

**Учредитель:** Национальная академия наук Украины

**Издатель:** Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова

**Главный редактор:** д-р техн. наук **В.В. МОХОР**

**Заместители главного редактора:** д-р техн. наук **С.Д. ВИННИЧУК**,  
канд. техн. наук **Г.А. КРАВЦОВ**, канд. техн. наук **Э.П. СЕМАГИНА**,

**Ответственный секретарь:** **Л.Е. ЗБОРОВСКАЯ**

**Редакционная коллегия:**

канд. техн. наук **В.В. АРИСТОВ**, чл.-кор. НАН Украины **В.П. БОЮН**, д-р техн. наук **В.Н. БЕЛЕЦКИЙ**,  
д-р техн. наук **А.Ф. ВЕРЛАНЬ**, д-р техн. наук **А.Ф. КАТКОВ**, д-р техн. наук **В.Я. КОНДРАЩЕНКО**,  
д-р техн. наук **Ю.М. КОРОСТИЛЬ**, д-р техн. наук **А.Я. МАТОВ**, акад. НАН Украины **Ю.М. МАЦЕ-**  
**ВИТЫЙ**, д-р техн. наук **М.В. МЫСЛОВИЧ**, д-р техн. наук **А.С. ОГИР**, д-р техн. наук **В.Д. САМОЙ-**  
**ЛОВ**, д-р техн. наук **С.Е. САУХ**, д-р техн. наук **В.П. СИМОНЕНКО**, канд. техн. наук **А.А. ЧЕМЕРИС**

**Региональные редакторы:**

**Prof. E. Dshalalow**  
Department of Applied  
Mathematics, Florida  
Institute of Technology,  
Melbourne FL 32901, USA,  
edshalalow@cfl.rr.com

**Dr. Stan Lipovetsky**  
GfK Custom Research North America,  
8401 Golden Valley Road,  
Minneapolis, Minnesota  
55427-0900, USA,  
stan.Lipovetsky@gfk.com

**Prof. V. Sree Hari Rao**  
Department of Mathematics  
Jawaharlal Nehru  
Technological University,  
Hyderabad 500872, India,  
vshrao@yahoo.com

**Редакционный совет:**

Prof. R.P. AGARWAL (USA), проф. Ю.А. БЕЛОВ (Украина), чл.-кор. НАН Украины, проф. В.В. ВА-  
СИЛЬЕВ (Украина), prof. E. ÇINLAR (USA), prof. H. DADUNA (Germany), акад. РАН, проф. К.С. ДЕ-  
МИРЧЯН (Россия), чл.-кор. НАН Украины **В.Ф. ЕВДОКИМОВ**, prof. H.I. FREEDMAN (Canada),  
prof. T. KACZOREK (Poland), prof. J. KORBICZ (Poland), акад. НАН Украины, проф. А.А. МАРТЫНЮК  
(Украина), проф. А.И. ПЕТРЕНКО (Украина), акад. НАН Украины, проф. Б.С. СТОГНИЙ (Украина),  
prof. J. SOLDEK (Poland), акад. НАН Украины, проф. А.К. ШИДЛОВСКИЙ (Украина), prof. V.A. VUJI-  
CHICH (Serbia)

**Журнал реферируется и индексируется в Cambridge Scientific Abstracts,  
Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec,  
ВИНИТИ РАН (Россия)**

**Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України,  
в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт**

Адрес редакции: 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15.

Тел. (044) 4241466, факс 4240586. E-mail: em@ipme.kiev.ua; http: www.emodel.org.ua

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭНЕРГЕТИКЕ им. Г.Е. ПУХОВА

# ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 4<sup>ТОМ 39</sup> ELECTRONIC MODELING 4 • 2017

МЕЖДУНАРОДНЫЙ  
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ОСНОВАН В 1979 ГОДУ

ВЫХОДИТ ОДИН РАЗ В ДВА МЕСЯЦА

КИЕВ

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математическое моделирование и вычислительные методы

- ЛИСТРОВОЙ С.В., СИДОРЕНКО А.В., ЛИСТРОВАЯ Е.С.  
Метод перечисления максимальных независимых мно-  
жеств в неориентированных графах . . . . . 3
- КРАСИЛЬНИКОВ А.И. Анализ коэффициента эксцесса  
засоренных гауссовых распределений . . . . . 19
- ГАМЗАЕВ Х.М. Об одной обратной задаче Стефана  
для фазового превращения в твердых телах . . . . . 31

### Вычислительные процессы и системы

- МИНАЕВ Ю.Н., ГУЗИЙ Н.Н., ФИЛИМОНОВА О.Ю.,  
МИНАЕВА Ю.И. Анализ самоподобия многомерных  
временных рядов на основе методов интеллектуаль-  
ного анализа данных . . . . . 43
- САПОЖНИКОВ В.В., САПОЖНИКОВ Вл.В., ЕФА-  
НОВ Д.В. Модульно-взвешенные коды с суммирова-  
нием с наименьшим общим числом необнаруживае-  
мых ошибок в информационных векторах . . . . . 69



© Институт проблем  
моделирования  
в энергетике  
им. Г.Е. Пухова  
НАН Украины, 2017

**Применение методов и средств моделирования**

ФАТТАХОВА М.И., ВЕЛИДЖАНОВА Г.М., КАДЫРОВ Г.А. Анализ схем разделения каналов в сотовых сетях связи без очередей . . . . .	89
ПОЛИССКИЙ Ю.Д. О некоторых подходах к выполнению проблемных операций в системе остаточных классов . . . . .	105
<b>Авторська угода (публічна оферта)</b> . . . . .	115
<b>Правила оформлення статті для журналу «Електронне моделювання»</b> . . . . .	121

*Номер надруковано частково за рахунок державного замовлення згідно з Програмою підтримки періодичних видань НАН України*

Свідоцтво про держ. реєстрацію КВ № 291, 16.12.93

Оригінал-макет виготовлено в ІПМЕ ім. Г.С. Пухова НАН України

---

Підписано до друку 08.08.17. Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 10,56.  
Обл.-вид. арк. 7,60. Тираж 171 прим. Зам. № 4996

---

Віддруковано ВД «Академперіодика» НАН України  
вул. Терещенківська, 4, м. Київ, 01004

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 544 від 27.07.2001



УДК 519.682.1

**С.В. Листровой**, д-р техн. наук

Украинский государственный университет железнодорожного транспорта  
(Украина, 61050, Харьков, пл. Фейрбаха, 7,  
тел. (050)9355042, e-mail: om1sergeyvladimirovih@gmail.com),

**А.В. Сидоренко**

(Samsung Electronics Ukraine Company, LLC Samsung R&D Institute Ukraine  
(Украина, 01302, Киев, ул. Льва Толстого, 57,  
тел. +380509800852, e-mail: cdandrey@gmail.com),

**Е.С. Листровая**, канд. техн. наук

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского  
(Украина, 61070, Харьков, ул. Чкалова, 17,  
e-mail: listravkina@gmail.com)

### **Метод перечисления максимальных независимых множеств в неориентированных графах**

На основе рангового подхода предложен метод перечисления максимальных независимых множеств неориентированного связного графа с временной сложностью, в среднем не превышающей  $O(n^6)$ , где  $n$  — число вершин в графе, для графов, не содержащих разделяющих вершин, размерность которых не превышает  $n = 125$ .

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* максимальное независимое множество, клика, вершинное покрытие.

На основі рангового підходу запропоновано метод перерахування максимальних незалежних множин неорієнтованого зв'язного графа з часовою складністю, що в середньому не перевищує  $O(n^6)$ , де  $n$  — число вершин у графі, для графів, що не мають розділяючих вершин, розмір яких не перевищує  $n = 125$ .

*К л ю ч о в і с л о в а:* максимальна незалежна множина, кліка, вершинне покриття.

Задача перечисления максимальных независимых множеств — одна из известных  $NP$ -трудных задач теории графов, для которой пока не найдено алгоритмов решения за полиномиальное время. Между тем, данная задача имеет многочисленные приложения. В биоинформатике при компьютерном анализе геномных баз данных она используется, например, при поиске потенциальных регуляторных структур рибонуклеиновых кислот.

Исследования в области перечисления независимых множеств в графах ведутся с середины прошлого века. Их результаты находят приложения не только непосредственно в математике (комбинаторная теория чи-

© С.В. Листровой, А.В. Сидоренко, Е.С. Листровая, 2017

сел, теория кодирования, теоретическая информатика), но и в других областях. Так, например, в теоретической химии важными характеристиками соединений являются индексы Мэррифилда—Симмонса [1] и Хосойи [2], которые есть не что иное, как число независимых множеств в соответствующих графах.

Множество  $X_i^r$ , состоящее из  $r$  попарно несмежных вершин графа  $G(V, E)$ , называется независимым множеством (НМ). Обозначим через  $Y_i^k$  множество вершин, с которыми связаны вершины  $i$ -го множества  $X_i^r$  в графе  $G(V, E)$ . Под максимальными независимыми множествами (МНМ) понимают максимальные по включению НМ, т.е. множества, удовлетворяющие условию  $X_i^r \cup Y_i^k = V$ , которое означает, что сформированное множество является максимально независимым, поскольку в этом случае подмножество  $Y_i^k$  будет представлять вершинное покрытие в графе  $G(V, E)$ , а подмножество  $X_i^r$  — МНМ вершин графа  $G(V, E)$ , дополняющее это подмножество до  $n$ . Если  $X_i^r \cup Y_i^k \neq V$ , то, очевидно, существуют вершины, которые можно добавить в  $X_i^r$ , и оно останется при этом независимым, и число этих вершин не превосходит  $n - r$ . Если же  $X_i^r \cup Y_i^k = V$ , то таких вершин в графе  $G(V, E)$  не существует.

Максимальный размер  $\alpha_0$  независимого множества в графе  $G(V, E)$  называется числом независимости графа  $G(V, E)$ . Семейство всех независимых множеств обозначим  $I(G)$ . Его можно рассматривать как объединение двух семейств,  $I^l(G) \cup I^{\parallel}(G)$ , где  $I^l(G)$  — семейство всех МНМ, число которых обозначим  $\varphi(G)$ , и  $I^{\parallel}(G)$  — семейство всех независимых множеств, не являющихся максимальными, т.е. для которых выполняется условие  $X_i^r \cup Y_i^k \neq V$ . В семействе  $I^l(G)$  будем выделять подсемейство  $I^M(G) \subseteq I^l(G)$  наибольших МНМ (НМНМ), число которых обозначим  $\gamma(G)$ .

Важной характеристикой анализируемых графов является плотность  $\rho$  ребер  $m$  в графе  $G(V, E)$ . Под плотностью ребер графа будем понимать отношение  $\rho = m/E_{\max}$ , где  $m$  — число ребер в графе  $G(V, E)$ ,  $E_{\max} = \frac{n(n-1)}{2}$  — максимально возможное число ребер в графе  $G(V, E)$ , содержащем  $n$ -вершин. На первый взгляд, кажется, что нахождение всех МНМ — простая задача, решаемая простым перебором НМ с одновременной проверкой их на максимальность. Представление о простоте задачи справедливо только для небольших графов (в простых предметных областях) с числом вершин не более 20. Однако при увеличении числа вершин этот метод поиска с вычислительной точки зрения становится громоздким.

Такой вывод получаем, исследуя зависимость числа клик от числа вершин в графах Муна—Мозера [3]. Понятие, противоположное НМ, есть

полный подграф [4]. В отличие от НМ, в котором не могут встретиться две смежные вершины, в полном подграфе все вершины попарно смежные. Очевидно, что НМ графа  $G$  соответствует полному подграфу графа  $\overline{G}$ , и наоборот. Здесь  $\overline{G}$  — дополнение графа  $G$ . Следовательно, задача поиска НМ графа  $G$  линейно преобразуется в задачу поиска полных подграфов графа  $\overline{G}$ .

В работе [4] указано, что лучшим из известных алгоритмов поиска семейства МНМ является метод перебора Брона—Кэрбоша с временной сложностью  $O(3^n)$ . В процессе выполнения этого алгоритма число формируемых МНМ увеличивается, но затем отбрасывается, так как обнаруживается, что они содержатся в других, ранее полученных множествах, и поэтому не являются максимальными. Основным недостатком метода Брона—Кэрбоша является необходимость во время работы алгоритма сохранять большое количество вспомогательной информации, полученной на всех шагах.

В работе [5] приведены результаты сравнения алгоритмов Лукакиса (Loukakis), Цукияма (Tsukiyama) и Чиба (Chiba) с алгоритмом Брона—Кэрбоша и его различными вариациями. Согласно этим результатам алгоритм Брона—Кэрбоша до сих пор является одним из самых эффективных для решения задачи о поиске всех МНМ неориентированного графа. В работе [6] представлена очередная модификация алгоритма Брона—Кэрбоша. В работе [7] также была получена оценка временной сложности алгоритма Брона—Кэрбоша:  $O(3^{n/3})$ .

Среди первых работ в области перечисления НМ — работы, посвященные поиску графов с наибольшим числом НМ [3, 4]. В работе [8] получены верхние и нижние оценки числа НМ в деревьях с заданным числом вершин. Пусть  $T$  — дерево с  $n$  вершинами. Тогда  $I(T) \leq 2^n + 1$ . При этом равенство  $I(T) = \phi_n$  справедливо, если  $T$  является простой цепью, где  $\phi_n$  —  $(n+2)$ -е число Фибоначчи ( $\phi_0 = 1, \phi_1 = 2, \phi_n = \phi_{n-1} + \phi_{n-2}$  при  $n \geq 2$ ). В общем случае для произвольных графов справедливо неравенство  $(n+1) \leq I(G) \leq 2^n$ , где нижняя граница достигается на полном графе, а верхняя — на пустом графе. К сожалению, все известные оценки сверху являются грубыми и их трудно использовать на практике.

Будем рассматривать класс графов, в которых при переходе от графа  $G$  к его дополнению  $\overline{G}$ , и наоборот, граф остается связным и не содержит разделяющих вершин. Например, при переходе от графов Муна—Мозера к их дополнению получаем набор несвязанных компонент. Естественно, в таком несвязном графе число НМ при больших значениях  $n$  и большом числе несвязанных компонент будет приближаться к верхней границе  $2^n$ . Представляет интерес разработка процедуры неявного полного перебора,

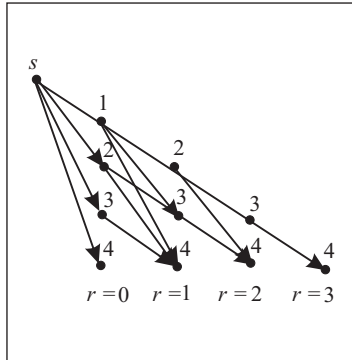


Рис. 1. Треугольный граф  $G_{\Delta}$

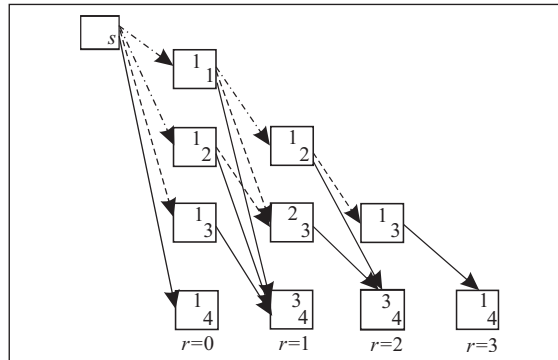


Рис. 2. Треугольник Паскаля в треугольном графе  $G_{\Delta}$

позволяющей снизить временную сложность процесса перечисления МНМ для рассматриваемого класса графов.

**Формализация задачи и ее решение.** Для реализации процедуры перечисления МНМ предлагается использовать идеи рангового подхода к решению задач дискретной оптимизации и теории графов [9—12]. Поскольку будут рассматриваться только сочетания несвязанных между собой вершин графа, множество всех сочетаний вершин произвольного неориентированного графа  $G(V, E)$  можно представить в виде треугольного графа  $G_{\Delta}$  (рис. 1). Для произвольной вершины  $i$  множество путей, ведущих в эту вершину из некоторой вершины  $s$ , можно представить в виде

$$M_s(i) = m_{si}^{r=1} \cup m_{si}^{r=2} \cup \dots \cup m_{si}^{r=n-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где  $m_{si}^r = \{\mu_{si}^r\}$ ,  $m_{sj}^r = \{\mu_{sj}^r\}$  — подмножества путей из произвольной вершины  $s$  в некоторую вершину  $i$  графа  $G(V, E)$  ранга  $r$ . Суммарное число путей, заканчивающихся на  $r$ -м ярусе графа  $G_{\Delta}$ , равно  $C_n^r$ . Если просуммировать множества путей, заканчивающихся на всех ярусах, получим  $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$ . Фактически числа путей в графе  $G_{\Delta}$ , ведущих к вершинам  $i$ , образуют треугольник Паскаля (рис. 2).

Рассмотрим возможность перечисления МНМ на основе формирования путей в графе  $G_{\Delta}$  и введения правил отсечения неперспективных путей, на основе которых невозможно построить МНМ. Исходными данными для процедуры перечисления будут вершины  $i$ , располагаемые на нулевом ярусе  $r=0$ . Их можно рассматривать как путь  $\mu_{si}$ , содержащий одну вершину  $i$  в графе  $G_{\Delta}$ . Каждый путь  $\mu_{si}$  будем задавать тремя множествами:  $\mu_{si} = X_i | Y_i | Z_i$ , где  $X_i$  — множество независимых вершин;  $Y_i$  —

1 2 345678910 1					
2 13 45678910 2					
3 24 15678910 3	13 24 5678910 3				
4 35 12678910 4					
5 46 12378910 5					
6 57 12348910 6					
7 68 12345910 7					
8 79 12345610 8					
9 810 1234567 9					
10 9 123345678 10					
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	

Рис. 3. Представление треугольного графа  $G_{\Delta}$  в виде таблицы

множество вершин, с которыми связаны вершины из множества  $X_i$ ;  $Z_i$  — множество вершин, дополняющее объединение множеств  $X_i \cup Y_i$  до  $V$ . Например, если граф представляет собой цепь

$$1-----2-----3-----4-----5-----6-----7-----8-----9-----10, \quad (1)$$

исходными данными для решения задачи перечисления МНМ в таком графе будут следующие:

$$\begin{aligned} \mu_{s1}^{r=0} &= 1|2|345678910, \mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910, \mu_{s3}^{r=0} = 3|24|15678910, \\ \mu_{s4}^{r=0} &= 4|35|12678910, \mu_{s5}^{r=0} = 5|46|12378910, \mu_{s6}^{r=0} = 6|57|12348910, \\ \mu_{s7}^{r=0} &= 7|68|12345910, \mu_{s8}^{r=0} = 8|79|12345610, \mu_{s9}^{r=0} = 9|810|1234567, \\ \mu_{s10}^{r=0} &= 10|9|12345678. \end{aligned} \quad (2)$$

В треугольном графе они расположены на нулевом ярусе, как показано на рис. 3, где треугольный граф  $G_{\Delta}$  представлен в виде таблицы, в которой вершинам графа соответствуют клетки с номерами вершин треугольного графа. Если взять путь  $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$ , то на основе этого пути



можно формировать пути в вершины (3,4,5,6,7,8,9,10). Например, если сформировать путь  $\mu_{s13}^{r=1}$  в вершину 3 на первом ярусе, то его идентификация будет иметь следующий вид:

$$\mu_{s13}^{r=1} = X_3 = \{13\} | Y_3 = \{24\} | Z_3 = \{5,6,7,8,9,10\},$$

где  $X_3 = 1 \cup 3 = \{13\}$ ;  $Y_3 = \{2\} \cup \{2, 4\} = \{2, 4\}$  или в упрощенном виде  $\mu_{s13}^{r=1} = 13|24|5678910$ .

Предположим, что на некотором ярусе  $r$  построен путь  $\mu_i^r = abc|gde|qtls$ . В множестве  $Z_i$  этого пути содержатся вершины, в которые данный путь может быть продлен. Ясно, что в графе  $G_\Delta$  в вершины с номерами, большими, чем номер вершины  $c$ , данный путь не может быть продлен. Поэтому вершины с номерами, меньшими, чем номер вершины  $c$ , могут быть исключены из множества  $Z_i$ . Если номера всех вершин в множестве  $Z_i$  меньше номера вершины  $c$ , то из анализа может быть исключен весь путь  $\mu_i$ .

Такие отсечения назовем правилом I отсечения неперспективных путей в графе  $G_\Delta$ . После применения правила I в множестве  $Z$  образовалось два подмножества,  $Z^I$  и  $Z^II$ , удовлетворяющие условию  $Z_i = Z_i^I \cup Z_i^II$ , где  $Z_i^I$  — множество вершин, которое можно удалить из  $Z_i$ ;  $Z_i^II$  — множество вершин, которое остается в  $Z_i$  после удаления вершин  $j \in Z_i^I$ . Ясно, что если вершины, удаленные из множества  $Z_i$ , не связаны с множеством вершин  $Z_i^II$ , то на основе этих вершин не удастся построить МНМ, так как оно могло быть пополнено вершинами из множества  $Z_i^I$ , но они уже удалены из анализа.

Таким образом, можно сформулировать правило II отсечения неперспективных путей в графе  $G_\Delta$ , а именно: проверяем, связаны ли вершины из множества  $Z_i^I$  с вершинами из множества  $Z_i^II$  и, если таких связей нет, то путь  $\mu_i$  исключаем из анализа. Если организовать последовательное формирование путей в графе  $G_\Delta$  сначала от вершины 1 ко всем остальным вершинам графа  $G_\Delta$ , затем от вершины 2 ко всем остальным вершинам графа  $G_\Delta$  и так далее, и если в процессе формирования пути к вершине с номером  $k$  при применении правил I и II оказывается, что путь  $\mu_k$  можно исключить из анализа, то ясно, что пути к вершинам с номерами  $k + 1$  и больше процедура не строит. Такое отсечение назовем правилом III. Используя введенные правила отсечения, рассмотрим процедуру A перечисления МНМ.

#### **Процедура А.**

Шаг 1. На нулевом ярусе в множества  $X$  вносим все вершины и формируем для каждой вершины множества  $Y$  и  $Z$ . На основе введенных правил I—III исключаем из дальнейшего анализа те вершины, на основе

которых в перспективе невозможно построить МНМ, и переходим к выполнению следующего шага.

Шаг 2. Выбираем первую вершину ( $s := 1$ ), формируем пути  $\mu_{si}^{r=1}$  ранга  $r = 1$  и для каждого пути определяем множества  $Y$  и  $Z$ . Пути, удовлетворяющие условию  $X_i^r \cup Y_i^k = V$ , заносим в множество  $U$ . В каждом пути на основе правил I—III исключаем из дальнейшего анализа те вершины, на основе которых в перспективе невозможно построить МНМ, и, если правила I—III позволяют, то исключаем из анализа и построенные пути и переходим к выполнению следующего шага.

Шаг 3. Проверяем множества путей  $m_{si}^r = \emptyset$ . Если они не пусты, то переходим к выполнению следующего шага, иначе — переходим к шагу 5.

Шаг 4. На основе путей текущего ранга  $\mu_{si}^r$  формируем пути  $\mu_{si}^{r:=r+1}$  следующего ранга  $r + 1$  в вершины, указанные в множестве  $Z$ , и для каждого сформированного пути определяем множества  $Y$  и  $Z$ . Пути, удовлетворяющие условию  $X_i^r \cup Y_i^k = V$ , заносим в множество  $U$ . В каждом пути согласно правилам I—III исключаем из дальнейшего анализа те вершины, на основе которых в перспективе невозможно построить МНМ, и, если правила I—III позволяют, то и построенные пути исключаем из анализа и переходим к выполнению шага 3.

Шаг 5. Проверяем, построены пути или нет от всех вершин, не исключенных из анализа и расположенных на нулевом ярусе. Если да, то процедура заканчивает работу и множество  $U$  содержит все МНМ, иначе —  $s := s + 1$ ;  $r := 0$  и переходим к выполнению шага 4.

Рассмотрим пример работы процедуры  $A$  для графа (1). Исходными данными для графа (1) являются множества путей (2). В результате применения правил отсечения I, II в множестве остаются только два пути:  $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$  и  $\mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910$ . Пути  $\mu_{s3}^{r=0} = 3|24|15678910$ ,  $\mu_{s4}^{r=0} = 4|35|12678910$ ,  $\mu_{s5}^{r=0} = 5|46|12378910$ ,  $\mu_{s6}^{r=0} = 6|57|12348910$ ,  $\mu_{s7}^{r=0} = 7|68|12345910$ ,  $\mu_{s8}^{r=0} = 8|79|12345610$  отсекаются на основе правила II, а пути  $\mu_{s9}^{r=0} = 9|810|1234567$  и  $\mu_{s10}^{r=0} = 10|9|12345678$  — на основе правила I. Поскольку среди исходных путей осталось только два, процедура формирования будет состоять из двух этапов: формирования всех возможных путей процедурой  $A$  на основе пути  $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$  и формирования путей процедурой  $A$  на основе пути  $\mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910$ .

Результаты работы процедуры представлены на рис. 4, где цветом выделены пути и вершины, отсекаемые по правилу I, звездочкой помечены сформированные МНМ, а знаком # — пути, отсекаемые по правилу II, на первом и втором ярусах пути  $110|29|345678$  и  $1310|249|5678$  к вершине 10 не построены на основе правила III.

1 2 345678910				
1				
2	2			
3	13 24 5678910			
3		3		
4	14 235 678910			
4		4	4	
5	15 246 378910 #	135 246 78910		
5		5	5	5
6	16 257 348910 #	136 2457 8910 146 2357 8910		
6		6	6	6
7	17 268 345910 #	137 2468 5910 # 147 23568 910	1357 2468 910	
7		7	7	7
8	18 279 345610 #	138 2479 5610 #	1358 24679 10 1468 23579 10 1469 2357810*	
8		8	8	8
9	19 2810 3456	139 24810 567	1359 246810 7 1369 2457810* 1469 2357810* 1479 2356810*	13579 246810*
9		9	9	9
10			14710 23456789*	135710 24689* 135810 24679* 136810 24579* 146810 23579*
10		10	10	10
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$

$a$

	1	4 2		
2 13 45678910				
2	2	5 4		
3	3	3	7 1	
4	24 135 678910		4	1 0
4		4	4	
5	25 1346 78910		5	5
5		5	5	5
6	26 1357 48910 #	246 1357 8910		
6		6	6	6
7	27 1368 45910 #	247 13568 910 257 13468 910		
7		7	7	7
8		248 13579 610# 258 134679 610	2468 13579 10	
8		8	8	8
9			2479 1356810* 2469 1357810* 2579 1346810*	
9		9	9	9
10			25810 134679* 25710 134689* 24610 13579 8	246810 13579*
10		10	10	10
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$

$b$

Рис. 4. Формирование путей процедурой  $A$  на основе пути  $\mu_{s1}^{r=0} = 1|2|345678910$  ( $a$ ) и на основе пути  $\mu_{s2}^{r=0} = 2|13|45678910$  ( $b$ )

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	2	1		
1	4	3	3	1	
1	5	4	6	4	1
1	6	5	10	10	5
1	7	6	15	20	15
1	8	7	21	35	35
1	9	8	28	56	70
1	10	9	36	84	126
$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	
$\sum = 627$	45	120	210	252	

Рис. 5. Число путей, определяемых треугольником Паскаля

В анализируемом графе (1) имеется всего 16 МНМ:

{2 4 6 8 10}; {1 4 6 8 10}; {1 3 6 8 10}; {1 3 5 8 10};  
 {1 3 5 7 10}; {1 3 5 7 9}; {2 5 8 10}; {2 5 7 10}; {2 5 7 9};  
 {2 4 7 10}; {2 4 7 9}; {2 4 6 9}; {1 4 7 10}; {1 4 7 9}; {1 4 6 9}; {1 3 6 9}.

Как видим, процедура *A* все их перечислила. За два прохода процедура *A* построила 49 путей. Если перечислять все пути до четвертого яруса, определяемые треугольником Паскаля (рис. 5), то пришлось бы построить 627 путей. Таким образом, произошло сокращение перебираемых путей в 12,79 раз.

В представленном алгоритме отсекающие неперспективных вариантов, которые заведомо не приведут к построению клики, обеспечивается посредством использования дополнительного множества, в которое помещаются вершины, уже использованные для увеличения полного подграфа. Алгоритм оперирует тремя множествами вершин графа: множеством *Q*, содержащем на каждом шаге рекурсии полный подграф для данного шага (строится рекурсивно); множеством вершин *C*, с помощью которого можно увеличить значение *Q*, и множеством вершин *N*, уже использованных для расширения *Q* на предыдущих шагах. Алгоритм является рекурсивной процедурой, применяемой к этим трем множествам, и его сложность линейна относительно числа клик в графе.

**Результаты экспериментального исследования работы процедуры и оценка ее временной сложности.** При экспериментальном исследовании числа элементарных операций, выполняемых предложенной процедурой формирования МНМ, число вершин  $n$  графов изменялось в диапазоне от 10 до 100, а плотность  $\rho$  ребер в графе генерировалась по равномерному закону распределения. На каждую точку оценки при фиксированных значениях  $n$  и  $\rho$  генерировалось не менее 50 графов и определялось среднее значение числа элементарных операций сравнения  $\Theta$ . Формируемые в процессе эксперимента графы не содержали разделяющих вершин, поскольку при их наличии число МНМ может быть экспоненциально большим. Вершина  $v$  графа  $G$  называется разделяющей, если граф  $G - v$  имеет больше компонент, чем  $G$ . Все результаты получены с доверительной вероятностью 0,95. При проведении эксперимента оценивалось время решения задачи, вероятность решения задачи за время, не превышающее некоторого допустимого, равного 30 с, а также число  $\varphi$  МНМ, число  $\gamma$  НМНМ и число  $\alpha_0$  вершин в НМНМ. Результаты экспериментальных исследований приведены в табл. 1—6.

Как видно из табл. 1, 2, для семейства  $S^l(A_i) \subseteq S(G)$  справедливо неравенство  $I^l = |S^l| \leq \lambda$ , т.е. если граф в виде цепи — связный, то общее число независимых множеств семейства  $S(G)$  экспоненциально зависит от  $n$ , а число  $I^l = |S^l|$  МНМ семейства  $S^l(A_i) \subseteq S(G)$ , по всей видимости, возрастает экспоненциально, но скорость возрастания данной экспоненты существенно ниже, что позволяет для графов с числом вершин, не превышающим 125 за полиномиальное время, перечислять МНМ.

Из табл. 1—4 видно, что временная сложность работы процедуры  $A$  в заданном диапазоне изменения вершин графа не превышает  $O(n^6)$ . Тестовые испытания показали, что данная тенденция сохраняется до значений, не превышающих  $n \leq 125$ .

Экспериментальное исследование работы процедуры  $A$  показало, что для графов данного типа выполняется неравенство  $|I^l(G)| = \varphi(G) \ll |I^l(G)|$  и  $\varphi(G) \leq \lambda = n^4$ , т.е. для рассматриваемого класса графов число МНМ  $\varphi(G)$  не превышает величину  $n^4$ . Последнее может быть обусловлено тем, что число  $\omega$  несвязанных пар  $X_i^{r-2}$  вершин в графе равно числу ребер в графе, являющемся дополнением  $\bar{G}$  графа  $G(V, E)$ , в котором вершины графа  $\bar{G}$  соединены ребрами, если они не соединены в графе  $G(V, E)$ . Если в графе  $G(V, E)$  содержится  $m$  ребер, то справедливо равенство

$$\omega = E_{\max} - m = E_{\max} \left( 1 - \frac{m}{E_{\max}} \right) = E_{\max} (1 - \rho).$$

При этом справедливо также неравенство  $\omega < n^2$ , и поскольку максимальный ранг пути в треугольном графе не может превысить  $n-1$ , а процедура

Таблица 1. Число элементарных операций  $\Theta$

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	1412,4	762,95	427,125	243,5	60	83253940	2348837	247262,5	33019,1
15	10080,15	3698,275	1548,375	681,975	65	1,56E+08	3714664	341551,2	42300,55
20	45701,7	12022,68	4080,6	1430,375	70	2,88E+08	5472673	463163,7	53212,33
25	178994,9	31065,93	8925	2632,85	75	5,07E+08	8192267	622493,6	65958,73
30	574507,9	71078,23	17133,35	4368,775	80	8,84E+08	11491946	805424,6	80744,53
35	1630869	154019,6	30304,35	6798,2	85	1,43E+09	16430697	1043164	97872,98
40	4140749	295232,4	51080,35	9851,625	90	2,40E+09	23090156	1329069	118094,6
45	9376882	524696,7	78721,2	14041,75	95	3,95E+09	31106591	1693379	139579,8
50	20969116	904203,9	119682,7	19218,8	100	6,07E+09	42559745	2086415	164390,6
55	42391736	1494709	177555,5	25593,28					

Таблица 2. Время перечисления МНМ (с)

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	0,0001	0,0001	0	0	60	6,3743	0,1672	0,018	0,0025
15	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001	65	12,1251	0,2654	0,0242	0,0031
20	0,0037	0,001	0,0003	0,0001	70	22,4983	0,3925	0,0335	0,0039
25	0,0143	0,0024	0,0007	0,0002	75	39,7976	0,5887	0,0447	0,005
30	0,0446	0,0054	0,0013	0,0004	80	69,9057	0,8336	0,0576	0,0061
35	0,1223	0,0115	0,0022	0,0005	85	114,1993	1,207	0,0747	0,0072
40	0,3086	0,0218	0,0037	0,0008	90	193,376	1,693	0,0942	0,0087
45	0,698	0,0385	0,0056	0,0011	95	318,4027	2,2879	0,1191	0,0102
50	1,5917	0,0655	0,0087	0,0014	100	488,7817	3,1361	0,1474	0,0122
55	3,2247	0,1068	0,0128	0,0019					

Таблица 3. Вероятность перечисления МНМ за время, не превышающее 30 с

n	ρ				n	ρ			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	1	1	1	1	60	0,9904	1	1	1
15	1	1	1	1	65	0,9112	1	1	1
20	1	1	1	1	70	0,7413	1	1	1
25	1	1	1	1	75	0,5285	1	1	1
30	1	1	1	1	80	0,3584	1	1	1
35	1	1	1	1	85	0,2257	1	1	1
40	1	1	1	1	90	0,1478	1	1	1
45	1	1	1	1	95	0,0942	1	1	1
50	1	1	1	1	100	0,0614	0,9999	1	1
55	0,9999	1	1	1					

делает  $n-1$  проход, то общее число путей, построенное процедурой, не превысит величины  $\lambda = n^4$ .

В случае произвольного графа, не содержащего разделяющих вершин, экспоненциально установлено, что если граф—связный, то при  $\rho = 0,5$  и  $n \leq 125$  процедура строит МНМ за полиномиальное время. Однако при малых значениях плотностей для этого требуется память, пропорциональная  $n^6$ . Это обусловлено тем, что не все пути, построенные процедурой, в конечном счете приводят к построению МНМ, т.е. будет построено достаточно большое число лишних путей. При этом число МНМ не превышает значения  $\lambda$  (см. табл. 4). По всей видимости, при  $\rho < 0,01$  и достаточно больших значениях  $n$  область необходимой памяти может экспоненциально возрастать.

Таблица 4. Число МНМ  $\phi(G)$

$n$	$\rho$				$n$	$\rho$			
	30	50	70	90		30	50	70	90
10	13,075	11,45	9,075	4,75					
15	37,475	27,075	18,95	10,225	60	14723,95	1921,175	452,4	133,225
20	94,3	53,55	33,6	16,975	65	23712,18	2614,375	560,8	153,225
25	214,025	100,125	52,125	26,4	70	37289,55	3520,8	692,25	174,8
30	451,625	167,775	79,475	37,2	75	58063,05	4650,65	838,775	198,4
35	896,95	278,425	113,475	48,75	80	86997	6101,85	1016,375	220,8
40	1667,925	433,675	158,375	63,1	85	128568,5	7886,65	1213,825	247
45	3066,55	651,8	209,725	78,05	90	187178,1	10193,03	1431,7	276,875
50	5327,325	960,625	276,4	95,375	95	273065,9	12855,2	1693,275	304,25
55	9131,375	1358,725	357,075	114,075	100	385555,9	16020,8	1980,95	336,075

Таблица 5. Характеристики графа цепи на  $n$  вершинах

$n$	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	30	35	40	45	50
$\gamma$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{10}{1}$	$\frac{11}{1}$	12	16	1	21	1	26
$\alpha_0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	11	15	18	20	23	25
$\phi$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{28}{37}$	$\frac{49}{65}$	$\frac{86}{114}$	$\frac{151}{200}$	$\frac{265}{351}$	465	4410	17991	73396	299426	1221537
$\lambda$	$\frac{256}{625}$	$\frac{1296}{2401}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{10000}{14641}$	$\frac{20736}{28561}$	$\frac{38416}{50625}$	$\frac{65536}{83521}$	$\frac{104976}{130321}$	$\frac{160000}{194481}$	234256	810000	1500625	2560000	4100625	6256000

Примечание: над чертой указаны характеристики для четных значений  $n$ , под чертой — для нечетных значений  $n$ .

Характеристики графа (1) на четных и нечетных вершинах  $n$  представлены в табл. 5, из которой видно, что для четных значений  $n$  справедливы соотношения  $\alpha_0 = n/2$  и  $\gamma = n/2 + 1$ , а для нечетных — эти соотношения имеют вид  $\alpha_0 = (n+1)/2$ ,  $\gamma = 1$  и справедливы при  $n \geq 4$ .

## Выводы

Предложенная процедура при числе вершин в графе, не превышающем 125, позволяет перечислять МНМ за полиномиальное время, а при достаточно больших значениях  $n$  и малых плотностях графов имеет экспоненциальную сложность. Данная процедура работает более эффективно, чем процедуры, основанные на алгоритме Брона—Кербоша, так как продуцирует существенно меньше вспомогательных множеств для построения МНМ. В алгоритме Брона—Кербоша фактически перечисляются почти все независимые множества вершин, число которых, естественно, экспоненциально большое.

Описанный алгоритм основан на том, что всякая клика в графе является его максимальным по включению полным подграфом. Начиная с одиночной вершины (образующей полный подграф), на каждом шаге алгоритма происходит увеличение уже построенного полного подграфа в результате добавления в него вершины из множества кандидатов. Как следует из табл. 2 и 3, задача перечисления МНМ при числе вершин в графе, не превышающем 100, может быть решена в масштабе реального времени, что важно для современных систем управления, используемых в распределенных вычислительных системах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merrifield R.E., Simmons H.E. Topological methods in chemistry. N.Y.: John Wiley & Sons, 1989.
2. Hosoya H. Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons // Bull. Chem. Soc. Jpn. 1971, 44 (9), p. 2332—2339.
3. Miller R.E., Muller D.E. The problem of maximum consistent subsets — IBM Research Report RC-240. 1960. J.T.Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965, vol. 3, p. 23—28.
4. Watson T. Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965, vol. 3, p. 23—28.
5. Harley E., Bonner A., Goodman N. Uniform integration of genome mapping data using intersection graphs // Bioinformatics, 2001, vol. 17, p. 487—494.
6. Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel J. Math, 1965, vol. 3, p. 23—28.
7. Tomita E., Tanaka A., Takahashi H. The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments // Theoretical Computer Science, 2006, vol. 363, p. 28—42.



8. Prodinge H., Tichy R.F. Fibonacci numbers of graphs // *Fibonacci Quart*, 1982, 20 (1), p. 16—21.
9. Listrovoy S.V., Minukhin S.V. General Approach to Solving Optimization Problems in Distributed Computing Systems and Theory of Intelligence Systems Construction // *Journal of automation and information sciences*, 2010, vol. 42, N 3, p. 30—46
10. Листровой С.В., Минухин С.В. Общий подход к решению задач оптимизации в распределенных вычислительных системах и теории построения интеллектуальных систем // *Проблемы управления и информатика*, 2010, №2, с. 65—82.
11. Листровой С.В. Метод перечисления максимальных независимых множеств в произвольных неориентированных графах // *Электрон. моделирование*, 2014, **36**, № 1, с. 3—17.
12. Listrovoy S.V., Listrovaya E.S., Panchenko S.V., Moiseenko V.I., Kamenev A.U. Mathematical models in computer control systems RAILWAYS and parallel computing. Kharkiv: FOP Brovin O., 2017, 300 p.

Поступила 09.03.17;  
после доработки 15.06.17

#### REFERENCES

1. Merrifield, R.E. and Simmons, H.E. (1989), *Topological methods in chemistry*, New York, John Wiley & Sons, USA.
2. Hosoya, H. (1971), Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons, *Bull. Chem. Soc. Jpn.*, Vol. 44, no. 9, pp. 2332-2339.
3. Miller, R.E. and Muller, D.E. (1960), The problem of the maximum consistent subsets, IBM Research Report RC-240, J. T. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, USA. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs, *Israel J. Math.*, Vol. 3, p. 23-28.
4. Watson J.T. Research Center, Yorktown Heights, N.Y. Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs, *Israel J. Math.* Vol. 3, p. 23-28.
5. Harley, E., Bonner, A. and Goodman, N. (2001), Uniform integration of genome mapping data using intersection graphs, *Bioinformatics*, Vol. 17, pp. 487-494.
6. Moon, J.W. and Moser, L. (1965), On cliques in graphs, *Israel J. Math.*, Vol. 3, pp. 23-28.
7. Tomita, E., Tanaka, A. and Takahashi, H. (2006), The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments, *Theoretical Computer Science*, Vol. 363, pp. 28-42.
8. Prodinge, H. and Tichy, R.F. (1982), Fibonacci numbers of graphs, *Fibonacci Quart*, Vol. 20, no. 1, pp.16-21.
9. Listrovoy, S.V. and Minukhin, S.V. (2010), General approach to solving optimization problems in distributed computing systems and theory of intelligence systems construction, *Journal of automation and information sciences*, Vol. 42, no. 3, pp. 30-46.
10. Listrovoy, S.V. and Minukhin, S.V. (2010), “A general approach to the solution of optimization problems in distributed computing systems and the theory of constructing intellectual systems”, *Problemy upravleniya i informatika*, no. 2, pp.65-82.
11. Listrovoy, S.V. (2014), “The method of enumeration of maximal independent sets in arbitrary non-oriented graphs”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 1, pp. 3-17.
12. Listrovoy, S.V., Listrovaya, E.S., Panchenko, S.V., Moiseenko, V.I. and Kamenev, A.U. (2017), *Mathematical models in computer control systems RAILWAYS and parallel computing*: Monograph, FOP Brovin O., Kharkiv, Ukraine.

