

Учредитель: Национальная академия наук Украины

Издатель: Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова

Главный редактор: д-р техн. наук В.В. МОХОР

**Заместители главного редактора: д-р техн. наук С.Д. ВИННИЧУК,
канд. техн. наук Г.А. КРАВЦОВ, канд. техн. наук Э.П. СЕМАГИНА,**

Ответственный секретарь: Л.Е. ЗБОРОВСКАЯ

Редакционная коллегия:

канд. техн. наук В.В. АРИСТОВ, чл.-кор. НАН Украины В.П. БОЮН, д-р техн. наук В.Н. БЕЛЕЦКИЙ,
д-р техн. наук А.Ф. ВЕРЛАНЬ, д-р техн. наук А.Ф. КАТКОВ, д-р техн. наук В.Я. КОНДРАЩЕНКО,
д-р техн. наук Ю.М. КОРОСТИЛЬ, д-р техн. наук А.Я. МАТОВ, акад. НАН Украины Ю.М. МАЦЕ-
ВИТЫЙ, д-р техн. наук М.В. МЫСЛОВИЧ, д-р техн. наук А.С. ОГИР, д-р техн. наук В.Д. САМОЙ-
ЛОВ, д-р техн. наук С.Е. САУХ, д-р техн. наук В.П. СИМОНЕНКО, канд. техн. наук А.А. ЧЕМЕРИС

Региональные редакторы:

Prof. E. Dshalalow

Department of Applied
Mathematics, Florida
Institute of Technology,
Melbourne FL 32901, USA,
edshalalow@cfl.rr.com

Dr. Stan Lipovetsky

GfK Custom Research North America,
8401 Golden Valley Road,
Minneapolis, Minnesota
55427-0900, USA,
stan.Lipovetsky@gfk.com

Prof. V. Sree Hari Rao

Department of Mathematics
Jawaharlal Nehru
Technological University,
Hyderabad 500872, India,
vshrao@yahoo.com

Редакционный совет:

Prof. R.P. AGARWAL (USA), проф. Ю.А. БЕЛОВ (Украина), чл.-кор. НАН Украины, проф. В.В. ВА-
СИЛЬЕВ (Украина), prof. E. ÇINLAR (USA), prof. H. DADUNA (Germany), акад. РАН, проф. К.С. ДЕ-
МИРЧЯН (Россия), чл.-кор. НАН Украины В.Ф. ЕВДОКИМОВ, prof. H.I. FREEDMAN (Canada),
prof. T. KACZOREK (Poland), prof. J. KORBICZ (Poland), акад. НАН Украины, проф. А.А. МАРТЫНЮК
(Украина), проф. А.И. ПЕТРЕНКО (Украина), акад. НАН Украины, проф. Б.С. СТОГНИЙ (Украина),
prof. J. SOLDEK (Poland), акад. НАН Украины, проф. А.К. ШИДЛОВСКИЙ (Украина), prof. V.A. VUJI-
CHICH (Serbia)

**Журнал реферируется и индексируется в Cambridge Scientific Abstracts,
Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec,
ВИНИТИ РАН (Россия)**

**Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України,
в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт**

Адрес редакции: 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15.

Тел. (044) 4241466, факс 4240586. E-mail: em@ipme.kiev.ua; http: www.emodel.org.ua

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭНЕРГЕТИКЕ им. Г.Е. ПУХОВА

ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 5 ТОМ 39 ELECTRONIC MODELING • 2017

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ОСНОВАН В 1979 ГОДУ

ВЫХОДИТ ОДИН РАЗ В ДВА МЕСЯЦА

КИЕВ

СОДЕРЖАНИЕ

Математическое моделирование и вычислительные методы

- МЕЛЬНИК И.В. Моделирование триодных источников электронов высоковольтного тлеющего разряда с пластинчатым управляющим электродом и коническим анодом 3
- КЛЕВЦОВ Ю.А. Моделирование объектов с распределенными параметрами четвертого порядка 21

Вычислительные процессы и системы

- САПОЖНИКОВ В.В., САПОЖНИКОВ Вл.В., ЕФАНОВ Д.В. Коды с суммированием с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел, в системах функционального контроля 37

Применение методов и средств моделирования

- КРАВЦОВ Г.А., КОШЕЛЬ В.И. Вычисления на классификациях. Корректность классификации 59
- КУЦАН Ю.Г., БЛІНОВ І.В., ІВАНОВ Г.А. Моделювання тарифо- та ціноутворення на роздрібному ринку електричної енергії України в нових умовах функціонування 71



© Институт проблем
моделирования
в энергетике
им. Г.Е. Пухова
НАН Украины, 2017

КАЛИНОВСКИЙ Я.А., БОЯРИНОВА Ю.Е., СУКАЛО А.С., ХИЦКО Я.В. Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений	81
МАКАРИЧЕВ А.В., КУДЬ А.А., ЩУКИН А.Б. Суммы максимумов приращений в многоканальной системе обслуживания при моделировании аукционных торгов	97
CHEMERYS V.T. Contact Surface Resistivity as a Favorable Condition of Commutation Process	105
Author's Agreement (Public Offer) about Conditions of Article Publication in the Journal "Electronic Modeling"	113

Номер надруковано частково за рахунок державного замовлення згідно з Програмою підтримки періодичних видань НАН України

Свідоцтво про держ. реєстрацію КВ № 291, 16.12.93

Оригінал-макет виготовлено в ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України

Підписано до друку 05.10.17. Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 10,56.
Обл.-вид. арк. 7,60. Тираж 172 прим. Зам. № 5037

Віддруковано ВД «Академперіодика» НАН України
вул. Терещенківська, 4, м. Київ, 01004

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 544 від 27.07.2001



УДК 537.525:621.325

И.В. Мельник, д-р техн. наук
Национальный пр-т Победы, 37, корпус 12, 2203,
тел. (044) 4068292, (044) технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, 2049505; e-mail: i.melnyk@kpi.ua)

Моделирование триодных источников электронов высоковольтного тлеющего разряда с пластинчатым управляющим электродом и коническим анодом*

Рассмотрена методика моделирования триодных источников электронов высоковольтного тлеющего разряда (ВТР) с пластинчатым управляющим электродом и коническим анодом. Предлагаемая методика основана на итерационном алгоритме, позволяющем определять термодинамические параметры свободных электронов в анодной плазме с учетом электрических параметров модели и электрофизических параметров используемых материалов электродов и рабочего газа. В результате моделирования получены зависимости энергетической эффективности источников электронов от ускоряющего напряжения, напряжения горения вспомогательного разряда и приведенного давления в разрядном промежутке. Установлено, что энергетическая эффективность источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом и коническим анодом составляет от 70 до 85%.

К л ю ч е в ы е с л о в а: триодный источник электронов, высоковольтный тлеющий разряд, электрическое управление током разряда, анодная плазма, энергетическая эффективность.

Розглянуто методику моделювання тріодних джерел електронів високовольтного тліючого розряду (ВТР) із пластинчатим електродом та конусним анодом. Запропонована методика базована на ітераційному алгоритмі, який дозволяє визначати термодинамічні параметри вільних електронів в анодній плазмі з урахуванням електричних параметрів моделі та електрофізичних параметрів використаних матеріалів електродів і робочого газу. В результаті моделювання отримано залежності енергетичної ефективності джерел електронів від прискорювальної напруги, напруги горіння допоміжного розряду та приведенного тиску у розрядному проміжку. Встановлено, що енергетична ефективність джерел електронів ВТР з пластинчатим електродом та конусним анодом складає від 70 до 85%.

* Стаття подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательских работ по государственной договорной тематике «Разработка мощной газоразрядной электронной пушки для импульсного нанесения многокомпонентных и химически сложных покрытий», поддерживаемой Министерством образования и науки Украины, секция «Электроника, радиотехника и телекоммуникации». Номер государственной регистрации 0116U003793.

Ключові слова: триодне джерело електронів, високовольтний тліючий розряд, електричне керування струмом розряду, анодна плазма, енергетична ефективність.

Источники электронов на основе высоковольтного тлеющего разряда (ВТР) широко применяются в электронной и авиакосмической промышленности, машиностроении, приборостроении и во многих других отраслях промышленности, где используются современные электроннолучевые технологии. Источники электронов ВТР используются в основном для реализации различных термических операций с помощью мощных электронных пучков, включая высокопроизводительную сварку, нанесение покрытий сложного химического состава в контролируемой газовой среде, очистку тугоплавких металлов [1—6]. Это обусловлено тем, что источники электронов ВТР имеют ряд технико-экономических преимуществ над традиционными источниками с нагреваемыми катодами [1—7].

Среди этих преимуществ основными являются относительная простота конструкции и дешевизна газоразрядных источников электронов, а также электроннолучевого технологического оборудования на их основе, возможность работы таких источников с различными газами, включая инертные и активные, простота управления током электронного пучка посредством изменения давления в рабочей камере [8], большой срок службы холодных катодов и относительно высокая энергетическая эффективность источников электронов ВТР [7]. Однако в работе [8] указан существенный недостаток газодинамического управления мощностью электронного пучка, а именно очень большое значение постоянной времени регулирования тока разряда, обусловленное высокой инерционностью газодинамических процессов.

В промышленных технологических установках с электронными пушками на основе ВТР постоянная времени регулирования тока разряда может составлять несколько секунд, что неприемлемо для большинства современных электроннолучевых технологий [9—12]. В связи с этим в настоящее время проводятся исследования возможностей использования метода электрического управления током ВТР [7, 13, 14], который основан на введении в разрядный промежуток дополнительного электрода для зажигания вспомогательного разряда. Теоретические оценки показали, что при электрическом управлении током разряда время перехода ВТР из слаботочного в сильноточный режим может составлять от десятков до сотен микросекунд [13—15]. Такие малые времена регулирования тока разряда являются вполне приемлемыми для большинства термических процессов современных электроннолучевых технологий [9—12].

Особенно актуальной является разработка электронных пушек ВТР промышленного назначения. Такие электронные пушки могут быть эф-

эффективно использованы для высоковакуумного переплава тугоплавких металлов и сплавов [1, 2] и для нанесения композитных полиметаллических и керамических покрытий в среде различных газов. При этом химический состав газовой среды может быть различным и выбирается в соответствии с требованиями выполняемого технологического процесса [2—6]. Форма и расположение вспомогательного электрода, предназначенного для регулирования тока разряда, также могут быть различными. Например, в работах [7, 13—15] рассмотрена система с кольцевым электродом, расположенным в области анодной плазмы (АП). Аналогичной, с точки зрения электронно-оптических и энергетических характеристик, является система с цилиндрическим управляющим электродом, на который подается положительный потенциал [13—15].

Однако метод расчета положения АП в триодных источниках электронов ВТР, описанный в работах [7, 15], основан на приближенных аналитических оценках с использованием большого количества справочных данных. Поскольку справочные данные о термодинамических параметрах АП в источниках электронов ВТР существуют не для всех режимов горения разряда, часто проектирование таких источников требует проведения сложных экспериментальных работ по измерению температуры электронов в АП и их подвижности, что значительно усложняет их проектирование [7].

Разработанный алгоритм проектирования триодных источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом и коническим анодом предназначен для приближенных оценок энергетических параметров формируемого электронного пучка. Его особенность состоит в том, что расчеты проводятся для реальной геометрии электродной системы (ЭС). Для вычисления термодинамических параметров АП применен эффективный итерационный алгоритм, не требующий использования дополнительных справочных данных о температуре электронов в АП и об их подвижности.

Постановка задачи. Основной особенностью конструктивной схемы моделируемой триодной ЭС ВТР с пластинчатым электродом (рис. 1) является использование конической формы анода, что позволяет увеличить ширину АП и уменьшить расстояние от границы плазмы до поверхности катода при сохранении объема АП и ее эмиссионных свойств. Поэтому положение границы АП относительно катода $d_{к.п}$ необходимо пересчитывать в соответствии с реальной геометрией ЭС.

На рис. 1 показаны особенности электрического питания рассматриваемой ЭС: на катод подается отрицательное ускоряющее напряжение $-U_{ус}$ от единиц до десятков киловольт, а на управляющий электрод — положительное напряжение $+U_{уп}$, которое изменяется в пределах от десятков до сотен вольт [7, 13—15].

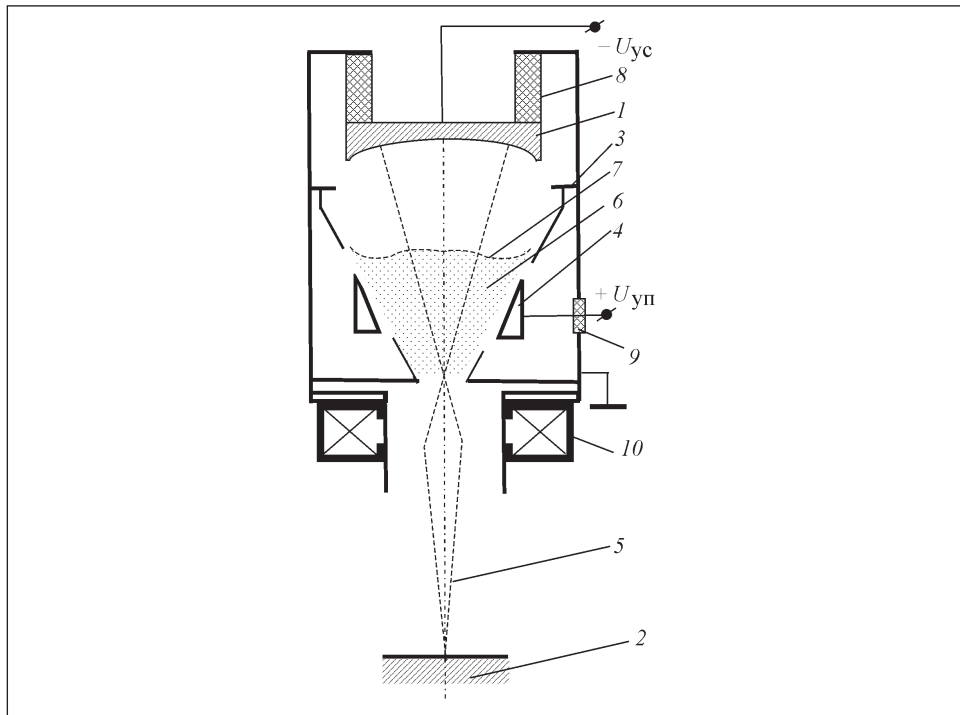


Рис. 1. Конструктивная схема моделируемой ЭС ВТР с пластинчатым управляющим электродом: 1 — катод; 2 — коллектор электронного пучка; 3 — анод; 4 — управляющий электрод; 5 — электронный пучок; 6 — АП; 7 — граница АП; 8 и 9 — высоковольтный и низковольтный изоляторы; 10 — фокусирующая магнитная линза

При расчете положения АП в моделируемой ЭС ВТР для оценки температуры электронов и их подвижности в АП использован итерационный алгоритм, позволяющий получать более точные и адекватные оценки, чем упрощенные аналитические расчеты, приведенные в работах [7, 13—15]. Для оценки энергетической эффективности источников электронов ВТР использованы соотношения, полученные в работах [7, 13—15], однако при этом учтены специфические физические условия горения ВТР в исследуемой ЭС.

Параметры модели триодных источников электронов ВТР. Основные геометрические параметры рассматриваемой модели триодной ЭС ВТР (рис. 2) следующие:

1. Продольный размер разрядного промежутка l .
2. Поперечный размер разрядного промежутка $d_{\text{п}}$.
3. Поперечный размер катода $r_{\text{к}}$.
4. Поперечный размер АП $d_{\text{АП}}$.
5. Суммарная площадь управляющих электродов $S_{\text{уп}}$.

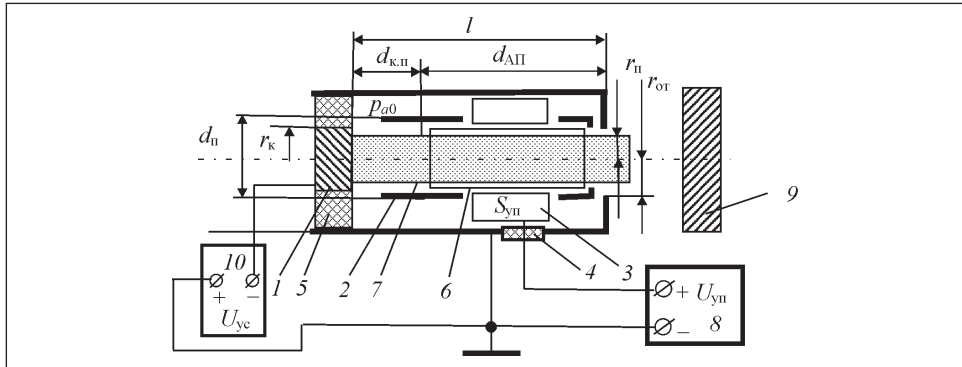


Рис. 2. Квазиодномерная модель ЭС триодной электронной пушки ВТР с цилиндрическим анодом и пластинчатым управляющим электродом: 1 и 2 — катод и анод ВТР; 3 — пластинчатый электрод для зажигания вспомогательного разряда; 4 и 5 — низковольтный и высоковольтный изоляторы; 6 — анодная плазма; 7 — электронный пучок; 8 — низковольтный источник управляющего напряжения; 9 — обрабатываемое изделие; 10 — высоковольтный источник питания; $r_{от}$ — диаметр выходного отверстия анода

Заметим, что параметры 1—4 идентичны параметрам, используемым для триодных ЭС ВТР с кольцевым электродом [13—15].

Основными электрическими параметрами данной модели, как и моделей ЭС ВТР с кольцевой геометрией управляющего электрода, являются ускоряющее напряжение U_{yc} и напряжение горения вспомогательного разряда $U_{уп}$ [7, 13—16]. Важным внутренним ее параметром является приведенное давление в разрядном промежутке p_{a0} [7, 13—16]. Кроме того внутренними параметрами рассматриваемой модели являются полуэмпирические коэффициенты, связывающие термодинамические параметры АП с электрическими параметрами горения разряда и давлением газа в разрядном промежутке. В общем виде методы оценки параметров АП ВТР рассмотрены в работах [7, 13—15].

Особенность построения предлагаемой модели — использование итерационного алгоритма оценки подвижности электронов и их температуры в АП, для которого требуется значительно меньше справочных данных, чем для аналогичных аналитических оценок. Необходимые для расчета справочные данные взяты из работ [17—21].

Основные выходные параметры рассматриваемой модели следующие [9, 10]:

1. Фокальный радиус формируемого электронного пучка $r_{п}$.
2. Общая мощность формируемого электронного пучка $W_{п}$ и его удельная мощность $w_{п}$.
3. Энергетическая эффективность источника электронов η .

4. Время зажигания ВТР τ_z и время его гашения τ_r [7, 13—15] (для импульсных триодных источников электронов).

Оценка термодинамических параметров АП и ее продольного размера. В работах [7, 13—15] показано, что оценить объем АП и концентрацию ионов в ней для ЭС ВТР (см. рис. 2) можно, решив самосогласованную систему алгебраических уравнений, включающую уравнение баланса заряженных частиц в объеме квазинейтральной плазмы, и уравнение самосогласованности горения ВТР. Для ЭС с цилиндрическим анодом продольный размер АП можно определить из следующих аналитических соотношений [7, 15]:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= A_i U_{yc}^{-a_i} (A_i U_{yc}^{-a_i} + 1) \sqrt{\frac{kT_e + eU_{yn}}{2\pi m_e}}, \quad R_2 = R_a \eta_i \eta_U^{-a_i} k_e, \\
 R_3 &= 3(kT_e + eU_{yn}) N_0 \alpha_i \sqrt{\frac{kT_e + eU_{yn}}{2\pi m_e}} \exp\left(-\frac{\Phi_i}{\frac{kT_e}{e} + U_{yn}}\right), \\
 \lambda_e &= \frac{9kT_e (U_{yn} + kT_e)^2}{4\pi e^4 p_{a0} \ln\left(1,5 - \sqrt{\frac{kT_e (eU_{yn} + kT_e)^3}{\pi p_{a0}}}\right)}, \quad (1) \\
 R_4 &= \mu_{e0} (kT_e + eU_{yn}) \left(\frac{\pi}{p_0}\right)^2 \left(1 + \frac{2\gamma_k R_a}{\lambda_e}\right), \quad R_5 = R_1 R_2 p_0 Q_{ep0}, \\
 C_y &= -\frac{R_1 + R_3 + R_1 R_2}{R_5}, \quad D_y = \frac{R_4}{R_5}, \quad p = -\frac{C_y^2}{3}, \quad q = \frac{2C_y^3}{27} + D_y, \\
 D &= \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad y = u + v, \quad d_{АП} = y - \frac{C_y}{3},
 \end{aligned}$$

где η_i и η_U — коэффициенты отражения электронов от анода ВТР соответственно по току и по энергии; γ_k — коэффициент вторичной электронно-ионной комиссии катода ВТР; k_e — коэффициент удлинения траекторий электронов; μ_{e0} — подвижность электронов в анодной плазме для используемого рабочего газа; f — коэффициент прозрачности анода ВТР; Q_{ep0} — сечение рассеяния электронов на ионах остаточного газа; T_e — температура электронов в плазме с учетом ее нагрева электронным пучком; λ_e — длина свободного пробега электронов; n_e — концентрация

электронов в плазме; U_i — потенциал ионизации газа; N_0 — постоянная Лошмидта; α_i — полуэмпирическая постоянная, являющаяся константой для данного газа; A_i, a_i — полуэмпирические коэффициенты; C_y, D_y — коэффициенты решаемого уравнения; D — дискриминант уравнения; p, q, u, v, y — вспомогательные переменные.

Однако для систем ВТР с коническим анодом (см. рис. 1) соотношения (1) дают заниженное значение продольного размера АП $d_{АП}$, поскольку требуемый объем плазмы в цилиндрической полости достигается при меньшем ее продольном размере, чем в конической. Соответствующее аналитическое соотношение для пересчета продольного размера АП в ЭС с коническим анодом имеет следующий вид [22]:

$$d_{АП} = \sqrt[3]{\frac{3R_a^2 d_{к.п} l_a^4}{2h_a^4 s w^2} - \frac{l_a^{12} R_a^6}{27h_a^{15} s^3 w^2} + \sqrt{\frac{9R_a^4 d_{к.п}^2 l_a^8}{4h_a^8 s^2 w^2} - \frac{3l_a^{24} R_a^{12}}{729h_a^{30} s^6 w^6} - \frac{2R_a^8 l_a^{16} d_{к.п}}{9h_a^{19} s^4 w^4}}, \quad (2)$$

где R_a — радиус основания анодного электрода; h_a и l_a — высота анода и его образующая;

$$s = 1 + \left(\frac{R_a}{h_a}\right)^2 - \sqrt{1 + \left(\frac{R_a}{h_a}\right)^2}; \quad w = 3 - \frac{s h_a^2}{h_a^2 + R_a^2}; \quad (3)$$

$d_{к.п}$ — расстояние между катодом и границей АП в эквивалентной триодной ЭС ВТР с цилиндрическим анодом (см. рис. 2), определяемое из соотношений (1).

Недостаток аналитических моделей ЭС ВТР, основанных на соотношениях (1), состоит в том, что их можно использовать только в тех случаях, когда известны термодинамические параметры АП T_e и μ_{e0} [7, 13—15]. Однако в реальных электронных пушках ВТР, разрабатываемых для промышленности, физические условия горения разряда не всегда соответствуют параметрам, описанным в справочной литературе. Поэтому требуются дополнительные экспериментальные исследования, связанные с измерением параметров АП ВТР, что значительно снижает эффективность проектирования и увеличивает время проведения проектных работ [7, 22].

В связи с этим, несмотря на простоту аналитических соотношений (1), более эффективными для промышленного применения при разработке электронных пушек ВТР являются итерационные алгоритмы расчета параметров АП. В общем случае такие алгоритмы основаны на решении дифференциального уравнения для ЭС с плавающей границей, в котором равновесное положение АП определяется из условия равенства кинетического давления электронов в АП и давления силы электрического поля

со стороны катодного потенциала [16, 23]. В общем виде это уравнение имеет вид [23]

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right)_{r\in\Gamma} = \sqrt{\frac{n_e k T_e}{\varepsilon_0 A(\varphi^*)}}, \quad (4)$$

$$A(\varphi^*) = \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{2q\varphi^*}{kT_e}} + \exp\left(-\frac{2q\varphi^*}{kT_e}\right) - 2 \right),$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности плазменной границы; q — заряд ионов плазмы; φ^* — приэлектродный потенциал, зависящий от состава рабочего газа, значение которого для условий горения ВТР обычно лежит в пределах нескольких вольт [23]. Итерационные алгоритмы расчета положения плазменной границы, основанные на использовании соотношения (4), являются более ресурсоемкими при проведении компьютерных вычислений, но, в то же время, они обеспечивают большую точность и позволяют избежать необходимости проведения дополнительных экспериментов.

Для физических условий горения ВТР температура электронов в АП может быть оценена из соотношения [20, 21]

$$T_e = \frac{eU_{\text{уп}}}{2k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi e^2 m_i}{6m_e} \left(\frac{U_{\text{ус}} d_{\text{к.п}}}{p_{a0} Q_{ep0}} \right)^2} \right), \quad (5)$$

где m_i — масса ионов газа;

$$d_{\text{к.п}} = \frac{p_{a0} Q_{ep0}}{U_{\text{ус}}} \sqrt{\frac{6m_e}{\pi e^2 m_i} \left(\left(\frac{2kT_e}{eU_{\text{уп}}} - 1 \right)^2 - 1 \right)}. \quad (6)$$

Для большинства технологических газов, например для водорода, гелия, азота и воздуха, интеграл столкновений электронов с атомами остаточного газа записывается в виде [20, 21]

$$J_{ea} = \frac{-v^{-2} \partial(v^2 v_{ea} f(v))}{\partial v}, \quad (7)$$

где v_{ea} — частота столкновений электронов с атомами газа,

$$v_{ea} = \frac{U_{\text{ус}} d_{\text{к.п}}}{\sqrt{\frac{3U_{\text{уп}} m_e^2}{em_i} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\pi e^2 m_i}{6m_e} \left(\frac{U_{\text{ус}} d_{\text{к.п}}}{p_{a0} Q_{ea}} \right)^2} \right) - 1 \right)}}};$$

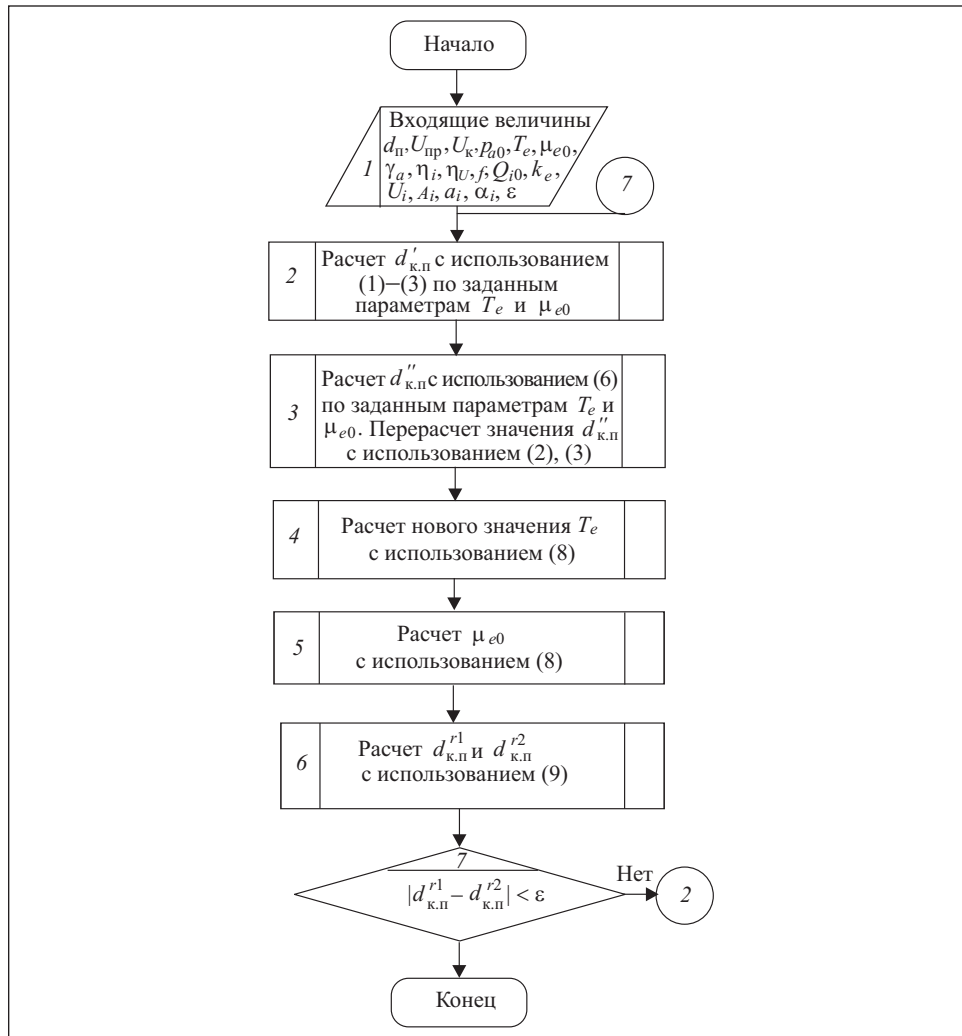


Рис. 3. Итерационный алгоритм расчета термодинамических параметров АП и положения ее границы относительно катода

ν — переменная интегрирования. При выполнении условия (7) подвижность электронов можно оценить с точностью до нескольких процентов из простого аналитического выражения [20, 21]

$$\mu_{e0} = \frac{ap_{a0}d_{к.п}}{U_{yc}} + b, \quad (8)$$

где a, b — полуэмпирические коэффициенты.

С учетом соотношений (1), (5), (6), (8) разработан итерационный алгоритм расчета положения границы АП (рис. 3), согласно которому сначала термодинамические параметры АП задаются по справочным данным, а затем дважды проводится расчет ее продольного размера. С использованием соотношений (1), характеризующих физические процессы в области катодного падения потенциала, рассчитываем значение $d'_{к.п.}$, а с использованием соотношения (6), описывающего процессы в АП — другое значение $d''_{к.п.}$. Затем, с учетом соотношений (2) и (3), полученные значения $d'_{к.п.}$ и $d''_{к.п.}$ пересчитываем для конической геометрии анода и, с использованием метода золотого сечения [24], определяем среднее значение параметра $d_{к.п.}^{cp}$:

$$\frac{d'_{к.п.} - d''_{к.п.}}{d'_{к.п.} - d_{к.п.}^{r1}} = \frac{d'_{к.п.} - d''_{к.п.}}{d_{к.п.}^{r2} - d''_{к.п.}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad d_{к.п.}^{cp} = \frac{d_{к.п.}^{r1} + d_{к.п.}^{r2}}{2}. \quad (9)$$

Итерационные вычисления прекращаются при выполнении условия

$$|d_{к.п.}^{r1} - d_{к.п.}^{r2}| < \varepsilon, \quad (10)$$

где ε — заранее заданная малая величина.

Тестирование приведенного алгоритма проводилось для следующих параметров ЭС ВТР: $l = 100$ мм, $d_{п.} = 90$ мм, $S_{уп} = 0,06$ м², $r_{к.} = 70$ см, $U_i = 18$ В, $a_i = 0,343$, $\gamma = 4,6$, $Q_{ep0} = 5,3 \cdot 10^{-19}$ м², $\alpha_i = 1,452$, $\eta_i = 0,7$, $\eta_U = 0,95$, $f = 0,99$, $A_i = 3,8 \cdot 10^{-6}$, $a = 2,5 \cdot 10^4$ м/с, $b = 25,4$ м²/В · с. В качестве рабочего газа использован азот, в качестве материала катода — алюминий, а в качестве материала анода — нержавеющая сталь СТЗ. Эти материалы считаются основными конструктивными материалами для промышленных источников электронов ВТР [16, 17].

Определение токов основного и вспомогательного разряда и энергетической эффективности триодных источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом. В работах [7, 13—15] показано, что при известном продольном размере АП $d_{АП}$ концентрацию ионов в ней можно оценить из соотношения

$$n_i = \frac{A_i U_{yc}^{-a_i} (1 - A_i U_{yc}^{-a_i}) (1 + \eta_i \eta_u^{-a_i} (1 - D_a (1 - d_{п.} p_0 Q_{ep0})))}{(kT_e + eU_{уп}) \left(\frac{\pi^2 \mu_{i0}}{(d_{п.} p_0)^2} \left(1 + \frac{2\gamma R_a}{\lambda_e} \right) - 3N_0 \alpha_i \sqrt{\frac{e(kT_e + eU_{уп})}{2\pi m_e}} \right) \exp \left(-\frac{U_i}{\frac{kT_e}{e} + U_{уп}} \right)}. \quad (11)$$

Тогда соотношение для тока вспомогательного разряда можно записать в виде

$$I_{\text{уп}} = en_i S_{\text{уп}} (1 + \gamma_{\text{уп}}) \sqrt{\frac{2eU_{\text{уп}}}{m_i}}, \quad (12)$$

где $\gamma_{\text{уп}}$ — коэффициент вторичной электронной эмиссии для материала управляющего электрода. Соответственно для тока основного разряда:

$$I_{\text{р}} = \pi e d_{\text{п}} \frac{d_{\text{п}}}{d_{\text{от}}} (A_i U_{\text{пр}}^{-a_i} + 1) \left(\frac{d_{\text{п}} + 2r_{\text{от}}}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{2m_e}{kT_e}}, \quad (13)$$

где $r_{\text{от}}$ — диаметр выходного отверстия анода (см. рис. 2). Тогда энергетическую эффективность триодного источника электронов можно рассчитать из следующих соотношений [7, 13—15]:

$$\eta_{\text{д}} = 1 - \frac{2 + k_e(1 + 2k_e \gamma \mu_{e0})}{2k_e(1 + \gamma k_e)}, \quad k_e = l p_{a0} \overline{Q_{i0}}, \quad \eta_{\text{т}} = \frac{\eta_{\text{д}}}{1 + \frac{\eta_{\text{д}} U_{\text{уп}} I_{\text{уп}}}{U_{\text{yc}} I_{\text{р}}}}. \quad (14)$$

Соотношения (1)—(14) использованы для расчета энергетической эффективности триодных источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом. Соответствующие зависимости расстояния от границы АП до поверхности катода приведены на рис. 4, а для энергетической эффективности источников электронов — на рис. 5.

