

Учредитель: Национальная академия наук Украины

Издатель: Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова

Главный редактор: чл.-кор. НАН Украины В.Ф. ЕВДОКИМОВ

**Заместители главного редактора: д-р техн. наук С.Д. ВИННИЧУК,
канд. техн. наук Э.П. СЕМАГИНА**

Ответственный секретарь: Л.Е. ЗБОРОВСКАЯ

Редакционная коллегия:

канд. техн. наук В.В. АРИСТОВ, чл.-кор. НАН Украины В.П. БОЮН, д-р техн. наук В.Н. БЕЛЕЦКИЙ, д-р техн. наук А.Ф. ВЕРЛАНЬ, д-р техн. наук А.Ф. КАТКОВ, д-р техн. наук В.Я. КОНДРАЩЕНКО, д-р техн. наук Ю.М. КОРОСТИЛЬ, д-р техн. наук А.Я. МАТОВ, акад. НАН Украины Ю.М. МАЦЕВИТЫЙ, д-р техн. наук В.В. МОХОР, д-р техн. наук М.В. МЫСЛОВИЧ, д-р техн. наук А.С. ОГИР, д-р техн. наук В.Д. САМОЙЛОВ, д-р техн. наук С.Е. САУХ, д-р техн. наук В.П. СИМОНЕНКО, канд. техн. наук А.А. ЧЕМЕРИС

Региональные редакторы:

Prof. E. Dshalalow

Department of Applied
Mathematics, Florida
Institute of Technology,
Melbourne FL 32901, USA,
edshalalow@cfl.rr.com

Dr. Stan Lipovetsky

GfK Custom Research North America,
8401 Golden Valley Road,
Minneapolis, Minnesota
55427-0900, USA,
stan.Lipovetsky@gfk.com

Prof. V. Sree Hari Rao

Department of Mathematics
Jawaharlal Nehru
Technological University,
Hyderabad 500872, India,
vshrao@yahoo.com

Редакционный совет:

Prof. R.P. AGARWAL (USA), проф. Ю.А. БЕЛОВ (Украина), чл.-кор. НАН Украины, проф. В.В. ВА-СИЛЬЕВ (Украина), prof. E. ÇINLAR (USA), акад. НАН Украины, проф. Ф.Б. ГРИНЕВИЧ (Украина), prof. H. DADUNA (Germany), акад. РАН, проф. К.С. ДЕМИРЧЯН (Россия), prof. H.I. FREEDMAN (Canada), prof. T. KACZOREK (Poland), prof. J. KORBICZ (Poland), акад. НАН Казахстана, проф. А.Т. ЛУКЪЯНОВ (Казахстан), акад. НАН Украины, проф. А.А. МАРТЫНЮК (Украина), проф. А.И. ПЕТ-РЕНКО (Украина), акад. НАН Украины, проф. Б.С. СТОГНИЙ (Украина), prof. J. SOLDEK (Poland), чл.-кор. НАН Украины С.Г. ТАРАНОВ (Украина), акад. НАН Украины, проф. А.К. ШИДЛОВСКИЙ (Украина), prof. V.A. VUJICHICH (Serbia)

**Журнал реферирован и индексируется в Cambridge Scientific Abstracts,
Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec,
ВИНИТИ РАН (Россия)**

**Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України,
в яких можуть публікуватися основні результати дисертаційних робіт**

Адрес редакции: 03164, Киев-164, ул. Генерала Наумова, 15.

Тел. (044) 4241466, факс 4240586. E-mail: em@ipme.kiev.ua; http: www.ipme.kiev.ua

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭНЕРГЕТИКЕ им. Г.Е. ПУХОВА

ЭЛЕКТРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ **3** ТОМ 36 ELECTRONIC MODELING • 2014

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ОСНОВАН В 1979 ГОДУ

ВЫХОДИТ ОДИН РАЗ В ДВА МЕСЯЦА
КИЕВ

СОДЕРЖАНИЕ

Интегральные уравнения в задачах математического моделирования 3

Математическое моделирование и вычислительные методы

АПАРЦИН А.С. Неклассические уравнения Вольтерры I рода в интегральных моделях развивающихся систем 7

БУЛАТОВ М.В. Исследование интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью 19

МЕНЬШИКОВ Ю.Л. Метод обеспечения адекватности динамических моделей 31

ВЕРЛАНЬ Д.А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей 41

Вычислительные процессы и системы

ГАВРЫШ В.И. Численно-аналитическое решение нелинейной стационарной задачи теплопроводности для бесконечной термочувствительной многослойной пластины 59

ФЕДОРЧУК В.А., МАХОВИЧ А.И. Метод исследования динамики нестационарных тепловых процессов при наличии симметричных граничных условий 71



© Институт проблем
моделирования
в энергетике
им. Г.Е. Пухова
НАН Украины, 2014

Применение методов и средств моделирования

СТАРКОВ В.Н., СЕМЕНОВ А.А., ГОМОНАЙ Е.В. Операторное уравнение первого рода в проблеме реконструкции статистики числа фотонов квантового света 81

АБДИКАРИМОВ Р.А. Моделирование динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин переменной жесткости 95

Краткие сообщения

ВЕРЛАНЬ А.Ф., ХУДАЯРОВ Б.А., ФАЙЗИБОВ Э.Ф. Моделирование флаттера вязкоупругой цилиндрической оболочки в потоке газа 105

ИВАНЮК В.А., КОСТЬЯН Н.Л. Способ построения динамической модели линейного объекта по реакции на входное воздействие произвольной формы 113

Новые правила оформления статьи для журнала «Электронное моделирование» 121

Номер надруковано частково за рахунок державного замовлення згідно з Програмою підтримки періодичних видань НАН України

Свідоцтво про держ. реєстрацію КВ № 291, 16.12.93

Оригінал-макет виготовлено в ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України

Підписано до друку 04.06.14. Формат 70 × 100 /16. Папір офс. Гарн. Таймс Нью Роман. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 10,0. Тираж. 177 прим. Зам. 3927. Ціна 55 грн.

Друкарня Видавничого дому «Академперіодика»
01004, Київ, вул. Терещенківська, 4.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи серії ДК від 27.07.2001 р.

Интегральные уравнения в задачах математического моделирования

Высокие темпы развития техники и научных исследований неразрывно связаны с эффективным применением математических методов и компьютерных средств. При решении исследовательских задач необходимо изучать новые объекты и явления из любой естественно-научной области, устанавливать новые закономерности, описывать ранее неизвестные эффекты. При создании и совершенствовании технических изделий, образцов новой техники необходимо в большинстве случаев располагать математическими описаниями технических элементов, узлов и блоков с целью последующего проектирования, изготовления и эффективной эксплуатации технических систем.

Применение математических моделей и реализующих их программных средств наиболее эффективно при разработке и функционировании автоматизированных и автоматических систем управления технологическими процессами, многими видами производственных объектов, электронными системами, подвижными объектами. Современные методы и средства управления во многих случаях создаются на основе использования математических моделей объектов управления. Созданию новых производств и промышленных технологий предшествует объемный цикл исследований, построение программных систем моделирования и проектирования. При этом большое значение имеют компьютерные средства, используемые в современных системах измерения, контроля, наблюдения и диагностики.

Для большинства указанных задач главным методом исследования и получения результатов является компьютерная реализация математических моделей. Методы компьютерного исследования включают в себя процедуры поиска

структур математических моделей, оценки и определения их параметров, обеспечения необходимой точности вычислений, согласованной с точностью исходных данных, принятия решений при реализации вычислительных алгоритмов.

Усложнение задач динамики систем и расширение класса исследуемых динамических объектов обуславливает необходимость дальнейшего развития и усовершенствования методов математического моделирования в задачах динамики, разработки новых эффективных методов и средств компьютерной реализации математических моделей реальных физических объектов и процессов. При этом требуется решение таких проблем как повышение адекватности математических моделей и точности их численной реализации, уменьшение размерности вычислительных задач, расширение класса алгоритмов моделирования.

Стремление повысить производительность компьютерных средств, обеспечить высокую точность, минимизировать используемые ресурсы компьютера приводит к необходимости исследовать возможности применения различных видов математических описаний в качестве моделей динамических объектов. В частности, не полностью решенной остается проблема исследования и использования возможностей непараметрических динамических моделей в виде интегральных уравнений и операторов, обладающих рядом достоинств и существенных особенностей как при описании широкого класса процессов, так и при достижении эффективной компьютерной реализации.

Непараметрические модели являются самостоятельным и своеобразным видом математического описания задач динамики. В отличие от параметрических моделей, для формирования которых в качестве исходных данных используются заданные параметры (постоянные или переменные) структурированного объекта, непараметрические динамические модели формируются на основе заданных динамических характеристик объекта, его звеньев или элементов. Динамические характеристики представляют собой функциональные зависимости (функции), которые могут быть получены в виде экспериментальных данных или в аналитическом виде, если существует развитая теория исследуемого объекта.

К параметрическим динамическим моделям относятся дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных), на решение которых прежде всего ориентированы многочисленные программные продукты, предназначенные для исследования динамических объектов. Параметры (коэффициенты) дифференциальных уравнений прямо или косвенно определяются заданными параметрами объекта.

Класс непараметрических динамических моделей составляют различные виды интегральных уравнений и их систем, свойства которых определяются структурой уравнений и ядрами входящих в уравнение интегральных операторов. Ядра операторов представляют собой функции двух (и более) переменных, сформированные по заданным динамическим характеристикам объекта.

Кроме указанных параметрических и непараметрических динамических моделей существуют также модели смешанного типа, а именно динамические модели в виде интегродифференциальных уравнений, в которых совмещены свойства параметрических и непараметрических моделей.

В связи с устойчивой тенденцией возрастания сложности создаваемых и перспективных образцов новой техники, неуклонным развитием научных исследований, с охватом все более широкого круга изучаемых объектов, явлений и процессов, возрастает роль методов и средств математического и компьютерного моделирования в целом и, в частности, роль методов получения, применения, численной и компьютерной реализации непараметрических динамических моделей, позволяющих расширить круг эффективно решаемых исследовательских и проектных задач.

Таким образом, можно констатировать актуальность проблемы развития методов и средств компьютерного моделирования динамических объектов на основе эффективного применения непараметрических динамических моделей в виде интегральных уравнений. Проведение соответствующих исследований и разработок позволит реализовать на практике такие достоинства интегральных моделей, как сглаживающие свойства интегральных операторов и высокая устойчивость численных операций интегрирования.

К основным задачам данных исследований относятся следующие.

- Систематизация и анализ особенностей формирования и применения непараметрических моделей динамических объектов; сравнительный анализ типовых, проблемно-ориентированных пакетов прикладных программ и выбор базовой среды компьютерного моделирования динамических объектов на основе непараметрических моделей.

- Разработка алгоритмов численной реализации непараметрических динамических моделей, ориентированных на применение и развитие средств компьютерного моделирования динамических объектов, в том числе разработка, апробация, оценка дееспособности и качества алгоритмов реализации неявных непараметрических моделей первого и второго рода (интегральных уравнений Вольтерры I и II рода) применительно к моделированию линейных, нелинейных и сингулярных динамических объектов и их систем.

- Разработка прикладного программного обеспечения для реализации метода компьютерного исследования динамических объектов на основе непараметрических моделей. Использование и развитие технологических платформ для организации программных средств, реализующих процессы компьютерного моделирования динамических объектов по заданным непараметрическим моделям с адаптацией имеющихся форматов представления математических моделей и данных. Анализ возможностей развития средств компьютерного моделирования в направлении современных тенденций интеллектуализации анализа данных.

- Оценка прикладных возможностей предлагаемых средств компьютерного моделирования посредством решения тестовых и практических задач технического назначения.

Статьи, представленные в данном номере журнала, посвящены решению ряда указанных выше задач.

*Научный редактор д-р техн. наук, профессор
А. Ф. ВЕРЛАНЬ*



УДК 517.968

А.С. Апарцин, д-р физ.-мат. наук
Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН
(Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130,
тел. (3952) 426796, e-mail: apartsyn@isem.sei.irk.ru)

Неклассические уравнения Вольтерры I рода в интегральных моделях развивающихся систем *

Получены достаточные условия существования и единственности непрерывного решения линейного неклассического уравнения типа Вольтерры, возникающего в интегральных моделях развивающихся систем. Рассмотрены некоторые уравнения Вольтерры I рода с кусочно-гладкими ядрами. Дан анализ тестовых задач, позволяющий понять специфику пока недостаточно исследованных интегральных уравнений.

Отримано достатні умови існування і єдиності неперервного розв'язку лінійного неклассичного рівняння типу Вольтерри, яке виникає в інтегральних моделях систем, що розвиваються. Розглянуто деякі рівняння Вольтерри I роду з кусково-гладкими ядрами. Подано аналіз тестових задач, який дозволяє зрозуміти специфіку поки що недостатньо досліджених інтегральних рівнянь.

Ключевые слова: неклассические уравнения Вольтерры I рода, достаточные условия, разрывное ядро.

В 1977 г. В.М. Глушковым введен новый класс интегральных моделей развивающихся систем [1]. «Визитной карточкой» таких моделей являются операторы Вольтерры с переменными нижними пределами интегрирования, отражающими динамику замены устаревших элементов системы новыми. В дальнейшем этот подход получил всестороннее развитие и нашел обширную область приложений [2—4]. В простейшем односекторном варианте, когда в моделируемой системе отсутствует специальная подсистема развития, модель В.М. Глушкова сводится к решению интегрального уравнения Вольтерры I рода

$$\int_{a(t)}^t K(t,s)x(s)ds = y(t), t \in [0, T]. \quad (1)$$

Будем называть такие уравнения неклассическими, чтобы подчеркнуть их отличие от стандартных уравнений Вольтерры I рода, у которых перемен-

* Работа поддержана РФФИ, грант № 12-01-00722а.

ным является лишь верхний предел интегрирования [5, 6]. Теория и численные методы решения (1) для случаев $a(0) < 0$ и $a(0) = 0$ имеют существенные отличия и детально рассмотрены в работах [5, 6].

В последнее время внимание исследователей привлекло уравнение [7, 8]

$$\sum_{i=1}^n V_i x \equiv \sum_{i=1}^n \int_{a_i(t)}^{a_{i-1}(t)} K_i(t, s) x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

где $a_i(0) = 0$, $i = \overline{0, n}$, $0 \leq a_n(t) < a_{n-1}(t) < \dots < a_0(t) \equiv t \quad \forall t > 0$, $a'_1(0) < 1$. Если под $t-s$ понимать возраст в момент времени t элементов системы $x(s)$, а под K_i — коэффициент эффективности функционирования элементов i -й возрастной группы, то конструкция (2) позволяет моделировать динамику развития системы с учетом старения, а следовательно, снижения эффективности функционирования ее элементов. Правая часть (2) при этом представляет интегральный показатель уровня развития системы, например системы электроэнергетики, т.е. суммарную мощность электростанций.

При $n=1$ уравнение (2) преобразуется в (1). Ограничимся исследованием случая, когда в (2) $n=2$,

$$V_1 x + V_2 x \equiv \int_{a_1(t)}^t K_1(t, s) x(s) ds + \int_0^{a_1(t)} K_2(t, s) x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$a_1(t) > 0, \quad a'_1(t) > 0, \quad \forall t > 0, \quad a_1(0) = 0, \quad a'_1(0) < 1,$$

хотя достаточные условия корректной разрешимости (3) в пространстве $C_{[0, T]}$ легко обобщаются на случай произвольного n .

Достаточные условия существования и единственности решения уравнения (3) в пространстве $C_{[0, T]}$. Пусть ядра K_1 и K_2 непрерывны по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемы по t в областях соответственно $\Delta_1 = \{(t, s) : 0 \leq a_1(t) \leq s \leq t \leq T\}$ и $\Delta_2 = \{(t, s) : 0 \leq s \leq a_1(t)\}$ так, что $\Delta_1 \cup \Delta_2 = \Delta$, $\Delta = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = l$, $l = \{(t, s) : s = a_1(t)\}$.