Received 09.03.17;  
after revision 15.06.17

*S.V. Listrovoy, A.V. Sidorenko, E.S. Listrovaya*

METHOD OF ENUMERATION OF MAXIMUM  
INDEPENDENT SETS IN NONORIENTED GRAPHS

Based on the rank approach the authors propose a method of enumeration of maximum independent sets of nonoriented connected graph with time complexity that does not exceed, at an average,  $O(n^6)$ , where  $n$  is the number of vertices in the graph, for the graphs which do not contain separating vertices, which dimension does not exceed  $n=125$ .

*Keywords: maximal independent set, click, vertex cover.*

*ЛИСТРОВОЙ Сергей Владимирович, д-р техн. наук, профессор Украинского государственного университета железнодорожного транспорта (г. Харьков). В 1972 г. окончил Харьковское высшее военное командно-инженерное училище. Область научных исследований — задачи дискретной оптимизации и теории графов и их приложения к анализу вычислительных систем и сетей.*

*СИДОРЕНКО Андрей Владимирович, вед. инженер-программист фирмы Samsung Electronics Ukraine Company, LLC Samsung R&D Institute Ukraine (г. Киев). В 2001 г. окончил Харьковский военный университет. Область научных исследований — задачи дискретной оптимизации и теории графов и их приложения к анализу вычислительных систем и сетей.*

*ЛИСТРОВАЯ Елена Сергеевна, канд. техн. наук, доцент кафедры экономики и маркетинга Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского (г. Харьков), который окончила в 1998 г. Область научных исследований — применение информационных систем в экономической сфере деятельности.*



---

УДК 519.213:621.391

**А.И. Красильников**, канд. физ.-мат. наук  
Ин-т технической теплофизики НАН Украины  
(Украина, 03057, Киев, ул. Желябова, 2а,  
тел. (044) 4532857, e-mail: tangorov@ukr.net)

## **Анализ коэффициента эксцесса засоренных гауссовых распределений**

Получена формула для нахождения коэффициента эксцесса симметричных засоренных гауссовых распределений. Исследована зависимость коэффициента эксцесса от параметров модели засоренных распределений. Рассмотрены примеры засорения равномерным и логистическим распределениями. Полученные результаты позволяют анализировать негауссовы случайные величины, описываемые моделью засоренных гауссовых распределений.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* засоренные распределения, модель Тьюки—Хьюбера, смеси распределений, коэффициент эксцесса, кумулянтный анализ.

Отримано формулу для знаходження коефіцієнта ексцесу симетричних забруднених гаусових розподілів. Досліджено залежність коефіцієнта ексцесу від параметрів моделі забруднених розподілів. Розглянуто приклади забруднення рівномірним та логістичним розподілами. Отримані результати дозволяють аналізувати негаусові випадкові величини, які описуються моделлю забруднених гаусових розподілів.

*К л ю ч о в і с л о в а:* забруднені розподіли, модель Тьюки—Хьюбера, суміші розподілів, коефіцієнт ексцесу, кумулянтний аналіз.

При решении различных прикладных задач широко применяются методы параметрической статистики [1—3], основанные на априорных моделях функции распределения  $F_0(x)$  исследуемых случайных величин и случайных процессов. Одна из основных проблем этих методов — выбор адекватной функции распределения  $F_0(x)$ , так как ее отличие от функции распределения  $F(x)$ , соответствующей имеющимся реальным данным, снижает достоверность получаемых результатов.

Отклонения функции распределения  $F(x)$  от модели  $F_0(x)$  могут быть обусловлены двумя причинами. Во-первых, функция распределения  $F(x)$  наблюдаемой выборки хотя бы незначительно отличается от принятой

© А.И. Красильников, 2017

модели  $F_0(x)$ . Во-вторых, к элементам выборки, имеющим распределение  $F_0(x)$ , добавляются другие элементы, называемые аномальными наблюдениями [3], с распределением  $F_1(x)$ .

Для учета отклонений закона распределения наблюдаемых на практике реальных данных от модельного распределения удобно применять модели засоренных (загрязненных) распределений, которые определяются по формуле [4—6]

$$F(x) = (1 - \varepsilon) F_0(x) + \varepsilon F_1(x), \quad (1)$$

где  $F_1(x)$  — засоряющая функция распределения;  $\varepsilon \in [0, 1]$  — коэффициент засорения.

Модель (1) впервые рассмотрел Тьюки [4], предполагая функции распределения  $F_0(x)$ ,  $F_1(x)$  гауссовыми с одинаковыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями. Хьюбер [5] использовал модель (1) с произвольными симметричными функциями распределения  $F_0(x)$ ,  $F_1(x)$  и одинаковыми математическими ожиданиями. Модель (1), которую часто называют моделью Тьюки—Хьюбера, широко применяется в робастной статистике [2—8] при исследовании устойчивости оценок различных параметров, прежде всего параметров сдвига и масштаба, к засорению априорного распределения  $F_0(x)$ , а также при статистической обработке случайных процессов [9—11].

Модель Тьюки—Хьюбера позволяет, варьируя дисперсией засоряющего распределения и коэффициентом засорения, изменять в широких пределах протяженность хвостов распределения  $F(x)$  по сравнению с распределением  $F_0(x)$ . Для количественной оценки влияния засоряющего распределения  $F_1(x)$  и отличия функции распределения  $F(x)$  от функции  $F_0(x)$  удобно использовать коэффициент эксцесса модели (1). Среди работ, в которых рассматриваются методы робастной статистики [2—11], лишь в работе [3] приведены общие формулы для моментов модели (1), а формула для коэффициента эксцесса вообще отсутствует.

Модель Тьюки—Хьюбера является частным случаем моделей конечных смесей распределений [12, 13], результаты исследования и применения которых систематизированы в работах [13—16], содержащих обширные библиографии. В указанных работах моменты смеси применяются для идентификации ее параметров, а формула для коэффициента эксцесса смесей также отсутствует. Некоторые свойства коэффициента эксцесса модели (1) рассмотрены в работах [17, 18]. В работе [17] для модели (1), в которой функции распределения  $F_0(x)$ ,  $F_1(x)$  являются гауссовыми с одинаковыми математическими ожиданиями и различными дисперсиями, проанализирована зависимость коэффициента эксцесса от отношения дис-

персий и коэффициента засорения. В работе [18] определены условия, при которых коэффициент эксцесса модели (1) равен нулю.

Таким образом, актуальной остается задача исследования зависимости коэффициента эксцесса модели (1) от ее параметров при негауссовой засоряющей функции распределения. Рассмотрим ее решение.

**Постановка задачи.** Предположим, что модельная функция распределения  $F_0(x)$  — гауссова с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\mu_{2,0}$ , т.е.

$$F_0(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) = \int_{-\infty}^{x/\sigma_0} \varphi(z) dz,$$

где  $\sigma_0 = \sqrt{\mu_{2,0}}$ ;  $\Phi(x)$  и  $\varphi(z)$  — функция распределения и плотность вероятностей стандартной гауссовой случайной величины,  $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5z^2}$ .

Будем считать, что засоряющая функция распределения  $F_1(x)$  является симметричной, т.е. удовлетворяет условию  $F_1(x) = 1 - F_1(-x + 0)$ . Тогда функция

$$F(x) = (1 - \varepsilon) \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + \varepsilon F_1(x) \quad (2)$$

определяет семейство симметричных засоренных гауссовых распределений. Функция распределения (2) имеет разрывы первого рода, если  $F_1(x)$  — кусочно-постоянная функция. Если функция  $F_1(x)$  абсолютно непрерывна, то  $F(x)$  также абсолютно непрерывна и у нее существует плотность вероятностей  $p(x)$ , которая является четной функцией:

$$p(x) = \frac{1 - \varepsilon}{\sigma_0} \varphi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + \varepsilon p_1(x), \quad (3)$$

где  $p_1(x)$  — плотность вероятностей засоряющего распределения,  $p_1(x) = F_1'(x)$ .

Математическое ожидание модели (2) равно нулю, начальные и центральные моменты совпадают, при этом отличны от нуля только центральные моменты  $\mu_s$  четных порядков  $s$ , которые имеют вид

$$\mu_s = (1 - \varepsilon) \mu_{s,0} + \varepsilon \mu_{s,1}, \quad (4)$$

где  $\mu_{s,0}, \mu_{s,1}$  — центральные моменты модельной и засоряющей функций

распределения модели (2). Найдем коэффициент эксцесса  $\gamma_4$  модели (2), используя известное соотношение

$$\gamma_4 = (\mu_4 / \mu_2^2) - 3. \quad (5)$$

Подставляя в (5) выражение (4), после преобразований получаем формулу для нахождения коэффициента эксцесса модели (2):

$$\gamma_4 = \gamma_4(M) = \frac{\varepsilon \gamma_{4,1} + 3(1-\varepsilon)\varepsilon(M-1)^2}{[(1-\varepsilon)M + \varepsilon]^2}. \quad (6)$$

Здесь  $\gamma_{4,1} \geq -2$  — коэффициент эксцесса засоряющего распределения;  $M \geq 0$  — параметр модели (2),

$$M = \mu_{2,0} / \mu_{2,1}, \quad (7)$$

где  $\mu_{2,0}$  и  $\mu_{2,1}$  — дисперсии модельной и засоряющей функций распределения.

Исследуем зависимость коэффициента эксцесса (6) модели (2) от параметра  $M$ , считая заданными коэффициент эксцесса  $\gamma_{4,1}$  засоряющего распределения и коэффициент засорения  $\varepsilon$ .

**Анализ предельного поведения функции  $\gamma_4(M)$ .** Рассмотрим функцию  $\gamma_4(M)$  при  $M \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow \infty$ ,  $M = 1$ .

1. Пусть  $M \rightarrow 0$ , т.е.  $\mu_{2,0} \ll \mu_{2,1}$ . Тогда из формулы (6) получаем

$$\gamma_4(0) = \lim_{M \rightarrow 0} \gamma_4(M) = \frac{\gamma_{4,1} + 3(1-\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что если  $\gamma_{4,1} \geq 0$ , то  $\gamma_4(0) \geq 0$  при любых значениях  $\varepsilon$ . Если  $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$ , то в зависимости от значений коэффициента  $\varepsilon$  значение  $\gamma_4(0)$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В частности,  $\gamma_4(0) = 0$ , если  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\gamma_4(0) > 0$ , если  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\gamma_4(0) < 0$ , если  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , где

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{\gamma_{4,1}}{3}. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что  $1/3 \leq \varepsilon_0 < 1$ , так как  $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$ . В предельном случае, когда  $\mu_{2,0} \rightarrow 0$ , распределение  $F_0(x)$  стремится к вырожденному в нуле распределению, т.е.

$$F_0(x) = \lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) = E(x),$$

где  $E(x)$  — единичная функция,

$$E(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

В этом случае формула (2) принимает следующий вид:

$$F(x) = (1-\varepsilon)E(x) + \varepsilon F_1(x). \quad (10)$$

Если  $F_1(x)$  в формуле (10) — кусочно-постоянная функция, то функция распределения  $F(x)$  — также кусочно-постоянная. Если функция  $F_1(x)$  абсолютно непрерывна, то функция распределения (10) имеет скачок в нуле величиной  $(1-\varepsilon)$ .

2. Пусть  $M \rightarrow \infty$ , т.е.  $\mu_{2,0} \gg \mu_{2,1}$ . Тогда из формулы (6) получаем

$$\gamma_4(\infty) = \lim_{M \rightarrow \infty} \gamma_4(M) = 3 \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (11)$$

Из формулы (11) видно, что  $\gamma_4(\infty) > 0$  и при любых значениях  $\varepsilon$  не зависит ни от значений коэффициента  $\gamma_{4,1}$ , ни от его знака. В предельном случае, когда  $\mu_{2,1} \rightarrow 0$ , распределение  $F_1(x)$  стремится к вырожденному в нуле распределению, т.е.  $F_1(x) = E(x)$ . В этом случае формула (2) принимает следующий вид:

$$F(x) = (1-\varepsilon) \Phi\left(\frac{x}{\sigma_0}\right) + \varepsilon E(x). \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что функция  $F(x)$  имеет скачок в нуле величиной  $\varepsilon$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция  $F(x)$  стремится к гауссовой функции распределения, а при  $\varepsilon \rightarrow 1$  — к вырожденному в нуле распределению.

3. Пусть  $M = 1$ , т.е.  $\mu_{2,0} = \mu_{2,1}$ . Тогда из формулы (6) получаем  $\gamma_4(1) = \varepsilon \gamma_{4,1}$ . В этом случае значение  $\gamma_4(1)$  может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от знака коэффициента эксцесса  $\gamma_{4,1}$  засоряющего распределения. В частном случае, когда засоряющее распределение  $F_1(x)$  — гауссово, у которого  $\gamma_{4,1} = 0$ ,  $F(x)$  является гауссовой функцией распределения и  $\gamma_4(1) = 0$  при любых значениях  $\varepsilon$ .

**Минимум функции  $\gamma_4(M)$ .** Исследуем коэффициент эксцесса (6) на экстремум. Для этого находим производную функции  $\gamma_4(M)$ :

$$\gamma_4'(M) = \frac{d\gamma_4(M)}{dM} = \frac{2(1-\varepsilon)\varepsilon(-\gamma_{4,1} + 3M - 3)}{[(1-\varepsilon)M + \varepsilon]^4}. \quad (13)$$

Приравнивая числитель выражения (13) нулю ( $\varepsilon \neq 0, \varepsilon \neq 1$ ), получаем урав-



нение для нахождения точки экстремума  $M_m$ ,  $-\gamma_{4,1} + 3M_m - 3 = 0$ , из которого находим

$$M_m = 1 + \frac{\gamma_{4,1}}{3}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что  $1/3 \leq M_m < 1$ , если  $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$ , и  $M_m \geq 1$ , если  $\gamma_{4,1} \geq 0$ .

Покажем, что точка  $M_m$  является точкой минимума функции  $\gamma_4(M)$ . Для этого следует убедиться, что при любых  $\delta > 0$  справедливы неравенства  $\gamma'_4(M_m + \delta) > 0$  и  $\gamma'_4(M_m - \delta) < 0$ .

Рассмотрим формулу (13) при  $\varepsilon \neq 0$  и  $\varepsilon \neq 1$ . Знаменатель в ней всегда положительный, а в числителе положительны все сомножители, за исключением последнего, который может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Обозначим этот сомножитель  $g(M) = -\gamma_{4,1} + 3M - 3$  и рассмотрим выражение

$$g(M_m + \delta) = -\gamma_{4,1} + 3(M_m + \delta) - 3. \quad (15)$$

Подставляя в (15) значение  $M_m$  из (14), получаем  $g(M_m + \delta) = 3\delta > 0$ . Аналогично несложно показать, что  $g(M_m - \delta) = -3\delta < 0$ .

Таким образом,  $M_m$  — точка минимума функции  $\gamma_4(M)$ . Найдем значение  $\min \gamma_4 = \gamma_4(M_m)$ , подставив в формулу (6) значение  $M_m$  из (14):

$$\min \gamma_4 = \gamma_4(M_m) = \frac{3\varepsilon \gamma_{4,1}}{3 + (1 - \varepsilon) \gamma_{4,1}}. \quad (16)$$

Проанализируем зависимость  $\min \gamma_4$  от коэффициента засорения  $\varepsilon$  и коэффициента эксцесса  $\gamma_{4,1}$  засоряющего распределения. Из формулы (16) следует, что  $\min \gamma_4 = 0$  при  $\varepsilon = 0$ , если  $\varepsilon = 1$ , то  $\min \gamma_4 = \gamma_{4,1}$ , если  $\gamma_{4,1} \geq 0$ , то  $\min \gamma_4 \geq 0$ , если  $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$ , то  $\min \gamma_4 < 0$ .

**Условия равенства нулю функции  $\gamma_4(M)$ .** На основании проведенного анализа можно сделать следующий вывод. Если  $\gamma_{4,1} < 0$ , то функция  $\gamma_4(M)$  отрицательна в точке  $M = M_m$ , всегда положительна при  $M \rightarrow \infty$ , а при  $M \rightarrow 0$  она положительна, если  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , где коэффициент  $\varepsilon_0$  определен из формулы (9). Следовательно, при отрицательном значении  $\gamma_{4,1}$  существует, как минимум, одна точка  $M$ , в которой  $\gamma_4(M) = 0$ . Для нахождения этих точек приравняем нулю числитель выражения (6) и получим уравнение  $\gamma_{4,1} + 3(1 - \varepsilon)(M - 1)^2 = 0$ , решение которого имеет вид

$$M_1 = 1 - \left( -\frac{\gamma_{4,1}}{3(1 - \varepsilon)} \right)^{0,5}, \quad (17)$$

$$M_2 = 1 + \left( -\frac{\gamma_{4,1}}{3(1-\varepsilon)} \right)^{0,5}. \quad (18)$$

Проанализируем формулы (17), (18). Если  $\gamma_{4,1} = 0$ , то  $M_1 = M_2 = M_m = 1$ . При  $\gamma_{4,1} < 0$  всегда  $M_2 > 1$ , а значение  $M_1$  в зависимости от значений  $\varepsilon$  может быть отрицательным, положительным или равным нулю. Параметр  $M$ , определенный по формуле (7), должен быть неотрицательным, поэтому, используя формулу (17), определяем условия, при которых  $M_1 \geq 0$ :

$$\varepsilon \leq 1 + \frac{\gamma_{4,1}}{3} = \varepsilon_0. \quad (19)$$

Таким образом, если  $\gamma_{4,1} \in [-2, 0)$ , а значение  $\varepsilon$  удовлетворяет неравенству (19), то  $\gamma_4(M) = 0$  при  $M = M_1$  или  $M = M_2$ . Если  $M \in (M_1, M_2)$ , коэффициент  $\gamma_4(M) < 0$ , а при  $M \in [0, M_1)$  или  $M > M_2$  коэффициент  $\gamma_4(M) > 0$ .

**Пример засоренных распределений.** Рассмотрим засоренные гауссовы распределения с двумя моделями засоряющих распределений — равномерной плотностью вероятностей  $p_R(x)$  и логистической плотностью вероятностей  $p_L(x)$  [19] (см. таблицу). В этом случае засоренное распределение является непрерывным и его плотность вероятностей описывается формулой (3).

При засоряющем равномерном распределении с отрицательным коэффициентом  $\gamma_{4,R}$  коэффициент эксцесса  $\gamma_4(M)$  модели (3) может принимать как положительные, так и отрицательные значения, области которых определяются значением  $\varepsilon$ . Исходя из неравенства (19),  $\varepsilon \leq 1 + \frac{\gamma_{4,R}}{3} = 1 - \frac{1,2}{3} = 0,6$ ,

зададим значение  $\varepsilon = 0,2$  одинаковым для обеих моделей.

В случае  $\varepsilon = 0,2$  при равномерном засорении коэффициент эксцесса  $\gamma_4(M)$  принимает положительные и отрицательные значения (рис. 1, а), при логистическом засорении он всегда положителен (рис. 1, б), а предельное значение  $\gamma_4(M)$  одинаково для обеих моделей засоряющих распределений, а именно  $\gamma_4(\infty) = 0,75$ .

Засоряющее распределение	Плотность вероятностей	Дисперсия	Коэффициент эксцесса
Равномерное	$p_R(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-a, a], \\ \frac{1}{2a}, & x \in (-a, a], \end{cases} a > 0$	$\mu_{2,R} = \frac{a^2}{3}$	$\gamma_{4,R} = -1,2$
Логистическое	$p_L(x) = \frac{0,25\beta}{\text{ch}^2(0,5\beta x)}, x \in (-\infty, \infty), \beta > 0$	$\mu_{2,L} = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi}{\beta} \right)^2$	$\gamma_{4,L} = 1,2$

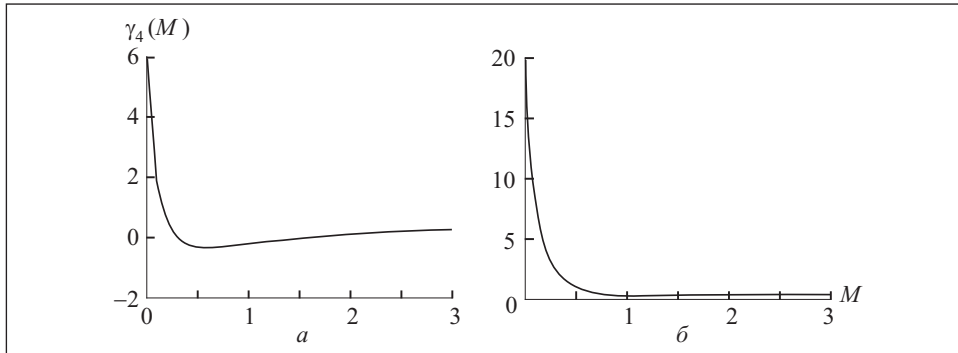


Рис. 1

В случае засоряющего равномерного распределения коэффициент эксцесса  $\gamma_4(M)$  принимает минимальное значение  $\min \gamma_4 = -0,3529$  при  $M_m = 0,6$ , равен нулю при  $M_1 = 0,2929$  и  $M_2 = 1,7071$ , а в нуле  $\gamma_4(0) = 6$  (см. рис. 1, а). В случае засоряющего логистического распределения коэффициент эксцесса  $\gamma_4(M)$  принимает минимальное значение  $\min \gamma_4 = 0,1818$  при  $M_m = 1,4$ , параметры  $M_1$  и  $M_2$  не существуют, а в нуле  $\gamma_4(0) = 18$  (см. рис. 1, б).

Найдем плотности вероятностей засоренных распределений, для чего конкретизируем параметры модельного и засоряющих распределений (см. таблицу). Зададим дисперсию модельного распределения  $\mu_{2,0} = 1$  и примем  $M = M_1 = 0,2929$ . При таком значении  $M$  коэффициент эксцесса модели (3)  $\gamma_4 = 0$ , если засоряющее распределение — равномерное, и  $\gamma_4 = 2,5446$ , если засоряющее распределение — логистическое.

Используя выражение (7) и формулы для  $\mu_{2,R}$ ,  $\mu_{2,L}$  из таблицы, находим значения параметров засоряющих распределений при  $M = 0,2929$  и  $\mu_{2,0} = 1$ :  $a = 3,2$ ,  $\beta = 0,982$ . Подставляя в (3) значения  $\sigma_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0,2$  и плотность вероятностей  $p_R(x)$  при  $a = 3,2$ , получаем выражение для плотности вероятностей  $p_{NR}(x)$  засоренного гауссового распределения при засорении равномерным распределением:

$$p_{NR}(x) = \begin{cases} \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} + 0,0313, & x \in (-3,2; 3,2], \\ \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}, & x \notin (-3,2; 3,2]. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогично находим выражение для плотности вероятностей  $p_{NL}(x)$  засоренного гауссового распределения при засорении логистическим распределением  $p_L(x)$  с параметром  $\beta = 0,982$ :

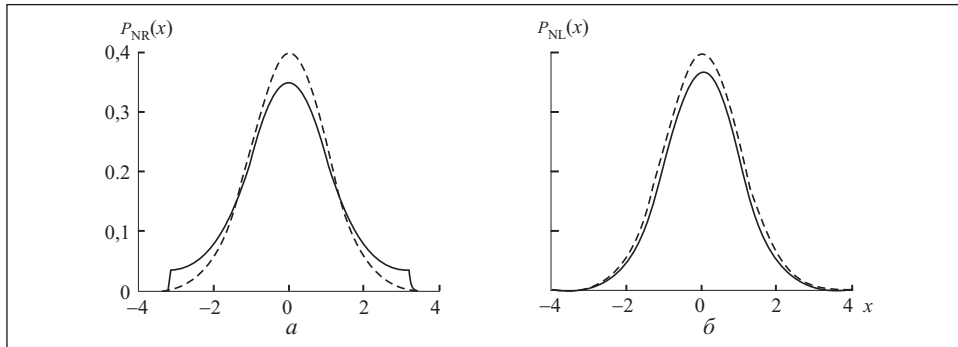


Рис. 2

$$p_{NL}(x) = \frac{0,8}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2} + \frac{0,0491}{\text{ch}^2(0,4908x)}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (21)$$

На рис. 2, *a* и *б*, представлены графики плотности вероятностей соответственно (20) и (21), где штриховой линией представлен график незасоренной модельной гауссовой плотности вероятностей с дисперсией  $\mu_{2,0} = 1$ :

$$p_0(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5x^2}.$$

Из рис. 2 видно, что плотности вероятностей  $p_{NR}(x)$  и  $p_{NL}(x)$  засоренных распределений существенно отличаются от модельной гауссовой плотности вероятностей  $p_0(x)$ , особенно при засорении равномерным распределением  $p_R(x)$ . При засоряющем логистическом распределении коэффициент эксцесса распределения (21) составляет  $\gamma_4 = 2,5446$  и существенно отличается от коэффициента эксцесса модельного распределения  $p_0(x)$ , равного нулю. При засоряющем равномерном распределении у засоренного распределения (20)  $\gamma_4 = 0$ , т.е. он совпадает с коэффициентом эксцесса модельного распределения. Это можно объяснить тем, что при  $x \notin (-3,2; 3,2]$  хвосты распределений  $p_{NR}(x)$  и  $p_0(x)$  совпадают. Следовательно, в этом случае коэффициент эксцесса  $\gamma_4$  не является информативным и для выявления засоренности целесообразно использовать кумулянтные коэффициенты более высоких порядков, например коэффициент  $\gamma_6$ .

## Выводы

С помощью полученной общей формулы (6) для вычисления коэффициента эксцесса  $\gamma_4$  симметричных засоренных гауссовых распределений

можно анализировать зависимость  $\gamma_4$  от параметров модели — коэффициента засорения, отношения дисперсий составляющих модели и коэффициента эксцесса  $\gamma_{4,1}$  засоряющего распределения.

Полученные результаты позволяют достаточно просто моделировать и анализировать негауссовы случайные величины, описываемые моделью засоренных гауссовых распределений, а их использование может повысить достоверность результатов решения задач измерений, обнаружения и классификации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. М.: Финансы и статистика, 1983, 471 с.
2. Муха В.С. Статистические методы обработки данных: Учеб. пособие. Минск: Изд. центр БГУ, 2009, 183 с.
3. Лемешко Б.Ю., Лемешко С.Б., Постовалов С.Н., Чимитова Е.В. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011, 888 с.
4. Tukey J.W. A survey of sampling from contaminated distributions. — Contributions to Probability and Statistics. Ed. by I. Olkin. Stanford: Stanford Univ. Press, 1960, p. 448—485.
5. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. Пер. с англ. И.А. Маховой и В.И. Хохлова, под ред. И.Г. Журбенко. М.: Мир, 1984, 304 с.
6. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния. Пер. с англ. под ред. В.М. Золотарева. М.: Мир, 1989, 512 с.
7. Figueiredo F., Gomes M.I. The total median statistic to monitor contaminated normal data // Journal Quality Technology & Quantitative Management. 2016, Vol 13, p. 1—16. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/16843703.2016.1139840>
8. Punzo A., McNicholas P.D. Parsimonious mixtures of multivariate contaminated normal distributions // Preprint submitted to arXiv 1305.4669. 20.05.2016, p. 1—28. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1305.4669.pdf>
9. Марчук В.И., Токарева С.В. Способы обнаружения аномальных значений при анализе нестационарных случайных процессов. Шахты: Южно-российский государственный ун-т экономики и сервиса, 2009, 209 с.
10. Денисов В.И., Тимофеев В.С. Устойчивые распределения и оценивание параметров регрессионных зависимостей // Изв. Томского политехнического института. 2011, **318**, № 2, с. 10—15.
11. Осадчий И.С. Метод оценки параметров распределения гауссовского шума для задач обнаружения импульсного сигнала // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015, № 4, с. 1—27. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/1/text.html>
12. Robbins H. Mixture of distributions // Ann. Math. Stat. 1948, Vol. 19, p. 360—369.
13. Titterton D.M., Smith A.F.M., Makov U.E. Statistical analysis of finite mixture distributions. New York: John Wiley & Sons, 1985, 250 p.
14. McLachlan G., Peel D. Finite mixture models. New York: John Wiley & Sons, 2000, 438 p.

15. Королев В.Ю. Смешанные гауссовские вероятностные модели реальных процессов. М.: Макс Пресс, 2004, 124 с.
16. Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: Изд-во Ин-та проблем информатики РАН, 2008, 390 с.
17. Красильников А.И., Пилипенко К.П. Одновершинная двухкомпонентная гауссовская смесь. Коэффициент эксцесса // Электроника и связь, 2007, № 2 (37), с. 32—38.
18. Красильников А.И. Класс негауссовских симметричных распределений с нулевым коэффициентом эксцесса // Электрон. моделирование, 2017, 39, № 1, с. 3—17.
19. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям, СПб.: Наука, 2001, 295 с.

Поступила 03.04.17

#### REFERENCES

1. Aivazian, S.A., Eniukov, I.S. and Meshalkin, L.D. (1983), *Prikladnaya statistika: Osnovy modelirovaniia i pervichnaia obrabotka dannykh. Spravochnoe izd.* [Applied statistics: bases of modeling and initial data processing. Reference edition], Finansy i statistika, Moscow, USSR.
2. Mukha, V.S. (2009), *Statisticheskie metody obrabotki dannykh: Uchebnoe posobie* [Statistical methods of data processing: Tutorial], Izdatelskiy tsentr BGU, Minsk, Belarus.
3. Lemeshko, B.Yu., Lemeshko, S.B., Postovalov, S.N. and Chimitova, E.V. (2011), *Statisticheskii analiz dannykh, modelirovanie i issledovanie veroiatnostnykh zakonomernostei. Kompiuternyi podkhod* [Statistical data analysis, simulation and study of probability regularities. Computer approach], Izdatelstvo NGTU, Novosibirsk, Russia.
4. Tukey, J.W. (1960), A survey of sampling from contaminated distributions. Contributions to Probability and Statistics, Ed. I. Olkin, Stanford University Press, Stanford, UK.
5. Huber, P.J. (1984), *Robastnost v statistike* [Robust statistics], Translated by I.A. Makhova and V.I. Khokhlov, Ed. I.G. Zhurbenko, Mir, Moscow, USSR.
6. Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P. and Stahel, W. (1989), *Robastnost v statistike. Podkhod na osnove funktsii vliianiia* [Robust statistics. The approach based on influence functions], Translated by V.M. Zolotarev, Mir, Moscow, USSR.
7. Figueiredo, F. and Gomes, M.I. (2016), The total median statistic to monitor contaminated normal data, *Journal Quality Technology & Quantitative Management*, Vol. 13, pp. 1-16, available at: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/16843703.2016.1139840>
8. Punzo, A. and McNicholas, P.D. (2016), Parsimonious mixtures of multivariate contaminated normal distributions, *Preprint submitted to arXiv 1305.4669*, May 20, 2016. - pp. 1-28, available at: <https://arxiv.org/pdf/1305.4669.pdf>
9. Marchuk, V.I. and Tokareva, S.V. (2009), *Sposoby obnaruzheniia anomalnykh znachenii pri analize nestatsionarnykh sluchainykh protsessov: Monografiia* [Methods for detecting anomalous values in the analysis of non-stationary random processes: Monograph], Yuzhno-rossiiskii gosudarstvennyi universitet ekonomiki i servisa, Shakhty, Russia.
10. Denisov, V.I. and Timofeev, V.S. (2011), “Stable distributions and estimation of parameters of regression dependencies”, *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo instituta*, Vol. 318, no. 2, pp. 10-15.
11. Osadchii, I.S. (2015), “Method for estimating the distribution parameters of Gaussian noise for the operation of a pulse signal system”, *Zhurnal radioelektroniki: elektronnyy zhurnal*, no. 4, pp. 1-27, available at: <http://jre.cplire.ru/jre/apr15/1/text.html>
12. Robbins, H. (1948), Mixture of distributions, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 19, pp. 360-369.

13. Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E. (1985), Statistical analysis of finite mixture distributions, John Wiley & Sons, New York, USA.
14. McLachlan, G. and Peel, D. (2002), Finite mixture models, John Wiley & Sons, New York, USA.
15. Korolev, V.Yu. (2004), *Smeshannye gaussovskie veroiatnostnye modeli realnykh protsessov* [The mixed Gaussian probabilistic models of real processes], Maks Press, Moscow, Russia.
16. Korolev, V.Yu. (2008), *Veroyatnostno-statisticheskii analiz khaoticheskikh protsessov s pomoshchiu smeshannykh gaussovskikh modelei. Dekompozitsiia volatilnosti finansovykh indeksov i turbulentnoi plazmy* [Probabilistic-statistical analysis of chaotic processes using mixed Gaussian models. Decomposition of volatility of financial indices and turbulent plasma], Izdatelstvo Instituta problem informatiki RAN, Moscow, Russia.
17. Krasilnikov, A.I. and Pilipenko, K.P. (2007), “Unimodal two-componental Gaussian mixture. Excess kurtosis”, *Elektronika i sviaz*, no. 2 (37), pp. 32-38.
18. Krasilnikov, A.I. (2017), “Class of non-Gaussian symmetric distributions with zero coefficient of kurtosis”, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 39, no. 1, pp. 3-17.
19. Vadzinskii, R.N. (2001), *Spravochnik po veroiatnostnym raspredeleniiam* [Reference book on probabilistic distributions], Nauka, St. Petersburg, Russia.

Received 03.04.17

A.I. Krasilnikov

#### ANALYSIS OF THE KURTOSIS COEFFICIENT OF CONTAMINATED GAUSSIAN DISTRIBUTIONS

A formula for finding the kurtosis coefficient of symmetric contaminated Gaussian distributions has been obtained. The dependence of the kurtosis coefficient on the parameters of the model of contaminated distributions has been studied. Examples of contaminating with uniform and logistic distributions have been considered. The obtained results allow the author to analyze non-Gaussian random variables described by the model of contaminated Gaussian distributions.

*Key words:* contaminated distributions, Tukey-Huber model, mixtures of distributions, kurtosis coefficient, cumulant analysis.

*КРАСИЛЬНИКОВ Александр Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, вед. науч. сотр. Ин-та технической теплофизики НАН Украины. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — математические модели, вероятностные характеристики и методы статистической обработки флуктуационных сигналов в системах шумовой диагностики.*

---

УДК 539.2:519.63

**Х.М. Гамзаев**, д-р техн. наук  
Азербайджанский государственный  
университет нефти и промышленности  
(Азербайджан, AZ 1010, Баку, пр-т Азадлыг, 20,  
тел. (994 55) 6826701, e-mail: xan.h@rambler.ru)

## **Об одной обратной задаче Стефана для фазового превращения в твердых телах**

Рассмотрен процесс диффузионного фазового превращения, описываемый нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных с подвижной границей. Поставлена обратная задача по определению концентрации растворенного вещества на внешней поверхности рассматриваемого объема, обеспечивающей перемещение подвижной границы по заданному закону. С помощью методов выпрямления фронтов и разностной аппроксимации поставленная задача сведена к двум разностным задачам. Предложен вычислительный алгоритм для решения полученных разностных задач.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* диффузионное фазовое превращение, подвижная граница раздела фаз, метод выпрямления фронтов, разностный метод.

Розглянуто процес дифузійного фазового перетворення, описуваний нелінійною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних з рухомою межею. Поставлено зворотню задачу щодо визначення концентрації розчиненої речовини на зовнішній поверхні розглядуваного об'єму, яка забезпечує переміщення рухомої межі за заданим законом. За допомогою методів випрямлення фронтів та різницевої апроксимації поставлену задачу зведено до двох різницевих задач. Запропоновано обчислювальний алгоритм для розв'язку отриманих різницевих задач.

*К л ю ч о в і с л о в а:* дифузійне фазове перетворення, рухома межа розділення фаз, метод випрямлення фронтів, різницевий метод.

Известно, что в твердых телах могут быть реализованы фазовые превращения двух типов: бездиффузионные, происходящие без изменения химического состава и не связанные с диффузионным перераспределением компонентов, и диффузионные, при которых лимитирующим звеном процесса является перенос примеси [1—4]. Часто модель процессов диффузионного фазового превращения в твердых телах представляется в виде задачи Стефана с одной или двухфазной зоной [1,2]. При формулировании задачи Стефана с двухфазной зоной математическая постановка задачи сводится к двум дифференциальным уравнениям в частных производных

© Х.М. Гамзаев, 2017



с соответствующими краевыми условиями, описывающими диффузию в первой и во второй фазах, и уравнению материального баланса на границе раздела фаз. Решение этой задачи, т.е. распределение концентрации растворенного вещества в фазах и положение границы раздела фаз, определены в основном аналитическими методами при постоянных коэффициентах диффузии, граничных и начальных условиях. Однако анализ реальных процессов фазового превращения показывает, что условия протекания этих процессов часто таковыми не являются. Следовательно, применение результатов таких аналитических исследований может привести к получению неверных оценок параметров диффузионного фазового превращения.

Необходимо заметить, что эффективность процессов фазового превращения во многом зависит от закона перемещения подвижной границы раздела фаз. В связи с этим важной является задача регулирования движения подвижной границы раздела фаз в диффузионных фазовых превращениях. Предлагается проблему регулирования движения границы раздела двух фаз представлять как граничную обратную задачу для системы уравнений диффузионного фазового превращения.

**Постановка задачи.** Рассмотрим процесс диффузионного фазового превращения в конечной области, представляемый задачей Стефана с двухфазной зоной

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in \Omega^- = \{0 < x < s(t), 0 < t \leq T\}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in \Omega^+ = \{s(t) < x < L, 0 < t \leq T\}, \quad (2)$$

где  $c_i(x, t)$  и  $D_i(c_i)$ ,  $i=1,2$  — концентрация и коэффициент диффузии растворенного вещества в соответствующей фазе;  $s(t)$  — координата подвижной границы раздела фаз.

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  распределение концентрации растворенного вещества в фазах и положение границы раздела фаз известны, т.е. для системы (1), (2) имеем следующие начальные условия:

$$c_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad c_2|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad s(0) = 0. \quad (3)$$

Предположим, что в первой фазе изменение концентрации во времени на границе  $x=0$  описывается функцией  $f(t)$ , а во второй фазе концентрация на границе  $x=L$  изменяется во времени по закону  $\xi(t)$ . Тогда на фиксированных границах  $x=0$  и  $x=L$  получим следующие граничные условия:

$$c_1|_{x=0} = f(t), \quad c_2|_{x=L} = \xi(t). \quad (4)$$

На границе раздела фаз  $x = s(t)$  концентрация растворенного вещества равна равновесной [2],

$$c_1|_{x=s(t)} = c_1^r(t), \quad c_2|_{x=s(t)} = c_2^r(t), \quad (5)$$

а закон перемещения подвижной границы представляется в виде уравнения массового баланса на границе раздела фаз:

$$(c_2^r(t) - c_1^r(t)) \frac{ds}{dt} = D_1 \frac{\partial c_1}{\partial x} \Big|_{x=s(t)} - D_2 \frac{\partial c_2}{\partial x} \Big|_{x=s(t)}. \quad (6)$$

Следует заметить, что прямая задача диффузионного фазового превращения состоит в нахождении функций  $c_1(x, t)$ ,  $c_2(x, t)$ ,  $s(t)$ , удовлетворяющих уравнениям (1), (2), (6) и дополнительно заданным условиям (3)—(5). Существенной особенностью прямой задачи является наличие подвижной границы раздела фаз, закон перемещения которого определяется в ходе решения задачи [5, 6]. Однако для процессов диффузионных фазовых превращений важное практическое значение имеют задачи, когда по заранее заданному закону движения границы раздела фаз исследуются условия для первой фазы на границе  $x = 0$ , при которых такие движения возможны.

В рамках модели (1)—(6) поставим следующую задачу: для первой фазы найти такой закон изменения во времени концентрации растворенного вещества на границе  $x = 0$ , который обеспечивал бы перемещение границы раздела фаз по заданному закону. Таким образом, закон перемещения границы раздела фаз  $s(t)$  считается известным и требуется определить функции  $f(t)$ ,  $c_1(x, t)$ ,  $c_2(x, t)$  из уравнений (1), (2) и дополнительных условий (3)—(6).

**Метод решения.** Используя метод выпрямления фронтов, преобразуем задачу (1)—(6). Введем замену переменных  $y = \frac{x-s(t)}{L-s(t)}$ ,  $t = t$ , и область задания (2)  $\Omega^+$  отобразим на область  $\Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \leq T\}$ . Тогда уравнение (2) и соответствующие ему дополнительные условия запишем в виде

$$\frac{\partial c_2}{\partial x} = d(t) \frac{\partial}{\partial y} \left( D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \right) + u(y, t) \frac{\partial c_2}{\partial y},$$

$$(y, t) \in \Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \leq T\}, \quad (7)$$

$$c_2|_{t=0} = \varphi_2(y), \quad (8)$$

$$c_2|_{y=0} = c_2^r(t), \quad (9)$$

$$c_2|_{y=1} = \xi(t), \quad (10)$$

где

$$d(t) = \frac{1}{(L-s(t))^2}, \quad u(y, t) = \frac{1-y}{L-s(t)} \frac{ds}{dt}.$$

Аналогично замену переменных  $y = x/s(t)$ ,  $t = t$ , отображает область задания уравнения (1)  $\Omega^-$  на область  $\Omega$ . В результате уравнение (1) и соответствующие ему дополнительные условия запишем в виде

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = r(t) \frac{\partial}{\partial y} \left( D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \right) + q(y, t) \frac{\partial c_1}{\partial y},$$

$$(y, t) \in \Omega = \{0 < y < 1, 0 < t \leq T\}, \quad (11)$$

$$c_1|_{t=0} = \varphi_1(y), \quad (12)$$

$$c_1|_{y=0} = f(t), \quad (13)$$

$$D_1(c_1) \frac{\partial c_1}{\partial y} \Big|_{y=1} = w(t) + \lambda(t) D_2(c_2) \frac{\partial c_2}{\partial y} \Big|_{y=0}, \quad (14)$$

$$c_1|_{y=1} = c_1^r(t), \quad (15)$$

где

$$r(t) = \frac{1}{s^2(t)}; \quad q(y, t) = \frac{y}{s(t)} \frac{ds}{dt};$$

$$w(t) = s(t)(c_2^r(t) - c_1^r(t)) \frac{ds}{dt}; \quad \lambda(t) = \frac{s(t)}{L-s(t)}.$$

Таким образом, в результате применения метода выпрямления фронтов задача (1)—(6) расщепляется на две задачи. При этом каждая из них рассматривается в прямоугольной области  $\Omega$  с фиксированными границами. Поскольку функции  $s(t)$ ,  $d(t)$ ,  $u(y, t)$ ,  $c_2^0(y)$ ,  $c_2^r(t)$ ,  $\xi(t)$  являются заданными, задача (7)—(10) принадлежит к классу прямых задач. Решив прямую задачу (7)—(10), можно определить  $c_2(y, t)$ .

