Proceedings

of the

INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

Volume 12, No. 2, 2019

ISSN print: 2072-9812
ISSN online: 2409-8906
ISO 26324:2012

http://geom-center.onaft.edu.ua

PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL GEOMETRY CENTER

The journal is focusing on coverage of the most important problems in mathematics and its applications, particularly in differential geometry, topology, mathematical physics and dynamical systems. It publishes peer reviewed original papers and surveys especially on the following topics: algebraic and analytical methods in geometry; differential geometry as a whole; geometry and topology of differentiable manifolds; general and algebraic topology; geometric and topological methods in the natural sciences; application of geometric methods to modern problems of continuum mechanics, control theory, and mathematical physics; history and methods of teaching mathematics.

Manuscripts are accepted for review with the understanding that the same work is not already published, is not under consideration for publication elsewhere, and that its submission for publication has been approved by all of the coauthors.

Papers are published in Ukrainian, English and Russian.

Journal conducts active cooperation with the following world abstracting and indexing databases: Vernadsky National Library of Ukraine, MathSciNet, Zentralblatt MATH, SHERPA/Romeo, DORA, ResearchBib CrossRef, eLibrary, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), EBSCOhost, Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, WorldCat, Scilit, Dimensions, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

Publisher: ONAFT, Odesa, Kanatna str., Ukraine, 65039.

Web page: http://geom-center.onaft.edu.ua

Emails: proceedings.igc@gmail.com, geom-odessa@ukr.net

Technical support: ONAFT Coordinating Center of Scientific Journals' Publishing.

ПРАЦІ МІЖНАРОДНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ЦЕНТРУ

Метою видання журналу «Праці міжнародного геометричного центру» є консолідація та підтримка досліджень з геометрії, топології та динамічних систем. Тематична спрямованість журналу пов'язана з висвітленням найбільш важливих та актуальних проблем у галузі математики та її застосувань, зокрема у диференціальній геометрії, топології, математичній фізиці та динамічних системах.

Публікація статей здійснюється за такими напрямками: алгебраїчні методи в геометрії; диференціальна геометрія у цілому; геометрія та топологія диференційовних многовидів; загальна й алгебраїчна топологія; геометричні й топологічні методи у природничих науках; застосування геометричних методів до сучасних задач механіки суцільних середовищ, теорії управління та математичної фізики; історія й методика викладання математики.

До розгляду приймаються лише статті, які є оригінальними роботами авторів, не були опубліковані та не перебувають на розгляді до публікації в інших виданнях.

Роботи публікуються українською, англійською та російською мовами.

Журнал індексується такими світовими базами індексування та реферування: Національна бібліотека України імені Вернадського, MathSciNet, Zentrablatt MATH, SHERPA/Romeo, DORA, CrossRef, eLibrary, Index Copernicus International, Google Scholar, Directory of Open Access scholarly Resources (ROAD), EBSCOhost, Directory Indexing of International Research Journals - Citefactor, WorldCat, Scilit, Dimensions, Bielefeld Academic Search Engine (BASE), Ulrich's Periodicals Directory, Directory of Open Access Journals (DOAJ).

Видавник: Одеська національна академія харчових технологій, вул. Канатна, 112, м. Одеса, Україна, 65039.

Веб-сторінка журналу: http://geom-center.onaft.edu.ua

Електронні адреси: proceedings.igc@gmail.com, geom-odessa@ukr.net

Технічна підтримка: Координаційний центр видання наукової періодики ОНАХТ.

Рекомендовано до друку та розташування в мережі Інтернет Вченою Радою ОНАХТ 02.07.2019 р. протокол №12.

Зареєстровано Міністерством юстиції України. Свідоцтво: Серія КВ №13819-2793Р від 19.11.2007.

Видається з 2008 року, виходить 4 рази на рік.

Згідно наказу Міністерства освіти і науки України від 07.05.2019 №612 «Про затвердження рішень атестаційної колегії міністерства щодо діяльності спеціалізованих вчених рад від 23 квітня 2019 року» видання «Праці міжнародного геометричного центру» включено до категорії Б за такими спеціальностями 111, 113 та галузями знань: фізико-математичні науки.

Відповідальність за достовірність інформації несе автор публікації.

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 12, no. 2 (2019) pp. 1–10

On the generalization of the Darboux theorem

Kaveh Eftekharinasab

Abstract. The Darboux theorem asserts that every symplectic manifold (M^{2n}, ω) is locally symplectomorphic to (R^{2n}, ω_0), where ω_0 is the standard symplectic form on R^{2n}. This theorem was proved by Moser in 1965, the idea of proof, known as the Moser's trick, works in many situations. The Moser tricks is to construct an appropriate isotopy $\mathbb{F}_t$ generated by a time-dependent vector field X_t on M such that $\mathbb{F}_1^*\omega = \omega_0$. Nevertheless, it was showed by Marsden that Darboux theorem is not valid for weak symplectic Banach manifolds. However, in 1999 Bambusi showed that if we associate to each point of a Banach manifold a suitable Banach space (classifying space) via a given symplectic form then the Moser trick can be applied to obtain the theorem if the classifying space does not depend on the point of the manifold and a suitable smoothness condition holds.

If we want to try to generalize the Darboux theorem to more general context of Frechet manifolds we face an obstacle: in general vector fields do not have local flows. Recently, Fréchet geometry has been developed in terms of projective limit of Banach manifolds. In this framework under an appropriate Lipchitz condition local flows exist and with some restrictive conditions the Darboux theorem was proved by P. Mishra. In the present paper we consider the category of so-called bounded Fréchet manifolds and prove that in this category vector fields have local flows and following the idea of Bambusi we associate to each point of a manifold a Fréchet space independent of the choice of the point and with the assumption of bounded smoothness on vector fields we prove the Darboux theorem.

Анотація. Теорема Дарбу стверджує, що кожен симплектичний многовид (M^{2n}, ω) є локально симплектоморфним до (R^{2n}, ω_0), де ω_0 – стандартна симплектична форма на R^{2n}. Ця теорема була доведена Мозером у 1965 р. Ідея доведення, відома як трюк Мозера, працює у багатьох ситуаціях і полягає у побудові ізотопії $\mathbb{F}_t$ многовиду M, породженої залежним від часу векторним полем X_t на M, так, щоб $\mathbb{F}_1^*\omega = \omega_0$. Тим не

I thank the reviewer for the constructive comments.
2010 Mathematics Subject Classification: 53D35,58B20
Keywords: Weak symplectic structures, Darboux charts, Fréchet manifolds
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1436

менш, Марсден показав, що теорема Дарбу не вірна для слабких симплектичних многовидів Банаха. Однак у 1999 р. Бамбусі показав, що якщо з кожною точкою банахового многовиду пов'язати простір Банаха (класифікуючий простір) через задану симплектичну форму, то трюк Мозера може бути застосований для довдеення теореми Дарбу, за умови, що цей простір не залежить від точки і відповідної умови гладкості.

Однією з перешкод до узагальнення теореми Дарбу на випадок многовидів Фреше є те, що, взагалі кажучи, векторні поля не мають локальних потоків. Останнім часом геометрія Фреше була розроблена з точки зору проективних границь многовидів Банаха. У цьому контексті за відповідної умови Ліпшица векторні поля породжують локальні потоки, і за деяких додаткових сильних умов теорема Дарбу була отримана П. Мішра. В представленій роботі ми розглянемо категорію так званих обмежених многовидів Фреше і доводимо, що в цій категорії векторні поля мають локальні потоки. Слідуючи ідеї Бамбусі, ми пов'язуємо з кожною точкою многовиду Фреше простір, який не залежить від вибору точки і припускаючи обмежену гладкість на векторних полях доводимо теорему Дарбу.

1. Introduction

The Darboux theorem has been extended to weakly symplectic Banach manifolds by using Moser's method, see [1]. The essence of this method is to obtain an appropriate isotopy generated by a time dependent vector field that provides the chart transforming of symplectic forms to constant ones. In order to apply this method to a more general context of Fréchet manifolds we need to establish the existence of the flow of a vector filed which in general does not exist. One successful approach to the differential geometry in Fréchet context is to use projective limits of Banach manifolds, [2]. In this framework, a version of the Darboux theorem is proved in [6].

Another approach to Fréchet geometry is to apply a stronger notion of differentiability, [3]. This differentiability leads to a new category of generalized manifolds, the so called *bounded* (or MC^k) Fréchet manifolds. In this paper we prove that in that context the flow of a vector field exists (Theorem 2.4) and we will apply the Moser's method to obtain the Darboux theorem (Theorem 3.5).

The obtained theorem might be useful to study the topology of the space of Riemannian metrics $\mathcal{M}$ as it has the structure of a nuclear bounded Fréchet manifold. A theorem from [5, §48.9] asserts that if (M, σ) is a smooth weakly symplectic convenient manifold which admits smooth partitions of unity in $C^\infty_\sigma(M, \mathbb{R})$, and which admits 'Darboux charts', then the symplectic cohomology equals to the De Rham cohomology:

$$H^k_\sigma(M) = H^k_{DR}(M).$$

The manifold $\mathcal{M}$ admits smooth partition of unity in $C^\infty_\sigma(M,\mathbb{R})$ (this follows from [5, Theorem 16.10] and [5, Definition 16.1]) so it is interesting to ask if it has a Darboux chart. This, in turn, rises the question: how to construct weak symplectic forms on $\mathcal{M}$. It is known, [4], that expect Hilbert manifolds an infinite dimensional manifold may not admit a Lagrangian splitting so in general the Weinstein's construction, [12], is not applicable. Moreover, the Marsden's idea to construct a symplectic form on a manifold by using the canonical form on its cotangent bundle also is not applicable as there is no natural smooth vector bundle structure on the cotangent bundle [9, Remark I.3.9]. It is not clear yet how to construct symplectic forms on $\mathcal{M}$ but it seems that it might arise from a weak Riemannian metric and complex structure, however, that would require some assumptions and ingredients different from ones in Theorem 3.5.

2. Bounded differentiability

In this section we prove the existence of the local flow of a MC^k-vector field. We refer to [3] for more details on bounded Fréchet geometry.

Denote by (F,ρ) a Fréchet space whose topology is defined by a complete translational-invariant metric ρ. We consider only metrics with absolutely convex balls. Note that every Fréchet space admits such a metric, cf [3]. One reason to choose this particular metric is that a metric with this property can give us a collection of seminorms that defines the same topology. More precisely:

Theorem 2.1 ([7], Theorem 3.4)**.** *Assume that (F,ρ) is a Fréchet space and ρ is a metric with absolutely convex balls. Let*

$$B^\rho_{\frac{1}{i}}(0) := \{y \in F \mid \rho(y,0) < \tfrac{1}{i}\},$$

and suppose U_i's, $i \in \mathbb{N}$, are convex subsets of $B^\rho_{\frac{1}{i}}(0)$. Define the Minkowski functionals

$$\|v\|^i := \inf\{\varepsilon > 0 \mid \varepsilon \in \mathbb{R},\ \tfrac{1}{\varepsilon}\cdot v \in U_i\}.$$

These Minkowski functionals are continuous seminorms on F. A collection $\{\|v\|^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ of these seminorms generates the topology of F.

In the sequel we will assume that a Fréchet space F is graded with the collection of seminorms $\|v\|^n_F = \sum\limits_{k=1}^{n} \|v\|^k$ that defines its topology.

Let (E,g) be another Fréchet space and $\mathcal{L}_{g,\rho}(E,F)$ be the set of all linear maps $L : E \to F$ such that

$$\mathbf{Lip}(L)_{g,\rho} := \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\rho(L(x),0)}{g(x,0)} < \infty.$$

The transversal-invariant metric

$$\begin{aligned} D_{g,\rho} : \mathcal{L}_{g,\rho}(E,F) \times \mathcal{L}_{g,\rho}(E,F) &\longrightarrow [0,\infty), \\ (L,H) &\mapsto \mathbf{Lip}(L-H)_{g,\rho}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

on $\mathcal{L}_{\rho,g}(E,F)$ turns it into an Abelian topological group. Let U an open subset of E, and $P : U \to F$ a continuous map. If P is Keller-differentiable, $\mathrm{d}P(p) \in \mathcal{L}_{\rho,g}(E,F)$ for all $p \in U$, and the induced map

$$\mathrm{d}P(p) : U \to \mathcal{L}_{\rho,g}(E,F)$$

is continuous, then P is called bounded differentiable.

We say P is MC^0 and write $P^0 = P$ if it is continuous. We also say P is an MC^1 and write $P^{(1)} = P'$ if it is bounded differentiable. Recursively one can define maps of class MC^k for each $k > 1$, see [3]. If $\varphi(t)$ is a continuous path in a Fréchet space we denote its derivative by $\frac{d}{dt}\varphi(t)$.

Within this framework we define MC^k (bounded) Fréchet manifolds, MC^k-maps of manifolds and tangent bundles and their MC^k-vector fields. A MC^k-vector field X on a MC^k-Fréchet manifold M is a MC^k-section of the tangent bundle $\pi_{TM} : TM \to M$, i.e. a MC^k map $X : M \to TM$ with $\pi_{TM} \circ X = \mathrm{id}_M$. We write $\mathcal{V}(M)$ for the space of all vector fields on M. If $f \in MC^\infty(M,E)$ is a smooth function on M with values in a Fréchet space E and $X \in \mathcal{V}(M)$, then we obtain a smooth function on M via

$$X.f := \mathrm{d}f \circ X : M \to E.$$

For $X, Y \in \mathcal{V}(M)$, there exists a unique a vector field $[X,Y] \in \mathcal{V}(M)$ determined by the property that on each open subset $U \subset M$ we have

$$[X,Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$$

for all $f \in MC^\infty(U,\mathbb{R})$, see [8, Lemma II.3.1].

A vector field on an infinite dimensional Fréchet manifold may have no, one or multiple integral curves. However, a MC^k-vector field always has a unique integral curve.

Proposition 2.2. [3, Proposition 5.1] *Let $U \subseteq F$ be an open subset and $X : U \to F$ be a MC^k-vector field, $k \geqslant 1$. Then for each $p_0 \in U$ there exists an integral curve $\ell : I \to F$ at p_0. Furthermore, any two such curves coincide on the intersection of their domains.*

Corollary 2.3. [3, Corollary 5.1] *Let $U \subseteq F$ be an open subset and let $X : U \to F$ be a MC^k-vector field, $k \geqslant 1$. Let also $\mathbb{F}_t(p_0)$ be the solution of $\ell'(t) = X(\ell(t))$, $\ell(t_0) = p_0$. Then there is an open neighborhood U_0 of p_0 and a positive real number α such that for every $q \in U_0$ there exists a* *unique integral curve $\ell(t) = \mathbb{F}_t(q)$ satisfying $\ell(0) = q$ and $\ell'(t) = X(\ell(t))$ for all $t \in (-\alpha, \alpha)$.*

Theorem 2.4. *Let X be a MC^k-vector field on $U \subset F$, $k \geqslant 1$. Then one can find a real number $\alpha > 0$ such that for each $x \in U$ there exists a unique integral curve $\ell_x(t)$ satisfying $\ell_x(0) = x$ for all $t \in I = (-\alpha, \alpha)$. Furthermore, the mapping $\mathbb{F} : I \times U \to F$ given by $\mathbb{F}_t(x) = \mathbb{F}(t, x) = \ell_x(t)$ is of class MC^k.*

Proof. The first part of the proof follows from Corollary 2.3. We now prove the second part. Let $x, y \in U$ be arbitrary points. Define the functions $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, by

$$\varphi_n(t) = \|\mathbb{F}(t, x) - \mathbb{F}(t, y)\|_F^n.$$

Since X is MC^k, so it is globally Lipschitz. Let $\beta > 0$ be its Lipschitz constant. Then we have $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \Big\| \int_0^t \big(X(\mathbb{F}(s, x)) - X(\mathbb{F}(s, y)\big)ds + x - y \Big\|_F^n \leqslant \\ &\leqslant \|x - y\|_F^n + \beta \int_0^t \varphi(s)ds. \end{aligned}$$

Hence, by Gronwall's inequality, we obtain that

$$\|\mathbb{F}(t, x) - \mathbb{F}(t, y)\|_F^n \leqslant e^{\beta|t|}\|x - y\|_F^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Thereby $\mathbb{F}$ is Lipschitz continuous in the second variable and is jointly continuous.

Now, define $\mathbf{F}(t, x) \in \mathcal{L}_\rho(F)$ to be the solution of the equations

$$\frac{d\mathbf{F}(t, x)}{dt} = \mathrm{d}X(\mathbb{F}(t, x)) \circ \mathbf{F}(t, x), \qquad \mathbf{F}(0, x) = \mathrm{id},$$

where $\mathrm{d}X(\mathbb{F}(t, x)) : F \to F$ is derivative of X with respect to x at $\mathbb{F}(t, x)$. By Proposition 2.2 $\mathbf{F}(t, x)$ exits and is well defined. Since the vector field $\mathbf{F} \mapsto \mathrm{d}X(\mathbb{F}(t, x)) \circ \mathbf{F}$ on $\mathcal{L}_\rho(F)$ is Lipschitz in $\mathbf{F}$, uniformly in (t, x) in a neighborhood of every (t_0, x_0), by the above argument it follows that $\mathbf{F}(t, x)$ is continuous in (t, x). We will show that $\mathrm{d}\mathbb{F}(t, x) = \mathbf{F}(t, x)$.

Indeed, fix $t \in I$, for $h \in U$ define $\psi(s, h) = \mathbb{F}(s, x + h) - \mathbb{F}(s, x)$, then

$$\begin{aligned} \psi(t, h) - \mathbf{F}(t, x)(h) &= \int_0^t \big(X(\mathbb{F}(s, x + h)) - X(\mathbb{F}(s, x))\big)ds \\ &\quad - \int_0^t \big[\mathrm{d}X(\mathbb{F}(s, x)) \circ \mathbf{F}(s, x)\big](h)ds \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \mathrm{d}X(\mathbb{F}(s,x)(\big[(\psi(s,h) - \mathbf{F}(s,x)(h))\big])ds$$

$$+ \int_0^t \big(X(\mathbb{F}(s,x+h)) - X(\mathbb{F}(s,x))$$

$$- \mathrm{d}X(\mathbb{F}(s,x))(\mathbb{F}(s,x+h) - \mathbb{F}(s,x)\big)ds.$$

Since X is MC^k, for given $\varepsilon > 0$ there is a $\delta > 0$ such that $\|h\|_F^n < \delta$, $(n \in \mathbb{N})$, yields that the second term is less than

$$\int_0^t \varepsilon \|\mathbb{F}(s,x+h) - \mathbb{F}(s,x)\|_F^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

but by (2.2) this integral is less than $B\varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \|h\|_F^n$ for some positive constant B. Thus, by Gronwall's inequality we obtain

$$\|\psi(t,h) - \mathbb{F}(t,h)(h)\|_F^n \leqslant \varepsilon C \|h\|_F^n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

where C is a positive constant. Whence $\mathrm{d}\mathbb{F}(t,x)(h) = \mathbf{F}(t,x)(h)$. Thus, both partial derivatives of $\mathbb{F}(t,x)$ exist and are continuous so $\mathbb{F}(t,x)$ is C^1. Moreover, $\mathbf{F}$ is globally Lipschitz and $x \mapsto \mathbf{F}(\cdot,x)$ is continuous therefore $\mathbb{F}(t,x)$ is MC^1. Using induction on k we obtain that $\mathbb{F}(t,x)$ is of class MC^k. By definition of $\mathbb{F}(t,x)$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{F}(t,x) = X(\mathbb{F}(t,x)),$$

so

$$\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}\mathbb{F}(t,x) = \mathrm{d}X(\mathbb{F}(t,x))\big(X(\mathbb{F}(t,x))\big)$$

and

$$\frac{d}{dt}\mathrm{d}\mathbb{F}(t,x) = \mathrm{d}X(\mathbb{F}(t,x))\big(\mathrm{d}\mathbb{F}(t,x)\big).$$

The right-hand sides are MC^{k-1}, so are the solutions by induction. Thus $\mathbb{F}(t,x)$ is MC^k. □

3. Darboux charts

In general for a Fréchet manifold differential forms cannot be defined as the sections of its cotangent bundle since we can not always define a manifold structure on the cotangent bundle, see [9, Remark I.3.9]. To define differential forms we follow the approach of Neeb [9].