Под $\overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}$ далее будем понимать пространство непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ функций $y(t)$ с нормой

$$\|y(t)\|_{\overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)}} = \max_{0 \leq t \leq T} \{|y(t)| + |y'(t)|\} \quad (4)$$

и дополнительным условием $y(0) = 0$. Если

$$\min_{t \in [0, T]} |K_1(t, t)| = k > 0, \quad (5)$$

то справедлива следующая оценка [5, с. 131]:

$$\|V_1^{-1}\|_{\dot{C}_{[0,T]}^{(1)} \rightarrow C_{[0,T]}} \leq Sk^{-1}e^{k^{-1}L_1T}, \quad (6)$$

где

$$L_1 = \max_{(t,s) \in \Delta_t} |K'_{1_t}(t,s)|, \quad S = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=1}^j \gamma_i \geq 1, \quad \gamma_i = \beta_i + (z_i - z_{i+1})L_1k^{-1},$$

$$z_i = a_1^i(T) = a_1(a_1(\dots a_1(T))), \quad a_1^0(T) = T, \quad \beta_i = \max_{t \in [z_i, z_{i+1}]} \frac{a_1'(t)|K_1(t, a(t))|}{|K_1(t, t)|}.$$

Оценка (6) позволяет получить достаточное условие существования, единственности и устойчивости решения уравнения (3) на паре $(C_{[0,T]}, \dot{C}_{[0,T]}^{(1)})$ как следствие известной теоремы функционального анализа [9, с. 212].

Теорема 1. Если линейный ограниченный оператор V_1 , отображающий банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2 , имеет ограниченный обратный оператор V_1^{-1} , а линейный ограниченный оператор V_2 , действующий из B_1 в B_2 , удовлетворяет условию

$$\|V_2\|_{B_1 \rightarrow B_2} < \frac{1}{\|V_1^{-1}\|_{B_2 \rightarrow B_1}},$$

то оператор $V = V_1 + V_2$ также имеет ограниченный обратный оператор.

Следовательно, для того чтобы получить достаточные условия корректности по Адамару уравнения (3) на паре $(C_{[0,T]}, \dot{C}_{[0,T]}^{(1)})$, необходимо оценить $\|V_2\|_{C_{[0,T]} \rightarrow \dot{C}_{[0,T]}^{(1)}}$.

Введем обозначения

$$A_1 = \max_{t \in [0, T]} a_1'(t), \quad M_2 = \max_{(t,s) \in \Delta_2} |K_2(t,s)|, \quad L_2 = \max_{(t,s) \in \Delta_2} |K_2'(t,s)|.$$

Тогда

$$\|V_2x\|_{\dot{C}_{[0,T]}^{(1)}} = \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \left| \int_0^{a_1(t)} K_2(t,s) x(s) ds \right| + \left| a_1'(t) K_2(t, a_1(t)) + \int_0^{a_1(t)} K_2'(t,s) x(s) ds \right| \right\} \leq \{a_1(T)(M_2 + L_2) + A_1M_2\} \|x(t)\|_{C_{[0,T]}}$$

откуда

$$\|V_2\|_{C_{[0,T]} \rightarrow \dot{C}_{[0,T]}^{(1)}} \leq a_1(T)(M_2 + L_2) + A_1M_2. \quad (7)$$

Таким образом, из теоремы 1 и оценок (6), (7) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнено неравенство

$$a_1(T)(M_2 + L_2) + A_1 M_2 < kS^{-1} e^{-k^{-1}L_1 T}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (3) корректно по Адамару на паре $(C_{[0, T]}, \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)})$.

Условие (8) получено в предположении, что ядро K_1 определено на Δ_1 . Если можно расширить область определения K_1 до Δ так, что $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \Delta \cap \Delta_2 = \Delta_2$, то достаточное условие корректности (3) модифицируется следующим образом. Представим первое слагаемое в (3) в виде

$$\int_{a_1(t)}^t K_1(t, s) x(s) ds = \int_0^t K_1(t, s) x(s) ds - \int_0^{a_1(t)} K_1(t, s) x(s) ds.$$

Тогда (3) примет вид

$$\hat{V}_1 x + \hat{V}_2 x \equiv \int_0^t K_1(t, s) x(s) ds + \int_0^{a_1(t)} (K_2(t, s) - K_1(t, s)) x(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Введем обозначения:

$$\hat{L}_1 = \max_{(t, s) \in \Delta} |\hat{K}_1(t, s)|, \quad \hat{M}_2 = \max_{(t, s) \in \Delta_2} |K_2(t, s) - K_1(t, s)|,$$

$$L'_2 = \max_{(t, s) \in \Delta_2} |K'_2(t, s) - K'_1(t, s)|.$$

Поскольку [5, с. 12] $\|V_1^{-1}\|_{\overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)} \rightarrow C_{[0, T]}} \leq k^{-1} e^{-k^{-1}\hat{L}_1 T}$, достаточное условие корректности уравнения (9) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнено неравенство

$$a_1(T)(\hat{M}_2 + \hat{L}_2) + A_1 \hat{M}_2 < ke^{-k^{-1}\hat{L}_1 T}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (3) корректно по Адамару на паре $(C_{[0, T]}, \overset{\circ}{C}_{[0, T]}^{(1)})$.

Замечание 1. В общем случае константы, входящие в (8), (10), являются неубывающими функциями параметра T , поэтому неравенства (8), (10) можно трактовать как ограничения на величину T . Локальность существования непрерывного решения является типичным свойством полиномиальных уравнений Вольтерры I рода [10—13], в которых важную роль играет функция Ламберта [14, 15]. Характер нелинейности в (8), (10) также позволяет применить функцию Ламберта для получения гарантированной

оценки снизу величины T как единственного вещественного корня соответствующего нелинейного уравнения.

Замечание 2. Численные методы решения уравнений (2), (3) представляют самостоятельный интерес и заслуживают отдельного рассмотрения.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\int_{\alpha t}^t x(s) ds + \varepsilon \int_0^{\alpha t} x(s) ds = y(t), t \in [0, T]. \quad (11)$$

Здесь $k=1$, $M_2=|\varepsilon|$, $\hat{M}_2=|1-\varepsilon|$, $L_1=\hat{L}_1=L_2=0$, $a_1(T)=\alpha T$, $A_1=\alpha < 1$, $\gamma_i = \beta_i = \alpha$, $S = \frac{1}{1-\alpha}$. Поэтому согласно (8)

$$\alpha T |\varepsilon| + \alpha |\varepsilon| < 1 - \alpha, \quad (12)$$

а согласно (10)

$$\alpha T |1-\varepsilon| + \alpha |1-\varepsilon| < 1. \quad (13)$$

Неравенства (12), (13) дают соответствующие оценки ε , гарантирующие существование, единственность и устойчивость решения (11) в пространстве $C_{[0, T]}$:

$$|\varepsilon| < \frac{1-\alpha}{\alpha(1+T)}, \quad |1-\varepsilon| < \frac{1}{\alpha(1+T)}. \quad (14)$$

Более точную оценку, чем (14), можно получить в результате дифференцирования (11) и перехода к эквивалентному функциональному уравнению

$$x(t) = \alpha(1-\varepsilon)x(\alpha t) + y'(t), \quad (15)$$

откуда

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j (1-\varepsilon)^j y'(\alpha^j t). \quad (16)$$

Условие

$$|1-\varepsilon| < 1/\alpha \quad (17)$$

гарантирует равномерную сходимость функционального ряда (16) к непрерывному на отрезке $[0, T]$ решению уравнения (11).

Уравнение (11) имеет важное методическое значение. Применительно к моделированию динамической системы, состоящей из двух возрастных групп элементов, параметр ε отражает эффективность функционирования

старшей возрастной группы. При $\varepsilon = 1$ обе группы одинаково эффективны и решением (11) является функция $\bar{x}(t) = y'(t)$, неубывающая для успешно развивающейся системы. При $\varepsilon = 0$ вклад второй группы в показатель $y(t)$ равен нулю, а при $\varepsilon < 0$ вторая группа играет негативную роль, и для поддержания заданного темпа роста $y(t)$ необходим соответствующий рост $x(t)$. Наконец, при некотором критическом значении $\varepsilon^* < 0$ система идет «вразнос» и непрерывного решения на отрезке $[0, T]$ не существует. Если, в частности, в (11) $y(t) = t$, то при условии (17) в силу (16) решение $\bar{x}(t) = \frac{1}{1-\alpha(1-\varepsilon)}$ является непрерывным решением (11), а $\varepsilon^* = 1-1/\alpha$.

Уравнения Вольтерры I рода с разрывными ядрами. Специфика уравнения (2) позволяет представить его в форме интегрального уравнения Вольтерры I рода

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

с разрывным ядром

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & a_1(t) < s \leq t, \\ K_i(t,s), & a_i(t) < s < a_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, n-1}, \\ K_i(t,s) + K_{i+1}(t,s), & s = a_i(t), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ K_n(t,s), & 0 \leq s < a_{n-1}(t). \end{cases}$$

Некоторые вопросы теории подобных уравнений рассмотрены в [8]. Для иллюстрации принципиального отличия подобных уравнений от классических линейных уравнений Вольтерры I рода с гладкими ядрами рассмотрим уравнение (11). Положим

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & \alpha t < s \leq t, \\ 1+\varepsilon, & s = \alpha t, \\ \varepsilon, & 0 \leq s < \alpha t, \end{cases} \quad (19)$$

где $\varepsilon \neq 0, 1$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда (11) примет вид (18). В частности, при $\alpha = 1/2$, $\varepsilon = \varepsilon^* = -1$ ядро (19) имеет вид

$$K(t,s) = \text{sing}(s-t/2) = \begin{cases} 1, & s > t/2, \\ 0, & s = t/2, \\ -1, & s < t/2. \end{cases} \quad (20)$$

Решение уравнения

$$\int_{t/2}^t x(s) ds - \int_0^{t/2} x(s) ds = t, \quad t \in [0, T],$$

а следовательно, и уравнения (18) с ядром (20) и правой частью $y(t) = t$ приведено в [8]: $x(t) = \frac{\ln t}{\ln 2} + x(1)$.

Неединственность не является следствием равенства $K(0,0) = 0$, так как при $\alpha \neq 1/2$, $\varepsilon^* = 1 - 1/\alpha \neq -1$, и решением уравнения

$$\int_{\alpha t}^t x(s) ds + \varepsilon^* \int_0^{\alpha t} x(s) ds = t$$

является однопараметрическое семейство $x(t) = -\frac{\ln t}{\ln \alpha} + x(1)$, хотя при этом

$K(0,0) = 1 + \varepsilon^*$, $K(t,t) = 1$, $t > 0$. Более того, неединственность возможна даже в случае $K(t,t) \equiv 1$, $t \in [0, T]$. Покажем это. Пусть вместо (19)

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, & s \geq \alpha t, \\ \varepsilon, & s < \alpha t. \end{cases} \quad (21)$$

Теорема 4. Функциональное уравнение, эквивалентное (18) с ядром (21), совпадает с функциональным уравнением (15), эквивалентным (18) с ядром (19).

Доказательство. Представим (21) в виде

$$K(t,s) = 1 + (\varepsilon - 1) \mathbf{1}(\alpha t - s), \quad (22)$$

где $\mathbf{1}(\cdot)$ — функция Хевисайда,

$$\mathbf{1}(v) = \begin{cases} 1, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

В результате подстановки (22) в (18) получаем

$$\int_0^t (1 + (\varepsilon - 1) \mathbf{1}(\alpha t - s)) x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (23)$$

Положим $\alpha t = z$. Тогда из (23) вытекает

$$\int_0^{z/\alpha} (1 + (\varepsilon - 1) \mathbf{1}(z - s)) x(s) ds = y(z/\alpha), \quad t \in [0, T]. \quad (24)$$

После дифференцирования (24) по z запишем

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{z}{\alpha}\right) + (\varepsilon - 1) \int_0^{z/\alpha} \mathbf{1}'_z(z-s) x(s) ds = \frac{1}{\alpha} y'\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

Здесь учтено, что $\mathbf{1}\left(z - \frac{z}{\alpha}\right) = 0$, так как $0 < \alpha < 1$. Но $\mathbf{1}'_z(z-s) = \delta(z-s)$, где $\delta(\cdot)$ — δ -функция Дирака. Поэтому

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{z}{\alpha}\right) + (\varepsilon - 1) \int_0^{z/\alpha} \delta(z-s) x(s) ds = \frac{1}{\alpha} y'\left(\frac{z}{\alpha}\right), \quad (25)$$

и в силу известного свойства δ -функции из (25) получим

$$\frac{1}{\alpha} x\left(\frac{z}{\alpha}\right) + (\varepsilon - 1) x(z) = \frac{1}{\alpha} y'\left(\frac{z}{\alpha}\right). \quad (26)$$

Наконец, умножая (26) на α и переходя к прежней переменной, приходим к уравнению (15). Теорема доказана.

Представляет интерес решение уравнения (18) в классе кусочно-непрерывных функций, имеющих, как и ядро, разрыв I рода на луче $s = \alpha t$, если трактовать ядро как переходную характеристику прибора. Если разрыв ядра считать дефектом прибора, то для получения гладкой функции $y(t)$, являющейся образом неизвестного объекта $x(t)$, естественно представить подынтегральную функцию как произведение двух разрывных при $s = \alpha t$ функций.

Легко видеть, что уравнению (18) с ядром (20) удовлетворяет кусочно-непрерывная функция

$$\hat{x}(t, s) = \begin{cases} y'(s), & s \geq \alpha t, \\ \frac{1}{\varepsilon} y'(s), & s < \alpha t, \end{cases}$$

а при $\varepsilon = \varepsilon^* = 1 - 1/\alpha$ — семейство функций $x_c(t, s) = \hat{x}(t, s) + c$, $c = \text{const}$. При этом, следуя теории некорректных задач, функцию \hat{x} можно считать нормальным решением (18).

Иной путь получения решения (18) в данном классе связан с переходом от (15) к функциональному уравнению

$$x(s) = (1 - \varepsilon) x(\alpha s) + y'(s), \quad 0 \leq s < \alpha t. \quad (27)$$

Если непрерывное на $[0, \alpha t]$ решение (27) существует (обозначим его через $x^*(s)$), то оно заведомо единственно, и при этом $x^*(0) = \frac{y'(0)}{\varepsilon}$. Функция $x^*(s)$ при $0 < \varepsilon < 2$ определяется из формулы обращения (27):

$$x^*(s) = \sum_{j=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^j y'(\alpha^j s). \quad (28)$$

Обозначим $y^*(t) = \varepsilon \int_0^{\alpha t} x^*(s) ds$. Уравнение

$$\int_{\alpha t}^t x(s) ds = y(t) - y^*(t), \quad t \in [0, T], \quad (29)$$

имеет непрерывное на $[0, T]$ решение, так как правая часть (29) принадлежит $C_{[0, T]}^{(1)}$ [5]. Обозначим это решение через $x^{**}(t)$. Тем самым сконструировано кусочно-непрерывное решение (18) в виде

$$\bar{x}(t, s) = \begin{cases} x^{**}(t, s), & s \geq \alpha t, \\ x^*(t, s), & s < \alpha t. \end{cases} \quad (30)$$

Пусть теперь неравенство $0 < \varepsilon < 2$ не выполнено. Например, $\varepsilon = \varepsilon^* = 1 - 1/\alpha$. Пусть также $y(t) \in C_{[0, T]}^{(2)}$, $y(0) = y'(0) = 0$. Тогда, дифференцируя (27), переходим к эквивалентной задаче Коши для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом:

$$x'(s) = x'(\alpha s) + y''(s), \quad x(0) = y'(0) = 0, \quad s < \alpha t. \quad (31)$$

Ее решение и примем в качестве $x^*(s)$ вместо (28). Если при некотором натуральном $k \geq 1$ $(1-\varepsilon)\alpha^k = 1$, $y(t) \in C_{[0, T]}^{(k+1)}$ и $y^{(i)}(0) = 0$, $i = \overline{0, k}$, то k -кратным дифференцированием (27) придем к эквивалентной задаче Коши

$$x^{(k)}(s) = x^{(k)}(\alpha s) + y^{(k+1)}(s), \quad y(0) = \dots = y^{(k)}(0) = 0, \quad s \in [0, \alpha t], \quad (32)$$

а если $y(t) \in C_{[0, T]}^{(k+2)}$ и $y^{(i)}(0) = 0$, $i = \overline{0, k+1}$, то

$$x^{*(k+1)}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} [(1-\varepsilon)\alpha^{k+1}]^j y^{(k+2)}(\alpha^j s). \quad (33)$$

Пример. Пусть $\alpha = 1/2$, $\varepsilon = \varepsilon^* = -1$, $y(t) = t^2/2$. Здесь $k=1$, так что согласно (31)

$$x'(s) = x'(s/2) + 1, \quad x(0) = 0, \quad s \in [0, t/2]. \quad (34)$$

Нетрудно убедиться, что решение (34) имеет вид

$$x^*(s) = \frac{s(\ln s - 1)}{\ln 2}, \quad x(0) = 0, \quad s \in [0, t/2],$$

а решение уравнения (29), с учетом формулы обращения [5, с. 7], имеет вид

$$x^{**}(t) = \frac{16}{9}t - \frac{t \ln t}{3 \ln 2}.$$

Если $y(t) = t^p/p$, $p \geq 3$, то в силу (33)

$$x^{**}(s) = (p-1)(p-2)s^{p-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} = \frac{4}{3}(p-1)(p-2)s^{p-3}.$$

Поэтому $x^*(s) = 4/3 s^{p-1}$, $s \in [0, t/2]$, $y^*(t) = -\frac{t^p}{3 \cdot 2^{p-2}}$, а решение уравнения (29) имеет вид

$$x^{**}(t) = \frac{1 + 3 \cdot 2^{p-2}}{9 \cdot 2^{p-4}} t^{p-1}.$$

Замечание 3. Единственность кусочно-непрерывного решения (18) с ядром (21) в виде (30) является основой для построения с помощью (27) устойчивого метода восстановления производной. При этом α и ε являются параметрами регуляризации, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$, $\varepsilon(\delta) \rightarrow 1$, где δ — мера точности правой части (18) в метрике $C_{[0, T]}$.