В задаче (11)—(15) известны функции  $r(t)$ ,  $q(y, t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $w(t)$ , а также  $c_2(y, t)$  из решения прямой задачи (7)—(10). Неизвестными являются функции  $c_1(y, t)$  и  $f(t)$ . Следовательно, задача (11)—(15) относится к классу граничных обратных задач [7, 8].

Некоторые вопросы корректности постановок и единственности решений граничных обратных задач Стефана исследованы в работах [9, 10]. Известно, что решения граничных обратных задач не обладают свойством устойчивости к погрешностям исходных данных. Именно с этой особенностью граничных обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. Одним из распространенных методов решения граничных обратных задач является метод регуляризации Тихонова, основная идея которого заключается в сведении обратной задачи к задаче минимизации некоторого функционала с дополнительным стабилизирующим слагаемым [7—10].

Однако необходимо заметить, что при решении обратных задач методом регуляризации Тихонова требуется большой объем вычислений, связанных с процедурой поиска нужного значения параметра регуляризации. Кроме того, при применении глобальной регуляризации обратная задача решается одновременно для всех моментов времени, что приводит к потере оперативности определения решения обратной задачи. В связи с этим для решения обратных задач считается целесообразным применение методов саморегуляризации, основанных на свойствах вязкости вычислительных алгоритмов [7, 8]. В отличие от метода глобальной регуляризации с помощью методов саморегуляризации обратная задача решается последовательно в отдельные моменты времени.

Для решения полученной граничной обратной задачи (11)—(15) используем метод саморегуляризации, основанный на конечно-разностной аппроксимации, используя в качестве параметра регуляризации шаг дискретизации по времени. Сначала построим дискретный аналог задачи (7)—(10). Для этого введем равномерную разностную сетку в области  $\bar{\Omega}$ :

$$\varpi_{h\tau} = \{(y_i, t_j) : y_i = ih, t_j = j\tau, i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m\}.$$

Дискретный аналог задачи (7)—(10) на сетке  $\varpi_{h\tau}$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{c_{2,i}^{j+1} - c_{2,i}^j}{\tau} = d^{j+1} \frac{1}{h} \left[ D_{2,i+1/2}^j \frac{c_{2,i+1}^{j+1} - c_{2,i}^{j+1}}{h} - D_{2,i-1/2}^j \frac{c_{2,i}^{j+1} - c_{2,i-1}^{j+1}}{h} \right] + \\ + u_i^{j+1} \frac{c_{2,i+1}^{j+1} - c_{2,i}^{j+1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1}, j = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$c_{2,i}^0 = \varphi_{2,i}, \quad i = \overline{0, n},$$

$$c_{2,0}^{j+1} = c_2^{r,j+1},$$

$$c_{2,n}^{j+1} = \xi^{j+1},$$

где  $c_{2,i}^{j+1} \approx c_2(y_i, t_{j+1})$ ;  $D_{2,i\pm 1,2}^j \approx D_2(c_2(y_{i\pm 1/2}, t_j))$ ;  $u_i^{j+1} = u(y_i, t_{j+1})$ ;  $\varphi_{2,i} = \varphi(y_i)$ ;  $c_2^{r,j+1} = c_2^r(t_{j+1})$ ;  $\xi^{j+1} = \xi(t_{j+1})$ ;  $d^{j+1} = d(t_{j+1})$ ;  $h = 1/n$  — шаг по переменной  $y$ ;  $\tau = T/m$  — шаг по переменной  $t$ .

Дискретная задача (16) при каждом фиксированном значении  $j$ ,  $j = \overline{0, m-1}$ , представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными являются приближенные значения искомой функции  $c_2(y, t)$  в узлах разностной сетки, т.е.  $c_{2,i}^{j+1}$ ,  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ . Для решения таких систем можно использовать алгоритм Томаса (метод прогонки) [8].

Найдя численное решение задачи (7)—(10), можно перейти к численному решению задачи (11)—(15). Дискретный аналог задачи (11)—(15) на сетке  $\varpi_{h\tau}$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{c_{1,i}^{j+1} - c_{1,i}^j}{\tau} &= r^{j+1} \frac{1}{h} \left[ D_{1,i+1/2}^j \frac{c_{1,i+1}^{j+1} - c_{1,i}^{j+1}}{h} - D_{1,i-1/2}^j \frac{c_{1,i}^{j+1} - c_{1,i-1}^{j+1}}{h} \right] + \\ &+ q_i^{j+1} \frac{c_{1,i+1}^{j+1} - c_{1,i}^{j+1}}{h}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}, \\ c_{1,i}^0 &= \varphi_{1,i}, \quad i = \overline{0, n}, \\ c_{1,0}^{j+1} &= f^{j+1}, \\ D_{1,n}^j \frac{c_{1,n}^{j+1} - c_{1,n-1}^{j+1}}{h} &= w^{j+1} + \lambda^{j+1} D_{2,0}^j \frac{c_{2,1}^{j+1} - c_{2,0}^{j+1}}{h}, \\ c_{1,n}^{j+1} &= c_1^{r,j+1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_{1,i}^{j+1} &\approx c_1(y_i, t_{j+1}); \quad D_{1,i\pm 1,2}^j \approx D_1(c_1(y_{i\pm 1/2}, t_j)); \quad q_i^{j+1} = q(y_i, t_{j+1}); \\ \varphi_{1,i} &= \varphi_1(y_i); \quad r^{j+1} = r(t_{j+1}); \quad c_1^{r,j+1} = c_1^r(t_{j+1}); \\ f^{j+1} &\approx f(t_{j+1}); \quad \lambda^{j+1} = \lambda(t_{j+1}); \quad w^{j+1} = w(t_{j+1}). \end{aligned}$$

Полученную систему разностных уравнений преобразуем к виду

$$a_i c_{1,i-1}^{j+1} - p_i c_{1,i}^{j+1} + b_i c_{1,i+1}^{j+1} = -\theta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (17)$$

$$c_{1,i}^0 = \varphi_{1,i}, \quad i = \overline{0, n}, \quad (18)$$

$$c_{1,0}^{j+1} = f^{j+1}, \quad (19)$$

$$c_{1,n}^{j+1} = \mu^{j+1} c_{1,n-1}^{j+1} + \eta^{j+1}, \quad (20)$$

$$c_{1,n}^{j+1} = c_1^{r,j+1}, \quad (21)$$

где

$$a_i = \frac{\tau r^{j+1} D_{1,i-1,2}^j}{h^2}; \quad b_i = \frac{\tau r^{j+1} D_{1,i+1,2}^j}{h^2} + \frac{\tau q_i^{j+1}}{h}; \quad p_i = a_i + b_i + 1; \quad \theta_i = c_{1,i}^j;$$

$$\eta^{j+1} = \frac{\lambda^{j+1} D_{2,0}^j (c_{2,1}^{j+1} - c_{2,0}^{j+1}) + w^{j+1} h}{D_{1,n}^j}; \quad \mu^{j+1} = 1.$$

Для решения задачи (17)—(21) используем вычислительный алгоритм, предложенный в [11]. При каждом фиксированном значении  $j, j=0, m-1$ , решение задачи (17)—(21) представим в виде

$$c_{1,i+1}^{j+1} = \alpha_{i+1} c_{1,i}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (22)$$

где  $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$  — неизвестные коэффициенты. Запишем аналогичное выражение для  $c_{1,i}^{j+1}$ :  $c_{1,i}^{j+1} = \alpha_i c_{1,i-1}^{j+1} + \beta_i$ . Подставляя выражения для  $c_{1,i}^{j+1}, c_{1,i+1}^{j+1}$  в уравнение (17), получаем следующие формулы для определения коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$ :

$$\alpha_i = a_i / (c_i - \alpha_{i+1} b_i), \quad \beta_i = \frac{(b_i \beta_{i+1} + \theta_i^{j+1})}{(c_i - \alpha_{i+1} b_i)}, \quad i = N-1, N-2, \dots, 1,$$

$$\alpha_n = \mu^{j+1}, \quad \beta_n = \eta^{j+1}.$$

После нахождения коэффициентов  $\alpha_i, \beta_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$  можно определить зависимость между  $c_{1,n}^{j+1}$  и  $c_{1,0}^{j+1}$  в явном виде. Для этого соотношение (22) запишем при  $i = n-1$ :

$$c_{1,n}^{j+1} = \alpha_n c_{1,n-1}^{j+1} + \beta_n. \quad (23)$$

Подставив в (23) выражение  $c_{1,n-1}^{j+1} = \alpha_{n-1} c_{1,n-2}^{j+1} + \beta_{n-1}$ , получим

$$c_{1,n}^{j+1} = \alpha_n \alpha_{n-1} c_{1,n-2}^{j+1} + \alpha_n \beta_{n-1} + \beta_n. \quad (24)$$

Далее, подставляя в (24) выражения для  $c_{1,n-2}^{j+1}$ ,  $c_{1,n-3}^{j+1}$ , ...,  $c_{1,1}^{j+1}$ , получаем формулу, в которой  $c_{1,n}^{j+1}$  выражено через  $c_{1,0}^{j+1}$ :

$$c_{1,n}^{j+1} = c_{1,0}^{j+1} \prod_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \prod_{k=i+1}^n \alpha_k + \beta_n.$$

Отсюда с учетом (19), (21) находим

$$f^{j+1} = \frac{c_{1,n}^{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \prod_{k=i+1}^n \alpha_k - \beta_n}{\prod_{i=1}^n \alpha_i}. \quad (25)$$

Определив  $f^{j+1}$  по формуле (25), можно последовательно найти  $c_{1,1}^{j+1}$ ,  $c_{1,2}^{j+1}$ , ...,  $c_{1,n-1}^{j+1}$ , по рекуррентной формуле (22). При переходе на следующий временной слой описанная процедура вычислений повторяется.

**Результаты численного эксперимента**

$t, c$	$f^t$	$\tilde{f}$	$\tilde{f}$ при $\tau = 1 c$
1	0,782	0,782	0,782
2	0,449	0,449	0,450
3	0,544	0,544	0,587
4	0,798	0,798	0,808
5	0,491	0,491	0,505
6	0,493	0,493	0,528
7	0,798	0,798	0,813
8	0,542	0,542	0,550
9	0,450	0,450	0,474
10	0,783	0,783	0,809
11	0,598	0,598	0,591
12	0,419	0,419	0,472
13	0,753	0,753	0,722
14	0,654	0,654	0,716
15	0,402	0,402	0,446
16	0,710	0,710	0,725

Таким образом, предложенный численный метод позволяет на каждом временном слое последовательно определять распределение концентрации растворенного вещества во второй фазе, концентрацию на границе  $x = 0$  и распределение концентрации в первой фазе.

**Результаты численных расчетов.** Для проверки эффективности предложенного вычислительного алгоритма были проведены численные эксперименты для модельных задач. Схема численного эксперимента состоит в следующем. Для заданных функций  $f(t)$ ,  $s(t)$  последовательно решаются прямые задачи (7)—(10) и (11)—(14). Найденная зависимость  $c_1^r(t) = c_1(1, t)$  принимается в качестве точных данных для численного решения обратной задачи по восстановлению  $f(t)$ .

Первая серия расчетов выполнена с использованием невозмущенных данных, вторая — проведена при наложении на  $c_1^r(t)$  некоторой функции, моделирующей погрешность входных данных:  $\tilde{c}_1^r(t) = c_1^r(t) + \delta\sigma(t)$ , где  $\sigma(t)$  — случайный процесс, моделируемый с помощью датчика случайных чисел,  $\delta$  — уровень погрешности. Расчеты выполнялись на пространственно-временной разностной сетке с шагом  $h = 0,02$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $\tau = 1$  с.

Результаты численного эксперимента для  $s(t) = vt^2$ ,  $D_1(c_1) = D_0(1 + g_1c_1)$ ,  $D_2(c_2) = D_0(1 + g_2c_2)$ ,  $f(t) = 0,6 + 0,2\sin 2t$ ,  $L = 0,6$  м,  $g_1 = 0,01$ ,  $g_2 = 0,02$ ,  $v = 0,002$ ,  $D_0 = 5 \cdot 10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с при использовании невозмущенных и возмущенных входных данных представлены в таблице, где  $t$  — время,  $f^t$  — точные значения функции  $f(t)$ ,  $\tilde{f}$  — вычисленные значения  $f(t)$  при невозмущенных данных,  $\tilde{\tilde{f}}$  — вычисленные значения  $f(t)$  при возмущенных данных. Для возмущенных входных данных использован уровень погрешности  $\delta = 0,5$ .

Как свидетельствуют результаты численного эксперимента, при использовании невозмущенных входных данных искомая функция  $f(t)$  восстанавливается точно при всех расчетных сетках по времени (см. табл. столбцы 2, 3). При использовании возмущенных входных данных искомая функция  $f(t)$  восстанавливается с определенной погрешностью. Однако результаты, полученные при больших шагах во времени ( $\tau = 1$ ), свидетельствуют о том, что увеличение временного шага обеспечивает устойчивость алгоритма как к погрешностям входных данных, так и к вычислительным погрешностям.

## Выводы

Анализ результатов численного эксперимента показывает, что предложенный вычислительный алгоритм можно применять при изучении диффузионных фазовых превращений в твердых телах.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любов Б.Я. Кинетическая теория фазовых превращений. М.: Metallurgiya, 1969.
2. Любов Б.Я. Диффузионные процессы в неоднородных твердых средах. М.: Наука, 1981.
3. Мерер Х. Диффузия в твердых телах. Долгопрудный: Изд. Дом «Интеллект», 2011.
4. Бокштейн Б.С. Диффузия в металлах. М.: Metallurgiya, 1978.
5. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал, 2003.
7. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
8. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2009.
9. Гольдман Н.Л. Классическое и обобщенное решение двухфазной граничной обратной задачи Стефана // Вычислительные методы и программирование, 2002, 3, № 1, с. 133—143.
10. Гольдман Н.Л. Свойства решений граничной обратной задачи Стефана // Дифференциальные уравнения, 2003, 39, № 1, с. 63—69.
11. Гамзаев Х.М. Численное решение одной задачи ненасыщенной фильтрации с подвижной границей // Электрон. моделирование, 2015, 37, № 1, с. 15—24.

Поступила 24.04.17;  
после доработки 08.06.17

REFERENCES

1. Lyubov, B.Ya. (1969), *Kineticheskaya teoriya fazovykh prevrashcheniy* [Kinetic theory of phase transformations], Metallurgiya, Moscow, USSR.
2. Lyubov, B.Ya. (1981), *Diffuzionnyye protsessy v neodnorodnykh tvyordykh sredakh* [Diffusion processes in inhomogeneous solid media], Nauka, Moscow, USSR.
3. Merer, Kh. (2011), *Diffuziya v tvyordykh telakh* [Diffusion in solids], Izdatelskiy dom «Intellect», Dolgoprudny, Russia.
4. Bokshstein, B.S. (1978), *Diffuziya v metallakh* [Diffusion in metals], Metallurgiya, Moscow, USSR.
5. Rubinshtein, L.I. (1967), *Problema Stefana* [The problem of Stefan], Zvaygzne, Riga, USSR.
6. Samarskiy, A.A. and Vabishchevich, P.N. (2003), *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computing heat transfer], Editorial, Moscow, Russia.
7. Alifanov, O.M., Artyukhin, E.A. and Rumyantsev, S.V. (1988), *Ekstremal'nyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods of the solution of incorrect problems], Nauka, Moscow, USSR.
8. Samarskiy, A.A. and Vabishchevich, P.N. (2009), *Chislennyye metody resheniya obratnykh zadach matematicheskoi fiziki* [Numerical methods of the solution of the inverse problems of mathematical physics], Izdatelstvo LKI, Moscow, Russia.
9. Goldman, N.L. (2002), "Classical and generalized solution of the two-phase boundary inverse Stefan problem", *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye*, Vol. 3, no. 1, pp. 133-143.
10. Goldman, N.L. (2003), "Properties of solutions of the inverse Stefan problem", *Differentsialnyye uravneniya*, Vol. 39, no. 1, pp. 66-72.
11. Gamzaev, Kh.M. (2015), "Numerical solution of the problem of unsaturated filtration with a moving boundary", *Elektronnoye modelirovaniye*, Vol. 37, no. 1, pp.15-24.

Received 24.04.17;  
after revision 08.06.17

*Kh.M. Gamzaev*

ABOUT ONE STEFAN INVERSE PROBLEM  
FOR PHASE TRANSFORMATIONS IN SOLIDS

The diffusion phase transformation process described by a nonlinear system of partial differential equations with a moving boundary has been considered. The inverse problem is formulated to determine the solute concentration on the external surface of the volume under consideration, which ensures the moving boundary displacement according to a given law. Applying the methods of fronts rectification and difference approximation, the problem posed is reduced to two difference problems. A computational algorithm is proposed for solving the obtained difference problems.

*Key words: diffusion phase transformation, moving phase boundary, forward rectification method, boundary inverse problem, difference method.*

*ГАМЗАЕВ Ханлар Мехвали оглы, д-р техн. наук, профессор кафедры «Общая и прикладная математика» Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, который окончил 1976 г. Область научных исследований — математическое моделирование, вычислительная гидродинамика, численные методы.*





УДК 621.391:519.216

**Ю.Н. Минаев**, д-р техн. наук, **Н.Н. Гузий**, канд. техн. наук

Национальный авиационный университет  
(Украина, 03057, Киев, пр-кт космонавта Комарова, 1,  
тел. (044) 2495454, e-mail: min\_14@ukr.net),

**О.Ю. Филимонова**, канд. техн. наук, **Ю.И. Минаева**, канд. техн. наук

Киевский национальный университет строительства и архитектуры  
(Украина, 03037, Киев, Воздухофлотский пр-кт, 31,  
тел. (044) 2486427, 2425462, e-mail: filimonova@nm.ru; jumin@big-mir.net)

### **Анализ самоподобия многомерных временных рядов на основе методов интеллектуального анализа данных**

Предложены методы вычисления показателя Херста для одномерного и многомерного временных рядов (ВР) на основе главных диагоналей тензорных моделей ВР. Показано, что сложность проблемы обуславливает совместное применение нескольких математических теорий, в частности тензорный и многомерный матричный анализ. Приведены примеры применения предложенных методов.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* тензор, многомерный временной ряд, интеллектуальный анализ данных, 3D матрица, матричная развертка, самоподобие, параметр Херста.

Запропоновано методи обчислення показника Херста для одновимірних та багатовимірних часових рядів (ЧР) на основі головних діагоналей тензорних моделей ЧР. Показано, що складність проблеми зумовлює застосування декількох математичних моделей, зокрема тензорний і багатовимірний матричний аналіз. Наведено приклади використання запропонованих методів.

*К л ю ч о в і с л о в а:* тензор, багатовимірний часовий ряд, інтелектуальний аналіз даних, 3D матриця, матрична розвертка, самоподібність, параметр Херста.

Среди всех временных рядов (ВР) [1] многомерные (многокомпонентные, т.е. компоненты не связаны условием ортогональности) временные ряды (МВР) наименее изучены. Однако появление новых задач заставляет обращаться к поиску новых методов и моделей для их решения. Анализ МВР имеет ряд особенностей, которые отличают его от анализа числовых последовательностей. Основные из них следующие:

многомерный и многокомпонентный ВР имеют определенные отличия, так как понятие мерности предполагает ортогональный базис компонент, при

© Ю.Н. Минаев, Н.Н. Гузий, О.Ю. Филимонова, Ю.И. Минаева, 2017

этом многокомпонентность такого ограничения не предполагается, т.е. может быть неортогональный базис (в частности, косоугольный);

многомерные ВР относятся к объектам, имеющим сверхбольшие объемы, что обуславливает применение тензорных декомпозиций, которые не только аппроксимируются тензорами низких порядков (сокращение размерности), но и являются источниками скрытых знаний.

В некоторых работах [2] утверждается, что высокопорядковые тензоры (под которыми понимают мультимерные массивы) позволяют реализовать фундаментальный сдвиг парадигмы исследования к моделям, по существу полиномиальным, чья исключительность, в отличие от матричных методов, гарантирована естественными условиями.

Общая тенденция исследователей многомерных высокообъемных, нередко весьма зашумленных, данных такая: от матрицы к тензорам. Ранние методы многомерного анализа данных основаны на переформатировании тензора данных (многомерного массива) в матрицу и использовании методов, разработанных для классического  $2D$  анализа. Такой «выравнивающий» подход к данным и жесткие ограничения, присущие  $2D$  анализу, не всегда удовлетворяют требованиям анализа мультимерных сверхбольших данных, однако для большинства реальных прикладных задач, особенно для тех, где требуется качественная оценка, вполне применимы. В работе [2] показано, что тензорные декомпозиции — это не только и не столько точные матричные разложения на множители с дополнительными приложениями — мультилинейная алгебра значительно более богата структурно, чем линейная алгебра.

Современные нотации и соглашения основаны на том, что тензор порядка  $N$  обозначается  $A \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ , а данные —  $a_{i_1, i_2, \dots, i_N}$ . Тогда вектор  $N \times 1$  является тензором первого порядка, а  $N \times M$  — матрицей-тензором второго порядка. Подтензоры — части исходного тензора созданы с использованием только фиксированного подмножества индексов. Векторзначные подтензоры называются волокнами и определяются фиксированием индексов по одному, а матрично-значные подтензоры называются кусками (слайсами) и определяются фиксированием по два. При обработке тензора часто требуется их переформатирование (восстановление формы). Восстановление тензора в матрицу называется матричным раскрытием. В работе [2] приведены основные и вспомогательные нотации, касающиеся тензоров и операций над ними. Классик тензорного анализа Г. Крон утверждает, что между тензором и матрицей такая же разница, как между линией и ее проекцией: линия одна, но проекций линии много.

Многомерные пространственные матрицы (МПМ), наиболее полное описание которых появилось в русскоязычной литературе еще в 60-е годы

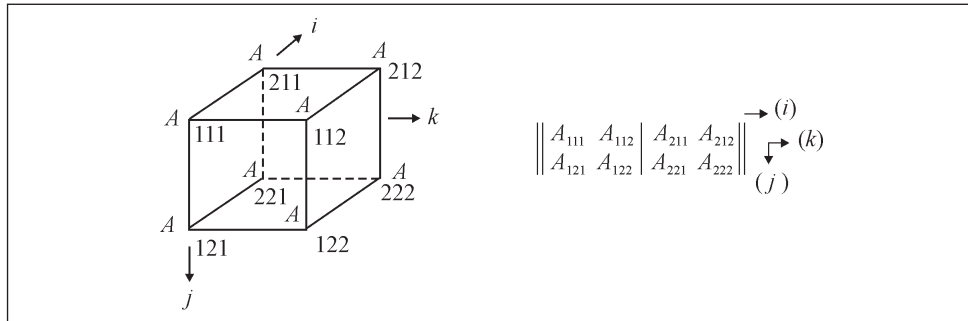


Рис. 1. Графическое изображение понятия «сечение ориентации» [3]

19-го столетия, заложили основу многомерного анализа данных. В работе [3] дано определение сечения ориентации  $i$  как совокупности элементов матрицы с фиксированным значением индекса. Все  $n$  сечений ориентации  $i$  в матрице параллельны друг другу и являются обычными двумерными матрицами  $n$ -го порядка (рис. 1).

Применение многомерных матриц (ММ) для анализа многомерных данных рассмотрено в работах [4, 5]. Так, в работе [5] доказано, что тензоры в общем случае могут быть представлены как ММ или, наоборот, некоторые операции декартова и общего тензоров произведений могут быть выполнены как многомерные матричные операции. Тем не менее, многие аспекты многомерной математической матрицы и тензорного анализа не являются взаимозаменяемыми.

**Современное состояние исследований, основные определения и математический аппарат.** В настоящее время анализ МВР направлен на решение проблемы многомерности с использованием тензорного представления данных [6], ММ [3] и поиска скрытых знаний на основе методов интеллектуального анализа данных (ИАД), реализуемых, в частности, с применением тензорных декомпозиций [7, 8]. В работах [9, 10] рассмотрено использование инвариантов тензоров для анализа МВР.

В работах [11, 12] тензор рассматривается как суперматрица в определенной координатной системе. Допустим, задан одномерный ВР  $\mathbf{X}(t) = \{x(t_i)\}$ ,  $i=1, N$ , и последовательность его фрагментов  $\{\mathbf{X}_j^{(t)}(t_i)\}$ ,  $i=1, I$ ,  $j=1, f$ . Каждый фрагмент состоит из окон  $x(t_i)$ ,  $i=1, I_x$  (см. рис. 1). С помощью процедуры матрицизации окно ВР представлено в виде тензора второго порядка (матрицей)  $m \times n$ , т.е.  $x(t_i) \rightarrow T_x = \text{reshape}(x(t_i), m, n)$ ,  $m \cdot n = I_x$ . В общем случае  $m \neq n$ , однако  $m = n$  предпочтительно с точки зрения вычислительной сложности. Рассматривается множество входных данных — векторы  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , которые могут быть также  $2D$  тен-

зорами  $\mathbf{X}(t) = \{X_{ij}\}_{i=1, j=1}^{mn}$ , в частности, они могут быть представлены 3D матрицей при использовании процедуры `reshape()`.

В [11] разработаны основные концепции обобщенных ММ и обобщенных матричных операций, где элементарная матрица является минимальной, имеющей одно или два измерения (строки и столбцы).

**Нотации и основные операции в ММ.** Обозначим  $A$   $d$ -мерную матрицу, число элементов которой равно  $m_k, k=1, 2, \dots, d$ . Тогда ММ  $A$  имеет порядок  $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_d$ . Пусть  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_d}$  —  $\{i_1, i_2, \dots, i_d\}$ -й элемент  $d$ -мерной матрицы  $A$ . Для простоты обработки результатов допустим, что матрица  $A$  порядка  $m_1 \times m_2 \times m_3$  — это массив  $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$  скаляров, размещенных в  $m_1$  столбцов,  $m_2$  строк и  $m_3$  слоев. Таким образом, 3D матрица размерности  $m_1 \times m_2 \times m_3$  состоит из 2D матриц размерности  $m_1 \times m_2$ , размещенных в массиве размерностью  $m_3$ . Следовательно, матрицу  $A$  можно представлять, используя нотацию Матлаб, в форме массива матриц  $A(:, :, i_3)$  размерностью  $m_1 \times m_2$  и элементов  $A(:, :, i_3)$  в следующем виде:

$$A(:, :, i_3) = \begin{bmatrix} a_{11i_3} & a_{12i_3} & \cdots & a_{1m_2i_3} \\ a_{21i_3} & a_{22i_3} & \cdots & a_{2m_2i_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m_11i_3} & a_{m_12i_3} & \cdots & a_{m_1m_2i_3} \end{bmatrix}, \quad i_3 = 1, 2, \dots, m_3.$$

Базовые операции на ММ в современной нотации наиболее полно изложены в работах [3, 4, 11].

**Тензор-многомерный массив.** В работе [12] использована общепринятая в тензорном анализе нотация, где тензор  $p$ -го порядка с индексами  $p$  может быть представлен как многомерный массив данных [13—15] и записан в виде  $A = (a_{i_1, i_2, i_3}) \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ , матрица считается тензором второго порядка, а вектор — тензором первого порядка. Тензор третьего порядка может быть изображен как «куб» данных. Ориентация тензора высшего порядка не уникальна, однако она удобна, чтобы ссылаться на «слайс»-тензор как на тензор, сформированный посредством сохранения последней индексной константы. Например, если  $A = (a_{i_1, i_2, i_3})$  — тензор третьего порядка,  $k$ -й слайс в нотации Матлаб имеет вид  $A(:, :, k)$  (рис. 2) [13—16].

Высокопорядковая сингулярная декомпозиция (HOSVD) тензора  $A \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_d}$  включает обработку матрицы процедурой SVD на уровне своих модальных раскрытий  $A(1), \dots, A(d)$ . Результат — представление  $A$  в виде суммы  $\text{rank}-1$  тензоров. 3D массив может быть представлен вырезками (слайсами), каждый слайс — матрица (2D массив), каждая матрица — множество данных.

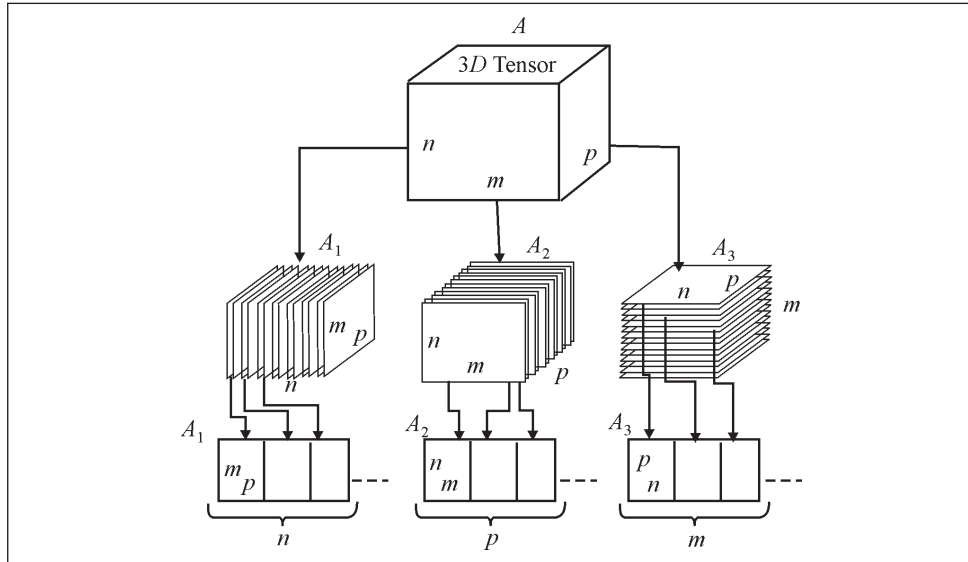


Рис. 2. Матрицизация тензора третьего порядка в матрицу из трех измерений:  $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times (m \cdot p)}$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n \cdot m)}$ ,  $A_3 \in \mathbb{R}^{m \times (p \cdot n)}$  — первый, второй и третий способы матрицизации тензора  $A$  [12]

**Обобщенный алгоритм вычисления главной диагонали (следа) фрагмента МВР.** Для определения диагонали 3D тензора, моделирующего МВР используем два подхода: покомпонентную процедуру и учет всех компонент МВР:

1. Представление отдельной компоненты окна МВР в виде 2D тензора, рассматриваемого как фронтальный слайс —  $x(:, :, j), j = 1, J$ ; формирование 3D тензора окна  $\Xi^{(f)} = \{x(:, :, 1 | \dots | x(:, :, J), f = 1, F\}$ ,  $F$  — число тензор-окон фрагмента МВР; вычисление диагонали тензор-окна ( $\Xi^{(f)}$ ).

2. На основании таблицы измерений компонент МВР при помощи оператора reshape изначально формируется 3D тензор окна  $\Xi^{(f)} = \{x(:, :, 1 | \dots | x(:, :, J), f = 1, F\}$  и выполняется повторение подхода 1:

$$\text{reshape}(b, m, n) = (b(1:m) | b(m+1:2m) | \dots | b((n-1)m+1:mn)).$$

**Способы вычисления диагонали (следа) одномерного ВР.**

**И способ (базовый).** Диагональ (след) МВР вычисляется на основании диагонали (следа) отдельных компонент МВР. Одномерный (однокомпонентный) ВР  $\mathbf{X}^{(t)} = \{x(t_i)\}, i = 1, N$  задан в виде последовательности его фрагментов  $\{X_j^{(t)}(t_i)\}, i = 1, I, j = 1, f$ , где  $j$  — номер фрагмента; каждый фрагмент состоит из окон  $x(t_i), i = 1, I_x$  (рис. 3).



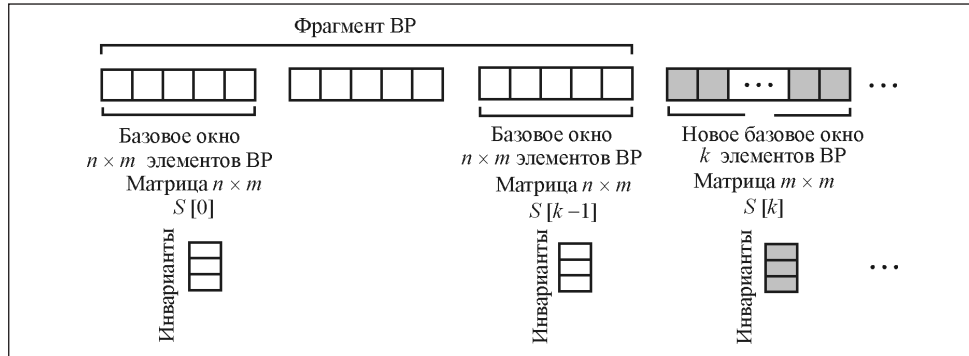


Рис. 3. Представление фрагмента ВР

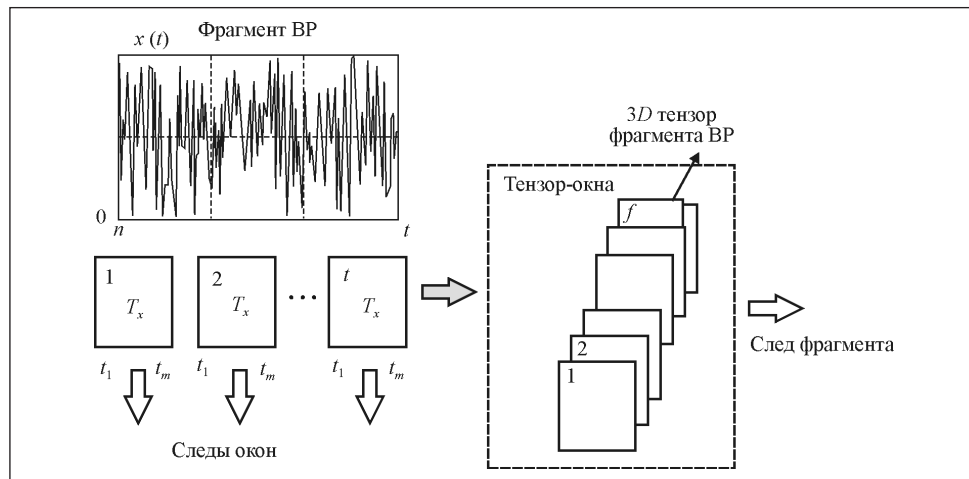


Рис. 4. Графическое представление алгоритма построения следа (диагонали) ВР для отдельного фрагмента и группы фрагментов

#### А л г о р и т м 1.

1. Выбираем размер окна  $x(t_i)$  ВР. Здесь  $i$  — порядковый номер элемента ВР в окне,  $i=1, I_x$ , где  $I_x$  — число элементов ВР в окне,  $I_x = m \cdot n$ ; в общем случае  $m \neq n$ , для прозрачности предпочтение отдаем  $m = n$ .

2. При помощи процедуры матрицизации окно ВР преобразуем в 2D тензор (матрица  $m \times n$ ), т.е.  $x(t_i) = [x(t_1), \dots, x(t_{I_x})] \rightarrow T_x = \text{reshape}(x(t_i), m, n)$ .

3. Формируем фрагмент ВР, состоящий из  $f$  окон:  $\{X_j^{(t)}(t_i)\}$ ,  $i=1, I_x$ ,  $j=1, f$ .

4. Формируем множество тензор-окна фрагмента:  $\mathbb{T}_X = \{(1)T_x, (2)T_x, \dots, (f)T_x\}$ .

5. Если  ${}^{(j)}T_x \subset \mathbb{T}_x$ , — квадратная матрица ( $m \times m$ ), то вычисляем диагональ  ${}^{(j)}T_x : z^{(j)} = \text{diag}({}^{(j)}T_x)/m$ .

П с п о с о б. Тензор-окна расположены в пространстве, как показано на рис. 3 и 4.

Рассматриваем тензор-окна, построенные для  $m \cdot n$  элементов ВР, при этом каждое из них рассматривается как фронтальный слайс, т.е.  ${}^{(1)}T_x = \mathbb{T}_x(:, :, 1)$ ,  ${}^{(2)}T_x = \mathbb{T}_x(:, :, 2)$ , ...,  ${}^{(f)}T_x = \mathbb{T}_x(:, :, f)$ . Если число тензор-окон равно трем, то тензор-фрагмент имеет вид  $\mathbb{T}_x = \langle \mathbb{T}_x(:, :, 1) | \mathbb{T}_x(:, :, 2) | \mathbb{T}_x(:, :, 3) \rangle$  (см. рис. 3, 4).

А л г о р и т м 2.

1. Формируется множество тензор-фрагментов:  $\mathbb{T}_x = \{ {}^{(1)}\mathbb{T}_x, {}^{(2)}\mathbb{T}_x, \dots, {}^{(f)}\mathbb{T}_x \}$ .

2. По правилам выполнения операций ММ вычисляется диагональ 3D матрицы  ${}^{(j)}\mathbb{T}_x : z^{(j)} = \text{diag}({}^{(j)}\mathbb{T}_x)$ .

В алгоритме 2 используются тензор-окна, построенные для  $m \cdot n$  элементов ВР. Каждое тензор-окно рассматривается как фронтальный слайс, т.е.  ${}^{(1)}T_x = \mathbb{T}_x(:, :, 1)$ ,  ${}^{(2)}T_x = \mathbb{T}_x(:, :, 2)$ , ...,  ${}^{(f)}T_x = \mathbb{T}_x(:, :, f)$ . Если, например, число тензор-окон равно трем, то тензор-фрагмент имеет вид  $\mathbb{T}_x = \langle \mathbb{T}_x(:, :, 1) | \mathbb{T}_x(:, :, 2) | \mathbb{T}_x(:, :, 3) \rangle$  (рис. 5).

Многомерный ВР, как правило, представляется в виде таблицы. Стилизованное графическое представление алгоритма для многомерного ВР, заданного таблично, показано на рис. 5.

А л г о р и т м 3.

1. Рассматривается возможность покомпонентного анализа ВР и интегрального учета всех компонент.

2. Формирование тензор-окон. В случае МВР — это 3D матрицы. Каждая 3D матрица в соответствии с [3, 6] представляется в виде системы 2D матриц, которая, в свою очередь, используется для вычисления инвариантов 2D матриц, моделирующих исходные 3D матрицы тензор-окон ВР.

3. Вычисление инвариантов 2D матриц, моделирующих исходные 3D матрицы тензор-окон [3, 13]. Построение диагонали, вычисление следа.

Вычисление следа (диагонали) МВР можно выполнить двумя способами:

1) сформировать тензор-окна для каждой компоненты МВР, из одноименных тензор-окон компонент, рассматриваемых как фронтальные слайсы, сформировать 3D тензор. На основании полученной совокупности 3D тензоров, образующих фрагмент, вычислить следы 3D тензоров, моделирующих одноименные многомерные тензор-окна;

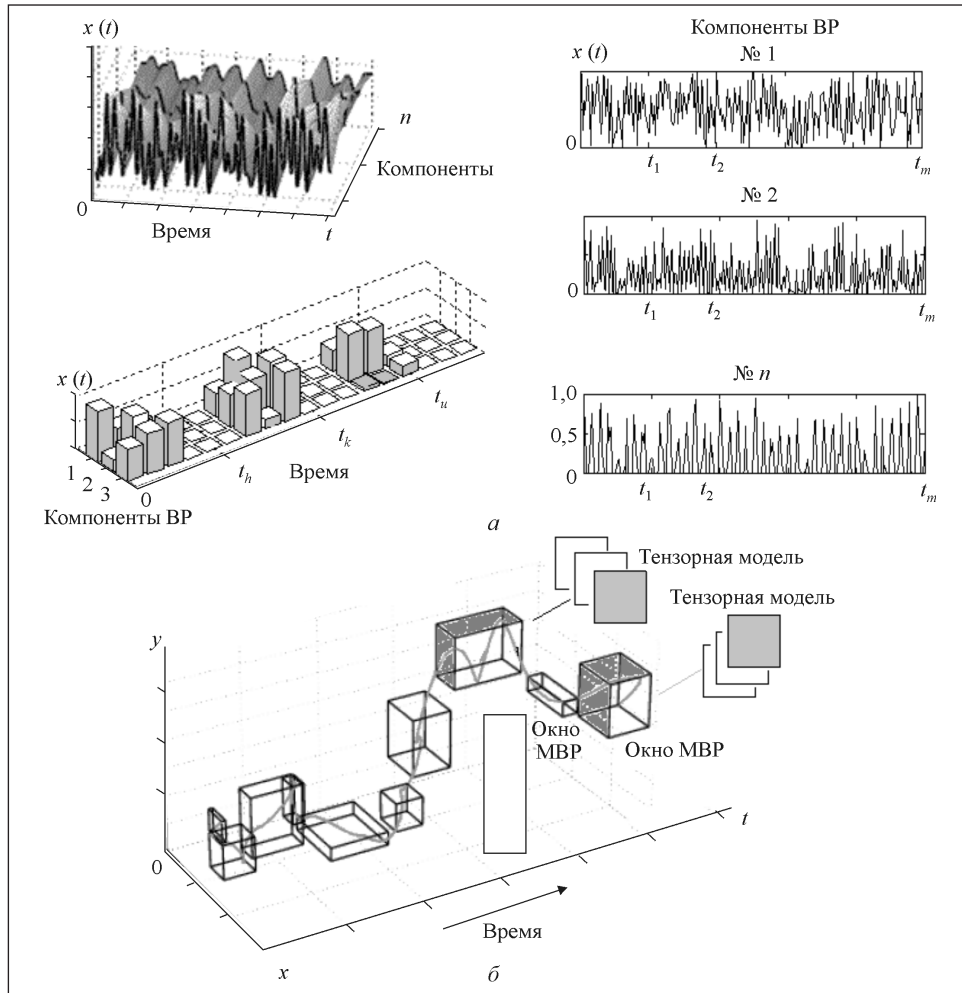


Рис. 5. Стилизованное представление многокомпонентного (а) и многомерного (б) ВР

2) таблицу МВР (где строки — компоненты ВР, столбцы — последовательные элементы одной компоненты) представить в виде тензора второго ранга с размерностью  $k \times f$  (рис. 6).