Definition 3.1. Let M be a bounded Fréchet manifold. A p-form ω on M is a function ω which associates to each $x \in M$ a p-linear alternating map $\omega_x : T_x^p(M) \to \mathbb{R}$ such that in local coordinates the map

$$(x, v_1, \dots, v_p) \mapsto \omega_x(v_1, \dots, v_p)$$

is smooth. We write $\Omega^p(M,\mathbb{R})$ for the space of p-forms on M and identify $\Omega^0(M,\mathbb{R})$ with the space $C^\infty(M,\mathbb{R})$ of smooth functions.

The exterior differential $d_{dR} : \Omega^p(M,\mathbb{R}) \to \Omega^{p+1}(M,\mathbb{R})$ is determined uniquely by the property that for each open subset $U \subset M$ we have for $X_0,\dots,X_p \in \mathcal{V}(U)$ in the space $C^\infty(U,\mathbb{R})$ the identity

$$\begin{aligned}(d_{dR}\omega)(X_0,\dots,X_p) &:= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i.\omega(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_p)\\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_p).\end{aligned}$$

Let $\omega \in \Omega^p(M,\mathbb{R})$, $Y \in \mathcal{V}(M)$ and $\mathbb{F}_t$ the local flow of Y. Define the usual *Lie derivative* by

$$\mathcal{L}_Y\omega = \frac{d}{dt}(\mathbb{F}_t^*\omega)\mid_{t=0},$$

which of course coincides by

$$(\mathcal{L}_Y\omega)(X_1,\dots,X_p) = Y.\omega(X_1,\dots,X_p) - \sum_{j=1}^{p}\omega(X_1,\dots,[Y,X_j],\dots,X_p)$$

for $X_i \in \mathcal{V}(U)$, $U \subset M$ open. For each $X \in \mathcal{V}(M)$ and $p \geqslant 1$ consider also the following linear map

$$i_X : \Omega^p(M,\mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(M,\mathbb{R}) \quad \text{with} \quad (i_X\omega)_x = i_{X(x)}\omega_x,$$

where $(i_v\omega_x)(v_1,\dots,v_{p-1}) := \omega_x(v,v_1,\dots,v_{p-1})$.

For $\omega \in \Omega^0(M,\mathbb{R}) = C^\infty(M,\mathbb{R})$, we put $i_X\omega := 0$. Then for two vector fields $X,Y \in \mathcal{V}(M)$, we have on $\Omega(M,\mathbb{R})$ the Cartan formulas, [9, Proposition I.4.3]:

$$[\mathcal{L}_X, i_Y] = i_{[X,Y]}, \qquad \mathcal{L}_X = d_{dR}\circ i_X + i_X \circ d_{dR}, \qquad \mathcal{L}_X \circ d_{dR} = d_{dR}\circ\mathcal{L}_X.$$

Definition 3.2. Let M be a bounded Fréchet manifold. Say that M is *weakly symplectic* if there exists a closed smooth 2-form ω ($d_{dR}\omega = 0$) being *weakly non-degenerate* in the sense that for all $x \in M$ and $v_x \in T_xM$

$$\omega_x(v_x,w_x) = 0 \tag{3.1}$$

for all $w_x \in T_xM$ implies $v_x = 0$.

The Darboux theorem is a local result so it suffices to consider the case when M is an open set U of the Fréchet model space F. For simplicity assume that $0 \in U$. Let $x \in U$ be fixed and let F'_b be the strong dual of F. Define the map $\omega_x^\# : F \to F'_b$ by

$$\langle w, \omega_x^\#(v)\rangle = \omega_x(w,v),$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is a duality pairing. Also, define $H_x \coloneqq \{\omega_x(y,\cdot) \mid y \in F\}$. This is a subset of $F_b^{'}$ and its topology is induced from it.

Lemma 3.3. *Suppose $x \in U$ is fixed and the model space $F_x \simeq T_xM$ is nuclear. Then the map $\omega_x^{\#} : F_x \to H_x$ is an isomorphism.*

Proof. Condition (3.1) implies that $\omega_x^{\#}$ is injective and by the definition of H_x, it is surjective. The space F_x is nuclear so its strong dual is DFN-space and barreled. The dual space is Mackey (cf. [11, 5.3.4]) and H_x inherits its topology (see [11, 0.4.2, 0.4.3] so is ultrabornological and barrelled (cf.[11, 8.6.9]). Thus, by the open mapping theorem [10, Theorem 4.35] the inverse mapping is continuous, so $\omega_x^{\#}$ is isomorphism. $\square$

We will need the following result.

Lemma 3.4. [8, (Poincaré Lemma) II.3.5] *Let E be locally convex, V a sequentially complete space and $U \subset E$ an open subset being star-shaped with respect to 0. Let also $\omega \in \Omega^{k+1}(U,V)$ be a V-valued closed $(k+1)$-form. Then ω is exact. Moreover, $\omega = d_{dR}\alpha$ for some $\alpha \in \Omega^k(U,V)$ with $\alpha(0) = 0$ given by*

$$\alpha(x)(v_1,\cdots v_k) = \int_0^1 t^k\omega(tk)(x,v_1,\cdots v_k)dt.$$

We assert the following theorem for some open neighborhood of $0 \in F$.

Theorem 3.5. *Suppsoe that the Fréchet model space F is nuclear. Assume also that*

(i) *there exits an open neighborhood $\mathcal{U}$ of zero such that all the spaces H_x are locally identical and $\omega_x^{t\#} : F \to H$ is an isomorphism for each $t \in [0,1]$ and $x \in \mathcal{U}$.*

(ii) *for $x \in \mathcal{U}$ the map $(\omega_x^{t\#})^{-1} : H \to F$ is a field of isomorphism of class MC^∞.*

Then ω is locally isomorphic at zero to the constant form $\omega(0)$.

Proof. On $\mathcal{U}$ define $\omega^t = \omega_0 + t(\omega_0 - \omega)$ for $t \in [0,1]$, where $\omega_0 = \omega(0)$. By Lemma 2.2 there exist a 1-form α being locally such that $d_{dR}\alpha = \omega_0 - \omega$ and $\alpha(0) = 0$. Consider a time-dependent vector field $X_t : \mathcal{U} \to F$ defined by

$$i_{X_t}\omega^t = -\alpha.$$

Thus, $\alpha = i_{X_1}\omega$, and so $\alpha \in H$. By Condition (i) for $x \in \mathcal{U}$ and all t, $\omega_x^{t\#}$ is an isomorphism hence

$$X_t \coloneqq (\omega_x^{t\#})^{-1}\alpha$$

is well defined. By Condition (ii), X_t is MC^∞ so Theorem 2.4 implies that there exists a smooth isotopy $\mathbb{F}_t$ generated by X_t which for $t \in [0,1]$ satisfies

$$\mathbb{F}_t^* \omega^t = \omega_0. \tag{3.2}$$

To solve (3.2), we need to solve

$$\frac{d}{dt} \mathbb{F}_t^* \omega^t = 0. \tag{3.3}$$

We have by product rule of derivative and the Cartan formula that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{F}_t^* \omega^t &= \mathbb{F}_t^* (\mathcal{L}_{X_t} \omega^t) + \mathbb{F}_t^* \frac{d}{dt} \omega^t \\ &= \mathbb{F}_t^* \Big(\frac{d}{dt} \omega^t - d_{dR}(i_{X_t} \omega^t) \Big) \\ &= \mathbb{F}_t^* (-d\alpha + \omega_0 - \omega) = 0. \end{aligned}$$

Thus, $\mathbb{F}_1^* \omega_1 = \mathbb{F}_0^* \omega_0$ and so $\mathbb{F}_1^* \omega = \omega_0$. □

Remark 3.6. In the projective limit approach despite the fact that many interesting results can be recovered for Fréchet manifolds there are some limitations. To construct geometric and topological objects we need to establish the existence of compatible projective limits of their corresponding Banach factors. This would not be easy in some cases and also we can not use some known results (e.g. the Poincare lemma for locally convex spaces). Therefore it is imposed the additional condition in [6, Theorem 4.2] for the existence of the required differential form as the Poincare lemma is not available in this setting. Also, we need a rather strong Lipschitz condition on mappings for the existence of local flows. In contrast, in metric approach we can apply known facts from the metric geometry and locally convex spaces that simplify proofs. There are some restrictions in this approach also; it is not easy to check MC^k-differentiability and the class of bounded maps can be very small. However as mentioned, manifolds of Riemannian metrics have the structure of nuclear bounded Fréchet manifolds and Theorem 3.5 can be used to study their cohomology, but it is not yet clear how to construct a symplectic structure that can be applied in this context.

References

[1] Dario Bambusi. On the Darboux theorem for weak symplectic manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(11):3383–3391, 1999, doi: `10.1090/S0002-9939-99-04866-2`.

[2] C. T. J. Dodson. Some recent work in Fréchet geometry. *Balkan J. Geom. Appl.*, 17(2):6–21, 2012, `URL`.

[3] Kaveh Eftekharinasab. Geometry of bounded Fréchet manifolds. *Rocky Mountain J. Math.*, 46(3):895–913, 2016, doi: `10.1216/RMJ-2016-46-3-895`.

[4] N. J. Kalton, R. C. Swanson. A symplectic Banach space with no Lagrangian subspaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 273(1):385–392, 1982, doi: 10.2307/1999213.

[5] Andreas Kriegl, Peter W. Michor. *The convenient setting of global analysis*, volume 53 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997, doi: 10.1090/surv/053.

[6] Pradip Mishra. Darboux chart on projective limit of weak symplectic Banach manifold. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 12(7):1550072, 13, 2015, doi: 10.1142/S0219887815500723.

[7] Olaf Müller. A metric approach to Fréchet geometry. *J. Geom. Phys.*, 58(11):1477–1500, 2008, doi: 10.1016/j.geomphys.2008.06.004.

[8] K-H. Neeb. *Nancy lectures on infinite dimensional Lie groups*. Lecture Notes. 2002.

[9] Karl-Hermann Neeb. Towards a Lie theory of locally convex groups. *Jpn. J. Math.*, 1(2):291–468, 2006, doi: 10.1007/s11537-006-0606-y.

[10] M. Scott Osborne. *Locally convex spaces*, volume 269 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, 2014, doi: 10.1007/978-3-319-02045-7.

[11] Pedro Pérez Carreras, José Bonet. *Barrelled locally convex spaces*, volume 131 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 113.

[12] Alan Weinstein. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in Math.*, 6:329–346 (1971), 1971, doi: 10.1016/0001-8708(71)90020-X.

Kaveh Eftekharinasab

Topology Laboratory of Algebra and Topology Department, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Tereshchenkivska str. 3, Kyiv, Ukraine

Email: kaveh@imath.kiev.ua

ORCID: orcid.org/0000-0002-4604-3220

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 12, no. 2 (2019) pp. 11–25

A $(CHR)_3$-flat trans-Sasakian manifold

Koji Matsumoto

Abstract. In [4] M. Prvanovic considered several curvaturelike tensors defined for Hermitian manifolds. Developing her ideas in [3], we defined in an almost contact Riemannian manifold another new curvaturelike tensor field, which is called a contact holomorphic Riemannian curvature tensor or briefly $(CHR)_3$-curvature tensor. Then, we mainly researched $(CHR)_3$-curvature tensor in a Sasakian manifold. Also we proved, that a conformally $(CHR)_3$-flat Sasakian manifold does not exist.

In the present paper, we consider this tensor field in a trans-Sasakian manifold. We calculate the $(CHR)_3$-curvature tensor in a trans-Sasakian manifold. Also, the $(CHR)_3$-Ricci tensor ρ_3 and the $(CHR)_3$-scalar curvature τ_3 in a trans-Sasakian manifold have been obtained.

Moreover, we define the notion of the $(CHR)_3$-flatness in an almost contact Riemannian manifold. Then, we consider this notion in a trans-Sasakian manifold and determine the curvature tensor, the Ricci tensor and the scalar curvature. We proved that a $(CHR)_3$-flat trans-Sasakian manifold is a generalized η-Einstein manifold.

Finally, we obtain the expression of the curvature tensor with respect to the Riemannian metric g of a trans-Sasakian manifold, if the latter is $(CHR)_3$-flat.

Анотація. У [4] М. Прванович розглянуто декілька кривиноподібних тензорів, визначених для ермітових різновидів. Розвиваючи її ідеї у [3], ми ввводимо в майже контактному рімановому многовиді ще одне нове кривиноподібне тензорне поле, яке називається тензором контактної голоморфної ріманової кривини або коротко тензором $(CHR)_3$-кривини. Далі ми, головним чином, досліджуємо тензор $(CHR)_3$-кривини сасакійового многовиду. Крім того, ми доводимо, що конформно $(CHR)_3$-плоского сасакійового многовиду не існує.

У цій роботі ми розглядаємо це тензорне поле на транссасакійовому многовиді. Нами обчислено тензор $(CHR)_3$-кривини транссасакійового многовиду. Також були отримані $(CHR)_3$-Річчі тензор ρ_3 та $(CHR)_3$-скалярна кривина τ_3 транссасакійового многовиду.

Keywords: $(CHR)_3$-curvature tensor, trans-Sasakian manifold, $(CHR)_3$-flat almost contact Riemannian manifold, (generalized) η-Einstein manifold.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1438

Крім того, ми вводимо поняття $(CHR)_3$-плоских майже контактних ріманових многовидів. Нами розглянуто $(CHR)_3$-плоскі транс-сасакійові многовиди, для яких ми знаходимо тензор кривини, тензор Річчі та скалярну кривину. Нами доведено, що $(CHR)_3$-плоский транссасакійовий многовид є узагальненим η-ейнштейновим многовидом.

Нарешті, нами отримно вирази тензору кривини ріманової метрики g транссасакійового многовиду, якщо останній є $(CHR)_3$-плоским.

1. Almost contact Riemannian manifolds

A real $(2n+1)$-dimensional differentiable Riemannian manifold (M^{2n+1}, g) is said to be an *almost contact Riemannian manifold* if it has a $(1,1)$-tensor φ and a 1-form η which satisfy

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \qquad \eta(\varphi X) = 0, \qquad \eta(\xi) = 1, \tag{1.1}$$

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{1.2}$$

for any $Y, X \in TM^{2n+1}$, where ξ is defined by

$$g(\xi, X) = \eta(X)$$

and TM^{2n+1} is the tangent bundle of M^{2n+1}.

From $(1.1)_3$, the vector field ξ is unit and we call this vector field the *structure vector field* of the almost contact Riemannian manifold. Next, in an almost contact Riemannian manifold M^{2n+1} we define a 2-form F by

$$F(X, Y) = g(\varphi X, Y) \tag{1.3}$$

for all $X, Y \in TM^{2n+1}$. Then the 2-form F is skew-symmetric and we call this tensor field the *fundamental* 2*-form* of this almost contact Riemannian manifold. Hereafter, we write the same φ instead of F.

An almost contact manifold M^{2n+1} is called *trans-Sasakian* if the fundamental form φ satisfies

$$\begin{aligned}(\nabla_X \varphi)(Y, Z) = \alpha\{g(X, Y)\eta(Z) - g(X, Z)\eta(Y)\}+ \\ + \beta\{\varphi(X, Y)\eta(Z) - \varphi(X, Z)\eta(Y)\},\end{aligned} \tag{1.4}$$

for certain smooth functions α and β on M^{2n+1} and for all tangetn vectors $X, Y, Z \in TM^{2n+1}$, where ∇ means the covariant differentiation with respect to g. In that case we will say that a trans-Sasakian structure is of *type* (α, β) or of an (α, β)*-type*, [5].

Remark 1.1. A $(-1, 0)$-type (resp. $(0, 1)$-type) trans-Sasakian manifold is a Sasakian (resp. a Kenmotsu) manifold.

In a trans-Sasakian manifold of (α, β)-type, we know, [5], that

$$\begin{aligned} \nabla_X \xi &= -\alpha \varphi X + \beta\{X - \eta(X)\xi\}, \\ (\nabla_X \eta)(Y) &= -\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(\varphi X, \varphi Y), \\ R(X, Y, Z, \xi) &= (X\alpha) g(\varphi Y, Z) - (Y\alpha) g(\varphi X, Z) \\ &\quad - (X\beta) g(\varphi Y, \varphi Z) + (Y\beta) g(\varphi X, \varphi Z) \\ &\quad + (\alpha^2 - \beta^2) A(X, Y, Z) - 2\alpha\beta A(X, Y, \varphi Z), \\ \rho(X, \xi) &= \{2n(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta)\}\eta(X) - \alpha(\varphi X) - (2n-1)(X\beta) \end{aligned} \tag{1.5}$$

for any $X, Y \in TM^{2n+1}$, where ρ is the Ricci tensor with respect to g and $A(X, Y, Z)$ is defined as

$$A(X, Y, Z) = g(Z, Y)\eta(X) - g(Z, X)\eta(Y) \tag{1.6}$$

for any $X, Y, Z \in TM^{2n+1}$.

The following equations (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) and (1.11) are very useful for calculations of the $(CHR)_3$-curvature tensor in a trans-Sasakian manifold.

By virtue of (1.4) and the Bianci identity, we have

$$\begin{aligned} &-R(X, Y, Z, \varphi W) + R(X, Y, W, \varphi Z) = \\ &= (X\alpha) A(Z, W, Y) - (Y\alpha) A(Z, W, X) + \\ &\quad + (X\beta) A(Z, W, \varphi Y) - (Y\beta) A(Z, W, \varphi X) + \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2)\big\{g(Y, W) g(\varphi X, Z) - g(Y, Z) g(\varphi X, W) - \\ &\quad - g(X, W) g(\varphi Y, Z) + g(X, Z) g(\varphi Y, W)\big\} + \\ &+ 2\alpha\beta\big\{g(\varphi X, W) g(\varphi Y, Z) - g(\varphi Y, W) g(\varphi X, Z) + \\ &\quad + g(X, Z) g(Y, W) - g(X, W) g(Y, Z)\big\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

for any $X, Y, Z, W \in TM^{2n+1}$. By virtue of (1.6), we can easily obtain

$$\begin{aligned} &R(\varphi X, Y, Z, \varphi W) + R(\varphi X, Y, \varphi Z, W) = \\ &= -(\varphi X\alpha) A(Z, W, Y) + (Y\alpha) B(Z, W, X) + \\ &\quad + (\varphi X\beta) A(Z, W, Y) - (Y\beta) A(Z, W, X) + \\ &+ (\alpha^2 - \beta^2)\{g(\varphi X, Z) g(\varphi Y, W) - g(\varphi X, W) g(\varphi Y, Z) \\ &\qquad + g(X, W) g(Y, Z) - g(X, Z) g(Y, W) \\ &\qquad + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\} \\ &+ 2\alpha\beta\{g(X, W) g(\varphi Y, Z) - g(X, Z) g(\varphi Y, W) \\ &\qquad + g(Y, Z) g(\varphi X, W) - g(Y, W) g(\varphi X, Z) \\ &\qquad + g(\varphi Y, W)\eta(X)\eta(Z) - g(\varphi Y, Z)\eta(X)\eta(W), \end{aligned} \tag{1.8}$$

and

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) = R(X,Y,Z,W)+ \\
&+ (X\alpha)A(Z,W,\varphi Y) - (Y\alpha)A(Z,W,\varphi X) \\
&\quad - (X\beta)A(Z,W,Y) + (Y\beta)A(Z,W,X) \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)\{g(Y,W)g(X,Z) - g(X,W)g(Y,Z) \\
&\quad - g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) + g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z)\} \\
&+ 2\alpha\beta\{g(\varphi Y,W)g(X,Z) - g(\varphi X,W)g(Y,Z) \\
&\quad - g(\varphi Y,Z)g(X,W) + g(\varphi X,Z)g(Y,W)\}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

for any $X,Y,Z,W \in TM^{2n+1}$.