Анализ результатов моделирования. Из приведенных на рис. 4 расчетных зависимостей положения границы АП относительно поверхности катода видно, что расстояние от катода до АП уменьшается с увеличением приведенного давления газа в разрядном промежутке p_{a0} и увеличением напряжения горения вспомогательного разряда $U_{\text{уп}}$, поскольку эти физические процессы соответствуют увеличению объема АП. При этом согласно (11) увеличивается и концентрация ионов в АП. Однако результаты моделирования показали, что объем АП увеличивается с возрастанием давления в разрядном промежутке и напряжения горения вспомогательного разряда только до соответствующей конечной величины.

Действительно, зависимости $d_{\text{к.п}}(p_{a0})$ и $d_{\text{к.п}}(U_{\text{уп}})$, приведенные на рис. 4, носят асимптотический характер. В соответствии с полученными результатами моделирования минимальная величина поперечного размера области катодного падения потенциала может быть оценена из соотношения $d_{\text{к.п}}^{\text{min}} \approx r_{\text{п}}/2$. Дальнейшее возрастание концентрации ионов в АП ВТР мо-

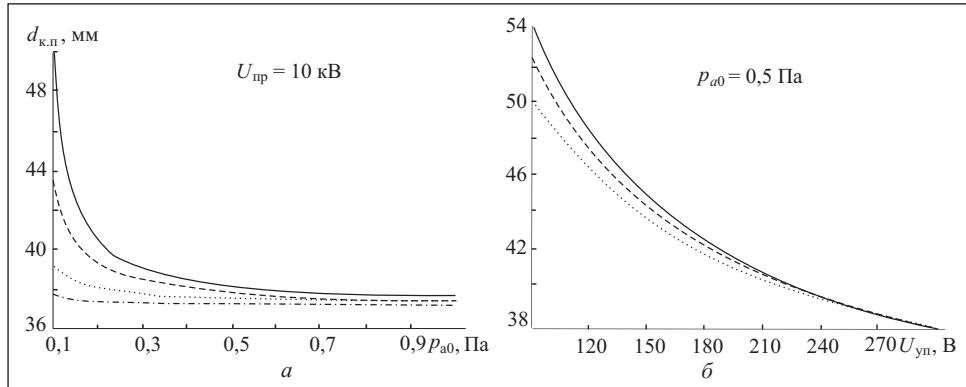


Рис. 4. Графики зависимостей положения границы АП относительно поверхности катода от приведенного давления газа в разрядном промежутке (а) и от напряжения горения вспомогательного разряда (б): а — $U_{уп} = 100$ В; ---- $U_{уп} = 150$ В; ... $U_{уп} = 250$ В; — · — $U_{уп} = 300$ В; б — $U_{пр} = 10$ кВ; ---- $U_{пр} = 15$ кВ; ... $U_{пр} = 20$ кВ

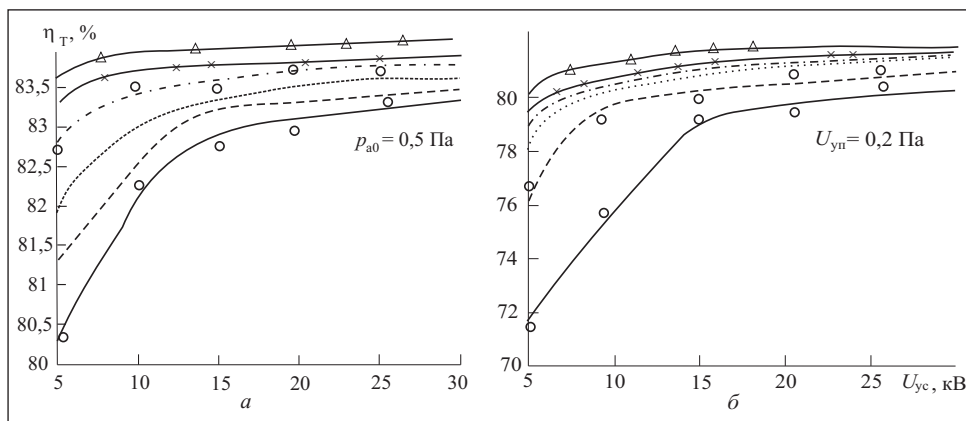


Рис. 5. Графики рассчитанных зависимостей энергетической эффективности триодного источника электронов от ускоряющего напряжения для различного напряжения горения вспомогательного разряда (а) и приведенного давления газа в разрядном промежутке (б): а — $U_{уп} = 90$ В; ---- $U_{уп} = 120$ В; ... $U_{уп} = 150$ В; — · — $U_{уп} = 180$ В; × — $U_{уп} = 210$ В; △ — $U_{уп} = 240$ В; б — $P_{a0} = 1$ Па; ---- $P_{a0} = 0,8$ Па; ... $P_{a0} = 0,6$ Па; — · — $P_{a0} = 0,5$ Па; × — $P_{a0} = 0,4$ Па; △ — $P_{a0} = 0,2$ Па; ○ — экспериментальные данные

жет быть обусловлено только увеличением степени ионизации газа. Аналогичные результаты получены для ЭС ВТР с цилиндрическим анодом и кольцевым электродом [7, 15].

Из рис. 5 видно, что энергетическая эффективность триодных источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом увеличивается при увеличении ускоряющего и управляющего напряжения и

при уменьшении давления газа в разрядном промежутке. Максимальная энергетическая эффективность рассматриваемых источников электронов ВТР составляла приблизительно 80%, т.е. была немного меньше, чем для источников электродов с кольцевым электродом, для которых этот параметр может достигать 90% [7, 15]. Это обусловлено тем, что при увеличении площади управляющего электрода увеличивается ток вспомогательного разряда (12).

Однако несомненным преимуществом источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом является их более высокая мощность и большая эффективность управления током разряда, а также относительная простота конструкции источника. Как видно из рис. 5, расхождение расчетных и экспериментальных данных не превышает 10%, что свидетельствует о высокой точности и адекватности предложенного метода моделирования и разработанного алгоритма.

Выводы

Полученные результаты моделирования показали, что энергетическая эффективность источников электронов ВТР в стационарном режиме работы может достигать 80%. Для повышения энергетической эффективности источника электронов ВТР при постоянном ускоряющем напряжении можно увеличивать напряжение горения вспомогательного разряда или уменьшать давление в разрядном промежутке. Эффективность и точность предложенного итерационного алгоритма, предназначенного для расчета положения границы АП относительно катода, подтверждается следующим:

расхождение между расчетными и экспериментальными данными не превышает 10%,

время расчета задачи на современных персональных компьютерах не превышает одной минуты.

В предложенном алгоритме не используются справочные или экспериментальные данные о термодинамических параметрах АП для заданных режимов горения ВТР, что также является его достоинством.

Полученные результаты моделирования представляют практический интерес для проектировщиков электроннолучевого технологического оборудования. Мощность рассмотренных источников электронов ВТР с пластинчатым управляющим электродом при работе в стационарном режиме может составлять от десятков до сотен киловатт. Такие источники электронов могут быть успешно использованы в современных технологиях нанесения тонких пленок или вакуумной переплавки тугоплавких металлов. Вопрос о возможности работы источников электронов ВТР с пластин-

чатый управляющим электродом в импульсном режиме пока остается открытым и требует проведения дополнительных теоретических и экспериментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладохин С.В., Левицкий Н.И., Чернявский В.Б. и др.* Электроннолучевая плавка в литейном производстве. Киев: «Сталь», 2007. — 605 с.
2. *Grechanyuk M.I., Melnyk A.G., Grechanyuk I.M. et al.* Modern electron beam technologies and equipment for melting and physical vapor deposition of different materials // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*, 2014, vol. 49, № 5—6, p. 115—121.
3. *Mattausch G., Zimmermann B., Fietzke F. et al.* Gas discharge electron sources — proven and novel tools for thin-film technologies // *Ibid.*, 2014, vol. 49, № 5—6, p. 183—195.
4. *Feinaeugle P., Mattausch G., Schmidt S., Roegner F.H.* A new generation of plasma-based electron beam sources with high power density as a novel tool for high-rate PVD // *Society of Vacuum Coaters. 54-th Annual Technical Conference Proceedings*, Chicago, 2011, p. 202—209.
5. *Yarmolich D., Nozar P., Gleizer S. et al.* Characterization of deposited films and the electron beam generated in the pulsed plasma deposition gun // *Japanese Journal of Applied Physics*, 2011, vol. 50, 08JD03.
6. *Mattausch G., Scheffel B., Zywitzki O. et al.* Technologies and tools for the plasma-activated EB high-rate deposition of Zirconia // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*, 2012, vol. 47, № 5—6, p. 152—158.
7. *Мельник И.В.* Обобщенная методика моделирования триодных источников электронов высоковольтного тлеющего разряда // *Электрон. моделирование*, 2013, **35**, № 4, с. 93—107.
8. *Denbnovetsky S.V., Melnyk V.I., Melnyk I.V., Tugay B.A.* Model of control of glow discharge electron gun current for microelectronics production applications. // *Proc. of SPIE. Sixth International Conference on “Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics”*, 2003, vol. 5065, p. 64—76.
9. *Шиллер З., Гайзиг У., Панцер З.* Электроннолучевая технология. М.: Энергия, 1980, 528 с.
10. *Рыкалин Н.Н., Зуев И.В., Узлов А.А.* Основы электроннолучевой обработки материалов. М.: Машиностроение, 1978, 239 с.
11. *Grechanyuk N., Kucherenko P., Grechanyuk I., Shpack P.* Modern technologies and equipment for obtaining of new materials and coatings // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*, 2006, vol. 41, № 5—6, p. 122—128.
12. *Pinto T., Buxton A., Neailey K., Barnes S.* Surface engineer improvements and opportunities with electron beams // *Ibid.* 2014, vol. 49, № 5—6, p. 221—225.
13. *Мельник И.В.* Оценка времени увеличения тока высоковольтного тлеющего разряда в триодной электродной системе при подаче управляющих импульсов // *Изв. вузов. учебных заведений. Радиоэлектроника*, 2013, **56**, № 12, с. 51—61.
14. *Melnyk I.V.* Simulation of time of current increasing in impulse triode high voltage glow discharge electron guns // *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*, 2014, vol. 49, № 5—6, p. 254—258.
15. *Мельник И.В., Тугай С.Б.* Аналитический расчет положения границы анодной плазмы в высоковольтном разрядном промежутке при зажигании вспомогательного разряда // *Известия вузов. Радиоэлектроника*, 2012, **55**, № 11, с. 50—59.

16. Завьялов М.А., Крейнделъ Ю.Е., Новиков А.А., Шантурин Л.П. Плазменные процессы в технологических электронных пушках. М.: Атомиздат, 1989, 256 с.
17. Новиков А.А. Источники электронов высоковольтного тлеющего разряда с анодной плазмой. М.: Энергоатомиздат, 1983, 96 с.
18. Грановский В.Л. Электрический ток в газах. Том 1. Общие вопросы электродинамики газов. М.—Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952, 432 с.
19. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987, 592 с.
20. Велихов Е.П. Ковалев В.С., Рахимов А.Т. Физические явления в газоразрядной плазме. М.: Наука, 1987, 160 с.
21. Синкевич О.А. Стаханов И.П. Физика плазмы. Стационарные процессы в частично ионизированном газе. Учеб. пособие для вузов. М.: «Высшая школа», 1991, 191 с.
22. Мельник И.В., Тугай С.Б. Методика моделирования технологических источников электронов высоковольтного тлеющего разряда // Электрон. моделирование, 2010, **32**, № 6, с. 31—43.
23. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: «Наука», 1985, 334 с.
24. Васильев В.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учебное пособие для вузов. М. «Наука», 1988, 552 с.

Поступила 01.08.17;
после доработки 22.08.17

REFERENCES

1. Ladokhin, S.V., Levitsky, N.I., Chernyavsky, V.B. et al. (2007), *Elektronnoluchevaya pлавка v liteinom proizvodstve* [Electron-beam melting in foundry], Stal, Kyiv, Ukraine.
2. Grechanyuk, M.I., Melnyk, A.G., Grechanyuk, I.M. et al. (2014), “Modern electron beam technologies and equipment for melting and physical vapor deposition of different materials”, *Elektrotechnika and Elektronika (E+E)*, Vol. 49, no. 5-6, pp. 115-121.
3. Mattausch, G., Zimmermann, B., Fietzke, F. et al. (2014), “Gas discharge electron sources — proven and novel tools for thin-film technologies”, *Elektrotechnika and Elektronika (E+E)*, Vol. 49, no. 5-6, pp. 183-195.
4. Feinaeugle, P., Mattausch, G., Schmidt, S. and Roegner, F.H. (2011), “A new generation of plasma-based electron beam sources with high power density as a novel tool for high-rate PVD”, Society of Vacuum Coaters, *Proceedings of the 54th Annual Technical Conference*, Chicago, 2011, pp. 202-209.
5. Yarmolich, D., Nozar, P., Gleizer, S. et al. (2011), “Characterization of deposited films and the electron beam generated in the pulsed plasma deposition gun”, *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 50, 08JD03.
6. Mattausch, G., Scheffel, B., Zywitzki, O. et al. (2012), “Technologies and tools for the plasma-activated EB high-rate deposition of Zirconia”, *Elektrotechnika and Elektronika (E+E)*, Vol. 47, no. 5-6, pp. 152-158.
7. Melnik, I.V. (2013), “Generalized methods of modeling triode sources of electrons of high-voltage glow discharge”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 35, no. 4, pp. 93-107.
8. Denbnovetsky, S.V., Melnyk, V.I., Melnyk, I.V. and Tugay, B.A. (2003), “Model of control of glow discharge electron gun current for microelectronics production applications”, *Proceedings of SPIE. Sixth International Conference on “Material Science and Material Properties for Infrared Optoelectronics”*, Vol. 5065, pp. 64-76.
9. Schiller, S., Geisig, U. and Pantser, S. (1980), *Elektronnoluchevaya tekhnologiya* [Electron-beam technology], Energiya, Moscow, USSR.

10. Rykalin, P.P., Zuev, I.V. and Uglov, A.A. (1978), *Osnovy elektronoluchevoy obrabotki materialov* [Principles of electron-beam processing of materials], Mashinostroenie, Moscow, USSR.
11. Grechanyuk, N., Kucherenko, P., Grechanyuk, I. and Shpack, P. (2006), "Modern technologies and equipment for obtaining of new materials and coatings", *Elektrotechnica and Electronica (E+E)*, Vol. 41, no. 5-6, pp. 122-128.
12. Pinto, T., Buxton, A., Neailey, K. and Barnes, S. (2014), "Surface engineer improvements and opportunities with electron beams", *Elektrotechnica and Elektronika (E+E)*, Vol. 49, no. 5-6, pp. 221-225.
13. Melnyk, I.V. (2013), "Estimation of time for increasing current of a high-voltage glow discharge in triode electrode system under supply of the master pulses", *Izvestiya vuzov. Radioelektronika*, Vol. 56, no. 12, pp. 51-61.
14. Melnyk, I. V. (2014), "Simulation of time of current increasing in impulse triode high voltage glow discharge electron guns", *Elektrotechnica and Elektronika (E+E)*, Vol. 49, no. 5-6, pp. 254-258.
15. Melnyk, I.V., and Tugay, S.B. (2012), "Analytical calculation of position of anode plasma boundary in high-voltage discharge gap under burning of control discharge", *Izvestiya vuzov. Radioelektronika*, Vol. 55, no. 11, pp. 50-59.
16. Zavyalov, M.A., Kreindel, Yu.E., Novikov A.A., and Shanturin, L.P. (1989), *Plazmennyye protsessy v tekhnologicheskikh elektronnykh pushkakh* [Plasma processes in technological electron guns], Atomizdat, Moscow, USSR.
17. Novikov, A.A. (1983), *Istochniki elektronov vysokovoltmogo tleyushchego razryada s anodnoy plazmoy* [Sources of electrons of high-voltage glow discharge with anode plasma], Energoatomizdat, Moscow, USSR.
18. Granovsky, V.L. (1952), *Elektricheskiy tok v gazakh. Tom 1. Obshchie voprosy elektrodinamiki gazov* [Electrical current in gases. Vol. 1. General problems of gas electro-dynamics], Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury Moscow-Leningrad, USSR.
19. Raizer, Yu.P. (1987), *Fizika gazovogo razryada* [Gas discharge physics], Nauka, Moscow, USSR.
20. Velikhov, E.P., Kovalyov, V.S. and Rakhimov, A.T. (1987), *Fizicheskie yavleniya v gazo-razryadnoy plazme* [Physical phenomena in gas-discharge plasma], Nauka, Moscow, USSR.
21. Sinkevich, O.A. and Stakhanov, I.P. (1991), *Fizika plazmy. Statsionarnyye protsessy v chastichno ionizirovannom gaze. Uchebnoe posobie dlya vuzov* [Physics of plasma. Stationary processes in partially ionized gas. Manual for higher educational institutions], Vysshaya shkola, Moscow, Russia.
22. Melnyk, I.V., and Tugay, S.B. (2010), "Simulation procedure of technological sources of electrons of a high-voltage glow discharge", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 32, no. 6, pp. 31-43.
23. Plyn, V.P. (1985), *Chislennyye metody resheniya zadach elektrofiziki* [Numerical methods to solve electrophysics problems], Nauka, Moscow, USSR.
24. Vasilyev, V.P. (1988), *Chislennyye metody resheniya ekstremalnykh zadach. Uchebnoe posobie dlya vuzov* [Numerical methods to solve extremal problems. Manual for higher educational institutions], Nauka, Moscow, USSR.

Received 01.08.17;
after revision 22.08.17

I.V. Melnyk

MODELING OF TRIODE SOURCES OF ELECTRONS OF A HIGH-VOLTAGE GLOW DISCHARGE (HGD) WITH PLATE CONTROL ELECTRODE AND CONICAL ANODE

The methods of modeling of triode sources of electrons of a high-voltage glow discharge (HGD) with plate control electrode and conical anode have been stated. The proposed methods are based on iteration algorithm which permits determining thermodynamic parameters of free electrons in anode plasma with allowance for electrical parameters of the model and electro-physical parameters of materials used for electrodes and working gas. Modeling resulted in obtaining dependences of energy efficiency of the electron sources on accelerating voltage, burning voltage of a control bit and reduced pressure in the discharge gap. It has been established that the energy efficiency of electron sources of HGD with plate control electrode and conical anode is from 70 to 85%.

Keywords: triode sources of electrons, high-voltage glow discharge, electrical control of discharge current, anode plasma, energy efficiency.

МЕЛЬНИК Игорь Витальевич, д-р техн. наук, профессор кафедры электронных приборов и устройств Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 1989 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — моделирование электроннолучевых технологических устройств, теория газового разряда, программирование и теория алгоритмов.

УДК 681.5.015

Ю.А. Клевцов, канд. техн. наук
(Украина, 03150, Киев,
тел. (044) 5290566, e-mail: kk123@ukr.net)

Моделирование объектов с распределенными параметрами четвертого порядка

На основании теории конечных интегральных преобразований рассмотрен класс моделей — передаточные функции объектов, для описания которых необходимы дифференциальные уравнения в частных производных. Приведены правила, устанавливающие соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях. Рассмотрены примеры моделирования объектов с распределенными параметрами.

К л ю ч е в ы е с л о в а: конечные интегральные преобразования, объекты с распределенными параметрами, передаточная функция.

На основі теорії кінцевих інтегральних перетворень розглянуто клас моделей — передавальні функції об'єктів, для опису яких необхідні диференціальні рівняння у частинних похідних. Наведено правила, які встановлюють відповідність між операціями в просторово-часовій та спектральній областях. Розглянуто приклади моделювання об'єктів з розподіленими параметрами.

К л ю ч о в і с л о в а: скінченні інтегральні перетворення, об'єкти з розподіленими параметрами, передаточна функція.

Спектральная теория нестационарных систем управления [1] применяется для решения задач управления объектами с сосредоточенными и распределенными параметрами [2—6]. Используя конечные интегральные преобразования, можно от решения дифференциальных уравнений перейти к решению систем линейных алгебраических уравнений, что упрощает решение задачи моделирования.

Однако спектральная теория нестационарных систем управления применялась для решения задач моделирования и идентификации распределенных объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных не выше второго порядка. Поэтому будем рассматривать возможность использования полученных ранее результатов для моделирования объектов с распределенными параметрами (ОРП) более высокого порядка, а именно четвертого, а также возможность моделирования различных гра-

© Ю.А. Клевцов, 2017

нических условий (не только первого, второго и третьего рода), возникающих при исследовании объектов высокого порядка. Такие объекты встречаются в механике, например моделирование поперечного колебания балки, консоли, пластины. На простых примерах моделирования одномерных и двумерных ОРП покажем методику моделирования ОРП четвертого порядка.

Постановка задачи. Допустим, модель некоторого абстрактного объекта можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right) = \Phi(x, y, z, t), \quad (1)$$

где $u = u(x, y, z, t)$, $t \geq 0$; t — время; x, y, z — пространственные аргументы, $0 \leq x \leq l_x$, $0 \leq y \leq l_y$, $0 \leq z \leq l_z$, $a \neq 0$. Все функции удовлетворяют необходимым условиям гладкости, функция $u(x, y, z, t)$ четырежды дифференцируема по пространственным аргументам и дважды по временному. Уравнение (1) должно удовлетворять начальным,

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = g(x, y, z), \quad (2)$$

и некоторым граничным условиям, например,

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= u(l_x, y, z, t) = u(x, 0, z, t) = 0, \\ u(x, l_y, z, t) &= u(x, y, 0, t) = u(x, y, l_z, t) = 0, \\ \frac{\partial u(0, y, z, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(l_x, y, z, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u(x, l_y, z, t)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = \frac{\partial u(x, y, l_z, t)}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Требуется найти функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую (1) с соответствующими начальными и граничными условиями.

Метод решения. Решение задачи будем искать на основании спектральной теории нестационарных систем управления [2—6], которая оперирует со спектральными характеристиками (СХ) функций. Поскольку функция $u(x, y, z, t)$, описывающая поведение трехмерного объекта (1), есть функция четырех аргументов, рассмотрим четырехмерную СХ U_{ijklm} . Если функция $u(x, y, z, t)$ интегрируема с квадратом по всем аргументам,

$$\int_0^T \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} u^2(x, y, z, t) dx dy dz dt < \infty,$$

то

$$U_{ijklm} = \int_0^T \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} \Psi_{ijklm}^*(x, y, z, t) u(x, y, z, t) dx dy dz dt, \quad (4)$$

где $\{\Psi_{ijklm}(x, y, z, t)\}$ — система ортонормированных базисных функций (ОБФ) на рассматриваемых отрезках в пространстве L_2 . Эту систему ОБФ можно представить в виде произведения одномерных ОБФ по одной переменной в пространстве L_2 :

$$\Psi_{ijklm}(x, y, z, t) = \psi_i(x) \psi_j(y) \varphi_k(z) \varphi_m(t),$$

где $\{\psi_i(x)\}, \{\psi_j(y)\}, \{\varphi_k(z)\}, \{\varphi_m(t)\}$ — системы ОБФ по одной переменной. Обратное преобразование осуществляется по формуле

$$u(x, y, z, t) = \sum_{ijklm} U_{ijklm} \Psi_{ijklm}(x, y, z, t). \quad (5)$$

Оператор определения СХ (4) обозначим $U_{ijklm} = S^4[u(x, y, z, t)]$, где степень при S указывает, относительно скольких аргументов определяется СХ.

Для того чтобы уравнение (1) с соответствующими начальными и граничными условиями записать в спектральной области, рассмотрим правила, устанавливающие соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях.

П р а в и л о 1. Вторая производная функции $u(x, y, z, t)$ по временному аргументу с учетом начальных условий (2) в спектральной области имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial t^2} &\Rightarrow (E \otimes E \otimes E \otimes P^2)U - \\ &- S^3[f(x, y, z)]P\Delta_t - S^3[g(x, y, z)]\Delta_t, \end{aligned} \quad (6)$$

где E — единичная матрица; \otimes — символ прямого произведения матриц; P — спектральная (двумерная) характеристика оператора дифференцирования, учитывающая начальные условия [1],

$$P_{ij} = \int_0^T \varphi_i^*(t) \frac{d\varphi_j(t)}{dt} dt + \varphi_i^*(0) \varphi_j(0);$$

S^3 — оператор определения спектральной характеристики функции трех аргументов; Δ_t — одномерная спектральная характеристика дельта функции, $\Delta_t = S[\delta(t)]$.

Рассмотрим правила дифференцирования по пространственным аргументам. Они зависят от вида граничных условий. Для упрощения записи примем следующее: $l = l_x = l_y = l_z$.

П р а в и л о 2. Четвертая производная функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу x при граничных условиях

$$u(0, y, z, t) = \frac{\partial u(0, y, z, t)}{\partial x} = 0, \quad u(l, y, z, t) = \frac{\partial u(l, y, z, t)}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

в спектральной области выполняется по правилу

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_2 \otimes E \otimes E \otimes E)U, \quad (8)$$

где $D_2 = PPRR$; P — СХ оператора дифференцирования, не учитывающая граничных условий [1],

$$P_{ij} = \int_0^l \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx;$$

R — СХ оператора дифференцирования, учитывающая граничные условия [3],

$$R_{ij} = \int_0^l \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx + \psi_i^*(0)\psi_j(0) - \psi_i^*(l)\psi_j(l).$$

Правило дифференцирования (7) по аргументу x обобщим на правила дифференцирования по аргументам y, z . Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу y вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial y^4} \Rightarrow (E \otimes D_2 \otimes E \otimes E)U, \quad (9)$$

если заданы граничные условия

$$u(x, 0, z, t) = \frac{\partial u(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0, \quad u(x, l, z, t) = \frac{\partial u(x, l, z, t)}{\partial y} = 0.$$

Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу z вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial z^4} \Rightarrow (E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)U, \quad (10)$$

если заданы граничные условия

$$u(x, y, 0, t) = \frac{\partial u(x, y, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad u(x, y, l, t) = \frac{\partial u(x, y, l, t)}{\partial z} = 0.$$

Если ОРП одномерный и граничные условия аналогичны (7), то

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_2 \otimes E)U. \quad (11)$$

П р а в и л о 3. Пусть заданы граничные условия вида

$$u(0, y, z, t) = \frac{\partial^2 u(0, y, z, t)}{\partial x^2} = 0, \quad u(l, y, z, t) = \frac{\partial^2 u(l, y, z, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

В этом случае четвертая производная функции $u(x, y, z, t)$ по x в спектральной области вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_3 \otimes E \otimes E \otimes E)U,$$

где $D_3 = PRPR$.

Рассмотренное правило дифференцирования функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу x обобщим на правила дифференцирования по аргументам y и z . Спектральная характеристика функции по аргументу y вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial y^4} \Rightarrow (E \otimes D_3 \otimes E \otimes E)U,$$

если заданы граничные условия

$$u(x, 0, z, t) = \frac{\partial^2 u(x, 0, z, t)}{\partial y^2} = 0, \quad u(x, l, z, t) = \frac{\partial^2 u(x, l, z, t)}{\partial y^2} = 0.$$

Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, y, z, t)$ по аргументу z вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, z, t)}{\partial z^4} \Rightarrow (E \otimes E \otimes D_3 \otimes E)U,$$

если заданы граничные условия

$$u(x, y, 0, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, 0, t)}{\partial z^2} = 0, \quad u(x, y, l, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, l, t)}{\partial z^2} = 0.$$

Если функционирование ОРП зависит только от x и y , то

$$\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_3 \otimes E)U, \quad \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} \Rightarrow (E \otimes D_3)U. \quad (13)$$

Если ОРП одномерный и граничные условия аналогичны (12), то

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_3 \otimes E)U. \quad (14)$$

П р а в и л о 4 позволяет учитывать смешанные производные. Четвертая производная функции $u(x, y, t)$ по аргументам x и y в спектральной области вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, y, t)}{\partial x^2 \partial y^2} \Rightarrow (D_{4x} \otimes D_{4y} \otimes E)U, \quad (15)$$

при граничных условиях $u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l, t) = 0$, где $D_{4x} = D_{4y} = PR$.

П р а в и л о 5. Спектральная характеристика четвертой производной функции $u(x, t)$ по аргументу x с учетом условий

$$u(0, t) = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(l, t)}{\partial x^3} = 0$$

вычисляется по формуле

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \Rightarrow (D_5 \otimes E)U. \quad (16)$$

Здесь $D_5 = RRPP$, где

$$R_{ij} = \int_0^1 \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx - \psi_i^*(l) \psi_j(l).$$

Эта СХ учитывает граничные условия на правой границе

$$P_{ij} = \int_0^1 \psi_i^*(x) \frac{d\psi_j(x)}{dx} dx + \psi_i(0) \psi_j(0).$$

Спектральная характеристика P учитывает условия на левой границе.

П р а в и л о 6. Если коэффициент a в уравнении (1) является функцией пространственных и временного аргументов, то необходимо применить правило, позволяющее вычислять произведение функций нескольких ар-

гументов в спектральной области. Пусть требуется найти СХ произведения функций $f(x, y, z, t)$, $u(x, y, z, t)$. Если функцию f можно представить в виде произведения $f(x, y, z, t) = a(x)b(y)c(z)v(t)$, то правило произведения функций будет иметь вид

$$[a(x)b(y)c(z)v(t)]u(x, y, z, t) \Rightarrow (A \otimes B \otimes C \otimes V)U,$$

где A, B, C, V — матрицы СХ множителей соответственно $a(x), b(y), c(z), v(t)$. Эти СХ вычисляются по формуле [1]

$$A_{ij} = \int_0^l \psi_i^*(x) \psi_j(x) a(x) dx.$$

По аналогичным формулам вычисляются СХ матриц B, C, V . Если $a = \text{const}$, то правило б упрощается:

$$a u(x, y, z, t) \Rightarrow a U. \quad (17)$$

Таким образом, операциям дифференцирования функции четырех аргументов в спектральной области соответствуют алгебраические операции над матрицами СХ. Используем рассмотренные правила для решения задачи моделирования.

Алгоритм моделирования применяем к абстрактному объекту (1) с начальными (2) и граничными (3) условиями. Для того чтобы трансформировать это уравнение в спектральную область, используем правила 1, 2, 6 и формулы (6)—(10), (17). В результате получаем

$$(E \otimes E \otimes E \otimes P^2)U + a[(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E)U] + \\ + (E \otimes D_2 \otimes E \otimes E)U + (E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)U = F + H, \quad (18)$$

где $F = S^4[\Phi(x, y, z, t)]$ — СХ возмущающей функции; $H = S^3[f(x, y, z)] \times \times P\Delta_t(0) + S^3[g(x, y, z)]\Delta_t(0)$ — СХ начальных условий. Выполнив алгебраические преобразования уравнения (18), получим

$$[E \otimes E \otimes E \otimes P^2 + a(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E + \\ + E \otimes D_2 \otimes E \otimes E + E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)] = F + H,$$

откуда $U = W(F + H)$, где

$$W = [E \otimes E \otimes E \otimes P^2 + a(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E + \\ + E \otimes D_2 \otimes E \otimes E + E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)]^{-1}. \quad (19)$$

Система алгебраических уравнений (19) разрешима, если существует обратная матрица W , критерием существования которой может служить

теорема 8.5.1 из работы [7], обобщенная на многомерный случай. Если $\lambda_m + a(\mu_i + \mu_j + \mu_k) \neq 0$, то матрица W существует, где $\lambda_m, \mu_i, \mu_j, \mu_k$ — собственные значения матриц P^2, D_2 .

Поскольку матрица W связывает СХ входной функции $\Phi(x, y, z, t)$ и выходной функции $u(x, y, z, t)$, то эта матрица является передаточной функцией объекта с распределенными параметрами (1) с краевыми условиями (3). Если в качестве входного воздействия использовать произведение дельта-функций $\delta(x-\xi)\delta(y-\zeta)\delta(z-\eta)\delta(t-\tau)$, то можно показать, что W есть СХ функции Грина $G(x-\xi, y-\zeta, z-\eta, t-\tau)$ объекта.

Численные примеры. Применение аналитического аппарата прямого или кронекерова произведения матриц является удобным способом записи операций над СХ. Матрицы СХ U_{ijkm} и F_{ijkm} представляются в виде матриц столбцов. Такое преобразование осуществляется посредством обхода сначала по индексу i , затем по индексу j и так далее. Матрицы, выполняющие операции дифференцирования, например $E \otimes E \otimes E \otimes P^2$, вследствие прямого произведения представляются в общем случае в виде квадратных матриц. Применение такого аппарата позволяет использовать для численных расчетов стандартные программы операций над матрицами.

Для проверки работоспособности приведенного алгоритма рассмотрим несколько примеров, три из которых — одномерные случаи, позволяющие упростить понимание метода.

