_{n_k,n_k} & ... & P_{Ns}^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$P_s = \begin{pmatrix} O_{n_1,n_1} & P_{12s} & ... & P_{1Ns} \\ P_{21s} & O_{n_2,n_2} & ... & P_{2Ns} \\ ... & ... & ... & ... \\ P_{N1s} & P_{N2s} & ... & O_{n_N,n_N} \end{pmatrix},$$

где $O_{r,p}$ – нулевая матрица размерности $(r \times p)$.

Таким образом, матрица X имеет размерность $(\widetilde{N} \times Nn_k)$, матрица $J^{(1)}$ – размерность $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$, матрица $J^{(2)}$ – размерность $(Nn_k \times Nn_k)$, матрицы $P_s^{(1)}$ – размерность $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$, матрицы $P_s^{(2)}$ – размерность $(Nn_k \times Nn_k)$, матрицы P_s – размерность $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$.

Систему (5) тогда можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = \left(J^{(1)} + \sum_{s=1}^{q} P_s^{(3)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) X - X \left(J^{(2)} + \sum_{s=1}^{q} P_s^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right), \qquad (6)$$

где $P_s^{(3)} = P_s^{(1)} + P_s$ $(s = \overline{1,q})$.

Лемма 1. *Существует $\mu_0 \in (0,1)$ такое, что для любых $\mu \in (0,\mu_0)$ существует преобразование вида*

$$X = \left(E_{\widetilde{N}} + \sum_{s=1}^{q} \Phi_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) Y \left(E_{Nn_k} + \sum_{s=1}^{q} \Psi_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right), \qquad (7)$$

где Y – $(\widetilde{N} \times Nn_k)$-матрица, $E_{\widetilde{N}}$, E_{Nn_k} – единичные матрицы размерностей $\widetilde{N}$ и Nn_k соответственно, элементы $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$-матриц Φ_s и $(Nn_k \times Nn_k)$-матриц Ψ_s $s = \overline{1,q}$ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, приводящее уравнение (6) к виду:

$$\frac{dY}{dt} = \left(J^{(1)} + \textstyle\sum_{s=1}^{q} U_s(t,\varepsilon)\mu^s + \varepsilon \sum_{s=1}^{q} \widetilde{U}_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s + \mu^{q+1} W_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right) Y -$$

$$-Y \left(J^{(2)} + \textstyle\sum_{s=1}^{q} V_s(t,\varepsilon)\mu^s + \varepsilon \sum_{s=1}^{q} \widetilde{V}_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s + \mu^{q+1} W_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right), \qquad (8)$$

где $U_s(t,\varepsilon)$, $V_s(t,\varepsilon)$ $(s = \overline{1,q})$ – матрицы размерностей $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$ и $(Nn_k \times Nn_k)$ соответственно с элементами из класса $S(m;\varepsilon_0)$; $\widetilde{U}_s(t,\varepsilon,\theta)$, $\widetilde{V}_s(t,\varepsilon,\theta)$ $(s = \overline{1,q})$ – матрицы размерностей $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$ и $(Nn_k \times Nn_k)$ соответственно с элементами из класса $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$; W_1, W_2 – матрицы размерностей $(\widetilde{N} \times \widetilde{N})$ и $(Nn_k \times Nn_k)$ соответственно с элементами из класса $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$.

Доказательство леммы 1 приведено в работе [13].

Рассмотрим теперь систему матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX_j}{dt} = \left(J_{n_j} + \sum_{s=1}^{q} P_{js}^{(1)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) X_j - X_j \left(J_{n_k} + \sum_{s=1}^{q} P_{js}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) + R_j(t,\varepsilon,\theta) +$$

$$+ \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq j)}}^{N} \left(\sum_{s=1}^{q} P_{jls}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right) X_l - \mu^2 X_j \sum_{l=1}^{N} A_l(t,\varepsilon,\theta) X_l, \; j = \overline{1,N}, \qquad (9)$$

где матрицы $P_{js}^{(1)}$, $P_{js}^{(2)}$, P_{jls} – те же, что и в системе (5), $R_j(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_j \times n_k)$-матрицы, $A_l(t,\varepsilon,\theta)$ – $(n_k \times n_l)$-матрицы с элементами из класса $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Вводя обозначения

$$R(t,\varepsilon,\theta)=\begin{pmatrix} R_1(t,\varepsilon,\theta) & O_{n_1,n_k} & \dots & O_{n_1,n_k}\\ O_{n_2,n_k} & R_2(t,\varepsilon,\theta) & \dots & O_{n_2,n_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ O_{n_N,n_k} & O_{n_N,n_k} & \dots & R_N(t,\varepsilon,\theta)\end{pmatrix},$$

$$[A(t,\varepsilon,\theta),X]=\begin{pmatrix} \sum_{l=1}^N A_l(t,\varepsilon,\theta)X_l & O_{n_k,n_k} & \dots & O_{n_k,n_k}\\ O_{n_k,n_k} & \sum_{l=1}^N A_l(t,\varepsilon,\theta)X_l & \dots & O_{n_k,n_k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ O_{n_k,n_k} & O_{n_k,n_k} & \dots & \sum_{l=1}^N A_l(t,\varepsilon,\theta)X_l\end{pmatrix}$$

(матрица R имеет размерность $(\widetilde{N}\times Nn_k)$, а матрица $[A,X]$ – размерность $(Nn_k\times Nn_k)$), запишем систему (9) в виде одного нелинейного матричного уравнения:

$$\frac{dX}{dt}=\left(J^{(1)}+\sum_{s=1}^{q}P_s^{(3)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)X-X\left(J^{(2)}+\sum_{s=1}^{q}P_s^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\mu^s\right)+$$

$$+R(t,\varepsilon,\theta)-\mu^2X[A(t,\varepsilon,\theta),X] \qquad (10)$$

(матрицы X, $P_s^{(2)}$, $P_s^{(3)}$ те же, что и в уравнении (6)).

Лемма 2. *Пусть уравнение (10) удовлетворяет одной из следующих совокупностей условий I, II, III:*

I. 1) $\widetilde{N}<Nn_k$,

2) $\sum_{l=1}^{\nu}\Gamma_0((R)_{l,Nn_k-\nu+l})\equiv 0$, $\nu=\overline{1,\widetilde{N}}$,

3) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Gamma_0((P_0^{(1)})_{1,Nn_k})|>0$;

II. 1) $\widetilde{N}=Nn_k$,

2) $\sum_{l=1}^{\nu}\Gamma_0((R)_{l,Nn_k-\nu+l})\equiv 0$, $\nu=\overline{1,\widetilde{N}}$,

3) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Gamma_0((P_0^{(1)})_{1,\widetilde{N}}-(P_0^{(2)})_{1,\widetilde{N}})|>0$;

III. 1) $\widetilde{N}>Nn_k$,

2) $\sum_{l=1}^{\nu}\Gamma_0((R)_{l,Nn_k-\nu+l})\equiv 0$, $\nu=\overline{1,Nn_k}$,

3) $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}|\Gamma_0((P_0^{(1)})_{1,\widetilde{N}})|>0$.

Тогда существует $\mu_1\in(0,1)$ такое, что для любых $\mu\in(0,\mu_1)$ и для любого $q\in\mathbb{N}$ существует преобразование вида

$$X=\sum_{s=0}^{q}\Xi_s(t,\varepsilon,\theta)\mu^s+\Phi(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y\Psi(t,\varepsilon,\theta,\mu), \qquad (11)$$

где элементы $(\widetilde{N}\times Nn_k)$-матриц Ξ_s $(s=\overline{0,2q-1})$, $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$-матрицы Φ и $(Nn_k\times Nn_k)$-матрицы Ψ принадлежат классу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $\forall\ \mu\in(0,\mu_1)$, приводящее уравнение (10) к виду:

$$\frac{dY}{dt}=\left(J^{(1)}+\sum_{l=1}^{q}U_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)Y-Y\left(J^{(2)}+\sum_{l=1}^{q}V_l(t,\varepsilon)\mu^l\right)+$$

$$+\varepsilon(\widetilde{U}(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y - Y\widetilde{V}(t,\varepsilon,\theta,\mu)) + \mu^{q+1}(\widetilde{W}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)Y - Y\widetilde{W}_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)) +$$
$$+\varepsilon\widetilde{R}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}\widetilde{R}_2(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu), \tag{12}$$

где U_l, V_l $(l = \overline{1,q})$ *– матрицы размерностей* $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$ *и* $(Nn_k \times Nn_k)$ *соответственно с элементами из класса* $S(m;\varepsilon_0)$, $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$ *– матрицы размерностей* $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$ *и* $(Nn_k\times Nn_k)$ *соответственно с элементами из класса* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$ *– матрицы размерностей* $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$ *и* $(Nn_k\times Nn_k)$ *соответственно с элементами из класса* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $\widetilde{R}_1$, $\widetilde{R}_2$ *– матрицы размерности* $(\widetilde{N}\times Nn_k)$ *с элементами из классов* $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ *соответственно,* $\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu)$ *– матрица-функция размерности* $(\widetilde{N}\times Nn_k)$, *обладающая свойствами: если* $Y\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *то* $\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu)\in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ $\forall\ \mu\in(0,\mu_1)$, *причём существует* $K_1\in(0,+\infty)$ *такое, что*

$$\|\widetilde{\Xi}(t,\varepsilon,\theta,Y,\mu)\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K_1\left(\|Y\|^*_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}\right)^2,$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2 из работы [13].

Введём матрицы

$$U(t,\varepsilon,\mu) = \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l,\ V(t,\varepsilon,\mu) = \sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon)\mu^l,$$

где матрицы U_l, V_l $(l=\overline{1,q})$ определены в лемме 2.

Лемма 3. *Пусть уравнение (12) удовлетворяет следующим условиям:*
1) собственные значения $\lambda_{1j}(t,\varepsilon,\mu)$ $(j=\overline{1,\widetilde{N}}$ $)$ *матрицы* $J^{(1)}+U(t,\varepsilon,\mu)$ *и* $\lambda_{2s}(t,\varepsilon,\mu)$ $(s=\overline{1,Nn_k})$ *матрицы* $J^{(2)}+V(t,\varepsilon,\mu)$ *таковы, что*

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}|\mathrm{Re}(\lambda_{1j}(t,\varepsilon,\mu)-\lambda_{2s}(t,\varepsilon,\mu))| \geq \gamma_0\mu^{q_0}$$

$(\gamma_0>0,\ 0<q_0\leqslant q;\ j=\overline{1,\widetilde{N}},\ s=\overline{1,Nn_k})$;
2) существуют $(\widetilde{N}\times\widetilde{N})$*-матрица* $L_1(t,\varepsilon,\mu)$ *и* $(Nn_k\times Nn_k)$*-матрица* $L_2(t,\varepsilon,\mu)$ *такие, что*
а) все элементы этих матриц принадлежат классу $S(m;\varepsilon_0)\subset F(m;\varepsilon_0;\theta)$,
б) существуют матрицы $L_1^{-1}(t,\varepsilon,\mu)$, $L_2^{-1}(t,\varepsilon,\mu)$,
причём $\|L_j^{-1}(t,\varepsilon,\mu)\|^*_{F(m\varepsilon_0,\theta)}\leqslant M_1\mu^{-\alpha}$, $M_1\in(0,+\infty)$, $\alpha\in[0,q]$, $j=1,2$,
в) $L_1^{-1}(J^{(1)}+U)L_1=\Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)$, $L_2(J^{(2)}+V)L_2^{-1}=\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu)$, *где* $\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1,\widetilde{N}})$, $\Lambda_2=\mathrm{diag}(\lambda_{21},\ldots,\lambda_{2,Nn_k})$;
3) $q>q_0+\alpha-1/2$.

Тогда существует $\mu_2\in(0,1)$, $\beta\in(0,+\infty)$ *такие, что* $\forall\ \mu\in(0,\mu_2)$ *матричное дифференциальное уравнение (12) имеет частное решение* $Y(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ *такое, что все его элементы принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_1(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_1(\mu)=\min(\varepsilon_0,\beta\mu^{2q_0+2\alpha-1})$.

Доказательство. Произведём в уравнении (12) подстановку

$$Y = \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0+2\alpha}}\ L_1(t,\varepsilon,\mu)ZL_2(t,\varepsilon,\mu), \tag{13}$$

где Z – новая неизвестная $(\widetilde{N} \times Nn_k)$-матрица. Получим:

$$\frac{dZ}{dt} = \Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)Z - Z\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu) + \varepsilon(\widetilde{U}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z - Z\widetilde{V}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)) +$$

$$+\mu^{q+1}(\widetilde{W}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z - Z\widetilde{W}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)) + \frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+\frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0+2\alpha-1}}\ \widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu), \qquad (14)$$

где $\widetilde{R}_3 = L_1^{-1}\widetilde{R}_1L_2^{-1}$, $\widetilde{R}_4 = L_1^{-1}\widetilde{R}_2L_2^{-1}$, $\widetilde{U}_1 = L_1^{-1}\widetilde{U}L_1 - \varepsilon^{-1}L_1^{-1}(dL_1/dt)$, $\widetilde{V}_1 = L_2\widetilde{U}L_2^{-1} + \varepsilon^{-1}(dL_2/dt)L_2^{-1}$, $\widetilde{W}_3 = L_1^{-1}\widetilde{W}_1L_1$, $\widetilde{W}_4 = L_2\widetilde{W}_2L_2^{-1}$.