Moreover, we have from the above equation

$$
\begin{aligned}
R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W) = R(X,Y,Z,W) \\
&+ (Z\alpha)A(X,Y,\varphi W) - (W\alpha)A(X,Y,\varphi Z) \\
&\quad - (Z\beta)A(X,Y,W) + (W\beta)A(X,Y,Z) \\
&- (\varphi X\alpha)A(Z,W,Y) + (\varphi Y\alpha)A(Z,W,X) \\
&\quad - (\varphi X\beta)A(Z,W,\varphi Y) + (\varphi Y\beta)A(Z,W,\varphi X) \\
&+ (\alpha^2-\beta^2)\{A(X,Y,W)\eta(Z) - A(X,Y,Z)\eta(W)\} \\
&+ 2\alpha\beta\Big[2\{g(X,W)g(\varphi Y,Z) - g(X,Z)g(\varphi Y,W) \\
&\quad + g(Y,W)g(\varphi X,Z) - g(Y,Z)g(\varphi X,W)\} \\
&\qquad - A(X,Y,\varphi W)\eta(Z) + A(X,Y,\varphi Z)\eta(W)\Big]
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

for any $X,Y,Z,W \in TM^{2n+1}$.

By virtue of $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$ for any $X,Y,Z,W \in TM^{2n+1}$, we have from (1.10)

$$
\begin{aligned}
&\{(X\alpha) + (\varphi X\beta)\}A(Z,W,\varphi Y) - \{(Y\alpha) + (\varphi Y\beta)\}A(Z,W,\varphi X) \\
&\ - \{(Z\alpha) + (\varphi Z\beta)\}A(X,Y,\varphi W) + \{(W\alpha) + (\varphi W\beta)\}A(X,Y,\varphi Z) \\
&\ - \{(X\beta) - (\varphi X\alpha)\}A(Z,W,Y) + \{(Y\beta) - (\varphi Y\alpha)\}A(Z,W,X) \\
&\ + \{(Z\beta) - (\varphi Z\alpha)\}A(X,Y,W) - \{(W\beta) - (\varphi W\alpha)\}A(X,Y,Z) \\
&\ = 4\alpha\beta\Big[2\{g(X,W)g(\varphi Y,Z) - g(X,Z)g(\varphi Y,W) \\
&\qquad + g(Y,Z)g(\varphi X,W) - g(Y,W)g(\varphi X,Z)\} \\
&\qquad\quad + A(Z,W,\varphi Y)\eta(X) - A(Z,W,\varphi X)\eta(Y)\Big]
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

for any $X,Y,Z,W \in TM^{2n+1}$. Thus we have

Proposition 1.2. *In an (α,β)-type trans-Sasakian manifold M^{2n+1}, the functions α and β satisfy* (1.11).

2. $(CHR)_3$-curvature tensor in a trans-Sasakian manifold

In this section, we consider the $(CHR)_3$-curvature tensor in a trans-Sasakian manifold.

The $(CHR)_3$-curvature tensor in an almost contact Riemannian manifold is defined by

$$\begin{aligned}
16(CHR)_3(X,Y,Z,W) = & \\
= 3\{&R(X,Y,Z,W) + R(\varphi X,\varphi Y,Z,W) \\
&+ R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) + R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W)\} \\
- &R(X,Z,\varphi W,\varphi Y) - R(\varphi X,\varphi Z,W,Y) \\
&- R(X,W,\varphi Y,\varphi Z) - R(\varphi X,\varphi W,Y,Z) \\
&+ R(\varphi X,Z,\varphi W,Y) + R(X,\varphi Z,W,\varphi Y) \\
&+ R(\varphi X,W,Y,\varphi Z) + R(X,\varphi W,\varphi Y,Z) \\
+ &\eta(X)P(Z,W,Y) - \eta(Y)P(Z,W,X) \\
&+ \eta(Z)P(X,Y,W) - \eta(W)P(X,Y,Z) \\
&+ \eta(X)\eta(W)Q(Y,Z) - \eta(X)\eta(Z)Q(Y,W) \\
&+ \eta(Y)\eta(Z)Q(W,X) - \eta(Y)\eta(W)Q(Z,X),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

where we put

$$\begin{aligned}
P(X,Y,Z) = 3\{R(X,Y,Z,\xi) + R(\varphi X,\varphi Y,Z,\xi)\} + R(\varphi X,\varphi Z,Y,\xi) \\
+ R(\varphi Z,\varphi Y,X,\xi) - R(X,\varphi Z,\varphi Y,\xi) - R(\varphi Z,Y,\varphi X,\xi)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

and

$$Q(X,Y) = 3R(\xi,X,Y,\xi) - R(\xi,\varphi X,\varphi Y,\xi). \tag{2.3}$$

for any $X,Y,Z \in TM^{2n+1}$, [3]. We call this tensor field a *contact holomorphic Riemannian curvature tensor* or briefly $(CHR)_3$*-curvature tensor* in an almost contact Riemannian manifold. Hereafter, we assume that all vector fields are elements of TM^{2n+1}.

Now, to calculate $(CHR)_3$-curvature tensor in a trans-Sasakian manifold M^{2n+1}, we separate this tensor field as the following 5-parts:

$$\text{(I)} \qquad R(X,Y,Z,W) + R(\varphi X,\varphi Y,Z,W) + \\ + R(X,Y,\varphi Z,\varphi W) + R(\varphi X,\varphi Y,\varphi Z,\varphi W),$$

$$\text{(II)} \qquad R(X,Z,\varphi W,\varphi Y) + R(\varphi X,\varphi Z,W,Y) + \\ + R(X,W,\varphi Y,\varphi Z) + R(\varphi X,\varphi W,Y,Z),$$

$$
\begin{aligned}
\text{(III)} \qquad & R(\varphi X, Z, \varphi W, Y) + R(X, \varphi Z, W, \varphi Y) + \\
& \qquad + R(\varphi X, W, Y, \varphi Z) + R(X, \varphi W, \varphi Y, Z), \\
\text{(IV)} \qquad & \eta(X)P(Z, W, Y) - \eta(Y)P(Z, W, X) + \\
& \qquad + \eta(Z)P(X, Y, W) - \eta(W)P(X, Y, Z), \\
\text{(V)} \qquad & \eta(X)\eta(W)Q(Y, Z) - \eta(X)\eta(Z)Q(Y, W) + \\
& \qquad + \eta(Y)\eta(Z)Q(W, X) - \eta(Y)\eta(W)Q(Z, X).
\end{aligned}
$$

Then we know that

$$
16(CHR)_3(X, Y, Z, W) = 3(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}) + (\mathrm{IV}) + (\mathrm{V}).
$$

Using (1.9) and (1.10) we get that

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) = {} & 4R(X, Y, Z, W) + \\
& + \{(X\alpha) - (\varphi X\beta)\}A(Z, W, \varphi Y) - \{(Y\alpha) - (\varphi Y\beta)\}A(Z, W, \varphi X) \\
& + 2(Z\alpha)A(X, Y, \varphi W) - 2(W\alpha)A(X, Y, \varphi Z) - \\
& - \{(X\beta) + (\varphi X\alpha)\}A(Z, W, Y) + \{(Y\beta) + (\varphi Y\alpha)\}A(Z, W, X) \\
& - 2(Z\beta)A(X, Y, W) + 2(W\beta)A(X, Y, Z) \\
& + (\alpha^2 - \beta^2)\Big[2\{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) + \\
& \qquad + g(\varphi X, W)g(\varphi Y, Z) - g(\varphi X, Z)g(\varphi Y, W)\} \\
& \qquad\qquad + A(Z, W, Y)\eta(X) - A(Z, W, X)\eta(Y)\Big] \\
& + 2\alpha\beta\Big[2\{g(Y, Z)g(\varphi X, W) + g(X, Z)g(\varphi Y, W) \\
& \qquad + g(X, W)g(\varphi Y, Z) - g(Y, W)g(\varphi X, Z)\} \\
& \qquad\qquad + A(X, Y, \varphi Z)\eta(W) - A(X, Y, \varphi W)\eta(Z)\Big].
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

Using (1.9), we obtain

$$
\begin{aligned}
-(\mathrm{II}) = 2R(X,Y,Z,W) &+ (X\alpha)\{A(Z,Y,\varphi W) - A(W,Y,\varphi Z)\} \\
&- (Y\alpha)\{A(Z,X,\varphi W) - A(W,X,\varphi Z)\} \\
&+ (Z\alpha)\{A(X,W,\varphi Y) - A(Y,W,\varphi X)\} \\
&- (W\alpha)\{A(X,Z,\varphi Y) - A(Y,Z,\varphi X)\} \\
&- (X\beta)\{A(Z,Y,W) - A(W,Y,Z)\} \\
&+ (Y\beta)\{A(Z,X,W) - A(W,X,Z)\} \\
&- (Z\beta)\{A(X,W,Y) - A(Y,W,X)\} \\
&+ (W\beta)\{A(X,Z,Y) - A(Y,Z,X)\} \\
&+ 2(\alpha^2 - \beta^2)\big\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) \\
&- g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) + g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) \\
&- 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\big\}.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

(III) is separated as $(A) + (B)$, where we put

$$
\begin{aligned}
(A) &= R(\varphi X, Z, \varphi W, Y) + R(\varphi X, W, Y, \varphi Z) \\
&= -\{R(\varphi X, \varphi W, Y, Z) + R(\varphi X \varphi Z, W, Y)\} \\
&\quad - \{R(\varphi X, Y, Z, \varphi W) + R(\varphi X, Y, \varphi Z, W)\},
\end{aligned}
$$

$$
(B) = R(X, \varphi Z, W, \varphi Y) + R(X, \varphi W, \varphi Y, Z).
$$

By virtue of (1.9), we obtain

$$
\begin{aligned}
-\{R(\varphi X, \varphi W, Y, Z) &+ R(\varphi X \varphi Z, W, Y)\} = R(Z,Y,Z,W)+ \\
&+ (Y\alpha)\{A(X,Z,\varphi W) - A(X,W,\varphi Z)\}+ \\
&+ (Z\alpha)A(X,W,\varphi Y) - (W\alpha)A(X,Z,\varphi Y)+ \\
&+ (Y\beta)\{A(X,W,Z) - A(X,Z,W)\}- \\
&- (Z\beta)A(X,W,Y) + (W\beta)A(X,Z,Y) \\
&+ (\alpha^2 - \beta^2)\Big\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) \\
&+ g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) - g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) \\
&- 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\Big\} \\
&+ 2\alpha\beta\Big\{g(X,Z)g(\varphi Y,W) - g(Y,W)g(\varphi X,Z) \\
&+ g(Y,Z)g(\varphi X,W) - g(X,W)g(\varphi Y,Z) \\
&- 2g(X,Y)g(\varphi Z,W)\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Thus we have from (2.5) and (2.6)

$$
\begin{aligned}
(A) = R(X,Y,Z,W)+ & \\
& + (\varphi X\alpha)A(Z,W,Y) - 2(Y\alpha)g(\varphi Z,W)\eta(X) \\
& \quad + (Z\alpha)A(X,W,\varphi Y) - (W\alpha)A(X,Z,\varphi Y) \\
& + (\varphi X\beta)A(Z,W,\varphi Y) + 2(Y\beta)A(Z,W,X) \\
& \quad - (Z\beta)A(X,W,Y) + (W\beta)A(X,Z,Y) \\
& + (\alpha^2 - \beta^2)\Big[2\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\} \\
& \qquad\qquad - A(Z,W,Y)\eta(X)\Big] \\
& + 2\alpha\beta\Big[2\{g(X,Z)g(\varphi Y,W) - g(X,W)g(\varphi Y,Z) \\
& \qquad\qquad - g(X,Y)g(\varphi Z,W)\} - A(Z,W,\varphi Y)\eta(X)\Big].
\end{aligned}
$$

Since, (B) is the equation which change $X \Leftrightarrow Y$ and $Z \Leftrightarrow W$ in (A), we have

$$
\begin{aligned}
(B) = R(X,Y,Z,W) & + (\varphi Y\alpha)A(W,Z,X) - 2(X\alpha)g(\varphi W,Z)\eta(Y) \\
& + (W\alpha)A(Y,Z,\varphi X) - (Z\alpha)A(Y,W,\varphi X) \\
& \quad + (\varphi Y\beta)A(W,Z,\varphi X) + 2(X\beta)A(W,Z,Y) \\
& \qquad - (W\beta)A(Y,Z,X) + (Z\beta)A(Y,W,X) \\
& + (\alpha^2 - \beta^2)\Big[2\big\{g(Y,W)g(X,Z) - g(Y,Z)g(X,W)\big\} - A(W,Z,X)\eta(Y)\Big] \\
& + 2\alpha\beta\Big[2\big\{g(Y,W)g(\varphi X,Z) - g(Y,Z)g(\varphi X,W) \\
& \qquad\qquad - g(X,Y)g(\varphi W,Z)\big\} - A(W,Z,\varphi X)\eta(Y)\Big].
\end{aligned}
$$

By virtue of the above two equations, we obtain

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{III}) = 2R(X,Y,Z,W) & + (\varphi X\alpha)A(Z,W,Y) - (\varphi Y\alpha)A(W,Z,X) \\
& + 2(X\alpha)g(\varphi Z,W)\eta(Y) - 2(Y\alpha)g(\varphi Z,W)\eta(X) \\
& \quad - (Z\alpha)\{A(X,Y,\varphi W) - 2g(\varphi X,Y)\eta(W)\} \\
& \qquad + (W\alpha)\{A(X,Y,\varphi Z) - 2g(\varphi X,Y)\eta(Z)\} \\
& + (\varphi X\beta)A(Z,W,\varphi Y) - (\varphi Y\beta)A(Z,W,\varphi X) \\
& \quad - 2(X\beta)A(Z,W,Y) + 2(Y\beta)A(Z,W,X) \\
& \qquad - (Z\beta)A(X,Y,W) + (W\beta)A(X,Y,Z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (\alpha^2 - \beta^2)\Big[4\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z) - g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\} \\
&\qquad\qquad - A(Z,W,Y)\eta(X) + A(Z,W,X)\eta(Y)\Big] \\
&+ 2\alpha\beta\Big[2\{g(X,Z)g(\varphi Y,W) - g(X,W)g(\varphi Y,Z) \\
&\qquad + g(Y,W)g(\varphi X,Z) - g(Y,Z)g(\varphi X,W)\} \\
&\qquad\qquad - A(Z,W,\varphi X)\eta(Y) + A(Z,W,\varphi X)\eta(Y)\Big].
\end{aligned}
$$

Next, to calculate (IV) in a trans-Sasakian manifold, we have to get $P(X,Y,Z)$ which defined by (2.2) in a trans-Sasakian manifold. By virtue of (1.5) we obtain that

$$
\begin{aligned}
P(X,Y,Z) = {} & 4\{(X\alpha)g(\varphi Y,Z) - (Y\alpha)g(\varphi X,Z)\} \\
& - 2\{(X\beta)g(\varphi Y,\varphi Z) - (Y\beta)g(\varphi X,\varphi Z)\} \\
& - 4\{(\varphi X\alpha)g(\varphi Y,\varphi Z) - (\varphi Y\alpha)g(\varphi X,\varphi Z)\} \\
& - 2\{(\varphi X\beta)g(\varphi Y,Z) - (\varphi Y\beta)g(\varphi X,Z)\} \\
& + 4(\varphi Z\beta)g(\varphi X,Y) + 2(\alpha^2 - \beta^2)A(X,Y,Z) - 8\alpha\beta A(X,Y,\varphi Z).
\end{aligned}
$$

Using the above equation, we get

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{IV}) = {} & 2\big\{2(X\alpha) - (\varphi X\beta)\big\}A(Z,W,\varphi Y) - 2\big\{2(Y\alpha) - (\varphi Y\beta)\big\}A(Z,W,\varphi X) \\
& + 2\big\{2(Z\alpha) - (\varphi Z\beta)\big\}A(X,Y,\varphi W) - 2\big\{2(W\alpha) - (\varphi W\beta)\big\}A(X,Y,\varphi Z) \\
& - 2\big\{2(\varphi X\alpha) + (X\beta)\big\}A(Z,W,Y) + 2\big\{2(\varphi Y\alpha) + (Y\beta)\big\}A(Z,W,X) \\
& - 2\big\{2(\varphi Z\alpha) + (Z\beta)\big\}A(X,Y,W) + 2\big\{2(\varphi W\alpha) + (W\beta)\big\}A(X,Y,Z) \\
& + 4\Big\{(\varphi Y\beta)g(\varphi Z,W)\eta(X) - (\varphi X\beta)g(\varphi Z,W)\eta(Y) \\
& \qquad + (\varphi W\beta)g(\varphi X,Y)\eta(Z) - (\varphi Z\beta)g(\varphi X,Y)\eta(W)\Big\} \\
& + 4(\alpha^2 - \beta^2)\big\{A(Z,W,Y)\eta(X) - A(Z,W,X)\eta(Y)\big\}.
\end{aligned}
$$

Finally, we calculate (V) in a trans-Sasakian manifold.

By virtue of $(1.5)_3$, we have

$$
\begin{aligned}
R(\xi,X,Y,\xi) = {} & \{(\xi\alpha) + 2\alpha\beta\}g(\varphi X,Y) + \\
& + \{(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta)\}g(\varphi X,\varphi Y).
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

In (2.7), the left hand side is symmetric with respect to X and Y. So we have

Proposition 2.1. *In a trans-Sasakian manifold, the condition*

$$(\xi\alpha) + 2\alpha\beta = 0$$

holds.