Рассмотрим понятие α -свертки. В приложениях важное значение имеют интегральные уравнения Вольтерры I рода типа свертки

$$\int_0^t K(t-s)x(s) ds = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (35)$$

В частности, к (35) с ядром $K(t-s) = \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}$ сводится нахождение $y^{(k)}(t)$, $y^{(i)}(0) = 0$, $i = \overline{0, k-1}$.

Удобство представления разрывного ядра (21) в форме (22) свидетельствует о целесообразности введения понятия α -свертки двух функций, $K(t)$ и $x(t)$:

$$K(t) *_{\alpha} x(t) \equiv \int_0^t K(\alpha t - s) x(s) ds, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Приведем несколько формул обращения интегрального уравнения Вольтерры I рода типа α -свертки

$$K(t) *_{\alpha} x(t) = y(t), \quad t \in [0, T], \quad (36)$$

а именно:

$$K(t) = \delta(t), \quad y(t) = C_{[0, T]}; \quad x(\alpha t) = y(t), \quad \alpha \in (0, 1];$$

$$K(t) = \mathbf{1}(t), \quad y(t) = C_{[0, T]}^{(1)}; \quad x(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} y'(t), \quad \alpha \in (0, 1];$$

$$K(t) = \text{sign}(t), \quad y(t) = t; \quad x(t) = \frac{\ln t}{\ln \alpha} + x(1), \quad \alpha \in (0, 1).$$

При $K(t) = t^n$ (36) является уравнением Вольтерры III рода:

$$K(t) = t, \quad y(t) = t^2/2; \quad x(t) = -2 \ln t + x(1), \quad \alpha = 1/2;$$

$$K(t) = t, \quad y(t) = t^2/2; \quad x(t) = \frac{x(1)}{t^{\alpha-1}}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad \alpha \neq 1/2;$$

$$K(t) = t, \quad y(t) = t^3/3; \quad x(t) = -4t + x(0), \quad \alpha = 1/2.$$

Выводы

Полученные результаты исследования достаточных условий существования и единственности решения в пространстве $C_{[0, T]}$ неклассических уравнений Вольтерры I рода позволяют использовать этот класс уравнений для анализа развивающихся систем с учетом возрастной структуры элементов.

The sufficient conditions for the existence and uniqueness of continuous solutions of the Volterra linear nonclassical equation arising in the integral models of developing systems have been obtained. Some Volterra equations of the first kind with piecewise smooth kernels have also been studied. An analysis of test problems allowing one to understand specificity of insufficiently studied integral equations is given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глушков В.М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. — 1977. — № 2. — С. 3—6.
2. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. — М.: Наука, 1983. — 350 с.
3. Яценко Ю.П. Интегральные уравнения систем с управляемой памятью. — Киев: Наук. думка, 1991. — 218 с.
4. Hritonenko N., Yatsenko Yu. Applied Mathematical Modeling of Engineering Problems. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. — 2003. — 308 p.
5. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерры I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука, 1999. — 193 с.
6. Apartsyn A.S. Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind. — Utrecht-Boston: VSP, 2003. — 168 p.
7. Messina E., Russo E., Vecchio A. A Stable Numerical Method for Volterra Integral Equations with Discontinuous Kernel // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — № 337. — P. 1383—1393.
8. Сидоров Д.Н. О параметрических семействах решений интегральных уравнений Вольтерры I рода с кусочно-гладкими ядрами // Дифференциальные уравнения. — 2013. — 49, № 3. — С. 209—215.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 741 с.
10. Апарцин А.С. О полилинейных уравнениях Вольтерры I рода // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 118—125.
11. Апарцин А.С. Полилинейные интегральные уравнения Вольтерры I рода: элементы теории и численные методы // Изв. Иркутского гос. ун-та. Серия «Математика». — Иркутск: Изд-во ИГУ. — 2007. — № 1. — С. 13—41.
12. Апарцин А.С. Полилинейные уравнения Вольтерры и некоторые задачи управления // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 4. — С. 3—16.
13. Apartsyn A.S. Polynomial Volterra Integral Equations of the First Kind and Lambert's Function // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. — 2013. — 280 (1). — P. 26—38.
14. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E. G., Jeffrey D.J. Lambert's W function in Maple // The Maple Technical Newsletter. — 1993. — № 9. — С. 12—22.
15. Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., et al. On the Lambert W Function // Adv. Comput. Math. — 1996. — Vol. 5, №. 4. — P. 329—359.

Поступила 03.02.14

АПАРЦИН Анатолий Соломонович, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН (г. Иркутск). В 1965 г. окончил Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова. Область научных исследований — обратные и некорректно поставленные задачи, интегральные уравнения, численные методы, математические модели динамических систем в энергетике.

УДК 517.968

М.В. Булатов, д-р физ.-мат. наук
Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН
(Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
тел. 8 (3952) 453018, e-mail: mvbul@icc.ru)

Исследование интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью*

Рассмотрены системы интегральных уравнений Вольтерры с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Установлены принципиальные отличия таких систем от интегральных уравнений первого и второго родов. Определены условия существования единственного непрерывного решения.

Розглянуто системи інтегральних рівнянь Вольтерри з тотожною виродженою матрицею перед головною частиною. Встановлено принципові відмінності таких систем від інтегральних рівнянь першого та другого родів. Визначено умови існування єдиного неперервного розв'язку.

К л ю ч е в ы е с л о в а: интегральные уравнения Вольтерры, индекс, матричные полиномы, интегро-алгебраические уравнения.

Первые результаты, относящиеся к теории интегральных уравнений, были получены в начале XIX века (Ж.Б. Фурье — 1811 г., Н. Абель — 1823 г., Ж. Лиувилль — 1837 г.). Однако детальное исследование таких уравнений началось несколько позже — в конце XIX и в начале XX века — и связано с именами В. Вольтерры и Э.И. Фредгольма. К настоящему времени опубликовано большое количество монографий и статей, посвященных различным аспектам качественной теории и теории численных методов решения различных классов интегральных уравнений. Современное состояние проблемы, исторический обзор и достаточно полную библиографию можно найти в работах [1—8].

Будем рассматривать взаимосвязанные интегральные уравнения Вольтерры первого и второго рода, когда число уравнений совпадает с числом искомых функций. Объединив эти уравнения в одну систему, получим

* Исследования поддержаны грантом РФФИ № 13-01-93002-Вьет_а.

систему интегральных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. Такие задачи принципиально отличаются от классических интегральных уравнений Вольтерры первого и второго рода. Поэтому использовать результаты, полученные для классических интегральных уравнений, не всегда возможно. Исследование таких уравнений началось относительно недавно — первая статья вышла в 1987 г. [5, 9, 10—13].

Сформулируем условия существования единственного решения для класса систем интегральных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. При этом используем аппарат полиномиальных матриц, матричных пучков [14, 15] и полуобратных (обобщенных обратных) матриц [14, 16].

Постановка задачи. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$A(t)x(t) + \int_0^t K(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где $A(t)$ и $K(t, \tau)$ — $(n \times n)$ -матрицы; $f(t)$ и $x(t)$ — заданная и искомая n -мерные вектор-функции. Под решением исходной системы будем понимать любую непрерывную вектор-функцию, обращающую (1) в тождество. Далее будем предполагать, что элементы матриц $A(t)$, $K(t, \tau)$ и векторы функций $f(t)$ и $x(t)$ обладают необходимой степенью гладкости.

Примем следующую классификацию системы (1) [2, 3, 6]:

1) если $A(t) \equiv 0$ — нулевая матрица, то такие задачи называют системами интегральных уравнений Вольтерры первого рода (ИУВ1);

2) если $A(t) \equiv E$ — единичная матрица или $\det A(t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$, то такие задачи называют системами интегральных уравнений Вольтерры второго рода (ИУВ2);

3) если $\det A(t_j) = 0$, $t_j \in [0, 1]$, то такие задачи называют системами интегральных уравнений Вольтерры третьего рода (ИУВ3), а точки t_j , в которых происходит вырождение матрицы $A(t)$, — особыми точками.

В настоящее время качественная теория и численные методы для ИУВ2, в том числе и с различными особенностями в ядре, достаточно полно разработана [2—4, 6]. Известны многочисленные публикации по различным аспектам качественной теории и численному решению некоторых классов ИУВ1 и ИУВ3 [1, 3, 5—7, 17].

Рассмотрим систему (1) при условии

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (2)$$

Такие уравнения принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ), а также системами интегральных уравнений Вольтерры четвертого рода [12] и интегральными аналогами дифференциально-алгеб-

раических уравнений (ДАУ) [18]. Если $x(t)$ — функция, то рассматриваемые задачи будут ИУВ1:

$$\int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где $K(t, \tau)$ и $f(t)$ — заданные функции.

Известно [2, 7, 8], что при выполнении условий

$$\begin{aligned} K(t, \tau)|_{\tau=t} = K'_t(t, \tau)|_{\tau=t} = \dots = K(t, \tau)^{(r-2)}_{t^{r-2}}(t, \tau)|_{\tau=t} = 0, \\ K^{(r-1)}_{t^{r-1}}(t, \tau)|_{\tau=t} = k(t) > 0, \quad t \in [0, 1], \\ f(0) = f'(0) = \dots = f^{(r-1)}(0) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

уравнение (3) имеет единственное непрерывное решение и эквивалентно ИУВ2

$$x(t) + \int_0^t K_1(t, \tau) x(\tau) d\tau = \varphi(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1,$$

где

$$K_1(t, \tau) = \frac{K^{(r)}_{t^r}(t, \tau)}{k(t)}, \quad \varphi(t) = \frac{f^{(r)}(t)}{k(t)}.$$

Число r принято называть индексом некорректности уравнения (3) [1, 19]. В настоящее время разработаны методы решения уравнений (3) с индексом некорректности $r=1$ или $r=2$ [1, 5—7, 17]. Многие численные алгоритмы для уравнения (3) при $r > 2$ порождают неустойчивые процессы.

Для того чтобы обосновать численные методы решения ИАУ (1), необходимо ответить на непростые вопросы: имеет ли исходная задача решение, и если имеет, то единственное ли оно. Приведем примеры.

Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где a, b, c, d — скалярные параметры. Если $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0, \varphi(t) = \psi(t) = 0$ и $ad - cb = 0$, то нетрудно убедиться, что данная система имеет множество решений $u = g(t), v = -ag'(t)/b$, где $g'(t)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция.

Следует заметить, что точки, в которых матрица $A(t)$ меняет свой ранг, не всегда являются особыми. Например, в системе

$$\begin{pmatrix} \omega(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad f(0)=0, \quad (6)$$

точки, в которых $\omega(t)$ обращается в нуль, являются особыми. В частности, если $\omega(t)=-t$, то данная система имеет семейство решений $u(t)=c$, $v(t)=f'(t)$, где c — произвольное число.

Аналогичная предыдущей система

$$\begin{pmatrix} \omega(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad f(0)=0, \quad (7)$$

имеет единственное решение $u(t)=f'(t)$, $v(t)=-(\omega(t)f'(t))'$ при любых значениях $f(t)$ и $\omega(t)$, удовлетворяющих условиям $f(0)=0$, $\omega(0)f'(0)=0$ и $f(t) \in C^1$, $\omega(t)f'(t) \in C^1$. Для формулировки результата о существовании единственного решения системы (1) приведем необходимые сведения.

Матричные пучки и многочлены. Приведем следующие определения.

Определение 1 [15]. Пучком матриц назовем сумму $\lambda A+B$, где λ — скаляр; A и B — $(m \times n)$ -матрицы.

Определение 2 [14]. Если $m=n$ и определитель матрицы $\lambda A+B$ тождественно не равен нулю, то матричный пучок называют регулярным. В противном случае ($m \neq n$ или $\det(\lambda A+B) \equiv 0$) пучок называют сингулярным.

Определение 3 [14]. Индексом регулярного матричного пучка называют минимальное целое неотрицательное число l , при котором справедливо равенство

$$\text{rank}((\lambda A+B)^{-1}A)^{l+1} = \text{rank}((\lambda A+B)^{-1}A)^l.$$

Определение 4 [9]. Пучок переменных матриц $\lambda A(t)+B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг—степень» (имеет простую структуру и индекс 1) на отрезке $[0, 1]$, если $\text{rank} A(t)=r_1 = \text{const} \forall t \in [0, 1]$ и $\deg \det(\lambda A(t)+B(t)) = r_1 = \text{const} \forall t \in [0, 1]$. Здесь $\deg(\cdot)$ означает показатель степени полинома по λ .

Определение 5. Назовем λ -матрицей степени k матрицу вида

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^k \lambda^{k-j} A_j,$$

где A_0, A_1, \dots, A_k — матрицы одинаковых размерностей.

При исследовании существования единственного решения важное значение имеет следующее.

Определение 6 [18]. Квадратная λ -матрица

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^k \lambda^{k-j} A_j, \quad A_0 \neq 0,$$

обладает доминантным свойством (ДС), если $\deg \det A(\lambda) \geq k \times \text{rank } A_0$.

Определение 7 [14, 16]. Матрица, обозначаемая далее A^- , называется полуобратной к матрице A , если она удовлетворяет матричному уравнению $AA^- = A$, которое перепишем в виде $(E - AA^-)A = 0$.

Если $\det A \neq 0$, то полуобратная матрица — единственная и совпадает с обратной, а если $\det A = 0$, то A^- определена как неединственная. Одной из полуобратных матриц является псевдообратная матрица, которая существует и определена единственным способом для любой (в том числе и прямоугольной) матрицы A [16].

Рассмотрим свойства λ -матриц.

Свойство 1. Если $A(\lambda)$ — регулярная матрица, не обладающая ДС, то существует целое положительное число m такое, что матрица $\lambda^m A(\lambda)$ обладает ДС.

Свойство 2. Если матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, то матрица $(E + \lambda(E - A_0 A_0^-)) A(\lambda)$ также обладает ДС.

Образуем цепочку λ -матриц по правилу

$$A^{(i)}(\lambda) = (E + \lambda(E - A_0^{(i-1)} A_0^{(i-1)-})) A^{(i-1)}(\lambda), \quad (8)$$

где $A_0^{(0)} = A_0$, $A_0^{(i)}(\lambda) = A_0(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, p$. Здесь верхние индексы указывают номер итерации; $A^{(i-1)-}$ — полуобратная матрица к $A^{(i-1)}$. Опуская выкладки, приведем минимальное значение p из формулы (8), при котором в матрице

$$A^{(p)}(\lambda) = \sum_{j=0}^k \lambda^{k-j} A_j^{(p)}$$

матрица $A_0^{(p)}$ невырождена:

$$p = \begin{cases} (nk - s) / (n - r), & \text{если } nk - s \text{ кратно } n - r, \\ [(nk - s) / (n - r)] + 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $[\cdot]$ — целая часть числа; $s = \deg \det A(\lambda)$; $r = \text{rank } A_0$; n — размерность матрицы $A(\lambda)$. Приведенные выражения и свойство 1 позволяют вычис-

лить индекс матричного пучка $\lambda A+B$ (см. определение 3) другим способом:

$$l = \begin{cases} (n-s)/(n-r), & \text{если } n-s \text{ кратно } n-r, \\ [(n-s)/(n-r)]+1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $s = \deg \det (\lambda A+B)$; $r = \text{rank } A$.

Теоремы существования единственного решения ИАУ. Приведем достаточные условия существования единственного решения задачи (1).

Теорема 1 [9]. Пусть для задачи (1) выполнены условия:

- 1) элементы $A(t)$ и $K(t, \tau)$, $f(t)$ принадлежат классу C^1 ;
- 2) $\text{rank } A(0) = \text{rank } (A(0)|f(0))$;
- 3) $\text{rank } A(t) = \deg \det (\lambda A(t)+B(t)) = r_1 = \text{const } \forall t \in [0, 1]$.

Тогда задача (1) имеет единственное непрерывное решение.