Все элементы этих матриц принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$. $\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu)$ – матрица-функция такая, что если $Z \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, то $\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu) \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём $K_2 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z,\mu)\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K_2\left(\|Z\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right)^2.$$

В силу выражений для матриц $\widetilde{R}_3$, $\widetilde{R}_4$, $\widetilde{U}_1$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{W}_3$, $\widetilde{W}_4$ и условия 2б) леммы существует $K_3 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|\widetilde{R}_j\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{2\alpha}}\ (j=3,4),$$

$$\|\widetilde{U}_1\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{\alpha}},\ \|\widetilde{V}_1\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{\alpha}},$$

$$\|\widetilde{W}_j\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant \frac{K_3}{\mu^{\alpha}}\ (j=3,4).$$

Наряду с уравнением (14) рассмотрим матричное линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ_0}{dt} = \Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)Z_0 - Z_0\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu) +$$

$$+\frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu). \qquad (15)$$

Из результатов работы [15] следует, что условия леммы обеспечивают существование единственного частного решения $Z_0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ уравнения (15), все элементы которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$, причём существует $K_0 \in (0,+\infty)$ такое, что

$$\|Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K_0}{\mu^{q_0}}\left(\frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|\widetilde{R}_3\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} + \frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \|\widetilde{R}_4\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}\right). \qquad (16)$$

Построим решение уравнения (14), все элементы которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_1;\theta)$ методом последовательных приближений, взяв в качестве начального приближения $Z_0(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, а последующие определив как решения, все элементы которых принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_0;\theta)$ линейных неоднородных матричных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dZ_{\nu+1}}{dt} = \Lambda_1(t,\varepsilon,\mu)Z_{\nu+1} - Z_{\nu+1}\Lambda_2(t,\varepsilon,\mu)+$$
$$+\frac{\varepsilon\mu^{q_0+2\alpha}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+2\alpha+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ \widetilde{R}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$
$$+\varepsilon(\widetilde{U}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z_\nu - Z_\nu\widetilde{V}_1(t,\varepsilon,\theta,\mu)) + \mu^{q+1}(\widetilde{W}_3(t,\varepsilon,\theta,\mu)Z_\nu - Z_\nu\widetilde{W}_4(t,\varepsilon,\theta,\mu))+$$
$$+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0+2\alpha-1}}\ \widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z_\nu,\mu),\ \nu=0,1,2,.... \tag{17}$$

Обозначим

$$\Omega = \left\{ Z \in F(m-1;\varepsilon_0;\theta):\ \|Z-Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant d \right\}.$$

Несложно показать, что существует $K_4 \in (0,+\infty)$ такое, что $\forall\ Z_1^*, Z_2^* \in\ \Omega$ выполнено неравенство:

$$\|\widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z_1^*,\mu) - \widetilde{\Xi}_1(t,\varepsilon,\theta,Z_2^*,\mu)\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)} \leqslant K_4\|Z_1^*-Z_2^*\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Используя обычную методику принципа сжимающих отображений [16], легко установить, что если

$$K_0K_5\left(\frac{\varepsilon+\mu^{q+1}}{\mu^{q_0+\alpha}}\ 2^m\left(\|Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}+d\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{2q_0+2\alpha-1}}\ \left(\|Z_0\|^*_{F(m-1;\varepsilon_0;\theta)}+d\right)^2\right) \leqslant d_0 < d, \tag{18}$$

где $K_5 = \max(K_2,K_3)$, то все приближения (17) не выходят за пределы Ω. И если

$$K_0K_6\left(2^m\frac{\varepsilon+\mu^{q+1}}{\mu^{q_0+\alpha}} + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{2q_0+2\alpha-1}}\right) < 1, \tag{19}$$

где $K_6 = \max(K_3,K_4)$, то процесс (17) сходится к решению уравнеия (14), все элементы которого принадлежат классу $F(m-1;\varepsilon_1;\theta)$. Неравенства (18), (19) выполняются в силу условия 3) леммы для достаточно малых μ и $\varepsilon/\mu^{2q_0+2\alpha-1}$. Поэтому $\varepsilon_1(\mu) = \min(\varepsilon_0, \beta\mu^{2q_0+2\alpha-1})$, где β – достаточно малая постоянная.

Лемма 3 доказана.

Следующие две леммы являются непосредственным следствием леммы 3.

Лемма 4. *Пусть уравнение (10) удовлетворяет всем условиям леммы 2, а уравнение (12), получающееся из уравнения (10) с помощью преобразования (11), удовлетворяет условиям леммы 3. Тогда существует* $\mu_3 \in (0,1)$, $\beta_1 \in (0,+\infty)$ *такие, что для любых* $\mu \in (0,\mu_3)$ *уравнение (10) имеет частное решение* $X(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, *все элементы которого принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_2(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_2(\mu) = \min(\varepsilon_0, \beta_1\mu^{2q_0+2\alpha-1})$, *а* q_0, α *определены в лемме 2.*

Лемма 5. *Пусть система матричных дифференциальных уравнений (9) такова, что соответствующее ей матричное уравнение (10) удовлетворяет* *условиям леммы 4. Тогда существует* $\mu_4 \in (0,1)$, $\beta_2 \in (0,+\infty)$ *такие, что для любых* $\mu \in (0,\mu_4)$ *система (9) имеет частное решение* $X_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j = \overline{1,N})$, *все элементы которого принадлежат классу* $F(m-1;\varepsilon_3(\mu);\theta)$, *где* $\varepsilon_3(\mu) = \min(\varepsilon_0, \beta_2\mu^{2q_0+2\alpha-1})$, *а* q_0, α *определены в лемме 2.*

3. Основные результаты. Вернёмся к системе (2) и произведём в ней подстановку:

$$x_j = e^{ih_j\theta}y_j,\ j = \overline{1,M}, \tag{20}$$

где $y_j = \mathrm{colon}(y_{j,1},...,y_{j,m_j})$ $(j = \overline{1,M})$. Получим:

$$\frac{dy_j}{dt} = J_{n_j}y_j + \mu\sum_{k=1}^{M}\widetilde{B}_{jk}(t,\varepsilon,\theta)y_k,\ j = \overline{1,M}, \tag{21}$$

где $\widetilde{B}_{jk} = B_{jk}e^{i(h_k-h_j)\theta}$.

В системе (21) произведём подстановку:

$$y_j = z_j + \mu\sum_{\substack{k=1\\(k\neq j)}}^{M}Q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z_k,\ j = \overline{1,M}. \tag{22}$$

Потребовав выполнение условия блочной диагональности преобразованной системы, для $(n_j\times n_k)$-матриц Q_{jk} $(k\neq j)$ получим систему вида:

$$\frac{dQ_{jk}}{dt} = J_{n_j}Q_{jk} - Q_{jk}J_{n_k} + \widetilde{B}_{jk}(t,\varepsilon,\theta) + \mu(\widetilde{B}_{jj}(t,\varepsilon,\theta)Q_{jk} - Q_{jk}\widetilde{B}_{kk}(t,\varepsilon,\theta)+$$

$$+\mu\sum_{\substack{s=1\\(s\neq j,s\neq k)}}^{M}\widetilde{B}_{js}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sk} - \mu^2Q_{jk}\sum_{\substack{s=1\\(s\neq k)}}^{M}\widetilde{B}_{ks}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sk},\ j,k = \overline{1,M}\ (j\neq k). \tag{23}$$

Для n_j-векторов z_j получим систему

$$\frac{dz_j}{dt} = D_{n_j}(t,\varepsilon,\theta,\mu)z_j,\ j = \overline{1,M}, \tag{24}$$

где

$$D_{n_j} = J_{n_j} + \mu\widetilde{B}_{jj}(t,\varepsilon,\theta) + \mu^2\sum_{\substack{s=1\\(s\neq j)}}^{M}\widetilde{B}_{js}(t,\varepsilon,\theta)Q_{sj},\ j = \overline{1,M}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что система (23) распадается на M независимых подсистем, каждая из которых содержит $M-1$ неизвестную матрицу, и имеет вид (9). Поэтому на основании леммы 5 справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть каждая из систем (23) удовлетворяет условиям леммы 5. Тогда существует $\mu_5 \in (0,1)$, $\beta_3 \in (0,+\infty)$ такие, что для любых $\mu \in (0,\mu_5)$ существует преобразование вида (3) с коэффициентами из класса $F(m-1;\varepsilon_4(\mu);\theta)$, где $\varepsilon_4(\mu) = \beta_3\mu^{2q_0+2\alpha-1}$ (q_0 и α определены в лемме 2), приводящее систему (2) к блочно-диагональному виду (4), где матрицы D_{n_j} $(j = \overline{1,M})$ определяются выражениями (25).

Заключение. Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2) установлены условия существования линейного преобразования, приводящего эту систему к блочно-диагональному виду, причём коэффициенты этого преобразования имеют структуру, аналогичную структуре коэффициентов системы (2).

1. **Абгарян К. А.** Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М. : Наука, 1973. – 431 с.
2. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений и некоторых свойствах матрицы разделения // Укр. матем. журн.– 1955. – **7**, № 4. – С. 403–418.
3. **Лященко Н. Я.** Об одной теореме разделения линейной системы дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Укр. матем. журн. – 1955. – **7**, № 1. – С. 47–55.
4. **Костін В. В.** Деякі питання повного розподілу та асимптотичної поведінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. Фю – 1967ю – № 7. – С. 593–595.
5. **Митропольский Ю. А. Самойленко А. М., Кулик В. Л.** Исследование дихотомии линейных систем с помощью функций Ляпунова. – К. : Наук. думка, 1990. – 272 с.
6. **Фещенко С. Ф. Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.** Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1966. – 251 с.
7. **Митропольский Ю. А., Белан Е. П.** О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость // Укр. матем. журн. – 1968. – 20, № 2. – С. 166–175.
8. **Амелькин К. В.** О расщеплении линейных однородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вiсник Одеськ. держ. ун-ту. – 2001. – 6, вип. Фiз.-мат.науки. – С.1 – 7.
9. **Щёголев С.А.** Об одном варианте теоремы полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Крайовi задачi для диференцiальних рiвнянь. – Чернiвецький держ. ун-т iм. Ю. Федьковича. – 1999. – Вип. 4. – С. 282–289.
10. **Щёголев С.А.** Резонансный случай полного разделения линейной дифференциальной системы с медленно меняющимися паракметрами // Крайовi задачi для диференцiальних рiвнянь. – К.: IМ НАНУ. – 1998. – Вип. 3. – С. 165–175.
11. **Щёголев С.А.** О полном разделении некоторых классов линейных однородных систем дифференциальных уравнений // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем i механ. – 2008. – Т. 13, вип. 18. – С. 119–131.
12. **Щёголев С. А.** Полное разделение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами в особом случае // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i механ. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2 (13-14). – С. 119–131.
13. **Shchogolev S. A.** On the block separation of the linear homogeneous differential System with oscillating coefficients in the resonance case // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2014. – 63. – pp. 123–140.
14. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 935 с.
15. **Щоголев С. А.** Деякі задачі теорії коливань для диференціальних систем, які містять повільно змінні параметри: дис. доктора фізико-математичних наук. – Київ, 2012. – 290 с.
16. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Щоголев С. А.
Блочна діагоналізація лінійної однорідної диференціальної системи з коефіцієнтами коливного типу в резонансному випадку

Резюме

Для лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають вигляд рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою, отримано умови існування лінійного перетворення з коефіцієнтами аналогічної структури, що приводить цю систему до блочно-діагонального вигляду в резонансному випадку.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

Shchogolev S. A.
The block diagonalization of the linear homogeneous differential system with coefficients of oscillating type in resonance case

Summary

For the linear homogeneous system of the differential equations, coefficients of which are represented by an absolutely and uniformly convergent Fourier series with slowly varying coefficients and frequency, conditions of existence of the linear transformation with coefficients of similar structure, this system leads to a block-diagonal form in a resonance case are obtained.
Key words: differential, slowly-varying, Fourier series.