Thus, (2.7) is written as

$$R(\xi, X, Y, \xi) = \{(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta)\}\, g(\varphi X, \varphi Y). \tag{2.8}$$

By virtue of (2.8), we can easily obtain that

$$R(\xi, X, Y, \xi) = R(\xi, \varphi X, \varphi Y, \xi).$$

Thus we have from the above equation

$$Q(X, Y) = 2\{(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta)\}\, g(\varphi X, \varphi Y). \tag{2.9}$$

Thus we have from (2.9)

$$(\mathrm{V}) = -2\{(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta)\}\, \{A(Z, W, Y)\eta(X) - A(Z, W, X)\eta Y)\}.$$

By virtue of (1.11), (I), (II), (III), (IV) and (V), the $(CHR)_3$-curvature tensor in a trans-Sasakian manifold is written as follows:

$$\begin{aligned}
16(CHR)_3(X, Y, Z, W) &= 16R(X, Y, Z, W) \\
&\quad + (X\alpha)\{7A(Z, W, \varphi Y) + 4g(\varphi Z, W)\eta(Y)\} \\
&\qquad - (Y\alpha)\{7A(Z, W, \varphi X) + 4g(\varphi Z, W)\eta(X)\} \\
&\qquad\quad + (Z\alpha)\{7A(X, Y, \varphi W) + 4g(\varphi X, Y)\eta(W)\} \\
&\qquad\qquad - (W\alpha)\{7A(X, Y, \varphi Z) + 4g(\varphi X, Y)\eta(Z)\} \\
&\quad - 5\big\{(\varphi X\alpha)A(Z, W, Y) - (\varphi Y\alpha)A(Z, W, X) \\
&\qquad\quad + (\varphi Z\alpha)A(X, Y, W) - (\varphi W\alpha)A(X, Y, Z)\big\} \\
&\quad - 9\big\{(X\beta)A(Z, W, Y) - (Y\beta)A(Z, W, X) \\
&\qquad\quad + (Z\beta)A(X, Y, W) - (W\beta)A(X, Y, Z)\big\} \\
&\quad - (\varphi X\beta)\{3A(Z, W, \varphi Y) + 4g(\varphi Z, W)\eta(Y)\} \\
&\qquad + (\varphi Y\beta)\{3A(Z, W, \varphi X) + 4g(\varphi Z, W)\eta(X)\} \\
&\qquad\quad - (\varphi Z\beta)\{3A(X, Y, \varphi W) + 4g(\varphi X, Y)\eta(W)\} \\
&\qquad\qquad + (\varphi W\beta)\{3A(X, Y, \varphi Z) + 4g(\varphi X, Y)\eta(Z)\} \\
&\quad + (\alpha^2 - \beta^2)\Big[12\{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\} \\
&\qquad\qquad + 4\{g(\varphi X, W)g(\varphi Y, Z) - g(\varphi X, Z)g(\varphi Y, W) \\
&\qquad\qquad\qquad - 2g(\varphi X, Y)g(\varphi Z, W)\}\Big] \\
&\quad + 2(\xi\beta)\{A(Z, W, Y)\eta(X) - A(Z, W, X)\eta(Y)\}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

From the above equation, we can easily obtain the $(CHR)_3$-Ricci tensor ρ_3 and the $(CHR)_3$-scalar curvature τ_3 as

$$\begin{aligned}8\rho_3(X,Y) = 8\rho(X,Y) &+ (5n{+}3)\big[\{(\varphi X)\alpha\}\eta(Y) + \{(\varphi Y)\alpha\}\eta(X)\big]\\ &+ (9n-1)\{(X\beta)\eta(Y) + (Y\beta)\eta(X)\}\\ &- 4(\alpha^2-\beta^2)\Big\{(3n-1)g(X,Y) + (n+1)\eta(X)\eta(Y)\Big\}\\ &+ 2(\xi\beta)\{4g(X,Y) - (n+3)\eta(X)\eta(Y)\}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

and

$$\tau_3 = \tau - (3n+1)n(\alpha^2-\beta^2) + 4n(\xi\beta), \tag{2.12}$$

where τ denotes the scalar curvature with respect to g.

By virtue of $(1.5)_4$ and (2.11), we easily have

$$8\rho_3(X,\xi) = 5(n-1)\Big\{(\varphi X)\alpha) - 7(n-1)\{(X\beta) - (\xi\beta)\eta(X)\}\Big\}. \tag{2.13}$$

3. $(CHR)_3$-flat trans-Sasakian Manifolds

An almost contact Riemannian manifold is called $(CHR)_3$-*flat* if the $(CHR)_3$-curvature tensor equals to zero on M^{2n+1}.

Let us consider a $(CHR)_3$-flat trans-Sasakian manifold. Then the left hand side of (2.10) is zero.

Moreover, if the $(CHR)_3$-curvature tensor is flat, then the $(CHR)_3$-Ricci tensor and the $(CHR)_3$-scalar are flat. So, by virtue of (2.11) and (2.12), we respectively have

$$\begin{aligned}&8\rho(X,Y) + (5n+3)\Big[\{(\varphi X)\alpha\}\eta(Y) + \{(\varphi Y)\alpha\}\eta(X)\Big]+\\ &\quad + (9n-1)\{(X\beta)\eta(Y) + (Y\beta)\eta(X)\}-\\ &\qquad - 4(\alpha^2-\beta^2)\{(3n-1)g(X,Y) + (n+1)\eta(X)\eta(Y)\}+\\ &\qquad\quad + 2(\xi\beta)\{4g(X,Y) - (n+3)\eta(X)\eta(Y)\} = 0\end{aligned} \tag{3.1}$$

and

$$\tau - (3n+1)n(\alpha^2-\beta^2) + 4n(\xi\beta) = 0. \tag{3.2}$$

We know from (2.13)

$$5\{(\varphi X)\alpha\} - 7\{(X\beta) - (\xi\beta)\eta(X)\} = 0. \tag{3.3}$$

From the above equation, we get

$$\begin{aligned}&\{(\varphi X)\alpha\}\eta(Y) + \{(\varphi Y)\alpha\}\eta(X) =\\ &\qquad + \frac{7}{5}\{(X\beta)\eta(Y) + (Y\beta)\eta(X)\} - \frac{14}{5}(\xi\beta)\eta(X)\eta(Y).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Substituting (3.4) into (3.1), we get

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) =& \frac{(3n-1)(\alpha^2-\beta^2)-2(\xi\beta)}{2}g(X,Y)\\ &+\frac{1}{2}\Big\{\frac{2(10n+9)}{5}(\xi\beta)+(n+1)(\alpha^2-\beta^2)\Big\}\eta(X)\eta(Y) \qquad (3.5)\\ &-\frac{2(5n+1)}{5}\Big\{d\beta(X)\eta(X)+d\beta(Y)\eta(X)\Big\}.\end{aligned}$$

Thus we have

Theorem 3.1. *A $(CHR)_3$-flat trans-Sasakian manifold is a generalized η-Einstein manifold.*

Remark 3.2. The notion of a generalized η-Einstein manifold is defined by A. A. Shaikh and Y. Matsuyama, [5]. Moreover, M. C. Chaki called this manifold a *generalized quasi-Einstein manifold*, [1], [2].

From the above theorem, we can easily obtain

Corollary 3.3. *A $(CHR)_3$-flat trans Sasakian manifold is η-Einstein if and only if the function β is constant. Then the Ricci tensor ρ and the scalar curvature τ with respect to g are written as*

$$\rho(X,Y)=(\alpha^2-\beta^2)\big\{\tfrac{3n-1}{2}g(X,Y)+\tfrac{n+1}{2}\eta(X)\eta(Y)\big\} \qquad (3.6)$$

and

$$\tau=-(3n+1)n(\alpha^2-\beta^2).$$

By virtue of Remark 1.1 and the above corollary, we get

Corollary 3.4. *In a $(CHR)_3$-flat Sasakian, resp. Kenmotsu, manifold, the Ricci tensor ρ and the scalar curvature τ with respect to g satisfy*

$$\rho(X,Y)=\tfrac{3n-1}{2}g(X,Y)+\tfrac{n+1}{2}\eta(X)\eta(Y),$$

resp.

$$\rho(X,Y)=-\big\{\tfrac{3n-1}{2}g(X,Y)+\tfrac{n+1}{2}\eta(X)\eta(Y)\big\}$$

and

$$\tau=-(3n+1)n \qquad (\textit{resp.} \quad \tau=(3n+1)n). \qquad (3.7)$$

Now, from (3.3), we obtain

$$\begin{aligned}&-5\{(\varphi X)\alpha\}A(Z,W,Y)+5\{(\varphi Y)\alpha\}A(Z,W,X)-\\ &\quad-5\{(\varphi Z)\alpha\}A(X,Y,W)+5\{(\varphi W)\alpha\}A(X,Y,Z)-\\ &-9\Big\{(X\beta)A(Z,W,Y)-(Y\beta)A(Z,W,X)+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (Z\beta)A(X,Y,W) - (W\beta)A(X,Y,Z)\Big\} = \\
&= -16\Big\{(X\beta)A(Z,W,Y) - (Y\beta)A(Z,W,X)+ \\
&+ (Z\beta)A(X,Y,W) - (W\beta)A(X,Y,Z)\Big\}+ \\
&+ 14(\xi\beta)\{A(Z,W,Y)\eta(X) - A(Z,W,X)\eta(Y)\}.
\end{aligned}
$$

From (3.3), we get

$$
\{(\varphi X)\beta\} = -\frac{5}{7}(X\alpha) + \frac{5}{7}(\xi\alpha)\eta(X). \tag{3.8}
$$

From this, we have

$$
\begin{aligned}
&- 3\Big[\{(\varphi X)\beta\}A(Z,W,\varphi Y) - \{(\varphi Y)\beta\}A(Z,W,\varphi X)+ \\
&+ \{(\varphi Z)\beta\}A(X,Y,\varphi W) - \{(\varphi W)\beta\}A(X,Y,\varphi Z)\Big]+ \\
&+ 7\Big\{(X\alpha)A(Z,W,\varphi Y) - (Y\alpha)A(Z,W,\varphi X)+ \\
&+ (Z\alpha)A(X,Y,\varphi W) - (W\alpha)A(X,Y,\varphi Z)\Big\} = \\
&= \frac{64}{7}\Big\{(X\alpha)A(Z,W,\varphi Y) - (Y\alpha)A(Z,W,\varphi X)+ \\
&+ (Z\alpha)A(X,Y,\varphi W) - (W\alpha)A(X,Y,\varphi Z)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Next, since we have

$$
4[(X\alpha) - \{(\varphi X)\beta\}]g(\varphi Z,W)\eta(Y) = \tfrac{48}{7}(X\alpha) - \tfrac{20}{7}(\xi\alpha)g(\varphi Z,W)\eta(X)\eta(Y),
$$

we obtain

$$
\begin{aligned}
&4\big[(X\alpha) - \{(\varphi X)\beta\}\big]g(\varphi Z,W)\eta(Y)- \\
&- 4\big[(Y\alpha) - \{(\varphi Y)\beta\}\big]g(\varphi Z,W)\eta(X)+ \\
&+ 4\big[(Z\alpha) - \{(\varphi Z)\beta\}\big]g(\varphi X,Y)\eta(W)- \\
&- 4\big[(W\alpha) - \{(\varphi W)\beta\}\big]g(\varphi X,Y)\eta(Z) = \\
&= \frac{48}{7}\Big\{(X\alpha)g(\varphi Z,W)\eta(Y) - (Y\alpha)g(\varphi Z,W)\eta(X)+ \\
&+ (Z\alpha)g(\varphi X,Y)\eta(W) - (W\alpha)g(\varphi X,Y)\eta(Z)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Using (3.6), (3.7) and (3.8), the curvature tensor R with respect to g is written as

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{7}\Big[&(X\alpha)\{4A(W,Z,\varphi Y) + 3g(\varphi W,Z),\eta(Y)\} \\
&- (Y\alpha)\{4A(W,Z,\varphi X) + 3g(\varphi W,Z)\eta(X)\} \\
&+ (Z\alpha)\{4A(Y,X,\varphi W) + 3g(\varphi Y,X)\eta(W)\} \\
&- (W\alpha)\{4A(Y,X,\varphi Z) + 3g(\varphi Y,X)\eta(Z)\}\Big] \\
&+ (X\beta)A(W,Z,Y) - (Y\beta)A(W,Z,X) \\
&- (Z\beta)A(Y,X,W) + (W\beta)A(Y,X,Z) \\
&+ \frac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2)\Big[3\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\} \\
&\qquad - g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) + g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) \\
&\qquad + 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\Big] \\
&- \frac{1}{4}\{(\alpha^2-\beta^2) - (\xi\beta)\}\{A(Z,W,Y)\eta(X) - A(Z,W,X)\eta(Y)\}.
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

Thus we get

Theorem 3.5. *If a trans-Sasakian manifold is $(CHR)_3$-flat, the the curvature tensor satisfies* (3.9).

By virtue of Remark 1.1 and the above theorem, we have

Corollary 3.6. *In a $(CHR)_3$-flat Sasakian, resp. Kenmotsu, manifold, the curvature tensor R with respect to g are written by*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{4}\Big[&3\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\} \\
&- g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) + g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) + 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\Big] \\
&- \frac{1}{4}\{A(Z,W,Y)\eta(X) - A(Z,W,X)\eta(Y)\}
\end{aligned}
$$

resp.

$$
\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) = -\frac{1}{4}[&3\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\} \\
&- g(\varphi X,W)g(\varphi Y,Z) + g(\varphi X,Z)g(\varphi Y,W) + 2g(\varphi X,Y)g(\varphi Z,W)\Big] \\
&+ \frac{1}{4}\{A(Z,W,Y)\eta(X) - A(Z,W,X)\eta(Y)\}.
\end{aligned}
$$

Remark 3.7. The above corollary shows that a $(CHR)_3$-flat Sasakian (resp. Kenmotsu) manifold is a Sasakian (resp. Kenmotsu) space form with zero holomorphic sectional curvature.

Remark 3.8. Of course, we can get (3.2) and (3.5) from Theorem 3.1 directly.

Acknowledgements

The author deeply thanks to Professor Yevhen Cherevko at Odesa National Economic University for his very kind support.

References

[1] M. C. Chaki. On generalized quasi Einstein manifolds. *Publ. Math. Debrecen*, 58(4):683–691, 2001.

[2] M. C. Chaki, R. K. Maity. On quasi Einstein manifolds. *Publ. Math. Debrecen*, 57(3-4):297–306, 2000.

[3] Koji Matsumoto. A new curvaturelike tensor field in an almost contact Riemannian manifold II. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 103(117):113–128, 2018, doi: `10.2298/pim1817113m`.

[4] Mileva Prvanović. Conformally invariant tensors of an almost Hermitian manifold associated with the holomorphic curvature tensor. *J. Geom.*, 103(1):89–101, 2012, doi: `10.1007/s00022-012-0111-9`.

[5] A. A. Shaikh, Y. Matsuyama. On trans-Sasakian manifolds. *SUT J. Math.*, 45(1):25–41, 2009.

Koji Matsumoto

2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan

Email: `tokiko_matsumoto@yahoo.com`

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 12, no. 2 (2019) pp. 26–42

Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами

Я. Ф. Виннишин, В. П. Маркітан, М. В. Працьовитий,
І. О. Савченко

Abstract. A set of incomplete sums (subsums) of a absolutely convergent series has been featured in studies since 1914, when a pioneer work in this direction was published by Japanese mathematician Soichi Kakey [7]. Since then, active research has begun in this direction. And already final in the direction of classification of existing "topological types" of sets of incomplete sums of absolutely convergent series are the works of 1988 [4, 10], where the following fact is proved:

If E is the set of subsums of a positive term convergent series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, then E is one of the following:* (i) *a finite union of closed intervals;* (ii) *homeomorphic to the Cantor set;* (iii) *homeomorphic to a certain set T called Cantorval, see* (1.3).

Beginning in 1941, in parallel with studies of the topological properties of the sets of incomplete sums, studies of their metric properties were carried out. Metric problems (Lebesgue measure problems) are of particular relevance when the set of incomplete sums of a series is nowhere dense or is a mixture of nowhere dense sets and a union of segments.

Today, the following problems remain open in the general formulation for the set of incomplete sums of a converging positive series:

1) necessary and sufficient conditions for its nowhere density;

2) necessary and sufficient conditions for its zero-dimensionality (in the sense of Lebesgue measure);

3) its fractal properties, etc.

Колектив авторів щиро вдячний анонімному рецензентові за конструктивні зауваження та побажання, які дозволили вдосконалити дану роботу.

Ключові слова: множина неповних сум (підсум), канторвал, міра Лебега, ε-апроксимація лінійної множини.

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1455

In the present paper we give a construction of a continuum family of positive series whose sets of incomplete sums are Cantorvals. Each series of this family has a property

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}} = +\infty,$$

Moreover, for any $\varepsilon > 0$ there exists a series in this family with Lebesgue measure of its set of incomplete sums greater than $1-\varepsilon$.

Анотація. Наводиться конструкція континуальної сім'ї додатних рядів, множини неповних сум яких є канторвалами (об'єднанням ніде не щільної множини і множини, яка є нескінченним об'єднанням відрізків). Кожен ряд даної сім'ї має властивість

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}} = +\infty,$$

причому для будь-якого $\varepsilon > 0$ в цій сім'ї існує ряд, міра Лебега множини неповних сум якого є більшою за $1-\varepsilon$.

1. Вступ

Розглядається збіжний додатний ряд

$$r_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + r_n = S_n + r_n. \tag{1.1}$$

Нехай M – довільна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$. Число

$$x(M) = \sum_{n\in M\subset\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varepsilon_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою)* ряду (1.1), визначеною множиною M.

Множину всіх неповних сум ряду (1.1) позначатимемо через $E\{a_n\}$, тобто

$$E\{a_n\} \equiv \Big\{x \mid x = \sum_{n\in M} a_n, \quad M \in 2^{\mathbb{N}}\Big\}.$$

Легко бачити, що множина $E\{a_n\}$ всіх підсум абсолютно збіжного ряду $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}$ не змінюється при довільній перестановці членів ряду. Крім того, всі члени збіжного додатного ряду можна переставити у збіжну до нуля спадну (у нестрогому розумінні) послідовність. Тому при дослідженні множини $E\{a_n\}$ достатньо розглядати випадок монотонної спадної послідовності $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$.

Оскільки для абсолютно збіжного ряду ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ має місце рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^- + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|,$$

де S^- – сума всіх від'ємних членів ряду, то в дослідженнях топологометричної структури множини підсум абсолютно збіжних рядів можна обмежитись розглядом додатних рядів, що ми й надалі робитимемо.

Як окремий об'єкт вивчення, множина підсум абсолютно збіжного ряду фігурує в дослідженнях з 1914 року, коли була опублікована піонерська в цьому напрямі робота японського математика Соічі Какея [7] ("Про неповні суми нескінченних рядів"), де він описав струтруру множини неповних сум, не надавши при цьому строгих доведень. В 1941 році результати Какея були перевідкриті Г. Горничем [5] та в 1948 році П. К. Меноном [9] й основний результат того часу сформульовнано у вигляді:

Теорема 1.1. *Множина неповних сум $E\{a_n\}$ абсолютно збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ є досконалою множиною.*

1) *Більш того, $E\{a_n\}$ є скінченним об'єднанням відрізків тоді й лише тоді, коли*

$$|a_n| \leqslant r_n \equiv |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots$$

для всіх n, починаючи з деякого номеру ($E\{a_n\}$ є відрізком тоді й лише тоді, коли $|a_n| \leqslant r_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$).

2) *Якщо ж*

$$|a_n| > |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + |a_{n+3}| + \cdots$$

для всіх достатньо великих n, то $E\{a_n\}$ гомеоморфна класичній множині Кантора.

У згаданій роботі [7] С. Какея висунув припущення, що необхідною і достатньою умовою ніде не щільності множини $E\{a_n\}$ є існування зліченної кількості членів ряду, для яких $|a_n| > r_n$. Перший контрприклад до цієї гіпотези навели в 1980 р. А. Д. Вайнштейн і Б. З. Шапіро [16]. У роботі [11] Ф. Прус-Вішньовський, визнаючи спростування гіпотези Какея вказаними авторами, зазначає, що їх робота містить і хибні твердження. У 1984 р. Ц. Ференс [3] навів інший контрприклад для спростування гіпотези Какея, а зовсім простий приклад ряду у 1988 р.