Пример 1. Пусть некоторый объект описывается уравнением [8]

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (20)$$

с начальными,

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) + 0,5 \sin(3\pi x) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0,$$

и граничными,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, t)}{\partial x^2} = 0,$$

условиями. Данная задача описывает динамику тонкой колеблющейся балки, концы которой свободно опираются на две опоры (оба конца на шарнирах). Используя формулы (6), (14) и учитывая отсутствие аргументов y и z , уравнение (20) с соответствующими начальными и граничными условиями в спектральной области представим в виде $(E \otimes P^2)U + (D_3 \otimes E)U = H$, где $H = S [\sin(\pi x) + 0,5 \sin(3\pi x)] P \Delta_t(0)$, откуда

$$U = (E \otimes P^2 + D_3 \otimes E)^{-1} H. \quad (21)$$

Для численных расчетов во всех примерах в качестве базисных функций по временному и пространственным аргументам будем использовать ортонормированные на $[0, 1]$ полиномы Лежандра. Порядок матриц в примере 1 равен 55. Численные значения матриц $\Delta_t(0)$, P , \mathbf{P} , R приведены в [4, 9], $S[f(x)] = [0,742 \ 0 \ -0,102 \ 0 \ -0,242 \ 0 \ 0,067 \ 0 \ 0,008 \ \dots]^T$. Подставляя численные значения СХ в (21), получаем систему линейных алгебраических уравнений, решая которую с использованием обращения (5), находим функцию $u(x, t)$. Результаты моделирования спектральным методом сравнивались с точным решением [8]

$$u_{01}(x, t) = \cos(\pi^2 t) \sin(\pi x) + 0,5 \cos(9\pi^2 t) \sin(3\pi x).$$

Абсолютная относительная погрешность не превысила 1 %.

Пример 2. Моделируем динамику тонкой балки, концы которой жестко зажаты. Пусть уравнение, описывающее динамику такой балки, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} = \Phi(x, t). \quad (22)$$

Заданы начальные,

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

и граничные,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

условия, а также возмущающая функция $\Phi(x, t) = 2\sin^2(\pi x)(1 + 4\pi^4 t^2) - 8\pi^4 t^2 \cos^2(\pi x)$. Используя формулы (6), (11) и учитывая отсутствие пространственных аргументов y и z , уравнение (22) с начальными (23) и граничными (24) условиями в спектральной области запишем в виде $(E \otimes P^2)U + (D_2 \otimes E)U = S^2[\Phi(x, t)]$, откуда получим

$$U = (E \otimes P^2 + D_2 \otimes E)^{-1} S^2[\Phi(x, t)]. \quad (25)$$

Для моделирования этого примера также использовались ортонормированные на $[0, 1]$ полиномы Лежандра. Порядок матриц равен 11. Решая (25) и используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x, t)$. Результаты моделирования сравнивались с аналитическим решением $u_{02}(x, t) = t^2 \sin^2(\pi x)$. Абсолютная относительная погрешность не превысила 0,5 %.

Пример 3. Моделируем поперечные колебания тонкой балки (консоль). Один конец консоли закреплен, другой — свободен. Поперечные колебания такой балки описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \Phi(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (26)$$

с начальными,

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x),$$

и граничными,

$$u(0,t) = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u(1,t)}{\partial x^3} = 0,$$

условиями. Задана возмущающая функция $\Phi(x,t) = 10e^{-1} \sin(\pi x)$ и начальные условия $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$. Используя формулы (6) и (16) и учитывая, что отсутствуют аргументы y и z , уравнение (26) с соответствующими начальными и граничными условиями в спектральной области запишем в следующем виде: $(E \otimes P^2)U + (D_5 \otimes E)U = F$, где $F = S[f(x)]P\Delta_t(0) + S[g(x)]\Delta_t(0) + S^2[\Phi(x,t)]$. Отсюда $U = (E \otimes P^2 + D_5 \otimes E)^{-1}F$. Используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x,t)$. Результаты моделирования приведены на рисунке (размер СХ равен 20).

Эталонное решение вычислено с использованием функции Грина:

$$u_{03}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 f(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int_0^1 g(\xi) G(x,\xi,t) d\xi + \int_0^t \int_0^1 \Phi(\xi,\tau) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau,$$

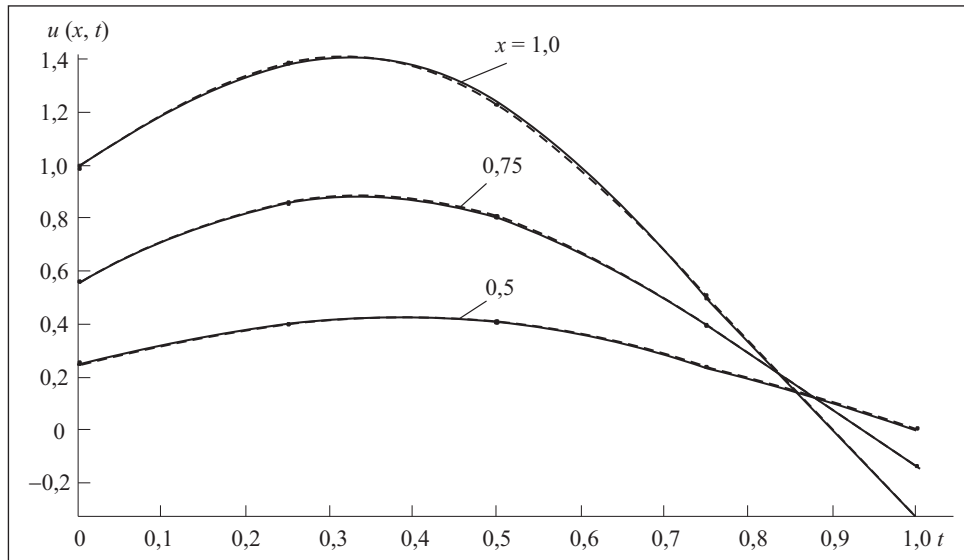
где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина,

$$G(x,\xi,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n^2 \varphi_n^2(1)} \sin^2(\lambda_n^2 t);$$

$$\varphi_n(x) = [\sinh(\lambda_n) + \sin(\lambda_n)][\cosh(\lambda_n x) - \cos(\lambda_n x)] - [\cosh(\lambda_n) + \cos(\lambda_n)][\sinh(\lambda_n x) - \sin(\lambda_n x)];$$

λ_n — положительные корни уравнения $\cosh(\lambda_n) \cos(\lambda_n) + 1 = 0$.

Из рисунка видно, что абсолютная погрешность составляет менее 1%. Погрешность носит синусоидальный характер и увеличивается при $x=1$.



Результаты моделирования (штриховая кривая) поперечных колебаний консоли и эталонное решение $u_{03}(x, t)$ (сплошная кривая) для траекторий точек консоли x

Пример 4. Моделируем поперечные колебания жесткой прямоугольной пластинки на упругом основании с шарнирной опорой по всему контуру. Поперечные колебания пластинки описываются уравнением [10]

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4} - u(x, y) = \Phi(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

с граничными условиями

$$u(0, y) = u(1, y) = \frac{\partial^2 u(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1, y)}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть $\Phi(x, y) = (4\pi^4 - 1)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Используя правила 3, 4 и формулы (13), (15) и учитывая отсутствие аргумента t , данное уравнение с граничными условиями трансформируем в спектральную область:

$$(D_3 \otimes E)U + 2(D_{4x} \otimes D_{4y})U + (E \otimes D_3)U - (E \otimes E)U = S^2[\Phi(x, t)].$$

Отсюда получаем

$$U = (D_3 \otimes E + 2D_{4x} \otimes D_{4y} + E \otimes D_3 - E \otimes E)^{-1} S^2[\Phi(x, t)].$$

Используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x, y)$.

Пример 5. Пусть некоторый абстрактный трехмерный ОРП описывается уравнением (1), $\Phi(x, y, z, t) = (1 + 3a\pi^4 e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z))$, $a = 5$. Заданы начальные,

$$u(x, y, z, 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) = f(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = -\sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) = g(x, y, z),$$

и граничные условия (3). Используя формулы (6), (8)—(10), с учетом (3) запишем уравнение (1) в спектральной форме:

$$(E \otimes E \otimes E \otimes P^2)U + 5[(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E)U] + \\ + (E \otimes D_2 \otimes E \otimes E)U + (E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)U = F + H.$$

Здесь $F = S^4[\Phi(x, y, z, t)]$; $H = S^3[f(x, y, z)]P\Delta_t(0) + S^3[g(x, y, z)]\Delta_t(0)$, откуда $U = W(F + H)$, где $W = [E \otimes E \otimes E \otimes P^2 + 5(D_2 \otimes E \otimes E \otimes E + E \otimes D_2 \otimes E \otimes E + E \otimes E \otimes D_2 \otimes E)]^{-1}$.

Для моделирования использована та же система ортонормированных на $[0, 1]$ базисных функций — полиномы Лежандра. Используя формулу обращения (5), находим функцию $u(x, y, z, t)$. Результаты моделирования спектральным методом при различных значениях n сравнивались с точным решением $u_0(x, y, z, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z)$.

Для сравнения результата моделирования u и эталонного решения u_0 использована величина средней относительной погрешности

$$\delta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{u_1 - u_{i0}}{u_{i0}} \right|.$$

Зависимость δ от размера СХ n приведена в таблице для примеров 4 и 5. Как видно из таблицы, с увеличением размера СХ повышается точность вычислений. Однако дальнейшее увеличение размера СХ не приводит к повышению точности.

Пример	Значение δ при n							
	3	4	5	6	7	8	9	10
4	669	0,12	1,98	0,003	0,007	0,0017	0,0016	0,0016
5	296	0,03	0,11	0,0015	0,001	0,001	0,001	0,001

Приведенные формулы справедливы для бесконечномерных матриц. Численные расчеты выполнены с усеченными матрицами. Спектральные характеристики усекаются, когда дискретные аргументы i, j, k, l изменяются от единицы до размера СХ n . Усечение приводит к погрешности результата.

Выводы

Сравнивая результаты пяти примеров моделирования с эталонными значениями можно сделать вывод о том, что спектральная теория нестационарных систем управления может быть использована для описания ОРП четвертого порядка. Простые примеры имеют аналитическое решение. Совпадение аналитического решения и решения спектральным методом подтверждает правильность разработанных алгоритмов.

Комбинируя матрицы СХ операторов дифференцирования, можно учесть различные граничные условия.

Передаточная функция ОРП зависит от вида граничных условий. Используя прямое произведение матриц (кронекерово произведение), удобно рассматривать трехмерные, двумерные, одномерные модели ОРП. Поскольку выполняются стандартные операции над матрицами спектральных характеристик (сложение, перемножение, обращение), метод удобен в программировании.

Предложенный алгоритм не зависит от систем базисных функций, что придает методу универсальность. Однако применение рассмотренного алгоритма ограничено объектами, заданными на параллелепипеде. Тем не менее, спектральный метод позволяет работать с объектами, имеющими более сложные границы [11]. Для этого необходимо преобразовать пространственные переменные так, чтобы прямоугольная область преобразовалась в прямоугольную. При этом исходное уравнение с новыми переменными получается более сложного вида. В дальнейшем планируется развивать спектральную теорию нестационарных систем управления для задачи моделирования стохастических и дискретных ОРП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974, 335с.
2. Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А. Спектральный метод структурно-параметрической идентификации объектов с распределенными параметрами // Вестн. КПИ. Сер. Техническая кибернетика. Вып. 5. Киев: Вища школа, 1981, с. 10—12.
3. Краскевич В.Е., Клевцов Ю.А. Спектральное представление линейных объектов с распределенными параметрами // Кибернетика на морском транспорте, 1981, вып. 10, с. 87—94.

4. Клевцов Ю.А. Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электрон. моделирование, 1988, **10**, № 3, с. 27—31.
5. Клевцов Ю.А. Алгоритм моделирования краевой задачи третьего рода // Там же, 2001, **23**, № 3, с. 40—46.
6. Клевцов Ю.А. Моделирование многомерных объектов с распределенными параметрами // Там же, 2012, **34**, №5, с. 20—40.
7. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978, 280 с.
8. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1985, 384 с.
9. Клевцов Ю.А. Структурные преобразования моделей систем с распределенными параметрами // Электрон. моделирование, 2016, **38**, № 1, с. 35—46.
10. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1979, 224 с.
11. Клевцов Ю.А. Моделирование объекта с распределенными параметрами, заданного на непрямоугольной области // Электрон. моделирование, 2011, **33**, № 1, с. 47—55.

Поступила 27.04.17;
после доработки 02.07.17

REFERENCES

1. Solodovnikov, V.V. and Semenov, V.V. (1974), *Spektralnaya teoriya nestatsionarnykh sistem upravleniya* [Spectral theory of non-stationary control systems], Nauka, Moscow, USSR.
2. Kraskevich, V.Ye. and Klevtsov, Yu.A. (1981), “Spectral method of structural-parametric identification of objects with distributed parameters”, *Vestnik KPI, Ser. Tekhnicheskaya kibernetika*, Vol. 5, pp. 10-12.
3. Kraskevich, V.Ye. and Klevtsov, Yu.A. (1981), “Spectral representation of linear objects with distributed parameters”, *Kibernetika na morskoy transporte*, Vol. 10, pp. 87-94.
4. Klevtsov, Yu.A. (1988), “Spectral description of objects with distributed parameters”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 10, no. 3, pp. 27-31.
5. Klevtsov, Yu.A. (2001), “Algorithm for modeling a boundary value problem of the third kind”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 23, no. 3, pp. 40-46.
6. Klevtsov, Yu.A. (2012), “Modeling multidimensional objects with distributed parameters”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 34, no. 5, pp. 20-40.
7. Lancaster, P. (1978), *Teoriya matrits* [Matrix theory], Nauka, Moscow, USSR.
8. Farlou, S. (1985), *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Partial differential equations for scientists and engineers], Mir, Moscow, USSR.
9. Klevtsov, Yu.A. (2016), “Structural transformations of models of systems with distributed parameters”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 38, no. 1, pp. 35-46.
10. Butkovskiy, A.G. (1979), *Kharakteristiki sistem s raspredelennymi parametrami* [Characteristics of distributed systems], Nauka, Moscow, USSR.
11. Klevtsov, Yu.A. (2011), “Modeling the object with distributed parameters defined on a nonrectangular domain”, *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 33, no. 1, pp. 47-55.

Received 27.04.17;
after revision 02.07.17

Yu.A. Klevtsov

MODELING OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED
PARAMETERS OF THE FOURTH ORDER

Based on the theory of finite integral transformations the author has considered a class of models — transfer functions of the objects, which description requires partial differential equations. The rules establishing the correspondence between operations in the space-time and spectral domain are presented. The examples of modeling the objects with distributed parameters are considered.

Key words: finite integral transformations, systems with distributed parameters, transfer function, mathematical modeling.

КЛЕВЦОВ Юрий Алексеевич, канд. техн. наук. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — объекты с распределенными параметрами, спектральная теория нестационарных систем управления, задачи моделирования и идентификации.



УДК 681.518.5:004.052.32

В.В. Сапожников, д-р техн. наук,
Вл.В. Сапожников, д-р техн. наук, **Д.В. Ефанов**, канд. техн. наук
Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I
(Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9,
тел. (+7) 9117092164, (+7) (812) 4578579,
e-mail: port.at.pgups@gmail.com)

Коды с суммированием с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел, в системах функционального контроля

Описаны особенности класса модифицированных взвешенных кодов с суммированием с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел. Установлено, что на свойства обнаружения ошибок модифицированными кодами существенно влияет способ вычисления поправочного коэффициента при формировании суммарного значения веса единичных разрядов информационного вектора. Теоретические результаты подтверждены результатами экспериментов с набором контрольных комбинационных схем LGSynth'89. Установлено, что изменяя правила вычисления поправочного коэффициента при модификации кода, можно влиять на структурную избыточность системы функционального контроля. Полученные результаты могут быть эффективны при организации контроля комбинационных логических схем и позволяют строить самопроверяемые структуры с меньшими аппаратными затратами, чем при дублировании.

К л ю ч е в ы е с л о в а: комбинационная схема, система функционального контроля, код Бергера, модифицированный взвешенный код Бергера, обнаружение ошибок, структурная избыточность.

Описано особливості класу модифікованих зважених кодів з підсумовуванням, послідовність вагових коефіцієнтів яких утворює натуральний ряд чисел. Показано, що на властивості виявлення помилок модифікованими кодами суттєво впливає спосіб обчислення поправкового коефіцієнта при формуванні сумарного значення ваги одиничних розрядів інформаційного вектора. Теоретичні результати підтверджено результатами експериментів із набором контрольних комбінаційних схем LGSynth'89. Встановлено, що змінюванням правил обчислення поправкового коефіцієнта можна впливати на структурну надлишковість системи функціонального контролю. Отримані результати ефективні за організації контролю комбінаційних логічних схем і дозволяють будувати самоконтрольовані структури з меншими апаратними витратами, ніж при дублюванні.

К л ю ч о в і с л о в а: комбінаційна схема, система функціонального контролю, код Бергера, модифікований зважений код Бергера, виявлення помилок, структурна надлишковість.

© В.В. Сапожников, Вл.В. Сапожников, Д.В. Ефанов, 2017

Помехоустойчивые коды, ориентированные на обнаружение ошибок, часто используют при разработке самопроверяемых схем встроенного контроля — систем функционального контроля (СФК) [1—3]. В таких системах контролируемое логическое устройство $F(x)$ снабжено специализированным контрольным оборудованием, которое предназначено для фиксации правильности вычисления блоком $F(x)$ значений своих рабочих функций f_1, f_2, \dots, f_m (рис. 1). Это, в свою очередь, позволяет косвенно судить об отсутствии (или наличии) неисправностей в структуре контролируемого устройства [4—6].

При организации СФК на основе помехоустойчивого кода, например кода с суммированием, выходы блока $F(x)$ отождествляются с информационным вектором длины m — вектором $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$. Архитектура контрольного оборудования определяется методами реализации контрольных функций для выбранного кода, а также набором функциональных элементов, из которых синтезируется устройство.

В состав контрольного оборудования входят блок контрольной логики $G(x)$ и тестер, образованный с помощью каскадного подключения блока генератора выбранного кода $G(f)$ и компаратора TRC . На выходах блока $G(x)$ формируются значения контрольных функций g_1, g_2, \dots, g_k , объединяющиеся в контрольный вектор $\langle g_k g_{k-1} \dots g_2 g_1 \rangle$ длиной k . Между векторами $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$ и $\langle g_k g_{k-1} \dots g_2 g_1 \rangle$ на этапе проектирования СФК устанавливается однозначное соответствие посредством получения значений последних по правилам выбранного кода с суммированием, т.е. (m, k) -кода [7—11]. Это соответствие в процессе эксплуатации системы контролируется на входах тестера. Блок $G(f)$ по значениям рабочих функций формирует альтернативный контрольный вектор $\langle g'_k g'_{k-1} \dots g'_2 g'_1 \rangle$, а компаратор TRC сравнивает поразрядно значения одноименных разрядов контрольных векторов. Компаратор синтезирован в виде схемы сжатия парафазных сигналов на основе стандартных модулей TRC , структуры которых описаны в [12]. По этой причине разряды контрольного вектора, вычисляемые блоком $G(x)$, предварительно инвертируются, что позволяет реализовать компаратор на основе $k-1$ модуля TRC . Контроль единственного парафазного сигнала на выходе компаратора позволяет осуществлять и косвенный контроль неисправностей в любом из элементов системы [13].

Важнейшими характеристиками СФК являются показатели обнаружения ошибок в контролируемом устройстве и показатели структурной избыточности системы, определяемые (m, k) -кодом, лежащим в основе СФК [15, 16]. Часто при организации СФК используют коды Бергера ($S(m, k)$ -коды) [17], эффективно обнаруживающие любые монотонные и асимметричные искажения на выходах блока $F(x)$. Тем не менее, как показано в [18], $S(m, k)$ -коды не обнаруживают большое число ошибок в информа-

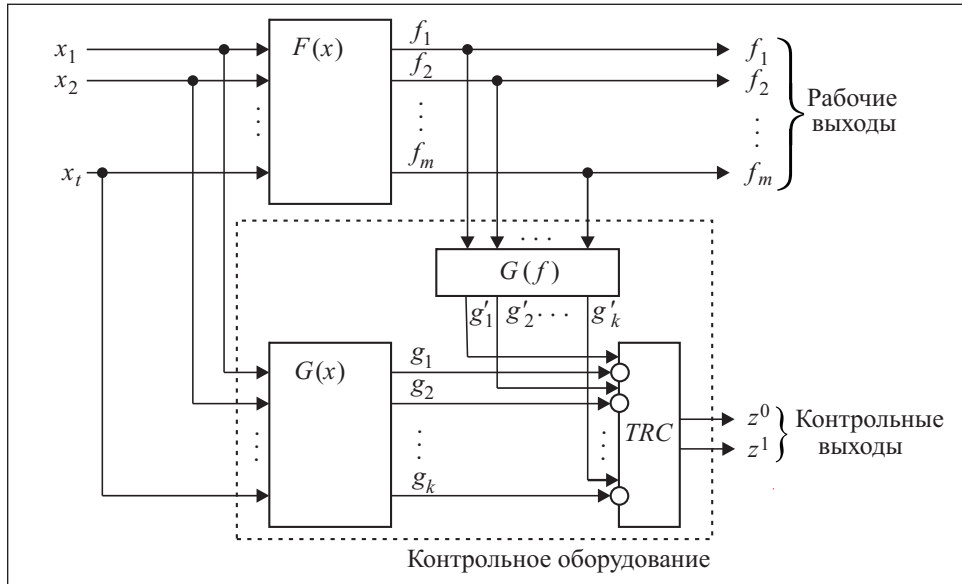


Рис. 1. Структурная схема СФК [14]

ционных векторах, особенно в области малой кратности. Это обуславливает необходимость внесения некоторой избыточности при организации контролепригодной системы диагностирования [19]. К недостаткам $S(m, k)$ -кодов можно также отнести трудность обеспечения полной самопроверяемости контрольного оборудования, объясняемой тем, что все возможные контрольные векторы в коде Бергера формируются только в частном случае при $m = 2^p - 1$, $p = 2, 3, \dots$ [2].

Возникает задача построения такого кода с суммированием, который будет обнаруживать большее число ошибок в информационных векторах (в особенности в области малой кратности ошибок), чем широко применяемые в задачах технической диагностики коды Бергера, при условии формирования всех контрольных векторов для любого значения m . Рассмотрим модификацию классических кодов Бергера в коды, удовлетворяющие поставленному условию, и приведем некоторые результаты применения модифицированных взвешенных кодов Бергера при организации СФК.

Модифицированные взвешенные коды с суммированием. В [20] предложен способ построения кодов с суммированием с улучшенными по сравнению с классическими кодами Бергера характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах. Этот способ основан на вычислении значения модифицированного веса информационного вектора по формуле

$$W = r \pmod{M} + \alpha M, \quad (1)$$

где $r \pmod{M}$ — значение наименьшего неотрицательного вычета веса информационного вектора кода по модулю $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$; α — специальный поправочный коэффициент, вычисляемый как сумма по модулю два заранее установленных разрядов в информационном векторе. В [21] предложено в качестве поправочного коэффициента использовать сумму значений по модулю два $m-k$, где $k = \lceil \log_2(m+1) \rceil$, старших разрядов информационного вектора:

$$a = f_m \oplus f_{m-1} \oplus \dots \oplus f_{m-k+1} \oplus f_{m-k}.$$

Однако это лишь один из способов вычисления поправочного коэффициента, который может быть подсчитан числом вариантов $\sum_{i=1}^{i=m-1} C_m^i = 2^m - 2$,

что дает возможность построения модифицированных кодов с различными свойствами [22]. В [23] показано, что при использовании представленного подхода построение модифицированных кодов с суммированием имеет два существенных недостатка, проявляющихся при синтезе СФК:

- 1) не удастся строить коды с минимальным общим числом обнаруживаемых ошибок при установленных значениях m и k ;
- 2) число двукратных обнаруживаемых ошибок уменьшается приблизительно в два раза по сравнению с кодами Бергера, но остается значительным по сравнению с общим числом двукратных ошибок.

Улучшение характеристик обнаружения ошибок кодами с суммированием достигается посредством установления неравноправия между разрядами информационного вектора при взвешивании разрядов [17] и подсчете значения модифицированного веса по формуле (1). При этом в качестве $r \pmod{M}$ используется значение наименьшего неотрицательного вычета суммарного значения весовых коэффициентов единичных разрядов [24, 25].

А л г о р и т м вычисления значений разрядов контрольных векторов модифицированных взвешенных кодов с суммированием.

1. Устанавливаем последовательность весовых коэффициентов разрядов информационного вектора, представляющую собой натуральный ряд чисел, начиная с младшего разряда: $[w_m; w_{m-1}; \dots; w_2; w_1] = [m; m-1; \dots; 2; 1]$.

2. Определяем модуль $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$.

3. Подсчитываем сумму весовых коэффициентов единичных информационных разрядов: $W = \sum_{i=1}^m w_i f_i$.

4. Определяем наименьший неотрицательный вычет числа W по выбранному модулю M : $W_M = W \pmod{M}$.

5. Подсчитываем поправочный коэффициент α , равный сумме по модулю два произвольного (но заранее установленного) числа информационных разрядов.

6. Формируем число

$$V = W_M + \alpha M. \quad (2)$$

7. Полученное число V представляем в двоичном виде и записываем в контрольный вектор.

Модифицированный взвешенный код с суммированием с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел, обозначим как $RWS(m, k)$ -код. В табл. 1 представлен процесс получения контрольных векторов $RWS(4, 3)$ -кода, для которого поправочный коэффициент α вычисляется как сумма по модулю два значений двух старших информационных разрядов: $\alpha = f_3 \oplus f_4$. Модуль определения вычета — $M = 2^{\lceil \log_2(4+1) \rceil - 1} = 2^2 = 4$.

Таблица 1. Кодовые векторы $RWS(4, 3)$ -кода при $\alpha = f_3 \oplus f_4$

Десятичный эквивалент информационного вектора	f_4	f_3	f_2	f_1	W	W_M	α	V	g_3	g_2	g_1
	$w_4 = 4$	$w_3 = 3$	$w_2 = 2$	$w_1 = 1$							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
2	0	0	1	0	2	2	0	2	0	1	0
3	0	0	1	1	3	3	0	3	0	1	1
4	0	1	0	0	3	3	1	7	1	1	1
5	0	1	0	1	4	0	1	4	1	0	0
6	0	1	1	0	5	1	1	5	1	0	1
7	0	1	1	1	6	2	1	6	1	1	0
8	1	0	0	0	4	0	1	4	1	0	0
9	1	0	0	1	5	1	1	5	1	0	1
10	1	0	1	0	6	2	1	6	1	1	0
11	1	0	1	1	7	3	1	7	1	1	1
12	1	1	0	0	7	3	0	3	0	1	1
13	1	1	0	1	8	0	0	0	0	0	0
14	1	1	1	0	9	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	10	2	0	2	0	1	0

$RWS(m, k)$ -коды имеют наименьшее общее число необнаруживаемых ошибок при своих длинах информационных и контрольных векторов, что объясняется выбором последовательности весовых коэффициентов и значением модуля, по которому определяется вычет на шаге 4 алгоритма. Признаком минимальности общего числа необнаруживаемых кодом ошибок является равномерность распределения всех информационных векторов между всеми контрольными векторами [20].

В табл. 2 показано такое распределение для рассматриваемого $RWS(4,3)$ -кода. Им не будет обнаруживаться 16 ошибок в информационных векторах (восемь четырехкратных и восемь трехкратных). Это в 3,375 раза меньше, чем классическим $S(m, k)$ -кодом и в 1,5 раза меньше, чем наилучшим модифицированным кодом с суммированием единичных разрядов [20].

В результате исследований установлено, что от того, какие разряды информационного вектора включены в линейную сумму поправочного коэффициента α , зависят характеристики получаемого модифицированного взвешенного кода с суммированием.

Теорема 1. $RWS(m, k)$ -код будет помехоустойчивым в том, и только в том случае, если при вычислении поправочного коэффициента α будет задействован разряд информационного вектора весом $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$.

Доказательство. Код с суммированием будет помехоустойчивым (обнаруживать любые однократные ошибки в информационных векторах) в том случае, если все его разряды будут проверяться разрядами контрольных векторов. На шаге 4 алгоритма определяется наименьший неотрицательный вычет суммы значений весовых коэффициентов единичных информационных разрядов:

$$W_M = W \pmod{M} = (f_1 w_1 + f_2 w_2 + \dots + f_m w_m) \pmod{M} = f_1 w_1 \pmod{M} + f_2 w_2 \pmod{M} + \dots + f_m w_m \pmod{M}. \quad (3)$$

Если для какого-либо слагаемого в конечной сумме (3) независимо от значения f_i ($f_i = 0$ либо $f_i = 1$) в сумму добавляется всегда одно и то же число, то разряд f_i не будет контролироваться. Поскольку $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$, а последовательность весовых коэффициентов разрядов образует нату-

Таблица 2. Контрольные группы $RWS(4,3)$ -кода при $\alpha = f_3 \oplus f_4$

Контрольный вектор при V							
0	1	2	3	4	5	6	7
000	001	010	011	100	101	110	111
0000	0001	0010	0011	0101	0110	0111	0100
1101	1110	1111	1100	1000	1001	1010	1011

ральный ряд чисел $[1; 2; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}; \dots; m]$, значение разряда с индексом $j = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$ не будет учитываться в конечной сумме W_M . По этой причине при модификации кода необходимо учесть значение разряда $j = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$ и включить его в сумму поправочного коэффициента. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. При данной длине информационного вектора возможно построение $N_{RWS(m,k)} = 2^{m-1}$ помехоустойчивых $RWS(m,k)$ -кодов.

Доказательство. Для любого $RWS(m,k)$ -кода на момент выполнения шага 4 алгоритма формирования значений разрядов контрольного вектора не учитывается значение только одного разряда в информационном векторе. На половине всех возможных наборов его значение равно нулю, а на второй половине — единице. Включая всякий раз в сумму поправочного коэффициента α значение разряда с индексом $j = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$, получаем помехоустойчивый код. Остальные $m - 1$ разрядов информационного вектора могут быть включены в сумму поправочного коэффициента α числом способов $\sum_{i=0}^{m-1} C_{m-1}^i = 2^{m-1}$. Теорема 2 доказана.

В табл. 3 представлено распределение необнаруживаемых ошибок по видам [26] и кратностям семейством $RWS(4,3)$ -кодов. Как видно из табл. 3, характеристики $RWS(4,3)$ -кодов с различными способами подсчета поправочного коэффициента могут повторяться. Например, распределения необнаруживаемых ошибок по видам и кратностям абсолютно идентичны для следующих вариантов подсчета поправочного коэффициента: $\alpha = f_4$ и $\alpha = f_1 \oplus f_3 \oplus f_4$, $\alpha = f_1 \oplus f_4$ и $\alpha = f_3 \oplus f_4$, $\alpha = f_2 \oplus f_4$ и $\alpha = f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$, $\alpha = f_1 \oplus f_2 \oplus f_4$ и $\alpha = f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$. Подобная особенность $RWS(4,3)$ -кодов, по всей видимости, связана со значениями весовых коэффициентов, а именно с четностью (или нечетностью) их значений. Для больших значений длин информационных векторов зависимость более сложная.

На рис. 2 в графической форме представлены распределения необнаруживаемых ошибок по видам для семейства $RWS(7,3)$ -кодов. По оси абсцисс отложен десятичный эквивалент, соответствующий способу вычисления поправочного коэффициента α . Например, число 57 представляется в двоичном виде как $\langle f_7 f_6 f_5 f_4 f_3 f_2 f_1 \rangle = \langle 0111001 \rangle$, что означает использование при вычислении поправочного коэффициента формулы $\alpha = f_1 \oplus f_4 \oplus f_5 \oplus f_6$. Из рис. 2 видно, что только половина способов вычисления поправочного коэффициента α обеспечивает построение помехоустойчивых $RWS(m,k)$ -кодов, обладающих различными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах.

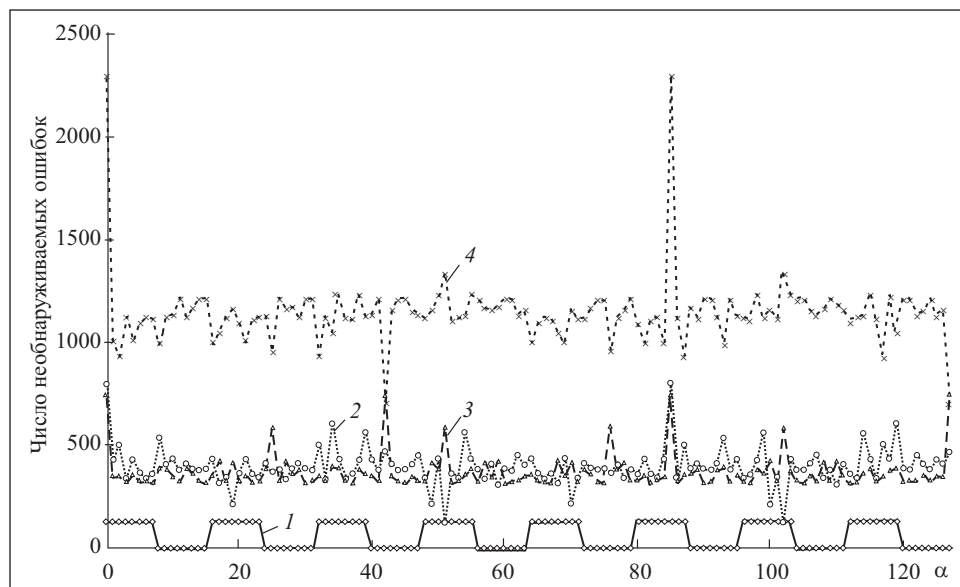


Рис. 2. Характеристики обнаружения ошибок семейством $RWS(7,3)$ -кодов: 1 — одиночные; 2 — монотонные; 3 — симметричные; 4 — асимметричные

Более детальный анализ характеристик $RWS(m, k)$ -кодов позволяет сузить множество кодов с различными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах. В табл. 4 приведены характеристики всех помехоустойчивых $RWS(m, k)$ -кодов с длинами информационных векторов $m = 4 \div 7$. Для каждого семейства кодов с одинаковой длиной информационного вектора указаны десятичные эквиваленты (индексы) коэффициентов α , а также приведены подробные данные о виде и кратности необнаруживаемых ошибок.