References

1. Abgaryan, K. A. (1973), Matrix and asymptotic methods in the linear systems theory [Matrichnye i asimptoticheskie metody v teorii linejnyh sistem], Moscow: Nauka, 431 p.
2. Lyaschenko, N. Y. (1955), On a theorem of complete separation linear homogeneous system of differential equations and some separation properties of the matrix [Ob odnoj teoreme polnogo razdelenija linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij i nekotoryh svojstvah matricy razdelenija], *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 7, no. 4, pp. 403–418.
3. Lyaschenko, N. Y. (1955), On a theorem of linear division a system of differential equations with almost periodic coefficients [Ob odnoj teoreme razdelenija linejnoj sistemy differencial'nyh uravnenij s pochti periodicheskimi kojefficientami], *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 7, no. 1, pp. 47–55.
4. Kostin, V. V. (1967), Some issues of distribution and full asymptotic behavior of solutions of systems of ordinary differential equations [Deyaki pytannya povnogo rozpodilu ta asymptotychnoyi povedinky rozv'yazkiv system zvychajnyh dyferencialnyh rivnyan] *Dop. AN URSR Ser. F*, no. 7, pp. 593–595.
5. Mitropolskii, Yu. A., Samoylenko, A. M. & Kulik, V. L. (1990), Research on dichotomy of linear systems using Lyapunov functions [Issledovanie dihotomii linejnyh sistem s pomoshh'ju funkcij Ljapunova], K.: Science. Dumka, 272 p.
6. Feshenko, S. F., Shkil N. I. & Nikolenko, L. D. (1966), Asymptotic methods in the theory of linear differential equations [Asimptoticheskie metody v teorii linejnyh differencial'nyh uravnenij], K .: Science. Dumka, 251 p.

7. Mitropolskii, Yu. A. & Belan, E. P. (1968), On the construction of solutions almost diagonal systems of linear differential equations using a method that provides an accelerated convergence [O postroenii reshenij pochti diagonal'nyh sistem linejnyh differencial'nyh uravnenij s pomoshh'ju metoda, obespechivajushhego uskorennuju shodimost'], *Ukr. Mat. Zh.*, vol. 20, no. 2, pp. 166–175.

8. Amelkin, K. V. (2001), On the decomposition of linear homogeneous systems ordinary differential equations [O rasshheplenii linejnyh odnorodnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij], *Visnyk Odesk. St. Univ.*, vol. 6, pp. 1–7.

9. Shchegolev, S. A. (1999), On a variant of the complete separation theorem for linear homogeneous system of differential equations [Ob odnom variante teoremy polnogo razdelenija linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij // Krajovi zadachi dlja diferencial'nih rivnjan'], *Krayovi zadachi diferentsialnih rivnyan*, issue 4, pp. 282–289.

10. Shchegolev, S. A. (1998), The resonant case of complete separation linear differential system with slowly varying parameters [Rezonansnyj sluchaj polnogo razdelenija linejnoj differencial'noj sistemy s medlenno menjajushhimisja parakmetrami] *Krayovi zadachi diferentsialnih rivnyan*, K .: IM NASU, issue 3, pp. 165–175.

11. Shchegolev, S. A. (2008), A complete separation of certain classes linear homogeneous systems of differential equations [O polnom razdelenii nekotoryh klassov linejnyh odnorodnyh sistem differencial'nyh uravnenij], *Visnyk Odesk. nat. univ. Mat. i mech.*, vol. 13, is. 18, pp. 119–131.

12. Shchegolev, S. A. (2012), Complete separation of linear homogeneous a system of differential equations with oscillating coefficients in one special case [Polnoe razdelenie linejnoj odnorodnoj sistemy differencial'nyh uravnenij s oscillirujushhimi kojefficientami v osobom sluchae], *Visnyk Odesk. nat. univ. Mat. i mech.*, vol. 17, is. 1-2 (13-14), pp. 119–131.

13. Shchogolev, S. A. (2014), On the block separation of the linear homogeneous differential System with oscillating coefficients in the resonance case *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, vol. 63, pp. 123–140.

14. Bari, N. K. (1961), Trigonometric series [Trigonometricheskie rjady], M .: Fizmatgiz, 935 p.

15. Schogolev, S. A. (2012), Some problems of the theory of vibrations for differential systems that contain slow variables [Deyaki zadachi teoriyi kolyvan dlyai dyferencialnyh system, yaki mistyat povilno zminni parametry], Dr. Sc. dissertation, Kyiv - 290 p.

16. Kantorovich, L. V. & Akilov, G. P. (1984), Functional analysis [Funktsionalnyi analiz], M .: Nauka, 752 p.

ISSN 2519-206X. Researches in Mathematics and Mechanics.– 2016.–V.21, Is. 2(28).–P.76–87

UDC 517.977.58

O. Kichmarenko[1], **K. Sapozhnikova**[2], **S. Dashkovskiy**[2]
[1]Odessa I. I. Mechnikov National University, Ukraine
[2]Institute of Mathematics, University of Würzburg, Germany

APPROXIMATION OF SOLUTIONS TO THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE IMPULSIVE SYSTEM WITH MAXIMUM

This paper presents the averaging method for two problems: impulsive system with maximum and for the optimal control problem of this kind of system. For the first problem the Krylov–Bogolyubov's theorem is generalized. For the second one we are interested not only in approximation of the solution for optimal control problems with impulsive perturbation and maximum but also in approximation of corresponding functionals. In this purpose the averaging method is obtained as well. In this case averaging scheme includes the algorithm of correspondence between control functions of original and averaged optimal control problems. A numerical-asymptotic algorithm for solving an optimal control problem with a small parameter of such kind of system is designed.
MSC: 34K33, 34K35, 34K45.
Key words: systems with delay, impulsive systems, optimal control problem, averaging method.

Introduction. Initially, an averaging method were developed by [2]. It further generalization to the functional differential equation was obtained by [7], [6], [8], to the impulsive system by [1]. [3] developed the averaging method for neutral type of impulsive system with maximum in case averaged system is "frozen", by means it does not depend on maximum of unknown function. We propose the average scheme where averaged system also depends on maximum of x as original system.

Moreover, [10] offered to apply an averaging method to the optimal control problem which is based on the following steps to the impulsive optimal control problem with maximum:

1) average a controlled system;
2) establish the correspondence between controlled functions of both (averaged and original) systems;
3) estimate the quality of control function of averaged problem by the functional of the original problem.

We apply this approach to the impulsive optimal control problem with maximum. The impulsive optimal control problem without maximum of unknown function was considered by [5].

Auxiliary arguments. For a piecewise continuous function $x \in [0, \infty) \to \mathbb{R}^m$ and continuous functions $g, \gamma \in [0, \infty) \to \mathbb{R}$, such that $0 \leqslant g(t) \leqslant \gamma(t) \leqslant t$ for any

Received 08.09.2016

$t \geqslant 0$ we denote the componentwise "maximal" value of x over the time interval $[g(t), \gamma(t)]$ by

$$\widetilde{x}_G(t) = \left\{ \sup_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x_1(s), \cdots, \sup_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x_m(s) \right\}. \tag{1}$$

For any function $f \in C([0,\infty); \mathbb{R}^n)$ and any matrix $A : [0,\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ we introduce

$$||f(t)|| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sup_{t\geqslant 0} |f_i(t)|, \quad ||A(t)|| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{m} \sup_{t\geqslant 0} |a_{ij}(t)|.$$

Let X and Y be two non-empty subsets of $\mathbb{R}^n$. We define the Hausdorf distance between them by

$$d_H(X,Y) = \max \left\{ \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} ||x-y||, \sup_{y\in Y} \inf_{x\in X} ||x-y|| \right\}.$$

The following notion of average will be used in this paper.

Definition 1. *[4]. A continuous bounded function $f : [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}^n$ is said to have an average $\overline{f}(x)$ if the limit*

$$\overline{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t,x)dt, \tag{2}$$

exists and $\forall (t,x) \in [0,\infty) \times D' \times D'$

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T f(t,x)dt - \overline{f}(x) \right\| \leqslant q\sigma(T),$$

for every compact set $D' \subset D$, where q is a positive constant (possibly dependent on D') and $\sigma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ is a strictly decreasing, continuous, bounded function such that $\sigma(T) \to 0$ as $T \to \infty$. The function σ is called convergence function.

Main Results

1. Impulsive system with maximum and small parameter. Because of the presence of impulses maximum is not always attained we replace maximum with supremum. So let us consider the system in standard form with supremum and with fixed times of impulse actions

$$\begin{array}{ll} \dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x, \widetilde{x}_G), & t \geqslant 0, t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} = \varepsilon\left(x(\tau_k+0) - x(\tau_k-0)\right) = \varepsilon I_k(x), & k = 0,1,2,\ldots \\ x(0) = x_0, & \end{array} \tag{3}$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the phase vector, $f : [0, L\varepsilon^{-1}] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a continuous function; $L > 0$; ε is a small parameter; $g(t), \gamma(t)$: $[0, L\varepsilon^{-1}] \to \mathbb{R}$ are known, continuous functions and $0 \leqslant g(t) \leqslant \gamma(t) \leqslant t$;

$$\sup_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x(s) = (\sup_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x_1(s), \ldots, \sup_{s\in[g(t),\gamma(t)]} x_n(s))^T;$$

τ_k are fixed numbers such that $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$ and $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = \infty$.

By a solution to problem (3) we mean a real valued function x defined on $[0,\infty)$ which is left continuous on $[0,\infty)$ and is differentiable on (τ_k, τ_{k+1}) $(k = 0, 1, 2, \dots)$ satisfying

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x, \widetilde{x}_G), \quad t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1}),$$
$$x(0) = x_0.$$

We associate the following averaged autonomous system with the original system (3):

$$\dot{y} = \varepsilon \left(\overline{f}(y, \widetilde{y}_G) + \overline{I}(y) \right), \quad t \geqslant 0 y(0) = x_0, \tag{4}$$

where

$$\overline{I}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{0<\tau_k<T} I_k(x). \tag{5}$$

The following theorem establishes conditions for justification of averaging method

Theorem 1. *Let in domain $Q = [t \geqslant 0,\ x, \widetilde{x}_G \in D \subset \mathbb{R}^n]$ the following conditions hold:*

1) *functions $f(t, x, \widetilde{x}_G)$, $I_k(x), (k = 0, 1, 2, \cdots)$ are continuous and there exist constants M, λ such that*

$$\|f(t, x, \widetilde{x}_G)\| \leqslant M, \quad \|I_k(x)\| \leqslant M;$$
$$\left\|f(t, x, \widetilde{x}_G) - f(t, x^1, \widetilde{x}^1_G)\right\| \leqslant \lambda \left[\left\|x - x^1\right\| + \left\|\widetilde{x}_G - \widetilde{x}^1_G\right\| \right];$$
$$\left\|I_k(x) - I_k(x^1)\right\| \leqslant \lambda \left\|x - x^1\right\| \ \ \forall x^1, \widetilde{x}^1_G \in D;$$

3) *functions $g(t)$ and $\gamma(t)$ are uniformly continuous;*

4) *there exist (2) and (5) uniformly with respect to $x, \widetilde{x}_G$;*

5) *there exists $\theta > 0$ such that for $k = 0, 1, 2, \cdots$, the following inequality holds $\theta \leqslant \tau_k - \tau_{k-1}$, where $\tau_0 = 0$.*

6) *there exists $\rho > 0$ such that the solution $y = y(t)$ to the averaged system (4), where $y(0) = x(0) \in D' \subset D$ defined for any $t \geqslant 0$ and belongs together with ρ neighborhood to the domain D.*

   Then for any $\eta > 0$ and $L > 0$ there exists $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\eta, L) > 0$ such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ and $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ the following estimation holds:

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \eta. \tag{6}$$

Proof. Let us notice that the function $\overline{f}(x, \widetilde{x}_G)$ is a bounded function and satisfies Lipschitz condition. Indeed, according to the assumption 4) and definition 1 one can indicate function σ such that the following estimation holds:

$$\left\|\overline{f}(x, \widetilde{x}_G) - \overline{f}(x^1, \widetilde{x}^1_G)\right\| \leqslant \left\| \overline{f}(x, \widetilde{x}_G) - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, \widetilde{x}_G) dt \right\|$$

$$+\left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left[f(t,x,\widetilde{x}_G)-f(t,x^1,\widetilde{x}_G^1)\right]dt\right\|+\left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t,x^1,\widetilde{x}_G^1)dt-\overline{f}(x^1,\widetilde{x}_G^1)\right\|$$

$$\leqslant 2\sigma(T)+\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left\|f(t,x,\widetilde{x}_G)-f(t,x^1,\widetilde{x}_G^1)\right\|dt$$

$$\leqslant 2\sigma(T)+\lambda\left(\left\|x-x^1\right\|+\left\|\widetilde{x}_G-\widetilde{x}_G^1\right\|\right)\quad\forall x,x^1,\widetilde{x}_G,\widetilde{x}_G^1\in D.$$

We have

$$\left\|\overline{f}(x,\widetilde{x}_G)-\overline{f}(x^1,\widetilde{x}_G^1)\right\|\leqslant\lambda\left(\left\|x-x^1\right\|+\left\|\widetilde{x}_G-\widetilde{x}_G^1\right\|\right)$$

when $\sigma(T)\to 0$ as $T\to\infty$.

From conditions 1) and 4) we obtain that for systems (3) and (4) there exist unique and extend solutions $x=x(t), y=y(t)$ for $t\geqslant 0$ while $x,y\in D$.