Тензор-окно, например № 1 (рассматриваемое здесь как фрагмент), преобразуем в  $3D$  тензор при помощи процедуры  $\text{reshape}(d(:, 1:f), i_1, i_2, i_3)$ ,  $i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 = k \cdot f$ . На основании полученной совокупности  $3D$  тензоров, включающей элементы МВР (1 —  $1:f$ ; 2 —  $2f:3f$ ;  $k-f(k-1):fk$ ), образующих окно-фрагмент, вычисляем следы  $3D$  тензоров, моделирующих одноименные многомерные тензор-окна. Для полученной совокупности следов вычисляют тренд.

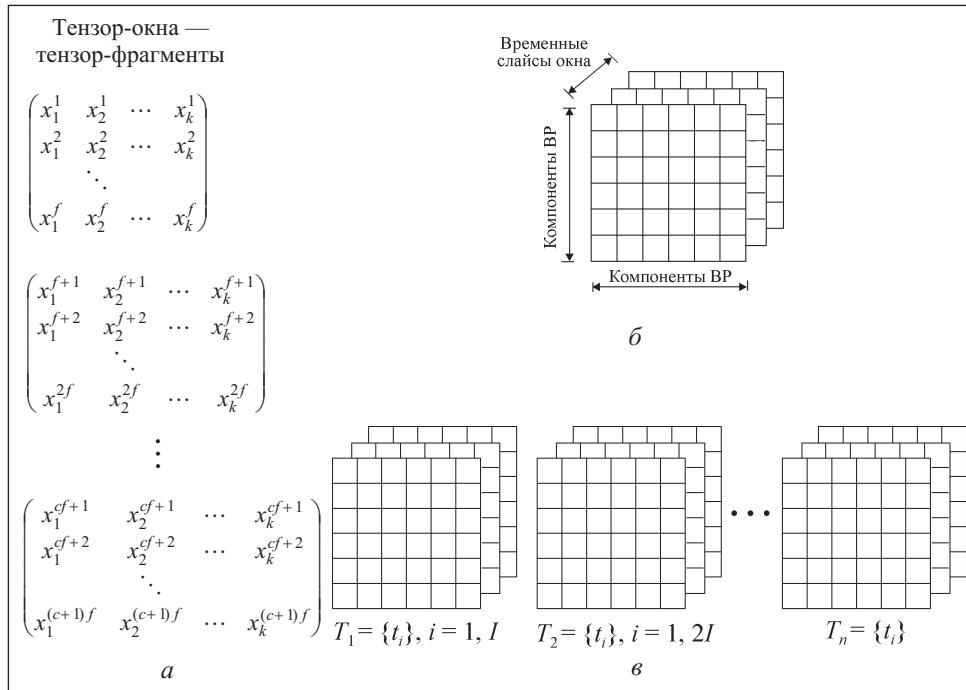


Рис. 6. Формирование тензор-окон многомерного ВР (а, б) и фрагмент (совокупность окон) МВР (в)

**Пример.** Фрагмент МВР, представленного покомпонентно

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1	0.6895	0.7631	0.8598	0.3423	0.9920
2	0.9231	0.9751	0.1732	0.2338	0.6338
3	0.5832	0.4397	0.7653	0.6545	0.0168
4	0.9875	0.3303	0.9185	0.2614	0.5155
5	0.5070	0.3012	0.4902	0.4496	0.4052
...	...	...	...	...	...
70	0.1298	0.7048	0.3867	0.9850	0.5638
71	0.6268	0.8461	0.2434	0.4991	0.2998
72	0.4306	0.5863	0.5993	0.4573	0.3479
73	0.9180	0.0469	0.8406	0.5741	0.7940
74	0.9780	0.8439	0.6605	0.9409	0.1266
75	0.2893	0.5868	0.6538	0.2483	0.8559
...	...	...	...	...	...

МВР (1:30, 1:5) представляется в виде 3D массива (тензора) фронтальными слайсами в виде

$$z = \text{reshape} \left( \underbrace{y(1:30,1:5)}_{2D \text{ тензор}}, \underbrace{10,5,3}_{3D \text{ тензор}} \right).$$

МВР  $\mathbf{X}(t)$ , где  $t = \{t_i\}$ ,  $i=1, I^t$ , рассматривается как совокупность окон равной длины  $\{X^{(j)}(t), j=1, J^x$ , т.е. окна  $X^{(k)}(t)$  и  $X^{(f)}(t)$  анализируются во временном интервале  $t_k + \Delta_t, t_f + \Delta_t$ , где  $t_f + \Delta_t$ , где  $\Delta_t$  — целое число,  $\Delta_t \in [1, t^\Delta]$ . С помощью процедуры  $\text{reshape}()$  оконное множество значений ВР преобразуется в тензор второго порядка (матрицу), т.е.

$$X^{(k)}(t) = \{x^k(t_k), \dots, x^k(t_k + t^\Delta)\} \xrightarrow{\text{reshape}()} \Xi_k,$$

$$\mathbf{X}(t) = \{\cup X^k(t)\}_{k=1, K} \rightarrow \{\cup \Xi_k\}_{k=1, K}.$$

Следует заметить, что для фронтальных слайсов

$$\begin{aligned} \Xi_k &\in \{X_k(:, :, 1), X_k(:, :, 2), X_k(:, :, 3)\} \cdot (t) = \\ &= \{\Xi_1 \cup \Xi_2 \cup \Xi_3 \cup \Xi_4 \cup \Xi_5\}, \end{aligned}$$

$$\Xi_1 = (x1(:, :, 1) | x1(:, :, 2) | x1(:, :, 3)), \quad \Xi_2 = (x2(:, :, 1) | x2(:, :, 2) | x2(:, :, 3)),$$

$$\Xi_3 = (x3(:, :, 1) | x3(:, :, 2) | x3(:, :, 3)), \quad \Xi_4 = (x4(:, :, 1) | x4(:, :, 2) | x4(:, :, 3)),$$

$$\Xi_5 = (x5(:, :, 1) | x5(:, :, 2) | x5(:, :, 3)).$$

Фрагмент оконного множества

	$x1(:, :, 1)$	$x1(:, :, 2)$	$x1(:, :, 3)$
$\Xi_1$	0.6895 0.1449 0.6045 0.4879	0.1672 0.5079 0.7107 0.9980	0.0589 0.6970 0.6268 0.0870
	0.9231 0.9927 0.2358 0.7426	0.5027 0.0576 0.5180 0.2818	0.7858 0.7868 0.4306 0.7917
	0.5832 0.7770 0.5819 0.4802	0.5805 0.9425 0.7230 0.6876	0.1320 0.2649 0.9180 0.3560
	0.9875 0.9354 0.8581 0.0606	0.4318 0.5271 0.8932 0.3734	0.0710 0.3102 0.9780 0.7086
	0.5070 0.1556 0.5169 0.4909	0.4173 0.8845 0.3964 0.1263	0.4616 0.8613 0.2893 0.1283
	0.7966 0.7070 0.0291 0.5231	0.3101 0.7336 0.8704 0.5776	0.4490 0.7795 0.7620 0.2279
	0.6413 0.3231 0.5137 0.8582	0.3707 0.0866 0.7570 0.4128	0.9223 0.1298 0.9877 0.3926

$\Xi_2$	$x_2(:, :, 1)$				$x_2(:, :, 2)$				$x_2(:, :, 3)$			
	0.7631	0.8687	0.5750	0.3552	0.8153	0.1448	0.4369	0.5825	0.7913	0.7292	0.8461	0.7464
	0.9751	0.4165	0.7142	0.0276	0.7297	0.8133	0.7631	0.8232	0.0919	0.8905	0.5863	0.1650
	0.4397	0.8309	0.3918	0.6421	0.9323	0.7426	0.2520	0.2544	0.3377	0.3328	0.0469	0.0683
	0.3303	0.3578	0.8286	0.2724	0.4751	0.3310	0.5074	0.6670	0.8478	0.7381	0.8439	0.2955
	0.3012	0.4458	0.3286	0.7130	0.1035	0.9775	0.7023	0.6310	0.9491	0.7906	0.5868	0.1658
	0.1630	0.5707	0.6479	0.9785	0.1838	0.6796	0.0140	0.6321	0.2033	0.3875	0.5120	0.3029
	0.0474	0.1764	0.1897	0.6594	0.4516	0.7768	0.1880	0.1120	0.6529	0.7048	0.4784	0.7988
$\Xi_3$	$x_3(:, :, 1)$				$x_3(:, :, 2)$				$x_3(:, :, 3)$			
	0.8598	0.1052	0.1114	0.3929	0.7270	0.1376	0.5843	0.9901	0.7790	0.9195	0.2434	0.0952
	0.1732	0.0282	0.9831	0.5878	0.8924	0.3815	0.9525	0.4822	0.1829	0.6896	0.5993	0.9097
	0.7653	0.5814	0.5771	0.2004	0.5099	0.4241	0.3491	0.5890	0.7854	0.9526	0.8406	0.7774
	0.9185	0.8204	0.1377	0.9631	0.4529	0.5479	0.6778	0.9300	0.0258	0.8585	0.6605	0.1498
	0.4902	0.7496	0.3934	0.2325	0.8717	0.7656	0.0231	0.1408	0.4074	0.8220	0.6538	0.1137
	0.8085	0.1229	0.7951	0.2180	0.2750	0.0505	0.8166	0.1441	0.9064	0.4774	0.7468	0.2218
	0.1977	0.6343	0.3812	0.8407	0.8965	0.3519	0.6991	0.7191	0.3304	0.3867	0.0948	0.7138
$\Xi_4$	$x_4(:, :, 1)$				$x_4(:, :, 2)$				$x_4(:, :, 3)$			
	0.3423	0.4668	0.0443	0.7789	0.3295	0.6082	0.4407	0.6204	0.7298	0.3307	0.4991	0.3597
	0.2338	0.5328	0.9233	0.2928	0.4158	0.4363	0.2683	0.5547	0.9731	0.1988	0.4573	0.5085
	0.6545	0.6163	0.4151	0.2229	0.1904	0.4328	0.5681	0.5961	0.7805	0.0343	0.5741	0.1904
	0.2614	0.4092	0.0028	0.5484	0.8312	0.6332	0.1248	0.8871	0.2234	0.3744	0.9409	0.4164
	0.4496	0.4110	0.3366	0.8640	0.8687	0.5961	0.7382	0.9402	0.6959	0.7294	0.2483	0.9306
	0.6507	0.6786	0.2236	0.4566	0.6178	0.3361	0.8488	0.8178	0.7144	0.3671	0.6909	0.4906
	0.1822	0.9305	0.5791	0.7126	0.1161	0.2109	0.9824	0.1459	0.1494	0.9850	0.4469	0.7147
$\Xi_5$	$x_5(:, :, 1)$				$x_5(:, :, 2)$				$x_5(:, :, 3)$			
	0.3423	0.4668	0.0443	0.7789	0.3022	0.0067	0.0795	0.1351	0.5495	0.8603	0.2998	0.0820
	0.2338	0.5328	0.9233	0.2928	0.7691	0.4758	0.9958	0.0161	0.8695	0.3785	0.3479	0.5133
	0.6545	0.6163	0.4151	0.2229	0.6537	0.7989	0.9373	0.9839	0.3677	0.1947	0.7940	0.3667
	0.2614	0.4092	0.0028	0.5484	0.3155	0.4621	0.9875	0.6723	0.4132	0.6364	0.1266	0.4449
	0.4496	0.4110	0.3366	0.8640	0.6521	0.5290	0.6313	0.2648	0.4026	0.2903	0.8559	0.3312
	0.6507	0.6786	0.2236	0.4566	0.3849	0.0016	0.0949	0.1519	0.5305	0.9379	0.5748	0.0121
	0.1822	0.9305	0.5791	0.7126	0.3357	0.2380	0.9795	0.4718	0.0096	0.5638	0.1426	0.2812

Фрагмент реального МВР, состоящего из пяти тензор-окон

Окно № 1 $x_1$				Окно № 2 $x_2$				Окно № 3 $x_3$			
$x_1(:, :, 1) =$				$x_2(:, :, 1) =$				$x_3(:, :, 1) =$			
0.39	0.63	0.73	0.88	0.67	0.39	0.64	0.05	0.44	0.75	0.25	0.83
0.92	0.35	0.64	0.86	0.76	0.48	0.64	0.55	0.04	0.21	0.13	0.15
0.46	0.31	0.27	0.60	0.68	0.72	0.05	0.64	0.84	0.09	0.81	0.90
0.66	0.90	0.73	0.48	0.33	0.58	0.99	0.21	0.78	0.22	0.61	0.82
0.52	0.11	0.89	0.01	0.98	0.22	0.39	0.23	0.86	0.16	0.51	0.55
0.98	0.30	0.51	0.28	0.51	0.23	0.30	0.07	0.71	0.64	0.01	0.99
0.90	0.85	0.55	0.57	0.82	0.36	0.25	0.55	0.59	0.64	0.03	0.56

x1 (:, :, 2) =				x2 (:, :, 2) =				x3 (:, :, 2) =			
0.83	0.41	0.30	0.31	0.35	0.55	0.45	0.91	1.00	0.64	0.07	0.40
0.70	0.21	0.88	0.90	0.06	0.68	0.77	0.55	0.95	0.72	0.60	0.60
0.34	0.29	0.75	0.70	0.65	0.51	0.26	0.45	0.17	0.88	0.73	0.97
0.40	0.26	0.33	0.76	0.97	0.83	0.94	0.76	0.37	0.89	0.52	0.87
0.54	0.31	0.26	0.27	0.49	0.82	0.46	0.69	0.35	0.91	0.90	0.73
0.19	0.55	0.73	0.61	0.41	0.22	0.49	0.60	0.82	0.67	0.90	0.37
0.43	0.83	0.44	0.17	0.98	0.09	0.73	0.12	0.77	0.66	0.45	0.83
x1 (:, :, 3) =				x2 (:, :, 3) =				x3 (:, :, 3) =			
0.15	0.61	0.26	0.24	0.39	0.53	0.21	0.10	0.51	0.10	0.72	0.64
0.68	0.41	0.03	0.37	0.68	0.27	0.58	0.78	0.91	0.38	0.52	0.59
0.22	0.62	0.64	0.96	0.81	0.10	0.25	0.75	0.14	0.14	0.50	0.08
0.76	0.43	0.82	0.47	0.10	0.55	0.65	0.15	0.42	0.85	0.17	0.96
0.07	0.42	0.78	0.53	0.28	0.94	0.01	0.02	0.92	0.06	0.69	0.04
0.24	0.72	0.48	0.05	0.04	0.14	0.01	0.05	0.88	0.38	0.59	0.55
0.35	0.88	0.84	0.62	0.45	0.54	0.73	0.38	0.77	0.27	0.51	0.86
Окно № 4 x4				Окно № 5 x5							
x4 (:, :, 1) =				x5 (:, :, 1) =							
0.21	0.85	0.86	0.69	0.40	0.98	0.91	0.78				
0.01	0.41	0.46	0.79	0.44	0.71	0.16	0.54				
0.44	0.32	0.60	0.95	0.99	0.75	0.45	0.83				
0.20	0.61	0.79	0.91	0.50	0.99	0.57	0.07				
0.06	0.60	0.64	0.89	0.98	0.02	0.48	0.80				
0.91	0.94	0.70	0.61	0.35	0.20	0.11	0.62				
0.93	0.28	0.61	0.14	0.22	0.95	0.57	0.53				
x4 (:, :, 2) =				x5 (:, :, 2) =							
0.87	0.56	0.22	0.55	0.05	0.78	0.18	0.06				
0.43	0.41	0.03	0.42	0.91	0.45	0.06	0.12				
0.79	0.14	0.10	0.64	0.48	0.56	0.32	0.53				
0.94	0.42	0.06	0.54	0.28	0.98	0.18	0.88				
0.75	0.41	0.71	0.75	0.07	0.80	0.63	0.54				
0.73	0.42	0.53	0.03	0.79	0.65	0.50	0.47				
0.66	0.63	0.68	0.23	0.04	0.86	0.72	0.00				
x4 (:, :, 3) =				x5 (:, :, 3) =							
0.71	0.72	0.98	0.22	0.70	0.07	0.36	0.07				
0.37	0.27	0.82	0.57	0.61	0.63	0.68	0.23				
0.58	0.73	0.70	0.16	0.26	0.16	0.61	0.72				
0.90	0.79	0.15	0.39	0.41	0.88	0.09	0.65				
0.75	0.86	0.71	0.23	0.92	0.43	0.72	0.20				
0.02	0.09	0.53	0.76	0.75	0.90	0.78	0.42				
0.50	0.20	0.92	0.12	0.10	0.98	0.55	0.18				

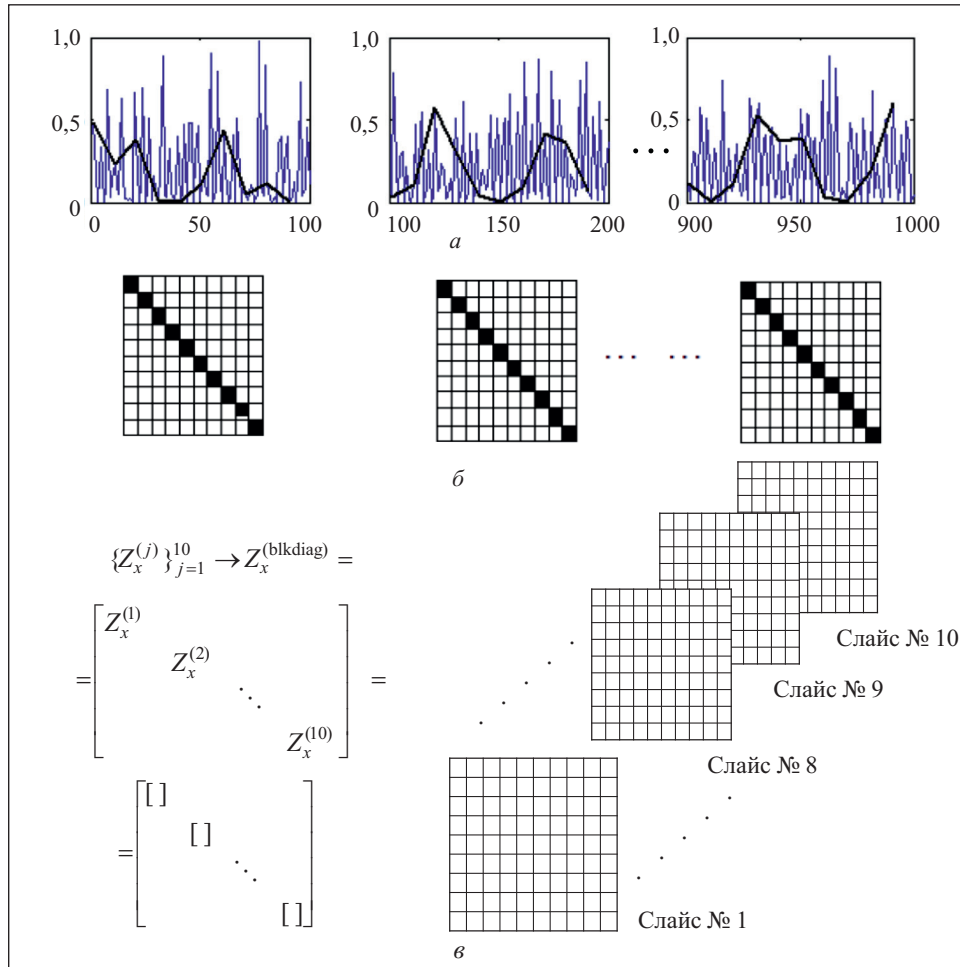


Рис. 7. Окна одномерного ВР ( $l_w = 100$  эл.) (а) и соответствующие им 2D матрицы ( $T_w$ ,  $10 \times 10$ ) — фронтальные слайсы (б) (черным цветом выделены главные диагонали матриц) и тензорная модель одномерного ВР (в)

**Самоподобие многомерных ВР.** Современные исследования трафика компьютерных систем (КС) направлены на решение следующих проблем: повышение эффективности использования КС, в частности увеличение пропускной способности;

идентификация аномалий в процессе их зарождения для возможности адекватной реакции и недопущения возможных негативных последствий.

В большинстве случаев рассматривается одномерный трафик, т.е. только компоненты, имеющие числовые форматы: число переданных байт, число пакетов, число потоков; различные источники пакетов рассматриваются в



2D пространстве, однако в общем случае пакеты, объединяемые в потоки, образуют многомерное пространство. Естественно, при этом упрощаются расчеты, но полученные результаты далеки от реальных.

Рассмотрим явление самоподобия трафика, исследуемого на уровне отдельного ВР. Как видно из матрицы фрагмента реального трафика (рис. 7), самоподобие присуще всему трафику, а не только его некоторым компонентам. Следует заметить, что до настоящего времени самоподобие трафика как многомерного ВР не рассматривалось, хотя необходимость в этом весьма остра.

Известно, что трафик КС как совокупность ВР представляет собой стохастические объекты, для которых свойство самоподобия наблюдается только после соответствующего усреднения по всем независимым реализациям объекта (процесса). Иными словами, увеличенная часть фрагмента исходного ВР и сам фрагмент самоподобны, так как имеют совпадающие (или в общем случае близкие) некоторые статистические характеристики. Понятие точное самоподобие — условно, так как справедливо только для регулярных объектов (построенных детерминированным способом).

Повторяемость (проявление самоподобия) нескольких реализаций ВР (трафика) может быть полной, но могут наблюдаться элементы случайности. В общем случае структура ВР (трафика) на малых масштабах не является идентичной структуре всего ВР, но их статистические характеристики достаточно близки, хотя полное совпадение практически отсутствует. Как следует из [19], структура ВР не определена и анализ ВР на малых масштабах недостаточен для анализа самоподобия. В ряде случаев возникают ситуации, когда необходимо исследовать весь разреженный ВР, т.е. когда элементы взяты с меньшей (чем исходная) частотой. Вычисление  $H$ -параметра для ВР  $X_t(1:10000)$  и ВР  $X_t(1:10:10000)$ ,  $X_t(1:50:10000)$ ,  $X_t(1:100:10000)$  дает практически одинаковые результаты, что позволяет сделать вывод о персистентности ВР. Если учесть, что  $X_t(1:10000) \rightarrow T^x = \text{reshape}(X, 100, 100)$ , то  $\text{diag}(T^x)$  представляет собой разреженный исходный ВР.

Известно, что свойство самоподобия с  $H$ -параметром формально имеет вид равенства по определению:  $\{X(\alpha t), t \in \mathbb{R}\} \stackrel{\Delta}{=} \{\alpha^H X(t), t \in \mathbb{R}\}$ . При этом изменение временного масштаба эквивалентно изменению пространственного масштаба состояний, а это означает, что типичные реализации самоподобного процесса визуально похожи (близки), независимо от масштаба времени, на котором они рассматриваются, т.е. наблюдается сходство статистических свойств. Однако равенство

$$Y_k^{(m)} = (1/m^H) \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} Y_i, \quad k \in R, \quad 0 < H < 1$$

справедливо для агрегированного процесса, при котором  $m$ -агрегированный ВР  $Y^{(m)}$  представляет собой усредненный по неперекрывающимся блокам размера  $m$  (длина окна ВР) исходный ВР, т.е. каждый блок заменен его средним значением.

Среди всех параметров трафика (в общем случае их насчитывают около 100), как было указано ранее, наиболее исследованы параметры, имеющие числовые форматы: байты, пакеты, потоки пакетов, время задержки. Они образуют, в общем случае, многомерную систему, анализ которой до настоящего времени не проведен. Поэтому анализ самоподобия даже этого усеченного многомерного трафика представляет собой актуальную и достаточно сложную теоретическую и прикладную задачу, требующую применения современного математического аппарата — тензорного анализа и тензорных декомпозиций.

Покажем возможность анализа многомерного трафика на уровне плоских моделей. Заметим, что в общем случае анализ самоподобия ВР на основе  $H$ -параметра не является тривиальной задачей, так как реальные НД — конечны, что противоречит исходной концепции вычисления  $H$ -параметра. Поэтому необходимо использовать различные свойства ВР, влияющие на самоподобие. В некоторых работах [19] исследуется самоподобная структура в заданном масштабном диапазоне для заданного набора данных (при этом понятие структуры не определено). Кроме того, наличие самоподобной структуры в одной из компонент ВР (трафика КС), не гарантирует самоподобие всего (многомерного) ВР.

Показатель (параметр) Херста является параметром, характеризующим «степень» самоподобия. Он определяется для выборочного случайного набора  $X_j, j = 1, N$  на основе выборочного среднего,

$$M = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k,$$

дисперсии,

$$S_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - M)^2,$$

интегрального отклонения,

$$D_j = \sum_{k=1}^j X_k - jM,$$

и изменчивости  $R_N = \max_{1 < j < N} D_j - \min_{1 < j < N} D_j$  с учетом эвристики вида  $R/S \approx (N/2)^H$ , сформулированной Г. Херстом для больших значений  $N$

виде  $\log(R/S) \approx H \log(N/2)$ , где величина  $H$  — показатель Херста,  $0,5 < H < 1$ . Для процессов, не обладающих свойством самоподобия,  $H = 0,5$ , для самоподобных процессов с долгосрочной зависимостью  $H \in [0,7; 0,9]$ . Параметр  $\beta$ , используемый для характеристики асимптотических свойств самоподобных процессов, имеет вид  $\beta = 2 - H$ . Параметр Херста можно определить, построив график отношения  $\log(R/S)$  в зависимости от  $\log(N/2)$  при различных значениях  $N$ , и вычислить величину  $H$  как тангенс угла наклона полученной (аппроксимированной) линии (так называемый  $R/S$ -метод). Следует заметить, что  $R/S$ -метод дает приближенное значение показателя Херста, в общем случае выводы следует делать, учитывая только два варианта:  $H < 0,5$  и  $H > 0,5$ .

В рассматриваемой задаче предполагается, что в одномерном случае самоподобие (фрактальные свойства) ВР, определенные на всем ВР, справедливы для меньшего числа элементов ВР, расположенных на главной диагонали тензора, моделирующего ВР, т.е. ⟨фрактальные свойства ВР — фрактальные свойства главной диагонали  $\mathbb{T}_X$ ⟩ (разреженного ВР),  $\mathbb{T}_X = \text{reshape}(X, m, n, k)$ ,  $X$  — ВР,  $X = \{x_i\}$ ,  $i = 1, m \cdot n \cdot k$ .

При исследовании одномерных ВР заменяют весь ВР и его окна  $2D$  матрицами, используя процедуру  $\text{reshape}(X, m, n, g)$ , где  $m \times n$  — размерность матрицы,  $m \cdot n$  — число элементов ВР  $X = \{x_i\}$ ,  $i = 1, f$ ;  $f = m \cdot n$ ,  $X \rightarrow \rightarrow X$ ,  $g$  — число  $2D$  матриц фронтальных слайсов. Многомерные (многокомпонентные) ВР  ${}^{(m)}X$  заменяют  $3D$  тензорами  $\Xi$  (многомерными массивами), которые в свою очередь, заменяют  $2D$  матрицами-слайсами (Матлаб —  $\text{reshape}({}^{(m)}X, m, n, k)$ ), используя процедуры тензорной декомпозиции:  ${}^{(m)}X \xrightarrow{\text{ТД}} \Xi$ . В общем случае  $f = m \cdot n \cdot k$ ,  $\Xi = \{\Xi(:, :, 1), \dots, \Xi(:, :, k)\}$ ,  $k$  — число слайсов.

Вместо исходных объектов  $2D$  матрицы  $X$  и  $3D$  тензора  $\Xi$  предложено использовать их диагонали  $\text{diag}(X)$  или  $\text{diag}(\Xi)$ , или соответствующие диагональные матрицы,  $X^{(d)}$  и  ${}^{(m)}X^{(d)}$ , которые в развернутом (векторизованном) виде представляют разреженные ВР и число элементов которых значительно меньше, чем в исходных ВР. Возникает вопрос — насколько совпадают свойства  $X^{(d)}$  и  $X$ ,  ${}^{(m)}X^{(d)}$  и  ${}^{(m)}X$ , а именно, показатели самоподобия Херста. В трафике КС наиболее исследуемыми являются ВР для байтов, пакетов, потоков, которые исследуются независимо. Однако в ряде случаев возникает необходимость исследования этих рядов совместно, особенно при идентификации аномалий в этих ВР [17—19].

**Результаты экспериментальных исследований показателя Херста для исходных и разреженных ВР, построенных на главных диагоналях тензорных моделей ВР. I.** Исходный ВР  $x = 3 * \text{rand}(1, 9000)$

моделируется 3D тензором  $\Xi_t = \text{reshape}(x(1 : 9000), p, p, n)$ ,  $p = 10, n = 90$ , где  $n$  — число фронтальных слайсов. На рис. 7 представлены фрагменты ВР (отдельные слайсы), их диагонали и показан способ образования блочно-диагонального тензора, моделирующего ВР.

Два фронтальных слайса из 90:  $\Xi_t = \{x_t(:, :, 1), x_t(:, :, 2), \dots, x_t(:, :, 90)\}$ :

$x_t(:, :, 1) =$									
2.0429	1.7937	1.4738	0.8544	0.5365	0.0823	1.9552	2.9562	0.9656	2.8898
1.0493	2.8814	1.8151	0.6869	2.1259	0.9915	1.6595	1.3845	1.6691	0.9737
0.0991	1.7534	1.9429	0.3242	2.3369	2.1610	1.7793	0.9593	1.7642	2.1801
1.8012	2.3418	2.7258	2.1078	2.1833	1.0913	2.9665	2.7456	1.7497	0.4115
0.6737	2.7196	0.1360	0.2096	1.4379	0.1914	2.9866	1.7015	0.9177	2.7755
1.4717	1.3154	1.0183	1.1575	0.9331	0.2434	1.5832	1.5136	0.7616	2.7301
1.0636	0.6223	1.7299	1.3302	1.5616	2.1670	2.7228	2.2539	2.0572	1.4531
1.2147	2.6664	1.9870	1.1148	0.0277	0.0413	2.6989	1.9698	2.2360	2.8548
0.9229	0.6194	2.4955	1.5858	1.3910	2.9384	2.9853	1.1609	2.7590	0.7385
2.0658	0.9236	2.4348	1.3434	1.7012	2.3671	0.3643	1.8287	1.7117	0.4731
$x_t(:, :, 90) =$									
0.1850	2.6130	0.2860	1.1432	1.7478	1.9967	0.8816	2.1003	0.7812	0.1776
0.7973	0.3831	2.7210	1.1523	1.9397	0.5350	1.8029	0.5548	1.2125	2.7766
0.0368	2.2839	0.3657	0.6249	0.4780	1.2176	1.2235	2.4681	2.6059	2.3435
1.0786	1.6008	0.5521	1.2895	1.4922	1.6961	2.3135	2.4030	0.4630	1.3651
1.2132	1.2232	2.2903	2.2355	0.1979	0.0194	2.9464	2.0801	1.0949	2.4172
2.9970	0.4858	0.9821	2.1028	1.9272	1.5667	1.6849	2.3483	2.1977	0.5531
0.3924	1.7212	0.7470	2.3143	1.2004	1.9280	2.4283	0.4330	2.1634	0.2594
1.0189	0.5221	0.6410	1.6526	0.9138	1.4780	0.6375	1.8728	0.4605	2.3940
2.2635	2.1185	2.7841	0.0054	2.4881	2.2771	0.1057	2.2432	0.7733	1.4869
1.3702	2.3583	0.6999	0.6542	2.3059	0.4062	0.9973	2.4208	2.2964	0.8173

Таким образом, главная диагональ  $\Xi_t$  имеет 900 элементов исходного ВР, соответственно контрольный ВР принят в виде  $x_k = 3 \cdot \text{rand}(1, 900)$ . На рис. 8 показан исходный одномерный ВР и главная диагональ тензора  $\Xi_t$ .

Приведенные на рис. 9 показатели Херста\* для исходного, разреженного (диагональ тензора) и контрольного ВР, свидетельствуют о том, что значения  $H_x$  и  $H_{\text{out}}$  практически совпадают. Следовательно, главная диагональ тензора, моделирующего ВР, адекватно представляет свойство самоподобия ВР.

II. Многомерный (многокомпонентный) ВР был исследован по предложенной методике, визуализация которой представлена на рис. 9—11.

\* Использована подпрограмма Матлаб: function [Hal, He, Ht, pval95] = hurst(x, d, fontsize), R. Weron (2002) Estimating long range dependence: finite sample properties and confidence intervals, Physica A 312, 285-299.

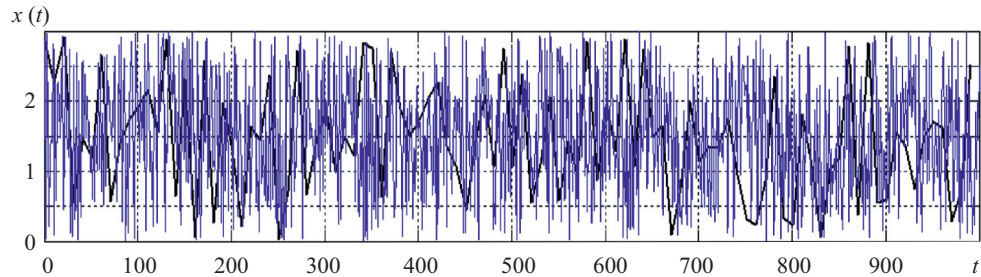


Рис. 8. Исходный одномерный ВР (синий цвет) и диагональ 3D тензора, моделирующего ВР (черный цвет)

Фрагмент исходного пятикомпонентного ВР  $X = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5\}$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
1.5990	1.6598	0.8308	0.4570	1.3824
0.4203	1.6100	0.7503	1.6431	1.3391
0.1713	0.1143	0.2767	0.0017	0.2768
0.7356	0.9492	0.8279	0.8151	1.2478
1.7094	0.7392	1.3004	0.4132	1.2852
0.4259	0.4738	0.2846	0.4355	0.5517
0.5998	0.6923	1.0897	0.6891	0.7204
0.0366	1.5976	1.6160	1.6901	1.8034
0.6770	0.3243	0.1815	0.6466	0.5457
0.4839	1.0464	0.0995	0.5892	0.9136
1.2309	0.0602	0.9052	0.0081	0.4049
0.8499	1.0235	0.8222	0.8224	0.8622
0.7746	0.6003	0.2211	0.2078	0.6028
1.4625	1.2810	1.8688	1.3184	1.5107
0.2292	0.5809	0.6032	0.1416	0.1363
0.2336	0.1006	0.2818	0.0323	0.3773
1.7987	1.6060	1.3992	0.3343	0.8575
1.3772	1.4571	1.3714	0.3296	0.8399
0.1230	0.0405	0.1660	0.0755	0.1001
1.6317	0.4583	0.8158	0.9447	0.6002
...	...	...	...	...

Протокол вычисления коэффициента Херста:  
R/S-AL using 1 divisors (50, ..., 50) for a sample of 100 values  
Corrected theoretical Hurst exponent 0.5  
Corrected empirical Hurst exponent 0.5887  
Theoretical Hurst exponent 0.5229  
Empirical Hurst exponent 0.5581

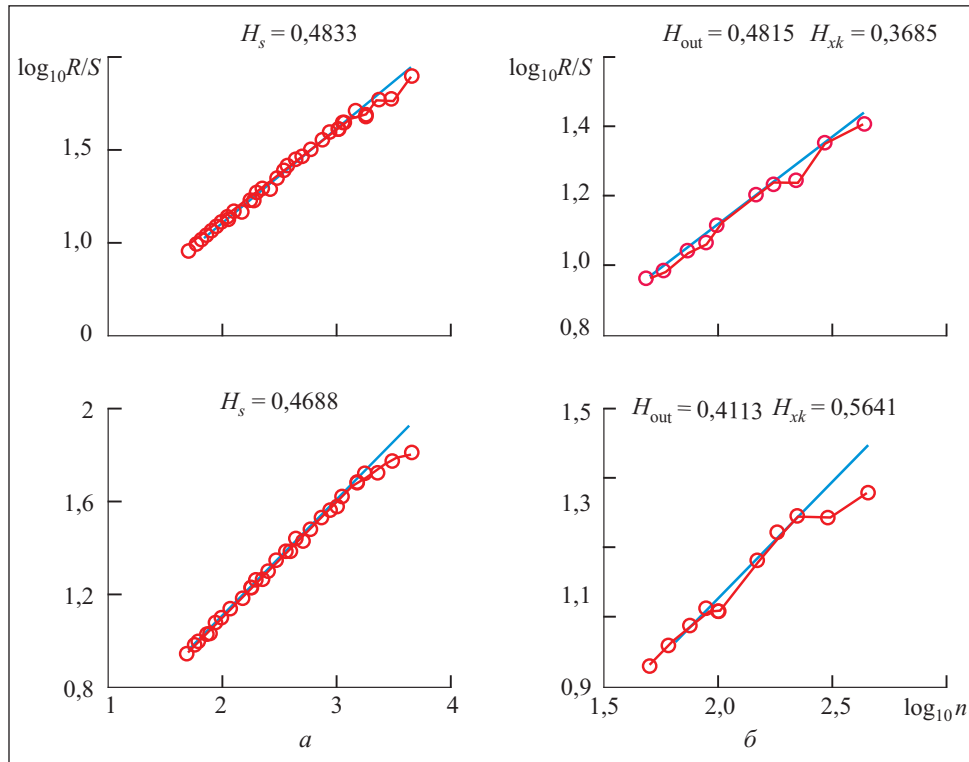


Рис. 9. Показатели Херста:  $a$  — исходный ВР,  $b$  — диагональ тензор-окна: синий цвет — теоретическая величина  $R/S$ , красный цвет — эмпирическая величина  $R/S$

Представление 200 элементов пятикомпонентного ВР фронтальными слайсами в виде двумерной матрицы  $10 \times 10 \rightarrow zt = \text{reshape}(zm(1 : 200, :, :, 1), p, p, n)$ :

$zt(:, :, 1) =$									
1.5990	1.2309	0.0969	0.0123	0.2659	0.2593	0.9595	1.3830	1.0013	0.0289
0.4203	0.8499	0.0062	0.8236	0.0360	1.3462	1.3302	0.1570	0.5994	0.0183
0.1713	0.7746	1.3762	0.8901	1.1333	0.2397	0.2750	1.1349	1.0121	1.6953
0.7356	1.4625	0.0179	0.9860	0.0134	0.6054	1.1867	1.1193	1.2906	0.0977
1.7094	0.2292	0.0368	0.3991	1.4156	0.3017	1.3526	0.2873	0.0609	0.4082
0.4259	0.2336	0.3092	0.8304	0.9069	0.7280	0.0351	0.7957	1.8095	1.3012
0.5998	1.7987	0.3801	1.0892	0.1753	0.3301	0.5851	1.0926	0.4462	0.2159
0.0366	1.3772	0.3271	0.3113	0.6590	1.7078	0.5203	0.4573	0.0179	0.5381
0.6770	0.1230	0.3613	0.3906	0.5811	1.0871	0.0783	0.6169	1.5064	0.1295
0.4839	1.6317	0.3929	1.0016	0.0995	0.3618	0.8266	1.2350	1.3183	1.0009
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$zt(:, :, 10) =$

0.6642	0.5891	0.5596	0.7674	0.4898	0.1831	0.1929	1.6349	0.5907	0.4690
1.4026	1.5510	0.5247	0.0993	0.7668	0.0648	1.0127	0.3540	0.2614	0.6976
0.6185	0.1694	0.6284	0.3684	1.6953	0.4067	0.4418	0.1775	0.8141	0.4461
0.0082	0.2079	0.5931	0.3881	0.2782	0.0826	0.1265	0.1448	0.7785	0.3141
1.8018	0.9169	0.1417	0.0840	0.9201	1.7034	0.8466	0.5589	0.1238	0.0730
0.2242	0.3001	0.6576	1.2033	1.0016	0.3509	0.1492	0.1310	0.1580	0.1910
0.1671	1.2415	1.0170	1.1386	0.8652	0.1478	0.4764	0.2080	0.3235	1.5270
1.7719	0.9030	1.3574	0.0419	0.2514	0.5729	0.6140	1.7090	0.9203	0.0679
1.6188	0.3084	0.0439	0.9912	0.6503	1.5417	0.3100	0.0827	0.1775	1.0416
0.0192	0.7302	1.0989	0.4601	0.2810	0.0527	0.3524	0.9631	0.1850	0.3382

Протокол вычисления:

R/S-AL using 4 divisors (50, ..., 250) for a sample of 500 values

Corrected theoretical Hurst exponent 0.5

Corrected empirical Hurst exponent 0.4704

Theoretical Hurst exponent 0.5475

Empirical Hurst exponent 0.5189

Представление 1000 элементов пятикомпонентного ВР фронтальными слайсами в виде двумерной матрицы  $10 \times 10 \rightarrow zt = \text{reshape}(zm(1 : 200 * 5, :, :, 1), p, p, n * 5)$ . Фронтальные слайсы:

$zt(:, :, 1) =$

1.5990	1.2309	0.0969	0.0123	0.2659	0.2593	0.9595	1.3830	1.0013	0.0289
0.4203	0.8499	0.0062	0.8236	0.0360	1.3462	1.3302	0.1570	0.5994	0.0183
0.1713	0.7746	1.3762	0.8901	1.1333	0.2397	0.2750	1.1349	1.0121	1.6953
0.7356	1.4625	0.0179	0.9860	0.0134	0.6054	1.1867	1.1193	1.2906	0.0977
1.7094	0.2292	0.0368	0.3991	1.4156	0.3017	1.3526	0.2873	0.0609	0.4082
0.4259	0.2336	0.3092	0.8304	0.9069	0.7280	0.0351	0.7957	1.8095	1.3012
0.5998	1.7987	0.3801	1.0892	0.1753	0.3301	0.5851	1.0926	0.4462	0.2159
0.0366	1.3772	0.3271	0.3113	0.6590	1.7078	0.5203	0.4573	0.0179	0.5381
0.6770	0.1230	0.3613	0.3906	0.5811	1.0871	0.0783	0.6169	1.5064	0.1295
0.4839	1.6317	0.3929	1.0016	0.0995	0.3618	0.8266	1.2350	1.3183	1.0009

$zt(:, :, 50) =$

1.0446	0.0963	0.0027	0.6332	1.6667	1.2580	0.1646	0.2584	0.3211	1.9667
0.4805	1.4620	1.4778	0.6205	0.3388	0.1273	0.4174	0.0137	0.3234	1.1782
0.2883	1.0090	0.3140	0.1011	0.9473	1.3951	0.1385	0.2650	0.0204	0.2184
0.2925	0.2695	0.6966	1.1050	0.2146	0.5415	0.1007	0.0006	1.0225	0.7236
0.2350	0.6788	0.9516	0.4426	0.6459	0.0636	0.6375	0.5394	0.9548	1.4057
0.3503	1.4633	0.8935	0.3601	0.1530	1.4870	1.7269	0.1438	0.1652	0.0971
0.0503	0.2086	0.0686	0.9874	0.6878	0.1004	1.1109	0.0282	0.8190	0.4337

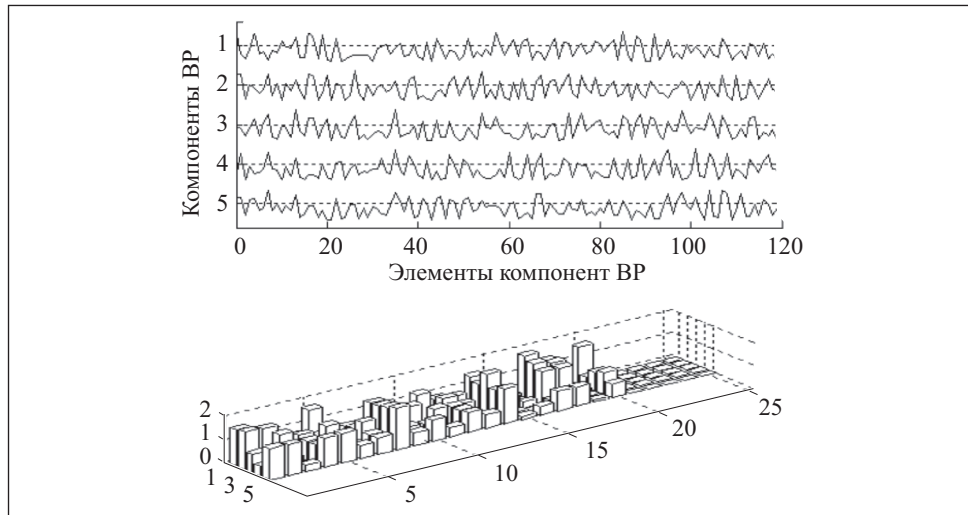


Рис. 10. Фрагмент исходного многокомпонентного ВР, представленный в двух формах

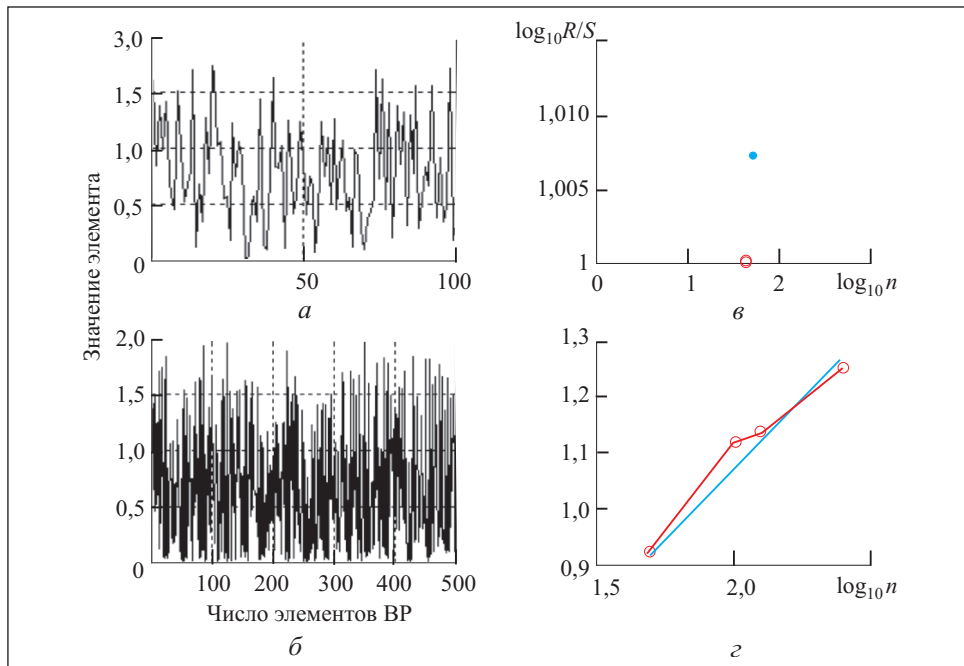


Рис. 11. Фрагменты МВР  $X(200 \times 5)$  (а),  $X(1000 \times 5)$  (б) и коэффициент Херста ( $\nu, z$ ):  $a$ —диагональ тензора, полученного в результате представления фрагмента МВР ( $200 \times 5$ ) фронтальными слайсами (матрицами  $10 \times 10$ , число слайсов — 10);  $b$  — диагональ тензора, полученного в результате представления фрагмента МВР ( $1000 \times 5$ ) фронтальными слайсами (матрицами  $10 \times 10$ , число слайсов — 50); ( $\nu, z$ ) — теоретический (синий цвет) и экспериментальный (красный цвет) результаты



0.0463 0.0227 1.8094 1.6889 1.2068 0.3292 0.1390 1.1350 1.1100 0.8406  
0.0728 0.5640 0.4546 0.6479 0.3883 0.7321 1.8260 0.0380 0.0963 0.0446  
1.7169 0.8697 0.1296 0.2412 0.7810 1.3312 0.2653 0.0957 0.4622 0.6082

Таким образом, многомерный ВР, рассматриваемый как совокупность окон, может быть адекватно представлен совокупностью тензор-окон: отдельное окно может быть одномерным (сформированным для отдельной компоненты МВР), либо многомерным (сформированным с учетом всех компонент МВР). В случае I окно преобразуется либо в  $2D$  тензор с матрицей  $t_{x_k} = \text{reshape}(x_k, m, n)$ ,  $m \cdot n = f$ , либо в  $3D$  тензор с матрицей  $t_{x_k} = \text{reshape}(x_k, m, n, n_1)$ ,  $m \cdot n \cdot n_1 = f$ . Инварианты вычисляются по стандартным (для плоских матриц) формулам либо по формулам, справедливым только для пространственных матриц. В случае II окно преобразуется в  $3D$  тензор с матрицей  $t_{x_k} = \text{reshape}(x_k, m, n, n_1)$ ,  $m \cdot n \cdot n_1 = f$ . Инварианты вычисляются по формулам, справедливым только для пространственных матриц.

## Выводы

Показатель Херста для многомерного ВР является в значительной степени формальным, так как определить похожесть, даже явную, как в одномерных ВР, в данном случае весьма сложно по причине субъективности понятия похожесть. Однако интеллектуальный анализ данных, в данном случае ВР, позволил определить скрытые знания, которые могут быть использованы при решении прикладных задач: идентификация аномалий реального (многомерного) трафика, повышение пропускной способности и других.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Time series: Advanced methods* IIa. Multivariate time series. [Электрон. ресурс]: [www.ucl.ac.uk/jdi/events/int-CIA-conf/ICIAC11\\_Sli-des/ICIAC11\\_1E\\_LTompson](http://www.ucl.ac.uk/jdi/events/int-CIA-conf/ICIAC11_Sli-des/ICIAC11_1E_LTompson).
2. *Cichocki A.* Tensor decompositions for Signal Processing Applications. From Two-way to Multiway Component Analysis. Mandic D., Phan A-H., Caiafa C. [Электрон.ресурс]: <http://www.commsp.ee.ic.ac.uk/~mandic/SPM-Cichocki-Mandic-DeLathauwer.pdf>
3. *Соколов Н.П.* Пространственные матрицы и их приложения. М: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960, 299 с.
4. *Claude Z.B.* Introduction to the General Multidimensional Matrix in Mathematics. [Электрон. ресурс]: [www.ijera.com/pages/v3no6.html](http://www.ijera.com/pages/v3no6.html)
5. *Solo A.* Multidimensional Matrix Mathematics: Notation, Representation, and Simplification, Parts: 1-6. Proceedings of the World Congress on Engineering (3). [Электрон. ресурс]: [www.ijera.com/papers/Vol.3\\_issue6/U36123129.pdf](http://www.ijera.com/papers/Vol.3_issue6/U36123129.pdf)
6. *De Lathauwer L., Moor B.* From matrix to tensor: Multilinear algebra and signal processing 4-h IMA Int. Conf. on Mathematics in Signal Processing, Oxford, United Kingdom, 1998: Selected papers presented at pp. 1-15. J. McWhirter (Ed.), Mathematics in Signal Processing IV, Oxford University Press, 1998.

7. Skillicorn D. Understanding complex datasets : data mining with matrix decompositions. Chapman & Hall/ CRC Taylor & Francis Group 6000 Broken Sound Parkway NW. Suite 300 Boca Raton, FL 33487, 2742, 257 p.
8. Cichocki A. Tensor Decompositions: A New Concept in Brain Data Analysis? [Электрон. ресурс]: arXiv:1305.0395v1 [cs.NA] 2 May 2013, 19 p.
9. Lim L.-H. Singular values and eigenvalues of tensors: A variational approach. 1-st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), December 13-15, 2005: Proceedings of the Workshop, 2005, p. 129-132.
10. Liqun Qi. Eigenvalues and invariants of tensors J. Math. Anal. Appl. 325 (2007), 1363-1377. [Электрон. ресурс]: [www.elsevier.com/locate/jmaa](http://www.elsevier.com/locate/jmaa).
11. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications / SIAM Review, 2009, Vol. 51, N 3, P. 455-500.
12. Kamalja K.K., Khangar N.V. Singular Value Decomposition for Multidimensional Matrices. Int. Journal of Engineering Research and Applications, 2013, Vol. 3, Issue 6, p. 123-129.
13. Bader B.W., Kolda T.G. Tensor Decompositions, the MATLAB Tensor Toolbox, and Applications to Data Analysis. [Электрон. ресурс]: [www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox](http://www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox).
14. Bader B.W., Kolda T.G. Multilinear operators for higher-order decompositions: Technical Report SAND 2006-2081 / Sandia National Laboratories, April 2006. [Электрон. ресурс]: [pubs/pubfiles/SAND2007-6702.pdf](http://pubs/pubfiles/SAND2007-6702.pdf).
15. Stegeman A. The Parafac Model for Multi-way Data Analysis. [Электрон. ресурс]: <http://www.ppsw.rug.nl/~stegeman>.
16. Tensor Toolbox is Software for Working with Multidimensional Arrays. [Электрон. ресурс]: <http://csmr.ca.sandia.gov/~tgkolda/>
17. Kindlmann G. Tensor Invariants and their Gradients. [Электрон. ресурс]: [USA.gk@cs.utah.edu](mailto:USA.gk@cs.utah.edu).
18. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 128 с.
19. Шелухин О.И. Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. М.: Горячая линия – Телеком, 2011, 576 с.

Поступила 28.04.16

## REFERENCES

1. Time series: Advanced methods IIa. Multivariate time series, available at: [www.ucl.ac.uk/jdi/events/int-CIA-conf/ICIAC11\\_Sli-des/ICIAC11\\_1E\\_LTompson](http://www.ucl.ac.uk/jdi/events/int-CIA-conf/ICIAC11_Sli-des/ICIAC11_1E_LTompson).
2. Cichocki, A., Mandic, D., Phan, A.-H., Caiafa, C., Tensor decompositions for signal processing applications. From two-way to multiway component analysis, available at: <http://www.commsp.ee.ic.ac.uk/~mandic/SPM-Cichocki-Mandic-DeLathauwer.pdf>
3. Sokolov, N.P. (1960), *Prostranstvennyye matritsy i ikh prilozheniya* [Space matrices and their application], Gosudarstvennoe izdatelstvo fiz.-mat. literatury, Moscow, USSR.
4. Claude, Z.B., Introduction to the general multidimensional matrix in mathematics, available at: [www.ijera.com/pages/v3no6.html](http://www.ijera.com/pages/v3no6.html).
5. Solo, A., Multidimensional matrix mathematics: Notation, representation, and simplification. Parts: 1-6, *Proceedings of the World Congress on Engineering* (3), available at: [www.ijera.com/papers/Vol.3\\_issue6/U36123129.pdf](http://www.ijera.com/papers/Vol.3_issue6/U36123129.pdf).
6. De Lathauwer, L. and Moor, B. (1998), From matrix to tensor: Multilinear algebra and signal processing, *Proceedings of the 4-h IMA Int. Conf. on Mathematics in Signal Processing*, Oxford, United Kingdom, Selected papers presented at pp. 1-15, J. McWhirter (Ed.), Mathematics in Signal Processing IV, Oxford University Press.

7. Skillicorn, D., Understanding complex datasets : data mining with matrix decompositions. Chapman & Hall/ CRC Taylor & Francis Group 6000 Broken Sound Parkway NW. Suite 300 Boca Raton, FL 33487, 2742.
8. Cichocki, A. (2013), Tensor decompositions: A new concept in brain data analysis?, available at: arXiv:1305.0395v1 [cs.NA] May 2, 2013.
9. Lim, L.-H. (2005), Singular values and eigenvalues of tensors: A variational approach, *Proceedings of the 1-st IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP)*, December 13-15, 2005, pp. 129-132.
10. Liqun, Qi. (2007), Eigenvalues and invariants of tensors, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 325, pp. 1363-1377, available at: [www.elsevier.com/locate/jmaa](http://www.elsevier.com/locate/jmaa).
11. Kolda, T.G. and Bader, B.W. (2009), Tensor decompositions and applications, *SIAM Review*, Vol. 51, no. 3, pp. 455-500.
12. Kamalja, K.K. and Khangar, N.V. (2013), Singular value decomposition for multidimensional matrices, *Int. Journal of Engineering Research and Applications*, Vol. 3, Iss. 6, pp. 123-129.
13. Bader, B.W. and Kolda, T.G. Tensor decompositions, the MATLAB tensor toolbox, and applications to data analysis, available at: [www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox](http://www.sandia.gov/~tgkolda/TensorToolbox).
14. Bader, B.W. and Kolda, T.G. (2006), Multilinear operators for higher-order decompositions: Technical report SAND 2006-2081, Sandia National Laboratories, available at: [pubs/pubfiles/SAND2007-6702.pdf](http://pubs/pubfiles/SAND2007-6702.pdf).
15. Stegeman, A., The Parafac model for multiway data analysis, available at: <http://www.ppsw.rug.nl/~stegeman>.
16. Tensor toolbox is software for working with multidimensional arrays, available at: <http://csmr.ca.sandia.gov/~tgkolda>.
17. Kindlmann, G., Tensor invariants and their gradients, available at: [USA.gk@cs.utah.edu](mailto:USA.gk@cs.utah.edu).
18. Bozhokin, S.V. and Parshin, D.A. (2001), *Fraktaly i multifraktaly* [Fractals and multi fractals], NITs Reguljarnaya i khaoticheskaya dinamika, Izhevsk, Russia.
19. Shelukhin, O.I. (2011), *Multifraktaly. Infokomunikatsionnyie prilozheniya* [Multifractals. Infocommunication applications], Goryachaya liniya – Telekom, Moscow, Russia.

Received 28.04.16

*Yu.N. Minaev, N.N. Guziy, O.Yu Filimonova., J.I. Minaeva*

#### ANALYSIS OF SELF-SIMILARITY OF MULTIVARIATE TIME SERIES (TS) ON THE BASIS OF THE METHODS OF INTELLECTUAL ANALYSIS OF THE DATA

Calculation methods have been proposed for the Hurst factor for univariate and multivariate TS on the basis of the main diagonals of TS tensor models. It is shown that the problem complexity determines the joint use of several mathematical theories, in particular, the tensor and multivariate matrix analysis. The examples of using the proposed methods are presented.

*Keywords:* tensor, multivariate time series, intellectual analysis of the data, 3D matrices, diagonal 3D matrices, matrix development, self-similarity, Hurst parameter.

*МИНАЕВ Юрий Николаевич, д-р техн. наук, профессор кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1959 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных, применение интеллектуальных технологий в системах принятия решений.*

*ГУЗИЙ Николай Николаевич, канд. техн. наук, профессор, зам. зав. кафедры компьютерных систем и сетей Национального авиационного университета Украины. В 1972 г. окончил Киевский ин-т гражданской авиации. Область научных исследований — защита информации в компьютерных системах, системы искусственного интеллекта.*

*ФИЛИМОНОВА Оксана Юрьевна, канд. техн. наук, доцент Киевского национального университета строительства и архитектуры. В 1989 г. окончила Киевский инженерно-строительный ин-т. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.*

*МИНАЕВА Юлия Ивановна, канд. техн. наук, и.о. доцента кафедры основ информатики Киевского национального университета строительства и архитектуры, который окончила в 2008 г. Область научных исследований — интеллектуальный анализ данных.*



---

УДК 681.518.5:004.052.32

**В.В. Сапожников**, д-р техн. наук, **Вл.В. Сапожников**, д-р техн. наук,  
**Д.В. Ефанов**, канд. техн. наук  
Петербургский госуниверситет путей сообщения Императора Александра I  
(Российская Федерация, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9,  
тел. (+7) 9117092164, (+7) (812) 4578579, e-mail: port.at.pgups@gmail.com)

## **Модульно-взвешенные коды с суммированием с наименьшим общим числом необнаруживаемых ошибок в информационных векторах**

Рассмотрены два способа построения кодов с суммированием с наименьшим общим числом необнаруживаемых ошибок в информационных векторах, имеющих такое же число контрольных разрядов, как классические коды Бергера. Способы основаны на взвешивании разрядов и переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационных векторах, с помощью последовательности весовых коэффициентов, образующей натуральный ряд чисел. Проанализированы некоторые ключевые особенности обнаружения ошибок в информационных векторах предложенных кодов, отличающие данные коды от кодов Бергера и их известных модификаций. На основании экспериментов с контрольными комбинационными схемами показана эффективность разработанных кодов при организации контроля ошибок, возникающих на выходах схем.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* дискретные устройства, техническая диагностика, код Бергера, модифицированный код Бергера, обнаружение ошибок.

Розглянуто два способи побудови кодів з підсумовуванням із найменшою чисельністю невиявних помилок в інформаційних векторах, які мають таке ж число контрольних розрядів, як класичні коди Бергера. Способи ґрунтуються на зважуванні розрядів і переходів між розрядами, що займають сусідні позиції в інформаційних векторах, за допомогою послідовності вагових коефіцієнтів, яка утворює ряд чисел. Проаналізовано деякі ключові особливості виявлення помилок в інформаційних векторах запропонованих кодів, які відрізняють ці коди від кодів Бергера та їх відомих модифікацій. На базі експериментів з контрольними комбінаційними схемами показана ефективність розроблених кодів при організації контролю помилок на виходах схем.

*К л ю ч о в і с л о в а:* дискретне обладнання, технічна діагностика, код Бергера, модифікований код Бергера, виявлення помилок.

В задачах построения надежных дискретных устройств и задачах технической диагностики, например при организации систем функционального контроля (СФК) или при кодировании состояний объектов, часто исполь-

© В.В. Сапожников, Вл.В. Сапожников, Д.В. Ефанов, 2017

зуют помехоустойчивые равномерные коды с небольшой избыточностью, ориентированные на обнаружение ошибок [1—8]. К таким кодам относят блочные коды с достаточно простыми правилами построения, так как они определяют показатели структурной избыточности дискретных устройств. Равномерные блочные коды классифицируются на разделимые, или  $(m, k)$ -коды ( $m$  и  $k$  — длины информационных и контрольных векторов кода), и неразделимые. Известно большое число кодов, обладающих различными характеристиками обнаружения ошибок и позволяющих синтезировать различные по сложности технической реализации логические устройства [9—19].

Наиболее широко применяются в устройствах автоматики классические коды с суммированием, или коды Бергера [20], обладающие свойством 100%-ного обнаружения монотонных ошибок. Существуют различные подходы к построению логических схем с обнаружением отказов на основе кодов Бергера [2, 21—25].

Для построения кодов Бергера подсчитывают число единичных разрядов в информационном векторе (определяют вес  $r$  информационного вектора). Полученное число представляют в двоичном виде и записывают в разряды контрольного вектора. Обозначим коды Бергера как  $S(m, k)$ -коды, где  $k = \lceil \log_2(m+1) \rceil$  ( $\lceil \dots \rceil$  — целое сверху от вычисляемого значения). Каждому контрольному вектору  $S(m, k)$ -кода с весом  $r$  соответствует  $C_m^r$  информационных векторов. Распределение информационных векторов между контрольными векторами весьма неравномерно, чем объясняется значительное число необнаруживаемых  $S(m, k)$ -кодом ошибок. Любая ошибка в информационном векторе, при которой одновременно искажается одинаковое число нулевых и единичных разрядов (симметричная ошибка), этим кодом не обнаруживается. Поэтому в классе необнаруживаемых оказывается 50% двукратных ошибок, 37,5% четырехкратных ошибок и так далее [26].

Для улучшения характеристик обнаружения ошибок в информационных векторах разработаны модифицированные коды Бергера, или  $RS(m, k)$ -коды [27, 28]. В разряды контрольного вектора модифицированного кода Бергера записывается двоичное число, равное модифицированному весу информационного вектора  $W = r \pmod{M} + \alpha M$ , где  $r \pmod{M}$  — наименьший неотрицательный вычет веса по модулю  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$ , а  $\alpha$  — поправочный коэффициент, вычисляемый как сумма по модулю два заранее установленных разрядов информационного вектора.

Для данного значения  $m$  в зависимости от способа вычисления  $\alpha$  может быть построено  $\sum_{j=1}^{m-1} C_m^j = 2^m - 2$   $RS(m, k)$ -кодов. В этом случае минимальное общее число необнаруживаемых ошибок, а также двукратных

необнаруживаемых ошибок, обеспечивает такой  $RS(m, k)$ -код, для которого коэффициент  $\alpha$  есть сумма по модулю два произвольных  $m/2$  информационных разрядов при четном значении  $m$  и  $(m \pm 1)/2$  информационных разрядов при нечетном значении  $m$ .  $RS(m, k)$ -коды обнаруживают практически в два раза больше ошибок в информационных векторах, чем коды Бергера, но в отличие от них, не обнаруживают некоторое число монотонных ошибок кратностью  $d = M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$ .

Еще одним способом модификации кода является взвешивание одного из разрядов каким-либо натуральным числом и построение кода по следующим правилам [29—31]. Всем разрядам информационного вектора, за исключением одного, приписываем единичные весовые коэффициенты, а одному — весовой коэффициент  $w_i \geq 2$ , где  $i$  — позиция разряда в информационном векторе. Определяем сумму весовых коэффициентов единичных информационных разрядов, представляем ее в двоичном виде и записываем в разряды контрольного вектора. Такой код обозначим  $WS(m, k, w_i)$ .

В зависимости от значений  $m$  и  $w_i$  могут быть построены коды с улучшенными по сравнению с кодами Бергера характеристиками обнаружения ошибок. При этом любой  $WS(m, k, w_i)$ -код будет обнаруживать 100% монотонных ошибок. Изменяя число  $w_i$  от 2 до  $m$ , можно уменьшить общее число необнаруживаемых ошибок. Все  $WS(m, k, w_i)$ -коды при  $w_i \geq m$  будут в точности повторять основные свойства классических кодов Бергера, т.е. ими не будут обнаруживаться только симметричные ошибки, общее число которых приблизительно вдвое меньше, чем у кодов Бергера.

$S(m, k)$ -,  $RS(m, k)$ - и  $WS(m, k, w_i)$ -коды при  $w_i \leq 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil} - m$  имеют одинаковое число контрольных разрядов  $k = \lceil \log_2(m+1) \rceil$ , но при этом обладают различными характеристиками обнаружения ошибок. Результаты исследований свидетельствуют о том, что общее число необнаруживаемых этими кодами ошибок может быть значительно уменьшено. Рассмотрим два способа построения  $(m, k)$ -кодов с минимальным общим числом необнаруживаемых ошибок в информационных векторах при  $k = \lceil \log_2(m+1) \rceil$ .

**Модульно-взвешенные коды Бергера.** Модифицированные коды Бергера, обнаруживают практически вдвое больше ошибок в информационных векторах, чем классические коды Бергера. Однако можно построить такие коды с суммированием, которые не обнаруживают минимальное общее число ошибок в информационных векторах при заданных значениях длин информационных и контрольных векторов. Такие коды построены на основе взвешивания разрядов или переходов между разрядами в информационных векторах [32—37]. Рассмотрим два таких кода, относящихся к классу модульно-взвешенных кодов с суммированием.



**К о д 1.** Устанавливаем последовательность весовых коэффициентов, образующую натуральный ряд чисел. Каждое число из этой последовательности приписывается разряду информационного вектора, начиная с младшего (табл. 1). Определяем значение модуля  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$ . Подсчитываем число  $V_S$ , которое равно сумме весовых коэффициентов единичных информационных разрядов, и определяем наименьший неотрицательный вычет данного числа по модулю  $M - V_S \pmod{M}$ . Полученное в итоге число представляем в двоичном виде и записываем в разряды контрольного вектора. Данный код назовем модульным кодом с суммированием взвешенных разрядов и обозначим  $WSM(m, k)$ -код [38].

**К о д 2.** Приписываем установленную выше последовательность весовых коэффициентов не разрядам, а переходам между соседними разрядами в информационных векторах (см. табл. 1), и устанавливаем значение модуля  $M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil}$ . Подсчитываем число  $V_T$  как сумму весовых коэффициентов активных переходов, для которых  $f_i \oplus f_{i+1} = 1$ . Определяем наименьший неотрицательный вычет числа  $V_T$  по модулю  $M - V_T \pmod{M}$ . Полученное число представляется в двоичном виде и записывается в разряды контрольного вектора. Данный код назовем модульным кодом с суммированием взвешенных переходов и обозначим  $WTM(m, k)$ -код [39].

Коды 1 и 2 имеют такое же число разрядов в контрольных векторах, как и коды Бергера, однако обладают совершенно иными свойствами обнаружения ошибок в информационных векторах.

**Характеристики обнаружения ошибок модульно-взвешенными кодами Бергера.** В ходе исследований был разработан специальный программный модуль расчета характеристик обнаружения ошибок в информационных векторах  $(m, k)$ -кодов, позволяющий рассчитывать число необнаруживаемых ими ошибок по видам (монотонные, симметричные и асимметричные [40]) и кратностям  $d$ .

В табл. 2 приведены характеристики необнаруживаемых ошибок  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -кодами при  $m = 3 \div 20$ , где  $N_2$  — рассчитанные значения двукратных необнаруживаемых ошибок,  $\xi_{m, k}$  — отношение числа

Таблица 1. Весовые коэффициенты кодов с суммированием

Разряд информационного вектора	$f_5$	$f_4$	$f_3$	$f_2$	$f_1$
Весовой коэффициент	$w_5$	$w_4$	$w_3$	$w_2$	$w_1$
разряда	5	4	3	2	1
	$w_{4,5}$	$w_{3,4}$	$w_{2,3}$	$w_{1,2}$	
перехода между разрядами	4	3	2	1	

необнаруживаемых оптимальным  $(m, k)$ -кодом ошибок к аналогичной величине рассматриваемого кода,  $\gamma_m$  — доля необнаруживаемых кодом ошибок от общего числа ошибок в информационных векторах. Величина  $\xi_{m, k}$  показывает, насколько близок код при данной длине информационного вектора к коду с минимальным общим числом необнаруживаемых ошибок (оптимальному  $(m, k)$ -коду [27, 28]). Коэффициенты  $\upsilon_m$ ,  $\sigma_m$  и  $\alpha_m$  характеризуют доли необнаруживаемых данным кодом монотонных, симметричных и асимметричных ошибок от общего числа возможных в информационных векторах ошибок соответствующего вида,  $\beta_{m, 2}$  — доля двукратных необнаруживаемых ошибок от общего числа двукратных ошибок.

Анализируя значения  $\xi_{m, k}$  в табл. 2, можно сделать вывод о том, что все  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -коды при  $m \neq 2^t$ ,  $t = 2, 3, \dots$ , являются оптимальными  $(m, k)$ -кодами, т.е. кодами с минимальным общим числом необнаруживаемых ошибок. Как свидетельствуют значения  $\gamma_m$ , при малых длинах информационных векторов обоими кодами не обнаруживается приблизительно 10—15 % ошибок в информационных векторах: в диапазоне  $m = 8 \div 15$  —  $\gamma_m \approx 6\%$ , а при  $m \geq 16$  —  $\gamma_m \approx 3\%$ , что значительно меньше аналогичных величин для  $S(m, k)$ - и  $RS(m, k)$ -кодов (рис. 1).

Коды  $WSM(m, k)$  и  $WTM(m, k)$ , в отличие от кодов Бергера, в классе необнаруживаемых имеют ошибки всех видов: монотонные, симметричные и асимметричные. Однако их доли существенны лишь при небольших длинах информационных векторов ( $m < 8$ ). На рис. 2 представлены графики зависимостей коэффициентов  $\upsilon_m$ ,  $\sigma_m$  и  $\alpha_m$  для кодов  $WSM(m, k)$ ,  $WTM(m, k)$  и наилучших  $RS(m, k)$ -кодов.

Коды  $RS(m, k)$  идентифицируют большее число монотонных ошибок по сравнению с модульно-взвешенными кодами, имеющими при одинаковых значениях  $m$  приблизительно равное число монотонных необнаруживаемых ошибок (у  $WSM(m, k)$ -кодов немного меньше, чем у  $WTM(m, k)$ -кодов). Значительно лучшими характеристиками по сравнению с  $RS(m, k)$ -кодами обладают  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -коды в области симметричных ошибок. Если  $RS(m, k)$ -кодами не обнаруживается приблизительно 50 % симметричных ошибок в информационных векторах, то  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -кодами — менее 10—15 %, а при увеличении длины информационного вектора наблюдается существенное уменьшение значения  $\sigma_m$ .

Асимметричных необнаруживаемых ошибок гораздо больше у взвешенных кодов с суммированием по сравнению с  $RS(m, k)$ -кодами. При этом  $WTM(m, k)$ -коды по показателю обнаружения асимметричных ошибок имеют преимущество перед  $WSM(m, k)$ -кодами.

Таблица 2. Показатели обнаружения ошибок  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -кодами

$m$	$k$	Число необнаруживаемых ошибок			$N_2$	$\xi_{m,k}, \%$	$\gamma_m, \%$	Доля необнаруживаемых ошибок от общего числа ошибок данного вида			$\beta_2, \%$
		Общее	Моно-тонные	Симметричные				Асимметричные	$\nu_m, \%$	$\sigma_m, \%$	
$WSM(m, k)$ -коды											
3	2	8	4	0	4	100	14,286	28,571	0	66,667	16,667
4	3	16	4	2	0	100	6,667	6,061	3,704	17,857	0
5	3	96	32	12	16	100	9,677	12,214	5,455	14,857	5
6	3	448	116	64	64	100	11,111	12,262	7,442	14,549	6,667
7	3	1920	420	312	192	100	11,811	13,035	9,443	13,448	7,143
8	4	3840	572	810	0	100	5,882	5,416	6,421	6,136	0
9	4	15872	2056	2956	256	100	6,067	6,095	6,145	6,199	1,389
10	4	64512	6572	11080	1024	100	6,158	6,211	6,031	6,267	2,222
11	4	260096	20420	42592	3072	100	6,204	6,232	6,055	6,279	2,727
12	4	1044480	62648	165318	8192	100	6,227	6,23	6,123	6,272	3,03
13	4	4186112	192220	642112	20480	100	6,239	6,27	6,179	6,261	3,205
14	4	16760832	583044	2491168	49152	100	6,244	6,267	6,212	6,256	3,297
15	4	67076096	1765252	9662528	114688	100	6,247	6,273	6,23	6,253	3,333
16	5	134152192	2641036	19715754	0	100	3,124	3,11	3,28	3,099	0
17	5	536739840	7991576	74602620	65536	100	3,124	3,124	3,197	3,113	0,368

18	5	2147221504	24050524	286276696	1836894284	262144	100	3,125	3,125	3,125	3,155	3,12	0,654
19	5	8589410304	72316400	1108254688	7408839216	786432	100	3,125	3,125	3,126	3,136	3,123	0,877
20	5	34358689792	217157524	4312002076	29829530192	2097152	100	3,125	3,125	3,124	3,128	3,125	1,053
<i>ИТМ (m, k)-коды</i>													
3	2	8	2	0	6	0	100	14,286	14,286	14,286	0	100	0
4	3	24	6	10	8	8	66,66667	10	9,091	9,091	18,519	14,286	8,333
5	3	96	30	8	58	32	100	9,677	11,45	11,45	3,636	16,571	10
6	3	448	174	176	138	192	100	11,111	14,165	14,165	20,465	7,492	20
7	3	1920	470	352	1098	448	100	11,811	14,587	14,587	10,654	12,429	16,667
8	4	3856	830	1378	1648	832	99,58506	5,907	7,858	7,858	10,924	4,114	11,607
9	4	15872	2714	2728	10430	2 304	100	6,067	8,045	8,045	5,671	5,954	12,5
10	4	64512	8714	22120	33678	7 680	100	6,158	8,236	8,236	12,039	4,504	16,667
11	4	260096	25338	44224	190534	17 408	100	6,204	7,733	7,733	6,287	6,071	15,455
12	4	1044480	73650	334064	636766	44 032	100	6,227	7,324	7,324	12,372	4,891	16,288
13	4	4186112	222546	668120	3295446	99 328	100	6,239	7,259	7,259	6,429	6,156	15,545
14	4	16760832	662154	4998704	11099974	243 712	100	6,244	7,117	7,117	12,466	5,073	16,346
15	4	67076096	1993546	9997312	55085238	536 576	100	6,247	7,084	7,084	6,446	6,189	15,595
16	5	134152224	3139258	37502834	93510132	933 888	99,99998	3,124	3,697	3,697	6,24	2,592	11,875
17	5	536739840	9489846	75005608	452244386	2 293 760	100	3,124	3,71	3,71	3,214	3,1	12,868
18	5	2147221504	28476558	566937272	1551807674	5 898 240	100	3,125	3,7	3,7	6,247	2,636	14,706
19	5	8589410304	83611278	1133873792	7371925234	12 845 056	100	3,125	3,614	3,614	3,208	3,108	14,327
20	5	34358689792	243489886	8614371176	25500828730	29 097 984	100	3,125	3,503	3,503	6,249	2,671	14,605

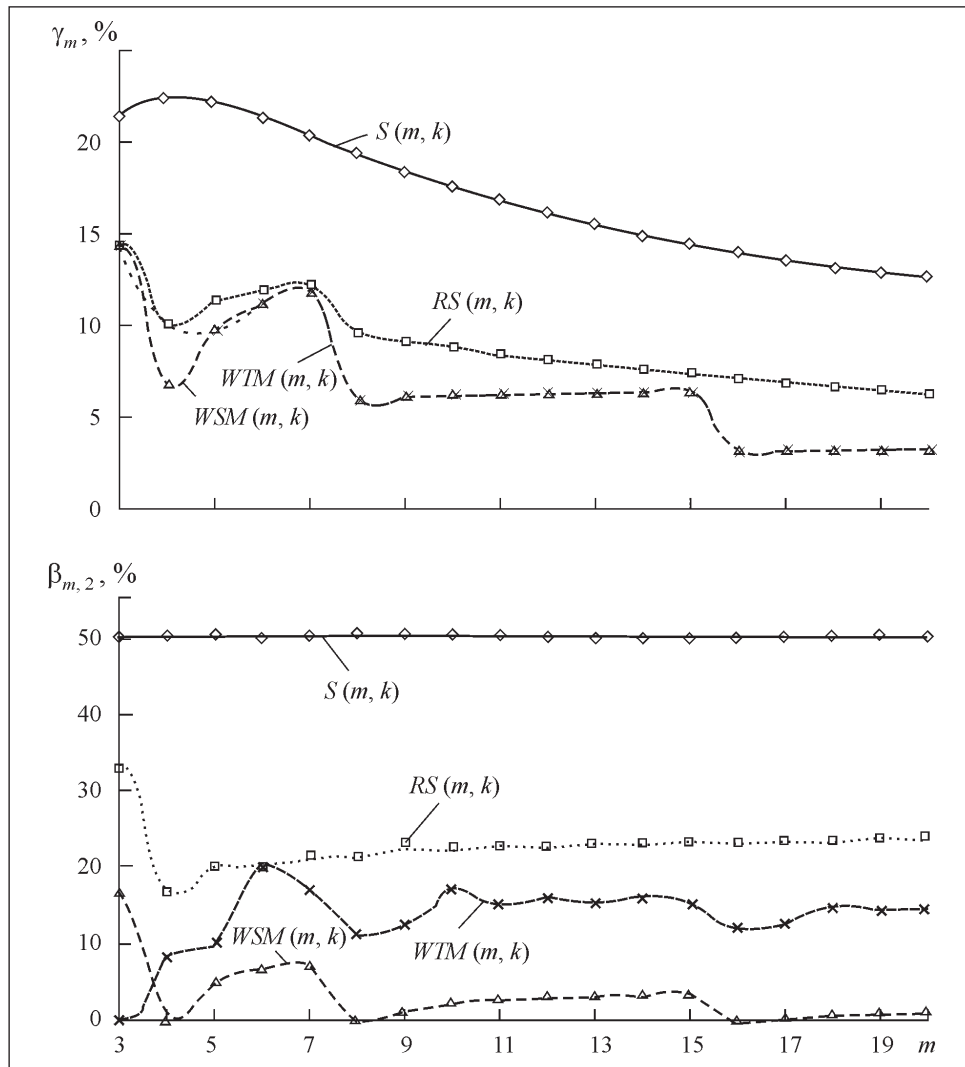


Рис. 1. Графики зависимостей коэффициентов  $\gamma_m$  и  $\beta_{m,2}$  от длины информационного вектора

Укажем некоторые особенности модульно-взвешенных кодов с суммированием, учет которых может оказаться важным при построении надежных дискретных устройств.

Свойства  $WSM(m, k)$ -кодов:

1) в классе необнаруживаемых есть ошибки с четными и нечетными кратностями;

2) минимальная кратность монотонных необнаруживаемых ошибок составляет  $d = 2$  для любых значений  $m$ , кроме  $m = 2^t, t = 2, 3, \dots$ . Для  $m = 2^t$

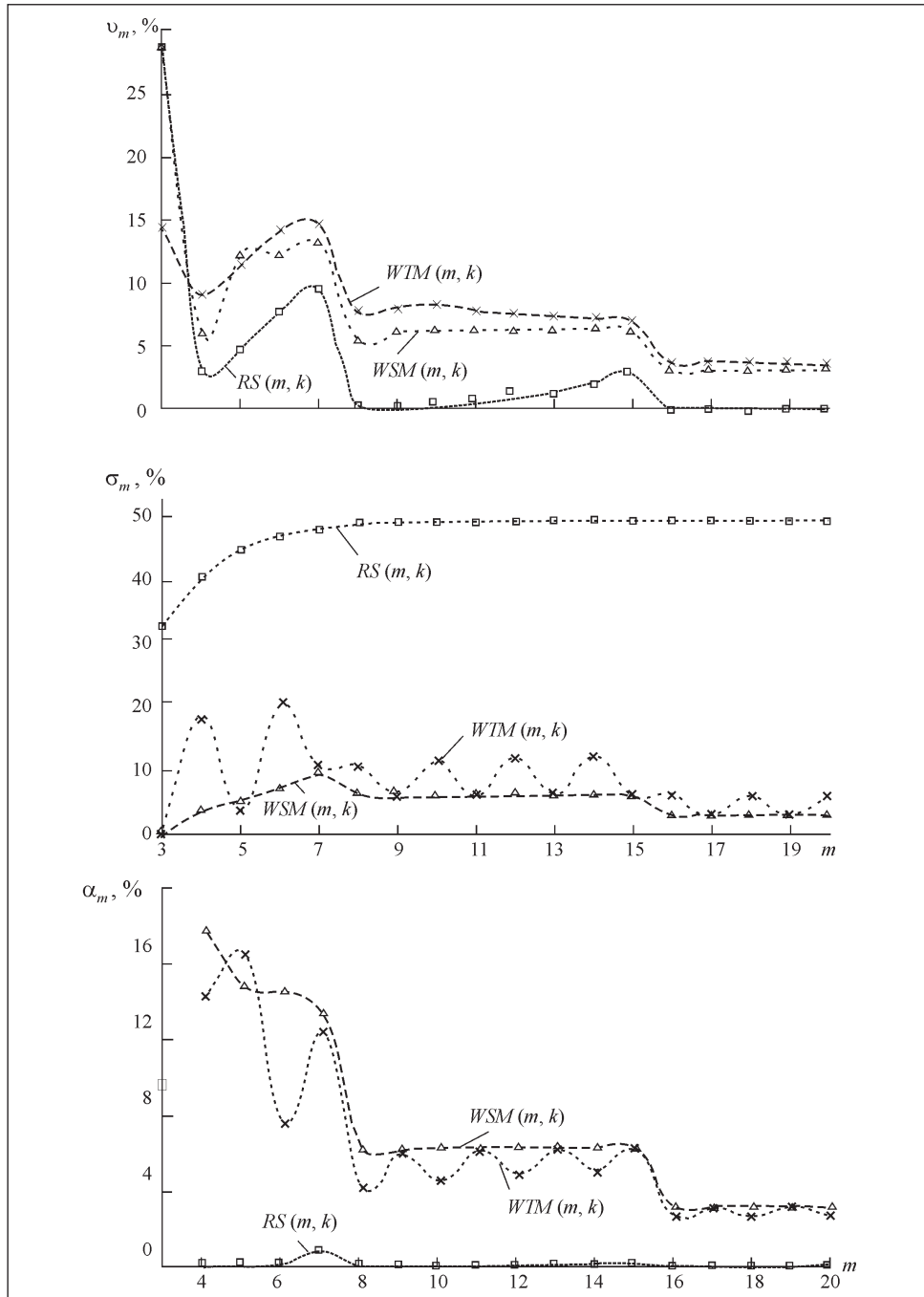


Рис. 2. Графики зависимостей коэффициентов  $v_m$ ,  $\sigma_m$  и  $\alpha_m$  от длины информационного вектора

эта величина составляет  $d = 3$ ; минимальная кратность симметричных ошибок —  $d = 4$ , а асимметричных —  $d = 3$ ;

3) при длинах информационных векторов  $m = 2^t$ ,  $t = 2, 3, \dots$  обнаруживаются любые двукратные ошибки в информационных векторах.