представили Дж. Ґатрі і Дж. Німан [4]:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{2}{4^3}+\cdots \tag{1.2}$$

Для цього ряду, як і для рядів із вище наведених робіт, нерівності $a_n > r_n$ і $a_n \leqslant r_n$ виконуються нескінченну кількість разів, а множина неповних сум ряду (1.2) містить відрізок $[\frac{2}{3}, 1]$, але не є скінченним об'єднанням відрізків, див. [2]. Множина неповних сум ряду (1.2) гомеоморфна множині

$$T \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n}, \tag{1.3}$$

де C – класична множина Кантора (тобто множина чисел з відрізка $[0,1]$, які записуються у трійковій системі числення з використанням двох цифр 0 та 2, або, що рівносильно – це множина неповних сум геометричного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$), G_k – відкрита множина всіх чисел відрізка $[0,1]$, які мають у своєму трійковому зображенні k-ту цифру 1, якщо всі попередні цифри зображення – 0 або 2.

Завершальними у напрямі класифікації існуючих "топологічних типів" множин неповних сум абсолютно збіжних рядів є роботи [4, 10], де доведено наступний факт.

Теорема 1.2. *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум збіжного додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ або*

1) *є скінченним об'єднанням відрізків, або*
2) *гомеоморфна множині Кантора, або*
3) *гомеоморфна множині T.*

Означення 1.3. [1, 11] *Симетричним канторвалом* (або *M-канторвалом*) називається множина, яка гомеоморфна множині T.

Термін "*канторвал*" запропонували бразильські математики П. Мендес і Ф. Олівейра у роботі [8], присвяченій вивченню топологічної структури арифметичної суми двох *множин канторівського типу* (непорожніх обмежених досконалих нуль-множин Лебега з $\mathbb{R}$). У цій роботі автори дали канторвалам дещо інше означення.

Означення 1.4. [8] *M-канторвалом* називається досконала підмножина числової прямої $\mathbb{R}$ така, що кожний суміжний інтервал цієї множини накопичує по обидві сторони нескінченну кількість своїх нетривіальних компонент зв'язності та суміжних інтервалів.

Починаючи з 1941 року, паралельно з дослідженнями топологічних властивостей множин неповних сум, проводились дослідження їх метричних властивостей. Окремої актуальності метричні задачі (задачі про міру Лебега) набувають у випадку, коли множина неповних сум ряду є ніде не щільною або сумішшю ніде не щільної множини та об'єднання відрізків. Дещо пізніше коло метричних задач було розширене задачами про фрактальні властивості множин неповних сум, про їхні фрактальні розмірності (розмірність Гаусдорфа-Безиковича та інші). Першими вагомими дослідженнями в цьому напрямі були роботи Тібора Шалата [15, 14].

Незважаючи на те, що в останній час акцентовано ведуться дослідження [1, 12, 6, 17, 18, 19, 20] властивостей множини неповних сум збіжного ряду (в основному це розгляд окремих випадків, коли члени ряду утворюють послідовність, яка володіє деякою властивістю однорідності відносно n) і на те, що за столітній період розвитку цієї теорії науковцями було отримано ряд вагомих результатів [4, 5, 7, 9, 15, 16, 21, 14], повний опис тополого-метричних властивостей множини $E\{a_n\}$ зали ється ще далеким до завершення.

Сьогодні стосовно множини неповних сум зб жного додатного ряду все ще у загальній постановці залишаються відкритими наступні проблеми:

1) про необхідні і достатні умови її ніде не щільності;
2) про необхідні і достатні умови її нульмірності (в розумінні міри Лебега).

Ще більш складною проблемою у загальній постановці є задача про фрактальні властивості множини $E\{a_n\}$, хоча для деяких класів рядів це успішно зроблено, див. [15, 19, 21, 14].

Нагадаємо, що *нескінченною згорткою Бернуллі*, керованою числовим рядом (1.1), називається розподіл випадкової величини

$$\xi = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + +\xi_n a_n + \ldots,$$

де (ξ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1.

Нескінченні згортки Бернуллі є актуальним об'єктом сучасних наукових досліджень [21, 17, 19, 13], і з ними пов'язано ряд складних проблем. Оскільки розподіл випадкової величини ξ зосереджений на множині неповних сум ряду (1.1), а її спектр (мінімальний замкнений носій) або збігається з множиною неповних сум, або є її підмножиною, то знання тополого-метричних властивостей множини неповних сум сприяють дослідженню розподілу ξ.

У даній роботі ми цікавимося питанням: якої найбільшої масивності (у розумінні міри Лебега) може досягати множина неповних сум додатного монотонного ряду (1.1), для якого виконується умова

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_n}{r_n} = +\infty? \tag{1.4}$$

Наближувати множини неповних сум і геометрично інтерпретувати процес наближення можна в термінах циліндричних відрізків.

Нагадаємо, що для ряду (1.1) *циліндричним відрізком рангу* m з основою $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m$ ($\varepsilon_i \in \{0,1\}$) називають відрізок $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m}$ з кінцями

$$a = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i a_i, \qquad b = r_m + a.$$

Очевидно, що $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m i} \subset \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m}$ для $i = \{0,1\}$, але, взагалі кажучи,

$$\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m} \neq \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m 0} \cup \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m 1}.$$

Легко бачити, що кінці циліндричних відрізків є точками множини E, а сама множина E є замиканням множини всіх кінців циліндричних відрізків.

Нехай E_m – це об'єднання всіх циліндричних відрізків рангу m, тобто

$$E_m = \bigcup_{\varepsilon_1=0}^{1} \bigcup_{\varepsilon_2=0}^{1} \cdots \bigcup_{\varepsilon_m=0}^{1} \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m}.$$

Тоді

1) $E \subset E_{m+1} \subset E_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$,

2) $E = \lim\limits_{m\to\infty} E_m = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} E_m$.

Нехай

$$\Delta'_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m} \equiv \Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m} \cap E\{a_n\}.$$

Тоді, очевидно, що множина $E\{a_n\}$ є симетричною відносно точки $\frac{1}{2}r_0$, а $\Delta'_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m}$ – відносно середини відрізка $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m}$.

Не порушуючи загальності міркувань, в задачах тополого-метричного характеру можна вважати ряд нормованим, тобто з сумою, яка дорівнює 1.

2. Головний об'єкт дослідження

Нехай (s_n) і (m_n) – послідовності натуральних чисел і (a_n) – така послідовність додатних дійсних чисел, що

$$\underbrace{a_1+\dots+a_1}_{s_1+1}+\underbrace{\frac{m_1-1}{m_1}a_1+\dots+\frac{m_1-1}{m_1}a_1}_{m_1}+$$

$$+\underbrace{a_2+\dots+a_2}_{s_2+1}+\underbrace{\frac{m_2-1}{m_2}a_2+\dots+\frac{m_2-1}{m_2}a_2}_{m_2}+\ldots+\underbrace{a_n+\dots+a_n}_{s_n+1}+$$

$$+\underbrace{\frac{m_n-1}{m_n}a_n+\dots+\frac{m_n-1}{m_n}a_n}_{m_n}+\tilde{r}_n=\sum_{k=1}^{\infty}d_k=r_0=1 \quad (2.1)$$

– збіжний додатний ряд, для якого виконується умова

$$\tilde{r}_n=\frac{2a_n}{m_n}, \qquad n=1,2,3,\dots, \quad (2.2)$$

де

$$\tilde{r}_n=\sum_{k=n+1+\sum_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}^{\infty}d_k=\sum_{i=n+1}^{\infty}(s_i+m_i)a_i,$$

а d_k – це k-ий елемент послідовності утвореної з членів ряду (2.1), тобто

$$\underbrace{a_1,\ \dots,\ a_1}_{s_1+1},\ \underbrace{\frac{m_1-1}{m_1}a_1,\ \dots,\ \frac{m_1-1}{m_1}a_1}_{m_1},$$

$$\underbrace{a_2,\ \dots,\ a_2}_{s_2+1},\ \underbrace{\frac{m_2-1}{m_2}a_2,\ \dots,\ \frac{m_2-1}{m_2}a_2}_{m_2},\ \dots,$$

$$\underbrace{a_n,\ \dots,\ a_n}_{s_n+1},\ \underbrace{\frac{m_n-1}{m_n}a_n,\ \dots\ \frac{m_n-1}{m_n}a_n}_{m_n},\ \dots$$

Зокрема,

$$d_1=\dots=d_{s_1+1}=a_1,$$

$$d_{s_1+2}=\dots=d_{s_1+m_1+1}=\frac{m_1-1}{m_1}a_1,$$

$$d_{s_1+m_1+2}=\dots=d_{s_1+m_1+s_2+2}=a_2,$$

$$d_{s_1+m_1+s_2+3}=\dots=d_{s_1+m_1+s_2+m_2+2}=\frac{m_2-1}{m_2}a_2,$$

і т.д. Зрозуміло, що при виконанні умови (2.2) послідовності (s_n) і (m_n) визначають члени ряду (2.1).

Теорема 2.1. *При виконанні умов* (2.1) *і* (2.2) *члени послідовності* (a_n) *мають вигляд*

$$a_n = \frac{2^{n-1} \cdot m_n}{\prod\limits_{k=1}^{n} (m_k^2 + s_k m_k + 2)}. \tag{2.3}$$

Доведення. Для $n = 1$ маємо

$$1 = (s_1 + 1)a_1 + (m_1 - 1)a_1 + \widetilde{r}_1 = (s_1 + m_1)a_1 + \frac{2a_1}{m_1}.$$

Звідки

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1^2 + s_1 m_1 + 2}.$$

Враховуючи означення $\widetilde{r}_n$ і рівність (2.2), маємо

$$\widetilde{r}_n = a_{n+1}(s_{n+1} + m_{n+1}) + \widetilde{r}_{n+1} = a_{n+1}(s_{n+1} + m_{n+1}) + \frac{2a_{n+1}}{m_{n+1}},$$

$$a_n = \frac{m_n \widetilde{r}_n}{2} = \frac{a_{n+1} m_n}{2} \left(s_{n+1} + m_{n+1} + \frac{2}{m_{n+1}} \right),$$

звідки

$$a_{n+1} = \frac{2m_{n+1}}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2} \cdot \frac{a_n}{m_n}. \tag{2.4}$$

Послідовно підставляючи вирази $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ з (2.4), отримуємо

$$a_{n+1} = \frac{2m_{n+1}}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2} \cdot \frac{a_n}{m_n} =$$

$$= \frac{2m_{n+1}}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2} \cdot \frac{1}{m_n} \cdot \frac{2m_n}{m_n^2 + s_n m_n + 2} \cdot \frac{a_{n-1}}{m_{n-1}} = \cdots$$

$$= \frac{2^n \cdot m_{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n+1} (m_i^2 + s_i m_i + 2)}.$$

Отже, має місце рівність (2.3). □

Наслідок 2.2. *Для членів та залишків ряду* (2.1) *мають місце наступні співвідношення:*

$$\widetilde{r}_n = \frac{2^n}{\prod_{k=1}^{n} (m_k^2 + s_k m_k + 2)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2m_{n+1}}{m_n(m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2)}, \qquad \frac{\widetilde{r}_{n+1}}{\widetilde{r}_n} = \frac{2}{m_{n+1}^2 + s_{n+1} m_{n+1} + 2}.$$

3. Задачі та результати

Нас цікавлять тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду (2.1) за умови, коли (s_n) і (m_n) – зростаючі послідовності натуральних чисел. Нижче ми доведемо, що множина неповних сум цього ряду містить відрізки, скориставшись простою ідеєю: *якщо множина неповних сум ряду є щільною у деякому відрізку, то цей відрізок повністю належить множині неповних сум в силу замкненості останньої*. З цією метою ми використовуватимемо поняття *ε-апроксимації множини*, яке успішно застосовувалось Цезарем Ференсом у роботі [3].

Нехай ε – деяке додатне число. Будемо казати, що множина $J \subset \mathbb{R}$ *ε-апроксимується множиною* $U \subset \mathbb{R}$, якщо

$$\forall x \in J \qquad \exists\ u \in U: \qquad 0 \leqslant x - u \leqslant \varepsilon. \tag{3.1}$$

Подвійна нерівність (3.1) рівносильна такій парі нерівностей:

$$x - \varepsilon \leqslant u \leqslant x \qquad \text{і} \qquad u \leqslant x \leqslant u + \varepsilon. \tag{3.2}$$

Тому

$$J \subset \bigcup_{u \in U} [u,\ u + \varepsilon]. \tag{3.3}$$

Введемо позначення:

$$\varepsilon_n \equiv \frac{a_n}{m_n} = \frac{\widetilde{r}_n}{2},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (s_k + 1 + m_k) = n + \sum_{k=1}^{n} (s_k + m_k),$$

$$l_n = (m_n - 3)a_n + \frac{2a_n}{m_n} = \frac{a_n}{m_n}(m_n^2 - 3m_n + 2) = \frac{a_n}{m_n}(m_n - 1)(m_n - 2),$$

$$L_n = (s_n + 3)a_n - \frac{2a_n}{m_n} = \frac{a_n}{m_n}(s_n m_n + 3m_n - 2),$$

$$D_n \equiv \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{S_n} \alpha_i d_i, \quad \alpha_i \in \{0, 1\} \right\}$$

– множина неповних сум частинної суми $d_1 + d_2 + \ldots + d_{S_n}$ ряду (2.1) рангу n.

Лема 3.1. *Множина E всіх підсум скінченного ряду*

$$\underbrace{m + m + \ldots + m}_{s+1} + \underbrace{(m-1) + (m-1) + \ldots + (m-1)}_{m}$$

містить множину

$$\mathbb{N} \cap [(m-1)(m-2),\ sm+3m-2],$$

де $s, m \in \mathbb{N}$ *та* $s \geqslant m-3$.

Доведення. Очевидно, що

$$\{0,\, m,\, 2m,\, (m-2)m,\, \ldots,\, (s+1)m\} + \\ + \{0,\, (m-1)m\} \;=\; \{0,\, m,\, \ldots,\, (s+m)m\} \;\subseteq\; E.$$

Якщо $m-2 \leqslant k \leqslant s+1$ і $1 \leqslant i \leqslant m-1$, то

$$km+i = (k+i+1-m)m + (m-i)(m+1) \in E,$$

а отже,

$$[(m-2)m, (s+2)m] \cap \mathbb{N} \subseteq E.$$

Якщо $1 \leqslant i \leqslant m-2$, то

$$(m-2)m - i = (m-2-i)m + i(m-1) \in E,$$

а тому,

$$[(m-2)(m-1), (m-2)m] \cap \mathbb{N} \subseteq E.$$

Нарешті, для $1 \leqslant i \leqslant m-2$ маємо, що

$$(s+2)m+i = (s+3+i-m)m + (m-i)(m-1) \in E,$$

а значить $[(s+2)m, sm+3m-2] \cap \mathbb{N} \subseteq E$. □

Лема 3.2. *Для довільного* $d \in D_n$ *відрізок*

$$[d + l_{n+1},\ d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

ε_{n+1}*-апроксимується множиною* D_{n+1} *за умови* $s_n \geqslant m_n - 3$.

Доведення. Нехай $y \in D_{n+1}$. Тоді

$$y = \sum_{i=1}^{S_{n+1}} \alpha_i d_i = \Big(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_1 + \cdots + \alpha_{s_1+1} a_1 + \\ + \alpha_{s_1+2}\frac{m_1-1}{m_1} a_1 + \cdots + \alpha_{s_1+m_1+1}\frac{m_1-1}{m_1} a_1\Big) + \cdots + \\ + \Big(\alpha_{n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)} a_n + \alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)} a_n + \cdots + \\ + \alpha_{n+s_n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)} \frac{m_n-1}{m_n} a_n + \cdots\Big) +$$

$$+\Big(\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}a_{n+1}+\alpha_{n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}a_{n+1}+\dots+$$

$$+\alpha_{n+s_n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}\frac{m_{n+1}-1}{m_{n+1}}a_{n+1}+\dots+$$

$$+\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n+1}(s_i+m_i)}\frac{m_{n+1}-1}{m_{n+1}}a_{n+1}\Big)=$$

$$=\frac{a_1}{m_1}\big(\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_1+\dots+\alpha_{s_1+1}m_1+$$

$$+\alpha_{s_1+2}(m_1-1)+\dots+\alpha_{s_1+m_1+1}(m_1-1)\big)+\dots+$$

$$+\frac{a_n}{m_n}\Bigg(\alpha_{n+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}m_n+\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}m_n+\dots+$$

$$+\alpha_{n+s_n+1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}(s_i+m_i)}(m_n-1)+\cdots\Bigg)+$$

$$+\frac{a_{n+1}}{m_{n+1}}\Bigg(\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}m_{n+1}+\alpha_{n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}m_{n+1}+\dots+$$

$$+\alpha_{n+s_n+2+\sum\limits_{i=1}^{n}(s_i+m_i)}(m_{n+1}-1)+\dots+$$

$$\alpha_{n+1+\sum\limits_{i=1}^{n+1}(s_i+m_i)}(m_{n+1}-1)\Bigg)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\varepsilon_i+\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1}=d+\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1},$$

де

$$d=\sum_{i=1}^{n}\theta_i\varepsilon_i\in D_n\subset D_{n+1},\qquad \varepsilon_n=\frac{a_n}{m_n},\qquad \theta_n\in A_n,$$

A_n – множина всіх неповних сум скінченного ряду

$$\underbrace{m_n+m_n+\ldots+m_n}_{s_n+1}+\underbrace{(m_n-1)+(m_n-1)+\ldots+(m_n-1)}_{m_n}.$$

І навпаки, якщо число y має вигляд

$$y=d+\theta_{n+1}\varepsilon_{n+1},$$

де $\theta_{n+1}\in A_{n+1}$, то $y\in D_{n+1}$.

Оскільки, згідно з лемою 3.1, має місце

$$
\begin{aligned}
&[d + l_{n+1}, d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}] = \\
&= [d + (m_{n+1}(m_{n+1} - 3) + 2)\varepsilon_{n+1},\ d + (m_{n+1}(m_{n+1} + 3) - 1)\varepsilon_{n+1}] \subset \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \subset \bigcup_{d \in D_{n+1}} [d; d + \varepsilon_{n+1}],
\end{aligned}
$$

то згідно з (3.3), відрізок

$$[d + l_{n+1};\ d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1}. Лему доведено. □

Лема 3.3. *Якщо $s_n \geqslant 3m_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то відрізок*

$$\Big[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\Big]$$

ε_n-апроксимується множиною D_n.

Доведення. Доведемо твердження за індукцією.