Таким образом, несмотря на то, что коэффициент α может быть получен 2^{m-1} способами, общее число модифицированных взвешенных кодов с суммированием с различными характеристиками обнаружения ошибок будет гораздо меньшим (табл. 5). Среди кодов с одинаковой длиной информационного вектора подбором правила вычисления поправочного коэффициента α можно определить наилучший код по характеристикам обнаружения ошибок различных видов или кратностей. Например, в СФК комбинационных логических схем наиболее часто возникают ошибки малых кратностей: $d = 1$ и $d = 2$. Следовательно, при организации системы диагностирования эффективным может оказаться использование $RWS(m, k)$ -кода с максимальным смещением кратности необнаруживаемой ошибки в большую сторону.

Таблица 4. Характеристики обнаружения ошибок $RWS(m, k)$ -кодами с малыми значениями длин информационных векторов

Код	Индекс коэффициента α	Число необнаруживаемых ошибок по кратностям						Общее число необнаруживаемых ошибок				Всех видов
		2	3	4	5	6	7	Монотонные	Симметричные	Асимметричные		
$RWS(4;3)$	8, 13	$\frac{8}{8/0/0}$	$\frac{8}{0/0/8}$	$\frac{0}{0/0/0}$				8	0	8	16	
	9, 12	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{8}{4/0/4}$	$\frac{8}{0/4/4}$				4	4	8	16	
	10, 15	$\frac{8}{8/0/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{8}{0/4/4}$				8	4	4	16	
	11, 14	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{16}{4/0/12}$	$\frac{0}{0/0/0}$				4	0	12	16	
$RWS(5;3)$	8, 29	$\frac{48}{32/16/0}$	$\frac{48}{8/0/40}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$			40	16	40	96	
	9, 13, 24, 28	$\frac{16}{16/0/0}$	$\frac{48}{8/0/40}$	$\frac{32}{4/12/16}$	$\frac{0}{0/0/0}$			28	12	56	96	
	10, 31	$\frac{48}{32/16/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{48}{4/20/16}$	$\frac{0}{0/0/0}$			36	36	24	96	
	11, 15, 26, 30	$\frac{16}{16/0/0}$	$\frac{64}{16/0/48}$	$\frac{16}{0/8/8}$	$\frac{0}{0/0/0}$			32	8	56	96	
	12, 25	$\frac{16}{0/16/0}$	$\frac{48}{24/0/24}$	$\frac{32}{0/16/16}$	$\frac{0}{0/0/0}$			24	32	40	96	
	14, 27	$\frac{16}{0/16/0}$	$\frac{64}{16/0/48}$	$\frac{16}{4/4/8}$	$\frac{0}{0/0/0}$			20	20	56	96	
	8, 29	$\frac{160}{94/64/0}$	$\frac{192}{32/0/160}$	$\frac{96}{16/32/48}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$		144	96	208	448	
	9, 13, 24, 28	$\frac{96}{64/32/0}$	$\frac{128}{16/0/112}$	$\frac{160}{24/56/80}$	$\frac{64}{4/0/60}$	$\frac{0}{0/0/0}$		108	88	252	448	
10, 31, 40, 61	$\frac{96}{64/32/0}$	$\frac{160}{32/0/128}$	$\frac{96}{8/40/48}$	$\frac{96}{8/0/88}$	$\frac{0}{0/0/0}$		112	72	264	448		
11, 15, 26, 30, 41, 45, 56, 60	$\frac{32}{32/0/0}$	$\frac{224}{48/0/176}$	$\frac{160}{16/64/80}$	$\frac{32}{4/0/28}$	$\frac{0}{0/0/0}$		100	64	284	448		
12, 25	$\frac{96}{32/64/0}$	$\frac{128}{64/0/64}$	$\frac{160}{0/80/80}$	$\frac{64}{8/0/56}$	$\frac{0}{0/0/0}$		104	144	200	448		
14, 27, 44, 57	$\frac{32}{0/32/0}$	$\frac{224}{64/0/160}$	$\frac{160}{24/56/80}$	$\frac{32}{0/0/32}$	$\frac{0}{0/0/0}$		88	88	272	448		
42, 63	$\frac{160}{96/64/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{228}{32/112/144}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$		128	176	144	448		

43, 47, 58, 62	$\frac{96}{64/32/0}$	$\frac{96}{48/0/144}$	$\frac{96}{8/40/48}$	$\frac{64}{4/0/60}$	$\frac{0}{0/0/0}$	124	72	252	448
46, 59	$\frac{96}{32/64/0}$	$\frac{192}{32/0/160}$	$\frac{96}{16/32/48}$	$\frac{64}{8/0/56}$	$\frac{0}{0/0/0}$	88	96	264	448
8, 93	$\frac{512}{320/192/0}$	$\frac{768}{128/0/640}$	$\frac{448}{80/176/192}$	$\frac{128}{0/0/128}$	$\frac{64}{4/24/36}$	532	392	996	1920
9, 12, 24, 29, 43, 46, 58, 63, 72, 77, 89, 92, 106, 111, 123, 126	$\frac{320}{192/128/0}$	$\frac{576}{128/0/448}$	$\frac{576}{64/224/288}$	$\frac{256}{24/0/232}$	$\frac{128}{0/32/96}$	410	384	1126	1920
10, 40, 95, 125	$\frac{384}{256/128/0}$	$\frac{512}{96/0/416}$	$\frac{448}{48/208/192}$	$\frac{448}{32/0/416}$	$\frac{64}{0/16/48}$	434	352	1134	1920
11, 14, 26, 31, 41, 44, 56, 61, 74, 79, 91, 94, 104, 109, 121, 124	$\frac{192}{128/64/0}$	$\frac{704}{160/0/544}$	$\frac{576}{64/224/288}$	$\frac{320}{24/0/296}$	$\frac{128}{4/40/84}$	380	328	1212	1920
13, 28, 73, 88	$\frac{256}{192/64/0}$	$\frac{512}{64/0/448}$	$\frac{704}{112/272/320}$	$\frac{384}{16/0/368}$	$\frac{64}{4/24/36}$	388	360	1172	1920
15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120	$\frac{128}{128/0/0}$	$\frac{768}{160/0/608}$	$\frac{704}{80/304/320}$	$\frac{192}{16/0/176}$	$\frac{64}{0/16/48}$	386	320	1214	1920
25, 76	$\frac{256}{64/192/0}$	$\frac{512}{256/0/256}$	$\frac{704}{16/368/320}$	$\frac{384}{32/0/352}$	$\frac{64}{4/24/36}$	372	584	964	1920
27, 57, 78, 108	$\frac{128}{0/128/0}$	$\frac{768}{224/0/544}$	$\frac{704}{112/272/320}$	$\frac{192}{0/0/192}$	$\frac{64}{0/16/48}$	338	416	1166	1920
42, 127	$\frac{512}{320/192/0}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{1216}{144/496/576}$	$\frac{0}{0/0/0}$	$\frac{192}{4/56/132}$	468	744	708	1920
47, 62, 107, 122	$\frac{256}{192/64/0}$	$\frac{768}{192/0/576}$	$\frac{448}{48/208/192}$	$\frac{256}{16/0/240}$	$\frac{192}{4/56/132}$	452	328	1140	1920
59, 110	$\frac{256}{64/192/0}$	$\frac{768}{128/0/640}$	$\frac{448}{80/176/192}$	$\frac{256}{32/0/224}$	$\frac{192}{4/56/132}$	308	424	1188	1920

Примечание: над чертой указано общее число обнаруживаемых ошибок данной кратностью, под чертой перед первой косой — число монотонных обнаруживаемых ошибок, перед второй косой — число симметричных, а после второй косой черта — число асимметричных обнаруживаемых ошибок.

Таблица 5. $RWS(m, k)$ -коды с различными характеристиками

m	Общее число кодов с различными характеристиками обнаружения ошибок	Минимальное число двукратных необнаруживаемых ошибок
4	4	0
5	6	16
6	9	32
7	11	128
8	33	0
9	85	256
10	144	1024

В табл. 5 приведено общее число $RWS(m, k)$ -кодов с различными характеристиками для значений длин информационных векторов $m = 4 \div 10$ и указано наименьшее число двукратных необнаруживаемых ошибок для каждого семейства кодов. Следует заметить, что при $m = 2^p - 1$, $p = 2, 3, \dots$, могут быть построены $RWS(m, k)$ -коды со 100 %-ным обнаружением двукратных ошибок в информационных векторах. На рис. 3 для сравнения по показателю обнаружения двукратных ошибок представлены описываемые модифицированные взвешенные коды с суммированием и известные модифицированные коды с суммированием единичных информационных разрядов ($RS(m, k)$ -коды) [20]. Как видим, $RWS(m, k)$ -кодами не обнаруживается менее 5 % двукратных ошибок в информационных векторах, тогда как $RS(m, k)$ -кодами — в среднем 20—25 % (классическими кодами Бергера не обнаруживается 50 % двукратных ошибок в информационных векторах [18]). У кодов Бергера и у $RS(m, k)$ -кодов все двукратные необнаруживаемые ошибки являются симметричными, тогда как $RWS(m, k)$ -код с подобным свойством может быть построен только при значениях $m < 8$ (с увеличением длины информационного вектора во множество необнаруживаемых двукратных ошибок добавляется некоторая доля монотонных ошибок).

Вопросы синтеза контрольного оборудования для $RWS(m, k)$ -кодов рассмотрены в работе [27]. Генераторы $RWS(m, k)$ -кодов синтезируются так. Подставив (3) в формулу (2), запишем

$$\begin{aligned}
 V &= W_M + \alpha M = \left(\sum_{i=1}^m w_i f_i \right) (\text{mod } M) + \alpha M = \\
 &= (w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_m f_m) (\text{mod } M) + \alpha M = \\
 &= w_1 f_1 (\text{mod } M) + w_2 f_2 (\text{mod } M) + \dots + w_m f_m (\text{mod } M) + \alpha M. \quad (4)
 \end{aligned}$$

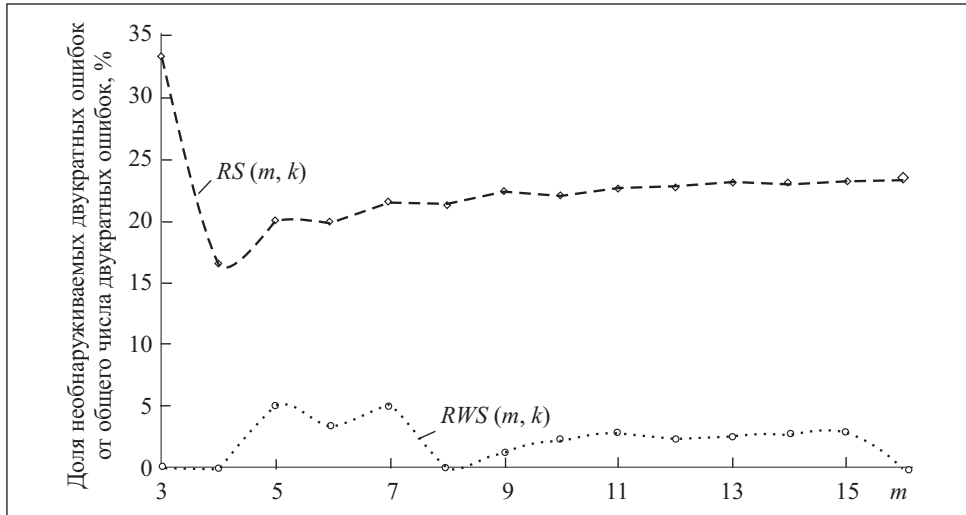


Рис. 3. RWS(m, k)- и RS(m, k)-коды обнаружения двукратных ошибок в информационных векторах

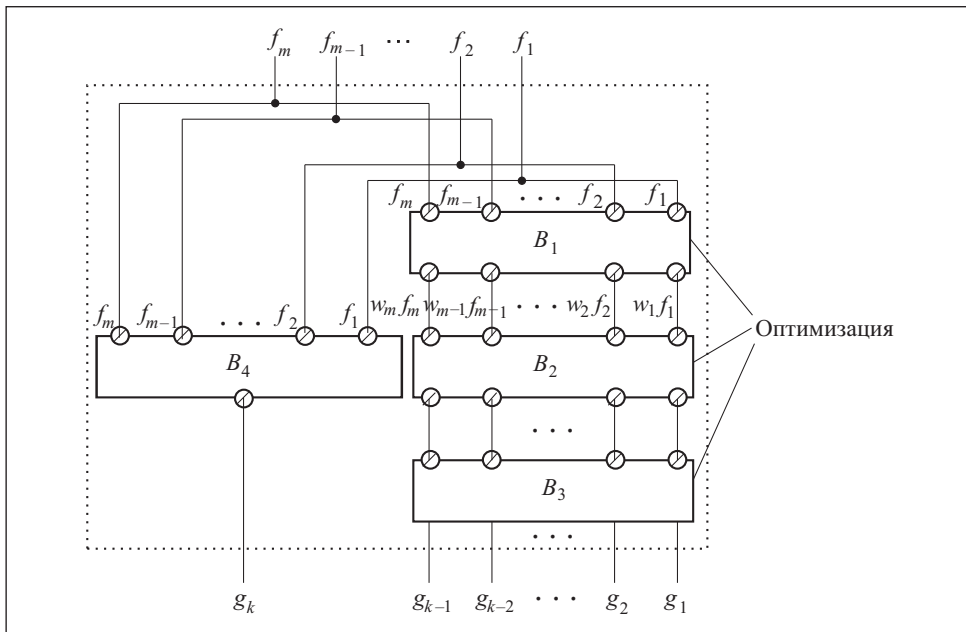


Рис. 4. Структурная схема генератора RWS(m, k)-кода: B_1 — блок взвешивания разрядов; B_2 — схема определения вычетов чисел $w_i f_i, i=1, m$; B_3 — сумматор вычетов; B_4 — устройство вычисления коэффициента α .

Конечное выражение в (4) позволяет напрямую реализовать генератор $RWS(m, k)$ -кода как сумматор наименьших неотрицательных вычетов весовых коэффициентов разрядов информационного вектора и устройство вычисления поправочного коэффициента α (рис. 4). Блоки $B_1—B_3$ могут быть построены посредством каскадного соединения типовых схем сложения двоичных чисел по заданному модулю M [28].

Результаты экспериментов с контрольными комбинационными схемами. В ходе экспериментов была поставлена следующая задача: определить, как изменяются характеристики обнаружения ошибок на выходах контрольных комбинационных схем при изменении правил вычисления поправочного коэффициента α , и оценить влияние данной процедуры на изменение структурной избыточности СФК. Решение этой задачи было связано с разработкой специализированного программного модуля, позволяющего симулировать одиночные константные неисправности (stuck-at fault) на выходах логических элементов и фиксировать их проявления на выходах схемы с последующей классификацией ошибок на обнаруживаемые и необнаруживаемые различных видов (одиночных, монотонных, симметричных и асимметричных) и различной кратностью. Данный программный модуль позволяет также получать все блоки СФК (см. рис. 1) для выбранной контрольной схемы в формате *.pla. Это, в свою очередь, позволяет с использованием интерпретатора SIS [29] рассчитать условный показатель площади, занимаемой на кристалле логическими устройствами, что является косвенным показателем сложности их технической реализации, а затем оценить структурную избыточность СФК.

Были проведены эксперименты по оценке влияния выбора правил построения $RWS(m, k)$ -кодов на характеристики СФК для набора контрольных комбинационных схем LGSynth'89 с небольшим числом выходов ($m \leq 15$) [30]. В табл. 6 представлены результаты моделирования неисправностей в контрольной схеме «cm162a», имеющей пять выходов. Перебраны все варианты образования коэффициента α и зафиксированы характеристики СФК, получаемых при использовании $RWS(m, k)$ -кодов. Из табл. 6 следует, что выбор правил вычисления поправочного коэффициента носит фундаментальный характер. Так, ровно половина получаемых кодов не являются помехоустойчивыми: ими не обнаруживается большое число одиночных ошибок в информационных векторах. Это объясняется тем, что при вычислении поправочного коэффициента для непомяоустойчивых кодов не учтено значение разряда f_4 (его вес равен значению модуля, что при вычислении наименьшего неотрицательного вычета суммарного веса приводит к отсутствию контроля значения данного разряда).

Таблица 6. Распределение необнаруживаемых ошибок на выходах схемы «см162а»

Правило вычисления коэффициента α	Число необнаруживаемых ошибок									
	Всего	по видам				по кратностям d				
		Одичные	Монотонные	Симметричные	Асимметричные	1	2	3	4	5
f_1	67 851	56 655	11 196	0	0	56 655	5 829	5 367	0	0
f_2	68 299	56 655	11 644	0	0	56 655	6 053	5 591	0	0
$f_1 \oplus f_2$	68 299	56 655	11 644	0	0	56 655	5 829	5 591	224	0
f_3	57 103	56 655	448	0	0	56 655	0	224	224	0
$f_1 \oplus f_3$	57 103	56 655	448	0	0	56 655	224	224	0	0
$f_2 \oplus f_3$	56 655	56 655	0	0	0	56 655	0	0	0	0
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$	57 551	56 655	896	0	0	56 655	224	448	224	0
f_4	6 277	0	6 277	0	0	0	6 053	224	0	0
$f_1 \oplus f_4$	6 277	0	6 277	0	0	0	5 829	224	224	0
$f_2 \oplus f_4$	6 277	0	6 277	0	0	0	6 053	0	224	0
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_4$	6 277	0	6 277	0	0	0	5 829	448	0	0
$f_3 \oplus f_4$	5 815	0	5 815	0	0	0	0	5 815	0	0
$f_1 \oplus f_3 \oplus f_4$	5 815	0	5 815	0	0	0	224	5 367	224	0
$f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$	5 815	0	5 815	0	0	0	0	5 591	224	0
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$	5 815	0	5 815	0	0	0	224	5 591	0	0
f_5	57 103	56 655	448	0	0	56 655	224	224	0	0
$f_1 \oplus f_5$	57 103	56 655	448	0	0	56 655	0	224	224	0
$f_2 \oplus f_5$	57 551	56 655	896	0	0	56 655	224	448	224	0
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_5$	56 655	56 655	0	0	0	56 655	0	0	0	0
$f_3 \oplus f_5$	67 851	56 655	11 196	0	0	56 655	5 829	5 367	0	0
$f_1 \oplus f_3 \oplus f_5$	68 523	56 655	11 868	0	0	56 655	6 053	5 591	224	0
$f_2 \oplus f_3 \oplus f_5$	68 523	56 655	11 868	0	0	56 655	6 053	5 591	224	0
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_5$	68 299	56 655	11 644	0	0	56 655	6 053	5 591	0	0
$f_4 \oplus f_5$	5 815	0	5 815	0	0	0	224	5 367	224	0
$f_1 \oplus f_4 \oplus f_5$	5 815	0	5 815	0	0	0	0	5 815	0	0
$f_2 \oplus f_4 \oplus f_5$	5 815	0	5 815	0	0	0	224	5 591	0	0
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_4 \oplus f_5$	5 815	0	5 815	0	0	0	0	5 591	224	0
$f_3 \oplus f_4 \oplus f_5$	6 277	0	6 277	0	0	0	5 829	224	224	0
$f_1 \oplus f_3 \oplus f_4 \oplus f_5$	6 277	0	6 277	0	0	0	6 053	224	0	0
$f_2 \oplus f_3 \oplus f_4 \oplus f_5$	6 277	0	6 277	0	0	0	5 829	448	0	0
$f_1 \oplus \dots \oplus f_5$	6 277	0	6 277	0	0	0	6 053	0	224	0
Всего на выходах	320 595	248 348	68 983	1 920	1 344	248 348	37 886	23 996	6 877	224

Другая половина $RWS(m, k)$ -кодов является помехоустойчивой и в зависимости от правил вычисления поправочного коэффициента имеет различные распределения обнаруживаемых ошибок по видам и кратностям. Такая закономерность характерна для всех рассмотренных контрольных комбинационных схем.

Следует заметить, что все помехоустойчивые $RWS(m, k)$ -коды значительно эффективнее обнаруживают симметричные ошибки на выходах контрольных комбинационных схем, чем $S(m, k)$ -коды, но гораздо хуже обнаруживают монотонные ошибки. Это и является главным недостатком. Применение $RWS(m, k)$ -кодов при синтезе СФК наиболее эффективно в случае, если на выходах контролируемой комбинационной схемы преобладают симметричные ошибки или монотонные ошибки с большой кратностью. Тем не менее, в некоторых случаях они являются более эффективными, чем $S(m, k)$ -коды.

В табл. 7 приведены результаты экспериментов с контрольной комбинационной схемой «стб», имеющей четыре выхода, на которых возможно возникновение ошибок с кратностями $d \leq 2$. Применение любого помехо-

Таблица 7. Результаты экспериментов с контрольной комбинационной схемой «стб»

Правило вычисления коэффициента α для $RWS(4,3)$ -кода	Площадь блоков СФК, у.е.			Площадь СФК, у.е.		Структурная избыточность СФК, %		Общее число обнаруживаемых ошибок кратностью d	
	$F(x)$	$G(x)$	$G(f)$	L_D	L_{CED}	δ	β	1	2
f_1	912	400	112	2464	1856	75,325	89,575	17530 / 248756	0 / 39456
f_2	912	392	112	2464	1848	75	89,189	17531 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_2$	912	384	184	2464	1912	77,597	92,278	17532 / 248756	0 / 39456
f_3	912	408	112	2464	1864	75,649	89,961	17533 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_3$	912	368	112	2464	1824	74,026	88,031	17534 / 248756	0 / 39456
$f_2 \oplus f_3$	912	368	176	2464	1888	76,623	91,12	17535 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$	912	400	184	2464	1928	78,247	93,05	17536 / 248756	0 / 39456
f_4	912	536	112	2464	1992	80,844	96,139	0 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_4$	912	584	152	2464	2080	84,416	100,386	0 / 248756	0 / 39456
$f_2 \oplus f_4$	912	608	152	2464	2104	85,39	101,544	0 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_4$	912	640	256	2464	2240	90,909	108,108	0 / 248756	0 / 39456
$f_3 \oplus f_4$	912	576	184	2464	2104	85,39	101,544	0 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_3 \oplus f_4$	912	544	184	2464	2072	84,091	100	0 / 248756	0 / 39456
$f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$	912	680	280	2464	2304	93,506	111,197	0 / 248756	0 / 39456
$f_1 \oplus f_2 \oplus f_3 \oplus f_4$	912	608	280	2464	2232	90,584	107,722	0 / 248756	0 / 39456
$S(m, k)$ -код	912	360	368	2464	2072	84,091	100	0 / 248756	6 / 39456

Примечание: в последних двух столбцах перед косой чертой указано число обнаруживаемых ошибок данной кратностью, после косой черты — общее число ошибок данной кратностью

устойчивого $RWS(m, k)$ -кода позволяет обнаружить в ней все возникающие на выходах ошибки, что не возможно при использовании кода Бергера. Изменение правил вычисления коэффициента α влияет не только на характеристики обнаружения кодом ошибок, но и на показатель площади схемы. С учетом этого можно «подобрать» приемлемый вариант кодирования для организации контроля комбинационной схемы. В табл. 7 приведены значения площадей СФК, построенных по $RWS(m, k)$ -кодам, кодам Бергера и по традиционной структуре дублирования. Все данные получены с использованием стандартной библиотеки функциональных элементов `stdcell2_2.genlib`. На основании полученных результатов рассчитаны специальные коэффициенты:

$$\delta = \frac{L_{CED}}{L_D} 100\%, \quad \beta = \frac{L_{CED}}{L_S} 100\%,$$

где L_{CED} — площадь СФК по соответствующему $RWS(m, k)$ - или $S(m, k)$ -коду; L_D — площадь системы дублирования; L_S — площадь системы контроля на основе кода Бергера.

Как следует из табл. 7, для всех рассмотренных (m, k) -кодов значение коэффициента δ не превышает 100%, что свидетельствует об эффективности приложения кода по сравнению с дублированием без учета свойств обнаружения ошибок на выходах контролируемой схемы. При этом площади структур контроля на основе $RWS(m, k)$ - и $S(m, k)$ -кодов сопоставимы, о чем свидетельствует значение коэффициента β . Тем не менее, подбором правил вычисления коэффициента α удастся построить такую СФК на основе $RWS(m, k)$ -кода, в которой обнаруживаются любые искажения на выходах контролируемой схемы и которая имеет меньшую площадь, чем структура контроля по коду Бергера (в рассматриваемом случае таким является $RWS(4, 3)$ -код, для которого $\alpha = f_4$).

Выводы

Используя предложенный способ построения семейства помехоустойчивых модифицированных кодов с суммированием, имеющих такое же число контрольных разрядов, как и код Бергера, можно посредством вычисления различными способами поправочного коэффициента α строить помехоустойчивые $RWS(m, k)$ -коды, обладающие различными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах. Изменения правил вычисления поправочного коэффициента влияют как на характеристики обнаружения ошибок кодом, так и на показатели структурной избыточности СФК.

Возможно построение модульно-взвешенных кодов с суммированием с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натураль-

ный ряд чисел, для которых модуль выбирается из множества $M \in \{2; 4; \dots; 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 2}\}$ (семейства $RWSM(m, k)$ -кодов). Помехоустойчивых $RWSM(m, k)$ -кодов меньше, чем помехоустойчивых $RWS(m, k)$ -кодов при данной длине информационного вектора, и они обнаруживают меньшее число ошибок в информационных векторах. Однако использование $RWSM(m, k)$ -кодов на практике может оказаться эффективным, давая возможность уменьшить сложность технической реализации СФК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McCluskey E.J.* Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits. N.J.: Prentice Hall PTR, 1986, 549 p.
2. *Согомонян Е.С., Слабаков Е.В.* Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М.: Радио и связь, 1989, 207 с.
3. *Fujiwara E.* Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006, 720 p.
4. *Дрозд А.В.* Нетрадиционный взгляд на рабочее диагностирования вычислительных устройств // Проблемы управления, 2008, № 2, с. 48—56.
5. *Дрозд А.В., Харченко В.С., Антощук С.Г. и др.* Рабочее диагностирование безопасных информационно-управляющих систем. Под ред. А.В. Дрозда и В.С. Харченко. Харьков: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2012, 614 с.
6. *Зеленая ИТ-инженерия.* В двух томах. Том 1. Принципы, модели, компоненты / Под ред. В.С. Харченко. Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2014, 594 с.
7. *Gorshe S.S., Bose B.* A Self-Checking ALU Design with Efficient Codes // Proc. of 14th VLSI Test Symposium, Princeton, NJ, USA, 1996, p. 157-161. DOI: 10.1109/VTEST.1996.510851.
8. *Touba N.A., McCluskey E.J.* Logic Synthesis of Multilevel Circuits with Concurrent Error Detection // IEEE Transaction on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System. Vol. 16, Jul. 1997, p. 783—789.
9. *Nicolaidis M., Zorian Y.* On-Line Testing for VLSI — A Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications, 1998, № 12, p. 7—20. DOI: 10.1023/A:1008244815697.
10. *Das D., Touba N.A.* Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999, Vol. 15, Issue 1-2, p. 145—155. DOI: 10.1023/A:1008344603814.
11. *Mitra S., McCluskey E.J.* Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proc. of International Test Conference, 2000, USA, Atlantic City, NJ, 03-05 October 2000, p. 985—994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311.
12. *Carter W.C., Duke K.A., Schneider P.R.* Self-Checking Error Checker for Two-Rail Coded Data. — Jan. 26, 1971, United States Patent Office, No. 3,559,167, Peekskill, N. Y., 10 p.
13. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Самопроверяемые дискретные устройства. СПб: Энергоатомиздат, 1992, 224 с.
14. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Дмитриев В.В., Хуан Ц.* Оптимальный систематический код на основе взвешивания разрядов информационных векторов и суммирования без переносов для систем функционального контроля // Известия Петербургского университета путей сообщения, 2016, № 1, с. 75—84.

15. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Черепанова М.Р. Модульные коды с суммированием в системах функционального контроля. I. Свойства обнаружения ошибок кодами в информационных векторах // Электрон. моделирование, 2016, **38**, №2, с. 27—48
16. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Черепанова М.Р. Модульные коды с суммированием в системах функционального контроля. II. Уменьшение структурной избыточности систем функционального контроля // Электрон. моделирование, 2016, **38**, №3, с. 47—61.
17. Berger J.M. A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels // Information and Control, 1961, Vol. 4, Issue 1, p. 68—73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5 .
18. Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика, 2010, № 6, с. 155—162.
19. Гессель М., Морозов А.А., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Исследование комбинационных самопроверяемых устройств с независимыми и монотонно независимыми выходами // Там же, 1997, №2, с. 180—193.
20. Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Построение модифицированного кода Бергера с минимальным числом необнаруживаемых ошибок информационных разрядов // Электрон. моделирование, 2012, **34**, №6, с. 17—29.
21. Блюдов А.А., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Модифицированный код с суммированием для организации контроля комбинационных схем // Автоматика и телемеханика, 2012, № 1, с. 169—177.
22. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Blyudov A. On the Problem of Selection of Code with Summation for Combinational Circuit Test Organization // Proc. of 11th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013), Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013, p. 261-266. DOI: 10.1109/EWDTS.2013.6673133.
23. Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. О кодах с суммированием единичных разрядов в системах функционального контроля // Автоматика и телемеханика, 2014, № 8, с. 131—145.
24. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Nikitin D. Sum Code Formation with Minimum Total Number of Undetectable Errors in Data Vectors // Proc. of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015), Batumi, Georgia, September 26-29, 2015, p. 141—148. DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493112.
25. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl. On One Method of Formation of Optimum Sum Code for Technical Diagnostics Systems // Proc. of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016), Yerevan, Armenia, October 14-17, 2016, p. 158—163. DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807633.
26. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов // Изв. вузов. Приборостроение, 2015, **58**, № 5, с. 333—343. DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343.
27. Ефанов Д.В. К вопросу синтеза генераторов модифицированных кодов с суммированием взвешенных информационных разрядов с последовательностью весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел // Вест. Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, 2016, № 4, с. 13—26. — DOI: 10.17223/19988605/37/2.
28. Ефанов Д.В. Способ синтеза генераторов взвешенных кодов с суммированием // Изв. вузов. Физика, 2016, **59**, № 8/2, с. 33—36.
29. SIS: A System for Sequential Circuit Synthesis / E. M. Sentovich, K. J. Singh, L. Lavagno, C. Moon, R. Murgai, A. Saldanha, H. Savoj, P. R. Stephan, R. K. Brayton, A. Sangiovanni-Vincentelli // Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 4 May 1992, 45 p.
30. Collection of Digital Design Benchmarks [Режим доступа: <http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Benchmarks/>].

Поступила 22.06.17

REFERENCES

1. McCluskey, E.J. (1986), *Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits*, Prentice Hall PTR, New Jersey, USA.
2. Sogomonyan, E.S., and Slabakov, E.V. (1989), *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivyye sistemy* [Self-checking devices and failover systems], Radio i svyaz, Moscow, Russia.
3. Fujiwara, E. (2006), *Code design for dependable systems: Theory and practical applications*, John Wiley & Sons, New Jersey, USA.
4. Drozd, A.V. (2008), "An untraditional view on operational diagnostics of computing devices", *Problemy upravleniya*, no. 2, pp. 48-56.
5. Drozd, A.V., Kharchenko, V.S., Antoshchuk, S.G., et al. (2012), *Rabocheye diagnostirovaniye bezopasnykh informatsionno-upravlyayuschikh sistem* [On-line testing of safe information and control systems], National Aerospace University «KhAI», Kharkov, Ukraine.
6. *Zelenaya IT-inzheneriya. V dvuh tomah. Tom 1. Printsipy, modeli, komponenty* [Green IT engineering. Vol. 1: Concepts, models, components], Ed. V.S. Kharchenko, National Aerospace University «KhAI», Kharkov, Ukraine.
7. Gorshe, S.S. and Bose, B. (1996), "A self-checking ALU design with efficient codes", *Proceedings of the 14th VLSI test symposium*, Princeton, NJ, USA, pp. 157-161, DOI:10.1109/VTEST.1996.510851.
8. Touba, N.A. and McCluskey, E.J. (1997), "Logic synthesis of multilevel circuits with concurrent error detection", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and System*, Vol. 16, Jul., pp. 783-789.
9. Nicolaidis, M. and Zorian, Y. (1998), On-Line Testing for VLSI – A Compendium of Approaches, *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, no. 12, pp. 7-20. DOI: 10.1023/A:1008244815697.
10. Das, D. and Touba, N.A. (1999), "Synthesis of circuits with low-cost concurrent error detection based on Bose-Lin codes", *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, Vol. 15, Iss. 1-2, pp. 145-155.
11. Mitra, S. and McCluskey, E.J. (2000), Which concurrent error detections Scheme to choose?, *Proceedings of International Test Conference, 2000*, USA, Atlantic City, NJ, 03-05 October 2000, pp. 985-994. DOI: 10.1109/TEST.2000.894311.
12. Carter, W.C., Duke, K.A. and Schneider, P.R. (1971), Self-checking error checker for two-rail coded data, Jan. 26, 1971, United States Patent Office, No. 3,559,167, Peekskill, N.Y., 10 p.
13. Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, Vl.V. (1992) *Samoproveryaemye diskretnyye ustroystva* [Self-checking discrete devices], Energoatomizdat, St. Petersburg, Russia.
14. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V., Efanov, D.V., Dmitriev, V.V. and Khuan, C. (2016), "Optimal system code on the basis of weighing of information vector digits and summation without carry for the concurrent error detection systems", *Izvestiya Prterburskogo universiteta putei soobshcheniya*, no. 1, pp. 75-84.
15. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V., Efanov, D.V. and Cherepanova, M.R. (2016), "Modulo codes with summation in concurrent error detection systems. I. Ability of modulo codes to detect error in data vectors", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 2, pp. 27-48.
16. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, Vl.V., Efanov, D.V., and Cherepanova, M.R. (2016), "Modulo codes with summation in concurrent error detection systems. II. Decrease of hardware redundancy of concurrent error detection systems", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 2, pp. 47-61.
17. Berger, J.M. (1961), "A note on error detecting codes for asymmetric channels", *Information and Control*, Vol. 4, Iss. 1, pp. 68-73, DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
18. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, Vl.V. (2010) "On sum code properties in concurrent error detection systems", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 6, pp. 155-162.