Свойства  $WTM(m, k)$ -кодов:

1) при четных значениях  $m$  обнаруживаются любые ошибки с четными кратностями;

2) при нечетных значениях  $m$  в классе необнаруживаемых есть ошибки с четными и нечетными кратностями;

3) минимальная кратность монотонных и симметричных необнаруживаемых ошибок составляет  $d = 2$ , асимметричных —  $d = 4$  при четных значениях  $m$  и  $d = 3$  — при нечетных значениях  $m$ ;

4) при  $m = 3$  обнаруживаются любые двукратные ошибки в информационных векторах.

Как видно из рис. 1, эффективность обнаружения двукратных ошибок модульно-взвешенными кодами с суммированием достаточно высока. Классические и модифицированные коды Бергера уступают по данному показателю  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -кодам. По показателю обнаружения двукратных ошибок в информационных векторах  $WSM(m, k)$ -коды имеют доминантное положение перед всеми рассматриваемыми кодами: при  $4 \geq m \geq 7$  значение  $\beta_2$  не превышает 10%, а при  $8 \geq m \geq 15$  — 5%; с увеличением длины информационного вектора  $m$  значение  $\beta_2$  уменьшается. Как видим, при длинах информационных векторов  $m = 2^t$ ,  $t = 2, 3, \dots$   $WSM(m, k)$ -кодами обнаруживается 100% двукратных ошибок в информационных векторах. Несколько худшими характеристиками обнаружения двукратных ошибок обладают  $WTM(m, k)$ -коды.

В табл. 3 указаны критерии обнаружения ошибок в порядке ухудшения свойств различных  $(m, k)$ -кодов.

**Результаты экспериментов.** В ходе исследований были проведены эксперименты по фиксации ошибок на выходах контрольных комбина-

Таблица 3. Основные критерии обнаружения ошибок  $(m, k)$ -кодами

Ухудшение свойств кодов	Обнаружение ошибок				
	общее	монотонных	симметричных	асимметричных	двукратных
↓	$WSM(m, k)$	$S(m, k)$	$WSM(m, k)$	$S(m, k)$	$WSM(m, k)$
	$WTM(m, k)$	$RS(m, k)$	$WTM(m, k)$	$WTM(m, k)$	$WTM(m, k)$
	$RS(m, k)$	$WSM(m, k)$	$RS(m, k)$	$WSM(m, k)$	$RS(m, k)$
	$S(m, k)$	$WTM(m, k)$	$S(m, k)$	$RS(m, k)$	$S(m, k)$

Таблица 4. Обнаружение ошибок на выходах контрольных схем различными кодами с суммированием

Номер схемы	Контрольная схема	Число обнаруживаемых ошибок кодами							
		$S(m, k)$		$RS(m, k)$		$WSM(m, k)$		$WTM(m, k)$	
		Общее	Доля от общего, %	Общее	Доля от общего, %	Общее	Доля от общего, %	Общее	Доля от общего, %
1	<i>ст82а</i>	68	0/100/0	64	0/100/0	4	0/100/0	4	0/100/0
2	<i>ст85а</i>	176	0/100/0	64	0/100/0	0	—	0	—
3	<i>b1</i>	2	0/100/0	0	—	0	—	0	—
4	<i>стb</i>	6	0/100/0	0	—	0	—	0	—
5	<i>z4ml</i>	128	0/100/0	64	0/100/0	0	—	8	0/100/0
6	<i>ст162а</i>	1920	0/100/0	7581	79,74/20,26/0	6277	100/0/0	5983	100/0/0
7	<i>ст163а</i>	10368	0/100/0	27808	29/71/0	20288	100/0/0	19092	99,83/0/0,17
8	<i>alu2</i>	7722	0/100/0	2685	4,58/95,42/0	805	84,6/3,48/11,92	2001	56,52/42,18/1,3
9	<i>x2</i>	104	0/100/0	88	45,46/54,54/0	518	100/0/0	102	37,26/54,9/7,84
10	<i>alu4</i>	187276	0/100/0	116607	0/100/0	30732	3,33/0,74/95,93	17966	65,28/15,93/18,79
11	<i>ст138а</i>	0	—	0	—	0	—	0	—
12	<i>f51m</i>	123	0/100/0	39	0/100/0	16	0/100/0	122	96,72/3,28/0
13	<i>ст42а</i>	8	0/100/0	2	0/100/0	0	—	0	—
14	<i>cu</i>	34048	0/100/0	34048	0/100/0	1536	0/0/100	96	100/0/0
15	<i>pt1</i>	27392	0/100/0	14080	0/100/0	2032	0/82,68/17,32	6293	0/91,72/8,28

Примечание: перед первой косой чертой указана доля обнаруживаемых кодом монотонных ошибок, после нее — доля симметричных ошибок, после второй косой черты — доля асимметричных ошибок.



ционных схем различными кодами с суммированием. Для экспериментов выбрана база LGSynth'89, контрольные схемы в которой представлены в формате \*.netblif [41, 42]. Для каждой контрольной комбинационной схемы выполнялись следующие действия:

1. Последовательно вносили все одиночные константные неисправности на выходах внутренних логических элементов.

2. При внесении каждой неисправности на входы схемы подавали все возможные двоичные векторы, на каждом из которых фиксировались выходные значения  $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$ .

3. На каждом входном наборе формируемый вектор  $\langle f_m f_{m-1} \dots f_2 f_1 \rangle$  сравнивали с эталонным вектором на данном наборе (формируемом на выходах исправной схемы).

4. Для каждого из четырех кодов,  $S(m, k)$ ,  $RS(m, k)$ ,  $WSM(m, k)$  и  $WTM(m, k)$ , фиксировали тип ошибки (обнаруживаемая или необнаруживаемая), кратность ошибки и ее вид.

Данный алгоритм позволил получить статистические данные о возможностях обнаружения ошибок на выходах каждой контрольной комбинационной схемы различными кодами с суммированием (табл. 4). Для

Таблица 5. Доли необнаруживаемых ошибок  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -кодами от числа необнаруживаемых ошибок кодами  $S(m, k)$  и  $RS(m, k)$

Номер схемы	Контрольная схема	Доля необнаруживаемых ошибок			
		$\Psi_S, \%$		$\Psi_{RS}, \%$	
		$WSM(m, k)$	$WTM(m, k)$	$WSM(m, k)$	$WTM(m, k)$
1	<i>cm82a</i>	5,88	5,88	6,25	6,25
2	<i>cm85a</i>	0	0	0	0
3	<i>b1</i>	0	0	—	—
4	<i>cmb</i>	0	0	—	—
5	<i>z4ml</i>	0	6,25	0	12,5
6	<i>cm162a</i>	326,93	311,62	82,8	78,92
7	<i>cm163a</i>	195,68	184,14	72,96	68,66
8	<i>alu2</i>	10,43	25,913	29,981	74,53
9	<i>x2</i>	498,08	98,08	588,64	115,91
10	<i>alu4</i>	16,41	9,59	26,36	15,41
11	<i>cm138a</i>	—	—	—	—
12	<i>f51m</i>	13,01	99,19	41,03	312,82
13	<i>cm42a</i>	0	0	0	0
14	<i>cu</i>	4,51	0,28	4,51	0,28
15	<i>pm1</i>	7,42	22,97	14,43	44,7

каждой из 15 схем в табл. 4 представлены общее число необнаруживаемых ошибок, а также доли необнаруживаемых ошибок различных видов от их общего числа. Как видно из табл. 4,  $S(m, k)$ -кодами не обнаруживаются все симметричные ошибки, возникающие на выходах схем, а ошибки других видов обнаруживаются полностью. Для  $RS(m, k)$ -кода в классе необнаруживаемых оказываются только монотонные и симметричные ошибки. При этом на выходах некоторых схем данный код, в отличие от кода Бергера, обнаруживает некоторую долю симметричных ошибок. Асимметричные ошибки обнаруживаются  $RS(m, k)$ -кодом на основе его свойства, а именно: в классе необнаруживаемых для данного кода могут быть асимметричные ошибки только с четной кратностью  $d \geq M + 2$  [43]. При контроле трех схем из 15  $RS(m, k)$ -код обеспечивает 100%-ное обнаружение любых одиночных неисправностей.

При контроле схем кодами  $WSM(m, k)$  и  $WTM(m, k)$  удастся еще больше улучшить показатели обнаружения ошибок. В случае контроля  $WSM(m, k)$ -кодами практически для всех схем, за исключением  $f51m$  и  $pm1$ , эффект достигается за счет обнаружения большого числа симметричных ошибок. Для шести схем из 15 обнаруживаются любые неисправности во внутренней структуре схемы.

Несколько хуже результаты применения  $WTM(m, k)$ -кодов — ими не обнаруживается большое число ошибок на выходах контрольных схем, за исключением некоторых случаев, например схем  $cu$  и  $x2$ . Для пяти схем из 15 при контроле  $WTM(m, k)$ -кодами удастся обнаружить любые неисправности на выходах логических элементов внутренней структуры.

В табл. 5 приведены доли  $\psi_S$  и  $\psi_{RS}$  необнаруживаемых ошибок  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -кодами от числа необнаруживаемых ошибок соответственно кодами  $S(m, k)$  и  $RS(m, k)$ .

Полученные результаты свидетельствуют о том, что применение взвешенных кодов с суммированием при организации контроля комбинационных схем более эффективно по сравнению с использованием классических и модифицированных кодов Бергера.

## Выводы

Предлагаемые способы построения кодов с суммированием позволяют построить коды с минимальным общим числом необнаруживаемых ошибок. Коды  $WSM(m, k)$  и  $WTM(m, k)$  обладают улучшенными характеристиками обнаружения двукратных ошибок в информационных векторах по сравнению с кодами Бергера и модифицированными кодами с суммированием единичных разрядов. Кроме того, коды  $WSM(m, k)$  и  $WTM(m, k)$  обнаруживают большее число симметричных ошибок в информационных

векторах, чем известные коды. По сравнению с  $RS(m, k)$ -кодом  $WSM(m, k)$ - и  $WTM(m, k)$ -коды обнаруживают большее число асимметричных ошибок. Недостатком их следует считать наличие большего числа необнаруживаемых монотонных ошибок, чем у  $RS(m, k)$ -кода.

При построении надежных дискретных устройств применение кодов с суммированием на основе взвешивания разрядов или переходов между разрядами, обладающих минимальным общим числом необнаруживаемых ошибок в информационных векторах, в значительном числе случаев дает лучшие результаты, чем использование классических и модифицированных кодов с суммированием единичных разрядов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McCluskey E.J.* Logic Design Principles: With Emphasis on Testable Semicustom Circuits. N.J.: Prentice Hall PTR, 1986, 549 p.
2. *Согомонян Е.С., Слабаков Е.В.* Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы. М.: Радио и связь, 1989, 208 с.
3. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Самопроверяемые дискретные устройства. СПб: Энергоатомиздат, 1992, 224 с.
4. *Hurst S.L.* VLSI Testing: Digital and Mixed Analogue/Digital Techniques (Circuits, Devices and Systems Series) 1st Edition. London: The Institution of Engineering and Technology, 1998, 552 p.
5. *Nicolaidis M., Zorian Y.* On-Line Testing for VLSI — A Compendium of Approaches // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications, 1998, №12, pp. 7-20.
6. *Mitra S., McCluskey E.J.* Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proc. of International Test Conf., 2000. USA, Atlantic City, NJ, 03-05 October 2000, pp. 985-994.
7. *Matrosova A., Levin I., Ostanin S.A.* Self-Checking Synchronous FSM Network Design with Low Overhead // VLSI Design, 2000, Vol. 11, Issue 1, pp. 47-58.
8. *Lala P.K.* Self-Checking and Fault-Tolerant Digital Design. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001, 216 p.
9. *Dong H.* Modified Berger Codes for Detection of Unidirectional Errors // IEEE Transaction on Computers, 1984, June, Vol. C-33, pp. 572-575.
10. *Nikolos D.* Invited Paper t-Symmetric and d-Unidirectional ( $d > t$ ) Error-Detecting Cyclic AN Arithmetic Codes // Intern. Journal of Electronics, 1990, Vol. 68, Issue 1, pp. 1-22. DOI: 10.1080/00207219008921143.
11. *Jha N.K.* Totally Self-Checking Checker Designs for Bose-Lin, Bose and Blaum Codes // IEEE Transaction on Computer-Aided Design, 1991, Vol. 10, Issue 1, pp. 136-143. DOI 10.1109/43.62799.
12. *Piestrak S.J.* Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1995, 111 p.
13. *Jha N.K., Gupta S.* Testing of Digital Systems. Cambridge University Press, 2003, 1000 p.
14. *Fujiwara E.* Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons, 2006, 720 p.
15. *Мехов В.Б., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Контроль комбинационных схем на основе модифицированных кодов с суммированием // Автоматика и телемеханика, 2008, №8, с. 153-165.

16. *Piestrak S.J., Pillement S, Sentieys O.* Designing Efficient Codecs for Bus-Invert Berger Code for Fully Asymmetric Communication // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2010, Vol. 57, Issue 10, pp. 777-781. DOI: 10.1109/TCSII.2010.2067773.
17. *Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Blyudov A.* On the Problem of Selection of Code with Summation for Combinational Circuit Test Organization // Proc. of 11th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013). Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013, pp. 261-266. DOI 10/1109/EWDTS.2013.6673133.
18. *Dinesh Babu N., Ramani G.* Checkbit Prediction for Logic Functions By Using Dong's Code Method // Intern. Journal of Science and Research (IJSR), 2014, Vol. 3, Issue 11, pp. 946-949.
19. *Chaithra V., Nataraj Urs H.D.* Enhanced Stuck at Zero and Stuck at One Fault Identification in NOC Routers // Intern. Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering, 2016, Vol. 5, Issue 4, pp. 2946-2955. DOI:10.15662/IJAREEIE.2016.0504147.
20. *Berger J.M.* A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels // Information and Control, 1961, Vol. 4, Issue 1, pp. 68-73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
21. *Busaba F.Y., Lala P.K.* Self-Checking Combinational Circuit Design for Single and Unidirectional Multibit Errors // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications, 1994, Vol. 5, Issue 5, pp. 19-28.
22. *Matrosova A.Yu., Ostanin S.A.* Self-Checking Synchronous Sequential Circuit Design for Unidirectional Error // Proc. of the IEEE European Test Workshop (ITW'98). 1998, 27-29 May, Sitges, Barcelona, Spain.
23. *Morosow A, Saposhnikov V.V., Saposhnikov Vl.V., Goessel M.* Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs // VLSI Design, 1998, Vol. 5, Issue 4, pp. 333-345.
24. *Saposhnikov V.V., Morosov A., Saposhnikov Vl.V., Göessel M.* A New Design Method for Self-Checking Unidirectional Combinational Circuits // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications, 1998, Vol. 12, Issue 1-2, pp. 41-53.
25. *Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D.* New Methods of Concurrent Checking: Edition 1. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V., 2008, 184 p.
26. *Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* О свойствах кода с суммированием в схемах функционального контроля // Автоматика и телемеханика, 2010, №6, с. 155-162.
27. *Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* Построение модифицированного кода Бергера с минимальным числом необнаруживаемых ошибок информационных разрядов // Электрон. моделирование, 2012, **34**, №6, с. 17-29.
28. *Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В.* О кодах с суммированием единичных разрядов в системах функционального контроля // Автоматика и телемеханика, 2014, №8, с. 131-145.
29. *Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Efanov D., Blyudov A.* On the Synthesis of Unidirectional Combinational Circuits Detecting All Single Faults // Proc. of 12th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2014). Kyev, Ukraine, 2014, September 26-29, pp. 116-125. DOI 10.1109/EWDTS.2014.7027056.
30. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Построение кодов с суммированием с наименьшим количеством необнаруживаемых симметричных ошибок в информационных векторах // Радиоэлектроника и информатика, 2014, №4, с. 46-55.
31. *Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В.* Контроль комбинационных схем на основе кодов с суммированием с одним взвешенным информационным разрядом // Автоматика на транспорте, 2016, **2**, №4, с. 564-597.
32. *Berger J.M.* A Note on Burst Detection Sum Codes // Information and Control, 1961, Vol. 4, Issue 2-3, pp. 297-299. DOI: 1016/S0019-9958(61)80021-7.

33. Das D., Touba N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits // Proc. of the 17th IEEE VLSI Test Symposium. USA, CA, Dana Point, 1999, April 25-29, pp. 370-376.
34. Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl. New Code for Fault Detection in Logic Circuits // Proc. of 4th Intern. Conf. on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems. St. Petersburg, Russia, 1999, June 21-24, pp. 693-696.
35. Das D., Touba N.A., Seuring M., Gössel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes // Proc. of IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW). Spain, Palma de Mallorca, 2000, July 3-5, pp. 171-176.
36. Mehov V., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Urganskov D. Concurrent Error Detection Based on New Code with Modulo Weighted Transitions between Information Bits // Proc. of 7th IEEE East-West Design & Test Workshop (EWDTW'2007). Erevan, Armenia, 2007, September 25-30, pp. 21-26.
37. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Дмитриев В.В. Новые структуры систем функционального контроля логических схем // Автоматика и телемеханика, 2017, №2, с. 127-143.
38. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Никитин Д.А. Модульно взвешенный код с суммированием для систем технического диагностирования // Информатика и системы управления, 2015, №3, с. 53-62.
39. Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl., Efanov D. et al. Optimum Sum Codes, that Effectively Detect the Errors of Low Multiplicities // RadioElectronics & Informatics, 2015, №1, pp. 17-22.
40. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Классификация ошибок в информационных векторах систематических кодов // Изв. вузов. Приборостроение, 2015, 58, №5, с. 333-343. DOI 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343.
41. Collection of Digital Design Benchmarks. Режим доступа: <http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Benchmarks>.
42. Yang S. Logic Synthesis and Optimization Benchmarks: User Guide: Version 3.0. Microelectronics Center of North Carolina (MCNC), 1991, 88 p.
43. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Применение кодов с суммированием при синтезе систем железнодорожной автоматики и телемеханики на программируемых логических интегральных схемах // Автоматика на транспорте, 2015, 1, № 1, с. 84-107.

Поступила 03.04.17

#### REFERENCES

1. McCluskey, E.J. (1986), Logic design principles: with emphasis on testable semicustom circuits, Prentice Hall PTR, New Jersey, USA.
2. Sogomonyan, E.S. and Slabakov, E.V. (1989), *Samoproveryaemye ustroystva i otkazoustoychivyye sistemy* [Self-checking devices and fault-tolerant systems], Radio i svyaz, Moscow, USSR.
3. Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, Vl.V. (1992), *Samoproveryaemye diskretnyye ustroystva* [Self-checking discrete devices], Energoatomizdat, St. Petersburg, Russia.
4. Hurst, S.L. (1998), VLSI testing: digital and mixed analogue/digital techniques (circuits, devices and systems series), 1st edition, The Institution of Engineering and Technology, London, UK.
5. Nicolaidis, M. and Zorian, Y. (1998), On-line testing for VLSI – a compendium of Approaches, *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, no. 12, pp. 7-20.
6. Mitra, S. and McCluskey, E.J. (2000), Which concurrent error detection scheme to choose?, *Proceedings of International Test Conference*, 2000, USA, Atlantic City, NJ, October, 03-05, 2000, pp. 985-994.

7. Matrosova, A., Levin, I. and Ostanin, S.A. (2000), Self-checking synchronous FSM network design with low overhead, *VLSI Design*, Vol. 11, Iss. 1, pp. 47-58.
8. Lala, P.K. (2001), Self-checking and fault-tolerant digital design, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, USA.
9. Dong, H. (1984), Modified Berger codes for detection of unidirectional errors, *IEEE Transaction on Computers*, Vol. C-33, pp. 572-575.
10. Nikolos, D. (1990), Invited paper t-symmetric and d-unidirectional ( $d > t$ ) error-detecting cyclic AN arithmetic codes, Intern. Journal of Electronics, Vol. 68, Iss. 1, pp. 1-22. DOI: 10.1080/00207219008921143.
11. Jha, N.K. (1991), Totally self-checking checker designs for Bose-Lin, Bose and Blaum codes, *IEEE Transaction on Computer-Aided Design*, Vol. 10, Iss. 1, pp. 136-143. DOI 10.1109/43.62799.
12. Piestrak, S.J. (1995), Design of self-testing checkers for unidirectional error detecting codes. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, Poland.
13. Jha, N.K. and Gupta, S. (2003), Testing of digital systems, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
14. Fujiwara, E. (2006), Code design for dependable systems: Theory and practical applications, John Wiley & Sons, New Jersey, USA.
15. Mekhov, V.B., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, V.I. (2008), "Control of combinational circuits basing on modified sum codes", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 8, pp. 153-165.
16. Piestrak, S.J., Pillement, S. and Sentieys, O. (2010), Designing efficient codes for bus-invert Berger code for fully asymmetric communication, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 57, Iss. 10, pp. 777-781. DOI: 10.1109/TCSII.2010.2067773.
17. Efanov, D., Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, V.I. and Blyudov, A. (2013), On the problem of selection of code with summation for combinational circuit test organization, *Proceedings of the 11th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2013)*, Rostov-on-Don, Russia, September 27-30, 2013, pp. 261-266. DOI 10.1109/EWDTS.2013.6673133.
18. Dinesh Babu, N. and Ramani, G. (2014), Checkbit prediction for logic functions by using Dong's code method, *International Journal of Science and Research (IJSR)*, Vol. 3, Iss. 11, pp. 946-949.
19. Chaithra, V. and Nataraj Urs, H.D. (2016), Enhanced stuck at zero and stuck at one fault identification in NOC routers, *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*, Vol. 5, Iss. 4, pp. 2946-2955. DOI:10.15662/IJAREEIE.2016.0504147.
20. Berger, J.M. (1961), A note on error detecting codes for asymmetric channels, *Information and Control*, Vol. 4, Iss. 1, pp. 68-73. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80037-5.
21. Busaba, F.Y. and Lala, P.K. (1994), Self-checking combinational circuit design for single and unidirectional multibit errors, *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, Vol. 5, Iss. 5, pp. 19-28.
22. Matrosova, A.Yu. and Ostanin, S.A. (1998), Self-checking synchronous sequential circuit design for unidirectional error, *Proceedings of the IEEE European Test Workshop (ITW'98)*, May 27-29, 1998, Sitges, Barcelona, Spain.
23. Morosow, A., Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, V.I. and Göessel, M. (1998), Self-Checking Combinational Circuits with Unidirectionally Independent Outputs, *VLSI Design*, Vol. 5, Iss. 4, pp. 333-345.
24. Sapozhnikov, V.V., Morosov, A., Sapozhnikov, V.I. and Göessel, M. (1998), A new design method for self-checking unidirectional combinational circuits, *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*, Vol. 12, Iss. 1-2, pp. 41-53.
25. Göessel, M., Ocheretny, V., Sogomonyan, E. and Marienfeld, D. (2008), New methods of concurrent checking: Edition 1, Springer Science+Business Media B.V., Dodrecht, Germany.
26. Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, V.I. (2010), "On sum code properties in concurrent error detection systems, *Avtomatika i telemekhanika*, no. 6, pp. 155-162.

27. Blyudov, A.A., Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, VI.V. (2012), "Formation of the Berger modified code with minimum number of undetectable errors of data bits", *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 34, no. 6, pp. 17-29.
28. Blyudov, A.A., Efanov, D.V., Sapozhnikov, V.V. and Sapozhnikov, VI.V. (2014), "On codes with summation of data bits in concurrent error detection systems", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 8, pp. 131-145.
29. Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, VI., Efanov, D. and Blyudov, A. (2014), On the Synthesis of Unidirectional Combinational Circuits Detecting All Single Faults, *Proceedings of the 12th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2014)*, Kyiv, Ukraine, September 26-29, 2014, pp. 116-125. DOI 10.1109/EWDTS.2014.7027056.
30. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. and Efanov, D.V. (2014), "Formation of codes with summation with the smallest number of undetectable errors of data bits", *Radioelektronika i informatika*, no. 4, pp. 46-55.
31. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. and Efanov, D.V. (2016), "Checking of combinational circuits based on sum codes with one weighed data bit", *Avtomatika na transporte*, Vol. 2, no. 4, pp. 564-597.
32. Berger, J.M. (1961), A note on burst detection sum codes, *Information and Control*, Vol. 4, Iss. 2-3, pp. 297-299. DOI: 10.1016/S0019-9958(61)80024-7.
33. Das, D. and Touba, N.A. (1999), Weight-based codes and their application to concurrent error detection of multilevel circuits, *Proceedings of 17th IEEE Test Symposium*, USA, California, April 25-29, 1999, pp. 370-376.
34. Sapozhnikov, V. and Sapozhnikov, VI. (1999), New code for fault detection in logic circuits, *Proceedings of the 4th Intern. Conf. on Unconventional Electromechanical and Electrical Systems*, St. Petersburg, Russia, June 21-24, 1999, pp. 693-696.
35. Das, D., Touba, N.A., Seuring, M. and Göessel, M. (2000), Low cost concurrent error detection based on modulo weight-based codes, *Proceedings of IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW)*, Spain, Palma de Mallorca, July 3-5, 2000, pp. 171-176.
36. Mehov, V., Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, VI. and Urganskov, D. (2007), Concurrent error detection based on new code with modulo weighted transitions between information bits, *Proceedings of the 7th IEEE East-West Design & Test Workshop (EWDTW'2007)*, Erevan, Armenia, September 25-30, 2007, pp. 21-26.
37. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V., Efanov, D.V. and Dmitriev, V.V. (2017), "New structures of the concurrent error detection systems for logic circuits", *Avtomatika i telemekhanika*, no. 2, pp. 127-143.
38. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V., Efanov, D.V. and Nikitin, D.A. (2015) "Modulo weighted code with summation for the systems of technical diagnosis", *Informatika i sistemy upravleniya*, no. 3, pp. 53-62.
39. Sapozhnikov, V., Sapozhnikov, VI., Efanov, D. et al. (2015), Optimum sum codes, that effectively detect the errors of low multiplicities, *Radioelectronics and Informatics*, no. 1, pp. 17-22.
40. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. and Efanov, D.V. (2015), "Errors classification in information vectors of systematic codes", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie*, Vol. 58, no. 5, pp. 333-343. DOI 10.17586/0021-3454-2015-58-5-333-343.
41. Collection of digital design benchmarks, available at: <http://ddd.fit.cvut.cz/prj/Benchmarks/>.
42. Yang, S. (1991), Logic synthesis and optimization benchmarks: User Guide: Version 3.0, Microelectronics Center of North Carolina (MCNC), USA.
43. Sapozhnikov, V.V., Sapozhnikov, VI.V. and Efanov, D.V. (2015), "Application of sum codes for synthesis of railway automation and remote control at programmable logic integrated circuits", *Avtomatika na transporte*, Vol. 1, no. 1, pp. 84-107.

Received 03.04.17

*V.V. Sapozhnikov, V.I. Sapozhnikov, D.V. Efanov*

MODULO WEIGHTED CODES WITH SUMMATION WITH THE MINIMUM NUMBER OF UNDETECTABLE ERRORS IN DATA VECTORS

The paper deals with two ways of code formation with summation; these codes have the minimum number of undetectable errors in data vectors and the same number of check bits as Berger's classic codes. These ways are based on the weighing the bits and transitions between bits taking adjacent positions in the data vectors using natural sequence of weight factors forming a natural number series. Some key error detection features in data vectors of these codes are analyzed; they show the difference of these codes from the Berger codes and their known modifications. Efficiency of the developed codes under the control of errors which appear at the circuit output is shown on the basis of experiments with the monitoring combination circuits.

*Keywords: discrete devices, technical diagnostics, Berger code, modified Berger code, error detection.*

*САПОЖНИКОВ Валерий Владимирович, д-р техн. наук, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I. В 1963 г. окончил Ленинградский ин-т инженеров железнодорожного транспорта. Область научных исследований — надежность синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем.*

*САПОЖНИКОВ Владимир Владимирович, д-р техн. наук, профессор кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I. В 1963 г. окончил Ленинградский ин-т инженеров железнодорожного транспорта. Область научных исследований — надежность синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем.*

*ЕФАНОВ Дмитрий Викторович, канд. техн. наук, доцент кафедры «Автоматика и телемеханика на железных дорогах» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I. В 2007 г. окончил Петербургский государственный университет путей сообщения. Область научных исследований — дискретная математика, надежность и техническая диагностика дискретных систем.*







УДК 004.7.052

**М.И. Фаттахова**, д-р техн. наук, **Г.М. Велиджанова**  
Ин-т систем управления НАН Азербайджана  
(Азербайджан, АЗ1141, Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9,  
тел. +994 12 5392560, e-mail: meri-fattah@mail.ru),  
**Г.А. Кадыров**  
Национальная академия авиации Азербайджана  
(Азербайджан, АЗ1045, Баку, пр-т Мардакан, 30,  
тел. +994 12 4972600)

### **Анализ схем разделения каналов в сотовых сетях связи без очередей \***

Предложены две схемы разделения каналов в интегральных сотовых сетях связи, в которых осуществляется обработка узкополосных речевых вызовов и вызовов данных, являющихся широкополосными. В обеих схемах весь пул каналов изолированно разделен между разнотипными вызовами, имеется общая зона каналов для обслуживания разнотипных вызовов. В одной схеме индивидуальные и общая зоны каналов используются равноправно вызовами любого типа. В другой схеме индивидуальные зоны используются согласно стратегии резервирования каналов для соответствующих хэндовер вызовов и в общей зоне обслуживаются лишь хэндовер вызовы. Разработаны алгоритмы расчета показателей качества обслуживания каждой схемы распределения каналов при заданных значениях числа каналов и нагрузок разнотипных вызовов. Приведены результаты численных экспериментов.

*К л ю ч е в ы е с л о в а: сотовая сеть, разделение каналов, качество обслуживания, методы расчета.*

Запропоновано дві схеми розподілу каналів у інтегральних сотових сітках зв'язку, в яких здійснюється обробка нових і хендовер викликів даних та викликів мовлення. У кожній схемі весь пул каналів ізольовано розподілено між різнотипними викликами та є загальна зона каналів для обслуговування різнотипних викликів. У одній схемі індивідуальні та загальна зони використовуються рівноправно викликами будь-якого типу. У другій схемі індивідуальні зони використовуються згідно стратегії резервування каналів для відповідних хендовер викликів, а у загальній зоні обслуговуються лише хендовер виклики. Розроблено алгоритми розрахунку показників якості обслуговування кожної схеми розподілу каналів при заданих значеннях їх кількості та навантажень різнотипних викликів. Наведено результати числових експериментів.

*К л ю ч о в і с л о в а: сотова сітка, розподіл каналів, якість обслуговування, методи розрахунку.*

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики. Грант № EIF-RITN-MQM-2-2013-7(13)-29/01/1

© М.И. Фаттахова, Г.М. Велиджанова, Г.А. Кадыров, 2017

Разделение общего пула каналов между разнотипными вызовами является эффективным средством для удовлетворения заданных требований к качеству обслуживания (Quality of Service, QoS) в сетях сотовой связи (ССС). Соответствующие проблемы детально изложены в работах [1—10].

Проблемы распределения общего пула каналов между разнотипными вызовами подробно изучены для моделей с разнотипными вызовами, требующими одинаковых полос пропускания (каналов). Вместе с тем, в СССР для передачи вызовов данных требуется одновременно несколько каналов (т.е. вызовы данных являются широкополосными), а для передачи вызовов речи достаточно лишь одного свободного канала (т.е. вызовы речи являются узкополосными). Анализ доступной литературы показал, что задачи распределения общего пула каналов между разнотипными вызовами в таких моделях недостаточно изучены [11—14].

Оригинальная схема (Dynamic Partition, DP) разделения каналов в СССР предложена в работе [15], согласно которой общий пул каналов делится на три изолированные зоны: по одной индивидуальной зоне для речевых вызовов и вызовов данных и общая зона для совместного использования. В зоне каналов для речевых вызовов ограничивается доступ новых вызовов речи, т.е. такие вызовы принимаются лишь тогда, когда число занятых каналов в соответствующей индивидуальной зоне меньше определенной пороговой величины. Общую зону разнотипные вызовы используют равноправно. В качестве математической модели этой системы используется трехмерная цепь Маркова (ЦМ), для расчета стационарного распределения которой разработан рекурсивный метод. Показатели QoS при использовании DP-схемы разделения каналов находят как соответствующие маргинальные распределения этой цепи.

Предлагаемые схемы изолированного разделения каналов идейно близки к DP-схеме [15], но имеют следующие отличия:

- 1) в них различаются новые и хэндовер вызовы данных;
- 2) предполагается, что общая зона каналов может быть использована лишь хэндовер вызовами данных и речи;
- 3) задается ограничение на максимальное число хэндовер вызовов речи в общей зоне каналов (с целью уменьшения вероятности потери широкополосных вызовов данных).

Главное отличие состоит в том, что для исследования этой схемы предложен аналитический подход, подобный использованному в работе [16], где изучены модели СССР, в которых для разнотипных вызовов требуются одинаковые полосы пропускания. В отличие от [16] здесь получены явные формулы для вычисления показателей QoS сети при использовании обеих схем разделения каналов и проведены численные эксперименты.

**Описание моделей и постановка задачи.** Базовая станция изолированной соты сети имеет  $N > 1$  радиоканалов. В этих каналах обрабатываются четыре пуассоновских потока вызовов: хэндовер речевые вызовы ( $hv$ -вызовы), новые речевые вызовы ( $ov$ -вызовы), хэндовер вызовы данных ( $hd$ -вызовы) и новые вызовы данных ( $od$ -вызовы).

Для обработки вызовов речи (новых и хэндовер) требуется лишь один канал, а для обработки вызовов данных (новых и хэндовер) требуются одновременно  $b, b > 1$ , каналов. Весь пул каналов разделен на три группы:  $N_v$  каналов из общего числа  $N$  каналов выделяются лишь для речевых вызовов ( $v$ -вызовов),  $N_d$  каналов из общего числа  $N$  каналов выделяются лишь для вызовов данных ( $d$ -вызовы), а остальные  $N_{vd} = N - N_v - N_d$  каналов используются совместно вызовами речи и данных. Иными словами, весь пул из  $N$  каналов делится на три зоны: индивидуальную зону из  $N_v$  каналов ( $v$ -зона лишь для  $v$ -вызовов), индивидуальную зону из  $N_d$  каналов ( $d$ -зона лишь для  $d$ -вызовов) и общую из  $N_{vd}$  каналов ( $vd$ -зона для  $v$ - и  $d$ -вызовов). Изолированность распределения каналов означает, что ни один канал не может быть переведен из одной зоны в другую. При этом для эффективного использования  $d$ -зоны каналов полагаем, что  $b$  является делителем  $N_d$ , т.е.  $N_d = K_d b$ , где  $K_d$  — максимально возможное число  $d$ -вызовов в указанной зоне каналов.

Интенсивность  $x$ -вызовов равна  $\lambda_x, x \in \{hv, ov, hd, od\}$ . Функции распределения времени занятия каналов разнотипными вызовами являются экспоненциальными, среднее время занятия канала для одного речевого вызова (нового или хэндовер) равно  $1/\mu_v$ , а соответствующий показатель для вызовов данных (новых или хэндовер) равен  $1/\mu_d$ . Идентичность средних времен занятия каналов новых и хэндовер вызовов обоих типов объясняется отсутствием памяти экспоненциального распределения. Функция распределения времени занятия канала  $v$ -вызовом ( $d$ -вызовом) каждого типа в  $vd$ -зоне также является экспоненциальной с тем же средним.

Рассмотрим две схемы доступа вызовов в общую зону каналов.

**С х е м а I.** В этой схеме нет различий между новыми и хэндовер вызовами обоих трафиков. Разнотипные вызовы используют каналы соответствующих индивидуальных зон согласно полнодоступной схеме (Complete Sharing, CS), т.е. если в момент поступления вызова речи (данных) любого типа имеется хотя бы один свободный канал в соответствующей индивидуальной зоне, то он занимает любой свободный канал этой зоны, иначе — поиск свободного канала осуществляется в общей зоне. Это означает, что поступивший вызов речи (новый или хэндовер) принимается в  $vd$ -зону, если в этой зоне имеется хотя бы один свободный канал, в противном случае поступивший в  $vd$ -зону вызов речи теряется. Точно

также поступивший вызов данных (новый или хэндовер) принимается в  $vd$ -зону, если в этой зоне имеются хотя бы  $b$  свободных каналов, в противном случае, т.е. если число свободных каналов в общей зоне меньше  $b$ , то поступивший в  $vd$ -зону вызов данных теряется.

**С х е м а II.** В этой схеме внутри индивидуальных зон используется стратегия резервирования каналов для соответствующих хэндовер вызовов. Это означает, что если в момент поступления  $hv$ -вызова имеется хотя бы один свободный канал в  $v$ -зоне, то он занимает любой свободный канал этой зоны. Если в момент поступления  $ov$ -вызова число занятых каналов в этой зоне меньше  $G_{ov}$ ,  $1 \leq G_{ov} \leq N_v$ , то он занимает любой свободный канал этой зоны. В противном случае поиск свободного канала происходит в  $vd$ -зоне.

Доступ  $d$ -вызовов осуществляется следующим образом. Если в момент поступления  $hd$ -вызова имеется хотя бы один свободный канал в  $d$ -зоне, то он занимает любой свободный канал этой зоны. Если в момент поступления  $od$ -вызова число занятых каналов в этой зоне меньше  $G_{od}$ ,  $1 \leq G_{od} \leq N_d$ , то он занимает любые  $b$  свободных каналов этой зоны. В противном случае поиск свободных каналов осуществляется в  $vd$ -зоне. Далее будем полагать, что  $b$  является делителем  $G_d$ , т.е.  $G_{od} = R_{od}b$ , при этом  $R_{od} < K_d$ .

Предположим, что лишь хэндовер вызовы речи и данных могут обрабатываться в общей зоне при ограничении на максимальное число хэндовер речевых вызовов в общей зоне. Это означает, что поступивший хэндовер вызов речи принимается в  $vd$ -зону для обслуживания, если имеется хотя бы один свободный канал в этой зоне и число вызовов данного типа в этой зоне меньше, чем некоторый пороговый параметр  $R_{hv}$ ,  $1 \leq R_{hv} \leq N_{vd}$ . В остальных случаях, т.е. когда все каналы общей зоны заняты или число вызовов речи равно  $R_{hv}$ , поступивший в  $vd$ -зону вызов речи теряется. Здесь, как и выше, отсутствует ограничение на число хэндовер вызовов данных в общей зоне.

Основными показателями QoS разнотипных вызовов являются вероятности их потери. Проблема состоит в нахождении параметров  $P_x$ ,  $x \in \{hv, ov, hd, od\}$  и  $C_u$  — коэффициента использования каналов общей зоны.

**Метод расчета.** Согласно схеме I  $v$ - и  $d$ -вызовы, получившие отказ в своей (индивидуальной) зоне каналов, поступают в общую зону. Интенсивность поступления  $v$ -вызовов ( $\tilde{\lambda}_v$ ) и  $d$ -вызовов ( $\tilde{\lambda}_d$ ) в общую зону определяются так:  $\tilde{\lambda}_v = \lambda_v P_v^{(i)}$ ,  $\tilde{\lambda}_d = \lambda_d P_d^{(i)}$ , где  $\lambda_v = \lambda_{ov} + \lambda_{hv}$ ,  $\lambda_d = \lambda_{od} + \lambda_{hd}$ ;  $P_v^{(i)}$  и  $P_d^{(i)}$  — вероятности потери соответственно  $ov$ -вызовов и  $hd$ -вызовов в  $v$ -зоне каналов. Очевидно, что величины  $P_v^{(i)}$  и  $P_d^{(i)}$  определяются как

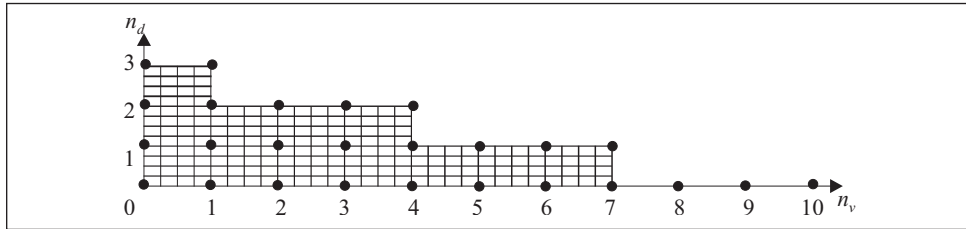


Рис. 1. Вид ФПС модели согласно схеме I при  $b=3, N_{vd}=10$

вероятности потери в классических моделях Эрланга  $M/M/N_v/0$  и  $M/M/K_d/0$  с нагрузками соответственно  $v_v = \lambda_v / \mu_v$  и  $v_d = \lambda_d / \mu_d$ , т.е. с помощью  $B$ -формулы Эрланга:

$$P_i^{(i)} = \frac{v_v^{N_v} / N_v!}{\sum_{k=0}^{N_v} v_v^k / k!}, \quad P_d^{(i)} = \frac{v_d^{K_d} / K_d!}{\sum_{k=0}^{K_d} v_d^k / k!}.$$

Потерянные в индивидуальных зонах разнотипные вызовы поступают в общую зону, которая имеет  $N_{vd} > 1$  каналов. Поэтому необходимо исследовать систему обслуживания с двумя пуассоновскими потоками с интенсивностями  $\tilde{\lambda}_v$  и  $\tilde{\lambda}_d$ . Поскольку средние времена обработки новых и хэндовер вызовов каждого типа одинаковы, состояние данной системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором  $\mathbf{n} = (n_d, n_v)$ , где  $n_d$  и  $n_v$  — соответственно суммарное число  $d$ -вызовов и  $v$ -вызовов в общей зоне. В схеме I разнотипные вызовы равноправно используют каналы общей зоны, поэтому фазовое пространство состояний (ФПС) соты определяется так (рис. 1):  $S_1 = \{\mathbf{n} : n_d = 0, 1, \dots, [N_{vd}/b], n_v = 0, 1, \dots, N_{vd}; n_d b + n_v \leq N_{vd}\}$ , где  $[x]$  — целая часть  $x$ .