Let us use integrate form for equations (3) and (4)

$$x(t)=x_0+\varepsilon\left(\int\limits_0^t f(s,x(s),\widetilde{x}_G(s))\,ds+\sum_{0<\tau_k<t}I_k(x)\right),$$

$$y(t)=x_0+\varepsilon\left(\int\limits_0^t\left(\overline{f}(y(s),\widetilde{y}_G(s))+\overline{I_k}(y)\right)\,ds\right)$$

for $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$.

Let us estimate the difference

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left\|\int\limits_0^t\left[f(s,x(s),\widetilde{x}_G(s))-\overline{f}(y(s),\widetilde{x}_G(s))\right]ds\right\|+\varepsilon\left\|\sum_{0<\tau_k<t}I_k(x)-\int\limits_0^t\overline{I}(y)\,ds\right\|.$$

We divide the interval $[0,L\varepsilon^{-1}]$ in m equal parts $t_0=0, t_1=\frac{L}{\varepsilon m},\cdots,t_i=\frac{iL}{\varepsilon m},..,t_m=\frac{L}{\varepsilon}$. Then using estimation from [12] for the first term, estimation from [1] for the second term and according to the assumption 4) one can indicate monotonically decreasing function $\sigma(t)\to 0$ as $t\to\infty$ such that for all $x\in D$ we obtain

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\frac{LM(\lambda L(5+\theta)+3\theta)}{\theta m}+\varepsilon t_i\sigma(t_i)+\varepsilon t\sigma(t).$$

Define $F(\varepsilon)=\sup\limits_{l\in[0,L]}\left[l\sigma(\frac{l}{\varepsilon})\right]$ and notice $\varepsilon t_i\sigma(t_i)\leqslant F(\varepsilon)$, $\varepsilon t\sigma(t)\leqslant F(\varepsilon)$. Then

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant C(m)+2F(\varepsilon),$$

where $C(m)=\frac{LM(\lambda L(5+\theta)+3\theta)}{\theta m}$. Observe, $F(\varepsilon)\to 0$, as $\varepsilon\to 0$. Hence, let us fix m and choose ε^* such that for all $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ the estimation (6) is true.

2. Optimal control problem for the impulsive system with maximum. Let us consider the following problem with supremum

$$\begin{array}{ll} \dot{x}=\varepsilon\left[f(t,x,\widetilde{x}_G)+A(x,\widetilde{x}_G)\zeta(t,u)\right], & t\geqslant 0, t\neq\tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k}=\varepsilon I_k(x), & k=0,1,2,\ldots, \\ x(0)=x_0, & \end{array} \tag{7}$$

where $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$, $\zeta:[0,L\varepsilon^{-1}]\times U\to\mathbb{R}^r$ $\mathcal{U}$ is a set of all piecewise continuous functions u from $[0,L\varepsilon^{-1}]$ to $\mathbb{R}^r$, $u(t)\in U\subset comp(\mathbb{R}^r)$.
We are interested in a control function which provides the minimum of functional

$$J[u]=\Phi(x(L\varepsilon^{-1})). \tag{8}$$

Let us consider the corresponding averaged system

$$\begin{array}{l} \dot{y}=\varepsilon\left[\overline{f}(y,\widetilde{y}_G)+A(y,\widetilde{y}_G)v+\overline{I}(y)\right], \\ y(0)=x_0. \end{array} \tag{9}$$

with functional

$$\overline{J}[u]=\Phi(y(L\varepsilon^{-1})), \tag{10}$$

where $v\in V$ is a new control vector and set V is defined as

$$V=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\zeta(t,U)dt, \tag{11}$$

in (11) we understand integral of set-valued function as Aumann integral, convergence we understand the sense of Hausdorff metric.

2.1 The algorithm of correspondence of control functions. The control functions in original and averaged systems are different e.g. can belong to the space of different dimensions. That is why it is necessary to establish the correspondence between control functions of (7),(8) and (9),(10).

1. For admissible control $v\in\mathcal{V}$ find the correspondence admissible control $u\in\mathcal{U}$ in the following way:

   (a) calculate points $v_i=\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}v(t)dt$, $i=0,1,2,\ldots$, (T_0 is an arbitrary constant).

   (b) assign control
   $u(t)=\{u_i(t), iT_0\leqslant t<(i+1)T_0, i=0,1,2,..\}$, where $u_i=u_i(t)$ can be obtained from the conditions:

$$\min_{u(t)\in U}\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\zeta(t,u(t))dt-v_i\right\|=\left\|\frac{1}{T_0}\int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0}\zeta(t,u_i(t))dt-v_i\right\|. \tag{12}$$

The set-valued mapping $\zeta(t,U)$ is continuous and bounded then by the Lyapunov theorem (see [9]) the set

$$V_{T_0}^i = \left\{ \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} \zeta(t, u_i(t))dt, \quad u_i(t) \in U \right\}$$

is convex and compact. According to (11) $\lim\limits_{T_0\to\infty} h(V_{T_0}^i, V) = 0$. Hence, there exist $\overline{v}_i \in V_{T_0}^i$ the nearest to the v_i, in other words there exist control function $u_i(t)$ in (12) such that

$$\frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} \zeta(t, u_i(t))dt = \overline{v}_i. \tag{13}$$

2. For an admissible control $u \in \mathcal{U}$ find the corresponding admissible control $v \in \mathcal{V}$ in the following way:

   (a) calculate $w_i(t) = \frac{1}{T_0} \int\limits_{iT_0}^{(i+1)T_0} \zeta(t, u_i(t))dt$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, (T_0-is an arbitrary constant;

   (b) assign control $v(t) = \{v_i(t), iT_0 \leqslant t < (i+1)T_0, i = 0, 1, 2, ..\}$, where v_i can be obtained from the condition:

   $$\operatorname*{argmin}_{v\in V} \|w_i - v\| = \|w_i - v_i\|.$$

   There exists v_i as a minimum of continuous function $\|w_i - v_i\|$ on a compact set V.

Remark 1. *Control functions $u = u(t)$ in 1(b) and $v = v(t)$ in 2(b) determined ambiguously.*

2.2 Justification of the averaging method. The following theorem provides justification of the averaging method for controlled system (7).

Theorem 2. *Suppose that in domain $Q = \{t \geqslant 0, x, \widetilde{x}_G \in D \subset \mathbb{R}^n, u(t) \in U \subset comp(\mathbb{R}^r)\}$ assumption 1),4)-6) of the theorem 1 are satisfied. Moreover,*

1) matrix A is continuous and there exist M, λ such that the following inequalities hold

$$\|A(x, \widetilde{x}_G)\| \leqslant M,$$

$$\left\|A(x, \widetilde{x}_G) - A(x^1, \widetilde{x}_G^1)\right\| \leqslant \lambda \left[\left\|x - x^1\right\| + \left\|\widetilde{x}_G - \widetilde{x}_G^1\right\|\right] \ \forall x^1, \widetilde{x}_G^1 \in D;$$

2) function $\zeta(t,u)$ is continuous with respect to t, u

3) *there exists $\rho > 0$ such that for any admissible control function $v \in \mathcal{V}$ the solution $y = y(t)$ to the averaged system (9), where $y(0) = x(0) = x_0 \in D' \subset D$ defined for any $t \geqslant 0$ and belongs together with ρ neighborhood to the domain D.*

Then for any $\eta > 0$ and $L > 0$ there exists $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\eta, L) > 0$ such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ and $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ the following statements hold

1) *for any admissible control $u \in \mathcal{U}$ of system (7) there exists control function v of system (9), such that:*

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \eta, \tag{14}$$

2) *for any admissible control $v \in \mathcal{V}$ of system (9) there exists control function u of system (7), such that (14) holds.*

Remark 2. *By assumption 3) function ζ is a continuous so we denote $M := \max\limits_{t,u,\widetilde{u}_G} |\zeta(t, u, \widetilde{u}_G)|$.*

Proof. Let us proof the first statement of the theorem, the second part proved analogously. Using the integral equations for (7) and (9) we have:

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\| \int\limits_0^t [f(s, x(s), \widetilde{x}_G(s)) + A(x(s), \widetilde{x}_G(s))\zeta(s, u(s)))]\, ds + \sum_{0<\tau_k<t} I_k(x) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^t \left[\overline{f}(\widetilde{y}_G(s), \widetilde{y}_G(s)) + A(y(s), \widetilde{y}_G(s))v(s) + \overline{I}(y)\right] ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\| \int\limits_0^t \left[f(s, x(s), \widetilde{x}_G(s))) - \overline{f}(y(s), \widetilde{y}_G(s))\right] ds \right\| + \varepsilon \left\| \sum_{0<\tau_k<t} I_k(x) + \int\limits_0^t \overline{I}(y) ds \right\| +$$

$$+\varepsilon \left\| \int\limits_0^t [A(x(s), \widetilde{x}_G(s))\zeta(s, u(s))) + A(y(s), \widetilde{y}_G(s))v(s)]\, ds \right\| =$$

$$= W_1 + W_2 + W_3.$$

According to [12] for any η_1 there exists $\varepsilon^*(\eta_1) > 0$ such that for any $\varepsilon \leqslant \varepsilon^*(\eta_1)$ the following holds:

$$W_1 \leqslant \frac{M}{m} \left[2\lambda(L + 2m\varepsilon) max \left\{\omega(g, \Delta), \omega(\gamma, \Delta)\right\} + L(\lambda L + 1)\right],$$

$$2m\eta_1 = \nu(m, \varepsilon),$$

where $\omega(g,\Delta) = \sup\limits_{|t''-t'|\leqslant\Delta} |g(t'') - g(t')|$, $\Delta = t_{i+1} - t_i = \frac{L}{\varepsilon m}$, $t'', t' \in [0,\infty)$ and analogously for the function γ.

For W_2 from [1] for sufficiently large $m \in \mathbb{N}$ we get

$$W_2 \leqslant \frac{LM(3\lambda L^2\theta + 3\theta + 1 + 2\lambda L)}{\theta m} + \frac{3\lambda L^2 M}{\theta m} = b(m,\theta).$$

For W_3 the following holds:

$$W_3 \leqslant \varepsilon \left\| \int\limits_0^t [A(x(s),\widetilde{x}_G(s)) - A(y(s),\widetilde{y}_G(s))]\, \zeta(s,u(s)))\, ds \right\| +$$
$$+ \left\| \varepsilon \int\limits_0^t A(y(s),\widetilde{y}_G(s))\, [\psi(s,u(s)) - v(s)]\; ds \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\lambda M \int\limits_0^t [\|x(s) - y(s)\| + \|\widetilde{x}_G(s) - \widetilde{y}_G(s)\|]\; ds + W_4,$$

where

$$W_4 = \left\| \varepsilon \int\limits_0^t A(y(s),\widetilde{y}_G(s))\, [\psi(s,u(s)) - v(s)]\; ds \right\|.$$

For estimation W_4 we divide interval $[0, L\varepsilon^{-1}]$ into m equal parts by $t_i = \frac{iL}{\varepsilon m}$, $i = 1,..,m$. For any $t \in [t_p, t_{p+1})$ and for some $p \in \mathbb{N}$, $p < m$ we get

$$W_4 = \varepsilon \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(y(s),\widetilde{y}_G(s))\, [\zeta(s,u(s)) - v(s)]\; ds \right\| + \right.$$
$$\left. + \left\| \int\limits_{t_p}^{t} A(y(s),\widetilde{y}_G(s))\, [\zeta(s,u(s)) - v(s))]\, ds \right\| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|A(y(s),\widetilde{y}_G(s)) - A(y(t_i),\widetilde{y}_G(t_i))\, [\zeta(s,u(s)) - v(s))]\|\, ds + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} A(y(t_i),\widetilde{y}_G(s))\, [\zeta(s,u(s)) - v(s))]\; ds \right\| +$$
$$\left. + \int\limits_{t_p}^{t} \|A(y(s),\widetilde{y}_G(s))\, [\zeta(s,u(s)) - v(s))]\|\, ds \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda \left(\|y(s) - y(t_i)\| + \|\widetilde{y}_G(s) - \widetilde{y}_G(t_i)\| \right) \|\zeta(s,u(s)) - v(s)\| \, ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_p}^{t} \|A(y(s), \widetilde{y}_G(t_i)) \left(\zeta(s,u(s)) - v(s)\right)\| \, ds \right\} \leqslant 3M \frac{L}{m} \left(L\lambda + \max\left\{ \omega(g,\Delta), \omega(\gamma,\Delta) \right\} + 1 \right).$$

Then

$$W_3 \leqslant 2\varepsilon\lambda M \int\limits_0^t \delta(s)\, ds + 3M \frac{L}{m} \left(L\lambda + \max\left\{ \omega(g,\Delta), \omega(\gamma,\Delta) \right\} + 1 \right).$$

Here $\delta(t) = \max\limits_{s \in [0,t]} \|x(s) - y(s)\|$ is a uniform metrix. Let us collect estimations for W_1, W_2, W_3, W_4

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant$$

$$\leqslant \nu(m,\varepsilon) + b(m,\theta) + 3M \frac{L}{m} \left(L\lambda + \max\left\{ \omega(g,\Delta), \omega(\gamma,\Delta) \right\} + 1 \right) +$$

$$+ 2\varepsilon\lambda M \int_0^t \delta(s)\, ds = C(m) + 2\varepsilon\lambda M \int_0^t \delta(s)\, ds,$$

take maximum on $[0,t]$ from both sides and apply Gronwalla-Bellman inequality we obtain

$$\delta(t) \leqslant C(m) e^{2\lambda M L}.$$

Hence, for $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, the trajectories belong to the domain D and by appropriate choise of sufficiently large m and sufficiently small ε we obtain the estimation (14). Thus the first part of theorem is proved.