При $n = 0$ множина D_0 складається з однієї точки 0 і згідно з лемою 3.2, відрізок $[l_1,\ L_1 + \varepsilon_1]$ ε_1-апроксимується множиною D_1, а тому і відрізок $\left[l_1,\ \frac{1}{2}\right]$ також ε_1-апроксимується множиною D_1, оскільки

$$\frac{1}{2} \leqslant L_1 + \varepsilon_1.$$

Справді,

$$L_1 + \varepsilon_1 > L_1 = \frac{a_1}{m_1}(s_1 m_1 + 3m_1 - 2) = \frac{s_1 m_1 + 3m_1 - 2}{s_1 m_1 + m_1^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_1(s_1 - m_1) + 6(m_1 - 1)}{s_1 m_1 + m_1^2 + 2}\right) > \frac{1}{2}.$$

Припустимо, що відрізок $\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\Big]$ ε_n-апроксимується множиною D_n. Тоді для довільної точки $x \in \Big[\sum\limits_{k=1}^{n+1} l_k,\ \frac{1}{2}\Big]$ з нерівності

$$x \geqslant \sum_{k=1}^{n} l_k + l_{n+1}$$

випливає, що

$$x - l_{n+1} \in \Big[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2} - l_{n+1}\Big] \subset \Big[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\Big].$$

Згідно з припущенням і властивістю (3.3), ми можемо вказати таке $d \in D_n$, при якому з включення

$$x - l_{n+1} \in [d, d + \varepsilon_n]$$

випливає

$$x \in [d + l_{n+1}, d + l_{n+1} + \varepsilon_n].$$

Для завершення доведення леми достатньо довести, що при

$$s_{n+1} \geqslant 3m_{n+1}$$

має місце включення:

$$[d + l_{n+1}, d + l_{n+1} + \varepsilon_n] \subset [d + l_{n+1}, d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

або, що те ж саме,

$$l_{n+1} + \varepsilon_n \leqslant L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}.$$

Зауважимо, що згідно з наслідком 2.2

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = \frac{\widetilde{r}_n}{\widetilde{r}_{n+1}} = \varepsilon_{n+1}\frac{m_{n+1}^2 + s_{n+1}m_{n+1} + 2}{2}.$$

Тому при $s_{n+1} \geqslant 3m_{n+1}$ маємо

$$\begin{aligned}
&L_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - (l_{n+1} + \varepsilon_n) = \\
&\qquad = \varepsilon_{n+1}\Big(s_{n+1}m_{n+1} + 3m_{n+1} - 1 - m_{n+1}^2 + 3m_{n+1} - \\
&\qquad\qquad\qquad - 2 - \frac{m_{n+1}^2 + s_{n+1}m_{n+1} + 2}{2}\Big) = \\
&\qquad = \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}(s_{n+1}m_{n+1} - 3m_{n+1}^2 + 12m_{n+1} - 8) = \\
&\qquad = \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}(m_{n+1}(s_{n+1} - 3m_{n+1}) + 12m_{n+1} - 8) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Згідно з лемою 3.2, відрізок

$$[d + l_{n+1}, d + L_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1}, а тому й відрізок

$$[d + l_{n+1}; d + l_{n+1} + \varepsilon_n]$$

ε_{n+1}-апроксимується множиною D_{n+1}. Лему доведено. □

Теорема 3.4. *Множина $E\{d_n\}$ містить відрізок*

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} l_k, \quad 1 - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\right].$$

Доведення. Покажемо, що

$$E\{d_n\} \supseteq \left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n,\ \frac{1}{2}\right].$$

Оскільки

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} l_k,\ \frac{1}{2}\right] \subseteq \left[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\right]$$

і $D_n \subseteq E\{d_n\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то з леми 3.3 випливає, що відрізок

$$\left[\sum_{k=1}^{n} l_k,\ \frac{1}{2}\right]$$

ε_n-апроксимується множиною $E\{d_n\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $\varepsilon_n = \frac{1}{2}\widetilde{r}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тому множина $E\{d_n\}$ є щільною у відрізку $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k,\ \frac{1}{2}\right]$, тобто

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n,\ \frac{1}{2}\right] \subseteq E\{d_n\}.$$

Теорему доведено. □

Лема 3.5. [11] *Якщо $d_k > r_k$ для деякого індексу k, тоді інтервал (r_k, d_k) є суміжним інтервалом до множини неповних сум $E\{d_n\}$, тобто*

1) $r_k \in E\{d_n\}$, $d_k \in E\{d_n\}$;
2) $(r_k, d_k) \cap E\{d_n\} = \varnothing$.

Теорема 3.6. *Якщо відрізок*

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n,\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} l_n\right]$$

непорожній, $s_n \geqslant 3m_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\varlimsup\limits_{n\to\infty} m_n \geqslant 4$, то множина $E\{d_n\}$ є симетричним канторвалом.

Доведення. Згідно з теоремою 1.2 множина $E\{d_n\}$ належить до одного з трьох "топологічних типів". Тому для доведення того, що вона є канторвалом покажемо, що $E\{d_n\}$ не належить до двох інших.

Множина $E\{d_n\}$ не є гомеоморфною множині Кантора, оскільки згідно з теоремою 3.4 містить відрізок

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} l_k,\ 1-\sum_{k=1}^{\infty} l_k\right].$$

Покажемо, що $E\{d_n\}$ не є скінченним об'єднанням відрізків. Припустимо супротивне: $E\{d_n\}$ є скінченним об'єднанням відрізків, тобто

$$E\{d_n\} = [0, c_1] \cup [c_2, c_3] \cup \ldots \cup [c_n, 1],$$

де

$$0 < c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant \ldots \leqslant c_n < 1.$$

Виберемо номер k так, що $a_k < c_1$ і $m_k \geqslant 4$. Тоді

$$0 < \widetilde{r}_k = \frac{2a_k}{m_k} < \frac{m_k - 1}{m_k} a_k < c_1.$$

Оскільки, згідно з лемою 3.5 інтервал $(\widetilde{r}_k, a_k)$ буде суміжним інтервалом до множини $E\{d_n\}$, то з цього випливає, що множина неповних сум $E\{d_n\}$ не містить відрізок $[0, c_1]$, що суперечить нашому припущенню. Тому $E\{d_n\}$ не є скінченним об'єднанням відрізків.

Отже, множина $E\{d_n\}$ є симетричним канторвалом. □

Теорема 3.7. *Для довільного $\varepsilon > 0$ існують послідовності (s_n), (m_n), і (a_n) такі, що виконуються наступні умови:*

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = 1$;

(2) $\widetilde{r}_n = \dfrac{2a_n}{m_n}$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$, *де* $\widetilde{r}_n = \sum\limits_{k>n} (s_k + m_k)a_k$;

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{d_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n} = \infty$;

(4) *множина $E\{d_n\}$ є канторвалом, міра Лебега якого є більшою за $1-\varepsilon$.*

Доведення. Візьмемо довільну строго зростаючу послідовність (m_n) і виберемо послідовність (s_n) таку, що

$$s_n \geqslant 3m_n \quad \text{і} \quad \frac{(m_n - 1)(m_n - 2)}{m_n(s_n + m_n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тепер для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$l_n = \frac{a_n}{m_n}(m_n - 1)(m_n - 2) = a_n(s_n + m_n)\frac{(m_n - 1)(m_n - 2)}{m_n(s_n + m_n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(s_n + m_n).$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2}(s_n + m_n) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n + m_n) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже,

$$\lambda(E\{a_n\}) > \lambda\left(\left[\sum_{n=1}^{\infty} l_n,\ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} l_n\right]\right) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} l_n \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Теорему доведено. □

Література

[1] T. Banakh, A. Bartoszewicz, S. Glab, E. Szymonik. Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1. *Colloq. Math.*, 129(1):75–85, 2012, doi: 10.4064/cm129-1-5.

[2] Wojciech Bielas, Szymon Plewik, Marta Walczyńska. On the center of distances. *Eur. J. Math.*, 4(2):687–698, 2018, doi: 10.1007/s40879-017-0199-4.

[3] C. Ferens. On the range of purely atomic probability measures. *Studia Math.*, 77(3):261–263, 1984, doi: 10.4064/sm-77-3-261-263.

[4] J. Guthrie, J. Nymann. The topological structure of the set of subsums of an infinite series. *Colloq. Math.*, 55(2):323–327, 1988, doi: 10.4064/cm-55-2-323-327.

[5] H. Hornich. Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter Reihen. *Monatsh. Math. Phys.*, 49:316–320, 1941, doi: 10.1007/BF01707309.

[6] Rafe Jones. Achievement sets of sequences. *Amer. Math. Monthly*, 118(6):508–521, 2011, doi: 10.4169/amer.math.monthly.118.06.508.

[7] S. Kakeya. On the set of partial sums of an infinite series. *Tôhoku Sci Rep.*, (4):159–163, 1914, doi: 10.11429/ptmps1907.7.14_250.

[8] P. Mendes, F. Oliveira. On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets. *Nonlinearity*, 7(2):329–343, 1994, doi: 10.1088/0951-7715/7/2/002.

[9] P. Menon. On a class of perfect sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:706–711, 1948, doi: 10.1090/S0002-9904-1948-09060-7.

[10] J. Nymann, R. Sáenz. On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series. *Colloq. Math.*, 83(1):1–4, 2000, doi: 10.4064/cm-83-1-1-4.

[11] F. Prus-Wiśniowski. Beyond the sets of subsums.

[12] B. Solomyak. On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdos problem). *Ann. of Math. (2)*, 142(3):611–625, 1995, doi: 10.2307/2118556.

[13] P. Varjú. Recent progress on Bernoulli convolutions. In *European Congress of Mathematics*, pages 847–867. Eur. Math. Soc., Zürich, 2018, doi: 10.17863/CAM.17352.

[14] T. Šalát. Hausdorff measure of linear sets. *Czechoslovak Math. J.*, 11 (86):24–56, 1961.

[15] Tibor Šalát. Absolut konvergente Reihen und das Hausdorffsche Mass. *Czechoslovak Math. J.*, 9(84):372–389, 1959.

[16] А. Д. Вайнштейн, Б. З. Шапиро. О строении множества α-представимых чисел. *Изв. вузов. Матем.*, (5):8–11, 1980.

[17] Я. В. Гончаренко. Згортки розподілів сум випадкових рядів спеціального виду. *Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*, (4):216–232, 2003.

[18] Я. В. Гончаренко, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. Тополого-метричні і фрактальні властивості множини неповних сум знакододатного ряду та розподілів на ній. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*, (6):210–224, 2005.

[19] Я. В. Гончаренко, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі. *Теор. ймовірност. матем. статист.*, 79:34–49, 2008.

[20] Н. О. Корсунь, М. В. Працьовитий. Про множину неповних сум знакододатних рядів з однією умовою однорідності та узагальнення двійкового зображення чисел. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки*, (10):28–39, 2009.

[21] М. В. Працьовитий. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998.

Я. Ф. Виннишин

Природничо-науковий ліцей №145 м. Києва

Email: ucrcon@bigmir.net

В. П. Маркітан

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Email: v.p.markitan@npu.edu.ua

М. В. Працьовитий

Інститут математики НАН України, Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Email: prats4444@gmail.com

І. О. Савченко

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Email: igorsav4enko@ukr.net

Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 12, no. 2 (2019) pp. 43–61

On fractal properties of Weierstrass-type functions

Claire David

Abstract. In the sequel, starting from the classical Weierstrass function defined, for any real number x, by $\mathcal{W}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(2\pi N_b^n x)$, where λ and N_b are two real numbers such that $0 < \lambda < 1$, $N_b \in \mathbb{N}$ and $\lambda N_b > 1$, we highlight intrinsic properties of curious maps which happen to constitute a new class of iterated function system. Those properties are all the more interesting, in so far as they can be directly linked to the computation of the box dimension of the curve, and to the proof of the non-differentiabilty of Weierstrass type functions.

Анотація. Метою даної роботи є узагальнення попередніх результатів автора про класичну функцію Вейерштрасса та її графік. Його можна отримати як границю послідовності префракталів, тобто графів, отриманих за допомогою ітераційної системи функцій, які, як правило, не є стискаючими відображеннями. Натомість вони мають в деякому сенсі еквівалентну властивість до стискаючих відображень, оскільки на кожному етапі ітераційного процесу, який дає змогу отримати префрактали, вони зменшують двовимірні міри Лебега заданої послідовності прямокутників, що покривають криву. Такі системи функцій відіграють певну роль на першому кроці процесу побудови підкови Смейла. Вони можуть бути використані для доведення недиференційованості функції Вейєрштрасса та обчислення box-розмірності її графіка, а також для побудови більш широких класів неперервних, але ніде не диференційовних функцій. Останнє питання ми вивчатимемо в подальших роботах.

2010 Mathematics Subject Classification: 37F20, 28A80, 05C63
Keywords: Weierstrass function; non-differentiability; iterative function systems
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v12i2.1485

Introduction

In his seminal paper of 1981, J. E. Hutchinson [8] introduces, for the first time, what will be later qualified of “iterated function system” (I.F.S.), as a finite set of contraction maps, each defined on a compact metric set K of the euclidean space $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathcal{S} = \{T_1, \ldots, T_N\}\,, \quad N \in \mathbb{N}^\star$$

where $\mathbb{N}^\star$ denotes the set of strictly positive integers, such that

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} T_i(K)$$

The compact set K is then said to be “invariant” with respect to the set $\mathcal{S}$ (one often refer to this result as the “Gluing Lemma”).

A prequel occurence of such maps, under the form of similitudes, can already be found in the Mandelbrot books of 1977 [11], [12].

Hutchinson’s novelty is to consider not the compact K itself, but the set $\mathcal{S}$, which arises naturally, in so far as the invariant compact K is fully determined by the set $\mathcal{S}$, and, interestingly, is also the limit of a sequence of pre-fractal graphs that can be built, in an iterative way, thanks to the maps that constitute the set $\mathcal{S}$.

Following this work, iterated function systems were taken up and even more developed by M. F. Barnsley et al. [2], as “a unified way of generating and classifying a broad class of fractals”. As explained by the authors, fractals were “traditionally viewed as being produced by a process of successive microscopic refinement taken to the limit”, which, of course, makes sense with the geometric representation one may have of fractal sets, since, when looking at smaller and smaller scales, one finds, again and again, the same form. Of course, at stake are specific and classical types of fractals, as Sierpiński gaskets, dragon curves, Cantor sets, Julia curves, etc. For M. F. Barnsley and S. Demko, those fractals are to be seen as the attractors of iterated function systems, which, of course, joins the approach of J. E. Hutchinson.

M. F. Barnsley and S. Demko place themselves in a probabilistic approach. Given still a compact metric space K, the related Banach space $C(K)$ of real-valued functions defined on K, with respect to the norm

$$f \in C(K) \mapsto \|f\|_\infty = \max\,\{|f(x)|, x \in K\}$$

and a finite collection

$$w = \{w_1, \ldots, w_N\}\,, \quad N \in \mathbb{N}^\star$$

of Borel measurable functions from K to K, they define the set $\{K, w\}$ as an iterated function system if and only if there exists an associated set of positive real numbers

$$\{p_1,\ldots,p_N\}\,,\quad \forall\, i\in\{1,\ldots,N\}\,:\,p_i>0,\quad \sum_{i=1}^{N}p_i=1$$

such that the operator T on $C(K)$, given, for any f of $C(K)$, by

$$\forall\, x\in K:\quad T(f)(x)=\sum_{i=1}^{N}p_i\,(f\circ w_i)(x)$$

has the property:

$$T(C(K))\subset C(K).$$

Treating w as a set-valued function, through

$$\forall\, x\in K:\quad w(x)=\{w_1(x),\ldots,w_N(x)\}$$

they then naturally introduce, for the i.f.s. $\{K,w\}$, and a given x of K, the related attractor

$$\mathcal{A}(x)=\lim_{n\to+\infty}w^{\circ^n}(x)$$

in the sense:

$$\lim_{n\to+\infty}\|w^{\circ^n}(x)-\mathcal{A}(x)\|_\infty=0.$$

Classical fractal sets as, for instance, the Sierpiński Gasket, fit this definition.

In our previous work on the Weierstrass curve [4], which, as exposed, for instance, by A. S. Besicovitch and H. D. Ursell [3], or, a few years later, by B. Mandelbrot [11], bears fractal properties, we showed that the curve could be obtained by means of a sequence a graphs $(\Gamma_{\mathcal{W}_m})_{m\in\mathbb{N}}$, that approximate the studied one. This is done using a family of nonlinear C^∞ maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$, which happen not to be contractions, in the aforementioned classical sense. The nonlinearity does not enable one to resort to the probabilistic approach of M. F. Barnsley and S. Demko, since there does not exist a constant associated set of probabilities. Yet, even if they are not contractions, our maps bear what can be viewed as an equivalent property, since, at each step of the iterative process, they reduce the two-dimensional Lebesgue measures of a given sequence of rectangles covering the curve. This is due to the fact that they correspond, in a sense, to the composition of a contraction of ratio r_x in the horizontal direction, and a dilatation of factor r_y in the vertical one, with

$$r_x\,r_y<1.$$

Such maps are considered in the book of Robert L. Devaney [6], where they play a part in the first step of the horseshoe map process introduced by Stephen Smale.

The Weierstrass curve is invariant with respect to the set of those maps, which makes it possible to dispose of an equivalent result of the Gluing Lemma. But what deserves to be enlightened, in our case, is that the intrinsic properties of those curious maps make them all the more interesting, in so far as they can be directly linked to the computation of the box dimension of the curve, and to the proof of the non-differentiabilty of the Weierstrass function, as shown in [5]. All the more is the generalization to a broader class of applications that could, then, enable one to build everywhere continuous, though nowhere differentiable, functions, as we will expose it in the sequel.

1. The case of the Weierstrass function

Notation 1.1. In the following, λ and b are two real numbers such that:

$$0 < \lambda < 1, \qquad b = N_b \in \mathbb{N}, \qquad \lambda\, N_b > 1.$$

We deliberatly made the choice to introduce the notation N_b which replaces the initial b, in so far as, to the origins, b is any real number, whereas we deal with the specific case of a natural integer that we consequently choose to denote by N_b, as an echo to the initial b.

The Weierstrass function, introduced in 1875 by K. Weierstrass [13], known as one of these so-called pathological mathematical objects, continuous everywhere, while nowhere differentiable, is the sum of the uniformly convergent trigonometric series, defined, for any real number x, by:

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos\left(2\pi N_b^n x\right).$$

Definition 1.2. (Weierstrass Curve). We will call *Weierstrass Curve* the restriction to $[0,1) \times \mathbb{R}$, of the graph of the Weierstrass function, and denote it by $\Gamma_{\mathcal{W}}$.

Theoretical study. We place ourselves, in the following, in the euclidian plane of dimension 2, referred to a direct orthonormal frame. The usual Cartesian coordinates are (x, y).

Property 1.3. (Periodic properties of the Weierstrass function). For any real number x:

$$\mathcal{W}(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos\left(2\pi N_b^n x + 2\pi N_b^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos\left(2\pi N_b^n x\right) = \mathcal{W}(x).$$

The study of the Weierstrass function can be restricted to the interval $[0,1)$.

By following the method developed by J. Kigami [10], we approximate the restriction $\Gamma_{\mathcal{W}}$ to $[0,1) \times \mathbb{R}$, of the Weierstrass Curve, by a sequence of graphs, built through an iterative process. To this purpose, we introduce the iterated function system of the family of C^∞ maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$:

$$\{T_0, \ldots, T_{N_b-1}\}$$

where, for any integer i belonging to $\{0, \ldots, N_b - 1\}$ and any (x, y) of $\mathbb{R}^2$:

$$T_i(x, y) = \left(\frac{x+i}{N_b},\ \lambda\, y + \cos\left(2\pi\, \frac{x+i}{N_b}\right)\right).$$

Property 1.4. [4]. $\Gamma_{\mathcal{W}} = \bigcup\limits_{i=0}^{N_b-1} T_i(\Gamma_{\mathcal{W}})$.