Условие 2 теоремы 1 — это условие разрешимости системы линейных уравнений (теорема Кронекера—Капелли), условие 3 означает отсутствие на отрезке $[0, 1]$ сингулярных точек. Например, в системе (6) $\text{rank } A(t) = 1$ и $\deg \det (\lambda A(t)+K(t, \tau)) = 1$, если $\omega(t) \neq 0$. Если $\omega(t_j) = 0$, то в этих точках $\text{rank } A(t) = 0$ и $\deg \det (\lambda A(t)+K(t, \tau)) = \deg (\omega(t)\lambda + 1) = 1$. Таким образом, в точках t_j ранг $A(t)$ и степень $\det (\lambda A(t)+K(t, \tau))$ являются переменными, т.е. в этих точках нарушается условие 3 теоремы.

В системе (7) $\deg \det (\lambda A(t)+K(t, \tau)) = \deg (-1) = 0$ при любых значениях $\omega(t)$. Следовательно, в этом случае результаты теоремы 1 неприменимы для анализа (в силу их достаточности).

Характеристикой сложности рассматриваемых задач является понятие индекса.

Определение 8. Минимальное число r , при котором существует линейный дифференциальный оператор,

$$L_r = Z_0(t) + Z_1(t) \frac{d}{dt} + \dots + Z_r(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^r,$$

где $Z_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, r$, — $(n \times n)$ -матрицы с непрерывными элементами, такой, что

$$L_r \circ (A(t)x(t) + \int_0^t K(t, \tau)x(\tau) d\tau) = \bar{A}(t)x(t) + \int_0^t \bar{K}(t, \tau)x(\tau) d\tau,$$

где $\det \bar{A}(t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$, назовем индексом ИАУ (1). В частности, если для системы (1) выполнены условия теоремы 1, то ее индекс равен единице и оператор L_1 можно выбирать в виде

$$L_1 = E + (E - A(t)A^{-1}(t)) \frac{d}{dt}$$

или

$$L_1 = A(t)A^-(t) + (E - A(t)A^-(t))\frac{d}{dt}.$$

Для интегральных уравнений первого рода (3) при условиях (4) определение 8 совпадает с понятием индекса некорректности. В этом случае оператор имеет вид $L_r = \left(\frac{d}{dt}\right)^r$.

Рассмотрим частный случай задачи (1):

$$Ax(t) + \int_0^t K(t-\tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (9)$$

где A — постоянная квадратная матрица, $\det A = 0$. Для исследования вопроса о существовании единственного решения задачи (9) можно применять различные интегральные преобразования. Однако при таком подходе придется вычислять ряд несобственных интегралов, что является непростой задачей.

Выделим семейство задач (9), для которых приведем достаточно простое правило вычисления индекса и предложим редукцию к системе ИУВ2. Обозначим

$$A_0 = A, \quad A_i = K^{(i-1)}(0), \quad i=1, 2, \dots, r, \quad (10)$$

где A и $K(u)$ — те же матрицы, что и в исходном уравнении (9). образуем цепочку уравнений

$$A^{(i)}x(t) + \int_0^t K_i(t-\tau)x(\tau) d\tau = f_i(t), \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (11)$$

где

$$A^{(i)}x(t) = A^{(i-1)} + V_{i-1}K_{i-1}(0); \quad (12)$$

$$K_i(u) = K_{i-1}(u) + V_{i-1}K'_{i-1}(u); \quad (13)$$

$$f_i(t) = f_{i-1}(t) + V_{i-1}f'_{i-1}(t); \quad (14)$$

$$A^{(0)} = A, \quad K_0(u) = K(u), \quad f_0(t) = f(t);$$

$$V_{i-1} = E - A^{(i-1)}A^{(i-1)-};$$

$A^{(i-1)-}$ — полуобратная матрица к матрице $A^{(i-1)}$, $i=1, 2, \dots, r$.

Сформулируем без доказательства вывод о существовании единственного непрерывного решения и рассмотрим вычисление индекса ИАУ (9).

Теорема 2. Пусть для задачи (9) выполнены и следующие условия:

1) для ИАУ существует такое r , что матрица $A(\lambda)$ обладает ДС, где A_i вычисляется по формуле (10);

2) $\text{rank } A^{(i)} = \text{rank } (A^{(i)}|f_i(0))$, $i=0,1,\dots,r-1$;

3) элементы правой части и ядра $K(u)$ принадлежат классу C^{r-1} .

Тогда:

1) исходное ИАУ (9) эквивалентно любой из ИАУ (11);

2) ИАУ (9) имеет единственное непрерывное решение;

3) при $i=r$ в системе (11) $\det A^{(r)} \neq 0$ (т.е. (11) при $i=r$ является системой ИУВ2).

Применим теорему 2 к неоднородной системе (5) с параметрами $a=1$ и $c=1$. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq 1, \quad (15)$$

где b и d — параметры. Вначале выясним, при каких условиях, накладываемых на правую часть и параметры b и d , данная система имеет единственное решение, и найдем его. Подставив в систему $t=0$, получим условие $\psi(t)=0$. Дифференцируя второе уравнение системы (15), находим

$$u(t) = \psi'(t) - d \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (15), получаем

$$\int_0^t (b-d) v(\tau) d\tau = \varphi(t) - \psi'(t).$$

При выполнении условий $\varphi(0) - \psi'(0) = 0$ и $b \neq d$ последнее уравнение имеет единственное решение

$$v(t) = \frac{\varphi'(t) - \psi'(t)}{b-d}.$$

Применим для этой системы теорему 2. Вычисляем индекс системы (15). Матрица $\lambda A_0 + A_1 = \lambda A + K(0)$ не обладает ДС, так как $\text{rank } A_0 = 1$, а $\text{deg det } (\lambda A + K(0)) = \text{deg } (1) = 0$. Матрица

$$\lambda^2 A_0 + \lambda A_1 + A_2 = \lambda^2 A + \lambda K(0) + K'(s)|_{s=0}$$

обладает ДС при $b \neq d$, так как

$$\deg \det (\lambda^2 A + K(0) + K'(s)|_{s=0}) = \deg ((d-b)\lambda^2) = 2.$$

Следовательно, данная система имеет индекс 2, т.е. в цепочке (11) при $i=2$ получим систему ИУВ2.

Запишем уравнения (11) при $i=1, i=2$ и условия на правую часть. Согласно условию 2 теоремы 2 $\psi(0)=0$, а в системе

$$A^{(1)}x(t) + \int_0^t K_1(t-\tau)x(\tau) d\tau = f_1(t), \quad (16)$$

матрицы $A^{(1)}, K_1(t-\tau)$ и $f_1^{(t)}$ определены в виде (см. формулы (12)—(14))

$$A^{(1)} = A + VK(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1(t-\tau) = K(t-\tau) + VK'_t(t-\tau) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d(t-\tau+1) \end{pmatrix},$$

$$f_1^{(t)} = f(t) + Vf' = (\varphi(t), \psi(t) + \psi'(t))^T, \quad V = E - AA^+.$$

Здесь и далее для простоты вычислений положим, что $A^- = A^+$ — псевдообратная матрица [14—16].

Для системы интегральных уравнений (16) согласно условию 2 теоремы 2 ($\text{rank } A^{(1)} = \text{rank } (A^{(1)}|f_1(0))$) находим $\psi(0) + \psi'(0) - \varphi(0) = 0$, а с учетом $\psi(0) = 0$ получаем $\varphi(0) - \psi'(0) = 0$.

В системе

$$A^{(2)}x(t) + \int_0^t K_2(t-\tau)x(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (17)$$

учитывая, что

$$V_1 = E - A^{(1)}A^{(1)+} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix},$$

матрицы $A^{(2)}, K_2(t-\tau)$ и f_2 определены в виде

$$A^{(2)} = A^{(1)} + V_1K_1(0) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5(b-d) \\ 1,5 & -0,5(b-d) \end{pmatrix},$$

$$K_2(t-\tau) = K_1(t-\tau) + V_1 K'_i(t-\tau) = \begin{pmatrix} 0 & b-0,5d \\ 1 & d(t-\tau+1,5) \end{pmatrix},$$

$$f_2(t) = f_1(t) + V_1 f'(t) = (\varphi(t) + 0,5(\varphi'(t) - \psi'(t)) -$$

$$-\psi''(t), \psi(t) + 1,5\psi'(t) + 0,5(\psi''(t) - \varphi'(t))^T,$$

$$V_1 = E - A^{(1)} A^{(1)+}.$$

Поскольку по условию задачи $b \neq d$ и $\det A^{(2)} = d - b$, система (17) является системой ИУВ2. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в данном примере решения уравнений системы (11) при $i=1,2$ совпадают с решением исходного уравнения.

Выводы

Свойства систем интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью существенно отличаются от свойств, характеризующих качество традиционных видов интегральных уравнений Вольтерры I и II рода. Данный вывод следует из приведенных определений характеристик элементов рассматриваемых систем уравнений и доказанных теорем о существовании и единственности их решений.

The article deals with a system of Volterra integral equations with a singular matrix before the principal part. The fundamental differences of such systems from integral equations of the first and the second kinds have been established. The conditions of existence of unique continuous solution have been defined.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерры I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1999. — 192 с.
2. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — Киев: Наук. Думка, 1986. — 543 с.
3. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. *Brunner H.* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Funktional Differential Equations. — Cambridge University Press, 2004. — 597 с.
6. *Brunner H., van der Houwen P.J.* The Numerical Solution of Volterra Equations. CWI Monographs 3. — North-Holland, Amsterdam, 1986. — 588 с.
7. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. — Studies in Applied Mathematics. — Philadelphia, 1985. — 227 с.
8. *Brunner H.* 1896—1996: One Hundred Years of Volterra Integral Equations of the First Kind // Applied Numerical Mathematics. — 1997. — Vol. 24. — P. 83—93.

9. Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. — Новосибирск : Наука, 1987. — С. 231—239.
10. Булатов М.В., Будникова О.С. Исследование многошаговых методов для решения интегро-алгебраических уравнений: построение областей устойчивости // Журн. вычислительной математики и математической физики. — 2013. — **53**, № 9. — С. 1448—1459.
11. Булатов М.В. Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений// Там же. — 2002. — **42**, № 3. — С. 58—63.
12. Чистяков В.Ф. О некоторых свойствах интегральных уравнений Вольтерры 4-го рода с ядром типа свертки // Математические заметки. — 2006. — **80** (1). — С. 115—118.
13. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi Spectral Solution for Integral Algebraic Equations of Index-2 // Applied Numerical Mathematics. — 2011. — Vol. 161 (1). — P. 131—148.
14. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск : Наука, 1980. — 222 с.
15. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М. : Наука, 1966. — 576 с.
16. Ваарман О. Обобщенные обратные отображения. —Таллинн : Валгус, 1988. — 120 с.
17. Тен Мен Ян. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерры I рода: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук . — Иркутск, 1985. — 160 с.
18. Bulatov M.V., Chistyakov V.F. The properties of differential-algebraic systems and their integral analogs// Preprint. — Memorial University of Newfoundland, 1997. — P. 35.
19. Апарцин А.С. Дискретизационные методы регуляризации некоторых интегральных уравнений первого рода // Сб. тр. «Методы численного анализа и оптимизации». — Новосибирск : Наука, 1987. — С. 263—297.

Поступила 14.02.14

БУЛАТОВ Михаил Валерьянович, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр. Ин-та динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск). В 1982 г. окончил Иркутский госуниверситет. Область научных исследований — качественная теория дифференциально-алгебраических и интегро-алгебраических уравнений, численное решение обыкновенных дифференциальных, дифференциально-алгебраических, интегро-алгебраических уравнений и интегральных уравнений Вольтерры.

УДК 518: 517.948

Ю.Л. Меньшиков, канд. техн. наук
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
(Украина, 49050, Днепропетровск, пр-т Гагарина, 72,
тел. (056) 7609461, e-mail: Menshikov2003@list.ru)

Метод обеспечения адекватности динамических моделей

Исследована задача синтеза адекватного математического описания физических процессов. Показано, что в общем случае эта задача сводится к решению нескольких интегральных уравнений Вольтерры первого рода (некорректная задача). Предложено несколько возможных постановок таких задач. Для получения устойчивых результатов синтеза использована модификация метода регуляризации.

Досліджено задачу синтезу адекватного математичного опису фізичних процесів. Показано, що в загальному випадку ця задача зводиться до розв'язку декількох інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду (некоректна задача). Запропоновано декілька можливих постановок таких задач. Для отримання стійких результатів синтезу використано модифікацію методу регуляризації.

Ключевые слова: математическое моделирование, адекватность, интегральные уравнения.

Постановка задачи. Одной из основных задач математического моделирования динамических систем или процессов является совпадение с заданной точностью результатов моделирования с экспериментальными данными (измерениями). Под математическим описанием физического процесса понимается аналитическая связь (дифференциальная, алгебраическая, интегральная и др.) между выбранными переменными состояния исследуемой системы и внешними воздействиями (нагрузками). Поэтому задача обеспечения адекватного математического описания физических процессов является одним из основных этапов метода математического моделирования [1, 2]. При этом предполагается, что переменные состояния математической модели соответствуют выбранным характеристикам реального физического процесса. Естественно, структура математической модели, число переменных состояния, значения коэффициентов могут быть различными и определяться целями изучения конкретной физической задачи [3, 4].

© Ю.Л. Меньшиков, 2014

Задача синтеза адекватного математического описания в настоящее время остается малоизученной и плохо формализуется [1, 5]. При решении практических задач исследователи, как правило, пользуются математическими описаниями, полученными другими авторами, а самостоятельную задачу получения таких описаний не решают [3, 4]. Однако при проверке выполнения условия адекватности возникают принципиальные трудности. Например, как проверить адекватность построенного математического описания в дальнейших исследованиях? В новых экспериментах могут измениться параметры процесса и внешнего воздействия на него. Где гарантии, что в новых условиях будет выполняться условие адекватности? Естественно предположить, что необходимое совпадение с результатами экспериментов уже не будет выполняться. Следовательно, необходимо строить новое описание процесса в новых условиях. Далее процесс проверки адекватности повторяется.

Проблемой также является оценка степени совпадения результатов математического моделирования с экспериментальными данными. Во многих случаях необходимо сравнивать взаимное отклонение двух вектор-функций в некотором функциональном пространстве с выбранной метрикой. Однако способов задания метрик существует бесконечное множество. Кроме того, есть неопределенность в выборе диапазона изменения переменных, на котором сравниваются две вектор-функции. Очевидно, что один и тот же физический процесс может иметь бесконечное множество адекватных математических описаний. Эти неопределенности усложняют формализацию задачи.

Перечисленные трудности могут быть частично преодолены, если в определении адекватности изменить некоторые условия.

Определение. Математическое описание будем полагать адекватным исследуемому процессу, если результаты математического моделирования (simulation) совпадают с заданной точностью с экспериментальными данными (измерениями), а параметры адекватного математического описания устойчивы к малым изменениям исходных данных [6].

При такой формулировке близость результатов математического моделирования и будущих результатов эксперимента при малых изменениях исходных данных (эксперимента и параметров математической модели процесса) гарантирована.

Сформулируем общие требования, которым должно удовлетворять адекватное математическое описание физического процесса:

1. Адекватное математическое описание существует.
2. Характеристика адекватности математического описания формируется конечными целями исследований физического процесса и его параметры должны определяться единственным способом.

3. Параметры адекватного математического описания устойчивы к малым изменениям экспериментальных данных и математической модели процесса.

В настоящее время существует два основных подхода к проблеме построения адекватного математического описания [2—10]:

1) по математической модели с выбранной априори структурой и неточными (неизвестными) параметрами определяется модель внешнего воздействия, которая в совокупности с математической моделью процесса обеспечивает условие адекватности;

2) по некоторой заданной априори модели внешнего воздействия подбирается математическая модель процесса, которая в совокупности с моделью внешнего воздействия обеспечивает совпадение с экспериментальными данными.

Рассмотрим алгоритм получения адекватного математического описания в рамках первого подхода на примере динамической системы с сосредоточенными параметрами, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bz \quad (1)$$

с уравнением наблюдения

$$y = Cx. \quad (2)$$

При этом $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_1}(t))^T$ — вектор-функция переменных состояния ($(\cdot)^T$ — знак транспонирования); $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_{m_1}(t))^T$ — вектор-функция внешних воздействий; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n_1}(t))^T$ — вектор-функция наблюдаемых в эксперименте переменных [2, 6]. Под внешними воздействиями (нагрузками) будем понимать функции $z_1(t), z_2(t), \dots, z_{m_1}(t)$, которые изменяются независимо от субъективных факторов или свойств и поведения исходной математической модели (1). Положим $x \in X$, $z \in Z$, $y \in Y$; A, B, C — матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности. Для простоты рассуждений будем полагать, что матрица C — единичная ($X = Y$).