Элементы производящей матрицы данной двумерной ЦМ обозначим  $q_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ . Эти величины определяются из следующих соотношений (рис. 2):

$$q_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \begin{cases} \tilde{\lambda}_d, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_1, \\ \tilde{\lambda}_v, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_2, \\ n_d \mu_d, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1, \\ n_v \mu_v, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1)$$

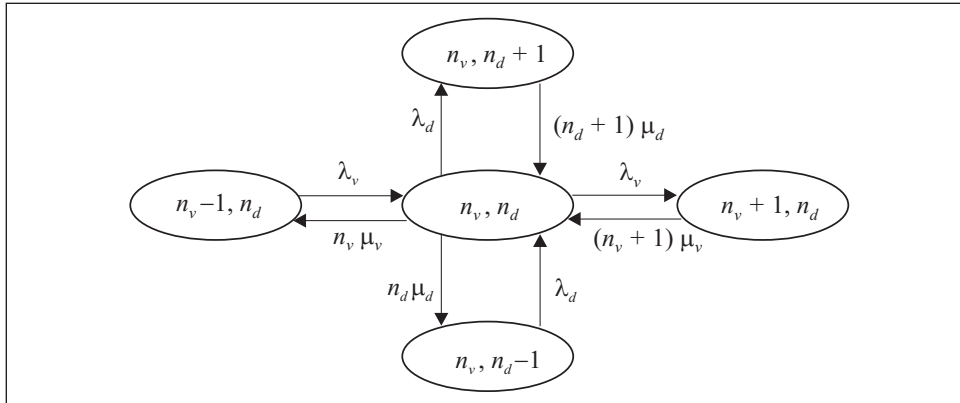


Рис. 2. Диаграмма переходов между состояниями модели

где  $\mathbf{e}_1 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (1, 0)$ . Вероятность состояния  $(n_d, n_v)$  обозначим через  $p_1(n_d, n_v)$ .

**Утверждение 1.** Стационарное распределение вероятностей состояний системы при использовании схемы I имеет следующий вид:

$$p_1(n_d, n_v) = p_1(0, 0) \frac{\tilde{v}_d^{n_d} \tilde{v}_v^{n_v}}{n_d! n_v!}, \quad (2)$$

где  $\tilde{v}_d = \tilde{\lambda}_d / \mu_d$ ;  $\tilde{v}_v = \tilde{\lambda}_v / \mu_v$ ;  $p_1(0, 0)$  находим из условия нормировки, т.е.  $\sum_{(n_d, n_v) \in S_1} p_1(n_d, n_v) = 1$ .

**Доказательство.** Из теоремы Колмогорова [17] об обратимости двумерных ЦМ вытекает, что в данной системе существует нулевая циркуляция между ее состояниями, т.е. удовлетворяется условие локального баланса. Тогда можно выразить вероятность любого состояния  $(n_d, n_v)$  через вероятность состояния  $(0, 0)$ . При этом можно выбирать любой путь между этими двумя состояниями в соответствующем графе переходов между состояниями цепи. Таким образом, если выбран путь  $(0, 0), (1, 0), \dots, (n_d, 0), (n_d, 1), \dots, (n_d, n_v)$  между состояниями  $(0, 0)$  и  $(n_d, n_v)$ , то мультипликативное представление (2) справедливо для нахождения вероятностей состояний изучаемой модели.

Поскольку речевые вызовы теряются в случае, когда все каналы общей зоны заняты, вероятности потери таких вызовов вычисляем по следующей формуле:

$$P_v = \sum_{(n_d, n_v) \in S_1} p_1(n_d, n_v) I(n_v + bn_d = N_{vd}),$$

где  $I(A)$  — индикаторная функция события  $A$ . Вызовы данных теряются, когда число свободных каналов общей зоны меньше  $b$ , следовательно, вероятность потери таких вызовов вычисляем по формуле:

$$P_d = \sum_{(n_d, n_v) \in S_1} p_1(n_d, n_v) I(N_{vd} - n_v - bn_d < b). \quad (3)$$

Коэффициент использования каналов общей зоны определяется так:

$$C_u = \left( \sum_{(n_d, n_v) \in S_1} p_1(n_d, n_v)(n_v + bn_d) \right) / N_{vd}. \quad (4)$$

Рассмотрим схему II. Интенсивность поступления  $ov$ -вызовов ( $\tilde{\lambda}_{ov}$ ) и  $hv$ -вызовов ( $\tilde{\lambda}_{hv}$ ) в общую зону определяется так:

$$\tilde{\lambda}_{ov} = \lambda_{ov} P_{ov}^{(i)}, \quad \tilde{\lambda}_{hv} = \lambda_{hv} P_{hv}^{(i)}, \quad (5)$$

где  $P_{ov}^{(i)}$  и  $P_{hv}^{(i)}$  — вероятности потери  $ov$ -вызовов и  $hv$ -вызовов в  $v$ -зоне каналов. Аналогично вычисляем интенсивности поступления  $od$ -вызовов ( $\tilde{\lambda}_{od}$ ) и  $hd$ -вызовов ( $\tilde{\lambda}_{hd}$ ) в общую зону:

$$\tilde{\lambda}_{od} = \lambda_{od} P_{od}^{(i)}, \quad \tilde{\lambda}_{hd} = \lambda_{hd} P_{hd}^{(i)}, \quad (6)$$

где  $P_{od}^{(i)}$  и  $P_{hd}^{(i)}$  — вероятности потери  $od$ - и  $hd$ -вызовов в  $d$ -зоне каналов.

Рассмотрим задачу нахождения вероятностей потери  $ov$ -вызовов и  $hv$ -вызовов в  $v$ -зоне каналов. Поскольку рассматривается изолированная схема разделения каналов, можно использовать систему обслуживания с двумя типами вызовов, в которой используется схема резервирования каналов для  $hv$ -вызовов. Состояние этой системы может быть задано параметром  $i, i = 0, 1, \dots, N_v$ , который указывает число занятых каналов системы. Эти состояния образуют процесс размножения и гибели, где интенсивность перехода из состояния  $i$  в состояние  $i + 1$  равна  $\lambda_v$ , если  $i < G_{ov}$ , иначе — указанная интенсивность равна  $\lambda_{hv}$ . Интенсивность перехода из состояния  $i$  в состояние  $i - 1$  равна  $i\mu_v$ .

Вероятность состояния  $i$  этого процесса обозначим  $\rho_v(i)$ . Тогда, используя общее решение для процессов размножения и гибели, получаем

$$\rho_v(i) = \begin{cases} \frac{v_v^i}{i!} \rho_v(0), & \text{если } 0 \leq i \leq G_{ov}, \\ \left( \frac{v_v}{v_{hv}} \right)^{G_{ov}} \frac{v_{hv}^i}{i!} \rho_v(0), & \text{если } G_{ov} + 1 \leq i \leq N_v, \end{cases}$$



где  $v_v = (\lambda_{ov} + \lambda_{hv}) / \mu_v$ ;  $v_{hv} = \lambda_{hv} / \mu_v$ ;  $\rho_v(0)$  находим из условия нормировки,

$$\rho_v(0) = \left( \sum_{i=0}^{G_{ov}} \frac{v_v^i}{i!} + \left( \frac{v_v}{v_{hv}} \right)^{G_{ov}} \sum_{i=G_{ov}+1}^{N_v} \frac{v_{hv}^i}{i!} \right)^{-1}.$$

Следовательно, искомые вероятности потери  $ov$ -вызовов и  $hv$ -вызовов в  $v$ -зоне каналов определяются так:

$$P_{ov}^{(i)} = \sum_{i=G_{ov}}^{N_v} \rho_v(i), \quad P_{hv}^{(i)} = \rho_v(N_v). \quad (7)$$

Теперь рассмотрим задачу нахождения вероятностей потери  $od$ -вызовов и  $hd$ -вызовов в  $d$ -зоне каналов. Поскольку  $d$ -вызовы требуют для обслуживания одновременно  $b$  каналов, состояние  $d$ -зоны каналов может быть задано параметром  $i, i = 0, 1, \dots, K_d$ , который указывает число вызовов в этой зоне. Эти состояния образуют процесс размножения и гибели, где интенсивность перехода из состояния  $i$  в состояние  $i+1$  равна  $\lambda_d$ , если  $i < R_{od}$ , иначе указанная интенсивность равна  $\lambda_{hd}$ . Интенсивность перехода из состояния  $i$  в состояние  $i-1$  равна  $i\mu_d$ . Тогда вероятности состояний этого процесса вычисляются так:

$$\rho_d(i) = \begin{cases} \frac{v_d^i}{i!} \rho_d(0), & \text{если } 0 \leq i \leq R_{od}, \\ \left( \frac{v_d}{v_{hd}} \right)^{R_{od}} \frac{v_{hd}^i}{i!} \rho_d(0), & \text{если } R_{od} + 1 \leq i \leq K_d, \end{cases}$$

где

$$v_d = (\lambda_{od}d + \lambda_{hd}) / \mu_d; \quad v_{hd} = \lambda_{hd} / \mu_d;$$

$$\rho_d(0) = \left( \sum_{i=0}^{R_{od}} \frac{v_d^i}{i!} + \left( \frac{v_d}{v_{hd}} \right)^{R_{od}} \sum_{i=R_{od}+1}^{K_d} \frac{v_{hd}^i}{i!} \right)^{-1}.$$

Аналогично (7) находим вероятности потери  $od$ -вызовов и  $hd$ -вызовов в  $d$ -зоне каналов:

$$P_{od}^{(i)} = \sum_{i=R_{od}}^{K_d} \rho_d(i), \quad P_{hd}^{(i)} = \rho_d(K_d). \quad (8)$$

Потерянные в индивидуальных зонах новые вызовы речи и данных окончательно теряются. Следовательно, вероятности их потери в данной схеме определяются по формулам (7) и (8). Вместе с тем, в данной схеме

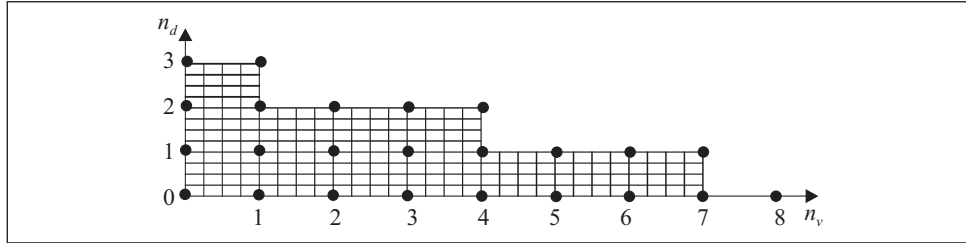


Рис. 3. Вид ФПС модели согласно схеме II при  $b = 3, N_{vd} = 10, R_{hv} = 8$

потерянные в индивидуальных зонах хэндовер вызовы поступают в общую зону, которая имеет  $N_{vd} > 1$  каналов. Исследуем систему обслуживания с  $N_{vd}$  каналами и двумя пуассоновскими потоками при интенсивностях  $\tilde{\lambda}_{hv}$  и  $\tilde{\lambda}_{hd}$  (см. (5), (6)).

Как и ранее, состояние данной системы в произвольный момент времени определяется двумерным вектором  $\mathbf{n} = (n_d, n_v)$ , где  $n_d$  и  $n_v$  — суммарное число  $d$ -вызовов и  $v$ -вызовов в общей зоне. В схеме II  $hd$ -вызовы принимаются при наличии  $b$  свободных каналов, а максимальное число  $hv$ -вызовов в каналах не должно превышать пороговое значение  $R_v$ . Следовательно, ФПС соты в данной схеме имеет вид  $S_2 = \{\mathbf{n} : n_d = 0, 1, \dots, [N_{vd} / b], n_v = 0, 1, \dots, R_{hv}; n_d b + n_v \leq N_{vd}\}$  (рис. 3).

Элементы производящей матрицы данной двумерной ЦМ определяются аналогично (1):

$$q_1(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \begin{cases} \tilde{\lambda}_{hd}, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_1, \\ \tilde{\lambda}_{hv}, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{e}_2, \\ n_d \mu_d, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_1, \\ n_v \mu_v, & \text{если } \mathbf{n}' = \mathbf{n} - \mathbf{e}_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

При использовании схемы II вероятность состояния  $(n_d, n_v)$  обозначим через  $p_2(n_d, n_v)$ .

**Утверждение 2.** Стационарное распределение вероятностей состояний системы при использовании схемы II имеет следующий вид:

$$p_2(n_d, n_v) = p_2(0, 0) \frac{\tilde{v}_{hd}^{n_d} \tilde{v}_{hv}^{n_v}}{n_d! n_v!},$$

где  $\tilde{v}_{hd} = \tilde{\lambda}_{hd} / \mu_d$ ;  $\tilde{v}_{hv} = \tilde{\lambda}_{hv} / \mu_v$ ;  $p_2(0, 0)$  находится из условия нормировки.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

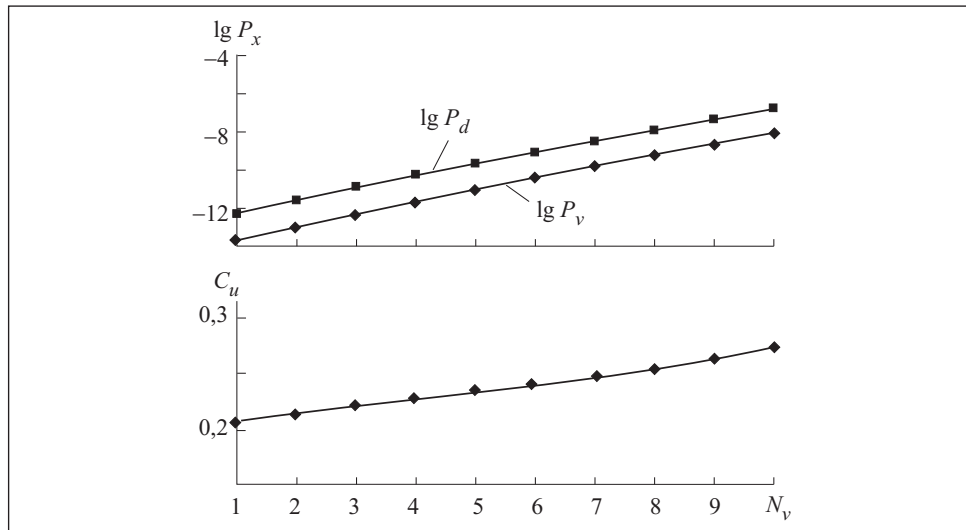


Рис. 4. Зависимости вероятностей потери вызовов речи  $P_v$  и данных  $P_d$ , а также коэффициента использования каналов  $C_u$  от  $N_v$ .

При использовании схемы II вероятность потери хэндовер речевых вызовов в общей зоне каналов определяется так:

$$P_{hv} = \sum_{(n_d, n_v) \in S_2} p_2(n_d, n_v) (\delta(n_v, R_{hv}) + \bar{\delta}(n_v, R_{hv}) I(n_v + bn_d = N_{vd})),$$

где  $\delta(i, j)$  — символы Кронекера,  $\bar{\delta}(i, j) = 1 - \delta(i, j)$ . Вероятность потери хэндовер вызовов данных и коэффициент использования каналов в общей зоне определяются аналогично (3) и (4).

**Результаты численных экспериментов.** Рассмотрим изменения показателей QoS в зависимости от объемов различных зон каналов в каждой схеме. Будем считать нагрузочные параметры модели фиксированными.

**С х е м а I.** Предположим, что общее число каналов системы  $N$  и размер зоны для вызовов данных  $N_d$  фиксированы, а размер зоны для вызовов речи и, следовательно, размер общей зоны — регулируемые параметры. Нагрузочные параметры модели следующие [18]:  $\lambda_{ov} + \lambda_{hv} = 2,8$  выз/с;  $\lambda_{od} + \lambda_{hd} = 5,4$  выз/с;  $\mu_v^{-1} = 5$  с;  $\mu_d^{-1} = 2$  с.

Положим, что 50% суммарной интенсивности трафика вызовов каждого типа составляют хэндовер вызовы. Система имеет 50 каналов ( $N = 50$ ), из них 12 каналов выделены для  $d$ -зоны ( $N_d = 12$ ), а остальные каналы могут быть использованы для  $v$ -зоны и  $vd$ -зоны. Будем считать, что широкополосные вызовы данных требуют для обслуживания одновременно три канала ( $b = 3$ ), а узкополосные вызовы речи обслуживаются одним каналом.

На рис. 4 представлена зависимость вероятности потери разнотипных вызовов от изменения параметра  $N_v$ . Как видим, с увеличением размера  $v$ -зоны увеличиваются вероятности потери вызовов обоих типов. Этого следовало ожидать, так как с увеличением числа каналов в  $v$ -зоне уменьшается число каналов в  $vd$ -зоне. Из графика следует, что вероятность потери вызовов данных всегда больше, чем вероятность потери вызовов речи. Этот результат имеет логическое объяснение: для обслуживания вызовов данных требуется как минимум три свободных канала, в то время как вызовы речи обслуживаются при наличии одного свободного канала. Из рис. 4 также видно, что коэффициент использования каналов  $C_u$  в общей зоне с увеличением размера  $v$ -зоны увеличивается. Это объясняется тем, что с уменьшением числа каналов увеличивается коэффициент их использования.

Полученные результаты позволяют также решить задачу выбора размеров каждой зоны в данной схеме. Рассмотрим следующую задачу. Пусть заданы ограничения (сверху) на вероятности потери разнотипных вызовов и на коэффициент использования каналов общей зоны (снизу), т.е. требуется выполнение следующих ограничений:

$$P_d \leq \varepsilon_d, \quad (9)$$

$$P_v \leq \varepsilon_v, \quad (10)$$

$$C_u \geq \sigma, \quad (11)$$

где  $\varepsilon_d, \varepsilon_v, \sigma$  — заданные величины. Требуется найти такие значения  $N_v$ , при которых удовлетворялись бы ограничения (9)—(11). Эта задача может быть решена с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Найти такое максимальное значение параметра  $N_v$ , при котором удовлетворялись бы ограничения (9) и (10). Обозначим его через  $N_v^1$ .

Шаг 2. Найти такое максимальное значение параметра  $N_v$ , при котором удовлетворялось бы ограничение (11). Обозначим его через  $N_v^2$ .

Шаг 3. Если  $N_v^1 < N_v^2$ , то эта задача не имеет решения; иначе — решением задачи является отрезок  $[N_v^2, N_v^1]$ .

С учетом монотонности функций  $P_d, P_v$  и  $C_u$  относительно параметра  $N_v$  для решения задачи в шагах 1 и 2 может быть использован, в частности, метод дихотомии. Очевидно, что при определенных значениях величин  $\varepsilon_d, \varepsilon_v, \sigma$  задача не будет иметь решения. Так, например, если  $\varepsilon_d$  и  $\varepsilon_v$  меньше, чем минимальные значения  $P_d$  и  $P_v$ , то эта задача не имеет решения.

Некоторые результаты решения задачи (9)—(11) для указанных выше исходных данных приведены в таблице, где символ  $\emptyset$  означает, что задача не имеет решения.

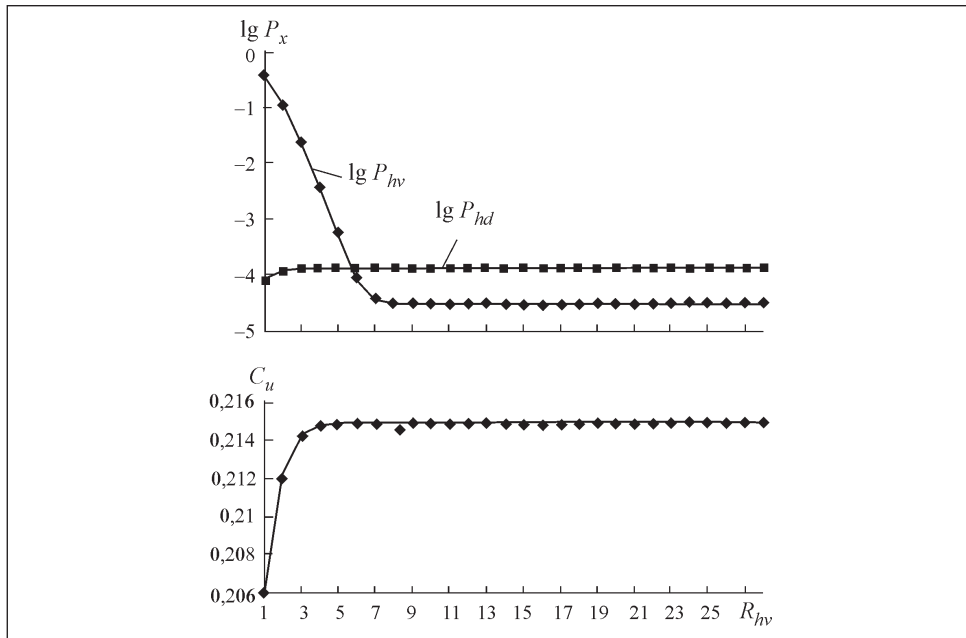


Рис. 5. Зависимость вероятностей потери хэндовер вызовов речи  $P_{hv}$  и данных  $P_{hd}$ , а также коэффициента использования каналов  $C_u$  общей зоны от  $R_{hv}$ .

Результаты решения задачи							
(9)—(11)				(12)—(14)			
$\varepsilon_d$	$\varepsilon_v$	$\sigma$	$[N_v^2, N_v^1]$	$\varepsilon_{hd}$	$\varepsilon_{hv}$	$\sigma_h$	$[R_{hv}^2, R_{hv}^1]$
$10^{-12}$	$10^{-10}$	0,26	$\emptyset$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	0,21	$\emptyset$
$10^{-7}$	$10^{-9}$	0,24	[ 7, 8 ]	$1,35 \cdot 10^{-4}$	0,2	0,2	[ 2, 3 ]
$10^{-9}$	$10^{-10}$	0,22	[ 4, 6 ]	$1,36 \cdot 10^{-4}$	0,4	0,2	[ 1, 4 ]
$10^{-9}$	$10^{-11}$	0,2	[ 1, 5 ]	$1,37 \cdot 10^{-4}$	$10^{-4}$	0,21	[ 6, 28 ]
$10^{-6}$	$10^{-8}$	0,235	[ 6, 10 ]	$1,37 \cdot 10^{-4}$	0,4	0,2	[ 1, 28 ]
$10^{-6}$	$10^{-8}$	0,21	[ 2, 10 ]				

С х е м а II содержит большое число регулируемых параметров ( $N_v, N_d, N_{vd}, G_{ov}, G_{od}, R_{hv}$ ), поэтому изучение изменения показателей QoS при изменении всех параметров — достаточно трудоемкая задача. Будем предполагать, что число каналов во всех зонах фиксировано, а варьируется лишь параметр  $R_{hv}$ . Нагрузочные параметры модели сохраняются без изменений, а другие параметры следующие:  $N = 50, N_v = 10, N_d = 12, G_{ov} = 5, G_{od} = 6$ .

Поскольку в данной схеме вероятности потери новых вызовов данных и речи не зависят от параметра  $R_{hv}$ , на рис. 5 представлены зависимости вероятностей потери хэндовер вызовов данных и речи относительно изменения указанного параметра. Как и следовало ожидать, при увеличении параметра  $R_{hv}$  увеличиваются шансы хэндовер вызовов речи быть принятыми для обслуживания. Однако это одновременно приводит к уменьшению шансов хэндовер вызовов данных для поступления в общую зону каналов. Поэтому  $P_{hv}$  является убывающей функцией, а  $P_{hd}$ , наоборот, возрастает относительно параметра  $R_{hv}$ . Из рис. 5 также видно, что при увеличении параметра  $R_{hv}$  увеличивается значение коэффициента использования каналов общей зоны. Данный факт объясняется тем, что с увеличением значения параметра  $R_{hv}$  возрастает шанс узкополосных хэндовер вызовов речи быть принятыми для обслуживания и поэтому увеличивается коэффициент использования каналов общей зоны.

Сформулируем и решим задачу выбора надлежащих значений параметра  $R_{hv}$  для удовлетворения заданных ограничений на показатели качества обслуживания, используя схему П. Пусть, как и выше, заданы ограничения на вероятности потери разнотипных хэндовер вызовов и на коэффициент использования каналов в общей зоне:

$$P_{hd} \leq \varepsilon_{hd}, \quad (12)$$

$$P_{hv} \leq \varepsilon_{hv}, \quad (13)$$

$$C_u \geq \sigma_h, \quad (14)$$

где  $\varepsilon_{hd}$ ,  $\varepsilon_{hv}$  и  $\sigma_h$  — заданные величины. Требуется найти такие значения  $R_{hv}$ , при которых удовлетворялись бы ограничения (12)—(14). Эта задача может быть решена с помощью следующего алгоритма.

Шаг 1. Найти такое максимальное значение параметра  $R_{hv}$ , которое удовлетворяло бы ограничение (12). Обозначим его через  $R_{hv}^1$ .

Шаг 2. Найти такое минимальное значение параметра  $R_{hv}$ , которое удовлетворяло бы ограничение (13). Обозначим его через  $R_{hv}^2$ .

Шаг 3. Если  $R_{hv}^1 < R_{hv}^2$ , то эта задача не имеет решения, иначе — перейти к следующему шагу.

Шаг 4. Найти такое максимальное значение параметра  $R_{hv}$ , которое удовлетворяло бы ограничение (14). Обозначим его через  $R_{hv}^3$ . Если  $R_{hv}^2 \leq R_{hv}^3 \leq R_{hv}^1$ , то решением задачи является отрезок  $[R_{hv}^3, R_{hv}^1]$ , иначе — задача не имеет решения.

Некоторые результаты решения этой задачи приведены в таблице.

## Выводы

Предложенные схемы разделения каналов в интегральных сотовых сетях связи позволяют более детально учитывать различия в механизмах обслуживания узкополосных речевых вызовов и широкополосных вызовов данных. Отличительной их особенностью является то, что в обеих схемах весь пул каналов изолированно разделен между разнотипными вызовами, при этом имеется общая зона каналов для обслуживания разнотипных вызовов. Введение пороговых параметров для разнотипных вызовов позволяет учитывать заданные ограничения на показатели QoS и выбирать оптимальные схемы разделения каналов. Эффективность предложенного подхода к анализу различных схем разделения каналов в сотовых сетях состоит в том, что он может быть использован для анализа сотовых сетей с произвольным числом каналов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen H., Huang L., Kumar S., Kuo C.C.* Radio resource management for multimedia QoS supports in wireless networks. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
2. *Yue W., Matsumoto Y.* Performance analysis of multi-channel and multi-traffic on wireless communication networks. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.
3. *Stasiak M., Glabowski M., Wishniewski A., Zwierzykowski P.* Modeling and dimensioning of mobile networks: From GSM to LTE. New York: John Wiley, 2011.
4. *Ponomarenko L., Kim C.S., Melikov A.* Performance analysis and optimization of multi-traffic on communication networks. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2010, 208 p.
5. *Melikov A., Ponomarenko L.* Multidimensional queueing models in telecommunication networks. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2014, 202 p.
6. *Ahmed M., Yanikomeroglu H.* Call admission control in wireless networks // *IEEE Communications Surveys*, 2005, Vol. 7, N 1, p. 50—69.
7. *Beigy H., Meybody M.R.* Used-based call admission control policies for cellular mobile systems: A survey // *J CSI Comput Sci Eng*, 2003, Vol. 10, p. 45—58.
8. *Ghaderi M., Boutaba R.* Call admission control for voice/data integration in broadband wireless networks // *IEEE Trans Mobile Comput.*, 2006, Vol. 5, N 3, p. 193—207.
9. *Schneps-Schneppe M., Iversen V.B.* Call admission control in cellular networks // *In Mobile Networks* (Ed. Ortiz J.H.). Intech, 2012, p. 111—136.
10. *Das Bit S., Mitra S.* Challenges of computing in mobile cellular environment. A survey // *Computer Communications*, 2006, Vol. 26, p. 2090—2105.
11. *Ogbonmwan S.E., Wei L.* Multi-threshold bandwidth reservation scheme of an integrated voice/data wireless network // *Ibid*, 2006, Vol. 29, N 9, p. 1504—1515.
12. *Меликов А.З., Фаттахова М.И., Велиджанова Г.М.* Метод расчета параметров интегральной сотовой сети связи с изолированным разделением каналов // *Электрон. моделирование*, 2014, **36**, N 5, с. 37—48.
13. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Velidzanova G.M.* Analysis of integrated cellular network model with virtual partitioning of channels // *Cybernetics and System Analysis*, 2014, Vol. 50, N 6, p. 884—890.

14. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A. Analysis of models of the integral cellular communication network with different schemes of channel partitioning // Automation and Remote Control, 2016, Vol. 77, N 5, p. 802—816.
15. Li B., Li L., Li B., Sivalingam K.M., Cao X.R. Call admission control for voice/data integrated cellular networks: Performance analysis and comparative study // IEEE Journal of Selected Areas on Communications, 2004, Vol. 22, N 4, p. 706—718.
16. Меликов А.З., Пономаренко Л.А., Велиджанова Г.М. Многопараметрические гибридные схемы изолированного разделения каналов в интегральных сотовых сетях связи // Управляющие системы и машины, 2016, N 1, с. 62—72.
17. Kolmogorov A. Zum theorie der Markoffschen ketten // Mathematische Annalen, 1936, Vol. B112, p. 155—160.
18. Carvalho G.H.S., Martins V.S., Frances C.R.L. et al. Performance analysis of multi-service wireless network: An approach integrating CAC, scheduling, and buffer management // Computers and Electrical Engineering, 2008, Vol. 34, p. 346—356.

Поступила 27.04.17

#### REFERENCES

1. Chen, H., Huang, L., Kumar, S. and Kuo, C.C. (2004), Radio resource management for multimedia QoS supports in wireless networks, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.
2. Yue, W. and Matsumoto, Y. (2002), Performance analysis of multi-channel and multi-traffic on wireless communication networks, Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.
3. Stasiak, M., Glabowski, M., Wishniewski, A. and Zwierzykowski, P. (2011), Modeling and dimensioning of mobile networks: From GSM to LTE, John Wiley, New York, USA.
4. Ponomarenko, L., Kim, C.S. and Melikov, A. (2010), Performance analysis and optimization of multi-traffic on communication networks, Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York.
5. Melikov, A. and Ponomarenko, L. (2014), Multidimensional queuing models in telecommunication networks, Springer, Heidelberg, Dordrecht, London, New York.
6. Ahmed, M. and Yanikomeroglu, H. (2005), Call admission control in wireless networks, *IEEE Communications Surveys*, Vol. 7, no. 1, pp. 50-69.
7. Beigy, H. and Meybody, M.R. (2003), Used-based call admission control policies for cellular mobile systems: A survey, *Journal CSI Comput. Sci. Eng.*, Vol. 10, pp. 45-58.
8. Ghaderi, M. and Boutaba, R. (2006), Call admission control for voice/data integration in broadband wireless networks, *IEEE Trans. Mobile Comput.*, Vol. 5, no. 3, pp. 193-207.
9. Schneps-Schneppe, M. and Iversen, V.B. (2012), Call admission control in cellular networks, *In mobile networks*, Ed. Ortiz J.H., Intech., p. 111-136.
10. Das Bit, S. and Mitra, S. (2006), Challenges of computing in mobile cellular environment. A survey, *Computer Communications*, Vol. 26, pp. 2090-2105.
11. Ogbonmwan, S.E. and Wei, L. (2006), Multi-threshold bandwidth reservation scheme of an integrated voice/data wireless network, *Computer Communications*, Vol. 29, no. 9, pp. 1504-1515.
12. Melikov, A.Z., Fattakhova, M.I. and Velidzhanova, G.M. (2014), "Method of calculation of parameters of the integral cellular communication network with isolated partition of channels, *Elektronnoe modelirovanie*, Vol. 36, no. 5, pp. 37-48.
13. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. and Velidzhanova, G.M. (2014), Analysis of integrated cellular network model with virtual partitioning of channels, *Cybernetics and System Analysis*, Vol. 50, no. 6, pp. 884-890.
14. Melikov, A.Z. and Ponomarenko, L.A. (2016), Analysis of models of the integral cellular communication network with different schemes of channel partitioning, *Automation and Remote Control*, Vol. 77, no. 5, pp. 802-816.



15. Li, B., Li, L., Li, B., Sivalingam, K.M. and Cao, X.R. (2004), Call admission control for voice/data integrated cellular networks: Performance analysis and comparative study, *IEEE Journal of Selected Areas on Communications*, Vol. 22, no. 4, pp. 706-718.
16. Melikov, A.Z., Ponomarenko, L.A. and Velidzhanova, G.M. (2016), "Multiparameter hybrid schemes of isolated partition of channels in the integral cellular communication systems", *Upravlyayushchie sistemy i mashiny*, no. 1, pp. 62-72.
17. Kolmogorov, A. (1936), Zum theorie der Markoffschen ketten, *Mathematische Annalen*, Vol. B112, pp. 155-160.
18. Carvalho, G.H.S., Martins, V.S., Frances, C.R.L., et al. (2008), Performance analysis of multi-service wireless network: An approach integrating CAC, scheduling, and buffer management, *Computers and Electrical Engineering*, Vol. 34, pp. 346-356.

Received 27.04.17

*M.I. Fattakhova, G.M. Velidzhanova, H.A. Kadyrov*

#### ANALYSIS OF SCHEMES FOR PARTITION OF CHANNELS IN CELLULAR NETWORKS WITHOUT QUEUE

Two isolated schemes for partition of common pool of channels in integral cellular network are proposed. In this network narrow-band voice calls and wideband data calls are handled. In both schemes the whole pool of channels is partitioned between various types of calls in accordance with isolated rule and there is a common pool of channels for complete sharing. In one scheme, individual zones and a common zone of channels are used in accordance with the complete sharing rule. In the other scheme, the individual zones are used for the corresponding handover calls due to the strategy of channel change-over, and a common zone is used for handover calls only. The algorithms have been developed to calculate the service quality factors in the both schemes under the given values of the number of channels and loads of the calls of different types. Results of numerical experiments are demonstrated.

*Keywords: cellular network, channels partition, service quality, calculation methods.*

*ФАТТАХОВА Мехрибан Иса кызы, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., доцент Ин-та системы управления НАН Азербайджана. В 1991 г. окончила Бакинский госуниверситет. Область научных исследований — коммуникационные сети, теория телетрафика, численные методы.*

*ВЕЛИДЖАНОВА Гюльнара Мамедага кызы, науч. сотр. Ин-та системы управления НАН Азербайджана. В 1993 г. окончила Азербайджанский инженерно-строительный университет. Область научных исследований — теория систем и сетей массового обслуживания, теория телетрафика.*

*КАДЫРОВ Гамид Акиф оглы, магистрант Национальной академии авиации Азербайджана. Область научных исследований — теория систем и сетей массового обслуживания, теория телетрафика.*

---

УДК 681.04

**Ю.Д. Полицкий**, канд. техн. наук  
Научно-исследовательский ин-т  
автоматизации черной металлургии  
(Украина, 49000, Днепр, ул. Шевченко, 59,  
тел. (056) 7443365, e-mail: polissky477@gmail.com)

## **О некоторых подходах к выполнению проблемных операций в системе остаточных классов**

Изложены новые подходы к выполнению проблемных операций в системе остаточных классов — модульному возведению в степень и дискретному логарифмированию, основанные на табличной реализации данных операций. Выборка данных осуществляется из таблиц, предварительно подготовленных для принятой системы модулей, с последующей обработкой выбранных данных по определенным алгоритмам.

*Ключевые слова:* остаточные классы, проблемные операции, модули, дискретный логарифм.

Викладено нові підходи до виконання проблемних операцій в системі залишкових класів — модульного зведення в ступінь і дискретного логарифмування, базовані на табличній реалізації даних операцій. Вибірка даних здійснюється з таблиць, попередньо підготовлених для прийнятої системи модулів, з подальшою обробкою обраних даних за певними алгоритмами.

*Ключові слова:* залишкові класи, проблемні операції, модулі, дискретний логарифм.

Согласно результатам исследований при создании цифровых вычислительных структур эффективным является применение новых принципов на основе представления данных в системе остаточных классов (СОК) [1]. В СОК произвольное число  $N$  представляется в виде набора наименьших неотрицательных остатков по модулям  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , т.е.  $N = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , где  $\alpha_i = N \pmod{m_i}$ . При этом если числа  $m_i$  взаимно простые, то такому представлению соответствует только одно число  $N$  из диапазона  $[0, M)$ , где  $M = m_1 m_2 \dots m_n$ .

Часто используемыми проблемными операциями являются модульное возведение в степень остатков целых чисел и нахождение остатков показателя степени, называемого дискретным логарифмом, по остаткам степени и остаткам основания. Основные алгоритмы реализации данных операций рассмотрены в работах [2—5]. Авторами [5] сделан следующий

© Ю.Д. Полицкий, 2017

вывод: «На основании приведенных методов решения проблемы дискретного логарифмирования нетрудно убедиться, что при решении этих задач используются громоздкие и трудоемкие операции над числами».

Рассмотрим новые подходы к реализации этих операций, основанные на табличной обработке данных, и дадим теоретическое обоснование алгоритмов табличной реализации модульного возведения в степень и дискретного логарифмирования.

**Постановка задачи и ее решение.** Пусть необходимо определить значение  $\tilde{\alpha} = \alpha^r \pmod{m}$ , где  $\tilde{\alpha}, \alpha$  — остаток степени, остаток основания;  $r$  — остаток показателя степени;  $m$  — модуль;  $0 \leq \tilde{\alpha}, \alpha, r \leq m-1$ . Модульное возведение в степень представляет собой последовательное повторение операций умножения. В табл. 1 показано возведение в степень по модулю 11.

Рассмотрим циклическую подгруппу по возведению в степень, порожденную числом 7. Первый элемент —  $7^0 = 1$ ; второй элемент —  $7^1 = 7^0 * 7 = 7$ ; третий элемент —  $7^2 = 7^1 * 7 = 5$ ; четвертый, пятый и шестой элементы — соответственно  $7^3 = 7^2 * 7 = 2$ ,  $7^4 = 7^3 * 7 = 3$  и  $7^5 = 7^4 * 7 = 10$ ; седьмой, восьмой и девятый элементы — соответственно  $7^6 = 7^5 * 7 = 4$ ,  $7^7 = 7^6 * 7 = 6$  и  $7^8 = 7^7 * 7 = 9$ ; десятый элемент —  $7^9 = 7^8 * 7 = 8$ ; одиннадцатый элемент  $7^{10} = 7^9 * 7 = 1$  равен первому. Условие цикличности  $\alpha^r = km + 1$ , где  $r, k$  — произвольные целые неотрицательные числа.

Пусть в общем случае  $m = t\mu$ , остаток по модулю  $m$  есть  $\alpha = ts$ , где  $\mu$  и  $s$  — простые числа,  $t > 1$  — произвольное целое неотрицательное число. При

Таблица 1

Остаток основания	Остаток степени при $r$										Длина цикла
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	10
3	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	5
4	1	4	5	9	3	1	4	5	9	3	5
5	1	5	3	4	9	1	5	3	4	9	10
6	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2	10
7	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	10
8	1	8	9	6	4	10	3	2	5	7	10
9	1	9	4	3	5	1	9	4	3	5	5
10	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	2

этом испытываемое число и модуль могут быть как взаимно простыми числами (т.е.  $t > 1$ ), так и взаимно простыми (т.е.  $t = 1$ ). Перепишем условие цикличности в виде  $t(t^{r-1}s^r - k\mu) = 1$ . Поскольку в выражении цикличности все числа целые, это условие может быть выполнено при  $t = 1$  и  $s^r - k\mu = 1$ . Выражение  $t = 1$  означает, что  $m = \mu$ , т.е.  $m$  — простое число. Следовательно, условие цикличности выполняется только для модулей, являющихся простыми числами.

Из табл. 1 видно, что длина  $L$  цикла различна для различных порождающих чисел — остатков оснований от  $L_{\min} = 1$  до  $L_{\max} = m - 1$ . Работа с табл. 1 может быть сведена к простой выборке остатков степени по остаткам основания и показателя степени, если  $L_{\max}$  кратна длине каждого из остальных циклов. Условие кратности  $L_{\max}$  длине каждого из остальных циклов равносильно условию  $(\alpha^{m-1}) \pmod m = 1$ , т.е.  $\alpha^{m-1} = km + 1$ , где модуль  $m$  — простое число,  $k$  — произвольное целое неотрицательное число.

**Утверждение.** Если условие цикличности выполняется для остатка  $\alpha$  основания, т.е.  $(\alpha^{m-1}) \pmod m = 1$ , то оно выполняется и для остатка  $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$  основания, т.е.  $(\alpha + 1)^{m-1} \pmod m = 1$ .