Definition 1.5. (Word on the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$). Let m be a strictly positive integer. We will call *number-letter* any integer $\mathcal{M}_i$ of $\{0, \ldots, N_b - 1\}$, and *word of length* $|\mathcal{M}| = m$, on the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$, any set of number-letters of the form:

$$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m).$$

We will write:

$$T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}_1} \circ \cdots \circ T_{\mathcal{M}_m}.$$

Definition 1.6. For any integer i belonging to $\{0, ..., N_b - 1\}$, let us denote by:

$$P_i = (x_i, y_i) = \left(\frac{i}{N_b-1},\ \frac{1}{1-\lambda}\, \cos\left(\frac{2\pi i}{N_b-1}\right)\right)$$

the fixed point of the map T_i.

We will denote by V_0 the ordered set (according to increasing abscissa), of the points:

$$\{P_0, ..., P_{N_b-1}\}$$

since for any i of $\{0, \ldots, N_b - 2\}$:

$$x_i \leqslant x_{i+1}.$$

The set of points V_0, where, for any i of $\{0, \ldots, N_b - 2\}$, the point P_i is linked to the point P_{i+1}, constitutes an oriented graph (according to increasing abscissa), which we will denote by $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$. In turn, V_0 is called the *set of vertices* of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$.

For any natural integer m, we set:

$$V_m = \bigcup_{i=0}^{N_b-1} T_i\left(V_{m-1}\right).$$

The set of points V_m, where two consecutive points are linked, is an oriented graph (according to increasing abscissa), which we will denote by $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$. Again V_m is called the *set of vertices* of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$. In what follows we will denote by $\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}$ the number of vertices of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, and write:

$$V_m = \left\{ \mathcal{S}_0^m, \mathcal{S}_1^m, \ldots, \mathcal{S}_{\mathcal{N}_m^{\mathcal{S}}-1}^m \right\}.$$

Property 1.7. For any natural integer m:

$$V_m \subset V_{m+1}.$$

Property 1.8. For any integer i belonging to $\{0, \ldots, N_b - 2\}$:

$$T_i\left(P_{N_b-1}\right) = T_{i+1}\left(P_0\right).$$

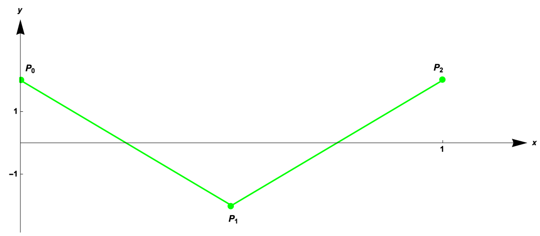


FIGURE 1.1. Fixed points P_0, P_1, P_2, and the graph $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$, in the case when $\lambda = \frac{1}{2}$ and $N_b = 3$.

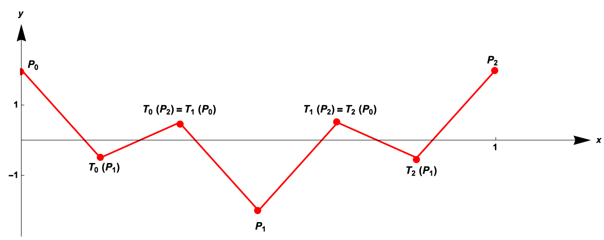


FIGURE 1.2. Graph $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$, in the case when $\lambda = \frac{1}{2}$, $N_b = 3$, $T_0(P_2) = T_1(P_0)$, and $T_1(P_2) = T_2(P_1)$.

Definition 1.9. (Vertices of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$). Two points X and Y of $\Gamma_{\mathcal{W}}$ will be called *vertices* of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$ if there exists a natural integer m such that:

$$(X, Y) \in V_m^2$$

Definition 1.10. (Consecutive vertices on the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$). Two points X and Y of $\Gamma_{\mathcal{W}}$ will be called *consecutive vertices* of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$ if there exist a natural integer m, and an integer j of $\{0, \ldots, N_b - 2\}$, such that:

$$\begin{cases} X = \left(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_m}\right)\left(P_j\right) \\ Y = \left(T_{i_1} \circ \ldots \circ T_{i_m}\right)\left(P_{j+1}\right) \end{cases} \qquad \{i_1, \ldots, i_m\} \in \{0, \ldots, N_b - 1\}^m$$

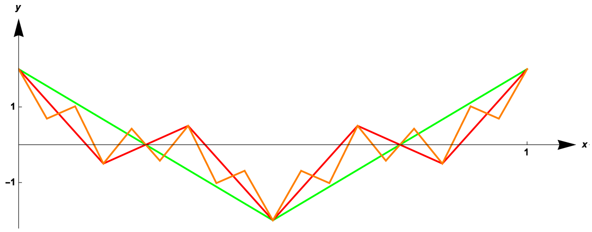


FIGURE 1.3. Graphs $\Gamma_{\mathcal{W}_0}$ (in green), $\Gamma_{\mathcal{W}_1}$ (in red), $\Gamma_{\mathcal{W}_2}$ (in orange), $\Gamma_{\mathcal{W}}$ (in cyan), in the case where $\lambda = \frac{1}{2}$ and $N_b = 3$.

or:

$$X = (T_{i_1} \circ T_{i_2} \circ \ldots \circ T_{i_m})(P_{N_b-1}), \qquad Y = (T_{i_1+1} \circ T_{i_2} \ldots \circ T_{i_m})(P_0).$$

Property 1.11. The set $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} V_m$ is dense in $\Gamma_{\mathcal{W}}$.

Definition 1.12. (Edge relation, on the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$). Given a natural integer m, two points X and Y of $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$ will be called *adjacent* if and only if X and Y are two consecutive vertices of $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$. We will write:

$$X \underset{m}{\sim} Y$$

This edge relation ensures the existence of a word $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m)$ of length m, such that X and Y both belong to the iterate:

$$T_{\mathcal{M}}\, V_0 = (T_{\mathcal{M}_1} \circ \cdots \circ T_{\mathcal{M}_m})\; V_0$$

Given two points X and Y of the graph $\Gamma_{\mathcal{W}}$, we will say that X and Y are *adjacent* if and only if there exists a natural integer m such that:

$$X \underset{m}{\sim} Y$$

Proposition 1.13 (Adresses, on the Weierstrass Curve)**.** *Given a strictly positive integer m, and a word $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m)$ of length $m \in \mathbb{N}^\star$, on the graph $\Gamma_{\mathcal{W}_m}$, for any integer j of $\{1, \ldots, N_b - 2\}$, any $X = T_{\mathcal{M}}(P_j)$ of $V_m \backslash V_0$, i.e. distinct from one of the N_b fixed point P_i, $(0 \leqslant i \leqslant N_b - 1)$, has exactly two adjacent vertices, given by:*

$$T_{\mathcal{M}}(P_{j+1}) \quad \text{and} \quad T_{\mathcal{M}}(P_{j-1})$$

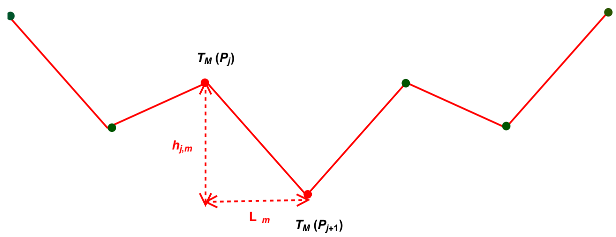
where:

$$T_{\mathcal{M}} = T_{\mathcal{M}_1} \circ \cdots \circ T_{\mathcal{M}_m}.$$

By convention, the adjacent vertices of $T_{\mathcal{M}}(P_0)$ are $T_{\mathcal{M}}(P_1)$ and $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-1})$, those of $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-1})$, $T_{\mathcal{M}}(P_{N_b-2})$ and $T_{\mathcal{M}}(P_0)$.

Notation 1.14. *For any integer j belonging to $\{0,\ldots,N_b-1\}$, any natural integer m, and any word $\mathcal{M}$ of length m, we set:*

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{M}}(P_j) &= (x(T_{\mathcal{M}}(P_j)), y(T_{\mathcal{M}}(P_j))), \\ L_m &= x(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) - x(T_{\mathcal{M}}(P_j)) = \frac{1}{(N_b-1)\,N_b^m} \\ h_{j,m} &= y(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}}(P_j)). \end{aligned}$$



Notation 1.15. *We will denote by*

$$D_{\mathcal{W}} = 2 + \frac{\ln\lambda}{\ln N_b}$$

the Hausdorff dimension of $\Gamma_{\mathcal{W}}$, see [1], [9].

Theorem 1.16 (An upper bound and a lower bound, for the box-dimension of the Weierstrass Curve)**.** [4] *For any integer j belonging to*

$$\{0,1,\ldots,N_b-2\},$$

each natural integer m, and each word $\mathcal{M}_m$ of length m, let us consider the rectangle $\mathcal{R}_{j,m,\mathcal{M}_m}$, whose sides are parallel to the horizontal and vertical axes, of width:

$$L_m = x(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - x(T_{\mathcal{M}_m}(P_j)) = \frac{1}{(N_b-1)\,N_b^m}$$

and height $|h_{j,m}|$, such that the points $T_{\mathcal{M}_m}(P_j)$ and $T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})$ are two vertices of this rectangle. We set:

$$\eta_{\mathcal{W}} = 2\pi^2 \left\{ \frac{(2N_b-1)\lambda(N_b^2-1)}{(N_b-1)^2(1-\lambda)(\lambda N_b^2-1)} + \frac{2N_b}{(\lambda N_b^2-1)(\lambda N_b^3-1)} \right\}.$$

$$C_1(N_b) = \begin{cases} (N_b-1)^{2-D_{\mathcal{W}}} \left\{ \frac{2}{1-\lambda} \sin\left(\frac{\pi}{N_b-1}\right) \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant N_b-1} \left| \sin\left(\frac{\pi(2\,j+1)}{N_b-1}\right) \right| - \frac{2\pi}{N_b\,(N_b-1)}\,\frac{1}{\lambda N_b-1} \right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{if } N_b \textit{ is odd,} \\ (N_b-1)^{2-D_{\mathcal{W}}} \max\left\{ \frac{2}{1-\lambda} \sin\left(\frac{\pi}{N_b-1}\right) \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant N_b-1} \left| \sin \frac{\pi(2j+1)}{N_b-1} \right| - \right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{2\pi}{N_b(N_b-1)}\,\frac{1}{\lambda N_b-1},\ \frac{4}{N_b^2}\,\frac{1-N_b^{-2}}{N_b^2-1} \right\}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{if } N_b \textit{ is even.} \end{cases}$$

and:

$$C_2(N_b) = \eta_{\mathcal{W}}(N_b-1)^{2-D_{\mathcal{W}}}.$$

Then:

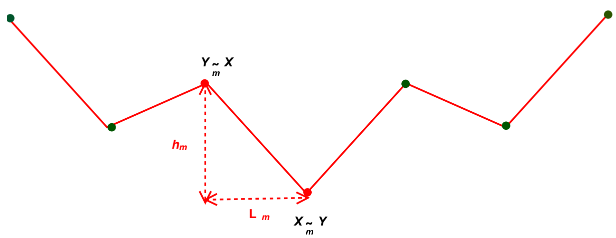
$$C_1(N_b)\,L_m^{2-D_{\mathcal{W}}} \leqslant |h_{j,m}| \leqslant C_2(N_b)\,L_m^{2-D_{\mathcal{W}}}.$$

Notation 1.17. *Given a natural integer m, we set:*

$$h_m = L_m^{2-D_{\mathcal{W}}} = \frac{N_b^{(D_{\mathcal{W}}-2)\,m}}{(N_b-1)^{2-D_{\mathcal{W}}}}.$$

Then the following inequality holds:

$$h_{jm} \leqslant h_m.$$



Corollary 1.18 (of Theorem 1.16)**.** *For any natural integer m, any integer j belonging to $\{0,1,\ldots,N_b-2\}$, and each word $\mathcal{M}_{m+1}$ of length $m+1$, the two-dimensional Lebesgue measure*

$$\mu_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{R}_{j,m+1,\mathcal{M}_{m+1}}\right)$$

of the rectangle $\mathcal{R}_{j,m+1,\mathcal{M}_{m+1}}$, is such that, for any integer k belonging to $\{0,1,\ldots,N_b-2\}$, any integer ℓ belonging to $\{0,1,\ldots,N_b-2\}$, and each word $\mathcal{M}_m$ of length m:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}_{j,m+1,\mathcal{M}_{m+1}}) < \mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}_{\ell,m,\mathcal{M}_m}).$$

Proof. Given a natural integer m, j in $\{0,1,\dots,N_b-2\}$, and a word $\mathcal{M}_{m+1}$ of length $m+1$, the two-dimensional Lebesgue measure of the rectangle $\mathcal{R}_{j,m+1,\mathcal{M}_{m+1}}$ can be obtained thanks to the values of the cartesian coordinates of the consecutive vertices $T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j)$ and $T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})$:

$$\mu_{\mathcal{L}}(\mathcal{R}_{j,m+1,\mathcal{M}_{m+1}}) = \Big(x(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})) - x(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j))\Big)\times \\ \times\Big|y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j))\Big|.$$

One may then write:

$$T_{\mathcal{M}_{m+1}} = T_k \circ T_{\mathcal{M}_m}, \quad k \in \{0,1,\dots,N_b-1\}$$

where $\mathcal{M}_m$ is a word of length m. Thus, due to:

$$y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})) = \lambda\, y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) + \cos\left(2\pi\left(\frac{x\big(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})\big)+k}{N_b}\right)\right)$$

$$y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j)) = \lambda\, y\left(T_{\mathcal{M}_m}\left(P_j\right)\right) + \cos\left(2\pi\left(\frac{x\big(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j)\big)+k}{N_b}\right)\right)$$

and:

$$x(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - x\left(T_{\mathcal{M}_m}\left(P_j\right)\right) = L_m \leqslant |y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))|$$

one has:

$$\begin{aligned}\Big|y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j))\Big| \leqslant& \\ &\leqslant \lambda\Big|y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\Big| + \\ &\qquad + \frac{2\pi}{N_b}\Big|x(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - x(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\Big| \\ &\leqslant \lambda\Big|y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\Big| + \frac{2\pi}{N_b}L_m \\ &\leqslant \left(\lambda + \frac{2\pi}{N_b}\right)\Big|y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\Big|\end{aligned}$$

which yields:

$$\begin{aligned}\mu_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{R}_{j,m+1,\mathcal{M}_{m+1}}\right) &= \frac{L_m}{N_b}\times\Big|y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_{m+1}}(P_j))\Big| \\ &\leqslant \frac{L_m}{N_b}\times\left\{\lambda\Big|y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\Big| + \frac{2\pi}{N_b}L_m\right\} \\ &\leqslant \frac{L_m}{N_b}\times\left(\lambda + \frac{2\pi}{N_b}\right)\Big|y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1})) - y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\Big|.\end{aligned}$$

Due to the symmetric roles played by the integers j and ℓ, one has just to prove the result for $j=\ell$. Since:

$$\mu_{\mathcal{L}}\left(\mathcal{R}_{j,m,\mathcal{M}_m}\right)=L_m\times\left|y(T_{\mathcal{M}_m}(P_{j+1}))-y(T_{\mathcal{M}_m}(P_j))\right|$$

and, due to $N_b\geqslant 3$, we get that

$$\frac{1}{N_b}\left(\lambda+\frac{2\pi}{N_b}\right)-1=\frac{1}{N_b^2}\Big\{\underbrace{\lambda N_b}_{<1}+2\pi-N_b^2\Big\}<0$$

which yield the expected result. □

2. A specific class of i.f.s.

Weierstrass-type functions have been previously studied, but under the Hausdorff dimension point of view. One may refer, for instance, to the study by B. R. Hunt [7], where the author considers functions defined, for any real number x, by:

$$W_\Theta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,g\left(b_n\,x+\theta_n\right)$$

where $\sum a_n$ is a positive and convergent series, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a positive and increasing sequence, $\Theta=(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a uniformly distribed sequence of numbers each belonging to $[0,1]$, and playing the part of arbitrary phases, g being a Lispchitz and 1-periodic function.

In the case where the following assumptions are satisfied:

(i) there exist two strictly positive real numbers ρ and σ such that:

$$1<\rho<\sigma,\quad\forall\,n\in\mathbb{N}:\quad\rho\,b_n\leqslant b_{n+1}\leqslant\sigma\,b_n$$

(ii) there exists D in $]1,2[$ such that:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln a_n}{\ln b_n}=D-2$$

(iii) there exist a positive integer p, a strictly positive real constant M, a constant ℓ in $(0,1)$, such that for all δ in $\left[\frac{\ell}{\sigma^p},\ell\right]$, and for any real number x chosen randomly according to a uniform distribution on $[0,1]$, the density function of:

$$x\mapsto g(x+\delta)-g(x)$$

has a $L^{\frac{p}{p-1}}$ norm at most equal to M.

B. R. Hunt [7] shows that for almost every Θ in $[0,1]^\infty$, the graph of W_Θ has Hausdorff dimension D. It happens that in the case of such functions, the Hausdorff dimension is equal to the box-dimension.

Yet, as concerns the lower bound estimate required to obtain the explicit value of the Hausdorff/box dimension, the author calls for strictly positive constants K and K' which, as in existing earlier works, are not given explicitely (see, in the Hunt study, [7, section 3., page 798]). Moreover, no relation is made with the non-differentiability of such functions.

One may also note that such functions cannot be described by means of a finite iterated function systems, which does not allow any use of the Gluing Lemma.

In addition, the fact that the author considers, very generally, Lispchitz functions g is not specifically justified. It is all the more interesting as evoked in the above since, if the functions g were contractant ones, one falls back more easily on classical configurations. In fact, one may just consider the limit case of functions satisfying a Lipschitz condition with a Lipschitz constant of value 1.

What seemed of interest to us was to generalize our results to, indeed, a class of Weierstrass-type functions, but defined through an iterated function system which would bear analogous properties of the maps T_i, $0 \leqslant i \leqslant N_b - 1$. First, the box-dimension can be obtained rather simply, without calling for theoretical background in dynamic systems theory, just by applying a similar method as in [4]. Then, one can also simply prove the non-differentiability of such functions, as in [5].

Notation 2.1. *In the sequel:*

(i) *N is a strictly positive integer, greater than 2;*

(ii) *T and M are strictly positive real numbers;*

(iii) *$(\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant N-1} \in \{0, \cdots, N-1\}^N$ and $(\beta_i)_{0 \leqslant i \leqslant N-1} \in \{0, \ldots, N-1\}^N$ are ordered sets of positive integers:*

$$\forall\, i \in \{0, \ldots, N-2\} : \quad \alpha_i \leqslant \alpha_{i+1}, \quad \beta_i \leqslant \beta_{i+1}$$

(iv) *ψ is a T-periodic, bounded function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ satisfying a Lipschitz condition;*

(v) *r_y is a real number such that:*

$$0 < r_y < 1, \quad r_y N > 1.$$

(vi) *We set:*

$$r_x = \frac{1}{N}.$$

(vii) *$\{\phi_0, \ldots, \phi_{N-1}\}$ and $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{N-1}\}$ are sets of affine contractive maps from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, of respective ratios r_x and r_y, defined, for any integer i of $\{0, \ldots, N-1\}$, and for any real number x:*

$$\phi_i(x) = r_x(x + \alpha_i), \qquad \varphi_i(x) = r_y(x + \beta_i).$$

(viii) *We denote by* $\{\psi_0, \ldots, \psi_{N-1}\}$ *the set of maps from* $\mathbb{R}$ *to* $\mathbb{R}$ *such that, for any integer* i *of* $\{0, \ldots, N-1\}$*:*

$$\psi_i = \psi \circ \phi_i.$$

Notation 2.2. *We introduce the set of maps from* $\mathbb{R}^2$ *to* $\mathbb{R}^2$

$$\{\widetilde{T}_0, \ldots, \widetilde{T}_{N-1}\}$$

such that, for any integer i *of* $\{0, \ldots, N-1\}$*, and any* (x, y) *of* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\widetilde{T}_i(x, y) = \big(\phi_i(x),\ \varphi_i(y) + \psi_i(x)\big).$$

Definition 2.3. We introduce the $\mathcal{W}$*-type function*, defined, for any real number x, by:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^n\, \psi(T N^n x).$$

Property 2.4. For any real number x, the series:

$$\widetilde{\mathcal{W}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^n \psi(T N^n x).$$

is convergent

Proof. One may simply note that for any real number x:

$$\left| r_y^n\, \psi(T N^n x) \right| \lesssim r_y^n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi(t)|$$

which yields the expected result, since $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} r_y^n$ is a geometric convergent series. □

Definition 2.5. We will call $\mathcal{W}$*-type curve* the restriction to $[0, T) \times \mathbb{R}$, of the graph of the $\mathcal{W}$-type function, and denote it by $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{W}}}$.