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений, соответствующую системе (1):

$$\dot{x} = Ax. \quad (3)$$

Введем фундаментальную матрицу $F[t, t_0]$ однородной системы (3) [11]. В дальнейшем будем полагать, что $t_0 = 0$. Изменение координаты $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x^0$, определяется формулой Коши [11]:

$$x(t) = F[t]x^0 + \int_0^t F[t-\tau] Bz(\tau) d\tau = P(A, B, x^0, z),$$

где $P(x^0, z) = (p_1(A, B, x^0, z), \dots, p_n(A, B, x^0, z))^T$ — вектор-функция, каждая компонента которой зависит от матриц A, B и от вектор-функций x^0, z .

Предположим, что наблюдаемая в эксперименте вектор-функция $y(t) = (y_1(t), \dots, y_{n_1}(t))^T = (x_1(t), \dots, x_{n_1}(t))^T$ отличается от точной вектор-функции $x^{\text{ex}}(t) = (x_1^{\text{ex}}(t), \dots, x_{n_1}^{\text{ex}}(t))^T$ на известную величину погрешности экспериментальных измерений δ :

$$\|y(t) - x^{\text{ex}}(t)\|_X \leq \delta.$$

Будем считать, что результаты математического моделирования с использованием математического описания A, B и вектор-функции z адекватны экспериментальным измерениям, если выполняется неравенство

$$\rho_X(P(A, B, x^0, z), y) \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где $\rho_X(P, y)$ — расстояние между вектор-функциями P и y в некотором метрическом пространстве X ; ε — требуемая точность совпадения результатов эксперимента с результатами математического моделирования. Следует заметить, что в рассматриваемом случае (при фиксированных матрицах A, B) устойчивость адекватной модели определяется устойчивостью вектор-функции z к малым изменениям экспериментальных данных.

Одним из возможных вариантов неравенства (4) может быть следующее:

$$\|P(A, B, x^0, z) - y\|_X \leq \varepsilon, \quad (5)$$

где $\|\cdot\|_X$ — норма в функциональном пространстве X . Величина ε задается априори и характеризует желаемое качество математического моделирования (степень адекватности его результатов). Очевидно, что при выполнении неравенства (5) матрицы A, B и вектор-функция z оказываются связанными. Нетрудно показать, что при фиксированных матрицах A, B существует бесконечное число различных вектор-функций z , удовлетворяющих неравенству (5). И, наоборот, при фиксированной вектор-функции z существует бесконечное число различных матриц A, B , для которых выполняется неравенство (5) [2].

При математическом моделировании проверка неравенства (5), как правило, не осуществляется, но его выполнение подразумевается. Поскольку одним из обязательных слагаемых, составляющих величину ε , является погрешность измерительной аппаратуры δ , можно считать, что выполняется неравенство $\delta \leq \varepsilon$.

Таким образом, для открытых динамических систем критерию адекватности результатов математического моделирования могут удовлетво-

рять совершенно различные системы (различные матрицы A, B) с различными вектор-функциями $z(t)$. Если динамическая система замкнутая, то вектор-функция $P(A, B, x^0, z)$ будет зависеть только от матрицы A и вектора x^0 : $P(A, B, x^0, z) = P(A, x^0)$. Неравенство (5) в этом случае также будет определять бесконечное множество различных матриц A . Следовательно, в этом случае критерия выбора одной «хорошей» математической модели не существует.

Возможный алгоритм синтеза математического описания (модели внешнего воздействия). Пусть поведение некоторого физического процесса описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1) с уравнением наблюдения (2). Математическое описание (1) с переменными состояниями $x(t)$ можно представить в виде совокупности взаимодействующих отдельных элементарных звеньев с выходными или внутренними переменными $x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_1}(t)$. Взаимодействие отдельных звеньев определяется переменными состояниями (внутренних взаимодействий). Если экспериментальным путем измерить, например, переменную состояния $x_k(t)$, то исходную систему можно представить в виде одной или двух более простых подсистем, приложив дополнительные внешние воздействия $d_k x_k(t)$ и $-d_k x_k(t)$ к соответствующим частям (d_k — const). Назовем такое преобразование k -м сечением исходной системы [6].

Предположим, что с помощью ряда «сечений» указанного типа выделена подсистема исходной системы, у которой известны все внешние воздействия (часть из них получена с помощью переменных состояний) кроме одного, искомого, — $z_k(t)$, а также известна одна из переменных состояний этой подсистемы, например $x_j(t)$.

Для данного случая с помощью ряда сечений может быть выделена подсистема исходной системы, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A_1 x + B_1 z, \quad (6)$$

с уравнением наблюдения

$$y = C_1 x + D_1 z, \quad (7)$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^*$; $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t))^*$; $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))^*$; A_1, B_1, C_1, D_1 — матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности; D_1 — диагональная матрица с первым нулевым диагональным элементом; матрица C_1 имеет только один ненулевой элемент в первой строке, например первый элемент c_1 . Следовательно, будем полагать, что полученная подсистема имеет одну известную переменную состояния $x_1(t)$ и все известные внешние воздействия, за исключением первого $z_1(t)$.

Движение подсистемы (6) $x_1(t) = x_1(t, t_0, x_1^0)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x_1(0) = x_1^0$, определяется формулой Коши [11]. Из уравнения наблюдения (7) находим

$$\begin{aligned} x_1(t) = y_1(t) &= Q[t]x^0 + \int_0^t Q[t-\tau] Bz(\tau) d\tau, \\ x_2(t) = y_2(t) &= d_2 z_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ x_m(t) = y_m(t) &= d_m z_m(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $Q[t, t_0]$ — фундаментальная матрица однородной системы (6). В результате несложных преобразований из системы (8) можно получить уравнение для искомой функции $z_1(t)$:

$$\int_0^t K_1(t-\tau) z_1(\tau) d\tau = P_1(t), \quad (9)$$

где $P_1(t)$, $K_1(t-\tau)$ — известные функции. Представим (9) в виде

$$A_p z = u_{\delta, p} = B_p x_{\delta}, \quad (10)$$

где A_p — линейный оператор, $A_p: Z \rightarrow U$; $z \in Z$; $u_{\delta, p} \in U$; $x_{\delta} \in X$; $B_p: X \rightarrow U$ — линейный оператор; x_{δ} — исходные экспериментальные данные, $x_{\delta} = (x(t), z_1(t), z_2(t), \dots, z_r(t))^T$; $z = z_1$ — искомая функция; Z, U, X — функциональные пространства.

Будем полагать, что операторы A_p и B_p непрерывно зависят от некоторого вектора параметров p математической модели движения динамической системы: $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)^T \in R^n$. В общем случае операторы A_p , B_p могут зависеть от разных векторов или от разных векторов с несколькими совпадающими компонентами. Однако процесс построения уравнения (9) для системы уравнений (6) свидетельствует о том, что в этом случае операторы A_p и B_p зависят от одного вектора p , так как они определяются функциями $q_1^i(t)$, которые построены с использованием всех компонент вектора—параметров p математической модели (6). В большинстве практических задач оператор A_p является вполне непрерывным [7].

В дальнейшем будем полагать, что элемент x_{δ} задан в виде экспериментально полученной зависимости с известной погрешностью: $\|x_T - x_{\delta}\|_X \leq \delta$, где x_T — точная вектор-функция исходных данных; δ — const, $\delta > 0$.

Обозначим через $Q_{\delta,p}$ множество возможных решений обратной задачи идентификации модели внешнего воздействия (10) при фиксированных операторах A_p, B_p :

$$Q_{\delta,p} = \{z : \|A_p z - B_p x_\delta\|_U \leq \delta \|B_p\| = \delta_0\}.$$

Поскольку оператор A_p — вполне непрерывен, множество $Q_{\delta,p}$ для любых p и δ является неограниченным в Z (некорректная задача) [12]. Однако любая функция z из множества $Q_{\delta,p}$ является «хорошей» моделью внешнего воздействия, так как функция $A_p z$ совпадает с $B_p x_\delta$ с точностью измерения. Таким образом, операторы A_p, B_p и любая функция из множества $Q_{\delta,p}$ составляет тройку, которая обеспечит адекватность результатов математического моделирования с точностью $\delta_0 = \varepsilon$.

Процесс нахождения $z \in Q_{\delta,p}$ будем называть задачей синтеза модели внешнего воздействия методом идентификации [2, 6, 13]. Для выбора наилучшей модели внешнего воздействия $z_{\delta,p}$ из бесконечного множества $Q_{\delta,p}$ различных хороших моделей предлагается несколько устойчивых алгоритмов [2, 13]. Например, математическая модель, адекватно описывающая физический процесс, может быть получена как решение следующей экстремальной задачи:

$$\Omega [z_{\delta,p}] = \inf_{z \in Q_{\delta,p}} \Omega [z], \quad (11)$$

где $\Omega [z]$ — стабилизирующий функционал [12]. При этом нет оснований полагать, что функция $z_{\delta,p}$ близка к реальному внешнему воздействию z_T . Это лишь устойчивая компонента модели внешнего воздействия, обеспечивающая адекватность результатов математического моделирования [2, 13]. Аналогично изложенному выше можно получить модель внешнего воздействия, которая совместно с операторами A, B в системе (1) будет обеспечивать адекватные результаты математического моделирования.

Следует заметить, что в данных задачах не имеет смысла рассматривать поведение приближенного решения $z_{\delta,p}$ при $\delta \rightarrow 0$ и оценивать погрешность полученного решения. Эта погрешность может иметь произвольную величину, не имеющую никакого значения для построения адекватного математического описания. Таким образом, не требуется, чтобы оператор, обеспечивающий приближенное решение обратной задачи (10), был регуляризирующим [12]. Более важно, чтобы это описание было устойчивым к малым изменениям исходных данных.

Случай неточного задания параметров математической модели физического процесса. В практике математического моделирования нередки случаи, когда параметры математической модели процесса не определены точно. Обозначим через p вектор параметров математической мо-

дели процесса. В силу неточности параметров вектор p может принимать значения в некоторой замкнутой области $D \subset R^n$, т.е. $p \in D$. Каждому вектору параметров $p \in D$ соответствуют определенные операторы A_p, B_p в уравнении (10), которые образуют два класса операторов, $K_A = \{A_p\}$, $K_B = \{B_p\}$, при изменении p внутри D . Будем полагать, что все операторы A_p — линейные и непрерывные, а операторы B_p — линейные и необратимые. Обозначим через h_1 и d_1 величины максимального отклонения операторов A_p из класса K_A и операторов B_p из класса K_B :

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \|A_{p_\alpha} - A_{p_\beta}\| \leq h_1, \quad \sup_{p_\gamma, p_\lambda \in D} \|B_{p_\gamma} - B_{p_\lambda}\| \leq d_1.$$

В этом случае множество решений уравнения (10) следует расширить до множества

$$Q_{h_1, d_1, \delta} = \{z : \|A_p z - B_p x_\delta\| \leq h_1 \|z\|_Z + B_0\}, \quad (12)$$

где $B_0 = d_1 \|x_\delta\|_X + \|B_p\| \delta$.

Любая функция из множества (12) вызывает отклик математической модели, совпадающий с откликом реального объекта с погрешностью, которая учитывает погрешность экспериментальных измерений и погрешность возможного отклонения параметров вектора $p \in D$. Задача нахождения $z \in Q_{h_1, d_1, \delta}$ названа по аналогии с предыдущей задачей синтеза модели внешнего воздействия методом идентификации для класса моделей [5, 13].

Заметим, что в множестве решений обратной задачи синтеза при фиксированном операторе A_p из K_A содержатся элементы с неограниченной нормой (некорректная задача). Поэтому величина $h_1 \|z\|_Z$ может быть бесконечно большой. Формально такая ситуация неприемлема, так как она означает, что погрешность математического моделирования равна бесконечности, если в качестве моделей использовать произвольную функцию из (12). Следовательно, не все функции из (12) будут хорошими моделями внешнего воздействия. Таким образом, учитывая погрешность оператора A_p в неравенстве (5), необходимо величину ε в общем случае полагать равной бесконечности, т.е. неравенство (5) в случае $\delta < \varepsilon$ нельзя обосновать погрешностью оператора.

В данном случае предлагается отказаться от формального расширения множества возможных решений до $Q_{h_1, d_1, \delta}$. Выбор модели внешнего воздействия для получения адекватного математического описания должен определяться конечными целями при построении адекватного математического описания [13]. Например, указанную модель можно выбирать как решение следующей экстремальной задачи:

$$\Omega[z_0] = \inf_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta, p}} \Omega[z], \quad p \in R^n. \quad (13)$$

Функция z_0 определяет устойчивое адекватное математическое описание, которое дополнительно обеспечивает минимальную величину функционала $\Omega[z]$ для всех операторов A_p и B_p из классов K_A и K_B . Это дополнительное свойство позволяет определять оптимальные свойства математических описаний. Аналогичными дополнительными свойствами обладает адекватное математическое описание, которое дополнительно обеспечивает максимальную величину функционала $\Omega[z]$ для всех операторов A_p и B_p из классов K_A и K_B :

$$\Omega[z^1] = \sup_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta,p}} \Omega[z], \quad p \in R^n. \quad (14)$$

Модель внешнего воздействия z_b , обеспечивающая адекватность математического описания и оценку снизу отклика динамической системы (1), может быть получена как решение следующей экстремальной задачи [13, 14]:

$$\|A_{p_b} z_b\| = \inf_{p \in D} \|A_p z_{\delta,p}\|, \quad (15)$$

где $z_{\delta,p}$ — решение экстремальной задачи (6). Аналогично могут быть определены и другие модели с дополнительными свойствами [2, 13]:

$$\|A_{p_c} z_c\| = \sup_{p \in D} \|A_p z_{\delta,p}\|, \quad (16)$$

$$\|A_{p_{un}} z_{un} - B_{p_{un}} x_{\delta}\| = \inf_{p \in D} \sup_{p \in D} \|A_p z_{\delta,a} - B_p x_{\delta}\|_U, \quad (17)$$

где $z_{\delta,a}$ — решение экстремальной задачи (11) при $p = a$, $a \in D$.

Для решения задач типа (13)–(17) в работах [13, 14] предложен метод специальных операторов. Примеры расчетов конкретных адекватных математических описаний представлены в работах [2, 13, 14].

Выводы

С помощью предложенного метода разработан алгоритм синтеза адекватной модели, включающий преобразование описаний моделируемого объекта, получение упрощенных составных частей модели с учетом модели внешнего воздействия.

The problem of synthesis of adequate mathematical description of physical processes has been studied. It is shown that in the general case, this problem is reduced to solution of some first kind Volterra integral equations (ill-posed problem). Several possible statements of such problems were proposed. Modifications of the regularization method were used for obtaining stable results of synthesis.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shanon R.* Systems Simulation — the Art and Science. — Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs. — New Jersey, 1975. — 329 p.
2. *Меньшиков Ю.Л.* Об адекватности результатов математического моделирования // Тр. Междунар. конф. «Моделирование-2008». — Киев : ИПМЭ им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2008. — С. 119—124.
3. *Soeiro N. et al.* Vibratory Working Modelling through Methods of Continuum Mechanics // Proc. Eleventh International Congress on Sound and Vibration. — St. Petersburg (Russia), 2004. — P. 2821—2828.
4. *Sarmar I., Malik A.* Modeling, Analysis and Simulation of a Pan Tilt Platform Based on Linear and Nonlinear Systems // Proc. IEEE/ASME MESA. — China, 2008. — P. 147—152.
5. *Menshikov Yu.L.* Synthesis of Adequate Mathematical Description as Solution of Special Inverse Problems // European Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 2. — N 3. — P. 256—271.
6. *Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.* Алгоритм синтеза устойчивого математического описания эволюционного процесса // Тези XI Міжнар. науково-практичної конф. «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем», MPZIS-2013, 20—22 листопада 2013. — Дніпропетровськ, 2013. — С. 114—115.
7. *Степанко В.С.* Метод критической дисперсии как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования // Проблемы управления и информатики. — 2008. — № 2. — С. 27—32.
8. *Губарев В.Ф.* Метод итеративной идентификации многомерных систем с неточными данными. Ч. 1. Теоретические основы // Там же. — 2008. — № 2. — С. 8—26.
9. *Жуков О.А.* Алгоритмы итеративной идентификации многомерных систем // Тр. 15 междунар. конф. по автоматическому управлению «Автоматика-2008». — Одесса : INIA, 2008, — С. 774—777.
10. *Гельфандбейн Ю.М., Колосов Л.С.* Ретроспективная идентификация возмущений и помех. — М. : Наука, 1972. — 246 с.
11. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. — Киев : Вища школа, 1975. — 328 с.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979. — 342 с.
13. *Меньшиков Ю.Л., Поляков Н.В.* Идентификация моделей внешних воздействий. — Днепропетровск : «Наука та Освіта», 2009. — 188 с.
14. *Menshikov Yu.L.* Identification of External Loads as Method of Adequate Mathematical Description Synthesis // Proc. of 32nd IASTED International Conference on Modelling, Identification and Control (MIC 2013). February 11 — 13, 2013. — Innsbruck (Austria), 2013. — 8 p.