Remark 3. *As an averaged system one can consider the following one*

$$\dot{y} = \varepsilon \left[\overline{f}(y, \widetilde{y}_G) + A(y, \widetilde{y}_G) \zeta(t,u) + \overline{I}(y) \right].$$

Owing to the average system depends on the same control that initial system we do not need the algorithm of correspondence of control functions.

2.3 Approximation of the functional of the optimal control problem by the impulsive system with maximum.

Theorem 3. *Suppose in domain $Q = \{t \geqslant 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n, u, \widetilde{u} \in U \subset comp(\mathbb{R}^m)\}$ the assumptions of the theorem 2 hold. Moreover,*

1) there exits λ such that

$$\|\Phi(x) - \Phi(x')\| \leqslant \lambda \|x - x'\|;$$

2) there exist $u^*(t) \in U$ optimal control function of problem (7),(8), $x^*(t)$ — corresponding optimal trajectory and J^* — optimal value of functional.

Then for any $L > 0$ there exists $\eta_1 > 0$, and $\varepsilon^*(L) > 0$ such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ the following inequalities hold:

$$\left|\overline{J}[v^*] - J[u^*]\right| \leqslant \eta_1, \tag{15}$$

$$J[u_{v^*}] - J[u^*] \leqslant \eta_1, \tag{16}$$

where $\overline{J}[v^*]$ is the optimal value of functional of the problem (7),(8), u_{v^*} is a control function to the problem (9), (10) constructed by the algorithm and corresponding to the optimal control function v^* of problem (9), (10), v_{u^*} is the optimal control function of problem (9),(10) constructed by u^*.

Remark 4. *Note that Theorem 3 is valid if instead of the problem (7),(8) with unfixed right end we consider problem with flexed one, i.e. with restriction*

$$\psi_j(x(L\varepsilon^{-1})) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Hence, one can formulate numerical-asymptotic algorithm for solving optimal control problem for the impulsive system with supremum:

1) for known controlled problem with small parameter and supremum (7), (8) we define averaged problem (9), (10);

2) for known set of admissible control functions $\mathfrak{U}$ we construct the set of admissible control functions for averaged problem according to the algorithm of correspondence of control functions of original and averaged systems;

3) solve optimal control problem of averaged problem (9) with criterion (10) and find $v^*(t), y^*(t), \overline{J}^*$;

4) according to the algorithm by the found optimal control function $v^*(t)$ of averaged problem we find correspondence control function of original problem u_v^* which is asymptotically optimal for problem (7),(8);

5) for found control function u_v^* we create correspondence trajectory for the system (7) $x(t) = x(t, u_v^*)$;

6) calculate the value of functional (8) on the trajectory from the step (5).

Conclusion. In this paper the justification of the averaging method for the system of functional-differential equations with maximum and impulsive perturbation is presented. Also, the approximation of solutions for the optimal control problem for such kind of system is obtained.

References

1. Bainov, D., Covachev, V. (1994), *Impulsive Differential Equations with a Small Parameter*, World Scientific.
2. Bogolyubov, N. N., Mitropolski, Yu. A. (1961), *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations* Gordon and Breach.
3. Milusheva, S. D., Bainov, D. D. (1991), Averaging method for neutral type if impulsive differential equations with supremum, *Annales de lafaculte des sciences de Toulouse 5-e serie*, volume 12, no. 3, pp. 391–403.
4. Khalil, H. K. (2002), Nonlinear systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, 3rd edition.
5. Kitanov, N. (2011), Methods of averaging for optimal control problems with impulsive effects, *Int. J. Pure Appl.Math*, 71(4), pp. 573–589.
6. Halanay, A. (1966), On the method of averaging for differential equations with retarded argument, *J. Mathem. Anal. Appl.*, 14(1), pp. 70–76.
7. Hale, J. K. (1966), Averaging methods for differential equations with retarded arguments and small parameter, *J. Differ. Equ*, 2(1), pp. 57–73.
8. Lehman, S., Brad, Weibel. (1990), Fundamental theorems of averaging for functional differential equations, *J. Differ. Equ*, 152, pp. 160–190.
9. Lyapunov, A. A. (1940), About a completely additive vector functions *Izvest. AN, USSR* 4(6), pp. 465–478.
10. Moiseev, N. N. (1981), *The asymptotic methods of nonlinear mechanics*, M.: Nauka.
11. Plotnikov, V. A. (1992), *Averaging method in control problem*, Kyiv: Libid.
12. Plotnikov, V. A., Kichmarenko, O. D. (2009), A note on the averaging method for differential equations with maxima. *Iranian Journal of optimization*, volume 1, pp. 132–140.
13. Plotnikov, V. A., Kichmarenko, O. D. (2006), Averaging of controlled equations with Hukuhara derivative, *Nonlinear Oscil.*, 9(3), pp. 365–374.

Кичмаренко О., Сапожникова Е., Дашковский С.

Апроксимація розв'язків задачі оптимального керування для імпульсних систем з максимумом

Резюме

Дана стаття представляє метод усереднення для двох типів задач: імпульсної задачі з максимумом та задачі оптимального керування такого типу систем. Для першої задачі отримане узагальнення теореми Крилова"– Боголюбова. Для другої ми зацікавлені не тільки в отриманні оцінки близкості розв'язків початкової та усередненої задач оптимального керування, а і у оцінці близкости відповідних функціоналів. З цією метою також отримано обгрунтування методу усередненя. В цьому випадку схема усередненя включає алгоритм відповідності функцій керування початкової та усередненої задач оптимального керування. Отримано алгоритм чисельно-асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування системами такого типу з малим параметром.
Ключові слова: системи із запізненням, імпульсні системи, задача оптимального керування, метод усреднення.

Кичмаренко О., Сапожникова К., Дашковский С.

Аппроксимация решений задачи оптимального управления для импульсніх систем с максимумом

Резюме

Данная статья представляет метод усреднения для двух задач: импульсной задачи с максимумом и задачи оптимального управления такими типами систем. Для первой задачи получено обобщения теоремы Крылова—Боголюбова. Для второй мы заинтересованы не только в получинии оценки близости решений исходной и усредненой задач оптимального управления с максимумом и импульсным воздействием, а также в получении оценки для соответвующих функционалов. Для этой цели также получено обоснование метода усреднения. В этом случае схема усреднения включает алгоритм соответсвия функций управления исходной и усредненной задач оптимального управления. Получен алгоритм численно-асимптотического решения задачи оптимального управления системами такого типа с малым параметром.

Ключевые слова: системы с запаздыванием, импульсные системы, задача оптимального управления, метод усреднения.

ISSN 2519-206X. Researches in Mathematics and Mechanics.–2016.–V.21, Is. 2(28).–P.88–100

UDC 511.33

S. Varbanets
I. I. Mechnikov Odesa National University

ON EXPONENTIAL SUMS INVOLVING THE DIVISOR FUNCTION OVER $\mathbb{Z}[i]$

We apply the van der Corput transform to investigate the sums of view $\sum r(n)g(n)e(f(n)))$, where $r(n)$ is the number of representations of n as the sum of two squares of integer numbers. Such sums have been studied by M. Jutila, O. Gunyavy, M. Huxley and etc. Depending of differential properties of the functions $g(n)$ and $f(n)$ there have been obtained the different kinds of error terms in bounds of the considered sums. In the special case, O. Gunyavy improved the result of M. Jutila in the problem on estimate the exponential sum involving the divisor function $\tau(n)$. We obtain the asymptotic formula of the sum $\sum \tau(\alpha)e\left(\frac{a}{q}N(\alpha)\right)$ over the ring of Gaussian integers which is an analogue of the asymptotic formulas obtained by M. Jutila and O. Gunyavy.
MSC: 11K45.
Key words: exponential sum, discrepancy.

Introduction. In 1985 M. Jutila [4], [5] constructed an asymptotic formula for the divisor function $\tau(n)$ weighted by trigonometric unit

$$T(x;a,q)=\sum_{n\leqslant x}\tau(n)e^{2\pi i\frac{an}{q}}=\frac{x}{q}\left(\ln\frac{x}{q^2}+2\gamma-1\right)+R(x),$$

where $R(x)=O\left(x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}q^{\frac{2}{3}}\right)$.

This formula is a nontrivial for $q\ll x^{\frac{2}{5}-\varepsilon}$, moreover, a constant in the symbol "O" doesn't depend at b, q, x.

Hereafter O. Gunyavy [1] improved an error term $R(x)=O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ and hence carry over a region of nontriviality of the formula for $T(x;a,q)$.

In the works [4], [1] the main method of investigation is founded on the van der Corput transform

$$\sideset{}{^*}\sum_{N\leqslant n\leqslant N'}g(n)e^{2\pi i f(n)}=\sum_{f'(N)\leqslant n\leqslant f'(N')}\frac{1}{\sqrt{|f''(\varphi(n))|}}e^{2\pi i(f(\varphi(n))-n\varphi(n)+\frac{1}{8})}+R,$$

where f and g are real-valued three times continuously differentiable on the interval $[N,N']$, and $\varphi(n)$ is unique solution to $4x^2f'(x)=n$ in the interval $[N,N']$. A starred sum indicates that if a limit of summation is an integer, the corresponding summand is multiplied by $\frac{1}{2}$.

The main goal of this paper derive an analogue of the Gunyavy theorem for the weighted divisor function by trigonometric unit over the ring of Gaussian integers.

We prove the following theorems

Received 01.11.2016

Theorem 1. *Let* $1 \leqslant a \leqslant q$, $(a, q) = 1$, $q \ll x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, *and let* $r(n)$ *be a number of representations of* n *as sum of two square integers. Then*

$$A\left(x, \frac{a}{q}\right) := \sum_{n \leqslant x} r(n) e^{2\pi i \frac{an}{q}} = qA\left(\frac{x}{q^2}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) = \frac{\pi x}{q} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Theorem 2. *Let* α_0, β *be the gaussian integers,* $(\alpha_0, \beta) = 1$, *and* $\tau(\alpha)$ *be a divisor function over the ring of Gaussian numbers. Then for* $N(\beta) \ll x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}$ *the following asymptotic formula*

$$\sum_{N(\alpha) \leqslant x} \tau(\alpha) e^{2\pi i N\left(\frac{\alpha_0 \alpha}{\beta}\right)} = C_1(\beta) \frac{x \log x}{N(\beta)} + C_2(\beta) \frac{x}{N(\beta)} + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} N(\beta)\right)$$

holds, where $C_i(\beta)$ *be the computable constants,* $N(\beta)^{-\varepsilon} \ll C_i(\beta) \ll N(\beta)^{\varepsilon}$, $i = 1, 2$.

Notation. We will frequently use the Landau and Vinogradov asymptotic notations. The big "O" notation $f(x) = O(g(x))$ (equivalently, $f(x) \ll g(x)$) means that there exists some constant C such that $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ on the domain in question. By $f(x) \asymp g(x)$, we shall mean that $g(x) \ll f(x) \ll g(x)$. A symbol $k \sim B$ under the sign of $\sum$ denotes that a summation variable k runs all integers from $[B, B']$, $B < B' \leqslant 2B$. We denote $e^{2\pi x}$ as $e(x)$.

Auxiliary arguments. In order to prove the main results we need the following preliminary lemmas.

Lemma 1 (Generalized van der Corput transform, see [3], Lemma 5.5.3)**.** *Suppose that* $f(x)$ *is real and four times continuously differentiable on* $[a, b]$. *Suppose that there are positive numbers* M *and* T, *with* $M > b - a$, *such that, for* $x \in [a, b]$, *we have*

$$f''(x) \asymp \frac{T}{M^2}, \ F^{(3)}(x) \ll \frac{T}{M^3}, \text{ and } f^{(4)}(x) \ll \frac{T}{M^4}.$$

Let $g(x)$ *be a real function of bounded variation* V *on closed interval* $[a, b]$. *Then*

$$\sum_{a \leqslant n \leqslant b} g(n) e(f(n)) = \sum_{f''(a) \leqslant n \leqslant f'(b)} \frac{g(\varphi(n)) e\left(f(\varphi(n)) - n\varphi(n) + \frac{1}{8}\right)}{\sqrt{f''(\varphi(n))}} +$$

$$+ O\left((V + |g(a)|)\left(\frac{M}{\sqrt{T}} + \log\left(f'(b) - f'(a) + 2\right)\right)\right),$$

where $\varphi(n)$ *is the unique solution in* $[a, b]$ *to* $f'(x) = n$.