19. Goessel, M., Morozov, A.A., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, V.I. (1997), "Investigation of combination self-testing devices having independent and monotone independent outputs", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 2, pp. 180-193.
20. Blyudov, A.A., Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, V.I. (2012), "Formation of the Berger modified code with minimum number of undetectable errors of data bits", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 34, no. 6, pp. 17-29.
21. Blyudov, A.A., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, V.I. (2012), "A modified summation code for organizing control of combinatorial circuits", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 1, pp. 169-177.
22. Efanov, D., Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, V.I. and Blyudov, A. (2013), "On the problem of selection of code with summation for combinational circuit test organization", *Proceedings of 11th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013)*, Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013, pp. 261-266. DOI 10.1109/EWDTS.2013.6673133.
23. Blyudov, A.A., Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, V.I. (2014), "On codes with summation of data bits in concurrent error detection systems", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 8, pp. 131-145.
24. Efanov, D., Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, V.I. and Nikitin, D. (2015), "Sum code formation with minimum total number of undetectable errors in data vectors", *Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015)*, Batumi, Georgia, September 26-29, 2015, pp. 141-148, DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493112.
25. Efanov, D., Sapozhnikov, V. and Sapozhnikov, V.I. (2016), "On one method of formation of optimum sum code for technical diagnostics systems", *Proc. of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016)*, Yerevan, Armenia, October 14-17, 2016, pp. 158-163. DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807633.
26. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. and Efanov, D.V. (2015), "Errors classification in information vectors of systematic codes", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie*, Vol. 58, no. 5, pp. 333-343, DOI 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343.
27. Efanov, D.V. (2016) "On the problem of modified codes with summation of weighted data bits with natural numbers sequence of weight indexes generators synthesis", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo Universiteta. Upravleniye, vychislitel'naya tekhnika i informatika*, no. 4, pp. 13-26, DOI: 10.17223/19988605/37/2.
28. Efanov, D.V. (2016), "The method of weighted code with summation generator synthesis", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Physics*, Vol. 59, no. 8/2, pp. 33-36.
29. Sentovich, E.M., Singh, K.J., Lavagno, L., Moon, C., Murgai, R., Saldanha, A., Savoj, H., Stephan, P.R., Brayton, R.K., and Sangiovanni-Vincentelli, A. (1992), SIS: A system for sequential circuit synthesis, Electronics Research Laboratory, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, USA.
30. Collection of digital design Benchmarks, available at: <http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Benchmarks/>.

Received 22.06.17

V.V. Sapozhnikov, V.I. Sapozhnikov, D.V. Efanov

CODES WITH SUMMATION WITH A SEQUENCE OF WEIGHT
COEFFICIENTS, FORMING A NATURAL SERIES OF NUMBERS,
IN CONCURRENT ERROR DETECTION SYSTEMS

Features of the class of modified weighted codes with summation with a sequence of weight coefficients forming a natural series of numbers are described. It is established that the properties of error detection by modified codes are significantly influenced by the method of calculating the

correction factor for the formation of the total value of the weight of single bits of the information vector. Theoretical results are confirmed by the results of experiments with a set of test combinational circuits LGSynth' 89. It is established that by changing the rules for calculating the correction factor for code modification, it is possible to have influence on the structural redundancy of the concurrent error detection systems. The obtained results can be effective in organization of the check of combinational logic circuits and allow building self-checked structures with less hardware costs in comparison with duplication.

К e y w o r d s: combinational circuit, concurrent error detection system, Berger code, modified weighted Berger code, error detection, structural redundancy.

САПОЖНИКОВ Валерий Владимирович, д-р техн. наук, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах» Петербургского госуниверситета путей сообщения Императора Александра I. В 1963 г. окончил Ленинградский ин-т инженеров железнодорожного транспорта. Область научных исследований — надежность синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем.

САПОЖНИКОВ Владимир Владимирович, д-р техн. наук, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах» Петербургского госуниверситета путей сообщения Императора Александра I. В 1963 г. окончил Ленинградский ин-т инженеров железнодорожного транспорта. Область научных исследований — надежность синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем.

ЕФАНОВ Дмитрий Викторович, канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах» Петербургского госуниверситета путей сообщения Императора Александра I. В 2007 г. окончил Петербургский государственный университет путей сообщения. Область научных исследований — дискретная математика, надежность и техническая диагностика дискретных систем.



УДК 004.932

Г.А. Кравцов, кан.техн.наук, **В.И. Кошель**, аспирант
Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15,
e-mail: hryhoriy.kravtsov@gmail.com, vlad.koshell@gmail.com)

Вычисления на классификациях. Корректность классификации

При использовании методов искусственного интеллекта для каталогизирования информации необходимо наличие классификаций, в соответствии с которыми определяется классовая принадлежность объектов, явлений, действий и др. Однако для корректного решения задачи классовой принадлежности необходимо, чтобы используемые классификации были корректными. Рассмотрено понятие «корректность классификации» и возможность выявления ошибок деления с использованием теории вычислений на классификациях. Предложены визуальный и эвристический подходы к выявлению ошибок: деление с лишними членами, сбивчивое деление и скачок в делении.

Ключевые слова: классификация, корректность, ошибки деления, мера отличия, неподвижный класс, нормированная мера.

При використанні методів штучного інтелекту для створення каталогів інформації необхідна наявність класифікацій, у відповідності до яких визначається класова належність об'єктів, явищ, дій та інш. Однак для коректного вирішення задачі класової належності необхідно, щоб класифікації, які використовуються, були коректними. Розглянуто поняття «коректність класифікації» та можливість виявлення помилок ділення з використанням теорії обчислень на класифікаціях. Запропоновано візуальний та евристичний підходи до виявлення помилок: ділення з зайвими членами, некоректне ділення та стрибок у діленні.

Ключові слова: класифікація, коректність, помилки ділення, міра відмінності, нерухомий клас, нормована міра.

Если по отношению к двум произвольным объектам выполнена задача определения классовой принадлежности [1] (т.е. для каждого объекта определен класс), то модель вычислений на классификациях [2] позволяет определить меру отличия этих объектов в одной пространственной классификации. Однако изложенные в указанных работах положения справедливы при условии корректности классификации. Напомним, что классификация — это ориентированное дерево [3], в узлах которого находятся математические классы, семантически определяющие систему мерееологии-

© Г.А. Кравцов, В.И. Кошель, 2017

ческих или таксономических делений (МТД). Данное утверждение основано на описании математического класса и на понятии конгломерата классов [4].

В работе [2] выделены плоские и пространственные классификации. Следует заметить, что плоская классификация есть планарное ориентированное дерево с семантикой деления. Согласно [2] A_I^i означает некоторый класс в плоскости деления классификации i , имеющей путь уточнения I , который однозначно определяет путь в графе от самого общего класса классификации до некоторого уточнения A_I^i .

Под корректно построенной плоской классификацией в [1] предложено понимать такую систему МТД, при которой для двух классов классификации, A_I^i и A_Y^i , таких, что для относительных расстояний $R(A_I^i, A_I^i \cdot A_Y^i)$ и $R(A_Y^i, A_I^i \cdot A_Y^i)$, означающих число переходов между классами классификации [2], таких, что

$$R(A_I^i, A_I^i \cdot A_Y^i) = R(A_Y^i, A_I^i \cdot A_Y^i) = 1, \quad (1)$$

где $A_I^i \cdot A_Y^i$ — ассоциативная бинарная операция обобщения классов классификации [2], а $\bar{Q}(A_I^i, A_Y^i) = 2/3$ — теоретическое значение меры отличия двух классов, уточняющих один и тот же класс,

$$\bar{Q}(A_I^i, A_Y^i) = 1 - \frac{R(A, A_I^i \cdot A_Y^i) + 1}{R(A, A_I^i \cdot A_Y^i) + R(A_I^i, A_I^i \cdot A_Y^i) + R(A_Y^i, A_I^i \cdot A_Y^i) + 1}, \quad (2)$$

выполняется следующая система равенств:

$$\bar{Q}(A_I^i, A_I^i \cdot A_Y^i) = \bar{Q}(A_Y^i, A_I^i \cdot A_Y^i), \quad (3)$$

$$\bar{Q}(A_I^i, A_Y^i) = 2/3. \quad (4)$$

Система уравнений (3) и требование (1), где классы A_I^i и A_Y^i одного и того же ранга $K+1$, следует понимать так: если у произвольного класса $A_I^i \cdot A_Y^i$ ранга K существует не менее двух уточняющих классов, A_I^i и A_Y^i , ранга $K+1$, то мера отличия между классами одной классификации [2] на плоскости деления (измерении) $\bar{Q}(A_I^i, A_Y^i)$ есть величина постоянная, равная $2/3$, независимо от выбора A_I^i и A_Y^i , если $I \neq Y$. Отсюда вытекает следующее требование: у любого класса, являющегося вершиной ориентированного дерева, т.е. классификации, должно быть не менее двух уточняющих классов, ранг которых на единицу больше ранга произвольно выбранного класса, или не должно быть ни одного. Именно поэтому не каждое произвольное ориентированное дерево является классификацией.

Интуитивно понятно, что при делении класса на уточняющие классы можно допустить ошибку:

$$E(A_I^i, A_Y^i) = 2/3 - \bar{Q}_o(A_Y^i, A_I^i), \quad (5)$$

где $\bar{Q}_o(A_Y^i, A_I^i)$ — наблюдаемая мера отличия между классами одной классификации на плоскости деления (измерении), а $I \neq Y$. Случай, когда $I = Y$, является исключением, так как ошибка (5) есть линейная функция от относительного расстояния $R(A_Y^i, A_I^i)$, которое при $I = Y$ равно нулю [2]. Поэтому можно рассматривать только ошибку при наблюдении меры между двумя разными классами.

В этом случае определим ошибку при наблюдении меры отличия между двумя разными классами как разность между теоретической мерой отличия, равной $2/3$, и наблюдаемой мерой, в виде

$$\bar{Q}(A_I^i, A_I^i \cdot A_Y^i) = \bar{Q}(A_Y^i, A_I^i \cdot A_Y^i) = 1,$$

$$E(A_I^i, A_Y^i) = 2/3 - \bar{Q}_o(A_Y^i, A_I^i),$$

где $\bar{Q}_o(A_Y^i, A_I^i)$ — наблюдаемое значение меры отличия между двумя классами, A_I^i и A_Y^i ; $E(A_Y^i, A_I^i)$ — ошибка наблюдения меры отличия, такая что $-2/3 \leq E(A_Y^i, A_I^i) \leq 2/3$, если $I \neq Y$, и $E(A_Y^i, A_I^i) = 0$, если $I = Y$.

Рассмотрим, почему выражение (4) является теоретическим значением меры отличия двух классов, являющихся подклассами одного класса (рис. 1). Воспользуемся формулой вычисления меры отличия (2) для классов $A_{[1]}^i$ и $A_{[2]}^i$ классификации, представленной на рис.1. Согласно [2] вычислим $A_{[1]}^i \cdot A_{[2]}^i = A^i$, $R(A^i, A^i) = 0$, $R(A_{[1]}^i, A^i) = 1$ и $R(A_{[2]}^i, A^i) = 1$. Заменяя A на A^i , A_Y^i на $A_{[1]}^i$ и A_I^i на $A_{[2]}^i$, получим

$$\bar{Q}(A_{[1]}^i, A_{[2]}^i) = 1 - \frac{R(A^i, A_{[1]}^i \cdot A_{[2]}^i) + 1}{R(A^i, A_{[1]}^i \cdot A_{[2]}^i) + R(A_{[1]}^i, A_{[1]}^i \cdot A_{[2]}^i) + R(A_{[2]}^i, A_{[1]}^i \cdot A_{[2]}^i) + 1}$$

или

$$\bar{Q}(A_{[1]}^i, A_{[2]}^i) = 1 - \frac{R(A^i, A^i) + 1}{R(A^i, A^i) + R(A_{[1]}^i, A^i) + R(A_{[2]}^i, A^i) + 1} = 1 - \frac{0 + 1}{0 + 1 + 1 + 1} = 2/3.$$

Аналогично можно показать, что

$$\bar{Q}(A_{[1]}^i, A_{[2]}^i) = \bar{Q}(A_{[2]}^i, A_{[1]}^i) = 2/3,$$

$$\bar{Q}(A_{[1]}^i, A^i) = \bar{Q}(A^i, A_{[1]}^i) = \bar{Q}(A_{[2]}^i, A^i) = \bar{Q}(A^i, A_{[2]}^i) = 1/2, \quad (6)$$

$$\bar{Q}(A^i, A^i) = \bar{Q}(A_{[1]}^i, A_{[1]}^i) = \bar{Q}(A_{[2]}^i, A_{[2]}^i) = 0.$$

Совокупность равенств (6) позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема о мерах отличия. Теоретическая мера отличия $\bar{Q}_t(A_I^i, A_Y^i)$ между двумя отличными подклассами (уточняющими классами) произвольного класса в классификации равна $2/3$, а теоретическая мера отличия между произвольным классом классификации и его подклассом (уточняющим классом) равна $1/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы вытекает из изложенных выше рассуждений.

Следствие. Если у произвольного класса классификации более двух уточняющих классов, то отношение теоретических мер отличия двух произвольно выбранных пар отличных уточняющих классов (подклассов) равно единице.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме о мерах отличия между двумя уточняющими классами произвольного класса теоретическая мера отличия равна $2/3$. Если у произвольно выбранного класса N уточняющих классов (подклассов), то число уникальных пар отличных подклассов из N будет равно $\frac{N(N-1)}{2}$ и теоретическая мера отличия для каждой пары будет равна $2/3$:

$$\bar{Q}_t(A_I^i, A_Y^i) = \bar{Q}_t(A_K^i, A_M^i) = 2/3, \quad (7)$$

где $I = \overline{1, N}$, $Y = \overline{1, N}$, $K = \overline{1, N}$, $M = \overline{1, N}$ и совокупность индексов I, Y, K, M такова, что как минимум три из четырех индексов отличны. Тогда

$$\frac{\bar{Q}_t(A_I^i, A_Y^i)}{\bar{Q}_t(A_K^i, A_M^i)} = 1, \quad (8)$$

что и требовалось доказать.

На рис. 2 представлена абстрактная классификация, в которой согласно гипотезе о корректности классификации любые соотношения мер отличия равны единице (8), так как теоретическая мера отличия составляет

$$\bar{Q}_t(A_I^i, A_Y^i) = 2/3. \quad (9)$$

Введем понятие нормированной теоретической меры отличия

$$\bar{Q}_n(A_I^i, A_Y^i) = \frac{3\bar{Q}_t(A_I^i, A_Y^i)}{2},$$

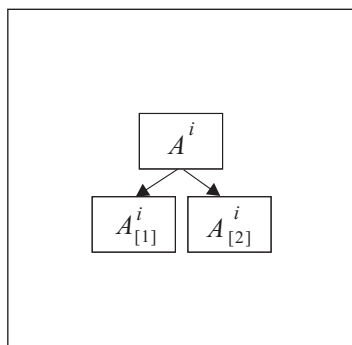


Рис. 1. Класс с двумя уточняющими подклассами

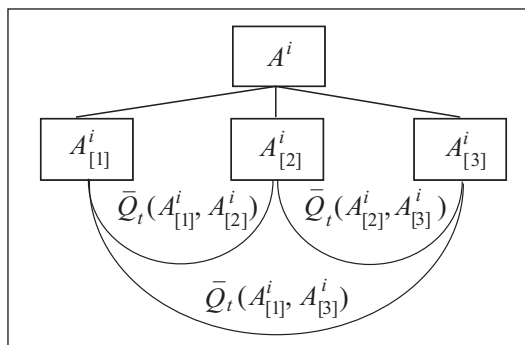


Рис. 2. Соотношение мер отличия на примере классификации с тремя уточняющими классами

которое равно единице согласно (9). Получаем

$$\frac{\bar{Q}_t(A_I^i, A_Y^i)}{\bar{Q}_t(A_K^i, A_M^i)} = \frac{\bar{Q}_n(A_I^i, A_Y^i)}{\bar{Q}_n(A_K^i, A_M^i)} = 1.$$

Введение нормированной теоретической меры отличия на классификации $\bar{Q}_n(A_I^i, A_Y^i)$ позволяет построить корректную классификацию на примере трех уточняющих классов. На рис. 3, а, представлен равносторонний единичный треугольник нормированных теоретических мер отличия в корректной классификации, или треугольник взаимоудаленности.

Теорема о неподвижном классе. Любой уточняющий подкласс A_Y^i ранга $K+1$ класса ранга K в классификации A^i может быть выбран в качестве неподвижного для последующего изучения корректности классификации.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы вытекает из рис. 3, в котором нормированные теоретические меры отличия между любыми двумя из трех произвольно выбранных подклассов одного класса равны единице, а следовательно, не зависят от выбора подкласса, по отношению к которому будут вычисляться нормированные меры отличия. Таким образом, если существуют три уточняющих класса, то при оценке корректности построения классификации у эксперта обоснованно возникает вопрос о равноудаленности двух подклассов от третьего, выбранного согласно теореме в качестве неподвижного. Если уточняющие классы не равноудалены один от другого, то треугольник взаимоудаленности имеет вид, представленный на рис. 3, б, из которого следует, что между любыми двумя классами не существует одинаковой меры отличия.

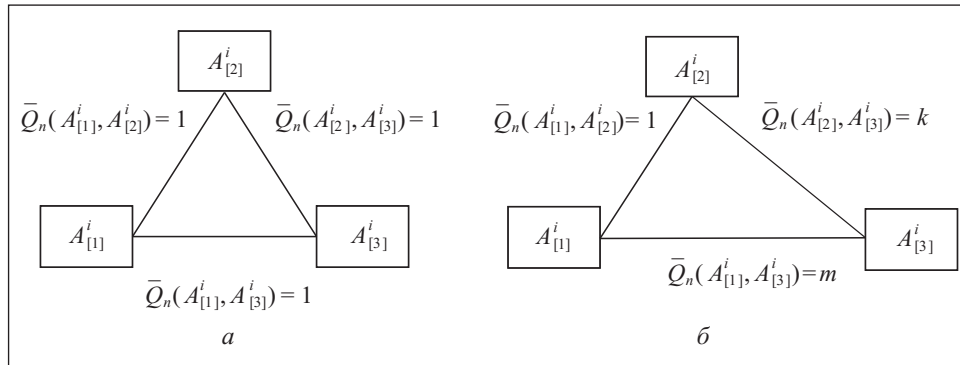


Рис. 3. Треугольник взаимоудаленности: $\bar{Q}_n(A_{[1]}^i, A_{[2]}^i) = 1$ и $\bar{Q}_n(A_{[2]}^i, A_{[3]}^i) = 1$ — наименьшая нормированная мера отличия между классами $A_{[1]}^i$ и $A_{[2]}^i$, $A_{[2]}^i$ и $A_{[3]}^i$; $\bar{Q}_n(A_{[2]}^i, A_{[3]}^i) = k$ — нормированная мера, свидетельствующая о том, что класс $A_{[3]}^i$ в k раз удаленнее (в понимании эксперта) от класса $A_{[2]}^i$, чем класс $A_{[1]}^i$ от класса $A_{[2]}^i$; $\bar{Q}_n(A_{[1]}^i, A_{[3]}^i) = m$ — нормированная мера, свидетельствующая о том, что класс $A_{[3]}^i$ в m раз удаленнее (в понимании эксперта) от класса $A_{[1]}^i$, чем класс $A_{[1]}^i$ от класса $A_{[2]}^i$

Если у произвольно выбранного класса $A_{[j]}^i$ классификации A^i определены I уточняющих классов, то число проверок, которые должен выполнить эксперт, определяется как комбинаторное сочетание из I по 3: $C_I^3 = \frac{I!}{3!(I-3)!}$. Очевидно, что при $I < 3$ нет необходимости для проверки

корректности.

Для того чтобы понять, как соотносятся k и m , необходимо обратиться к принципам корректного и эффективного классифицирования [5], несоблюдение которых приводит к ряду ошибок при построении классификаций, а именно: неполное деление, деление с излишними членами, сбивчивое деление, скачок в делении. Напомним, что принципами корректного и эффективного классифицирования являются [5]:

- 1) единство критерия для выделения групп одного порядка;
- 2) соразмерность деления явлений и понятий;
- 3) альтернативность или взаимоисключение выделяемых групп;
- 4) многоступенчатость классификации.

Согласно принципу 1 нельзя проводить классификацию, меняя критерий в рамках одной классификационной процедуры. Например, нельзя утверждать, что существуют математические и экономические методы управления, так как первые определяются по способу моделирования, а вторые — по объективным интересам человека. Экономические интересы имеет каждый

Таблица 1

Правило деления	Ошибка деления
<p><i>Соразмерность</i> Объем делимого понятия равен сумме объемов членов деления, т.е. среди членов деления не должно быть предметов, которые не входят в объем делимого понятия, однако все элементы объема делимого понятия должны быть распределены</p> <p><i>Единое основание</i> Деление выполняется по одному основанию. Для классификации не может быть использовано несколько основных признаков. Классификация в таком случае становится запутанной. Способ правильного представления классификации с несколькими плоскостями деления (основными признаками) приведен в [2]</p> <p><i>Запрет пересечения членов деления</i> Пересечение членов деления означает, что один и тот же предмет является элементом нескольких членов деления. Классификация получается запутанной</p> <p><i>Непрерывность</i> Деление должно быть непрерывным, т.е. в процессе деления должен происходить постепенный переход от родовых понятий к ближайшим видовым понятиям</p>	<p><i>Неполное деление</i> Не все члены деления названы. Из объема делимого понятия остаются не распределенные предметы Пр и м е р: науки бывают гуманитарные и естественные Названы не все виды наук: технические, математические, социальные</p> <p><i>Деление с лишними членами</i> Названы члены деления, не входящие в родовое понятие Пр и м е р: книги бывают художественные, учебные, научные и рукописные свитки Рукописные свитки книгами не являются</p> <p><i>Сбивчивое деление</i> В основу положено несколько основных признаков: часть членов деления образуется по одному признаку, а другая часть — по другому Пр и м е р: преступления бывают умышленные, неумышленные и заказные Первые два преступления выделены по признаку мотивации, а заказные — по принципу организации Пр и м е р: науки бывают гуманитарные, естественные, технические, социальные, математические, прикладные и фундаментальные Фундаментальные и прикладные науки определены по одному признаку — отношению к практике, а остальные виды наук — по другому, а именно, по предмету</p> <p><i>Пересечение членов деления</i> Один и тот же элемент входит в объем двух или нескольких членов деления Пр и м е р: преступления бывают умышленные, неумышленные и неосторожные Объем понятий «неосторожные» и «неумышленные» преступления совпадают Пр и м е р: науки бывают гуманитарные, естественные, общественные, социальные, технические, математические Общественные и социальные науки — это одно и то же</p> <p><i>Скачок в делении</i> Возникает в процессе деления при смешении родов и видов Пр и м е р: науки бывают естественными, физическими, химическими, биологическими, гуманитарными, философскими, математическими, техническими, медицинскими Физические, химические, биологические науки являются видами естественных наук и выделены преждевременно. Они должны быть выделены при следующем шаге классификации. Произошло смешение на одной ступени деления родов и видов</p>

Таблица 2

Ошибка деления	Возможность выявления ошибки составителем классификации
Неполное деление	Если эксперт не знает о существовании других уточняющих классов некоторого произвольно выбранного класса, для которого уже определены некоторые уточняющие классы, то данная ошибка не выявляема
Деление с лишними членами	Лишние члены не входят в родовое понятие, т.е. не являются уточняющими класса-родителя. Следовательно, среди комбинаторных сочетаний по три встретится комбинация, для которой треугольник взаимодальности не будет равносторонним (см. рис. 3, б). Следовательно, данная ошибка выявляема
Сбивчивое деление	Поскольку часть членов деления образуется по одному признаку, а другая часть — по другому, среди комбинаторных сочетаний по три встретится комбинация, для которой треугольник взаимодальности не будет равносторонним (см. рис. 3, б). Данная ошибка выявляема. Выявление сбивчивого деления требует обязательной проверки всех возможных комбинаторных сочетаний по три среди уточняющих классов одного класса-родителя
Пересечение членов деления	Поскольку один и тот же элемент входит в объем двух или нескольких членов деления, проверкой всех комбинаторных сочетаний из трех среди уточняющих классов одного и того же родительского класса выявить данную ошибку не представляется возможным. Ошибка на текущий момент не выявляема. Однако она может быть выявляема, если рассмотреть гипотезу о том, что возможно построение треугольника, в котором неподвижным классом является родительский класс
Скачок в делении	Поскольку ошибка возникает в процессе деления, когда смешивают роды и виды, среди всех комбинаторных сочетаний по три встретится комбинация, для которой треугольник взаимодальности не будет равносторонним (см. рис. 3, б). Данная ошибка выявляема

человек, но вряд ли можно утверждать, что каждый человек имеет математические интересы, определяющие его трудовую активность.

Принцип 2 определяет сумму объемов понятий или количества явлений, равную объему делимого понятия или содержанию исследуемого явления. Например, нарушение этого принципа наблюдается в утверждении о том, что менеджеры по образованию делятся на две группы: имеющие техническое образование и экономическое. Это — неисчерпывающее деление. Есть менеджеры, имеющие и другие виды образования — гуманитарное, естественно-научное. Анализ образованности менеджера не может быть успешным, если он построен на неисчерпывающей классификации.

Согласно принципу 3 каждая группа понятий или явлений должна находиться в объеме одного видового понятия. Выделенные явления или

понятия не должны относиться одновременно и к одной, и к другой классификационной группе. Если выделяются группы социально-психологических и экономических методов управления, то в последующем их делении не может быть одновременно и социально-психологических, и экономических методов. При этом не исключается их взаимозависимость и совместное использование в практике управления.

Принцип 4 определяет возможность делать последовательно ступенчатую классификацию. Она помогает конкретизировать свойства явлений, детализировать их основные черты и особенности. В этом случае возникает разветвленная классификационная схема, дерево целей, проблем, ситуаций, свойств и др.

Следует заметить, что при этом всегда существует предел классификационного деления. Оно может осуществляться только в рамках единого явления. Дальнейшее деление может привести к изменению сути явления. Таким пределом в исследовании социально-экономических систем является человек как социальный объект, в области биологии — клетка, в области физиологии — орган, в области техники — деталь, в области классической физики — тело и так далее.

Принцип полноты классификации для каждой ее ступени состоит в том, что нельзя делить только часть объекта на виды, а другую часть — на подвиды или группы следующей ступени классификации. Например, было бы ошибкой разделить персонал управления на женщин, мужчин среднего и мужчин пожилого возраста. Несоблюдение описанных принципов, называемых правилами деления [6], приводит к ошибкам, которые могут быть систематизированы как показано в табл. 1 [7]. Ошибки деления и возможность их самостоятельного выявления составителем классификации показаны в табл. 2.

Выводы

Предложенное развитие теории вычислений на классификациях и валидация корректности классификаций позволяет выявить три из пяти ошибок деления, а именно: деление с лишними членами, сбивчивое деление и скачек в делении. Выдвинута гипотеза о том, что ошибка деления, состоящая в пересечении членов деления, может быть выявлена, если в качестве неподвижного класса использовать родительский класс. Предложенный подход к визуализации корректности построения классификации на основании комбинаторных сочетаний по три открывает возможности для групповой работы экспертов над валидацией корректности классификаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кравцов Г.А. Мера отличия классификаций // Электрон. моделирование, 2016, **38**, № 4, с. 81—97.
2. Кравцов Г.А. Модель вычислений на классификациях // Там же, 2016, **38**, № 1, с. 73—87.
3. Берзтисс А.Т. Структуры данных. М.: Статистика, 1974, 408 с.
4. Adamek J., Herrlich H., Strecker G.E. Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats. / Available: <http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf>. [Access: June of 2017].
5. Коротков Э.М. Исследование систем управления. М.: ДеКА, 2004, 336 с.
6. Ивлев Ю.В. Логика. М.: Изд-во «Проспект», 2008, 304 с.
7. Буквы!: Правила деления в логике и ошибки в делении. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://bukvi.ru/pravo/logika/pravila-deleniya-v-logike-i-oshibki-v-delenii.html>

Поступила 03.07.17

REFERENCES

1. Kravtsov, H.A. (2016), “Measure of difference between classifications”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 4, pp. 81-97.
2. Kravtsov, H.A. (2016), “Model of computations over classifications”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 1, pp. 73-87.
3. Berztiss, A.T. (1974), *Struktura dannykh* [Data structure], Statistika, Moscow, USSR.
4. Adamek, J., Herrlich, H. and Strecker, G.E. “Abstract and concrete categories. The joy of cats”, available at: <http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/acc.pdf>. (accessed June, 2017).
5. Korotkov, E.M. (2004), *Issledovanie sistem upravleniya* [Study of control systems], DeKA, Moscow, Russia.
6. Ivlev, Yu.V. (2008), *Logika* [Logic], TK Velbi, Prospekt, Moscow, Russia.
7. Bukvy!: *Pravila deleniya v logike i oshibki deleniya* [Letters! Dividing rules in the logic and dividing errors], available at: <http://bukvi.ru/pravo/logika/pravila-deleniya-v-logike-i-oshibki-v-delenii.html>. (accessed June, 2017).

Received 03.07.17

H.A. Kravtsov, V.I. Koshel

CLASSIFICATION CALCULUS. THE CLASSIFICATION CORRECTNESS

The methods of artificial intelligence used to catalogize information require the existence of classifications or taxonomies for determining class affiliation of subjects, phenomena, actions etc. However, for correct solving of classification problems it is necessary that all the used classifications/taxonomies were correct. The authors consider the notion «classification correctness» and investigate the possibility to identify some errors of dividing by using the theory of classifications calculus. The authors also propose visual and heuristic approaches for detecting the following errors: dividing with remainder terms, controversial dividing and dividing jump.

Keywords: classification, correctness, division errors, measure of difference, fixed class, normalized measure.

КРАВЦОВ Григорий Алексеевич, канд. техн. наук, докторант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2000 г. окончил Севастопольский военно-морской ин-т им. П.С. Нахимова. Область научных исследований — кибербезопасность смарт-грид, криптография, программирование, разработка распределенных гетерогенных вычислительных систем.

КОШЕЛЬ Владимир Иванович, аспирант Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина. Область научных исследований — искусственный интеллект, интеллектуальный анализ данных, искусственные нейронные сети, обработка естественного языка.

УДК 621.316

Ю.Г. Куцан¹, д-р техн. наук, **І.В. Блінов**², канд. техн. наук, **Г.А. Іванов**³

¹ Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України (Україна, 03164, Київ, вул. Генерала Наумова, 15, тел. 4241063, e-mail: Kutsan.ug@ukr.net),

² Ін-т електродинаміки НАН України (Україна, 03680, Київ, пр-т Перемоги, 56, тел. (050) 4733895, e-mail: igorblinov@ukr.net),

³ ДП «Енергоринок» (Україна, 01032, Київ, вул. Симона Петлюри, 27, тел. (067) 7788804, e-mail: igena@ex.ua)

Моделювання тарифо- та ціноутворення на роздрібному ринку електричної енергії України в нових умовах функціонування

Розглянуто проблемні питання, які виникають в процесі моделювання тарифо- та ціноутворення на роздрібному ринку електричної енергії України в нових умовах функціонування. Виконано порівняння структури ціни для споживача в існуючій та новій моделях ринку електричної енергії України. Наведено рекомендації щодо розрахунку тарифів для споживачів, оператора системи передачі та оператора системи розподілу в новій моделі ринку електричної енергії. Запропоновано підходи та припущення щодо визначення вхідних даних, необхідних для моделювання цін на роздрібному ринку до запровадження повномасштабного ринку електричної енергії.

Ключові слова: тарифоутворення на роздрібному ринку, моделювання, визначення вхідних даних, структура нових тарифів, оператор системи розподілу, оператор системи передачі, споживач електроенергії.

Рассмотрены проблемные вопросы, возникающие в процессе моделирования тарифо- и ценообразования на розничном рынке электрической энергии Украины в новых условиях функционирования. Выполнено сравнение структуры цены для потребителя в существующей и новой моделях рынка электрической энергии Украины. Приведены рекомендации относительно расчета тарифов для потребителей, оператора системы передачи и оператора распределительной системы в новой модели рынка электрической энергии. Предложены подходы и предположения относительно определения исходных данных, необходимых для моделирования цен на розничном рынке до внедрения полномасштабного рынка электрической энергии.

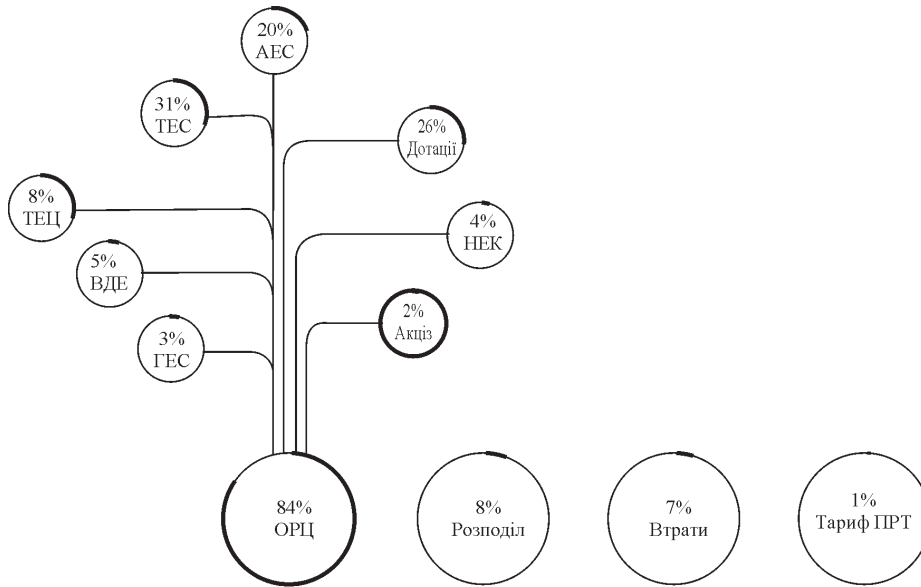
Ключевые слова: тарифообразование на розничном рынке, моделирование, определение исходных данных, структура новых тарифов, оператор распределительной системы, оператор системы передачи, потребитель электроэнергии.