Поступила 28.01.14

МЕНЬШИКОВ Юрий Леонидович, канд. техн. наук, доцент, доцент Днепропетровского национального университета им. Олеся Гончара. В 1970 г. окончил Днепропетровский госуниверситет. Область научных исследований — вопросы построения адекватных математических описаний физических процессов, теория некорректных задач, приложения в механике и физике.

УДК 519.6

Д.А. Верлань, аспирант
Киевский национальный университет им. Т. Шевченко
(Украина, 03127, Киев, просп. Академика Глушкова, 4д,
тел. (+38) 0632779797, e-mail: dmitriverlan@gmail.com)

Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей

Рассмотрены возможности численной реализации интегральных динамических моделей, которые являются непараметрическими и представлены интегральными уравнениями Вольтерры II и I рода, а также интегро-дифференциальными уравнениями. Разработаны рекуррентные численные алгоритмы решения указанных уравнений. Для построения алгоритмов использован метод вырожденных (разделяющихся) ядер. Предложен оптимизационный метод аппроксимации ядер интегральных операторов Вольтерры.

Розглянуто можливості чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей, які є непараметричними і представлені інтегральними рівняннями Вольтерри II і I роду, а також інтегро-диференціальними рівняннями. Розроблено чисельні алгоритми розв'язування зазначених рівнянь. Для побудови алгоритмів використано метод вироджених (що розділяються) ядер. Запропоновано оптимізаційний метод апроксимації ядер інтегральних операторів Вольтерри.

Ключевые слова: интегральные уравнения, алгоритмы, аппроксимация, резольвента, интегро-дифференциальные уравнения.

Одним из актуальных направлений развития численных и компьютерных методов математического моделирования динамических систем является применение непараметрических динамических моделей в виде интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Ядра интегральных операторов, составляющих основу указанных моделей, представляют собой функции двух переменных и отображают динамические характеристики исследуемых объектов. Важными для численной реализации интегральных операторов являются сглаживающие свойства и устойчивость операций интегрирования.

Интегральные уравнения Вольтерры II рода, имеющие вид

$$y(t) + \int_a^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau = f(t), \quad (1)$$

© Д.А. Верлань, 2014

где ядро $K(t, \tau)$ и функция $f(t)$ заданы, а функция $y(\tau)$ — искомая, получают все большее распространение в качестве моделей динамических объектов различной физической природы и назначения [1]. Особенно важна роль этих уравнений при исследовании систем управления объектами с сосредоточенными и распределенными параметрами. При этом особое значение имеют задачи формирования и реализации моделей, предназначенных для синтеза управляющих систем в случаях, когда управляющая часть системы (регулятор) построена в виде приложений, организованных по заданной динамической модели. В этом случае к алгоритмам и программам реализации динамических моделей предъявляются высокие требования относительно производительности, т.е. программы должны обеспечивать функционирование системы в реальном времени. Это свидетельствует о наличии соответствующих требований к разработке численных алгоритмов для решения соответствующих уравнений.

Известно [2], что наиболее распространенные квадратурные методы решения интегрального уравнения (1), имеющие ряд преимуществ (простота алгоритма, высокая устойчивость расчетного процесса), для ядер произвольного вида обладают таким свойством, что при каждом новом шаге расчетов число операций возрастает.

Эффективным подходом к преодолению данной трудности может быть применение метода вырожденных ядер [3], позволяющего строить алгоритмы решения, в которых число операций на каждом шаге дискретизации не зависит от номера шага. Действительно, интегральное уравнение (1) с вырожденным ядром

$$K(t, \tau) \cong \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \beta_i(\tau), \quad (2)$$

где $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(\tau)$ — заданные функции, принимает вид

$$y(t) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \int_a^{t_j} \beta_i(\tau) y(\tau) = f(t). \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3) в дискретную форму:

$$y(t_j) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(t_j) \int_a^t \beta_i(\tau) y(\tau) = f(t_j), \quad j = \overline{1, n}.$$

Это позволяет применить для решения интегрального уравнения одну из квадратурных формул [4] и получить рекуррентное выражение

$$y_l = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \beta_i(x_l)} \left(f_l + \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j y_j \right), \quad l = \overline{2, n}, \quad y_1 = f_1,$$

из которого видно, что количество вычислений на каждом шаге остается неизменным, так как для вычисления каждой из N сумм $\sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j y_j$

можно воспользоваться результатом вычислений на предыдущем шаге:

$$\sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j y_j = \sum_{j=1}^{l-2} \beta_i(x_j) A_j y_j + \beta_i(x_{j-1}) A_{j-1} y_{j-1}, \quad l = \overline{3, n}.$$

Именно поэтому целесообразно использовать при решении особенность разделения ядер.

Применение общей квадратурной формулы с постоянным шагом $h = h_i = \text{const}$ позволяет получить расчетное выражение в виде

$$y_l = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \beta_i(x_l)} \left(f_l + h \sum_{i=1}^N \alpha_i(x_l) \sum_{j=1}^{l-1} \beta_i(x_j) A_j \tilde{y}_j \right), \quad l = \overline{2, n},$$

$$\tilde{y}_1(a) = f_1(a),$$

где $l = \overline{2, 3, \dots, n}$; $x_l = a + h(i-1)$;

$$A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, \\ 1 & \text{при } j>1. \end{cases}$$

Аппроксимация ядра. В общем случае для решения уравнения (1), когда ядро имеет произвольный вид, применение метода вырожденных ядер требует предварительной аппроксимации ядра вырожденным ядром и дополнительных вычислений для реализации метода аппроксимации. Это обстоятельство не является препятствием для применения метода вырожденных ядер как в исследовательских задачах, не связанных с требованием к быстродействию алгоритмов, так и при синтезе систем управления, поскольку эти задачи решаются на этапе проектирования системы.

Представление функций двух переменных в удобном для вычисления виде — актуальная задача при решении многих исследовательских и проектных проблем в математической физике, электронике, биофизике, системах измерения, управления и во многих других научных и прикладных областях. В вычислительной математике распространен подход к аппроксимации функций двух переменных, который состоит в предварительном выборе одной или двух систем координатных функций и последующем отыскании коэффициентов разложения исходной функции из условий выбранного критерия оптимальности.

Рассмотрим численные алгоритмы аппроксимации функций двух переменных. При этом функции одной переменной, сумма парных произведений которых аппроксимирует исходную функцию, формируются оптимально по критерию минимума квадратичной невязки. Задача аппроксимации сводится к решению задачи минимизации функционала

$$\Phi = \int_a^b \int_a^b \left[K(t, \tau) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \beta_i(\tau) \right]^2 dt d\tau. \quad (4)$$

Сначала находим первое приближение заданной функции в виде одного слагаемого $\alpha_1(t) \beta_1(\tau)$, которое формируем следующим образом: задаем $\beta_1^{(0)}(\tau)$ — начальное приближение функции $\beta_1(\tau)$ и из условий минимума функционала

$$\Phi_1^{(0,0)} = \int_a^b \int_a^b [K(t, \tau) - \alpha_1^{(0)}(t) \beta_1^{(0)}(\tau)]^2 dt d\tau \quad (5)$$

получаем $\alpha_1^{(0)}(t)$, т.е. начальное приближение $\alpha_1(t)$. В соответствии с известным вариационным методом для выполнения условия (5) необходимо выполнение равенства

$$\alpha_1^{(0)}(t) = \frac{\int_a^b K(t, \tau) \beta_1^{(0)}(\tau) d\tau}{\int_a^b (\beta_1^{(0)}(\tau))^2 d\tau}.$$

Затем из условия минимума функционала

$$\Phi_1^{(0,1)} = \int_a^b \int_a^b [K(t, \tau) - \alpha_1^{(0)}(t) \beta_1^{(1)}(\tau)]^2 dt d\tau$$

находим первое приближение функции $\beta_1(\tau)$:

$$\beta_1^{(1)}(\tau) = \frac{\int_a^b K(t, \tau) \alpha_1^{(0)}(t) dt}{\int_a^b (\alpha_1^{(0)}(t))^2 dt}$$

и так далее. Процесс прекращается, как только выполняются условия

$$\int_a^b (\beta_1^{(n+1)}(\tau) - \beta_1^{(n)}(\tau))^2 d\tau \leq \varepsilon, \quad \int_a^b (\alpha_1^{(n+1)}(t) - \alpha_1^{(n)}(t))^2 dt \leq \varepsilon,$$

где ε — показатель заданной точности вычисления функций $\beta_1(\tau)$ и $\alpha_1(t)$.

После достижения заданной точности $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(\tau)$, аналогично выполняем приближение функции $K(t, \tau) - \alpha_1(t)\beta_1(\tau)$ произведением $\alpha_2(t)\beta_2(\tau)$, исходя из того же критерия оптимальности (4), пока не будет выполнено условие

$$\int_a^b \int_a^b \left[K(t, \tau) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)\beta_i(\tau) \right]^2 dt d\tau < \varepsilon_a,$$

где ε_a — заданная точность аппроксимации. Таким образом, получаем ряд $\sum_{j=1}^N \alpha_j(t)\beta_j(\tau)$, который с заданной точностью аппроксимирует исходную функцию $K(t, \tau)$.

Рассмотренный алгоритм аппроксимации, как и его модификации [5, 6], обладает свойством максимально возможной минимизации числа N членов аппроксимирующего ряда, что выгодно отличает его от традиционных аналогов, основанных на использовании каких-либо наборов координатных функций, получаемых, например, посредством разложения в ряд Тейлора, Фурье и др. [7]. Решение многочисленных тестовых примеров и прикладных задач подтверждает указанное свойство алгоритма.

На рис. 1 (см. вклейку) графически представлен результат применения рассматриваемого алгоритма при аппроксимации осциллирующей функции $K(x, s) = e^{\sin(-xs)}$ в области $0 \leq x, s \leq 2\pi$ с шагом $h = 0,01$ и результирующей точностью $e_{appr} = 0,1^{-5}$. Графики полученного набора аппроксимирующих функций одной переменной приведены на рис. 2. Аппроксимирована функция при $h = 0,01$.

Резольвента. Решение интегральных уравнений с помощью резольвенты [2] является одним из эффективных методов исследования многих задач физики, биологии, техники. Но сложности этого подхода существенно ограничивают возможность его применения как в аналитическом, так и в числовом виде. В случае вырожденного ядра интегрального уравнения эффективность реализации метода значительно повышается.

Решение уравнения (1) посредством резольвенты имеет вид

$$y(t) = \int_a^t R(t, \tau) f(\tau) d\tau + f(t).$$

При этом основным способом получения (вычисления) резольвенты является представление ее в виде суммы бесконечного ряда

$$R(t, \tau) = K(t, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} K_n(t, \tau) = K(t, \tau) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\tau}^t K(t, \nu) K_{n-1}(\nu, \tau) d\nu,$$

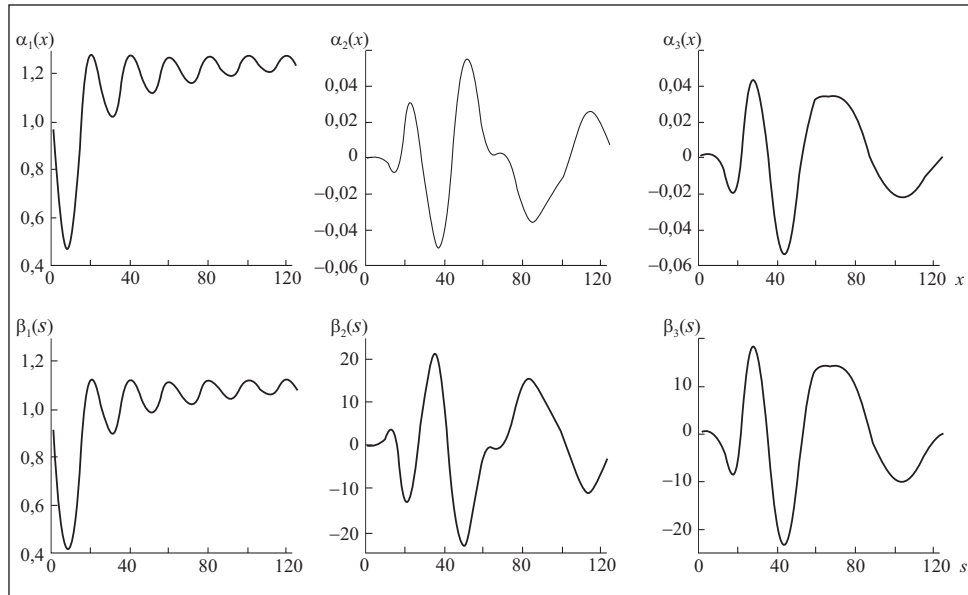


Рис. 2

где $K_{n-1}(t, \tau)$, $n = 2, 3, \dots$, — интегрированные ядра (очевидно, $K_1(t, \tau) = K(t, \tau)$). Как видим, определение резольвенты связано с многократным получением результатов интегрирования парных произведений функций двух переменных и их суммированием, т.е. является достаточно сложной вычислительной задачей. Другим способом определения резольвенты является решение интегрального уравнения

$$R(t, \tau) = K(t, \tau) + \int_{\tau}^t R(t, \nu) K(\nu, \tau) d\nu,$$

что не упрощает вычислительную задачу.

Если в уравнении (1) ядро является вырожденным, то решение посредством резольвенты принимает вид

$$y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x),$$

где

$$\varphi_n(x) = \int_a^b \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i(x) \beta_i(s) \varphi_{n-1} ds.$$

При этом интегрированные ядра определяются из выражения

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i^n(x) \beta_i^n(s) = \sum_{i=1}^{l_{n-1}} \sum_{j=1}^l \alpha_i^{n-1}(x) \beta_j(s) \int_a^b \beta_i^{n-1}(t) \alpha_j(t) dt.$$

Таким образом, все вычисления для получения резольвенты выполняются посредством операций над функцией одной переменной, что свидетельствует об эффективности метода вырожденных ядер.

Системы уравнений Вольтерры II рода. В системе

$$y_p(x) - \sum_{j=1}^m y_p(x) \int_a^x K_{pj}(x, s) y_j(s) ds = f_p(x), \quad (6)$$

где $K_{pj}(x, s)$ — ядра, $y_p(x)$ — искомые функции, $f_p(x)$ — известные правые части, каждое ядро можно представить в виде билинейного ряда

$$K_{pj}(x, s) \cong \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s),$$

где q_{pj} — число членов соответствующей суммы. Тогда (6) принимает вид

$$y_p(x) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \int_a^x \beta_{pjr}(s) y_j(s) ds = f_p(x). \quad (7)$$

Для решения системы (7) можно использовать замену интеграла формулой трапеций на отрезке $[a, b]$, который разбит на n равных частей так что, что $x_1 = a, x_2, \dots, x_n = b$. Приближенные решения $y_p(x_i), i = 1, 2, \dots, n+1$, находим из уравнения

$$y_p(x_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \sum_{l=1}^i A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l) = f_p(x_i), \quad (8)$$

где

$$A_l = \begin{cases} \frac{b-a}{2n}, & \forall l=1, l=i, \\ \frac{b-a}{n}, & \forall l \neq 1, l \neq i. \end{cases}$$

Очевидно, что $y_p(x_1) = f_p(x_1)$, а для определения каждой группы $y_p(x_i), i = 2, 3, \dots, n+1$, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (8) в виде

$$y_p(x_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \beta_{pjr}(x_i) y_j(x_i) =$$

$$= f_p(x_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \sum_{l=1}^{i-1} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l),$$

где значения искомым $y_j(x_l)$ для $l < i$ известны, поэтому

$$\sum_{j=1}^m \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x_i) \sum_{l=1}^{i-1} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l)$$

является постоянной величиной. При этом для каждой из $m \otimes q_{pj}$ сумм можно использовать выражение

$$\sum_{l=1}^{i-1} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l) = A_{i-1} \beta_{pjr}(x_{i-1}) y_j(x_{i-1}) + \sum_{l=1}^{i-2} A_l \beta_{pjr}(x_l) y_j(x_l),$$

что позволяет значительно сократить количество расчетов на каждом шаге.