The implicit constants in the big O*-term depends on the implicit constants in the relations between* T, M *and the derivatives of* $f(x)$.

Lemma 2. *Consider a function* $f : [N, N'] \to \mathbb{R}$ *that is* C^4, *and a function* $g : [N, N'] \to \mathbb{R}$ *that is* C^3 *with the positive real numbers* T, M, C, C_2, C_3, C_4, D *such that*

$$\frac{CT}{M^2} \leqslant f''(x) \leqslant \frac{C_2 T}{M^3}, \ f^{(j)}(x) \leqslant C_j \frac{T}{M^j}, \ j = 3, 4;$$

$$f'(x_0) = 0 \text{ for some } x_0 \text{ in } [N, N'],\ x_0 - N \leqslant M;$$

$$0 < g^{(j)}(x) \ll \frac{U}{K^j},\ j = 0, 1, 2.$$

Then

$$\int\limits_N^{N'} g(x)e(f(x))dx = g(x_0)\frac{e\left(f(x_0)+\frac{1}{8}\right)}{\sqrt{f''(x_0)}} +$$

$$+O\left(\frac{UM^4}{T^2(\min(x_0-N, N'-x_0))^3}\right) + O\left(\frac{UM}{T^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{M}{K}\right)^2\right).$$

(For proof, see [7], Lemma 5.4).

Unfortunately, for many interesting cases, the above error is insufficient. Thus, it's often impose additional constraint of the function $g(n)$ and its derivatives.

The van der Corput transform has been studied in much more general problems for construction of asymptotic formulas for the sums of values of arithmetical functions weighted by a trigonometric units. For example, M. Jutila [4] [5] investigated sums of the form $\sum b(n)g(n)e(f(n))$ for certain multiplicative function $b(n)$ (see, also Gunyavy [1] and M. Huxley [3], Ch. 20).

The following lemmas of van der Corput are well-known (see, [7], Lemmas 5.6 and 5.7).

Lemma 3 (First derivative test)**.** *Let $f(x)$ be real and differentiable on the open interval (α, β) with $f'(x)$ monotone and $f'(x) \geqslant x > 0$ on $[\alpha, \beta]$. Let $g(x)$ be real, and let V be the total variation of $g(x)$ on the closed interval $[\alpha, \beta]$ plus maximal modules of $g(x)$ on $[\alpha, \beta]$. Then*

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta g(x)e(f(x))dx\right| \leqslant \frac{V}{\pi x}.$$

Lemma 4 (Second derivative test)**.** *Let $f(x)$ be real and twice differentiable on the open interval (α, β) with $f''(x) \geqslant \lambda > 0$ on (α, β). Let $g(x)$ be real, and let V be the total variation of $g(x)$ on the closed interval $[\alpha, \beta]$ plus maximum modules of $g(x)$ on $[\alpha, \beta]$. Then*

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta g(x)e(f(x))dx\right| \leqslant \frac{4V}{\sqrt{\pi\lambda}}.$$

Remark. *We can bound V in Lemmas 3 and 4 by*

$$|g(\alpha)| + |g(\beta)| + \int\limits_\alpha^\beta |g'(y)|dy \ll U + 2M \cdot \frac{U}{M} \ll U,$$

using condition on derivatives of f and g.

Lemma 5 ([7], Lemma 5.9)**.** *Let $f \in C^3([\alpha, \beta])$ and $g \in C^2([\alpha, \beta])$, and define $h_m(x)$ by*

$$h_m(x) := \frac{(f'(x) - m)g'(x) - g(x)f''(x)}{(f'(x) - m)^3}.$$

Suppose that $f'(x) \neq m$ on an interval $[\alpha, \beta]$, and let

$$K_m(\alpha, \beta) := \sum |h_m(x)|,$$

where the sum ranges over all $x \in [\alpha, \beta]$, where $h'_m(x) = 0$.

Then we have

$$\int_\alpha^\beta g(x)e(f(x) - mx)dx = \left[\frac{g(x)}{2\pi i(f'(x)-m)}e(f(x) - mx)\right]_\alpha^\beta + \\ +O(K_m(\alpha, \beta)) + O(|h_m(\alpha)| + |h_m(\beta)|).$$

We always propose that the functions $f(x)$, $g(x)$ are quadruply (and, respectively, three times) continuously differentiable and satisfy the specified requirements on $[N, N']$, $N \leqslant N' \leqslant 2N$, such that

$$f^{(j)}(x) \asymp \frac{T}{M^j}, \ j = 2, 3, 4;$$
$$g^{(j)}(x) \asymp \frac{U}{M^j}, \ j = 0, 1, 2,$$

where $0 < T$, $M \ll N$ and

$$g(x) \ll g(N), \ \frac{1}{N} \ll |f'(N)| \ll |f'(x)| \ll |f'(N)|,$$
$$|f'(N)| \ll |f'(x) + 2xf''(x)| \ll f'(N), \ f^{(3)} \ll \frac{|f'(N)|}{N^2}.$$

These bounds on the derivatives of f and g allows us to use estimates on stationary phase integrals and, moreover, guarantee the uniqueness of the solution of equation $n = f'(x)$ or $n = 2xf'^2(x)$ if solutions of these equations there exist.

The following theorem you can consider as the special case of Lemma of van der Corput.

Theorem 3. *Let us the functions $f(x)$ and $g(x)$ satisfy the conditions above, and let $r(n)$ be the number of the representation of n by form $n = u^2 + v^2$, $u, v \in \mathbb{Z}$. Then we have*

$$\sum_{n\sim N} r(n)g(n)e^{2\pi i f(n)} =$$

$$= \sum_{n\sim N(f'(N))^2} r(n)g(\varphi(n))\sqrt{|\varphi'(n)|}e^{2\pi i(f(\varphi(n))-2\sqrt{n\varphi(n)})} +$$

$$+O\left(N^\varepsilon \left|\frac{g(N)}{f'(N)}\right|\right) + O(N^\varepsilon |g(N)|) +$$

$$+O\left(|g(N)| N^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \min\left(\sqrt{|f'(N)|}, \frac{1}{\sqrt{|f'(N)|}}\right)\right).$$

where

$$\omega_0(f) = \begin{cases} -1 & if \quad f'(N)(f'(n) + 2Nf''(N)) > 0, \\ i & if \quad f'(N) > 0, \ f'(N) + 2Nf''(N) < 0, \\ -i & if \quad f'(N) < 0, \ f'(N) + 2Nf''(N) > 0, \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ *is an arbitrary small, and constatnts in symbols "O" depend only on* ε.

Proof. It is well known that for $x > 1$ we have the representation

$$\sum_{n\leqslant x} r(n) = \pi x + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{\sqrt{n}}\Im_1(2\pi\sqrt{nx}), \tag{1}$$

where $\Im_1(z)$ is the Bessel function of first kind and order one.

For the Bessel function $\Im_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ there exist the asymptotic expanding

$$\Im_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{2\pi\nu}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(|z|^{-\frac{3}{2}}\right), \text{ for } z \to \infty, \tag{2}$$

moreover, for $\nu \geqslant 1$,

$$\frac{d}{dz}\left(z^{\frac{\nu}{2}}\Im_\nu(2\sqrt{z})\right) = z^{\frac{\nu-1}{2}}\Im_{\nu-1}(2\sqrt{z})$$

The asymptotical series (1) is boundedly convergent and may be differentiate.Thus, by Abelian summation for any $X > 1$, we obtain

$$\begin{gathered}\sum_{N\leqslant n\leqslant N'\leqslant 2N} r(n)g(n)e(f(n)) = G(x)R_X(x)\Big|_N^{N'} + \\ + \sum_{n\leqslant X} r(n)\int_N^{N'} G(x)\Im_0(2\pi\sqrt{nx})dx + \pi\int_N^{N'} G(x)dx - \int_N^{N'} G'(x)R_X(x)dx,\end{gathered} \tag{3}$$

where

$$G(x) = g(x)e(f(x)), \;\; R_X(x) = \sum_{n>X}\sqrt{\frac{x}{n}}r(n)\Im_1(2\pi\sqrt{nx}).$$

First we consider the case $N^{-1} \ll f'(N) \ll 1$. We take up of every summand in right side of (2) in separately. We put $X_0 = 4N(f'(N))^2$, $X = X_0 + \sqrt{X_0 f'(N)}$.

Since $R_X(x) \ll x^\varepsilon\left(1 + \sqrt{\frac{x}{X}}\right)$, $\varepsilon > 0$, and $g'(x)$ is monotoneness on $[N, N']$, we have

$$\begin{gathered}G(x)R_X(x)\Big|_N^{N'} \ll N^\varepsilon g(N)\left(1 + \frac{1}{f'(N)}\right) \ll N^\varepsilon\frac{g(N)}{f'(N)}, \\ \int_N^{N'} g'(x)e(f(x))R_X(x)dx \ll N^\varepsilon\int_N^{N'}|g'(x)|\frac{1}{f'(N)}dx \ll N^\varepsilon\frac{g(N)}{f'(N)}.\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\int_N^{N'} g(x)f'(x)e(f(x))R_X(x)dx \ll N^\varepsilon\left(1 + \sqrt{\frac{N}{X}}\right)\cdot|f'(N)|\cdot g(N)\frac{1}{f'(N)} \ll N^\varepsilon\frac{g(N)}{f'(N)}, \\ \int_N^{N'} g(x)e(f(x))dx \ll \frac{g(N)}{f'(N)}.\end{gathered} \tag{5}$$

The bounds (5) follow by "*First derivative test*".

Next, we denote

$$A_0(N,x) := \pi \sum_{n\leqslant X} r(n)g(x)e(f(x))\mathfrak{I}_0(2\pi\sqrt{nx}), \tag{6}$$

$$A_1(N,x) := 2\pi i \sum_{n>X} \frac{r(n)}{\sqrt{n}} g(x)f'(x)\sqrt{x}\mathfrak{I}_1(2\pi\sqrt{nx})e(f(x)). \tag{7}$$

Now we employ the asymptotic expanding of Bessel function for $x>1$

$$\mathfrak{I}_0(2\pi\sqrt{nx}) = \frac{cos\left(2\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)}{\pi(nx)^{\frac14}}\left(1+O\left(\frac{1}{(nx)^{\frac12}}\right)\right),$$

$$\mathfrak{I}_1(2\pi\sqrt{nx}) = -\frac{cos\left(2\pi\sqrt{nx}+\frac{\pi}{4}\right)}{\pi(nx)^{\frac14}}\left(1+O\left(\frac{1}{(nx)^{\frac12}}\right)\right).$$

So, we may write

$$B_0(N) := \int_N^{N'} A_0(N,x)dx = \pi\sum_{n\leqslant X} r(n)\int_N^{N'} g(x)e(f(x))\mathfrak{I}_0(2\pi\sqrt{nx})dx = \tag{8}$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\pi\sum_{n\leqslant X}\frac{r(n)}{n^{\frac14}}\int_N^{N'}\frac{g(x)}{x^{\frac14}}e(f(x)-\sqrt{nx})dx+$$

$$+\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2}\sum_{n\leqslant X}\frac{r(n)}{n^{\frac14}}\int_N^{N'}\frac{g(x)}{x^{\frac14}}e(f(x)+\sqrt{nx})dx := I_{01}+I_{02},$$

say.

Without loss of generality, we can suppose that $f'(x)>0$. Consider the integral

$$\int_N^{N'} g(x)x^{-\frac14}e(f(x)-\sqrt{nx})dx,$$

and notice that the function $\frac{d}{dx}(f(x)-\sqrt{nx})$ goes to zero in the point x_0, where x_0 is a solution of the equation $4f'^2(x)=n$. We denote $x_0=\varphi(n)$ and call a stationary phase point for $f_n(x)=f(x)-\sqrt{nx}$. On the interval $[N,N']$ a stationary phase points of $f_n(x)$ exist only if $n\in[X_0-\sqrt{X_0f'(N)}, X_0+\sqrt{X_0f'(N)}]$.

The functions $\widetilde{f}_n(x) = f(x)+\sqrt{nx}$ for all n and also those $f_n(x)$, for which $n\notin[X_0-\sqrt{X_0f'(N)}, X_0+\sqrt{X_0f'(N)}]$ have not stationary phase points on $[N,N']$.