© Ю.Г. Куцан, І.В. Блінов, Г.А. Іванов, 2017

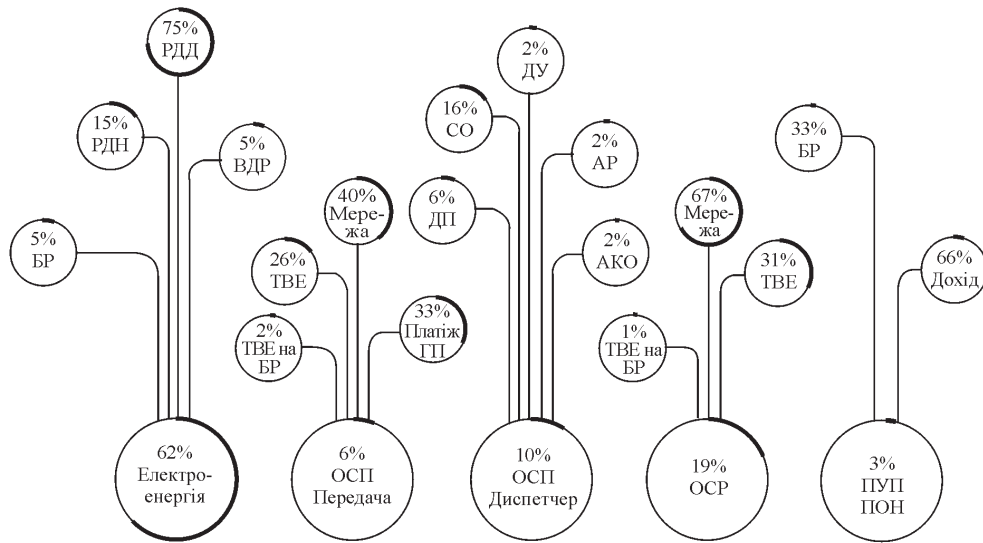
У червні 2017 року в Україні вступив в силу Закон «Про ринок електричної енергії» [1], який встановлює принципи функціонування кожного сегменту ринку електричної енергії крім роздрібного ринку. Фактично правила роботи учасників на роздрібному ринку визначатиме Регулятор в затверджених ним правилах роздрібного ринку. Таким чином, в Україні відбувається процес імплементації європейського законодавства, зокрема і вимог «третього енергетичного пакету». При цьому Закон зорієнтовано перш за все на встановлення правил та функції учасників в частині оптового ринку електричної енергії [2]. Слід зазначити, що помилки в регулюванні роздрібного ринку можуть призвести до дискримінації всього процесу лібералізації відносин між учасниками ринку електричної енергії в Україні [3]. Тому для забезпечення запровадження ефективних регуляторних рішень в новій моделі ринку є необхідним побудова та використання моделей, які дозволяють виконати оцінку наслідків впровадження таких рішень. Важливим аспектом використання таких моделей є визначення вхідної інформації та прийнятих припущень, що впливає на точність моделювання процесів ціноутворення.

Розглянемо результати порівняння основних складових ціни для споживачів в діючій на даний час моделі оптового ринку електричної енергії (рис. а) та в новій моделі ринку (рис. б), які були визначені оціночно та з урахуванням європейського досвіду. В діючій моделі оптового ринку ціна на електричну енергію для споживача складається з чотирьох основних складових: оптова ринкова ціна (ОРЦ) за електричну енергію (приблизно 84%), тариф на передачу місцевими розподільчими мережами (8%), ціна електричної енергії на втрати в цих мережах (7%), а також постачання за регульованим тарифом (ПРТ). Зазначимо, що наразі в ціну електричної енергії, яка є єдиною для всіх постачальників, входять і складові послуг. Зокрема, крім середньозваженої ціни на закуплену у виробників електричну енергію, ОРЦ містить: складову джерела тарифу на передачу магістральними міждержавними мережами, що здійснюється ДП НЕК «Укренерго» (НЕК); дотації для покриття втрат ПРТ від здійснення постачання електричної енергії населенню; акцизний податок.

Як видно з рис. б, в новій моделі ринку електричної енергії зникає ОРЦ, а ціна електричної енергії формується, як середньозважена ціна купівлі: на ринку за двосторонніми договорами (РДД), ринку «на добу наперед» (РДН), внутрішньодобового ринку (ВДР), балансуєчому ринку (БР). Оператор системи передачі (ОСП) здійснює передачу електричної енергії магістральними та міждержавними мережами та включає до свого тарифу крім витрат на підтримання мереж (приблизно 40% тарифу) витрати на закупівлю електрич-



а



б

Структура ціни на електричну енергію для споживача в діючій (а) та новій (б) моделях оптового ринку електричної енергії

ної енергії на покриття технологічних витрат електроенергії (ТВЕ) в його мережах та витрати за небаланси цієї електричної енергії на БР.

Крім того, до 2030 року в тариф на передачу включатиметься джерело на покриття витрат гарантованого покупця (ГП) від здійснення купівлі електричної енергії за «зеленим» тарифом. Оператор системи передачі матиме ще один тариф, який покриватиме йому збитки від надання послуги з диспетчерського (оперативно-технологічного) управління (ДУ). Цей тариф також стане джерелом покриття витрат ОСП від здійснення функцій: адміністратора розрахунків (АР), адміністратора комерційного обліку (АКО). Витрати ОСП при врегулюванні системних обмежень (СО) та при закупівлі допоміжних послуг (ДП) також включатимуться до тарифу з надання послуги ДУ.

Однією з основних складових кінцевої ціни на електричну енергію у споживача буде тариф оператора системи розподілу (ОСР), який покриватиме витрати: на утримання розподільчої мережі (Мережа), від купівлі електричної енергії на технологічні витрати в мережах, витрати на БР від купівлі-продажу небалансів. Крім того, витрати електропостачальника також стануть складовою ціни для споживача.

На основі проведених досліджень визначено, що доцільно здійснювати моделювання витрат постачальників універсальних послуг (ПУП) та постачальників «останньої надії» (ПОН) аналогічно розрахунку витрат на постачання у діючих сьогодні на оптовому ринку електроенергії постачальників за регульованим тарифом. Але у електропостачальників з'являються додаткові витрати на БР від купівлі-продажу небалансів, які він також включатиме до своїх витрат при формуванні кінцевої ціни для споживача.

Таким чином, в результаті аналізу доведено наявність значних змін в структурах тарифів учасників нового роздрібного ринку електричної енергії. Моделювання складових ціни на електричну енергію у кінцевого споживача в новому ринку потребуватиме розрахунку значно більших складових та відповідно буде необхідний значно більший обсяг вхідної інформації для виконання таких розрахунків.

Наведемо перелік основних погодинних фактичних та прогнозних вхідних даних, які необхідні для моделювання цін та тарифів на роздрібному ринку:

- корисний відпуск електричної енергії всім споживачам;
- корисний відпуск з розбивкою по першій та другій групам споживачів;
- обсяг передачі електричної енергії мережами першого та другого класів напруги;
- обсяг експорту електричної енергії;

обсяг імпорту електричної енергії;
 втрати в розподільчих мережах по кожному ОСР;
 втрати в передавальній мережі;
 тарифи на передачу місцевими (локальними) розподільчими мережами по кожному ліцензіату;
 тарифи на постачання за регульованим тарифом по кожному ліцензіату;
 тарифи на передачу електричної енергії магістральними та міждержавними мережами.

Більшість наведених в переліку вхідних даних сьогодні відсутня, що вимагає прийняття відповідних припущень та отримання похідної інформації, яка може бути використана для розрахунків.

Розглянемо особливості моделювання роздрібного ринку, яке передбачає використання адитивної імітаційної моделі та потребує окремого визначення кожної складової ціни на електричну енергію у кінцевого споживача. Припустимо, що в Україні збережеться система класів напруги та груп споживачів. Тоді ціна для відповідної групи споживачів з урахуванням класу напруги мереж, до яких підключений споживач, може бути визначена за формулою (коп./кВт · год)

$$C_g^k = C_e + T_{TSO}^D + T_{TSO}^T + T_{DSO}^k + T_{PSO}^g + C_{CA}, \quad (1)$$

де k — клас напруги мереж, до яких підключено електроустановку споживача (перший або другий); g — група споживачів (перша або друга); C_e — середньозважена ціна електричної енергії, купленої постачальником за двосторонніми договорами та на відповідних сегментах ринку електричної енергії; T_{TSO}^D — тариф ОСП на послуги ДУ; T_{TSO}^T — тариф ОСП на передачу електричної енергії магістральними та міждержавними мережами; T_{DSO}^k — тариф ОСР на послуги з розподілу електричної енергії; T_{PSO}^g — тариф електропостачальника, який виконує функцію ПУП або ПОН; C_{CA} — ціна послуг постачальника комерційного обліку. Всі складові формули (1), крім ціни на електричну енергію на ринку, цін небалансів електричної енергії та ціни послуг АКО, визначаються адитивно.

Розглянемо складові тарифів учасників ринку. Тариф ОСП на послуги ДУ формується за наступною формулою (коп./кВт · год):

$$T_{TSO}^D = C_{CM} + C_{AS} + C_{ACA} + C_{AC} + C_{SL}, \quad (2)$$

де C_{CM} — складова тарифу ОСП на покриття витрат на виконання послуг ДУ; C_{AS} — середньозважена ціна на послуги постачальників допоміжних послуг на ринку допоміжних послуг; C_{ACA} — складова тарифу ОСП на покриття витрат внаслідок виконання функцій АКО; C_{AC} — складова тарифу ОСП на покриття витрат внаслідок виконання функцій АР; C_{SL} — складова тарифу ОСП на покриття витрат на врегулювання СО на БР.

Тариф ОСП на передачу електричної енергії магістральними та міждержавними мережами розраховується за формулою (коп./кВт·год)

$$T_{TSO}^T = C_{TS}^T + C_{TS\ TLE}^T + C_{TS\ TLE}^{BM} + C_{GB} + C_{PSO}^{AE}, \quad (3)$$

де C_{TS}^T — складова тарифу ОСП на покриття витрат для утримання надійного та сталого функціонування магістральних та міждержавних мереж; $C_{TS\ TLE}^T$ — складова тарифу ОСП на купівлю електричної енергії за двосторонніми договорами та на відповідних сегментах ринку електричної енергії з метою компенсації технологічних витрат електричної енергії на її передачу електричними мережами; $C_{TS\ TLE}^{BM}$ — складова тарифу ОСП на купівлю та продаж небалансів електричної енергії у разі невиконання погодинних графіків електричної енергії з метою компенсації технологічних витрат електричної енергії на її передачу електричними мережами; C_{GB} — складова тарифу ОСП на покриття витрат щодо купівлі у ГП і забезпечення збільшення частки виробництва електричної енергії з альтернативних джерел; C_{PSO}^{AE} — складова тарифу ОСП на покриття витрат щодо купівлі у ПУП і забезпечення збільшення частки виробництва електричної енергії з альтернативних джерел.

Тариф ОСР розраховується за наступною формулою (коп./кВт·год):

$$T_{DSO}^k = C_{DS}^k + C_{DS\ TLE}^k + C_{DS\ TLE}^{BM}, \quad (4)$$

де C_{DS}^k — складова тарифу ОСР на покриття витрат для утримання надійного та сталого функціонування розподільчих мереж; $C_{DS\ TLE}^k$ — складова тарифу ОСР на купівлю електричної енергії за двосторонніми договорами та на відповідних сегментах ринку електричної енергії з метою компенсації технологічних витрат електричної енергії на її розподіл електричними мережами; $C_{DS\ TLE}^{BM}$ — складова тарифу ОСР на купівлю та продаж небалансів електричної енергії у разі невиконання погодинних графіків електричної енергії з метою компенсації технологічних витрат електричної енергії на її розподіл електричними мережами. Тариф енергопостачальника на послугу з постачання розраховується за формулою (коп./кВт·год)

$$T_{PSO}^g = C_S^g \pm C_{BN}^g, \quad (5)$$

де C_S^g — середньозважена ціна послуг електропостачальника; C_{BN}^g — середньозважена ціна небалансів, які купуються або продаються у ОСП на БР в наслідок відхилення фактичних обсягів споживання від планових споживачів групи g .

Складові тарифів (1)—(5) розраховуються виходячи з погодинних витрат на відповідних сегментах ринку електричної енергії. В діючій моделі

ринку ці витрати відсутні і тому визначення тарифів потребує відповідних припущень [4]. Зокрема, для визначення будь-якого тарифу потрібен корисний відпуск по групах споживачів, однак на даний час на роздрібному ринку електричної енергії оперують тільки місячними обсягами корисного відпуску. Крім того, слід зазначити, що автоматизовані системи комерційного обліку встановлено тільки у двадцяти відсотків промислових споживачів в регіонах, а у населення таких систем немає. Втрати в електричних мережах також не розраховуються погодинно, а купуються на оптовому ринку разом з графіком надходження електричної енергії по периметру автоматизованої системи комерційного обліку електричної енергії постачальника за регульованим тарифом.

При розрахунках контрактних обсягів втрат від купівлі-продажу необхідно враховувати квадратичну залежність зміни обсягів втрат від змін обсягів передачі електричної енергії мережами ОСР. Пропонується наступне допущення: при моделюванні тарифів ОСР з урахуванням тенденції до впровадження стимулюючого тарифоутворення використовувати підхід щодо врахування в тарифі тільки нормативних втрат, а саме рівень втрат визначати на рівні коефіцієнту економічних витрат електричної енергії, який наразі використовується в оптовому ринку електричної енергії. Для моделювання витрат електропостачальника на БР як сторони, відповідальної за баланс спричинених його споживачами небалансів, пропонується профіль планових погодинних обсягів з розбивкою по групах споживачів прив'язати пропорційно відхиленню від погодинних обсягів в діючій моделі оптового ринку купівлі-продажу електричної енергії постачальників за регульованим тарифом у ДП «Енергоринок» [5].

Висновки

Розроблена імітаційна модель роздрібного ринку електричної енергії дозволила провести аналіз структури цін та тарифів в новому ринку електричної енергії України, результати якого показали значне їх ускладнення відносно структури діючої моделі ринку. Зокрема визначено, що в нових тарифах та цінах з'являються складові, які несуть ринкові ризики для учасників ринку електричної енергії, зокрема коливання цін та недосконалість прогнозування навантажень і планування графіків роботи буде призводити до збитків таких природних монополій як ОСП та ОСР. Таким чином, необхідним є побудова та впровадження в Україні систем моделювання цін та тарифів роздрібного ринку електричної енергії, зокрема і на основі запропонованих підходів з метою забезпечення аналізу можливих ризиків при формуванні та прийнятті регуляторних та управлінських рішень в лібералізованій моделі оптового ринку електричної енергії України.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Закон України від 13.04.2017 № 2019-VIII «Про ринок електричної енергії України».
2. Directive 2009/72/EC of the European Parliament and of the Council concerning common rules for the internal market in electricity and repealing Directive 2003/54/EC. Article 9 «Unbundling of transmission systems and transmission system operators». Available at: <http://extwprlegs1.fao.org/docs/pdf/eur124471.pdf>.
3. Куцан Ю.Г. Експертний висновок щодо проекту Закону України «Про ринок електричної енергії України» // Електрон. моделювання, 2016, **38**, № 3, с. 119—122.
4. Блінов І.В., Парус Є.В., Іванов Г.А. Комплексна розрахункова модель ринку на добу наперед та балансуєчого ринку електроенергії України // Промелектро, 2016, № 4—5, с. 8—12.
5. Блінов І.В. Методи та моделі забезпечення функціонування конкурентного ринку електричної енергії в Україні // Вісник НАН України, 2013, № 6, с. 81—87.

Надійшла 01.09.17

REFERENCES

1. Law of Ukraine of 13.04.2017 № 2019-VIII “On market of electrical energy of Ukraine”.
2. Directive 2009/72/EC of the European Parliament and of the Council concerning common rules for the internal market in electricity and repealing Directive 2003/54/EC. Article 9 «Unbundling of transmission systems and transmission system operators», available at: <http://extwprlegs1.fao.org/docs/pdf/eur124471.pdf>.
3. Kutsan, Yu.G. (2016), “Expert’s report concerning draft Law of Ukraine “On market of electrical energy of Ukraine”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 38, no. 3, pp. 119-122.
4. Blinov, I.V., Parus, E.V. and Ivanov, G.A. (2016), “Complex calculation model of market a day in advance and balancing market of electrical energy of Ukraine”, *Promelektro*, no. 4-5, pp. 8-12.
5. Blinov, I.V. (2013), “Methods and models of providing the functioning of competitive market of electrical energy of Ukraine”, *Visnyk NAN Ukrainy*, no. 6, pp. 81-87.

Received 01.09.17

Yu.H. Kutsan, I.V. Blinov, H.A. Ivanov

MODELLING OF TARIFF AND PRICE FORMATION ON RETAIN MARKET OF ELECTRICAL ENERGY OF UKRAINE IN NEW CONDITIONS OF ITS FUNCTIONING

The problems have been considered arising in the process of modeling tariff and price formation on the retain market of electrical energy of Ukraine in new conditions of functioning. The structure of customer’s price in the current model of the market of electrical energy in Ukraine was compared with the structure in the new model. Recommendations were presented in respect of rating for consumers, transfer system operator and operator of distribution system in the new model of the market of electrical energy. Approaches and suppositions were offered in respect of determining initial data required for modeling the process on the retain market prior to introduction of the full-scale market of electrical energy.

Keywords: tariff formation on the retain market, modeling, determination of initial data, structure of new tariffs, operator of distribution system, operator of transfer system, consumer of electrical energy.

КУЦАН Юлій Григорович, д-р техн. наук, заст. директора з наукової роботи Ін-та проблем моделювання ім. Г.Є. Пухова НАН України. У 1966 р. закінчив Київський політехнічний ін-т. Сфера наукових досліджень — моделювання технологічних процесів в енергетичній галузі.

БЛІНОВ Ігор Вікторович, канд. техн. наук, ст. наук. співроб. Ін-та електродинаміки НАН України. У 2005 р. закінчив Донецький національний технічний університет. Сфера наукових досліджень — моделювання режимів роботи електричних мереж, моделювання сегментів ринку електричної енергії, пошук місць пошкоджень в електричних мережах, засоби гасіння вібрацій та коливань проводів ліній електропередачі та шин жорсткої ошиновки підстанцій.

ІВАНОВ Геннадій Анатолійович, нач. департаменту гарантованого покупця ДП «Енерго-ринок». У 2000 р. закінчив Харківський державний політехнічний університет, а у 2013 р. — Харківську національну академію міського господарства. Сфера наукових досліджень — моделювання механізмів ціно- та тарифоутворення на ринках електричної енергії.

УДК 004.942

Я.А. Калиновский¹, д-р техн. наук, **Ю. Е. Бояринова**^{1,2}, канд. техн. наук,
А.С. Сукало¹, аспирантка, **Я.В. Хицко**², канд. техн. наук

¹ Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины
(Украина, 03113, Киев, ул. Н. Шпака, 2,
тел. 4542138, e-mail: kalinovsky@i.ua),

² Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03113, Киев, пр-т Победы, 37, e-mail: ub@ua.fm)

Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений

Изложены основные принципы, положенные в основу программного комплекса гиперкомплексных вычислений. Описаны структура комплекса и состав функциональных подсистем. Рассмотрены наиболее важные процедуры, выполняемые подсистемами, приведены листинги программ и примеры их применения.

К л ю ч е в ы е с л о в а: гиперкомплексная числовая система, процедура, компьютерная алгебра, операция, Maple.

Викладено основні принципи, покладені в основу програмного комплексу гіперкомплексних обчислень. Описано структура комплексу і склад функціональних підсистем. Розглянуто найважливіші процедури, які виконуються підсистемами. Наведено лістинги програм та приклади їх застосування.

К л ю ч о в і с л о в а: гіперкомплексна числова система, процедура, комп'ютерна алгебра, операція, Maple.

Гиперкомплексные числовые системы (ГЧС) широко применяются в различных областях науки и техники [1, 2]. Теоретическая и прикладная механика, навигация, криптография, цифровая обработка сигналов — далеко не полный перечень областей науки и техники, где использование методов ГЧС является высокоэффективным.

Оперирование с гиперкомплексными числами, особенно в символьной форме, вызывает значительные трудности [3, 4], связанные с их многомерностью. Так, например, для перемножения двух кватернионов с численными коэффициентами, являющихся четырехмерными гиперкомплексными числами, необходимо выполнить 16 вещественных умножений и 12 сложений. Но коэффициенты в гиперкомплексных числах могут быть

© Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова, А.С. Сукало, Я.В. Хицко, 2017

не только числами, но и различными алгебраическими выражениями (например, полиномами), различными функциями и гиперкомплексными числами, в том числе и с символьными переменными и коэффициентами. Поэтому для успешного оперирования с такими объектами требуются специализированные программные комплексы.

Для реализации подобных комплексов широко распространенные языки программирования, такие как Си, Паскаль, Фортран, Java, Basic, — неэффективны. Наиболее подходящими для создания такого типа комплексов являются системы компьютерной алгебры, или системы символьных вычислений [5], так как многие из них имеют возможность оперирования с некоторыми ГЧС, например с комплексными числами, кватернионами, клиффордовыми алгебрами и др.

Из существующих многочисленных систем компьютерной алгебры наиболее распространенными являются MatLab, Mathkad, Mathematica и Maple. Будем использовать систему компьютерной алгебры Maple, как одну из наиболее развитых и доступных для создания информационной технологии, которая повышает эффективность математического моделирования различных научно-технических задач с использованием ГЧС различной размерности и научных исследований в области теории ГЧС.

Основные принципы построения программного комплекса (ПК) гиперкомплексных вычислений. Поскольку система компьютерной алгебры Maple позволяет создавать частные пакеты различных вычислительных процедур, ПК гиперкомплексных вычислений представляет собой пакет, имеющий свой идентификатор. Такой ПК можно вызывать, присоединять к программе и транспортировать на другие компьютеры. Из процедур ПК можно формировать программы вычислений, используя средства алгоритмического языка Maple.

Программный комплекс может быть инсталлирован на любом компьютере с операционной системой Windows и системой компьютерных вычислений Maple не ниже пятой версии. Он открыт для пополнения новыми процедурами и редактирования существующих процедур любым пользователем, владеющим Maple.

Вызов и присоединение ПК имеет следующий вид:

```
read («имя устройства: \путь\имя ПК»)
with ( имя ПК)
```

После этого будет выведен список процедур ПК, например:

```
[Add, AddHNS, Conjug, ConvertA, DirSum2, DirSumN, Divis, GenIso,
HNSnumber, LibHNS, ListHNS, MultiDim, Norma, Rad2, Refill, RefillHNS,
SearchHNS, SqrtEq, Subtr, Trans, Unit, VizHNS, VizInA, VizLibHNS, InAdd,
InConvertHNS, InMulti, NameBas, NatMulti, RenamA].
```

Поскольку ПК предназначен для оперирования с данными в гиперкомплексном виде, при его разработке особое внимание было уделено способам и структурам представления данных.

Как известно, общий вид гиперкомплексного числа A таков:

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n, \quad (1)$$

где n — размерность ГЧС; a_i — алгебраические выражения; e_i — элементы базиса ГЧС («мнимые единицы»). Такую форму гиперкомплексного числа будем называть натуральной. Как показывает опыт, оперирование с гиперкомплексными числами в натуральной форме — неудобно. Это связано с тем, что различные операции выполняются с коэффициентами при базисных элементах, которые необходимо выделять и идентифицировать.

В качестве примера рассмотрим такую простую операцию, как сложение гиперкомплексных чисел. Пусть наряду с (1) есть число $B = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n$. Если в рамках Maple использовать операцию сложения, то получим следующее:

$$C = A + B = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n + b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n. \quad (2)$$

Выражение (2) не является натуральной формой гиперкомплексного числа. В нем следует выполнить команду приведения подобных. В системе Maple есть такая команда — `collect`, но при ее применении необходимо указывать переменную, по которой проводится приведение подобных. Поэтому в данном случае придется n раз применить команду `collect`, каждый раз указывая, по какой переменной выполняется приведение подобных:

$$\begin{aligned} C &= \text{collect} (\text{collect} (\text{collect} (\dots (A+B), e_1), \dots), e_n) = \\ &= (a_1 + b_1) e_1 + \dots + (a_n + b_n) e_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Как видим, (3) — достаточно громоздкая конструкция, особенно при больших размерностях ГЧС. Таких неудобств, связанных с использованием натуральной формы представления гиперкомплексного числа, очень много. В то же время, в системе Maple имеются средства, позволяющие избавиться от этих и многих других неудобств, связанных с использованием натуральной формы представления гиперкомплексного числа. В натуральной форме представления гиперкомплексного числа важны только коэффициенты при элементах базиса и их порядковые номера в изображении гиперкомплексного числа, т.е. гиперкомплексное число можно представить виде вектора. Однако векторно-матричная форма в данном случае не подходит, так как компоненты матрицы и вектора должны быть однотипными. В системе Maple есть такая форма представления данных, как список — `list`, т.е. упорядоченный набор разнотипных данных.

Для оперирования с данными в формате списков в Maple существуют многочисленные команды, позволяющие задавать список, определять его длину, складывать два списка одинаковой длины, определять член списка по его порядковому номеру, умножать все члены списка на любое выражение и др. Представление гиперкомплексного числа в виде списка называется списочным или внутренним представлением гиперкомплексного числа. Таким образом, вместо (1) используем представление

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]. \quad (4)$$

Тогда сумма двух чисел определяется очень просто:

$$C = A + B = [a_1, \dots, a_n] + [b_1, \dots, b_n] = [a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n],$$

т.е. приведение подобных символьных коэффициентов в соответствии с их порядковыми номерами в числах выполняется автоматическими внутренними средствами Maple. Одной командой выполняется и умножение всех членов списка на одно и то же выражение: $\lambda A = [\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n]$.

Таким образом, представление гиперкомплексных чисел в формате списков значительно упрощает разработку программных средств. Однако такое решение требует наличия в ПК процедур для взаимно-обратного преобразования натуральной и внутренней форм представления гиперкомплексных чисел. Тем более, что некоторые действия целесообразно выполнять над числами в натуральной форме. В связи с этим во многих процедурах ПК предусматривается выход в форме списка из двух элементов: первый элемент — результат в списочной форме, второй — в натуральной. Например, работа процедуры генерации гиперкомплексного числа восьмой размерности выглядит так:

```
> A = HNSnumber(8, a, e):
> A [1]
      [a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8]
> A [2]
      a1e1 + a2e2 + a3e3 + a4e4 + a5e5 + a6e6 + a7e7 + a8e8.
```

Целесообразно придать списочный формат и более сложным гиперкомплексным структурам. Так, таблица Кэли умножения базисных элементов представляется трехуровневой списочной структурой: верхний уровень состоит из списка строк таблицы, второй, вложенный, уровень — список ячеек таблицы, третий, самый нижний уровень, — список структурных констант одной ячейки. Таблица Кэли для обобщенных кватернио-

нов в натуральной форме имеет вид

$H_{\alpha\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\alpha e_1$	e_4	$-\alpha e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta e_1$	βe_2
e_4	e_4	αe_3	$-\beta e_2$	$-\alpha \beta e_1$

а в списочной форме — следующий вид

$$[[[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]],[[0,1,0,0],[-\alpha,0,0,0],[0,0,0,1],[0,0,-\alpha,0]],$$

$$[[0,0,1,0],[0,0,0,-1],[-\beta,0,0,0],[0,\beta,0,0]],[[0,0,0,1],[0,0,\alpha,0],[0,-\beta,0,0],[-\alpha\beta,0,0,0]]].$$

Структура пакета гиперкомплексных вычислений включает следующие подсистемы:

- выполнения алгебраических операций в ГЧС;
- манипуляции с ГЧС и таблицами Кэли;
- определения алгебраических характеристик гиперкомплексных выражений;
- хранения часто употребляемых выражений;
- выполнения модульных операций с гиперкомплексными выражениями; визуализации и сервиса.

Подсистема выполнения алгебраических операций в ГЧС состоит из следующих процедур:

$HNSnumber(n, Name, NameBas)$ — генерация гиперкомплексного числа n -й размерности;

$inAdd(A, B)$ — сложение двух гиперкомплексных чисел, A и B , в списочном виде;

$Add(A, B, dimHNS)$ — сложение двух гиперкомплексных чисел, A и B , размерности $dimHNS$ в натуральном виде;

$Subtr(A, B, dimHNS)$ — вычитание двух гиперкомплексных чисел, A и B , размерности $dimHNS$ в натуральной форме;

$inMulti(A, B, HNS)$ — умножение двух чисел в виде списка;

$natMulti(A, B, HNS, nBas)$ — умножение двух гиперкомплексных чисел в натуральной форме;

$Divis(A, B, nameHNS)$ — деление чисел в списочном виде;

$Rad2(A, Name, nameBas)$ — извлечение квадратного корня из гиперкомплексного числа в любой форме;

$SqrtEq(A, B, C, NameHNS)$ — решение гиперкомплексного квадратного уравнения.

Подсистема манипуляции с ГЧС и таблицами Кэли состоит из следующих процедур:

$\text{inConvertHNS}(M, \text{Name})$ — преобразование таблицы Кэли из естественного вида в списковый (список структурных констант);

$\text{VizHNS}(\text{Spis}, \text{nam})$ — визуализация списка ГЧС в таблицу Кэли с данным базисом;

$\text{nameBas}(A)$ — определение идентификатора базиса ГЧС по гиперкомплексному числу в естественном виде;

$\text{renam}A(A, \text{nam}, \text{dimHNS})$ — переименование идентификатора базиса в гиперкомплексном числе в естественном виде;

$\text{VizHNS}(\text{Spis}, \text{nam})$ — визуализация списка ГЧС в таблицу Кэли с данным базисом;

$\text{LibHNS}()$ — хранилище таблиц Кэли ГЧС;

$\text{SearchHNS}(\text{nameHNS}, \text{nameRepos})$ — процедура поиска ГЧС в хранилище по ее имени;

$\text{VizIn}A(\text{in}A, E)$ — визуализация гиперкомплексного числа из списковой формы в естественную;

$\text{Convert}A(A, \text{DimHNS})$ — преобразование гиперкомплексного числа из естественной формы в списковую;

$\text{Refill}(\text{Spisok}, \text{Element})$ — пополнение списка на один элемент;

$\text{ListHNS}(\text{DimHNS})$ — генерация списка-шаблона для внутреннего представления ГЧС;

$\text{nameBas}(A)$ — определение идентификатора базиса ГЧС по гиперкомплексному числу в естественном виде;

$\text{renam}A(A, \text{nam}, \text{dimHNS})$ — переименование идентификатора базиса в гиперкомплексном числе в естественном виде;

$\text{RefillHNS}(\text{nameLib}, \text{nameHNS})$ — удаление ГЧС из хранилища;

$\text{VizLibHNS}(\text{LibHNS})$ — просмотр всех ГЧС в естественном виде;

$\text{Trans}(M, s, t)$ — транспозиция строк и столбцов таблицы Кэли ГЧС;

$\text{AddHNS}(\text{Name}, \text{Table}, \text{Comment}, \text{Type})$ — пополнение хранилища ГЧС;

$\text{GenIzo}(L, \text{nameHNS}, \text{newBas})$ — генерация изоморфной ГЧС путем линейного преобразования базиса;

$\text{DirSum}2(\text{Name}1, \text{Name}2)$ — построение прямой суммы двух ГЧС;

$\text{DirSum}N(\text{Spisok}, \text{nameBas})$ — построение прямой суммы нескольких ГЧС;

$\text{MultiDim}(\text{nameHNS}1, \text{nameHNS}2, \text{nameBas}, \text{markKom}, \text{nameHNS})$ — умножение размерности ГЧС;

$\text{SysIzo}(\text{HNS}1, \text{HNS}2)$ — генерация системы уравнений изоморфизма двух ГЧС;

$\text{SolIzo}(\text{SysEq})$ — решение системы уравнений изоморфизма двух ГЧС.

Подсистема определения алгебраических характеристик гиперкомплексных выражений состоит из следующих процедур:

$\text{Norma}(A, \text{nameHNS})$ — определение псевдонормы гиперкомплексного числа в списочном виде;

$\text{Unit}(\text{nameHNS}, \text{name})$ — определение единичного элемента ГЧС;

$\text{Conjug}(A, \text{nameHNS}, \text{nam})$ — построение сопряженного числа;

$\text{Divis}(A, B, \text{nameHNS})$ — процедура деления;

$\text{HNSnumber}(n, \text{Name}, \text{NameBas})$ — процедура генерации гиперкомплексного числа.

Подсистема хранения часто употребляемых выражений содержит готовые формулы выполнения различных операций и вычислений для фиксированных ГЧС. Эта подсистема может пополняться и сохраняться пользователем.

Подсистема выполнения модульных операций с гиперкомплексными выражениями состоит из процедур построения системы остаточных классов по гиперкомплексным модулям, определения представимости гиперкомплексного числа, алгоритма Евклида для гиперкомплексных чисел и др.

Подсистема визуализации и сервиса состоит из следующих процедур:

$\text{VizInA}(\text{inA}, E)$ — визуализация гиперкомплексного числа из списочной формы в естественную;

$\text{ConvertA}(A, \text{DimHNS})$ — преобразование гиперкомплексного числа из естественной формы в списковую;

$\text{Refill}(\text{Spisok}, \text{Element})$ — пополнение списка на один элемент;

$\text{ListHNS}(\text{DimHNS})$ — генерация списка-шаблона для внутреннего представления ГЧС;

$\text{inConvertHNS}(M, \text{Name})$ — преобразование таблицы Кэли из естественного вида в списковый (список структурных констант);

$\text{RefillHNS}(\text{nameLib}, \text{nameHNS})$ — процедура удаления ГЧС из хранилища.