Для получения ядер вида (2) необходимо построение процедуры минимизации функционала

$$\Phi_{pj} = \int_a^b \int_a^b \left(K_{pj}(x, s) - \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s) \right)^2 dx ds.$$

Слагаемые суммы $(\alpha_{pjr}(x_l) \beta_{pjr}(x_l))$ находим по формулам

$$\alpha_{pjr}^{(t)}(x) = \frac{\int_a^b K_{pjr}(x, s) \beta_{pjr}^{(t)}(s) ds}{\int_a^b (\beta_{pjr}^{(t)}(s))^2 ds}, \quad (9)$$

$$\beta_{pjr}^{(t)}(s) = \frac{\int_a^b K_{pjr}(x, s) \alpha_{pjr}^{(t)}(x) dx}{\int_a^b (\alpha_{pjr}^{(t)}(x))^2 dx}, \quad (10)$$

где t — номер шага вариации; $K_{pj1}(x, s) = K_{pj}(x, s)$; $\beta_{pjr}^{(0)}(s)$ — задаем априорно. При выполнении условий

$$\int_a^b (\beta_{pjr}^{(t)}(s) - \beta_{pjr}^{(t-1)}(s))^2 ds < \varepsilon, \quad \int_a^b (\alpha_{pjr}^{(t)}(x) - \alpha_{pjr}^{(t-1)}(x))^2 dx < \varepsilon, \quad (11)$$

где ε — показатель точности вычисления функций $\alpha_{pjr}^{(t)}(x)$ и $\beta_{pjr}^{(t)}(s)$, определяем $K_{pj(r+1)}(x, s) = K_{pjr}(x, s) - \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s)$. Используя расчетные выражения (9) и (10) до выполнения условия (11), приближаем $\alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s)$ к $K_{pj(r+1)}(x, s)$. Продолжаем этот итерационно-вариационный процесс до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\int_a^b \int_a^b \left(K_{pj}(x, s) - \sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s) \right)^2 dx ds < \varepsilon_{\text{appr}},$$

где $\varepsilon_{\text{appr}}$ — заданный показатель точности аппроксимации. В результате получаем ряд

$$\sum_{r=1}^{q_{pj}} \alpha_{pjr}(x) \beta_{pjr}(s),$$

который с заданной точностью аппроксимирует исходное ядро $K_{pj}(x, s)$.

Таким образом, рассмотренный метод решения систем интегральных уравнений Вольтерры II рода с рекуррентным вычислением сумм позволяет значительно сократить число необходимых итераций и повысить эффективность расчетов по сравнению с прямыми методами без построения вырожденных ядер.

Интегро-дифференциальные уравнения. Наличие интегральных операторов в интегро-дифференциальных уравнениях является основанием для использования при их решении метода вырожденных ядер. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$L[z(x)] = \lambda \int_a^b M[z(y)] K(x, y) dy, \quad (12)$$

где

$$L[z(x)] = \frac{d^n z(x)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dz(x)}{dx} + a_n z(x);$$

$$M[z(y)] = b_0 \frac{d^m z(y)}{dy^m} + b_1 \frac{d^{m-1} z(y)}{dy^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dz(y)}{dy} + b_m z(y);$$

$a_1 \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m$, — постоянные числа; λ — параметр; $K(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y)$ — разделяющее ядро.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \dots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x),$$

где c_r — произвольные постоянные; $F_1(x), F_2(x)$ — функции, вид которых зависит от вида функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$; $z_r(x)$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$.

Пусть $f(l) = 0$ — характеристическое уравнение для дифференциального уравнения $L[z(x)] = 0$, а $g(m) = 0$ — для уравнения $M[z(y)] = 0$. Вначале рассмотрим следующий случай:

$$\varphi_1(x) = \theta_1(x) e^{\alpha x}, \quad \varphi_2(x) = \theta_2(x) e^{\beta x},$$

где $\theta_1(x), \theta_2(x)$ — многочлены соответственно степени p и q . Если α — корень характеристического уравнения $f(l) = 0$ кратности $r \geq 1$, а β — корень характеристического уравнения $g(m) = 0$ кратности $s \geq 1$, то решение уравнения (12) следует искать в форме

$$z(x) = (c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) e^{\alpha x} + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{r+s} x^{s-1}) e^{\beta x} + \sum_{i=r+s+1}^n c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} P_1(x) + x^s e^{\beta x} P_2(x), \quad (13)$$

где $P_1(x), P_2(x)$ — многочлены степеней p и q , коэффициенты которых следует подобрать так, чтобы решение (13) удовлетворяло уравнению (12). Подставив (13) в уравнение (12) и приравняв коэффициенты при $e^{\alpha x}$ и $e^{\beta x}$ в правой и левой частях, получим два многочлена степени p и q . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях этих многочленов, приходим к системе линейных алгебраических уравнений, которая всегда разрешима относительно искомых коэффициентов.

Аналогичное решение можно получить и для ядра $K(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y)$. Пусть

$$K(x, y) = e^{\alpha x} [\theta_1(x) \cos \beta x + \theta_2(x) \sin \beta x] \psi(y),$$

где $\theta_1(x), \theta_2(x)$ — многочлены степени k . Заменяя тригонометрические функции показательными, находим

$$K(x, y) = \frac{1}{2} \{ e^{(\alpha + \beta i)x} [\theta_1(x) - i\theta_2(x)] + e^{(\alpha - \beta i)x} [\theta_1(x) + i\theta_2(x)] \} \psi(y).$$

Таким образом, этот случай сводится к предыдущему. Если $\alpha \pm \beta i$ — корень уравнения $f(l) = 0$ кратности r , то согласно (13) решение имеет вид

$$z(x) = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) \cos \beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{2r} x^{r-1}) \sin \beta x] +$$

$$+ \sum_{i=2r+1}^n c_i z_i(x) + x^r [e^{(\alpha+\beta i)x} P_1(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} P_2(x)], \quad (14)$$

где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены степеней k представляют собой сопряженные выражения $P_1(x) = Q_1(x) + iQ_2(x)$ и $P_2(x) = Q_1(x) - iQ_2(x)$. Подставляя P_1, P_2 в (14) и переходя к тригонометрическим функциям, получаем

$$z(x) = e^{\alpha x} [(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) \cos \beta x + (c_{r+1} + c_{r+2} x + \dots + c_{2r} x^{r-1}) \sin \beta x] + \sum_{i=2r+1}^n c_i z_i(x) + x^r e^{\alpha x} [R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x], \quad (15)$$

где $R_1 = 2Q_1(x)$ и $R_2 = -2Q_2(x)$ — многочлены, имеющие такую же степень, как и многочлены $\theta_1(x), \theta_2(x)$, если их степени равны, и наибольшую степень из этих многочленов, если их степени различны.

После подстановки (15) в уравнение (12) приравниваем выражения при $\cos \beta x, \sin \beta x$ в правой и левой частях равенства, в результате чего приходим к равенству двух пар многочленов степени k . Приравняв коэффициенты этих многочленов при одинаковых степенях x , получаем всегда разрешимую $2k$ систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов R_1 и R_2 .

Если правая часть интегро-дифференциального уравнения (12) имеет вид

$$L[z(y)] = \lambda \int_a^b M[z(y)] K(x, y) dy + \omega(x),$$

то его решение принимает вид

$$z(x) = c_1 z_1(x) + \dots + c_n z_n(x) + F_1(x) + F_2(x) + \Omega(x),$$

где $\Omega(x)$ — частное решение уравнения $L[z(x)] = \omega(x)$. Присутствие в решении функции $\Omega(x)$ приведет к изменению только свободных членов в системах для определения коэффициентов.

Следует заметить, что рассмотренный метод может быть применен также для решения интегро-дифференциальных уравнений с ядрами произвольного вида, если воспользоваться соответствующим методом аппроксимации ядер.

Уравнения Вольтерры I рода. Численные алгоритмы решения уравнения Вольтерры I рода

$$\int_0^t K(t-s)y(s) ds = f(t) \quad (16)$$

обычно построены на основе квадратурных методов, реализация которых связана с возрастанием числа операций на каждом последующем шаге вычислений. Рассмотрим построение высокопроизводительного численного алгоритма решения интегрального уравнения Вольтерры I рода на основе соответствующей аппроксимации ядра.

Основой уравнения Вольтерры I рода (16) при моделировании скалярных динамических стационарных объектов является оператор типа свертки

$$\psi(t) + \int_0^t K(t-s)\varphi(s) ds, \quad (17)$$

где интеграл при численном расчете заменяется конечной суммой. При этом могут быть применены различные квадратурные формулы, каждая из которых имеет существенные алгоритмические особенности [2]. Традиционные аппроксимирующие алгебраические зависимости для интегрального оператора (17) и интегрального уравнения Вольтерры I рода (16) получаем с помощью следующих приближенных выражений:

$$\psi(t_i) \cong \sum_{j=1}^i A_j K(t_i - t_j) \varphi(t_j), \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^i A_j K(t_i - t_j) y(t_j) = f(t_i), \quad (19)$$

где $j=1, 2, \dots, i$; $t_i, i=1, n$, — узлы дискретизации; A_i — коэффициенты квадратурной формулы. Если узлы следуют один за другим с постоянным шагом h , то $t_i = (i-1)h$. Отсутствие неизвестной функции под знаком интеграла в уравнении (16) приводит к ряду особенностей. Например, в системе (19) невозможно определить значение, необходимое для дальнейшего рекуррентного получения значений $y(h), y(2h), \dots$.

Для определения $y(0)$ можно воспользоваться выражением $y(0) = \frac{f'(0)}{K(0)}$.

Теперь система (19) позволяет последовательно определить значение

$$y(t_i) = \frac{1}{A_j K(0)} \left(f(t_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(t_i - t_j) y(t_j) \right).$$

При вычислении значений $f'(0) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0}$ можно воспользоваться различ-

ными интерполяционными способами, в том числе формулой квадратичной интерполяции

$$f'(0) = \frac{1}{2h} (-3f(0) + 4f(h) - f(2h)).$$

Следует заметить, что при $K(0) = 0$ в интервале интегрирования для приближенного решения интегрального уравнения (16) невозможно применить метод квадратурных формул с использованием формулы трапеций, поскольку при этом необходимо выполнять операцию деления на $K(0)$ согласно расчетным выражениям

$$\begin{aligned} \tilde{y}(0) &= \frac{f'(0)}{K(0)}, \\ \tilde{y}(t_i) &= \frac{2}{A_i K(0)} \left(\frac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-1} A_j K(t_i - t_j) \tilde{y}(t_j) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где $t_i = (i-1)h$, $i = 2, 3, \dots$;

$$A_j = \begin{cases} 1/2, & \forall j = 1, \\ 1, & \forall j > 1. \end{cases}$$

Поэтому более целесообразным в данном случае является применение формулы средних прямоугольников, которая позволяет эффективно определить значение искомой функции в узлах $t_{j+1/2}$ ($t_{j+1/2} = (j + \frac{1}{2})h$) с помощью выражений

$$\begin{aligned} \tilde{y}\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{f(h)}{hK\left(\frac{1}{2}h\right)}, \\ \tilde{y}(t_{i+1/2}) &= \frac{1}{K\left(\frac{1}{2}h\right)} \left(\frac{f(t_i)}{h} - \sum_{j=1}^{i-2} A_j K(t_i - t_{j+1/2}) \tilde{y}(t_{j+1/2}) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Из выражений (18), (20) и (21) видно, что с увеличением номера шага дискретизации возрастает число операций, выполняемых на каждом шаге вычислений, так как ядро имеет произвольный вид.

Импульсные переходные функции рассматриваемого класса динамических объектов являются непрерывными и поэтому могут быть представлены в виде степенного ряда по теореме Вейерштрасса. Это позволяет

во многих практических случаях считать ядро интегрального уравнения (16) вырожденным, т.е. имеющим вид

$$K(t-s) \cong \sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \beta_l(s), \quad l = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Свойство разделимости ядра (22) в случае, когда импульсная переходная функция $K(t)$ задана аналитически, позволяет записать выражения (16) и (17) в виде

$$\sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \int_0^t \beta_l(s) y(s) ds = f(t), \quad (23)$$

$$\psi(t) = \sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \int_0^t \beta_l(s) \varphi(s) ds. \quad (24)$$

Применяя к выражениям (23) и (24) квадратурные формулы, получаем соответственно формулу для численной реализации оператора

$$\psi(t_i) = \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \sum_{j=1}^{i-1} \beta_l(t_j) \varphi(t_j) \quad (25)$$

и рекуррентные выражения для решения уравнений

$$\tilde{y}(0) = \frac{f'(0)}{K(0)}, \quad (26)$$

$$\tilde{y}(t_i) = \frac{2}{A_i K(0)} \left(f(t_i) - \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j) \tilde{y}(t_j) \right).$$

Выражения (25) и (26), представляющие собой аналитическое описание модифицированного алгоритма, отличаются от (18) и (20) тем, что количество вычислений на каждом шаге остается неизменным, поскольку слагаемые $\sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j) \tilde{y}(t_j)$ зависят только от одной свободной переменной t_j .

Широкий класс ядер может быть представлен аналитическим способом в виде разделяющихся ядер. Например, ядро $K(t-s) = e^{t-s} \sin(t-s)$ может быть представлено в виде

$$K(t-s) = e^t (\sin(t) e^{-s} \sin(s) - \cos(t) e^{-s} \sin(s)),$$

а соответствующий оператор свертки — в виде

$$\psi(t) = e^t (\sin(t) \int_0^t e^{-s} \sin(s) ds - \cos(t) \int_0^t e^{-s} \sin(s) ds).$$

Таким образом можно модифицировать алгоритм при наличии аналитического выражения для ядра. Однако выражения (26) нельзя применить, если $K(t)$ имеет экспериментальное происхождение. В таком случае практический путь определения аналитического вида функции $K(t)$ состоит в получении переходной характеристики как реакции исследуемого объекта на единичную функцию и последующей аппроксимации $P(t)$ простым аналитическим выражением и его дифференцированием, так как $K(t) = dP(t)/dt$.

Эффективным аппаратом приближения функции на отрезке $[0, T]$ с помощью простых аналитических выражений (полиномов) являются интерполяционные полиномиальные сплайны [8], принадлежащие классу $C_{[0, T]}$. В этом случае применение сплайнов при $K(t) \neq 0$ и непрерывных функциях $K(t)$ та $f'(t)$ на отрезке $[0, T]$ приводит к следующей процедуре получения приближенного решения уравнения (16).

1. Аппроксимируя экспериментально полученные функции $P(t)$ и $K(t)$ интерполяционными сплайнами n -го порядка на равномерной сетке

$$\Delta_m^{\text{def}} = \{t_i: t_i = iH; H = T/m; i = \overline{0, m}\},$$

получаем $Z_{m,n}(P(t))$, $Z_{m,n}(f(t))$, где m — число точек интерполяции.

2. Определив производную $Z'_{m,n}(P(t))$ и подставив ее в уравнение (16) вместо $K(t-s)$, а $Z_{m,n}(P(t))$ — вместо $f(t)$, получим

$$\int_0^t Z'_{m,n}(P(t-s)) \tilde{y}(s) ds = Z_{m,n}(f(t)), \quad (27)$$

где $\tilde{y}(t)$ — решение этого уравнения.

3. Дифференцируя уравнение (27) по t , получаем интегральное уравнение Вольтерры II рода

$$K(0) \tilde{y}(t) + \int_0^t Z''_{m,n}(P(t-s)) \tilde{y}(s) ds = Z'_{m,n}(f(t)). \quad (28)$$

4. Исходя из квадратурных формул вида

$$\int_0^{ih} \varphi(s) ds = h \sum_{j=0}^i W_{ij} \psi_{ij}(jh) + R_i[\psi],$$

где $i = \overline{1, N}$, $N = 1, 2, \dots$; $h \stackrel{\text{def}}{=} T / N$; hw_{ij} — веса; $R_i[\psi]$ — остатки этих формул, получаем систему расчетных уравнений

$$K(0) \tilde{y}(ih) + \sum_{j=0}^i W_{ij} Z'_{m,n}(P(ih-jh)) \tilde{y}(jh) = Z'_{m,n}(f(ih)), \quad (29)$$

где $\tilde{y}(ih)$ — решение системы (29). Уравнение (28) и система (29) позволяют, используя свойство (22) ядра, получить расчетные выражения, представляющие собой модифицированный алгоритм метода квадратурных формул.

Таким образом, рассмотренный модифицированный алгоритм метода квадратурных формул для решения интегральных уравнений Вольтерры I рода имеет ряд необходимых для численной реализации свойств, в частности небольшое и постоянное число операций для получения очередного дискретного значения искомой функции. Это делает данный алгоритм пригодным для программных или аппаратных специализированных вычислительных средств при решении задач в реальном времени.