Hence, by "*First derivative test*", we have

$$I_{02} \ll N^{\varepsilon}X^{\frac34}g(N)\cdot\frac{X^{\frac14}}{N^{\frac12}} \ll N^{\frac12+\varepsilon}\sqrt{f'(N)}g(N). \tag{9}$$

For estimate of $B_0(N)$ remained to calculate two sums

$$\sum\nolimits_1 := \sum_{n\sim X_0}\frac{r(n)}{n^{\frac14}}\int_N^{N'}\frac{g(x)}{x^{\frac14}}e(f(x)-\sqrt{nx})dx,$$

where the sign $n \sim X_0$ denotes that $n \in [X_0 - \sqrt{X_0 f'(N)}, X_0 + \sqrt{X_0 f'(N)}]$, and

$$\sum\nolimits_2 := \sum_{n < X_0 - \sqrt{X_0 f'(N)}} \frac{r(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \int\limits_N^{N'} \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{4}}} e(f(x) - \sqrt{nx}) dx.$$

For the sum $\sum_2$ the "*Second derivative test*" gives

$$\int\limits_N^{N'} \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{4}}} e(f(x)) dx \ll \frac{g(N)}{N^{\frac{1}{4}}} \cdot N^{\varepsilon} \left(f_n''(N)\right)^{-\frac{1}{4}}. \tag{10}$$

We make the some auxiliary calculations

$$f_n''(x) = f''(x) + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{n}}{x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{4x} \left(4x f''(x) + \sqrt{\frac{n}{x}}\right),$$

and hence, for $n \sim X_0$, we have

$$\begin{cases} f_n''(x) \asymp \frac{1}{N}(f'(N) + 4N f''(N)) \asymp \frac{f'(N)}{N} > 0, \\ f_n^{(3)}(x) = f^{(3)}(x) - \frac{3}{8} \frac{\sqrt{n}}{x^{\frac{5}{2}}} \ll \frac{f'(N)}{N^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Next, by the relation $x = 4\varphi(x) f'^2(\varphi(x))$, we infer

$$1 = 4(\varphi'(x) f'^2(\varphi(x)) + 2\varphi(x) f'(\varphi(x)) f''(\varphi(x)) \varphi'(x)),$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{4f'(\varphi(x))(f'(\varphi(x)) + 2\varphi(x) f''(\varphi(x)))} \asymp \frac{1}{f'^2(N)}.$$

At last, for $n \sim 4N f'^2(N)$, we have

$$\varphi(n) - \varphi(X_0) \asymp \varphi'(n)(n - X_0) \asymp \frac{n - X_0}{f'^2(N)}.$$

Thus,

$$\begin{aligned} &\varphi(n) - N = \varphi(n) - \varphi(X_0) \ll \frac{1}{\sqrt{f_n''(N)}} \\ &\Leftrightarrow \frac{n, X_0}{f'^2(N)} \ll \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{f'(N)}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n - X_0 \ll \sqrt{N} (f'(N))^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n - X_0 \ll \sqrt{X_0 f'(N)}. \end{aligned} \tag{12}$$

So, from (10), we obtain

$$\sum\nolimits_2 \ll \frac{g(N)}{N^{\frac{1}{4}} f'(N)} + g(N)\sqrt{N} \cdot \sqrt{f'(N)}.$$

To the integral in $\sum_1$ we apply Lemma 2. Then by (12), we have

$$\int\limits_N^{N'} \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{4}}} e(f_n(x))dx = \omega(f)\frac{g(\varphi(n))e(f_n(\varphi(n)))}{|\varphi(n)|^{\frac{1}{4}}\sqrt{|f_n''(\varphi(n))|}} + \\ + O\left(\frac{g(N)}{N^{\frac{1}{4}}(\varphi(n)-N)f_n''(N)}\right) + O\left(\frac{g(N)}{N^{\frac{1}{4}}Nf_n''(N)}\right), \tag{13}$$

where

$$\omega(f) = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4}} & if \quad f_n''(\varphi(n)) > 0, \\ e^{-\frac{\pi i}{4}} & if \quad f_n''(\varphi(n)) < 0. \end{cases}$$

Moreover,

$$\begin{cases} \frac{g(N)}{N^{\frac{1}{4}}(\varphi(n)-N)f''(N)} \ll \frac{g(N)N^{\frac{1}{2}}f'(N)}{X_0-n}, \\ \frac{g(N)}{N^{\frac{5}{4}}f_n''(N)} \ll \frac{g(N)}{N^{\frac{1}{4}}f'(N)}. \end{cases} \tag{14}$$

From the definition $\varphi(n)$ and $f_n(x)$, we have

$$n^{\frac{1}{4}}(\varphi(n))^{\frac{1}{4}}\sqrt{|f_n''(\varphi(n))|} = \frac{n^{\frac{1}{4}}(\varphi(n))^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\varphi(n)}}|f'(\varphi(n)) + 2\varphi(n)f''(\varphi(n))|^{\frac{1}{2}} = \\ = \sqrt{f'(\varphi(n))}|f'(\varphi(n)) + 2\varphi(n)f''(\varphi(n))|^{\frac{1}{2}} = |\varphi'(n)|^{-\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Hence, we obtain

$$B_0(N) = \frac{\pi}{2}\omega_0(f)\sum_{n\sim 4Nf'^2(N)} r(n)g(\varphi(n))\sqrt{|\varphi'(n)|}e(f_n(\varphi(n))) + \\ + O\left(N^{\varepsilon}\frac{g(N)}{|f'(N)|}\right) + \\ + O\left(N^{\varepsilon}g(N)\right) + \\ + O\left(g(N)N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\min\left(\sqrt{|f'(N)|}, \frac{1}{|f'(N)|}\right)\right), \tag{16}$$

where

$$\omega_0(f) = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4}}\omega(f) & if \quad f'(N) + 2Nf''(N) > 0, \\ e^{-\frac{\pi i}{4}}\omega(f) & if \quad f'(N) + 2Nf''(N) < 0. \end{cases}$$

Now we will calculate $A_1(N, X)$, where $X = X_0 + \sqrt{X_0 f'(N)}$, $X_0 = 4N(f'(N))^2$. We must note that on the interval of integration $[N, N']$, a subintegral function has not stationary phase points. So, by analogy with the case of $A_0(N, X)$, we obtain for $n \geqslant X$

$$\int\limits_N^{N'} x^{\frac{1}{4}}g(x)f'(x)e(f(x) + \sqrt{nx})dx \ll \frac{g(N)N^{\frac{3}{4}}f'(N)}{\sqrt{n}},$$

and hence, the summation over $n > X$ gives the bound

$$O\left(N^{\varepsilon} g(N)\sqrt{Nf'(N)}\right).$$

Next, the integral

$$I(n) = \int\limits_{N}^{N'} x^{\frac{1}{4}} g(x) f'(x) e(f(x) - \sqrt{nx}) dx$$

we calculate with help of "*First derivative test*"

$$I(n) \ll N^{\frac{1}{4}} g(N) \frac{f'(N)}{f'_n(N)}.$$

But we have

$$f'_n(N) = f'(N) - \sqrt{\frac{n}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sqrt{N}f'(N) - \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sqrt{X_0} - \frac{1}{2}\sqrt{n}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\sqrt{X_0} - \frac{1}{2}\sqrt{n}\right) \asymp \sqrt{\frac{n}{N}}.$$

And then we derive the following estimates

$$\sum_{X \leqslant n \leqslant 2X} \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} I(n) \ll \sum_{X \leqslant n \leqslant 2X} \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} N^{\frac{1}{4}} g(N) f'(N) \frac{\sqrt{XN}}{n - X_0} \ll$$
$$\ll \frac{N^{\frac{3}{4}}}{X_0^{\frac{1}{4}}} g(N) f'(N) \sum_{X \leqslant n \leqslant 2X} \frac{r(n)}{n - X_0} \ll \frac{N^{\frac{3}{4}}}{X_0^{\frac{1}{4}}} g(N) f'(N)\left(\frac{1}{\sqrt{X_0 f'(N)}} + \log N\right) \ll$$
$$\ll \frac{g(N)}{f'(N)} + g(N)\sqrt{Nf'(N)};$$

$$\sum_{n > 2X} \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} I(n) \ll \sum_{n > 2X} \frac{r(n)}{n^{\frac{1}{4}}} N^{\frac{1}{4}} g(N) f'(N) \sqrt{\frac{N}{n}} \ll$$
$$\ll N^{\frac{3}{4}} g(N) f'(N) \sum_{n > X} \frac{r(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \ll g(N)\sqrt{Nf'(N)}.$$

So,

$$\sum_{n > X} \frac{r(n)}{\sqrt{n}} \int\limits_{N}^{N'} \sqrt{x} g(x) f'(x) e(f(x)) \Im_1(2\pi\sqrt{nx}) dx \ll$$
$$\ll \frac{g(N)}{f'(N)} + g(N)\sqrt{Nf'(N)}. \tag{17}$$

From (16), (17) Theorem 1 follows for $f'(N) \ll 1$ with $\omega_0(f) = e^{\frac{\pi i}{4}}\omega(f)$. In the case $f'(N) \gg 1$ we consider the expression

$$\overline{\omega}_{f_0} = \sum r(n) g(\varphi(n)) \sqrt{|\varphi'(n)|} e(-\widetilde{f}(\varphi(n))),$$

where a bar denotes the complex conjugate value, and

$$\widetilde{f}(n) = -f(\varphi(n)) + \varphi(n)f'(\varphi(n)).$$

Its clear that the following equations

$$\widetilde{f}'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))} \ll 1,$$

$$\widetilde{f}'(x) + 2x\widetilde{f}''(x) = 4[f'(\varphi(x)) + 2\varphi(x)f''(\varphi(x))]^{-1}, \ 4x\widetilde{f}'^2(x) = \varphi(x).$$

are true.

Hence, for $n \sim X_0$

$$g(\varphi(n))\sqrt{\varphi'(n)} \ll g(N)(f'(N))^{-1}.$$

So, we have

$$\omega_0(f)\sum_{n\sim X_0} r(n)g(\varphi(n))\sqrt{|\varphi'(n)|}e(\widetilde{f}(\varphi(n))) =$$

$$= \sum_{n\sim N} r(n)g(n)e(f(n)) + O\left(N^{\varepsilon}g(N)\right) + O\left(N^{\varepsilon}g(N)\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{f'(N)}}\right).$$

At last, in the case $f'(N) < 0$ suffice it consider a complex conjugate sum.

Thus the proof of Theorem 3 is concluded.

Remark. *The proof of Theorem 3 in the idea sense is close to the method of estimation the exponential sums by using the van der Corput transform (and also to the method of exponential pairs).*

As the corollary of Theorem 3 there is the statement of Theorem 1 mentioned above.

Main Results

1. Proof of Theorem 1. In the interval $[1, x]$ the function $f(x) = \frac{ax}{q}$ satisfy all conditions of Theorem 3, moreover, the function $\varphi(y) = \frac{q^2}{a^2}y$ be the inversion for $y = xf'^2(x)$. All conditions of Theorem 3 for the functions $g(n) \equiv 1$ and $f(n) = \frac{a}{q}x$ are followed out. Then we have

$$\begin{aligned} A\left(x, \frac{a}{q}\right) &= \frac{q}{a}A\left(\frac{xa^2}{q^2}, -\frac{q}{a}\right) + \\ &+ O\left(x^{\varepsilon}\frac{q}{a}\right) + O\left(x^{\varepsilon}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\min\left(\sqrt{\frac{q}{a}}, \sqrt{\frac{a}{q}}\right)\right) = \\ &= \frac{q}{a}A\left(\frac{xa^2}{q^2}, -\frac{q}{a}\right) + \\ &+ O\left(x^{\varepsilon}\frac{q}{a}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\frac{q}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Let us take a_1, $1 \leqslant a_1 < a$, $a_1 \equiv -q(mod\ a)$. Then

$$A\left(\frac{xa^2}{q^2}, -\frac{q}{a}\right) = A\left(\frac{xa^2}{q^2}, \frac{a_1}{a}\right),\ 1 \leqslant a_1 < a.$$

Use again the Theorem 3 to the right-hand sum. Then we obtain

$$A\left(x\frac{a^2}{q^2}, \frac{b}{a}\right) = \frac{a}{b}A\left(\frac{xa^2}{q^2}, \frac{b^2}{a^2}\right) + O\left(\left(x\frac{a^2}{q^2}\right)^{\varepsilon}\cdot\frac{a}{b}\right) + O\left(\left(\frac{xa^2}{q^2}\right)^{\varepsilon}\cdot\left(\frac{xa^2}{q^2}\cdot\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \frac{a}{b}A\left(\frac{xb^2}{q^2}, -\frac{a}{b}\right) + O\left(x^{\varepsilon}\frac{q}{a_1}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Hence, we have the following chain

$$A\left(x, \frac{a}{q}\right) \to \frac{q}{a}A\left(\frac{xa^2}{q^2}, \frac{a_1}{a}\right) \to \frac{q}{a_1}A\left(\frac{xa_1^2}{q^2}, \frac{a_2}{a_1}\right) \to \cdots$$
$$\cdots \to \frac{q}{a_{M-1}}A\left(\frac{xa_{M-1}^2}{q^2}, \frac{a_M}{a_{M-1}}\right) \to$$
$$\to qA\left(\frac{x^2}{q^2}, 1\right),\ \text{(i.e. } a_M = 1).$$

The number M is bounded above by the number of nearest to q the number of Fibonacci sequence f_n, i.e. $|f_M - q| < |f_n - q|$, where $n \neq M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

It is easy to see that $M \ll \log q \ll x^{\varepsilon}$.