Такая структура и состав комплекса гиперкомплексных символьных вычислений в среде Maple позволяет значительно упростить процессы создания программного обеспечения для математического моделирования различных научно-технических задач.

Принципы построения некоторых процедур ПК. Рассмотрим следующие процедуры преобразования гиперкомплексного числа из естественной формы в списочную.

Процедура преобразования гиперкомплексного числа из естественной формы в списочную. Задача: число A в

форме (1) перевести в форму (4). На первый взгляд, сделать это очень просто: выполнить подстановки $e_i = 1, i = 1, \dots, n$, с помощью команды subs, после чего полученное выражение $A = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ с помощью команды convert(A,list) превратить в (4). Однако, если в числе A один или более коэффициентов a_i равны нулю, т.е. гиперкомплексное число A — неполное, то получится список, длина которого меньше n , что приведет в дальнейшем к неправильным результатам.

Идея алгоритма, работающего правильно как с полными гиперкомплексными числами, так и неполными, заключается в следующем. Сначала генерируется список длиной n — заготовка результата:

$$\text{in } A = [0, 0, \dots, 0]. \quad (5)$$

Затем генерируется список той же длины, состоящий из равенств $e_i = 0$:

$$\text{sp} = [e_1 = 0, \dots, e_i = 0, \dots, e_n = 0].$$

Для каждого значения индексов строится список равенств

$$\text{sp1} = [e_1 = 0, \dots, e_i = 1, \dots, e_n = 0] \quad (6)$$

и выполняется подстановка в исходное число списка (6). Если в числе A компонент $a_i = 0$, то он таким войдет в список (5). Таким образом, эта подстановка выделяет коэффициент a_i , который присваивается i -му элементу списка (5).

Полный текст программы, где формальными параметрами процедуры являются A — гиперкомплексное число в естественной форме, DimHNS — размерность ГЧС, в которой задано число A , имеет следующий вид:

```

Convert A := proc (A, DimHNS)
  local inA, sp, i, sp1, e, A1;
  inA := [seq (0, i = 1.. DimHNS)];
  if A <> 0 then
    A1 := subs (nameBas (A) = e, A);
    sp := [seg (e[i] = 0, i = 1.. DimHNS)];
    for i to DimHNS do
      sp1 := sp; sp1[i] := e[i] = 1; inA[i] := subs (sp1, A1)
    end do
  end if;
  RETURN (inA)
end proc

```

Процедура умножения гиперкомплексных чисел в списочной форме выполняет умножение двух гиперкомплексных чисел, A и B , которые заданы в виде списков. Умножение проводится в

соответствии с законами композиции системы HNS. Таким образом, процедура реализует обобщенную формулу умножения гиперкомплексных чисел [1, 6]

$$AB = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_i b_j \gamma_{ij}^k, \quad (7)$$

где n — размерность ГЧС HNS; γ_{ij}^k — структурные константы законов композиции ГЧС HNS.

Процедура выполняет вызов хранилища таблицы Кэли ГЧС (процедура LibHNS()), в которой осуществляется поиск информации о заданной ГЧС HNS (SearchHNS(HNS, LibHNS())). В ней содержится трехуровневый список структурных констант ГЧС HNS. Далее выполняется формула (7). Полный текст программы имеет следующий вид:

```

inMulti := proc (A, B, HNS)
  local X, k, i, j, Lib, HNSI;
  Lib := Lib HNS ();
  HNSI := SearchHNS (HNS, Lib);
  X := [seq ( 0, i = 1.. nops (HNSI[1]))];
  for k to nops (HNSI[1]) do
    X[k] := 0;
    for i to nops (HNSI[1]) do
      for j to nops (HNSI[1]) do
        X[k] := X[k] + A[i]*B[j]*HNSI [i, j, k]
      end do
    end do
  end do;
  RETURN (X)
end proc

```

Рассмотрим пример вызова и работы этой процедуры. Сгенерируем два гиперкомплексных числа четвертой размерности:

$$A := \text{HNSnumber} (4, a, e) [1], B := \text{HNSnumber} (4, a, e) [1];$$

$$A := [a_1, a_2, a_3, a_4], B := [b_1, b_2, b_3, b_4].$$

Построим их произведение в ГЧС Q_4N — некоммутативном автоудвоении обобщенной системы комплексных чисел [1, 6 — 8], таблица Кэли которой имеет вид

$Q4N$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4
E_2	E_2	$pE_1 + qE_2$	E_4	$pE_3 + qE_4$
E_3	E_3	$-E_4$	$pE_1 + qE_3$	$-pE_2 - qE_4$
E_4	E_4	$-pE_3 - qE_4$	$pE_2 + qE_4$	$-p^2E_1 - pqE_2 - pqE_3 - q^2E_4$

Вызываем процедуру: $C := \text{inMulti}(A, B, Q4N)$. Получаем список из четырех компонентов результата:

$$[a_1b_1 + a_2b_2p + a_3b_3p - a_4b_4p^2, a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2q + a_3b_4p - a_4b_3p - a_4b_4pq, a_1b_3 - a_2b_4p + a_3b_1 + a_3b_3q + a_4b_2p - a_4b_4pq, a_1b_4 - a_2b_3 - a_2b_4q + a_3b_2 + a_3b_4q + a_4b_1 + a_4b_2q - a_4b_3q - a_4b_4q^2].$$

Процедура умножения двух гиперкомплексных чисел в естественной форме использует процедуру умножения в списочном виде. Сначала число преобразуется из естественной формы в списочную, затем выполняется умножение в списочной форме, после чего полученное произведение преобразуется из списочной формы в натуральную и визуализируется с заданным именем базиса. Текст процедуры:

```

natMulti := proc (A, B, HNS, nBas)
  VizInA (inMulti (ConvertA(A, nops (SearchHNS (HNS,
    LibHNS ())), ConvertA(B, nops (SearchHNS (HNS,
    LibHNS ())), HNS), nBas)
end proc
    
```

Пусть числа третьей размерности имеют естественную форму:

$$A := a_1e_2 + a_2e_2 + a_3e_3, B := b_1e_2 + b_2e_2 + b_3e_3.$$

Найдем их произведение в системе триплексных чисел T [1] с таблицей умножения вида

T	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$(e_3 - e_1) / 2$	$-e_2$
e_3	e_3	$-e_2$	e_1

Тогда их произведение имеет вид

$$C := \text{natMulti}(A, B, T, f),$$

$$C := \left(a_1 b_1 - \frac{1}{2} a_2 b_2 + a_3 b_3 \right) f_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_2 b_3 - a_3 b_2) f_2 +$$

$$+ \left(a_1 b_3 + \frac{1}{2} a_2 b_2 + a_3 b_1 \right) f_3,$$

где имя базиса e изменено на f . Вызов этой процедуры в ГЧС $R \oplus C$ [1] с таблицей умножения

$R \oplus C$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0
e_2	0	e_2	e_3
e_3	0	e_3	$-e_2$

имеет вид

$$C := \text{natMulti}(A, B, R \oplus C, f),$$

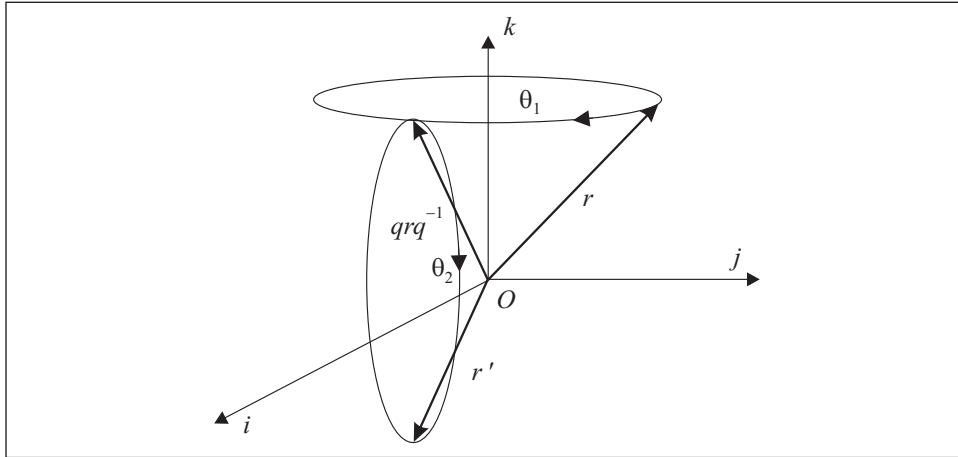
$$C := a_1 b_1 f_1 + (a_2 b_2 - a_3 b_3) f_2 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) f_3.$$

Пример решения практической задачи с помощью ПК. Сравним решение задачи поворота вектора с помощью кватерниона традиционными средствами и с использованием процедур ПК. Эта задача часто возникает в системах ориентации в пространстве, навигации, компьютерной анимации и др. [2]. Формула поворота вектора r в пространстве с помощью кватерниона q имеет вид [9]

$$r' = qrq^{-1}, \quad (8)$$

где r и r' — начальные и конечные координаты поворачиваемой точки в кватернионном виде, т.е. этот кватернион — векторный; q и q^{-1} — прямой и обратный кватернионы, определяющие ось вращения; все умножения — кватернионные. В выражении (8) кватернион q должен быть нормирован, т.е. его норма должна быть равна единице. Если кватернион поворота имеет вид $Q = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$, то нормированный кватернион имеет следующий вид:

$$q = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}} e_1 + \frac{a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}. \quad (9)$$



Геометрический смысл элементов выражения (9) таков: угол поворота вокруг оси (см. рисунок)

$$\theta = 2\arccos \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}},$$

ее направляющие косинусы —

$$\cos\theta_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}}, \quad i=2,3,4.$$

Рассмотрим задачу определения координат точки, полученной последовательными поворотами вектора вокруг двух осей: сначала вокруг оси, определяемой кватернионом q , а затем — вокруг оси, определяемой кватернионом p , как показано на рисунке. Такой сложный поворот определяется формулой

$$r' = pqrq^{-1}p^{-1}, \quad (10)$$

где все умножения — кватернионные [1, 3]; q и q^{-1} — прямой и обратный кватернионы, определяющие первую ось вращения; p и p^{-1} — то же для второй оси вращения.

Таким образом, программа должна предусматривать нормирование кватернионов, определение обратных кватернионов, кватернионные перемножения по (10) и упрощение полученного результата. Если даны исходные нормированные по (9) кватернионы q, p и r в списочном виде, а также обратные кватернионы $q^{-1} = Cq, p^{-1} = Cp$, то один из возможных вариантов программы в виде процедуры без применения средств ПК имеет следующий вид:

```

Pov := proc(r, q, p, Cq, Cp)
  local AB, M1, M2, M3, M4, i, M, r1;
  AB := [a[1]*b[1] – a[2]*b[2] – a[3]*b[3] – a[4]*b[4],
a[1]*b[2] + a[2]*b[1] + a[3]*b[4] – a[4]*b[3],
a[1]*b[3] – a[2]*b[4] + a[3]*b[1] + a[4]*b[2],
a[1]*b[4] + a[2]*b[3] – a[3]*b[2] + a[4]*b[1]];
  M1 := subs (a[1] = p[1], a[2] = p[2], a[3] = p[3], a[4] = p[4],
b[1] = q[1], b[2] = q[2], b[3] = q[3], b[4] = q[4], AB);
  M2 := subs (a[1] = M1[1], a[2] = M1[2], a[3] = M1[3], a[4] = M1[4],
b[1] = r[1], b[2] = r[2], b[3] = r[3], b[4] = r[4], AB);
  M3 := subs (a[1] = M2[1], a[2] = M2[2], a[3] = M2[3], a[4] = M2[4],
b[1] = Cq[1], b[2] = Cq[2], b[3] = Cq[3], b[4] = Cq[4], AB);
  M4 := subs (a[1] = M3[1], a[2] = M3[2], a[3] = M3[3], a[4] = M3[4],
b[1] = Cp[1], b[2] = Cp[2], b[3] = Cp[3], b[4] = Cp[4], AB);
  for i to 4 do M[i] := factor (M4[i]) end do;
  r1 := [M[1], M[2], M[3], M[4]];
  RETURN (r1)
end proc

```

Как видим, основной объем этой программы занимают вычисления произведений кватернионов, которые выполнены в виде их подстановок в общую формулу. Поскольку в ПК есть процедуры умножения гиперкомплексных чисел, эта программа существенно упрощается. Программа с использованием средств ПК выглядит так:

```

Pov1 := proc(r, q, p, Cq, Cp) for i from 1 to 4 do r1[i]
  := factor (inMulti(inMulti(inMulti(inMulti(p, q, H), r, H),
Cq[1], H), Cp[1], H) [i]): end do;
  RETURN (r1)
end proc

```

Естественно, результаты вычислений по обеим программам — одинаковы. Так, если решается задача поворота точки с координатами [1, 2, 3] сначала на угол $\theta_1 = \pi/3$ вокруг оси, определяемой ортом [0, 0, 1], т.е. оси *Oz*, затем — на угол $\theta_2 = \pi/2$ вокруг оси, определяемой ортом [0, 1, 0], т.е. оси *Oy*, то конечное положение точки определяется векторным кватернионом $r' = 3e_2 + (\sqrt{3} + 0,5)e_3 + (\sqrt{3} - 0,5)e_4$.

Выводы

Разработанные программно-алгоритмические средства обеспечивают большую область вычислений, связанных с моделированием процессов, описываемых гиперкомплексными числами. Их использование значительно

упрощает процесс разработки программного обеспечения и повышает его надежность, так как применяются многократно проверенные алгоритмы и программы. В то же время, ПК нуждается в дальнейшем пополнении и расширении, что является направлением дальнейшей научно-исследовательской работы в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синьков М.В. Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. Киев: НАН України, Ін-т проблем реєстрації інформації, 2010, 389 с.
2. Калиновский Я.А. Высокорамерные изоморфные гиперкомплексные числовые системы и их использование для повышения эффективности вычислений / Я.А.Калиновский, Ю.Е.Бояринова. Киев: Инфодрук, 2012, 183с.
3. Калиновський Я.О. Методи комп'ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: Дис. ... д-ра техн. наук : 01.05.02. ІПРІ НАН України. Київ, 2007, 417 с.
4. Калиновский Я.А. Гиперкомплексные числовые системы и быстрые алгоритмы цифровой обработки информации / Я.А. Калиновский, Д.В. Ландэ, Ю.Е. Бояринова, Я.В. Хицко. Киев: ИПРИ НАН Украины, 2014, 130 с.
5. Von zur Gathen J. Modern Computer Algebra // J. von zur Gathen, J. Gerhard. Cambridge: Cambridge University Press, 2013, 808 p.
6. Kalinovsky Ya.A., Boyarinova Yu.E., Sukalo A.S. Study of relations between the generalized quaternions and procedure of doubling of hypercomplex numerical systems // Storage & Processing. 2015, Vol. 17, № 1, p. 36—45.
7. Kalinovsky Ya. The structure of a hyperfast calculation method linear convolution of discrete signals // Ibid. 2013, Vol. 15, № 1, p. 31—44.
8. Kalinovsky Ya.A., Lande D.V., Boyarinova Y.E., Khitsko Y.V. Some isomorphic classes for noncanonical hypercomplex number systems of dimension 2, -arXiv preprint arXiv: 1403.2273, 2014.
9. Liefke H. Quaternion Calculus for Modeling Rotations in 3D Space. [Electronic resource] : www.liefke.com/hartmut (1998).

Поступила 31.05.17;
после доработки 07.08.17

REFERENCES

1. Sinkov, M.V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2010), *Konechno-mernyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy. Osnovy teorii. Primeneniya* [Finite-dimensional hypercomplex number systems. Fundamentals of the theory. Applications], NAS of Ukraine, Institute for Information Recording of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
2. Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E. (2012), *Vysokorazmernyye izomorfnyie giperkompleksnyie chislovyie sistemy i ikh ispolzovaniye dlya povysheniya effektivnosti vychisleniy* [High-dimensional isomorphic hypercomplex numerical systems and their use for increasing efficiency of computations], Infodruk, Kyiv, Ukraine.
3. Kalinovsky, Ya. A. (2007), "Development of the methods of the theory of HNS for a mathematical modeling and computer calculations", Dr. Sci. (Tech.) thesis, 01.05.02, Institute for Information Recording of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

4. Kalinovsky, Ya.A., Lande, D.V., Boyarinova, Yu.E. and Khitsko, Ya.V. (2014), *Giperkompleksnye chislovye sistemy i bystrye algoritmy tsifrovoy obrabotki informatsii* [Hypercomplex number systems and fast algorithms for digital information processing], Institute for Information Recording of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
5. Von zur Gathen, J. and Gerhard, J. (2013), *Modern computer algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
6. Kalinovsky, Ya.A., Boyarinova, Yu.E. and Sukalo, A.S (2015), “Study of relations between the generalized quaternions and procedure of doubling of hypercomplex numerical systems”, *Data Rec., Storage & Processing*, Vol. 17, no. 1, pp. 36-45.
7. Kalinovsky, Ya.A. (2013), “The structure of a hyperfast calculation method linear convolution of discrete signals”, *Data Rec., Storage & Processing*, Vol. 15, no.1, pp. 31-44.
8. Kalinovsky, Ya.A., Lande, D.V., Boyarinova, Yu.E. and Khitsko, Ya.V. (2014), Some isomorphic classes for noncanonical hypercomplex number systems of dimension 2, -arXiv preprint arXiv:1403.2273, 2014.
9. Liefke, H. (1998), “Quaternion calculus for modeling rotations in 3D space”, available at: www.liefke.com/hartmut.

Received 31.05.17;
after revision 07.08.17

Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova, A.S. Sukalo, Ya.V. Khitsko

SOFTWARE COMPLEX FOR HYPERCOMPLEX COMPUTATIONS

The principles assumed as a basis of the algorithmic-software complex of hypercomplex computations are stated. The complex structure and the composition of the functional subsystems are described. The most important procedures performed by the subsystems are considered, program listings and examples of their application are given.

Keywords: hypercomplex numerical system, procedure, computer algebra, operation, Maple.

КАЛИНОВСКИЙ Яков Александрович, д-р техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 1965 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

БОЯРИНОВА Юлия Евгеньевна, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины, доцент Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 1997 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

СУКАЛО Алина Сергеевна, аспирантка Ин-та проблем регистрации информации НАН Украины. В 2013 г. окончила Житомирский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные процессы.

ХИЦКО Яна Владимировна, канд. техн. наук, мл. науч. сотр. Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т», который окончила в 2005 г. Область научных исследований — теория гиперкомплексных числовых систем и их применение в математическом моделировании.

УДК 519.21

А.В. Макаричев, д-р физ.-мат. наук
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(Украина, 61002, Харьков, ул. Петровского, 25,
тел. (057)7073783, e-mail: amsol2904@gmail.com),
А.А. Кудь, А.Б. Щукин
ООО «Симкорд»
(Украина, Харьков, ул. Отокара Яроша, 18)

Суммы максимумов приращений в многоканальной системе обслуживания при моделировании аукционных торгов

Для входящего потока с переменным параметром, поступающего в систему с неограниченным обслуживанием, в терминах характеристических функций найдены вероятностные распределения и числовые характеристики сумм максимумов приращений требований, поступивших и обслуженных на конечном промежутке времени.

Ключевые слова: распределения сумм максимумов.

Для потоку із змінним параметром, що поступає у систему з необмеженим обслуговуванням, у термінах характеристичних функцій знайдено ймовірнісні розподілення та числові характеристики сум максимумів приростань вимог, які надійшли і були обслуговані на кінцевому проміжку часу.

Ключові слова: розподілення сум максимумів.

В систему массового обслуживания интернет сообщений поступает входящий пуассоновский поток с переменным параметром [1] $\lambda(t)$, $t \geq 0$, объявлений о продаже. Объявления немедленно (без ожидания [2]) размещаются на сайте объявлений и находятся на нем в течение, вообще говоря, случайного времени обслуживания. Времена обслуживания заявок (пробывания на сайте объявлений о продаже) являются положительными, независимыми в совокупности и одинаково распределенными случайными величинами.

Пусть $G(u)$ — функция распределения времени обслуживания. Во время обслуживания заявок (возможного торга) с интенсивностью μ возникает случайное число n независимых предложений. Каждое такое предложение связано с повышением (понижением) объявленной цены на вели-

© А.В. Макаричев, А.А. Кудь, А.Б. Щукин, 2017

чину ее приращения. Модули этих приращений являются независимыми положительными случайными величинами с функцией распределения $H(x)$. Из этих приращений находится их максимум S_{\max} .

Пусть $F_{\max}(x) = P(S_{\max} \leq x)$ — функция распределения максимума из приращений объявленной цены за время обслуживания (торгов) заявки о продаже. Подобные модели возникают в процессах аукционной продажи (на понижение или на повышение). Представляют значительный интерес числовые характеристики сумм максимумов случайных приращений цен по заявкам за время их обслуживания (торгов по продаже) в течение заданного промежутка времени длины T . Исследования этих сумм могут быть проведены отдельно для положительных приращений и для модулей отрицательных приращений. Рассмотрим возможность создания вероятностных инструментов познания для исследования этих сумм.

Теорема 1. Функция распределения максимума из приращений, возникших за время обслуживания требования (заявки о продаже), имеет вид

$$F_{\max}(x) = \begin{cases} \int_{u>0} \exp\{-\mu u [1-H(x)]\} dG(u), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Доказательство. При условии, что число этих приращений X_1, X_2, \dots, X_n равно n за время обслуживания u , вероятность P того, что их максимум $S_{\max}[n, u] = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ меньше x (ввиду их независимости и одинакового распределения), имеет вид

$$\begin{aligned} P\{S_{\max}[n, u] \leq x\} &= P\{X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x\} = \\ &= P\{X_1 \leq x\} P\{X_2 \leq x\} \dots P\{X_n \leq x\} = [H(x)]^n. \end{aligned}$$

Этот условный максимум имеет функцию распределения $[H(x)]^n$. По формуле полной вероятности полученную условную вероятность умножаем на вероятность $((\mu n)^n / n!) \exp(-\mu u)$ того, что за время обслуживания требования возникло ровно n приращений. Полученные произведения складываем по всем целым числам $n \geq 0$, а затем интегрируем по всем действительным числам $u > 0$ с распределением $dG(u)$. В итоге получаем функцию распределения

$$\begin{aligned} F_{\max}(x) &= \int_{u>0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu u)^n}{n!} H^n(x) \exp(-\mu u) dG(u) = \\ &= \int_{u>0} \exp\{-\mu u [1-H(x)]\} dG(u) \end{aligned}$$

максимума S_{\max} из приращений за время обслуживания требования. Итак,

$$F_{\max}(x) = \begin{cases} \int_{u>0} \exp\{-\mu u [1-H(x)]\} dG(u), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Моменты максимума приращений, возникшие за время обслуживания требований (заявок о продаже), определяются по формулам

$$MS_{\max} = \int_{x>0} dx \int_{u>0} \{1 - \exp[-\mu u [1-H(x)]]\} dG(u),$$

$$M(S_{\max})^2 = \int_{x>0} 2xdx \int_{u>0} \{1 - \exp[-\mu u [1-H(x)]]\} dG(u).$$

Доказательство этих формул осуществляется с помощью интегрирования по частям. Обозначим $f(t)$ характеристическую функцию для максимума из приращений, возникших за время обслуживания требования, $f(t) = M(itS_{\max})$. Предположим, что в начальный момент времени $t=0$ в системе массового обслуживания требования отсутствуют. Обозначим $n(T)$ число требований, поступивших в систему обслуживания на отрезке времени $[0, T]$, $\xi(T)$ — число обслуженных требований в системе массового обслуживания на отрезке времени $[0, T]$, и $\eta(T)$ — число требований, находящихся на обслуживании в системе в момент времени T . Очевидно, $n(T) = \xi(T) + \eta(T)$.

Распределение числа пришедших требований в систему на отрезке времени $[0, T]$ определяется по формуле [1]

$$P\{n(T) = n\} = \frac{[\Lambda(T)]^n}{n!} \exp[-\Lambda(T)],$$

где $\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(t) dt$. Обозначим $\Phi_0(t) = M \exp(itS_T^0)$ характеристическую функцию суммы

$$S_T^0 = S(1) + S(2) + \dots + S(\xi(T)) \quad (1)$$

всех максимумов приращений для требований, обслуженных на отрезке $[0, T]$. Обозначим [3]

$$\Lambda_G^0(T) = \int_0^T \lambda(y) G(T-y) dy \quad (2)$$

интеграл от интенсивности пуассоновского потока с переменным параметром

$$\lambda(y)G(T-y), \quad y \in [0, T], \quad (3)$$

для числа поступивших на отрезке $[0, T]$ требований и обслуженных на нем.

Теорема 2. Характеристическая функция для суммы всех максимумов приращений сумм обслуженных на отрезке $[0, T]$ заявок определяется по формуле

$$\Phi_o(t) = \exp\{\Lambda_G^o(T)[f(t)-1]\},$$

где

$$f(t) = M(itS_{\max}); \quad \Lambda_G^o(T) = \int_0^T \lambda(y)G(T-y)dy.$$

Доказательство. Согласно предположению, все слагаемые суммы (1) являются независимыми в совокупности и распределены так же, как и случайная величина S_{\max} . Согласно принятым обозначениям (2) и (3) характеристическая функция суммы (1) всех максимумов приращений цен для требований (заявок о продаже), обслуженных на отрезке $[0, T]$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_o(t) &= M \exp(itS_T^o) = M [f(t)]^{\xi(T)} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda_G^o(T)^n}{n!} \exp[-\Lambda_G^o(T)] [f(t)]^n = \exp\{\Lambda_G^o(T)[f(t)-1]\}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 2. Математическое ожидание суммы максимумов приращений за время обслуживания требования (заявки о продаже) определяется по формуле $MS_T^o = \Lambda_G^o(T) MS_{\max}$, а дисперсия этой случайной величины — по формуле $DS_T^o = \Lambda_G^o(T) M(S_{\max})^2$, где моменты MS_{\max} и $M(S_{\max})^2$ определяются из следствия 1.

Доказательство. В самом деле, с помощью дифференцирования в нуле характеристической функции $\Phi_o(t)$ находим математическое ожидание суммы (1) [4] всех приращений сумм для требований (заявок о продаже), обслуженных на отрезке $[0, T]$,

$$MS_T^o = \frac{[\Phi_o(t)]'|_{t=0}}{i} =$$

$$= \Lambda_G^0(T) \exp \{ \Lambda_G^0(T) [f(t) - 1] \} \frac{f'(t)}{i} \Big|_{t=0} = \Lambda_G^0(T) M S_{\max},$$

второй момент этой случайной величины,

$$\begin{aligned} M[S_T^0]^2 &= \frac{[\Phi_0(t)]''|_{t=0}}{-1} = \\ &= -\{ \exp \{ \Lambda_G^0(T) [f(t) - 1] \} f'(t) \}|_{t=0} \Lambda_G^0(T) = \\ &= -[\Lambda_G^0(T)]^2 \{ [f'(t)]^2 \exp \{ \Lambda_G^0(T) [f(t) - 1] \} \}|_{t=0} - \\ &\quad - \Lambda_G^0(T) \exp \{ \Lambda_G^0(T) [f(t) - 1] \} [f''(t)]|_{t=0} = \\ &= [\Lambda_G^0(T)]^2 (M S_{\max})^2 + \Lambda_G^0(T) M (S_{\max})^2, \end{aligned}$$

и ее дисперсию: $DS_T^0 = \Lambda_G^0(T) M (S_{\max})^2$.

Обозначим $\Phi_{\text{н.о}}(t) = M \exp(it S_T^{\text{н.о}})$ характеристическую функцию суммы

$$S_T^{\text{н.о}} = S(1) + S(2) + \dots + S(\eta(T)) \quad (4)$$

всех максимумов приращений цен для требований (заявок о продаже), находящихся на обслуживании в момент времени T , т.е. не окончивших обслуживание к этому моменту времени. Обозначим [5] $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$

$$\Lambda_G^{\text{н.о}}(T) = \int_0^T \lambda(y) \bar{G}(T-y) dy \quad (5)$$

интеграл от интенсивности пуассоновского потока с переменным параметром

$$\lambda(y) [1 - G(T-y)] = \lambda(y) \bar{G}(T-y), \quad y \in [0, T], \quad (6)$$

для поступивших на отрезке $[0, T]$ требований и продолжающих свое обслуживание в момент времени T , т.е. не закончившим обслуживание на нем.

Теорема 3. Характеристическая функция суммы всех максимумов приращений для требований (заявок о продаже), поступивших, но не обслуженных на отрезке $[0, T]$, имеет вид

$$\Phi_{\text{н.о}}(t) = \exp \{ (\Lambda_G^{\text{н.о}}(T) [f(t) - 1] \},$$

где

$$\begin{aligned} f(t) &= M(it S_{\max}); \\ \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) &= \int_0^T \lambda(y) \bar{G}(T-y) dy. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предположению все слагаемые в сумме (4) являются независимыми в совокупности и распределены так же, как и случайная величина S_{\max} . Согласно принятым обозначениям (5) и (6) характеристическая функция суммы (4) [6] всех максимумов приращений для требований, поступивших, но не обслуженных на отрезке $[0, T]$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{н.о}}(t) &= M \exp(itS_T^{\text{н.о}}) = M[f(t)]^{\xi(T)} = \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)}{n!} \exp[-\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)] [f(t)]^n = \exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\}. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. Математическое ожидание суммы всех максимумов приращений для требований (заявок о продаже), не обслуженных на отрезке $[0, T]$, определяется по формуле $MS_T^{\text{н.о}} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)MS_{\max}$, а дисперсия — по формуле $DS_T^{\text{н.о}} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[M(S_{\max})^2]$, где моменты $M(S_{\max})$ и $M(S_{\max})^2$ определяются из следствия 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, дифференцированием в нуле характеристической функции $\Phi_{\text{н.о}}(t)$ находим математическое ожидание суммы (4) всех максимумов приращений для требований, не обслуженных на отрезке $[0, T]$,

$$\begin{aligned} MS_T^{\text{н.о}} &= \frac{[\Phi_{\text{н.о}}(t)]'|_{t=0}}{i} = \\ &= \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) \exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\} \frac{f'(t)}{i} \Big|_{t=0} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) MS_{\max}, \end{aligned}$$

второй момент этой случайной величины,

$$\begin{aligned} M[S_T^{\text{н.о}}]^2 &= \frac{[\Phi_{\text{н.о}}(t)]''|_{t=0}}{-1} = \\ &= -\{\exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\} f'(t)\}'|_{t=0} \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) = \\ &= -[\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)]^2 \{[f'(t)]^2 \exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\}\}'|_{t=0} - \\ &\quad - \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) \exp\{\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[f(t)-1]\} [f''(t)]|_{t=0} = \\ &= [\Lambda_G^{\text{н.о}}(T)]^2 (MS_{\max})^2 + \Lambda_G^{\text{н.о}}(T) M(S_{\max})^2, \end{aligned}$$

и ее дисперсию — $DS_T^{\text{н.о}} = \Lambda_G^{\text{н.о}}(T)[M(S_{\max})^2]$.

Выводы

Полученные распределения Лапласа для сумм максимумов свидетельствуют о том, что в ряде случаев эти распределения, по существу, являются безгранично делимыми вероятностными распределениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М. : Физматгиз, 1963, 236 с.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М. : Наука, 1987, 336 с.
3. Климов Г.П. Стохастические системы обслуживания. М. : Наука, 1966, 244 с.
4. Соловьев А.Д. Асимптотическое поведение момента наступления редкого события в регенерирующем процессе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1971, № 6, с. 79—89.
5. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Капитанов В.А. и др. Вопросы математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. М. : Радио и связь, 1983, 376 с.
6. Ширяев А.Н. Вероятность. М. : Наука, 1980, 576 с.

Поступила 13.01.17;
после доработки 18.04.17

REFERENCES

1. Khinchin, A.Ya. (1963), *Raboty po matematicheskoi teorii massovogo obsluzhivaniya* [Works on mathematical queuing theory], Fizmatgiz, Moscow, USSR.
2. Gnedenko, B.V. and Kovalenko, I.N. (1987), *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya* [Introduction to queueing theory], Nauka, Moscow, USSR.
3. Klimov, G.P. (1966), *Stokhasticheskie teorii obsluzhivaniya* [Stochastic service systems], Nauka, Moscow, USSR.
4. Solovyov, A.D. (1971), "The asymptotic behavior of the occurrence of the rare event in the regenerating process", *Izvestiya AN SSSR, Tekhnicheskaya kibernetika*, no. 6, pp. 79-89.
5. Barzilovich, E.Yu., Belyaev, Yu.K., Kashtanov, V.A., Kovalenko, I.N., Solovyov, A.D. and Ushakov, I.A. (1983), *Voprosy matematicheskoi teorii nadezhnosti* [Problems of mathematical theory of reliability], Ed. Acad. B.V. Gnedenko, Radio i svyaz, Moscow, USSR.
6. Shiryaev, A.N. (1980), *Veroyatnost* [Probability], Nauka, Moscow, USSR.

Received 13.01.17;
after revision 18.04.17

A.V. Makarichev, A.A. Kud, A.B. Shchukin

SUM OF INCREMENT MAXIMA IN A MULTICHANNEL SERVICE SYSTEM WHEN MODELING AUCTION

For the input stream with a variable parameter put in the system with unlimited service the probability distributions and numerical characteristics for the sums of maxima of the requirement increments received and served in a finite period of time were found in terms of characteristic functions.

Keywords: distribution of sums of maxima.

МАКАРИЧЕВ Александр Владимирович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры транспортных систем и логистики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. В 1981 г. окончил Московский госуниверситет. Область научных исследований — потоки случайных событий с переменной интенсивностью, оценки характеристик надежности комплексов сложных восстанавливаемых систем, распределения сумм экстремумов в случайных процессах обслуживания.