**Доказательство.** Перепишем выражение  $(\alpha^{m-1}) \pmod m = 1$  в виде  $\frac{\alpha^m \pmod m}{\alpha \pmod m} = 1$ . Пусть  $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$ . Тогда

$$\frac{\tilde{\alpha}^m \pmod m}{\tilde{\alpha} \pmod m} = \frac{(\alpha + 1)^m \pmod m}{(\alpha + 1) \pmod m}.$$

Бином имеет вид

$$(\alpha + 1)^m = \alpha^m + \sum_{s=1}^{m-1} \binom{m}{s} \alpha^{m-s} + 1.$$

Поскольку сумма  $\sum_{s=1}^{m-1} \binom{m}{s} \alpha^{m-s}$  кратна модулю,  $\left( \sum_{s=1}^{m-1} \binom{m}{s} \alpha^{m-s} \right) \pmod m = 0$  и  $(\alpha + 1)^m \pmod m = (\alpha^m + 1) \pmod m$ . Так как  $\alpha^m = \alpha^{m-1} \alpha = (km + 1) \alpha$ , откуда  $(\alpha^m) \pmod m = \alpha$ , получаем

$$(\alpha^m + 1) \pmod m = (\alpha + 1) \pmod m, (\alpha + 1)^{m-1} \pmod m = \frac{(\alpha + 1)^m \pmod m}{(\alpha + 1) \pmod m} = 1.$$

Поскольку для остатка  $\alpha = 1$  основания это условие выполняется всегда, длина  $L_{\max}$  кратна длине каждого из циклов, порожденных остатками основания по данному модулю.

Рассмотрим работу алгоритма в системе модулей  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$ ,  $M = m_1 m_2 \dots m_n = 1001$  на примере возведения числа  $N_1 = 12 =$

$= (\alpha_1^1 = 1, \alpha_2^1 = 5, \alpha_3^1 = 12)$  в степень  $R = 3 = (3, 3, 3)$  с получением числа  $N_2 = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$ . В табл. 2 и 3 показано возведение в степень соответственно по модулям 7 и 13.

На первой итерации осуществляется преобразование представления показателя степени — числа  $R = 3 = (3, 3, 3)$  из системы модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$  в систему модулей  $\hat{m}_1 = (m_1 - 1), \hat{m}_2 = (m_2 - 1), \dots, \hat{m}_n = (m_n - 1)$ , т.е.  $\hat{m}_1 = 10, \hat{m}_2 = 6, \hat{m}_3 = 12$ . В данном случае получаем  $\hat{R} = 3 = (3, 3, 3)$ . При этом от  $M = m_1 m_2 \dots m_n$ , или, что то же самое, от  $M$  — наименьшего общего кратного модулей  $m_1, m_2, \dots, m_n$  переходим к  $\hat{M} = \langle \hat{m}_1, \hat{m}_2, \dots, \hat{m}_n \rangle$ , где  $\hat{M}$  — наименьшее общее кратное модулей  $\hat{m}_1 = (m_1 - 1), \hat{m}_2 = (m_2 - 1), \dots, \hat{m}_n = (m_n - 1)$ .

На второй итерации по остатку  $\alpha_1^1 = 1$  основания и остатку  $\hat{r}_1 = 3$  показателя степени выбираем из табл. 1 значение остатка  $\alpha_1^2 = 1$  степени, по остатку  $\alpha_2^1 = 5$  основания и остатку  $\hat{r}_2 = 3$  показателя степени выбираем из табл. 2 значение остатка  $\alpha_2^2 = 6$  степени, по остатку  $\alpha_3^1 = 12$  основания и остатку  $\hat{r}_3 = 3$  показателя степени выбираем из табл. 3 значение остатка  $\alpha_3^2 = 12$  степени. В исходной системе модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$  получаем

$$N_2 = (\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 6, \alpha_3^2 = 12) = 1728 - 1001 = 727.$$

Пусть по-прежнему  $\tilde{\alpha} = \alpha^r \pmod{m}$ , где  $r$  — остаток показателя степени, называемый дискретным логарифмом элемента  $\tilde{\alpha}$  по основанию  $\alpha$ ;  $m$  — модуль;  $0 \leq \tilde{\alpha}, \alpha, r \leq m-1$ . Задача дискретного логарифмирования состоит в отыскании по данным  $\tilde{\alpha}$  и  $\alpha$  всех дискретных логарифмов  $r = r_{\min} + \mu\Delta$ ,  $\mu = 0, 1, 2, \dots, \mu_{\max}$ , в диапазоне  $[0, M)$ . Здесь  $\mu_{\max}$  определяет максимальный не выходящий за пределы диапазона  $[0, M)$  дискретный логарифм  $r_{\max}$ ,  $\Delta$  — величина шага перехода к соседнему дискретному логарифму. Таким образом, задача сводится к отысканию значений  $r_{\max}$  и  $\mu_{\max}$ .

Таблица 2

Остаток основания	Остаток степени при $r$						Длина цикла
	0	1	2	3	4	5	
0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	1	2	4	3
3	1	3	2	6	4	5	6
4	1	4	2	1	4	2	3
5	1	5	4	6	2	3	6
6	1	6	1	6	1	6	2

Выше была рассмотрена работа алгоритма модульного возведения в степень в системе модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13, M = m_1 m_2 \dots m_n = 1001$  на примере возведения числа  $N_1 = 12 = (\alpha_1^1 = 1, \alpha_2^1 = 5, \alpha_3^1 = 12)$  в степень  $R = 3 = (3, 3, 3)$  с получением результата  $N_2 = (\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 6, \alpha_3^2 = 12) = 727$ . Рассмотрим алгоритм дискретного логарифмирования в той же системе модулей на примере определения дискретных логарифмов числа  $N_2 = 727 = (\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 6, \alpha_3^2 = 12)$  по основанию  $N_1 = 12 = (\alpha_1^1 = 1, \alpha_2^1 = 5, \alpha_3^1 = 12)$ .

По остатку  $\alpha_1^1 = 1$  основания и остатку  $\alpha_1^2 = 1$  степени выбираем из табл. 1 остатки показателя степени  $\hat{r}_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , а по остатку  $\alpha_1^1 = 1$  основания выбираем длину  $L_1 = 1$  цикла. По остатку  $\alpha_2^1 = 5$  основания и остатку  $\alpha_2^2 = 6$  степени выбираем из табл. 2 остатки показателя степени  $\hat{r}_2 = \{3\}$ , а по остатку  $\alpha_2^1 = 5$  основания — длину  $L_2 = 6$  цикла. По остатку  $\alpha_3^1 = 12$  основания и остатку  $\alpha_3^2 = 12$  степени выбираем из табл. 3 остатки показателя степени  $\hat{r}_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ , а по остатку  $\alpha_3^1 = 12$  основания — длину  $L_3 = 2$  цикла.

Величина  $\Delta$  шага перехода к соседнему дискретному логарифму  $\Delta = 6 = \langle (L_1 = 1) * (L_2 = 6) * (L_3 = 2) \rangle$  есть наименьшее общее кратное длин  $L_1, L_2, L_3$  циклов. Поскольку преобразование [6] представления показателя степени в систему модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$  выполняется из четной

Таблица 3

Остаток основания	Остаток степени при $r$												Длина цикла
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	12
3	1	3	9	1	3	9	1	3	9	1	3	9	3
4	1	4	3	12	9	10	1	4	3	12	9	10	6
5	1	5	12	8	1	5	12	8	1	5	12	8	4
6	1	6	10	8	9	2	12	7	3	5	4	11	12
7	1	7	10	5	9	11	12	6	3	8	4	2	12
8	1	8	12	5	1	8	12	5	1	8	12	5	4
9	1	9	3	1	9	3	1	9	3	1	9	3	3
10	1	10	9	12	3	4	1	10	9	12	3	4	6
11	1	11	4	5	3	7	12	2	9	8	10	6	12
12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	1	12	2

системы модулей  $\hat{m}_1 = 10$ ,  $\hat{m}_2 = 6$ ,  $\hat{m}_3 = 12$ , константы вычитания включают произведения четных модулей. Поэтому остатки показателя степени должны быть либо все четными, либо все нечетными, т.е. в данном случае  $\hat{r}_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\hat{r}_2 = \{3\}$ ,  $\hat{r}_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ .

Наименьший из дискретных логарифмов  $r_{\min}$  можно найти двумя способами. Первый способ заключается в следующем. Поскольку  $0 \leq r_{\min} \leq \Delta$ , наименьший дискретный логарифм может быть найден последовательным перебором чисел  $0, 1, \dots, \Delta$  одновременно в системах модулей  $\hat{m}_1 = 10$ ,  $\hat{m}_2 = 6$ ,  $\hat{m}_3 = 12$  и  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$  с проверкой каждого из этих чисел в системе модулей  $\hat{m}_1 = 10$ ,  $\hat{m}_2 = 6$ ,  $\hat{m}_3 = 12$  на соответствие табл. 1—3. Первое соответствие определяет  $r_{\min} = 3 = (3, 3, 3)$ . Способ обеспечивает хорошее быстроедействие при сравнительно небольших значениях  $\Delta$ .

Второй способ увеличения быстрогодействия при больших значениях  $\Delta$  состоит в следующем. Из элементов полученных множеств остатков показателя степени  $\hat{r}_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\hat{r}_2 = \{3\}$ ,  $\hat{r}_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  в системе модулей  $\hat{m}_1 = 10$ ,  $\hat{m}_2 = 6$ ,  $\hat{m}_3 = 12$  формируем в этой же системе произвольный набор остатков  $\hat{r}_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ , например  $\tilde{r}_v = (\hat{r}_{1,1} = 1, \hat{r}_{2,1} = 3, \hat{r}_{3,3} = 5)$ . Данный набор преобразуем из системы модулей  $\hat{m}_1 = 10$ ,  $\hat{m}_2 = 6$ ,  $\hat{m}_3 = 12$  в систему модулей  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$ . Если число  $\tilde{r}_v$  находится в диапазоне  $[0, \hat{M})$ , такое преобразование возможно, и тогда получаем некоторый дискретный логарифм  $\tilde{r}_v$  в системе модулей  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$ .

Если число  $\tilde{r}_v$  не находится в диапазоне  $[0, \hat{M})$ , то преобразование числа  $\tilde{r}_v$  из системы модулей  $\hat{m}_1 = 10$ ,  $\hat{m}_2 = 6$ ,  $\hat{m}_3 = 12$  в систему модулей  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$  невозможно. В этом случае из элементов множеств остатков показателя степени  $\hat{r}_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ,  $\hat{r}_2 = \{3\}$ ,  $\hat{r}_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$  формируем новый набор остатков, например  $\tilde{r}_v = (\hat{r}_{1,1} = 1, \hat{r}_{2,1} = 3, \hat{r}_{3,4} = 7)$ . Описанная итерация повторяется до получения дискретного логарифма  $\tilde{r}_v$  в системе модулей  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$ . Поскольку значения  $\Delta$  большие, число таких наборов остатков невелико. В частности, в рассматриваемом примере  $\tilde{r}_v = (1, 3, 5) \rightarrow \tilde{r}_v = (1, 3, 7) \rightarrow \tilde{r}_v = (1, 3, 9)$ . Поскольку число  $\tilde{r}_v = (1, 3, 9)$  находится в диапазоне  $[0, \hat{M})$ , оно преобразуется в  $r_v = (10, 0, 8)$  в системе модулей  $m_1 = 11$ ,  $m_2 = 7$ ,  $m_3 = 13$ .

Из значения  $\tilde{r}_v$  вычитаем значение  $\Delta$ , т.е.  $r_{v-1} = r_v - \Delta = (10, 0, 8) - (4, 1, 2)$ , и ожидаемую четность  $r_{v-1}$  сопоставляем с полученной. Несовпадение четностей свидетельствует о выходе дискретного логарифма за нижнюю границу диапазона  $[0, \hat{M})$ , следовательно,  $r_v$  — наименьший дискретный логарифм. В противном случае итерация выполняется для  $r_{v-2}$ :  $r_{v-2} = r_{v-1} - \Delta$ . Способ обеспечивает хорошее быстроедействие при больших значениях  $\Delta$ .

На основании изложенного представляется целесообразным осуществлять поиск наименьшего  $r_{\min}$  одновременно двумя описанными способами. Первый полученный результат в рассмотренном примере:  $\tilde{r}_{\min} = (3, 3, 3)$  в системе модулей  $\hat{m}_1 = 10, \hat{m}_2 = 6, \hat{m}_3 = 12$  и  $r_{\min} = (3, 3, 3)$  в системе модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$ .

Для нахождения  $\mu_{\max}$  понадобится величина  $\tilde{r}_{\max}$  в диапазоне  $[0, \hat{M})$ , представленная в системе модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$ . Для этого определяем  $\tilde{r}_{\max} = \tilde{r}_{\min} - \Delta$ , переводим  $\tilde{r}_{\max}$  в систему модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$  и находим значение  $\bar{r}_{\max}$ . В данном примере  $\tilde{r}_{\max} = \tilde{r}_{\min} - \Delta = (3, 3, 3) - (6, 0, 6) = (7, 3, 9) = 57$  и  $\bar{r}_{\max} = 57 = (2, 1, 5)$  в системе модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$ . Поскольку система модулей задана, вычисляем предварительно  $r_{\sigma} = \left( \left[ \frac{M}{\hat{M}} \right] - 1 \right) \hat{M}$ , где  $\left[ \frac{M}{\hat{M}} \right]$  — целая часть от деления  $M$  на  $\hat{M}$ , и  $r_u = r_{\sigma} + \bar{r}_{\max}$ .

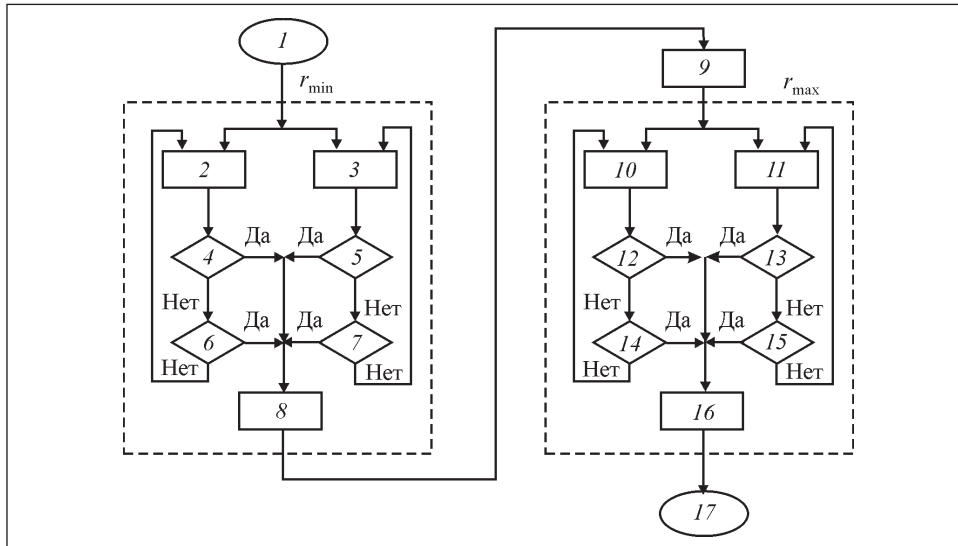
Аналогично двумя способами можно найти наибольший из дискретных логарифмов  $r_{\max}$ . Первым способом выполняется последовательный перебор чисел  $M, M-1, \dots, r_u$  одновременно в системах модулей  $\hat{m}_1 = 10, \hat{m}_2 = 6, \hat{m}_3 = 12$  и  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$  с проверкой каждого из этих чисел в системе модулей  $\hat{m}_1 = 10, \hat{m}_2 = 6, \hat{m}_3 = 12$  на соответствие табл. 1—3. Первое соответствие определяет  $r_{\max}$ . Способ обеспечивает хорошее быстроедействие при сравнительно больших значениях  $r_u$ .

Второй способ увеличения быстрогодействия при небольших значениях  $r_u$  заключается в следующем. К значению  $r_u$  добавляем значение  $\Delta$ , т.е.  $r_{u+1} = r_u + \Delta = (7, 5, 8) + (4, 1, 2)$ , и ожидаемую четность  $r_{u+1}$  сопоставляем с полученной. Несовпадение четностей свидетельствует о выходе дискретного логарифма за верхнюю границу диапазона  $[0, M)$ . Следовательно,  $r_{u+1}$  — наибольший дискретный логарифм. В противном случае итерация выполняется для  $r_{u+2}$ :  $r_{u+2} = r_{u+1} + \Delta$ . Способ обеспечивает хорошее быстроедействие при малых значениях  $r_u$ .

Поскольку первый способ обеспечивает хорошее быстроедействие при сравнительно больших значениях  $r_u$ , а второй способ — при малых значениях  $r_u$ , представляется целесообразным осуществлять поиск наибольшего дискретного логарифма  $r_{\max}$  одновременно двумя способами. Первый полученный результат:  $r_{\max} = 999 = (9, 5, 11)$  в системе модулей  $m_1 = 11, m_2 = 7, m_3 = 13$ .

Блок-схема алгоритма определения  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  представлена на рисунке. Определив  $r_{\max}$  и  $r_{\min}$ , находим  $\mu_{\max} = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\Delta}$ . В рассматриваемом примере





Блок-схема алгоритма определения наименьшего  $r_{\min}$  и наибольшего  $r_{\max}$  дискретных логарифмов: 1 — начало; 2, 3 — определение  $r_{\min}$  первым и вторым способами; 4, 7 и 12, 15 — проверка, достигнут ли результат первым способом; 5, 6 и 13, 14 — проверка, достигнут ли результат вторым способом; 8 — сохранение результата в качестве  $r_{\min}$ ; 9 — подготовка промежуточных данных для определения  $r_{\max}$ ; 10, 11 — определение  $r_{\max}$  первым и вторым способами; 16 — сохранение результата в качестве  $r_{\max}$ ; 17 — конец

$$\mu_{\max} = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\Delta} = \frac{999 - 3}{6} = \frac{(9,5,11) - (3,3,3)}{(6,6,6)} = \frac{(6,2,8)}{(6,6,6)} = (1,5,10) = 166.$$

В результате получаем

$$r = r_{\min} + \mu\Delta, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, \mu_{\max} = (3, 3, 3) + \mu(6, 6, 6),$$

$$\mu = (0, 1, 1), (1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots, (1, 5, 10).$$

Таким образом, предложенные подходы обеспечивают реализацию двух сложных операций — модульного возведения в степень и нахождения дискретного логарифма.

### Выводы

Предложенные подходы к модульному возведению в степень и дискретному логарифмированию в системе остаточных классов основаны на выборке значений остатков из предварительно подготовленных таблиц с

последующей их обработкой по определенным алгоритмам. Применение данных подходов целесообразно для получения эффективных решений задач при выполнении проблемных операций.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Сов. радио, 1968, 440 с.
2. Василенко О.Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. М.: МЦНМО, 2003, 328 с.
3. Рожков А.В., Ниссенбаум О.В. Теоретико-числовые методы в криптографии: Учеб. пособие. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2007, 156 с.
4. Майзаков М.А. Разработка модулей автоматической генерации заданий с решениями по теме «Дискретное логарифмирование»: Дипломная работа. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2010, 54 с.
5. Червяков Н.И., Бабенко М.Г., Кияшко Е.С., Шульженко К.С. Решение проблемы дискретного логарифмирования с использованием системы остаточных классов. // [http://hpc-education.unn.ru/files/conference\\_hpc/2013/files/62.pdf](http://hpc-education.unn.ru/files/conference_hpc/2013/files/62.pdf).
6. Полицкий Ю.Д. О преобразовании представлений чисел в остатках из одной системы модулей в другую // Наука та прогрес транспорту. Вісн. Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені акад. В. Лазаряна, 2016, № 63 (3), с. 130—137.

Поступила 20.02.17;  
после доработки 15.05.17

#### REFERENCES

1. Akushskiy, I.Ya. and Yuditskiy, D.I. (1968), *Mashinnaya arifmetika v ostatochnykh klassakh* [Machine arithmetic in the residual classes], Sovetskoe radio, Moscow, USSR.
2. Vasilenko, O.N. (2003), *Teoretiko-chislovyie algoritmy v kriptografii* [Theoretical-numerical algorithms in cryptography], MTsNMO, Moscow, Russia.
3. Rozhkov, A.V. and Nissenbaum, O.V. (2007), *Teoretiko-chislovyie metody v kriptografii: Uchebnoe posobie* [Theoretical-numerical methods in cryptography: Manual], Izdatelstvo Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta, Tyumen, Russia.
4. Maizakov, M.A. (2010). "Development of modules for automatic generation of tasks with solutions concerning the subject Discrete Logarithm", Graduation Thesis, Tyumen State University, Tyumen, Russia.
5. Chervyakov, N.I., Babenko, M.G., Kiyashko, E.S. and Shulzhenko, K.S. (2013), "Solution of the problem of taking discrete logarithm with the use of the residue class system, available at: // [http://hpc-education.unn.ru/files/conference\\_hpc/2013/files/62.pdf](http://hpc-education.unn.ru/files/conference_hpc/2013/files/62.pdf).
6. Polissky, Yu.D. (2016), "On the transformation of representation of numbers in residues from one modular system to another", *Nauka ta progress transportu, Visnyk Dnipropetrovskogo natsionalnogo universitetu zaliznychnogo transportu imeni akad. V. Lazaryana*, Vol. 3, no. 63, pp. 130-137.

Received 20.02.17;  
After revision 15.05.17

*Yu.D. Polisky*

ON CERTAIN APPROACHES TO IMPLEMENTATION  
OF SOME PROBLEM OPERATIONS IN THE RESIDUE CLASS SYSTEM

New approaches to the implementation of the problem operations in the system of residue classes — modular exponentiation and discrete taking the logarithm — have been stated. The approaches are based on tabular implementation of these operations. In this case the data are sampled from the tables, pre-prepared for the taken system of modules, followed by processing of the selected data according to certain algorithms.

*Key words: residue classes, problem operations, modules, discrete logarithm.*

*ПОЛИССКИЙ Юрий Давидович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Научно-исследовательского ин-та автоматизации черной металлургии (г. Днепр). В 1960 г. окончил Днепропетровский металлургический ин-т. Область научных исследований — системы и средства управления.*

## Авторська угода (публічна оферта) про умови публікації статті в журналі «Электронное моделирование»

---

*Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України (далі — Видавець, ІПМЕ), з одного боку, пропонує невизначеному колу осіб (далі — Автор), з іншого боку (разом іменовані як Сторони), укласти цю угоду (далі — Угода) про публікації наукових матеріалів (далі — Стаття) в Міжнародному науково-теоретичному журналі «Электронное моделирование» (далі — Журнал), що знаходиться в сфері управління Видавця.*

### 1. Загальні положення

1.1. Ця Угода відповідно до статті 641 Цивільного кодексу України є пропозицією про укладення договору (публічною офертою), повним і беззастережним прийняттям (акцептом) якого відповідно до статті 642 Цивільного кодексу України вважається відправлення Автором своїх Статей на електронну адресу em@ipme.kiev.ua.

1.2. Журнал зареєстрований в Державному реєстрі друкованих засобів масової інформації та інформаційних агентств як суб'єктів інформаційної діяльності України. Свідоцтво про реєстрацію Міністерства юстиції України: КВ № 13147-2031ПР від 27.08.2007.

### 2. Терміни

**Автор** — фізична особа (особи), творчою працею якої (яких) створено Статтю.

**Акцепт Оферти** — повне і беззастережне прийняття Оферти.

**Журнал** — Міжнародний науково-теоретичний журнал «Электронное моделирование».

**Заявка** — електронне звернення Автора до Видавця на розміщення Статті в Журналі.

**Видавець** — Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова Національної академії наук України.

**Оферта** — цей документ про видання Статті.

**Публікація** — розміщення Статті в Журналі.

**Редакція Журналу** — творчий колектив, який здійснює випуск Журналу.

**Стаття** — науковий, навчальний, методичний матеріал (текст), представлений Автором для опублікування в Журналі.

**Обробка персональних даних** — дії (операції) з персональними даними, включаючи збір, систематизацію, накопичення, зберігання, уточнення (оновлення, зміну), використання, поширення.

### 3. Предмет угоди (Оферти)

3.1. За цією Угодою Автор спрямовує Статтю в Редакцію для розміщення в Журналі на основі невиключної ліцензії на використання Статті згідно зі стаття-

ми 15, 31 та 32 Закону України «Про авторське право і суміжні права». При відправці Статті Автор погоджується з концепцією журналу, порядком рецензування статей і етикою публікування.

3.2. Редакція журналу надає Автору послуги, пов'язані з публікацією статті: приймає Статтю на попередній аналіз, проводить рецензування (експрес-рецензування, анонімне рецензування), приймає рішення про прийняття Статті до публікації, готує Статтю до опублікування, розміщує Статтю в Журналі і на інформаційному ресурсі (Сайті) Журналу.

3.3. Права на використання Статті, що передаються за цією Угодою, не мають на увазі виплату Автору винагороди та включають таке:

3.3.1. Відтворення Статті.

3.3.2. Публічне повідомлення про Статтю.

3.3.3. Будь-яке повторне оприлюднення Статті.

3.3.4. Переклад Статті на інші мови.

3.3.5. Переробку, адаптацію та інші зміни Статті.

3.3.6. Поширення Статті шляхом першого продажу, відчуження іншим способом або іншої передачі до першого продажу.

3.3.7. Імпорт примірників Статті.

3.4. Територія, на якій допускається використання прав на Статтю, не обмежена.

3.5. Ця угода починає діяти з моменту направлення Статті на електронну адресу Редакції, зазначену в пункті 1.1. цієї Угоди, що є беззаперечним і повним прийняттям пропозиції про укладення угоди відповідно до статті 642 Цивільного кодексу України.

3.6. Майнові авторські права, обумовлені цією угодою, передаються Автором Видавцю безоплатно на весь термін дії невиняткового права, передбаченого чинним законодавством України.

3.7. У разі прийняття Видавцем рішення про відмову в опублікуванні Статті або в разі відкликання Автором (одним з Авторів) своєї Статті до прийняття Видавцем рішення про опублікування в Журналі ця Угода втрачає силу. Рішення про відмову в опублікуванні направляється Автору за адресою електронної пошти, вказаною в заявці. Автор повинен направити повідомлення про відкликання Статті з власноручним підписом на адресу Редакції журналу «Електронное моделирование» або в формі відсканованого документа.

#### **4. Права і обов'язки Сторін**

4.1. Автор гарантує, що:

4.1.1. Він є дійсним правласником виключних прав на Статтю.

4.1.2. Стаття є оригіальною, створена Автором (Співавторами) самостійно і не була опублікована.

4.1.3. При створенні Статті не були порушені авторські або інші права третіх осіб.

4.1.4. Стаття містить всі передбачені чинним законодавством про авторське право посилання на цитованих авторів і / або видання (матеріали);

4.1.5. Стаття не є предметом застави, не передана третій особі за договором відчуження виключного права або ліцензійним договором про надання виключної ліцензії і не обтяжена правами і вимогами будь-яких третіх осіб.

4.2. Автор зобов'язується:

4.2.1. Оформити Статтю відповідно до вимог Редакції Журналу, опублікованими на сайті Журналу в мережі Інтернет та/або в друкованому виданні.

4.2.2. Вказати в заявці адресу одержувача примірника Журналу з опублікованою Статтею.

4.2.3. Сплатити вартість доставки друкованого примірника Журналу з опублікованою Статтею.

4.3. Автор має право:

4.3.1. На безкоштовне отримання друкованого примірника Журналу з опублікованою Статтею.

4.3.2. Використовувати матеріали опублікованої Статті у власних дисертаціях або книгах.

4.3.3. Надавати благодійну допомогу Редакції з метою поліпшення якості обслуговування Авторів.

4.4. Видавець зобов'язується:

4.4.1. Виконати обов'язкове внутрішнє анонімне рецензування Статті протягом 30 (тридцяти) календарних днів з моменту її прийняття.

4.4.2. Опублікувати Статтю в Журналі в разі прийняття рішення за підсумками рецензування про затвердження Статті до опублікування. Строк виходу Статті в світ залежить від дати її надходження до Редакції і якості підготовки.

4.4.3. Надіслати рецензію на електронну пошту Автора, зазначену в заявці, за підсумками рецензування.

4.5. Видавець має право:

4.5.1. Вносити редакторські і коректорські правки в Статтю, в тому числі скорочення, без додаткового узгодження з Авторами (Співавторами), якщо ці зміни не призводять до викривлення змісту, коректності викладення тексту і не порушують цілісності сприйняття матеріалу. Зазначені дії також мають право здійснювати треті особи, які уклали з Видавцем субліцензійний договір.

4.5.2. Встановлювати правила (умови) прийому і публікації Статей в Журналі.

4.5.3. Встановлювати правила визначення пріоритету в опублікуванні прийнятих Статей.

4.5.4. Приймати благодійну допомогу, адресовану Редакції, для поліпшення якості обслуговування Авторів.

4.6. У всіх випадках, не обумовлених і не передбачених цією Угодою, Сторони зобов'язані керуватися чинним законодавством України.

4.7. Сторони мають право укладати інші угоди, так чи інакше пов'язані з предметом цієї Угоди, на умовах, що не суперечать умовам цієї Угоди.

## **5. Акцепт Оферти та укладення Угоди**

5.1. Ця Угода набуває чинності з моменту, коли Автор виконує Акцепт Оферти шляхом відправки Статті на електронну адресу Журналу, і її укладено на весь строк дії невиняткового права, передбаченого чинним законодавством України.

## **6. Порядок зміни і розірвання Угоди**

6.1. Оферта, акцептована Авторами, діє як Угода між сторонами і не може бути змінена інакше як за згодою Сторін. Видавець має право змінити умови Оферти, що ніяк не впливає на умови вже укладених угод з Авторами. Поточна редакція Оферти, а також її попередні редакції публікуються на сайті Видавця.

6.2. У разі незгоди Автора зі змінами умов цієї Угоди Автор має право направити Видавцю письмове повідомлення про відмову від цієї Угоди до набрання чинності відповідних змін. У разі відсутності письмового повідомлення від Автора зміни вважаються прийнятими Автором, і Угода продовжує діяти з внесеними змінами.

6.3. Ця Угода може бути розірвана достроково за згодою Сторін.

6.4. Автор має право відкликати Статтю за умови відшкодування Видавцю завданих таким рішенням збитків. Якщо Стаття вже опублікована, Автор зобов'язаний публічно оповістити про відкликання Статті. При цьому Автор має право вилучити з обігу раніше випущені екземпляри твору, відшкодувавши завдані цим збитки Видавцю.

6.5. У разі, якщо одна із Сторін приймає рішення про відмову від виконання Договору, вона зобов'язана повідомити іншу Сторону в письмовому вигляді. У цьому випадку зобов'язання, обумовлені Договором, вважаються припиненими з моменту отримання контрагентом повідомлення про розірвання Договору.

## **7. Відповідальність**

7.1. За невиконання або неналежне виконання своїх зобов'язань за Угодою Сторони несуть відповідальність згідно з чинним законодавством України.

7.2. Всі відомості, надані Автором, повинні бути достовірними. Автор відповідає за достовірність, відкритість (не містить інформації, забороненої до публікації у відкритій пресі) і повноту переданих Видавцю відомостей.

7.3. Автор самостійно несе відповідальність перед третіми особами за неправомірне використання результатів інтелектуальної діяльності третіх осіб і матеріали, використані в ній, а також з усіх питань, що стосуються приналежності прав на неї.

7.4. Видавець не несе ніякої відповідальності за будь-які дії Автора.

7.5. Сторони звільняються від відповідальності за порушення умов Угоди, якщо таке порушення викликане обставинами непереборної сили (форс-мажор), включаючи: дії органів державної влади (в т.ч. прийняття правових актів), пожежа, повінь, землетрус, інші стихійні лиха, відсутність електроенергії та/або збої роботи комп'ютерної мережі, страйки, громадянські заворушення, безлади, будь-які інші обставини непереборної сили.

## **8. Порядок вирішення спорів**

8.1. Спори і розбіжності вирішуються Сторонами шляхом переговорів, а в разі недосягнення згоди — відповідно до чинного законодавства України.

8.2. При наявності неврегульованих розбіжностей Сторін спори вирішуються в суді за місцем знаходження Видавця відповідно до чинного законодавства України.

### **9. Інші умови**

9.1. Автор висловлює згоду на використання Видавцем наступних персональних даних:

- прізвище, ім'я, по батькові;
- дата народження;
- відомості про освіту;
- відомості про місце роботи і займану посаду;
- відомості про контактну інформацію для листування;
- відомості про наявність публікацій;
- відомості про напрямки досліджень Автора;
- адреса, за якою Автору буде доставлено примірник Журналу згідно із пунктом 4.2.3. цієї Угоди.

9.2. Видавець має право на використання персональних даних Автора з метою виконання цієї Угоди, в тому числі інформаційно-довідкового обслуговування Автора.





## Правила оформления статьи для журнала «Электронное моделирование»

---

В связи с подготовкой журнала «Электронное моделирование» к регистрации в базе данных «Scopus» вводятся следующие правила.

К опубликованию в журнале «Электронное моделирование» принимаются нигде не опубликованные ранее статьи, которые соответствуют профилю и научному уровню журнала.

В редакцию следует направлять:

1. Полную электронную версию статьи с рисунками и таблицами (E-mail: em@ipme.kiev.ua).

2. Копию первой страницы с подписями авторов.

3. Отдельный файл с рисунками, выполненными в форматах TIF, EPS, JPG, GIF и фотографиями (разрешением не менее 300 dpi, в случае необходимости можно в цвете). Допускается передача графиков и диаграмм в редакторе Excel. Не допускаются рисунки, подготовленные в редакторе Word. Если рисунки выполнены в программах MatCad, MatLab, AutoCad и подобных, необходимо переводить их в формат .eps или, как исключение, – .tif с разрешением не менее 300 dpi.

4. Сведения о каждом соавторе: фамилия, имя и отчество (на русском и английском языках), страна, город, место работы, занимаемая должность, ученое звание, степень; для переписки с редакцией — служебный адрес и телефон, домашний адрес и телефон, e-mail всех или одного из соавторов для опубликования в журнале.

5. Сведения о научных интересах авторов.

6. Авторскую справку, подтверждающую права на интеллектуальную собственность авторов.

Направляемая в редакцию статья должна содержать следующие элементы:

1. Аннотацию (объемом до 12 строк), в которой лаконично и четко следует изложить суть решаемой задачи, методы исследования и полученные результаты. Аннотация должна быть интересной и понятной для отечественных и зарубежных ученых (не более 600 знаков).

2. Общую оценку проблемы и ее актуальности на основании анализа публикаций, имеющих отношение к данной проблеме, в том числе — последних. Следует учесть, что достаточное количество необходимых ссылок повышает значимость статьи и ее цитируемость.

3. Постановку задачи и ее решение с обоснованием полученных результатов.

4. Выводы, в которых следует кратко сформулировать теоретическое и практическое значение полученных результатов, не повторяя информацию из других разделов и не перечисляя, что выполнено (не повторять аннотацию).

После основного текста помещается следующая информация **на английском языке**:

- фамилии и инициалы авторов (в английской транслитерации, если в основном тексте эта информация подана кириллицей);
- название статьи;
- аннотация;
- ключевые слова;
- список используемых источников согласно Harvard Style. Источники с заглавиями на латинице приводятся без перевода. Необходимо обеспечить перевод названий источников, не использующих латинский алфавит, и указать после них в скобках язык оригинала. Фамилии и инициалы авторов следует транслитерировать как для загранпаспорта. Примеры оформления библиографических ссылок согласно требованиям Harvard Style приведены, например, по электронному адресу [http://www.staffs.ac.uk/assets/harvard\\_referencing\\_examples\\_tcm44-39847.pdf](http://www.staffs.ac.uk/assets/harvard_referencing_examples_tcm44-39847.pdf).

Объем статьи, включая список литературы, таблицы, рисунки и подписанные подписи, не должен превышать 16 с. (через полтора интервала), обзорной статьи — 25 с., краткого сообщения — 7 с.

**Оформление текста.** Текст статьи должен быть набран шрифтом Times New Roman, 12 pt с полуторным интервалом в редакторе Microsoft Word 97 (2003) либо более поздних версиях и представлен файлом типа \*.doc.

На первой странице в точном порядке следует разместить:

- 1) индекс по универсальной десятичной классификации (УДК);
- 2) инициалы и фамилии авторов с указанием ученой степени;
- 3) полное название организаций, в которых работают авторы (страна, адрес, контактный телефон, e-mail);
- 4) название статьи — наиболее лаконичное и понятное, без малоизвестных аббревиатур (шрифт Arial жирный, размещение по левому краю, не допускаются переносы);
- 5) текст аннотации на русском и украинском языках (через полтора интервала);
- 6) ключевые слова (3—5 слов курсивом);
- 7) основной текст.

В статье необходимо использовать общепринятые научные термины и условные обозначения, единицы физических величин должны соответствовать требованиям Международной системы единиц (SI).

**Математические формулы** создаются в виде отдельных объектов в редакторе формул Equation, располагаются по центру. Формулы, на которые имеются ссылки в тексте, должны иметь сквозную нумерацию, формулы, на которые ссылки в тексте отсутствуют, не нумеруются. Номер формулы ставится в круглых скобках у края правого поля. Размеры символов в формулах: обычный — 14 pt, крупный — 18 pt, мелкий — 12 pt, крупный индекс — 7 pt, мелкий индекс — 5 pt.

*Пример:*

$$V'(t) = p^{\frac{1}{\alpha}(t)} y'(t) (p(t)(y')^{\alpha})' + (q(t)p^{1/\alpha}(t))' \int_0^{y(t)} f(u) du + q(t)p^{1/\alpha}(t)f(y(t))y'(t) = (q(t)p^{1/\alpha}(t))'. \quad (1)$$

**Таблицы** следует пронумеровать по порядку упоминания и сослаться на них в тексте. В таблицах не должно быть пустых граф, прочерков и сокращенных слов. Прографка таблицы набирается шрифтом Times New Roman — 9 pt, головка таблицы — 8,5 pt. Цифровой материал в таблицах печатают с двойным интервалом, текст головки и боковика — с одинарным. Таблицы должны быть либо все с названиями, либо все без них.

*Пример:*

Таблица 1

Число альтернатив	Частота появления реверса рангов при оценивании по трем критериям			
	Методом непосредственного оценивания		Методом «линия»	
	По максимуму	По сумме	По максимуму	По сумме
3	0,602	0,0886	0,1266	0,1591
4	0,0527	0,1007	0,1280	0,1664

**Рисунки** с подтекстовками (если они есть) должны быть пронумерованы в соответствии с порядком упоминания в тексте. Одни и те же сведения не следует повторять в тексте и подрисуночных подписях. Рисунки должны быть либо все с подписями, либо все без них. Обозначения на рисунке должны быть четкими и легко читаемыми. Оси координат на графиках должны быть обозначены. В тексте обязательно должны быть ссылки на каждый рисунок.

**Список использованной литературы** составляется в порядке упоминания источников в тексте согласно ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 (ГОСТ 7.1—2003, ИДТ); ДСТУ 7093:2009 (ГОСТ 7.11—2004 (ИСО 832:1994), МОД; ISO 832:1994, МОД); ДСТУ 7152:2010; ДСТУ 7157:2010. Названия источников в списке приводятся на языке оригинала. В тексте номер источника указывается в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Если в списке литературы имеется ссылка на электронный ресурс, необходимо указать фамилию и инициалы автора, название работы, в квадратных скобках — электронный ресурс, затем — режим доступа. Примеры оформления списка литературы см. на сайте журнала [www.emodel.org.ua](http://www.emodel.org.ua)

При формировании списка использованной литературы следует придерживаться норм самоцитируемости, т.е. число работ автора (авторов) статьи, использованных в списке, не должно превышать 30%.

Статья, доработанная автором после рецензирования, должна быть возвращена в редакцию с ответом рецензенту, в котором следует указать какие замечания рецензента учтены. В случае несогласия с мнением рецензента автор может представить аргументированный ответ для рассмотрения редколлекцией.

Для обеспечения высокого уровня журнала предусматривается внутреннее и независимое внешнее рецензирование, после которого решение о публикации принимается редакционной коллегией. Решение редколлекции считается окончательным.

Дорабатывать статью можно не более одного месяца.

После получения верстки статьи автор должен исправить замеченные ошибки и в тот же день отправить в редакцию по e-mail перечень исправлений с указанием страницы, абзаца и строки. В случае задержки авторской верстки редакция, придерживаясь существующего производственного графика, оставляет за собой право сдать верстку в типографию без авторских правок.

Подавая статью в редакцию журнала, автор передает редакции право на ее опубликование и дальнейшее распространение.

Статьи, подготовленные не в соответствии с данными правилами, не будут рассматриваться и рецензироваться.

Перед подготовкой статьи рекомендуем внимательно ознакомиться хотя бы с одним номером нашего журнала.

Перед отправлением статьи в редакцию рекомендуем прочесть ее глазами читателя, и это позволит избежать многих досадных ошибок.

# CONTENTS

## **Mathematical Modeling and Computation Methods**

LISTROVOY S.V., SIDORENKO A.V., LISTROVAYA E.S. Method of Enumeration of Maximum Independent Sets in Nonoriented Graphs . . . . .	3
KRASILNIKOV A.I. Analysis of the Kurtosis Coefficient of Contaminated Gaussian Distributions . . . . .	19
GAMZAEV Kh.M. About one Stefan Inverse Problem for Phase Transformations in Solids	31

## **Computational Processes and Systems**

MINAEV Yu.N., GUZIY N.N., FILIMONOVA O.Yu., MINAEVA J.I. Analysis of Self-Similarity of Multivariate Time Series (Ts) on the Basis of the Methods of Intellectual Analysis of the Data . . . . .	43
SAPOZHNIKOV V.V., SAPOZHNIKOV VI.V., EFANOV D.V. Modulo Weighted Codes with Summation with the Minimum Number of Undetectable Errors in Data Vectors . . . . .	69

## **Application of Modeling Methods and Facilities**

FATTAKHOVA M.I., VELIDZHANOVA G.M., KADYROV H.A. Analysis of Schemes for Partition of Channels in Cellular Networks without Queue . . . . .	89
POLISSKY Yu.D. On Certain Approaches to Implementation of Some Problem Operations in the Residue Class System . . . . .	105

<b>Author's Agreement (Public Offer) about Conditions of Article Publication in the Journal "Electronic Modeling". . . . .</b>	<b>115</b>
--	------------

<b>Rules of Paper Presentation to the Journal «Electronic Modeling» . . . . .</b>	<b>121</b>
---	------------