Thus from (18) we infer

$$A\left(x, \frac{a}{q}\right) = qA\left(\frac{x}{q^2}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) = \frac{\pi x}{q} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

$\square$

2. Proof of Theorem 2. Denote $N(\alpha_0) = a$, $N(\beta) = q$. Then we have

$$\sum_{N(\alpha)\leqslant x} \tau(\alpha)e^{2\pi i N\left(\frac{\alpha\alpha_0}{\beta}\right)} = \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}[i]\\ N(\alpha_1\alpha_2)\leqslant x}} e^{2\pi i\frac{aN(\alpha_1)N(\alpha_2)}{q}} = \sum_{mn\leqslant x} r(m)r(n)e^{2\pi i\frac{amn}{q}} =$$

$$= 2\sum_{d|q}\sum_{\substack{(m,q)=d\\ m\leqslant x^{\frac{1}{2}}}} r(m)\sum_{n\leqslant\frac{x}{m}} r(n)e^{2\pi i\frac{amn}{q}} - \sum_{d|q}\sum_{\substack{m\leqslant x^{\frac{1}{2}}\\ (m,q)=1}}\sum_{n\leqslant x^{\frac{1}{2}}} r(m)r(n)e^{2\pi i\frac{amn}{q}} =$$

$$= 2\sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2,$$

say. For $(m, q) = d$ let us suppose $m = m_1 d$, $q = q_1 d$, $(m_1, q_1) = 1$. Then, from the

Theorem 1, we get

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_1 = \sum_{d|q} \sum_{m_1 \leqslant \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d}} r(m_1 d) \sum_{n \leqslant \frac{x}{m_1 d}} r(n) e^{2\pi i \frac{a m_1 n}{q_1}} = \\
&= \sum_{d|q} \left[\frac{\pi x}{d q_1} \sum_{m_1 \leqslant \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d}} \frac{r(m_1 d)}{m_1} + O\left(\left(\sum_{\substack{m_1 \leqslant \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d} \\ (m_1, q_1) = 1}} \left(\frac{x}{m_1 d} \right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + q_1 \left(\frac{x}{m_1 d} \right)^{\varepsilon} \right) \right) \right] = \\
&= \sum_{d|q} \left\{ \left[\frac{\pi x}{q} \operatorname*{res}_{s=1} \left(\zeta(s) L(s, \chi_4) \right) \sum_{d_1 | d} \chi_4(d_1) \prod_{p | \frac{d}{d_1}} \left(1 - \frac{\chi_4(d_1)}{p^s} \right) \frac{x^{s-1}}{s-1} \right] + \right. \qquad (19) \\
&\left. + O\left(\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{d} \right)^{\frac{1}{3}+\varepsilon} \right) + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon} d^{-1-\varepsilon} \right) + O\left(q x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right) \right\} = \\
&= A_1(q) \frac{x \log x}{q} + A_2(q) \frac{x}{q} + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon} q \right) + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon} \right),
\end{aligned}
$$

where $A_1(q)$, $A_2(q)$ be the computable constants, $q^{-\varepsilon} \ll A_i(q) \ll q^{\varepsilon}$, $i = 1, 2$.
As before, we obtain

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &= \sum_{d|q} \sum_{\substack{m_1 \leqslant \frac{x^{\frac{1}{2}}}{d} \\ (m_1, q_1) = 1}} r(m) \left(\frac{\pi x^{\frac{1}{2}}}{q_1} + O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon} \right) + O\left(q_1 x^{\varepsilon} \right) \right) = \\
&= B(q) \frac{x}{q} + O\left(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon} \right) + O\left(q_1 x^{\varepsilon} \right),
\end{aligned} \qquad (20)
$$

where $q^{-\varepsilon} \ll B(q) \ll q^{\varepsilon}$. Collecting out estimates(19)-(20) together, we obtain the desired result of theorem. □

Conclusion. The scheme of the proof of Theorem 3 may be applied for investigation the weighted exponential sums over the ring of Gaussian integers of the following view

$$
\sum_{N(\alpha) \leqslant x} \tau(\alpha) g(N(\alpha)) e(N(\alpha)).
$$

But now instead of representation the sum $\sum r(n)$ in view of the series on Bessel functions it is necessary to study the sums of view

$$
\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[i]} \tau(\alpha) \mathfrak{Y}(\alpha) g(N(\alpha)) e(N(\alpha)),
$$

where

$$
\mathfrak{Y}(\alpha) = y^{\frac{3}{8}} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) y^{-\frac{3}{4}} e\left(-\frac{s}{4} \right) ds, \quad y = \pi^4 x N(\alpha).
$$

Function $\mathfrak{Y}(\alpha)$ may be considered as an analogue of Bessel function $\mathfrak{I}_1(\alpha)$.

References

1. Gunyavy, O. A. (2001), Estimate of the integrals of type, *Vistnyk Odeskogo derzh. univ., phys.-math. sci.*, vol. 6(3), pp. 55–61.
2. Huxley, M. (1994), On stationary phase integrals, *Glasgow. Math.*, vol. 36(3), pp. 355–362.
3. Huxley, M. (1996) , Area, lattice points, and exponential sums, *London Math. Soc. Manographs, New Series*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, vol 13. – 505 p.
4. Jutila, M. (1991) Mean value estimates for exponential sums II, *Arch. Math.*, vol. 55, pp. 267–274.
5. Jutila, M. (1985), On exponential sums involving the divisor function, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 355, pp. 173–190.
6. Krätzel, A. (2000), Analytische Funktionen in der Zahlentheorie, *Teubner-Texte zur Mathematik*, Stuttgart, 2000, vol. 139, 292 p.
7. Vandehey, J. (2014), Error term improvements for van der corput transforms, *Quart. J. Math.*, vol. 65, pp. 1461-–1502.

Варбанецъ С.
Тригонометричні суми функції дільників над $\mathbb{Z}[i]$

Резюме

Ми застосовуємо перетворення Ван дер Корпута для дослідження сум виду $\sum r(n)g(n)\times$ $\times e(f(n))$, де $r(n)$ є число зображень n як суми двох квадратів цілих чисел. Такі суми вивчались М. Ютілою, О. Гунявим, М. Хакслі та ін. Спираючись на властивості диференціювання функцій $g(n)$ та $f(n)$, нами були отримані різні типи залишкових членів на границях розглянутих сум. В спеціальному випадку О. Гунявий покращив результат М. Ютіли в проблемі оцінювання тригонометричної суми від функції дільників $\tau(n)$. Ми отримуємо асимптотичну формулу для суми $\sum \tau(\alpha)e\left(\frac{a}{q}N(\alpha)\right)$ над кільцем цілих гаусових чисел, яка є аналогом асимптотичних формул, отриманих М. Ютілою та О. Гунявим.
Ключові слова: тригонометричні суми.

Варбанец С.
Тригонометрические суммы функции делителей над $\mathbb{Z}[i]$

Резюме

Мы применяем преобразование Ван дер Корпута для исследования сумм $\sum r(n)g(n)\times$ $\times e(f(n))$, где $r(n)$ есть число представлений n в виде суммы двух квадратов целых чисел. Такие суммы изучались М. Ютилой, О. Гунявым, М. Хаксли и др. Опираясь на свойства дифференцирования функций $g(n)$ и $f(n)$, нами были получены различные типы остаточных членов на границах рассматриваемых сумм. В специальном случае О. Гунявый улучшил результат М. Ютилы в проблеме оценки тригонометрической суммы от функции делителей $\tau(n)$. Мы получаем асимптотическую формулу для $\sum \tau(\alpha)e\left(\frac{a}{q}N(\alpha)\right)$ над кольцом целых гауссовых чисел, являющуюся аналогом асимптотических формул, полученных М. Ютилой и О. Гунявым.
Ключевые слова: тригонометрические суммы.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Дослідження в математиці і механіці» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень, огляди з актуальних проблем за тематикою видання, а також повідомлення про ювілеї, знаменні дати та події.

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Електронну версію рукопису слід надсилати на e-mail журналу

rmm-journal@onu.edu.ua

або завантажувати через сайт журналу

www.rmm-journal.onu.edu.ua

Вона повинна складається з

1) вихідного файлу TEX-файлу,
2) PDF-файлу,
3) всіх допоміжних файлів (графіки, рисунки, ілюстрації тощо),
4) документу з анкетними даними авторів (прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, e-mail, адреса для листування та телефон).

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LATEX відповідно до вимог та з використанням шаблону, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті. Також вимоги можна отримати в редакційній колегії журналу.

Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 25 сторінок.

Структура статті:
— УДК;
— список авторів;
— місце роботи авторів;
— назва статті;
— резюме мовою оригіналу обсягом не менш 100 слів;
— Mathematical Subject Classification (2010);
— список ключових слів мовою оригіналу;
— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми в

загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується подана стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером у квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформлюється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008);

— анотації двома іншими мовами, які повинні містити назву, список авторів, резюме обсягом не менш 100 слів та список ключових слів;

— додатково, якщо стаття написана українською або російською мовами, після анотацій подається список літератури у транслітерації, оформлений у відповідності до міжнародного стандарту *Harvard* (зразок та правила оформлення можна знайти в шаблоні статті на сайті).

Усі надіслані статті проходять анонімне рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу «Дослідження в математиці і механіці».

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, зокрема і у співавторстві.

Редакційна колегія журналу
«Дослідження в математиці і механіці»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2
м. Одеса, 65082

Міжнародна літня математична школа пам'яті В. О. Плотнікова

11–16 червня 2018 р.

Шановні колеги!

Запрошуємо вас прийняти участь у Міжнародній літній математичній школі пам'яті В. О. Плотнікова, яка проводитиметься в Одеському національному університеті імені І. І. Мечникова в червні 2018 року.

Конференція буде присвячена 80-річчю від дня народження Віктора Олександровича Плотнікова, відомого в Україні та за її межами математика, засновника наукової школи з теорії асимптотичних методів дослідження диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною.

У програму школи можуть бути включено доповіді за наступними напрямками:

- асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування;
- математичні методи оптимального керування;
- багатозначні рівняння і включення;
- якісна теорія в теорії диференціальних рівнянь і оптимального керування;
- математичне моделювання;
- теорія ігор

Доповіді, рекомендовані програмним комітетом, будуть опубліковані в науковому журналі «Дослідження в математиці і механіці».

Інформація щодо школи розміщується в мережі Інтернет за адресою:

www.plotnikovschool.onu.edu.ua

Международная летняя математическая школа памяти В. А. Плотникова

11–16 июня 2018 р.

Уважаемые коллеги!

Приглашаем вас принять участие в Международной летней математической школе памяти В. А. Плотникова, которая будет проводиться в Одесском национальном университете имени И. И. Мечникова в июне 2018 года.

Конференция будет посвящена 80-летию со дня рождения Виктора Александровича Плотникова, известного в Украине и за ее пределами математика, основателя научной школы в теории асимптотических методов исследования дифференциальных уравнений с многозначной правой частью.

В программу школы могут быть включены доклады по следующим направлениям:

- асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления;
- математические методы оптимального управления;
- многозначные уравнения и включения;
- качественная теория в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления;
- математическое моделирование;
- теория игр.

Доклады, рекомендованные программным комитетом, будут опубликованы в научном журнале «Дослідження в математиці і механіці».

Информация о школе размещается в сети Интернет по адресу:

www.plotnikovschool.onu.edu.ua

International summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov

June 11–16, 2018

Dear colleagues!

We invite you to take part in the summer mathematical school in memoriam V. A. Plotnikov, which will be held in June 2018 at the Odesa I. I. Mechnikov National University.

Conference will be dedicated to the 80th aniversary of V. A. Plotnikov's birth. Viktor Aleksandrovich Plotnikov was famous Ukrainian mathematician, founder of the scientific school in asymptotic methods in the study of differential equations with multivalued right-hand side.

To the programm of conference will be included reports devoted to the following subjects:

- asymptotic methods in the theory of differential equations and optimal control;
- mathematical methods of optimal control;
- multivalued equations and inclusions;
- qualitative theory of differential equations and optimal control;
- mathematical modelling;
- game theory.

Reports recommended by the program committee will be published in scientific journal "Researches in mathematics and mechanics".

Information about the conference is published on the website:

www.plotnikovschool.onu.edu.ua

Українською, російською та англійською мовами

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації серія КВ № 21400—11200ПР від 17 червня 2015 р.

Затверджено до друку вченою радою
Одеського національного університету імені І. І. Мечникова
Протокол №3 від 29 листопада 2016 р.

Відповідальний за випуск *О. П. Огуленко*
Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*
Технічний редактор *М. М. Бушин*

Тираж прим. Зам. № .

Адреса редколегії:
65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
astro_print@ukr.net
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.

Дослідження в математиці і механіці. – 2016. – Т. 21, вип. 2(28). – С. 1–106.