2.6. **Theoretical study.** We place ourselves, in the following, in the euclidian plane of dimension 2, referred to a direct orthonormal frame. The usual Cartesian coordinates are (x, y).

Property 2.7. For any integer i of $\{0, \ldots, N-1\}$, the map $\widetilde{T}_i$ admits a fixed point, that we will denote by $\widetilde{P}_i$:

$$\widetilde{P}_i = \left(\frac{\alpha_i}{N-1},\ \frac{\beta_i}{1 - r_y} + \frac{1}{1 - r_y}\, \psi_i\left(\frac{\alpha_i}{N-1} \right) \right).$$

Lemma 2.8. *For any integer* i *belonging to* $\{0, \ldots, N-1\}$*, the map* T_i *is a bijection of the Weierstrass-type curve on* $\mathbb{R}$*.*

Proof. Let us consider $i \in \{0, \dots, N\}$, a point $(y, \mathcal{W}(y))$ of $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{W}}}$, and let us look for a real number x such that:

$$T_i\big(x, \widetilde{\mathcal{W}}(x)\big) = \big(y, \widetilde{\mathcal{W}}(y)\big).$$

One has:

$$y = \phi_i(x) = r_x\,(x + \alpha_i)$$

which yields:

$$x = r_x^{-1}\,y - \alpha_i.$$

This enables one to obtain:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{W}}(x) = \mathcal{W}(r_x^{-1}\,y - \alpha_i) &= \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^n\,\psi\left(T N^{n+1}\,y - T\,\alpha_i\,N^n\,i\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^n\,\psi\left(T N^{n+1}\,y\right)\end{aligned}$$

due to the T-periodicity of the function ψ, which leads to:

$$\psi\left(T N^{n+1}\,y - T\,\alpha_i\,N^n\,i\right) = \psi\left(T N^{n+1}\,y\right)$$

since α_i, N and i are integers. Also:

$$\begin{aligned}\widetilde{T}_i\big(x, \widetilde{\mathcal{W}}(x)\big) &= \left(\phi_i(r_x^{-1}\,y - \alpha_i),\ \varphi_i(\widetilde{\mathcal{W}}(x)) + \psi_i(r_x^{-1}\,y - \alpha_i)\right) \\ &= \left(y, r_y \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^n\,\psi(T N^{n+1}\,y) + \psi(T\,y)\right) \\ &= \left(y, \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^{n+1}\,\psi(T N^{n+1}\,y) + \psi(T\,y)\right) \\ &= \left(y, \sum_{n=0}^{+\infty} r_y^n\,\psi(T N^n\,y)\right) \\ &= \left(y, \widetilde{\mathcal{W}}(y)\right).\end{aligned}$$

There exists thus a unique real number x such that:

$$T_i\big(x, \widetilde{\mathcal{W}}(x)\big) = \big(y, \widetilde{\mathcal{W}}(y)\big).$$

Lemms is completed. $\square$

Theorem 2.9 (An upper bound and a lower bound for the box-dimension of the Weierstrass-type Curve)**.** *For any $j \in \{0, 1, \dots, N-2\}$, each natural integer m, and each word $\mathcal{M}$ of length m, let us consider the rectangle, whose sides are parallel to the horizontal and vertical axes, of width:*

$$L_m = x(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) - x(T_{\mathcal{M}}(P_j)) = r_x^m$$

and height $|h_{j,m}|$, such that the points $T_{\mathcal{M}}(P_j)$ and $T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})$ are two vertices of this rectangle. We set:

$$C_1(N) = \tfrac{1}{1-r_y} \min_{0\leqslant j\leqslant N-1} \Big\{(\beta_{i+1}-\beta_i) + \big\{\psi_{i+1}\big(\tfrac{\alpha_{i+1}}{N-1}\big) - \psi_i\big(\tfrac{\alpha_i}{N-1}\big)\big\}\Big\} - \\ - \frac{r_x}{r_y}\,\frac{1}{1-\frac{r_x}{r_y}}\,\frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{N-1},$$

and:

$$C_2(N) = \frac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{1}{1-r_y}\left|\frac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \frac{\alpha_j}{N-1}\right| + \frac{|\alpha_{j+1}-\alpha_j|}{N\,(r_y-r_x)}.$$

If:

$$C_1(N) \geqslant 0$$

one has:

$$C_1(N)\,L_m^{2-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}} \leqslant |h_{j,m}| \leqslant C_2(N)\,L_m^{2-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}}.$$

where:

$$D_{\widetilde{\mathcal{W}}} = 2 + \frac{\ln r_y}{\ln N}.$$

which yields the fractal character of the Weierstrass-type Curve, the box-dimension of which is then $D_{\widetilde{\mathcal{W}}}$.

Proof. The proof is obtained as in [4]. It is based on the fact that, given a strictly positive integer m, and two points X and Y of V_m such that:

$$X \underset{m}{\sim} Y$$

there exists a word $\mathcal{M}$ of length $|\mathcal{M}| = m$, on the graph $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{W}}}$, and an integer j of $\{0,\ldots,N-2\}^2$, such that:

$$X = \widetilde{T}_{\mathcal{M}}(P_j), \qquad\qquad Y = \widetilde{T}_{\mathcal{M}}(P_{j+1}).$$

By writing $\widetilde{T}_{\mathcal{M}}$ under the form:

$$\widetilde{T}_{\mathcal{M}} = \widetilde{T}_{i_m} \circ \widetilde{T}_{i_{m-1}} \circ \ldots \circ \widetilde{T}_{i_1}$$

where $(i_1,\ldots,i_m) \in \{0,\ldots,N-1\}^m$, one gets:

$$x\big(\widetilde{T}_{\mathcal{M}}(P_j)\big) = r_x^N\,x_j + \sum_{k=1}^m r_x^k\,\alpha_k, \quad x\big(\widetilde{T}_{\mathcal{M}}(P_{j+1})\big) = r_x^N\,x_{j+1} + \sum_{k=1}^m r_x^k\,\alpha_k$$

and

$$y\left(\widetilde{T}_{\mathcal{M}}\,(P_j)\right) = r_y^m\,y_j + \sum_{k=1}^m r_y^{m-k}\,\psi_k\left(r_x^k\,x_j + \sum_{\ell=0}^k r_x^\ell\,\alpha_{m-\ell}\right),$$

$$y\left(\widetilde{T}_{\mathcal{M}}(P_{j+1})\right) = r_y^m\, y_{j+1} + \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k}\, \psi_k \left(r_x^k\, x_{j+1} + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^{\ell}\, \alpha_{m-\ell} \right)$$

This leads to

$$h_{j,m} - r_y^m (y_{j+1} - y_j) = \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k} \Big\{ \psi_{i_k}\Big(r_x^k\, x_{j+1} + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^{\ell}\, \alpha_{m-\ell} \Big) - \\ - \psi_{i_k}\Big(r_x^k\, x_j + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^{\ell}\, \alpha_{m-\ell} \Big) \Big\},$$

where

$$r_y^m (y_{j+1} - y_j) = r_y^m \, \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{1 - r_y} + \frac{r_y^m}{1 - r_y} \, \left\{ \psi_{j+1}\left(\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1}\right) - \psi_j\left(\tfrac{\alpha_j}{N-1}\right) \right\}.$$

Since the maps ψ_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant m$, satisfy a Lipschitz condition, with a Lipschitz constant equal to 1, one has thus:

$$\left| y(T_{\mathcal{M}}(P_j)) - y(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) - r_y^m (y_{j+1} - y_j) \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k}\, r_x^k\, |x_{j+1} - x_j| = \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k}\, r_x^k \, \frac{|\alpha_{j+1} - \alpha_j|}{N-1} = \\ = r_y^m \, \frac{r_x}{r_y} \, \frac{1 - \frac{r_x^m}{r_y^m}}{1 - \frac{r_x}{r_y}} \, \frac{|\alpha_{j+1} - \alpha_j|}{N-1} \leqslant r_y^m \, \frac{r_x}{r_y} \, \frac{1}{1 - \frac{r_x}{r_y}} \, \frac{|\alpha_{j+1} - \alpha_j|}{N-1},$$

which leads to

$$y(T_{\mathcal{M}}(P_j)) - y(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) \geqslant r_y^m \, \frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{1 - r_y} + \\ + \frac{r_y^m}{1 - r_y} \, \left\{ \psi_{i+1}\left(\tfrac{\alpha_{i+1}}{N-1}\right) - \psi_i\left(\tfrac{\alpha_i}{N-1}\right) \right\} - r_x \, \frac{r_y^m - r_x^m}{r_y - r_x} \, \frac{|\alpha_{j+1} - \alpha_j|}{N-1}.$$

If

$$\frac{1}{1 - r_y} \min_{0 \leqslant j \leqslant N-1} \left\{ (\beta_{j+1} - \beta_j) + \left\{ \psi_{j+1}\left(\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1}\right) - \psi_j\left(\tfrac{\alpha_j}{N-1}\right) \right\} \right\} - \\ - \frac{r_x}{r_y} \, \frac{1}{1 - \frac{r_x}{r_y}} \, \frac{|\alpha_{j+1} - \alpha_j|}{N-1} \geqslant 0$$

due to the symmetric roles played by $T_{\mathcal{M}}(P_j)$ and $T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})$, one may only consider the case when

$$y(T_{\mathcal{M}}(P_j)) - y(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) \geqslant r_y^m \, \tfrac{\beta_{j+1} - \beta_j}{1 - r_y} + \\ + \tfrac{r_y^m}{1 - r_y} \, \left\{ \psi_{i+1}\left(\tfrac{\alpha_{i+1}}{N-1}\right) - \psi_i\left(\tfrac{\alpha_i}{N-1}\right) \right\} - r_y^m \, \tfrac{r_x}{r_y} \, \frac{1}{1 - \frac{r_x}{r_y}} \, \tfrac{|\alpha_{j+1} - \alpha_j|}{N-1} \geqslant 0.$$

which yields

$$y(T_{\mathcal{M}}(P_j)) - y(T_{\mathcal{M}}(P_{j+1})) \geqslant$$

$$\geqslant r_y^m \left\{ \frac{1}{1-r_y} \min_{0\leqslant j\leqslant N-1} \left\{ (\beta_{i+1}-\beta_i) + \left\{ \psi_{i+1}\left(\tfrac{\alpha_{i+1}}{N-1}\right) - \psi_i\left(\tfrac{\alpha_i}{N-1}\right) \right\} \right\} - \right.$$

$$\left. - \tfrac{r_x}{r_y} \tfrac{1}{1-\frac{r_x}{r_y}} \tfrac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{N-1} \right\}.$$

The predominant term is thus

$$r_y^m = e^{m\,(D_{\widetilde{\mathcal{W}}}-2)\,\ln N} = N^{m\,(D_{\widetilde{\mathcal{W}}}-2)} = L_m^{2-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}}\,(N-1)^{2-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}}$$

One also has

$$\begin{aligned}
|h_{j,m}| &\leqslant r_y^m\,|y_{j+1}-y_j| + \\
&+ \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k} \left| \psi_{i_k}\Big(r_x^k\,x_{j+1} + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^\ell\,\alpha_{m-\ell}\Big) - \psi_{i_k}\Big(r_x^k\,x_j + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^\ell\,\alpha_{m-\ell}\Big) \right| \\
&\leqslant r_y^m\,\frac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{r_y^m}{1-r_y}\left|\psi_{j+1}\left(\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1}\right) - \psi_j\left(\tfrac{\alpha_j}{N-1}\right)\right| \\
&+ \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k} \left| \psi_{i_k}\Big(r_x^k\,x_{j+1} + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^\ell\,\alpha_{m-\ell}\Big) - \psi_{i_k}\Big(r_x^k\,x_j + \sum_{\ell=0}^{k} r_x^\ell\,\alpha_{m-\ell}\Big) \right| \\
&\leqslant r_y^m\,\tfrac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{r_y^m}{1-r_y}\left|\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \tfrac{\alpha_j}{N-1}\right| + \sum_{k=1}^{m} r_y^{m-k}\,r_x^k\,|x_{j+1}-x_j| \\
&= r_y^m\,\tfrac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{r_y^m}{1-r_y}\left|\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \tfrac{\alpha_j}{N-1}\right| + |x_{j+1}-x_j|\,r_y^m\,\frac{r_x}{r_y}\,\frac{1-\frac{r_x^m}{r_y^m}}{1-\frac{r_x}{r_y}} \\
&= r_y^m\,\tfrac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{r_y^m}{1-r_y}\left|\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \tfrac{\alpha_j}{N-1}\right| + |x_{j+1}-x_j|\,r_x\,\frac{r_y^m - r_x^m}{r_y - r_x} \\
&\leqslant r_y^m\,\tfrac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{r_y^m}{1-r_y}\left|\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \tfrac{\alpha_j}{N-1}\right| + |x_{j+1}-x_j|\,r_x\,\frac{r_y^m}{r_y - r_x} \\
&\leqslant r_y^m\,\tfrac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{r_y^m}{1-r_y}\left|\tfrac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \tfrac{\alpha_j}{N-1}\right| + r_y^m\,\frac{|\alpha_{j+1}-\alpha_j|}{N\,(r_y - r_x)}.
\end{aligned}$$

Since

$$D_{\widetilde{\mathcal{W}}} = 2 + \frac{\ln r_y}{\ln N}, \qquad r_y = e^{(D_{\widetilde{\mathcal{W}}}-2)\,\ln N} = N^{(D_{\widetilde{\mathcal{W}}}-2)},$$

one has thus:

$$|h_{j,m}| \leqslant r_y^m \left\{ \frac{|\beta_{j+1}-\beta_j|}{1-r_y} + \frac{1}{1-r_y} \left| \frac{\alpha_{j+1}}{N-1} - \frac{\alpha_j}{N-1} \right| + \frac{|\alpha_{j+1}-\alpha_j|}{N\,(r_y-r_x)} \right\}.$$

Theorem 2.9 is proved. □

Corollary 2.10. *The $\mathcal{W}$-type functions are non-differentiable.*

Proof. One has simply to use the analogous density property as in 1.11.

Given a natural integer m, and two points $X = (x, \widetilde{\mathcal{W}}(x))$, $Y = (y, \widetilde{\mathcal{W}}(y))$ of the pre-fractal graph $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{W}}_m} \subset \Gamma_{\widetilde{\mathcal{W}}}$ such that:

$$x \leqslant y, \quad X \underset{m}{\sim} Y$$

one may write:

$$X = \widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k), \qquad Y = (x+L_m, \mathcal{W}(x+L_m)) = \widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1})$$

where $\mathcal{M}_{m,j}$, $0 \leqslant j \leqslant N^m - 1$ is a word of length m, while k denotes an integer of the set $\{0, \ldots, N-2\}$.

One may note that

$$\left| x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k)) - x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1})) \right| = \frac{1}{N^m} = L_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Thus

$$\left| \widetilde{\mathcal{W}}\big(x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k))\big) - \widetilde{\mathcal{W}}\big(x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1}))\big) \right| \geqslant C_1(N)\, L_m^{2-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}} =$$

$$= C_1(N) \left| x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k)) - x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1})) \right|^{2-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}},$$

which leads to

$$\left| \frac{\widetilde{\mathcal{W}}\big(x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k))\big) - \widetilde{\mathcal{W}}\big(x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1}))\big)}{x\big(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k)\big) - x\big(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1})\big)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant C_1(N) \left| x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_k)) - x(\widetilde{T}_{\mathcal{M}_{m,j}}(P_{k+1})) \right|^{1-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}} =$$

$$= C_1(N)\, L_m^{1-D_{\widetilde{\mathcal{W}}}},$$

where

$$1 - D_{\widetilde{\mathcal{W}}} = -1 - \frac{\ln r_y}{\ln N} = -\frac{\ln(r_y\, N)}{\ln N} < 0$$

By passing to the limit when the integer m tends towards infinity, one gets the non-differentiability expected result:

$$\lim_{m \to +\infty} \left| \frac{\widetilde{\mathcal{W}}(x+L_m) - \widetilde{\mathcal{W}}(x)}{L_m} \right| = +\infty.$$

where:

$$\lim_{m\to+\infty} L_m = 0.$$

Corollary is completed. □

References

[1] Krzysztof Barański, Balázs Bárány, Julia Romanowska. On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function. *Adv. Math.*, 265:32–59, 2014, doi: 10.1016/j.aim.2014.07.033.

[2] M. F. Barnsley, S. Demko. Iterated function systems and the global construction of fractals. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 399(1817):243–275, 1985, doi: 10.1098/rspa.1985.0057.

[3] A. S. Besicovitch, H. D. Ursell. Sets of fractional dimensions (V): on dimensional numbers of some continuous curves. *J. London Math. Soc.*, s1-12(1):18–25, 1937, doi: 10.1112/jlms/s1-12.45.18.

[4] Claire David. Bypassing dynamical systems: a simple way to get the box-counting dimension of the graph of the Weierstrass function. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 11(2):53–68, 2018, doi: 10.15673/tmgc.v11i2.1028.

[5] Claire David. Wandering across the Weierstrass function, while revisiting its properties. *To appear*, 2019.

[6] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Studies in Nonlinearity. Westview Press, Boulder, CO, 2003. Reprint of the second (1989) edition.

[7] Brian R. Hunt. The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(3):791–800, 1998, doi: 10.1090/S0002-9939-98-04387-1.

[8] John E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981, doi: 10.1512/iumj.1981.30.30055.

[9] Gerhard Keller. A simpler proof for the dimension of the graph of the classical Weierstrass function. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 53(1):169–181, 2017, doi: 10.1214/15-AIHP711.

[10] Jun Kigami. A harmonic calculus on the Sierpiński spaces. *Japan J. Appl. Math.*, 6(2):259–290, 1989, doi: 10.1007/BF03167882.

[11] Benoit B. Mandelbrot. *Fractals: form, chance, and dimension*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., revised edition, 1977. Translated from the French.

[12] Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1982. Schriftenreihe für den Referenten.

[13] K. Weierstrass. Über kontinuierliche Funktionen eines reellen arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79:29–31, 1875.

Claire David

Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire Jacques-Louis Lions, 4, place Jussieu 75005, Paris, France

Email: Claire.David@upmc.fr

ORCID: orcid.org/0000-0002-4729-0733

Наукове видання

Праці міжнародного геометричного центру
2019, т. 12, № 2

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макету
С. І. Максименко

Contents

ISSN print: 2072-9812
ISSN online: 2409-8906
ISO 26324:2012

http://geom-center.onaft.edu.ua