КУДЬ Александр Александрович, генеральный директор ООО «Симкорд». В 2002 г. окончил Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет. Область научных исследований — построение алгоритмов суммирования для определения случайных элементов двоичных матриц.

ЩУКИН Александр Борисович, глава Департамента анализа и моделирования торгово-экономических систем ООО «Симкорд». В 1988 г. окончил Харьковский авиационный ин-т. Область научных исследований — преобразование аддитивных функционалов от случайных процессов, случайные потоки с изменяющейся интенсивностью.

УДК 537.633.9

V.T. Chemerys, Cand. Sci. (Techn.)
National Aviation University of Ukraine
(Ukraine, 03680, Kyiv, Cosmonaut Komarov Ave., 1,
e-mail: vchemer@gmail.com)

Contact Surface Resistivity as a Favorable Condition of Commutation Process

It is shown on the basis of analysis for electrotechnical model of commutation process in the contact zone of rail accelerator of macrobodies that surface resistivity of electrodes of a contact pair is a necessary condition for favorable commutation of current in electromechanical transducers with a sliding contact. In the model of accelerator which has the increasing resistivity of the rail surface layer along with the rise of armature motion velocity it is shown that the volume Joule's losses in the skin layer per unit of rail length can be constant in spite of its resistivity growth, so causing no additional superheating of the conductor. A discussion is performed concerning similar situation in the rotating commutator machines.

Key words: sliding contact of machines, problems of commutation, resistivity of contact surface, application in rail accelerator, similarity with rotational machines.

На основе анализа электротехнической модели коммутационного процесса в контактной зоне рельсового ускорителя макротел показано, что резистивный характер поверхности электродов контактной пары является необходимым условием, способствующим коммутационному процессу в электромеханических преобразователях со скользящим контактом. Для модели ускорителя, имеющей возрастающее удельное сопротивление поверхностного слоя рельсов по мере возрастания скорости движения якоря, показано, что объемные джоулевы потери на единицу длины скин-слоя рельсов могут оставаться неизменными, не вызывая дополнительного перегрева проводника в скин-слое в связи с увеличением его удельного сопротивления. Подобная ситуация рассмотрена для электрических машин вращательного движения.

Ключевые слова: электромеханические преобразователи, скользящий контакт, коммутация, резистивный поверхностный слой, рельсовый ускоритель, машины вращательного движения.

Introduction. Electrical machines with a sliding contact continue to have the popular application both in the field of micro-machines and in the field of the giant energy, when it is necessary to create a powerful catapult or rail accelerator at mega-ampere current. The nature of commutation process is common for all types of electromechanical energy converters with sliding electric contact. A displacement of a moving electrode and a tendency to breaking of current in the

© V.T. Chemerys, 2017

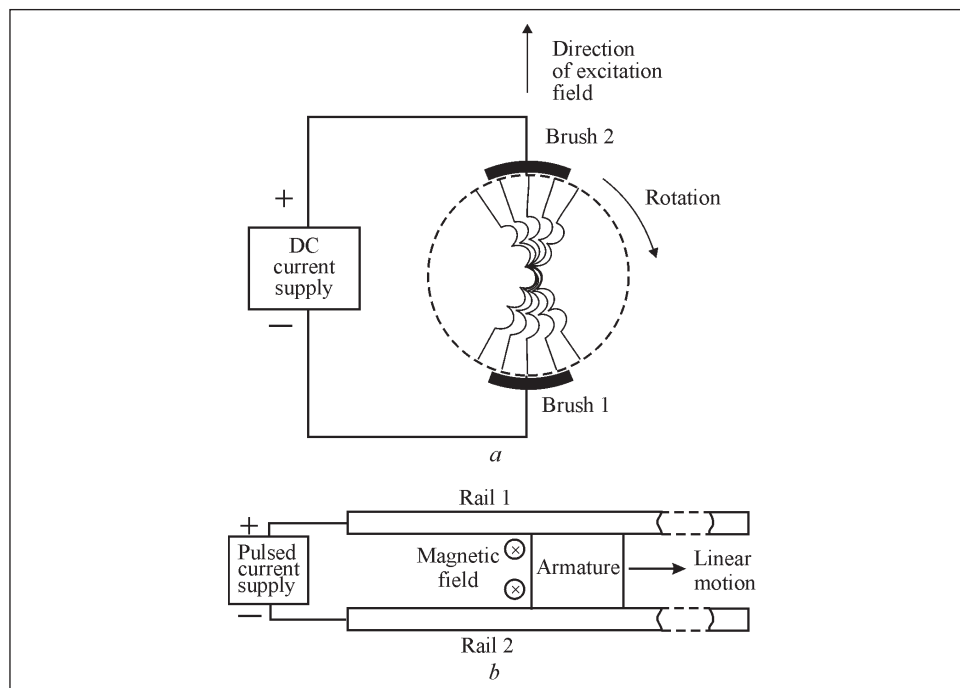


Fig. 1. The principal scheme of commutation in the rotating commutator machine (a) and of rail accelerator of macrobody with linear motion of armature as continuous commutation process (b)

circuit gives birth to a necessity to provide a fast dissipation of some electromagnetic energy stored in the elements of commutated circuit.

The analytical and numerical investigation of commutation process in the rail accelerator with variable resistivity of surface layers of contact gave a possibility to propose a generalized view on the commutation process and on the needed condition for the favorable operation of contact. Taking into account the required resistive properties of contact surfaces it is possible to propose the special design of rails to exclude the rail destruction by electric arc in the process of armature motion in the rail accelerators. The paper proposes the commutation analysis of armature motion.

A general scheme of commutation process in the machine. For any kind of machine with sliding contact the main goal of commutation process is to keep constant a direction and value of current in some elements of the moving part of machine. This process is illustrated in Fig. 1, a, for the machine of rotational motion and in Fig. 1, b, for the machine of linear motion. The common property of both schemes is the exchange of one current-carrying element of a moving part by the next element, and time of the presence of the former one in the circuit of

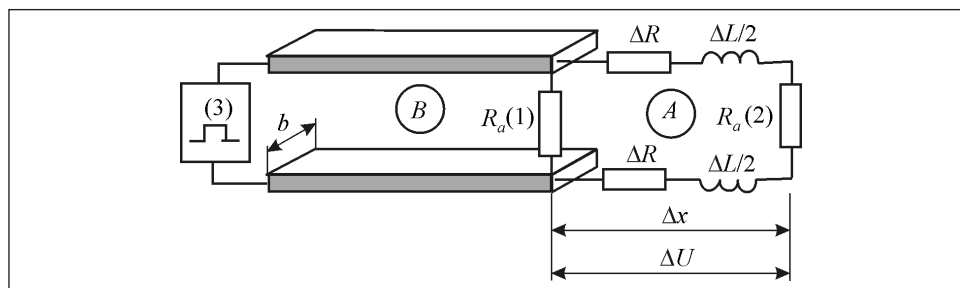


Fig. 2. Sketch of electrical model for commutation analysis of rail accelerator: 1 — armature resistance R_a before displacement; 2 — armature resistance R_a after displacement at the distance Δx ; 3 — pulsed current supply

current is limited. Taking part in the current passage the current-carrying element can store some value of magnetic energy due to the existence of its inductance. Following the known laws of commutation this energy cannot disappear with the exit of the element under consideration out of the current circuit.

That is why the element exit out of contact zone with a tendency to fast breaking of current gives birth to appearance of extra-voltage as a result of the fast drop of magnetic flux linked with this element of moving secondary part of machine. In case of small length of the contact zone at rotating machine this extra-voltage leads to creation of electric arc through the air gap to support the existence of current, while the stored magnetic energy needs time for dissipation. Probably, that is rational to increase the contact zone length to provide a possibility for a decrease of extra-voltage due to dissipation of magnetic energy in the massive unmovable electrode of pair.

Electrotechnical analysis of commutation process. The analytical consideration of commutation process from the position of electrical engineering can be performed simple enough in the model of linear motion of armature (Fig. 1, b). This model corresponds to the of contact zone configuration in the rail accelerator of macrobodies [1]. For the analysis of extra-voltage appearance it is possible to consider the equivalent scheme of circuit shown in Fig. 2. As a result of the elementary displacement of armature at the distance Δx into the existing circuit an element of resistance ΔR and element of inductance $\Delta L/2$ (per one side of the contact zone) must be added. If the power supply is able to support the current value in spite of the variation of circuit parameters it is natural that new added elements of the circuit will be under the action of extra-voltage jump $\Delta U = \Delta(LI)/\Delta t \approx I(\Delta L/2)/\Delta t$, where Δt is the time of armature displacement at the distance Δx . The model will be more adequate, if we shall take into account the real law of current variation in time stipulated by power supply: $I(t) = I_{\max} [1 - \exp(-t/T)]$,

where $T \approx 0.5$ ms is a typical time of current increase in the rail accelerator, the amplitude meaning I_{\max} can be accepted at the level of 1 MA. Thus for the extra-voltage U_{ex} the equation should be written as follows:

$$U_{\text{ex}} = I(t) [\Delta R + (\Delta L/2)/\Delta t] + (\Delta L/2) \Delta I(t)/\Delta t. \quad (1)$$

The parameter $(\Delta L/2)$ can be calculated at known inductance of rails system per unit of length $L' = \Delta L / \Delta x$ [H/m] as $(\Delta L/2) = L' \Delta x$. The parameter ΔR can be calculated using information about formation of skin layer depth in time $\delta(t) = (D \cdot \Delta t)^{1/2}$, where $D = (\mu\sigma)^{-1}$ is a coefficient of the field diffusion into the rail material. Finally the resistance of the rails part under switching on will be $\Delta R = \Delta x / (\sigma \delta b) = v / (\delta b v_D)$, where the next values have been used: velocity of armature displacement $v = \Delta x / \Delta t$; speed of the field diffusion into material of rail $v_D = D / \delta = \delta / \Delta t$; a width of current layer in rail b (see Fig. 2). The full time of armature motion from the start position t_k can be expressed via discrete meaning in function of elementary step of displacement number k in assumption that the armature motion has the constant acceleration $a \approx 5 \cdot 10^5$ m/s², so the time is connected with the length of the path passed by armature $S_k = k \Delta x$ is $t_k = (2k \cdot \Delta x)^{1/2}$. Then for current we have a time dependence

$$I(t_k) = I_{\max} [1 - \exp(-t_k/T)],$$

and for motion velocity $v(k) = (2a k \Delta x)^{1/2}$. After substitution of all values into equation (1) it is possible to derive the needed dependence of electrical conductivity on the path passed by armature using the condition that extra voltage U_{ex} must be less than ultimate value U_{br} that can be a guarantee of the absence of electrical breakdown through the air along the surface of new switched on elements of the rail. From the equality $U_{\text{ex}} = U_{br}$ the next expression follows:

$$\sigma(k) = (\mu \Delta t / b^2) [U_{br} / (I(k) v(k)) - (L'/2)]^{-1/2}.$$

Finally

$$\sigma(k) = \left(\frac{2\Delta x}{a}\right)^{1/2} [(k+1)^{1/2} - k^{1/2}] b^{-2} \times \left\{ \frac{U_{br}}{I_{\max} [1 - \exp(-(1/T)(2k\Delta x/a)^{1/2})]} - \frac{L'}{2} \right\}^{-2}. \quad (2)$$

The expression (2) has been illustrated by graphs in Fig. 3 with the next fixed parameters: $T = 0.5$ ms, $L' = 10^{-6}$ H/m, $a = 5 \cdot 10^5$ m/s², $I_{\max} = 10^6$ A, $b = 0.04$ m, $\mu = \mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$ H/m, $U_{br} = (30, \dots, 400)$ V, $\Delta x = 0.01$ m.

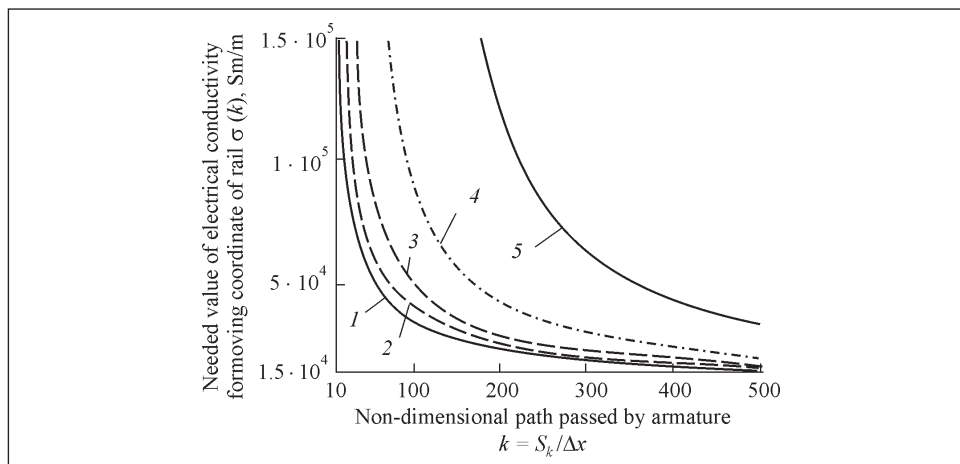


Fig. 3. Electrical conductivity of rails calculated by (2): The horizontal axis gives the running coordinate of rail along with armature motion: 1 — $U_{br} = 30$ V; 2 — $U_{br} = 60$ V; 3 — $U_{br} = 100$ V; 4 — $U_{br} = 200$ V; 5 — $U_{br} = 400$ V

The velocity of armature which corresponds to accepted data of acceleration is shown in the graph in Fig. 4. It is clear from consideration of Fig. 2 that for reduction of extra-voltage up to 60 V it is necessary to decrease the electrical conductivity of rails below $5 \cdot 10^4$ Sm/m beginning from $k \approx 80$, i.e. after the path passed by armature less than 0.8 m. To avoid the extra-voltage at this level under the increase of armature velocity up to 2...2.5 km/s it is necessary to decrease the rails conductivity up to $(1...2) \cdot 10^4$ Sm/m.

Estimation of Joule’s losses in the rail elements. To derive the final decision about acceptability of reduction of extra-voltage stipulated by continuous commutation process it is necessary to make an estimation of Joule’s heat generated in the skin-layer of rail by pulsed current. For estimation we shall neglect the change of current and velocity during time interval $\Delta t = \Delta x / v$. Thus Joule’s heat generated in the volume of skin-layer of rail for a length Δx at the k -step of armature motion will be

$$Q_{\text{Joule}} = I^2(k) \Delta R(k) \cdot \Delta t_k = (I^2 \Delta x / b) [\mu \cdot \Delta x / (\sigma \cdot v)]^{1/2}. \quad (3)$$

When deriving the formula (3), the expressions for ΔR and Δt_k introduced above have been used. The main sense of (3) consists in the principal possibility to keep Joule’s heat constant along all the elements of rails at $\sigma \cdot v = \text{const}$, because the length of element Δx is fixed here. And what about the local heat losses per unit of volume in the skin-layer of rail? Due to the decrease of the skin-layer depth and due to the shortening of current passage along the element Δx along with its number k the local heat losses per unit of volume in the framework of our

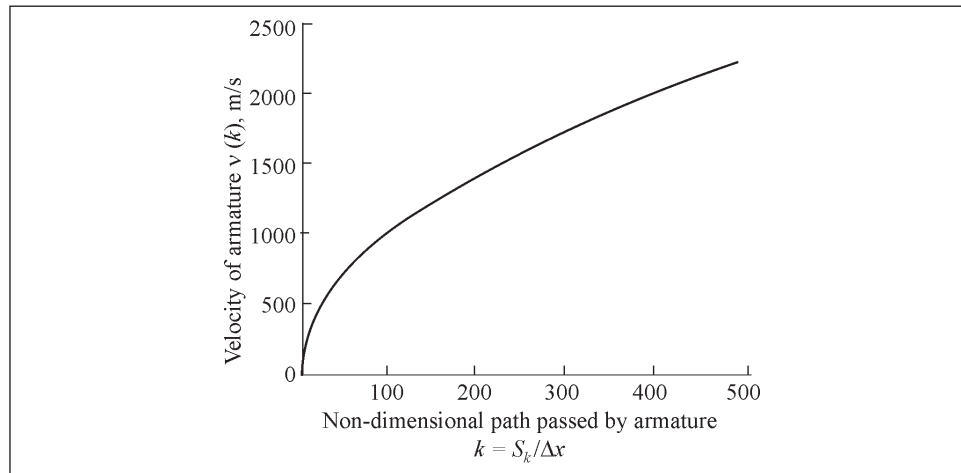


Fig. 4. An armature velocity as a function of non-dimensional coordinate measured along the rail

consideration will depend neither on the armature velocity nor on the local electrical conductivity of skin-layer and will only depend on the current variation. To be sure it is enough to calculate the local losses $q = Q_{\text{Joule}}/V_{sk}$, where Q_{Joule} is given by (2) and V_{sk} is the volume of rail conductor in the skin-layer of one element of length: $V_{\text{skin}} = b\delta\Delta x$. Calculation yields to result:

$$q = (I^2 \Delta x / b) [\mu \cdot \Delta x / (\sigma \cdot v)]^{1/2} \cdot (b \cdot \delta \cdot \Delta x)^{-1} = \mu (I/b)^2.$$

Thus, the proposed method of extra-voltage damping in the rail accelerator due to the decrease of rail electrical conductivity along with the growth of armature motion does not bring a threat of super-heating of skin-layer in rail. It is possible due to general stability of local heat losses per unit of conductor volume. At the same time the reduction of electrical conductivity according to (2) creates a favourable condition for the dissipation of magnetic energy in the resistive skin-layer of rails during armature transportation.

Discussion of results and their application to rotating machines. The comparison of expressions (2) and (3) displays that the condition for essential reduction of extra-voltage (2) is more strong than the condition for provision of stable distribution of heat losses along the rail length $\sigma v = \text{const}$ in (3). Moreover, in (3) the heat losses per one element of the rail length Δx do not depend on the accepted value of ultimate extra-voltage U_{br} . The increase of velocity (see Fig. 4) is given by expression $v(k) = (2a k \Delta x)^{1/2}$, so for a constant meaning Q_{Joule} in (3) it would be enough to save $\sigma(k) = \text{const} \cdot (2a k \cdot \Delta x)^{-1/2}$ that is not necessary to satisfy the condition (2) for limitation of extra-voltage. Thus at the choice of the law of conductivity distribution in (2) for low meaning of extra-voltage ($U_{br} = 30 \dots 60$ V) the value of heat losses Q_{Joule} per element of rail length $\Delta x = \text{const}$ can be growing as a result of σv decrease in (3) in comparison with $\sigma v =$

= const. The final law of conductivity distribution along the rail must be taken with allowance for the full set of factors as the ultimate extra-voltage, allowable heating of skin-layer, except for the condition for arc creation. In any case the conclusion about a positive role of the rail contact surface resistivity retains its significance.

Concerning rotational machines we see some analogy of commutation process jointly with some differences. Results of analysis made for rail accelerator can be directly applied only to homopolar machine with a solid cylindrical rotor. Respectively, in Fig. 1, *a*, the excitation field direction should be changed by the axial one, and the currents of rotor should be implied as those directed along the radius (or diameter for 2-pole system) of the cylinder. The surface of homogeneous massive of the rotor will behave like the rail contact surface in Fig. 1, *b*, with corresponding peculiarity of commutation process due to the brushes disposed in the zone of the excitation field.

In application to traditional commutator motor we must imply in Fig. 1, *a*, that the winding of rotor is manufactured as a set of frames of wire, which active sides are directed along the machine axis. Specificity of traditional machines consists of disposition of commutator system out of the zone of excitation field. A discrete character of lamella contact with a brush gives birth to division of commutation process into separate parts. The first one is current excitation through an inductive circuit of the rotor winding section with the increase of flux linkage of this section. The next one is the useful work of current-carrying section with creation of electrodynamic force and torque. The last part is leaving of contact with a brush with reducing the section flux linkage. That proceeds gradually due to the contact surface shortening in time, and at this stage of the process we meet the same necessity of stored magnetic energy dissipation at switching off the current of the winding section. Namely in this part of commutation process a conclusion about the useful role of the brushes resistivity can be applied. That is why the brushes are mainly manufactured not from perfect conductor but from graphite not only due to its anti-friction properties but also due to its low (in comparison with copper) electrical conductivity that is useful for the quenching of electrical arcing. In the motor design the important role belongs to the angle between the excitation field direction and direction of radial line of brush symmetry. Tuning of this angle gives a possibility to regulate a time duration of the last part of commutation process (leaving of contact) to avoid too high drop of flux linkage of commutated section of winding.

Conclusion. The work presented in this paper can be evaluated as the further development of the idea of isotropic layers at the rails described in the paper [2] by Yu.A. Dreisin. The result of our analysis shows that the surface layer resistance must be variable along the rail depending on the armature velocity. In Princeton's small railgun [3] a model with graphite rails was tested successfully. In the NAVY Res. Lab. research [4] as well as in the previous investigations [5]

great attention was devoted to metallurgical aspects of the rail wear to provide their stability. Later the multi-layer cover of rails by layers of low variable conductivity has been investigated in [6]. Besides the possibility to reach a reduction of extra-voltage at commutation process the multi-layer cover of rail allows improving the current distribution along the contact zone and avoiding the current concentration at the trailing edge of armature caused by “velocity skin effect”. It was demonstrated in [6] by the method of mathematic simulation in COMSOL.

На основі аналізу електротехнічної моделі комутаційного процесу в контактній зоні рейкового прискорювача макротіл показано, що резистивний характер поверхні електродів контактної пари є необхідною умовою сприяння комутаційному процесу в електромеханічних перетворювачах з ковзаючим контактом. Для моделі прискорювача, що має зростаючий питомий опір поверхневого шару рейок в міру збільшення швидкості руху якоря, з’ясовано, що об’ємні втрати енергії на джоулеве тепло в розрахунку на одиницю довжини скин-шару рейок можуть залишатися незмінними, не викликаючи додаткового перегрівання провідника у скин-шарі через зростання його питомого опору. Розглянуто роль резистивного характеру матеріалу електродів контактної пари в електричних машинах обертового руху.

Ключові слова: електромеханічний перетворювач, ковзаючий контакт, комутація, резистивний поверхневий шар, рейковий прискорювач, машини обертового руху.

REFERENCES

1. Chemerys, V.T. (2013), Key problems of railgun: New conception for their resolution, *Procedia Eng.*, Vol. 58, pp. 377-383.
2. Dreisin, Yu.A. (1993), Solid armature performance with resistive rails, *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 29, no. 1, pp. 798-803.
3. Romalis, M., Nelson, P., Ercal, D. et al. Physics 210 rail gun project, available at: <https://www.princeton.edu/~romalis/PHYS210/railgun/railgun.html>.
4. Cooper, K.P., Jones, H.M. and Meger, R.A. (2006), Metallurgical analysis of railgun material, Report of NAVAL Res. Lab., *Proceedings of the 13th IEEE EML Symposium*, Brandenburg, Germany, May 2006, available at: citeweb.info/20010817794.
5. Persad, C., Lund, C.J. and Eliezer, Z. (1989), Wear of conductors in railgun: metallurgical aspects, *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 29, no. 1, pp. 433-437.
6. Chemerys, V.T. (2015), Rail accelerator as continuous commutation process, *IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol. 43, no. 3, part II, pp. 869-877.

Received 10.04.17

CHEMERYS Volodymyr Terentiyovych, Cand. Sci. (Techn.), senior scientist, associate professor at the Department of Theoretical and Applied Physics of the National Aviation University of Ukraine. V. Chemerys graduated from the National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute” in 1962. In 1973 he took his Candidate’s degree in energy conversion at the Institute of Electrodynamics of the Academy of Science of Ukraine. The field of scientific research: pulsed electromechanical energy conversion, physics of pulsed electrodynamic systems.

Copyright Agreement (Public Offer) on the Conditions of Publication of an Article in the Journal “Electronic Modeling”

The Georgy Pukhov Institute for Energy Modelling of the National Academy of Science of Ukraine (hereinafter referred to as the Publisher, GPI EM), on the one hand, offers an indefinite number of persons (hereinafter referred to as Author), on the other hand (collectively referred to as the Parties) have entered into this agreement (hereinafter - Agreement) on the publication of scientific papers (hereinafter - Article) in the International Scientific-Theoretical Journal “Electronic Modeling” (hereinafter - the Journal), under the Publisher’s control.

1. General provisions

1.1. In accordance with Article 641 of the Civil Code of Ukraine this Agreement is considered as the proposal for concluding the contract (Public Offer). When Author sends his Articles on e-mail em@ipme.kiev.ua, it means that he completely and unconditionally accepted this Agreement in accordance with the Article 642 of the Civil Code of Ukraine.

1.2. The Journal is registered in the State Register of Print Media and News Agencies as subject of informational activity of Ukraine. The Certificate of registration of the Ministry of Justice of Ukraine: HF No 13147-2031PR of 27.08.2007.

2. Terms

Author - a physical person(s), who created an Article by his (their) creative activity.

Acceptance of the Offer - full and unconditional acceptance of the Offer.

Journal - International Scientific-Theoretical Journal “Electronic Modeling”.

Application - e-mail from an Author to the Publisher with request on Publication of an Article in the Journal.

Publisher - The Georgy Pukhov Institute for Energy Modelling of the National Academy of Science of Ukraine.

Offer - this document on the Publication of Articles.

Publication - placement of an Article in the Journal.

Editorial Board - creative team of the Journal.

Article - scientific, educational, methodical material (text), submitted by the Author for Publication in the Journal.

Processing of personal data - actions (operations) with personal data, including collection, systematization, accumulation, storage, clarification (update, change), use, distribution.

3. Subject of the Agreement (the Offer)

3.1. Under this Agreement, Author sends an Article to the Editorial Board for Publication in the Journal according to non-exclusive license to use the Article in conformity with the Article 15, 31 and 32 of the Law of Ukraine “On Copyright and Related Rights”. When sending Article, Author agrees with the concept of the Journal, rules of review and publishing ethics.

3.2. The Editorial Board provides the Author services related to the Publication of his Article: takes the Article on a preliminary analysis, provides review (express-review, anonymous review), decides on the acceptance of the Article for Publication, prepares the Article for Publication, publishes the Article in the Journal and on the Journal’s information resource (web-site).

3.3. Licence Rights on Article under this Agreement, do not suppose any payment of remuneration for Author and in accordance with Paragraph 2 of Article 15 of the Law of Ukraine “On Copyright and Related Rights” includes the following:

3.3.1. Article reproduction.

3.3.2. Public announcement of the Article.

3.3.3. Any re-publication of the Article.

3.3.4. Translations to other languages.

3.3.5. Re-writing, adaptation and other changes of the Article.

3.3.6. Distribution of the Article via the first sale, alienation by other means or other rights transfer prior to the first sale.

3.3.7. Copies import of the Article.

3.4. Territory of the licence is not limited.

3.5. This Agreement comes into effect from the date of e-mail that was sent to the Editorial Board according to the Paragraph 1.1 of this Agreement, which is an unconditional and full acceptance of the Offer to conclude an Agreement in accordance with Article 642 of the Civil Code of Ukraine.

3.6. Proprietary copyrights stipulated in this Agreement, are transferred from the Author to the Publisher for free for the entire term of the exclusive licence according the legislation of Ukraine.

3.7. In case the Publisher decides to decline Publication of the Article or in case the Author withdraws the Article before Publication this Agreement shall lose its effect. Author is informed via e-mail in case of decision to decline Publication. The Author must withdraw by his handwritten signed request sent to Editorial Board office of the Electronic Modeling Journal or in the form of a scanned document.

4. The rights and obligations of the Parties

4.1. The Author claims that:

4.1.1. He has all exclusive rights to the Article.

4.1.2. The Article is original, created by the Author(s) alone and is not published.

4.1.3. By creating the Article he has not violated someone’s rights.

4.1.4. This Article contains all relevant and proper copyright links to cited authors and / or publications (materials).

4.1.5. The Article is not a subject of a pledge, was not transferred to a third party under the contract of alienation of the exclusive right or an exclusive license agreement and is not burdened with any rights and claims of third parties.

4.2. The Author is obliged to:

4.2.1. Prepare the Article in accordance with the requirements of the Editorial Board, published on the website of the Journal on the Internet and / or in the publication.

4.2.2. Specify in the Application an address where Editorial Board will send the printed copy of the Journal with the Article.

4.2.3. Pay for mentioned postal services of the Editorial Board.

4.3. The Author has the right:

4.3.1. Receive free of charge a printed copy of the Journal with the Article.

4.3.2. Use materials of published Article in his own theses or books.

4.3.3. To donate Editorial Board to improve services quality.

4.4. Publisher is obliged to:

4.4.1. Within thirty (30) calendar days from the date of the adoption of the Article fulfill its mandatory internal anonymous review.

4.4.2. Publish the Article in the Journal in case of making a decision according to results of review. Publication date depends on the date when the Article was received and initial quality of the Article.

4.4.3. In case of negative review, send decline to the Author via e-mail.

4.5. The Publisher has a right to:

4.5.1. Make editing and proofreading changes in the Article, including the reduction, if these changes do not alter the meaning, correctness, presentation and do not violate the integrity of the perception of the material. These steps may be also made by third parties, that have sub-license agreement with the Publisher.

4.5.2. Establish rules (conditions) of receipt and Publication of Articles in the Journal.

4.5.3. Set priority rules in Publication of Articles.

4.5.4. Accept donations addressed to the Editorial Board to improve the quality of services.

4.6. In all cases not mentioned and not covered by this Agreement, the Parties are obliged to be guided by the current legislation of Ukraine.

4.7. The Parties have the right to enter into other agreements, one way or another related to the subject of this Agreement, on terms that do not contradict the conditions of this Agreement.

5. Acceptance of the Offer and conclusion of the Agreement

5.1. This Agreement shall enter into force upon its conclusion, when the Author performs the Acceptance of the Offer by sending his Article to the e-mail address of the Journal. The Agreement is concluded for the complete duration of the exclusive right term under current legislation.

6. The procedure for amendment and termination of the Agreement

6.1. Offer that was accepted by the Author, operates as an Agreement between the Parties and cannot be changed without the consent of the Parties. The Publisher has the right to change the terms and conditions of the Offer, that does not affect the terms and conditions of existing agreements with Authors. The current revision of the Offer, as well as its previous editions are published on the Publisher's website.

6.2. In case of disagreement with the changes of this Agreement, the Author may send a written notice of cancellation of this Agreement before the entry into force of the amendments. If Author does not deny changes, they are considered accepted, and the Agreement remains in force as amended.

6.3. This Agreement may be terminated earlier by mutual agreement of the Parties.

6.4. The Author has the right to withdraw the Article and is obliged in this case to reimburse the Publisher its losses caused by such decision. If the Article is already disclosed, the Author also has to notify the withdrawal publicly. The Author has the right to withdraw from circulation previously released copies of the Article, compensating for the losses.

6.5. If one of the Parties shall decide to stop the execution of the Agreement, it shall notify the other Party in writing form. In this case, the obligations arising from the Agreement shall be deemed terminated from the date of receipt of the other Party notification to terminate the Agreement.

7. Responsibility

7.1. For non-performance or improper performance of their obligations under the Agreement, the Parties shall be liable in accordance with the current legislation of Ukraine.

7.2. All information provided by the Author, should be reliable. The Author is responsible for the accuracy and openness (article contains no information prohibited for publication in the press) and the completeness of the information transmitted to the Publisher.

7.3. The Author is solely responsible for unauthorized use of the results of intellectual work of third parties, and materials used in it, as well as all matters relating to the rights to it.

7.4. The Publisher is not liable for actions of the Author.

7.5. Parties are not responsible for violation of the terms of the Agreement, if such failure is caused by force majeure, including: actions of public authorities (including adoption of legal acts), fire, flood, earthquake and other natural disasters, lack of electricity and / or operation failures of computer network, strike, civil commotion, riot, or any other force majeure.

8. Settlement of Disputes

8.1. Disputes and disagreements are resolved by means of negotiations, and in case the agreement is not reached - in accordance with the current legislation of Ukraine.

8.2. Unresolved disputes between the Parties are settled in court at the location of the Publisher in accordance with the current legislation of Ukraine.

9. Other conditions

9.1. The Author expresses his consent to the processing by the Publisher of the following personal information:

- surname, name, patronymic;
- date of birth;
- information on education;
- information on the place of work and position;
- information on contact details for correspondence;
- information on availability publications;
- information about the directions of scientific research of the Author;
- the address of the Author to which the copy of the Journal with published Article will be delivered in accordance with paragraph 4.2.3.

9.2. The Publisher has the right to process personal data of the Author for the execution of this Agreement, including the performance of informational services for the Author.

CONTENTS

Mathematical Modeling and Computation Methods

MELNYK I.V. Modeling of Triode Sources of Electrons of a High-Voltage Glow Discharge (HGD) with Plate Control Electrode and Conical Anode	3
KLEVTSOV Yu.A. Modeling of Objects with Distributed Parameters of the Fourth Order	21

Computational Processes and Systems

SAPOZHNIKOV V.V., SAPOZHNIKOV VI.V., EFANOV D.V. Codes with Summation with a Sequence of Weight Coefficients, Forming a Natural Series of Numbers, in Concurrent Error Detection Systems	37
--	----

Application of Modeling Methods and Facilities

KRAVTSOV H.A., KOSHEL V.I. Classification Calculus. The Classification Correctness	59
KUTSAN Yu.H., BLINOV I.V., IVANOV H.A. Modelling of Tariff and Price Formation on Retain Market of Electrical Energy of Ukraine in New Conditions of its Functioning	71
KALINOVSKY Ya.A., BOYARINOVA Yu.E., SUKALO A.S., KHITSKO Ya.V. Software Complex for Hypercomplex Computations	81
MAKARICHEV A.V., KUD A.A., SHCHUKIN A.B. Sum of Increment Maxima in a Multichannel Service System when Modeling Auction	97
CHEMERYYS V.T. Contact Surface Resistivity as a Favorable Condition of Commutation Process	105
Author's Agreement (Public Offer) about Conditions of Article Publication in the Journal "Electronic Modeling".	113