Выводы

Интегральные динамические модели, представленные интегральными уравнениями Вольтерры I и II рода, а также интегро-дифференциальными уравнениями с оператором Вольтерры, относятся к классам непараметрических моделей и формируются на основе динамических характеристик объектов моделирования. Продуктивный способ построения рекуррентных численных алгоритмов решения указанных уравнений, обеспечивающий высокую скорость процесса моделирования, основан на применении вырожденных (разделяющихся) ядер при реализации оператора Вольтерры. Предлагаемый оптимизационный метод аппроксимации функций двух переменных позволяет эффективно по критерию «сложность—точность» решать задачу приближения ядер произвольного вида вырожденными ядрами, что, в свою очередь, обеспечивает разработку быстродействующих алгоритмов и программ численного исследования динамических систем с использованием непараметрических моделей.

The possibilities of numerical implementation of integral dynamic models are considered. The models are non-parametric and are presented by Volterra integral equations of type II and type I, and also by integro-differential equations. Recurrent numerical algorithms for solving these equations are developed. The degenerate (separable) kernels method is used for constructing the algorithms. The optimization method of approximation for kernels of the Volterra integral operators is proposed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : Справ. пособие. — М. : Наука, 1979. — 224 с.
2. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. — М.: Факториал Пресс, 2000. — 384с.
3. Верлань Д.А. Аппроксимация функции двух переменных в задачах управления // 36. праць «Математичне та комп'ютерне моделювання». Сер.: Технічні науки. Вип. 5. — Кам'янець-Подільський національний ун-т ім. Івана Огієнка. — 2011. — С. 62—70.
4. Никольский С.М. Квадратурные формулы. 4-е изд. доп. — М.: Наука, 1988. — 254 с.
5. Верлань Д.А. Итерационные алгоритмы аппроксимации функции двух переменных // «Математичне та комп'ютерне моделювання». Сер.: Технічні науки. Вип. 2. — Кам'янець-Подільський національний ун-т ім. Івана Огієнка. — 2009. — С. 24—32.
6. Верлань Д.А. Градиентный алгоритм билинейной аппроксимации ядер при решении интегральных уравнений Фредгольма II-го рода // «Электрон. моделирование». — 2013. — 35, № 1.— С. 73—80.
7. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Бином, 2003. — 630 с.
8. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. — М.: Наука, 1976. — 248 с.

Поступила 29.04.14

ВЕРЛАНЬ Дмитрий Анатольевич, аспирант Киевского национального университета им. Т. Шевченко, который окончил в 2011 г. Область научных исследований — аппроксимация функций и решение интегральных уравнений.



УДК 536.24

В.И. Гаврыш, д-р техн. наук
Национальный университет «Львовская политехника»,
(Украина, 79013, Львов, ул. С.Бандеры, 12,
тел. (032) 2582578, e-mail: ikni.pz@gmail.com)

Численно-аналитическое решение нелинейной стационарной задачи теплопроводности для бесконечной термочувствительной многослойной пластины

Предложен метод решения нелинейных граничных задач теплопроводности на примере бесконечной термочувствительной многослойной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, конвективным теплообменом и локально сосредоточенными внутренними источниками тепла. Выполнен численный анализ температурного поля для двухслойной пластины. Приведены результаты эксперимента.

Запропоновано метод розв'язування нелінійних крайових задач теплопровідності на прикладі нескінченної термочутливої багатошарової пластины з теплоізолюваними лицевими поверхнями, конвективним теплообміном і локально зосередженими внутрішніми джерелами тепла. Виконано числовий аналіз температурного поля для двошарової пластины. Наведено результати експерименту.

К л ю ч е в ы е с л о в а : температура, теплопроводность, конвективный теплообмен, идеальный тепловой контакт, термочувствительные кусочно-однородные структуры.

Исследование процессов теплопроводности в элементах микроэлектронных устройств способствует более глубокому пониманию происходящих в них микропроцессов, связанных с движением и рассеиванием элементарных частиц. Ни одно из явлений переноса не дает таких всеобъемлющих сведений о колебаниях решетки, о возбужденном состоянии электронов, о взаимодействии электронов с решеткой в полупроводниках, как теплопроводность. В элементах микроэлектронных устройств, в которых протекает электрический ток, всегда происходит неоднородное выделение тепла, а в некоторых случаях создается большой градиент температуры. Поэтому эффективность работы микроэлектронных устройств существенно зависит от температурных режимов, устанавливающихся в процессе нагревания. Это особенно важно для устройств, в которых применяются тонкопленочные слои.

© В.И. Гаврыш, 2014

В процессе проектирования и эксплуатации отдельных элементов и узлов микроэлектронных устройств, работающих в широком диапазоне температур при воздействии высоких тепловых нагрузок, возникает ряд сложных инженерных проблем, для решения которых необходимо иметь достоверную информацию об их тепловом состоянии и температурных режимах. Такую информацию можно получить только расчетным путем, так как экспериментальные исследования невозможны вследствие высоких температур и герметизирующих свойств систем теплоотвода. Это, в свою очередь, требует решения сложных нелинейных краевых задач теплопроводности, полученных на основе математических моделей, максимально отражающих существенные аспекты теплофизических процессов, осуществляемых в рассматриваемых термочувствительных конструкциях.

Определению теплового состояния однородных и неоднородных конструкций с учетом термочувствительности (зависимости теплофизических параметров от температуры) посвящены многие исследования.

В работах [1—6] рассмотрена тепловая модель осесимметричной bipolarной транзисторной структуры с неоднородностью теплофизического типа в области контакта кристалл—теплоотвод и температурно зависимой плотностью тока. Найдены неоднородные распределения плотности теплового потока и температуры в активной области в зависимости от модельных параметров, характеризующих размер дефекта Ks и его теплофизические свойства Kd . Показано, что показатель неоднородности температуры нелинейно зависит от параметра Ks . Для различных значений величин модельных параметров полупроводниковой структуры проведена оценка отношения максимальных температур активной области кристалла с дефектом и без него. Найдено распределение температуры на поверхности транзисторной структуры в условиях изменения напряжения коллектор — база и тока коллектора [7].

В работе [8] сформулирована задача стационарной теплопроводности для слоистых пластин постоянной и переменной толщины в пространственной постановке. Методом начальных функций трехмерная задача сведена к двумерной. Для пластины со слоями переменной толщины получена система уравнений с переменными коэффициентами. Проанализированы полученные двумерные краевые задачи. Для пластин с однородными слоями постоянной толщины построено решение в аналитической форме и показано, что это решение совпадает с решением, полученным методом разделения переменных.

В работе [9] исследованы теплоперенос и напряженное состояние в слоистой пластине с составляющими различной прозрачности, соединенными тонким промежуточным слоем, в условиях теплового облучения со

стороны частично прозрачного слоя. С помощью эффективного коэффициента отражения на поверхности контакта получены приближенные соотношения для определения поля излучения в основном частично прозрачном слое. Найдены приближенные соотношения для напряжений в пластине, учитывающие характеристики жесткости на изгиб и растяжение промежуточного слоя. Нелинейная краевая задача теплопереноса решена методом конечных разностей с применением процедуры квазилинеаризации. Предложен метод решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности. Использование метода функций Грина позволило преобразовать полученное уравнение к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры второго рода относительно температуры, которое решается методом квадратичных форм. Полученная система рекуррентных уравнений решена численно. Проанализировано влияние нелинейности на профили температуры [10].

С использованием операционного метода и метода последовательных интервалов решены нелинейные задачи нестационарной теплопроводности с переменным коэффициентом теплообмена, с нелинейностью первого и второго рода, а также задачи теплопроводности с общей нелинейностью [11].

Работы [12—17] посвящены развитию методов решения стационарных нелинейных задач теплопроводности для конструкций кусочно-однородной структуры (слоистые, однородные и слоистые с инородными включениями).

Рассмотрим метод решения стационарных нелинейных задач теплопроводности для термочувствительных кусочно-однородных (слоистых) структур на примере бесконечной пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями, на границах которой осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой и в одном из слоев локально сосредоточены внутренние источники тепла.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную (относительно теплофизических параметров) термочувствительную многослойную бесконечную пластину толщиной 2δ с теплоизолированными лицевыми поверхностями $|z|=\delta$, состоящую из n разнородных слоев с различными геометрическими и теплофизическими параметрами, отнесенную к декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с началом на одной из ее граничных поверхностей (рис.1).

В области параллелепипеда, имеющего j -й слой ($j = \overline{2, n-1}$) пластины объемом $4h\delta(y_j - y_{j-1})$, действуют равномерно распределенные внутренние источники тепла мощностью $q_0 = \text{const}$. На граничных поверхностях $K_k = \{(x, y_k, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$, $k = \overline{1, n-1}$, слоев осуществляется идеальный тепловой контакт, а на граничных поверхностях $K_0 = \{(x, 0, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$,

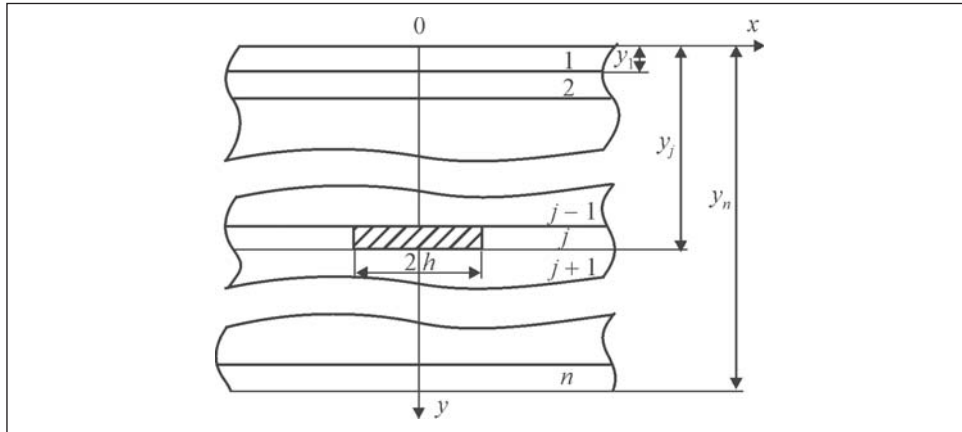


Рис. 1. Сечение изотропной термочувствительной многослойной бесконечной пластины плоскостью $z = 0$

$K_n = \{(x, y_n, z) : |x| < \infty, |z| \leq \delta\}$ пластины происходит конвективный теплообмен с внешней средой постоянной температуры $t_c = \text{const}$.

Математическая модель задачи. Распределение стационарного температурного поля $t(x, y)$ в многослойной термочувствительной бесконечной пластине находим в результате решения нелинейного уравнения теплопроводности [18, 19]

$$\text{div} [\lambda(y, t) \text{grad } t] = -q_0 N(x, h) N_1(y, y_{j-1}) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} = \alpha_0 (t|_{y=0} - t_c), \quad \lambda_n(t) \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=y_n} = \alpha_n (t_c - t|_{y=y_n}), \quad (2)$$

$$t|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0,$$

где $\lambda(y, t)$ — коэффициент теплопроводности неоднородной пластины,

$$\lambda(y, t) = \lambda_1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} [\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)] S_-(y - y_k);$$

$\lambda_k(t)$ — коэффициент теплопроводности k -го слоя пластины; α_0 и α_n — коэффициенты теплоотдачи с граничных поверхностей K_0 и K_n пластины;

$N_1(y, y_{j-1}) = S_-(y - y_{j-1}) - S_-(y - y_j)$; $N(x, h) = S_-(x + h) - S_+(x - h)$; $S_{\pm}(\zeta)$ — асимметрические единичные функции [20],

$$S_{\pm}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & \zeta = 0, \\ 0, & \zeta < 0. \end{cases}$$

Введем функцию

$$\mathfrak{G} = \int_0^{t(x,y)} \lambda_1(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^{n-1} S_-(y - y_k) \int_{t(x,y_k)}^{t(x,y)} [\lambda_{k+1}(\zeta) - \lambda_k(\zeta)] d\zeta, \quad (3)$$

продифференцировав которую по переменным x и y , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x} &= \lambda(y, t) \frac{\partial t}{\partial x} - \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ [\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)] \frac{\partial t}{\partial x} \right\} \Big|_{y=y_k} S_-(y - y_k), \\ \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y} &= \lambda(y, t) \frac{\partial t}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (4) исходное уравнение (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{G} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\lambda_{k+1}(t) - \lambda_k(t)) \frac{\partial t}{\partial x} \right] \Big|_{y=y_k} S_-(y - y_k) \right\} - \\ &= - q_0 N(x, h) N_1(y, y_{j-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Используя соотношение (3), граничные условия (2) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \alpha_0 (t|_{y=0} - t_c), \quad \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y} \Big|_{y=y_n} = \alpha_n (t_c - t|_{y=y_n}), \\ \mathfrak{G} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, нелинейная математическая модель (1), (2) с помощью функции (3) приведена к частично линеаризованной граничной задаче (5), (6).

Аппроксимируем функции $t(x, 0)$, $t(x, y_k)$ выражениями

$$t(x, y_k) = t_1^{(k)} + \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) S_-(x - x_l), \quad (7)$$

где $k = \overline{0, n}$; $y_0 = 0$; $x_l \in]-x_* ; x_* [$; $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{m-1}$; m — число разбиений интервала $]-x_* ; x_* [$; x_* — значение абсциссы, для которой температура

практически равна t_c ($k=0, n$) и нулю ($0 < k < n$) (определяется решением соответствующей линейной задачи); $t_l^{(k)}$, $l=1, m$, $k=1, n$, — неизвестные аппроксимирующие значения. Подставив (7) в (5) и (6), получим линейную граничную задачу относительно функции ϑ :

$$\Delta \vartheta = - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) [\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) - \lambda_k(t_{l+1}^{(k)})] \delta'_-(x-x_l) S_-(y-y_k) - q_0 N(x, h) N(y, y_{j-1}), \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=0} = \alpha_0 \left[t_1^{(0)} + \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}) S_-(x-x_l) - t_c \right],$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right|_{y=y_n} = -\alpha_n \left[t_1^{(n)} + \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}) S_-(x-x_l) - t_c \right], \quad (9)$$

$$\vartheta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = 0.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа в декартовой прямоугольной системе координат; $\delta_-(\zeta) = \frac{dS_-(\zeta)}{d\zeta}$ — асимметрическая дельта-функция Дирака [20].

Решение граничной задачи. Применив интегральное преобразование Фурье по координате x к задаче (8), (9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dy^2} - \xi^2 \bar{\vartheta} = i \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left\{ \xi \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) [\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) - \lambda_k(t_{l+1}^{(k)})] \times \right. \\ \left. \times S_-(y-y_k) + 2q_0 \frac{shi \xi h}{\xi} N_1(y, y_{j-1}) \right\} \quad (10)$$

и граничные условия

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=0} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{i \alpha_0}{\xi} \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}) e^{i\xi x_l},$$

$$\left. \frac{d \bar{\vartheta}}{dy} \right|_{y=y_n} = -\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{i \alpha_n}{\xi} \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}) e^{i\xi x_l}, \quad (11)$$

где $\bar{\mathfrak{G}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \mathfrak{G} dx$ — трансформанта функции \mathfrak{G} ; ξ — параметр интегрального преобразования Фурье; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Общее решение уравнения (10) находим методом вариации постоянных в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{G}} = & C_1 e^{\xi y} + C_2 e^{-\xi y} - \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) [\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) - \lambda_k(t_{l+1}^{(k)})] \times \right. \\ & \times (1 - ch\xi(y - y_k)) S_-(y - y_k) + \frac{2q_0 sh i \xi h}{\xi^2} \times \\ & \left. \times [N_1(y, y_{j-1}) - ch\xi(y - y_{j-1}) S_-(y - y_{j-1}) + ch\xi(y - y_j) S_-(y - y_j)] \right\}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Используя граничные условия (11), получим частное решение задачи (10), (11):

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{G}} = & -\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{i}{\xi} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) [\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) - \lambda_k(t_{l+1}^{(k)})] \times \right. \\ & \times \left[(1 - ch\xi(y - y_k)) S_-(y - y_k) + ch\xi y \frac{sh\xi(y_n - y_k)}{sh\xi y_n} \right] + \\ & + \frac{2q_0 e^{i\xi h}}{\xi^2} [N_1(y, y_{j-1}) - ch\xi(y - y_{j-1}) S_-(y - y_{j-1}) + \\ & + ch\xi(y - y_j) S_-(y - y_j) + ch\xi y \frac{sh\xi(y_n - y_{j-1}) - sh\xi(y_n - y_j)}{sh\xi y_n}] + \\ & \left. + \frac{1}{\xi sh\xi y_n} \left[\alpha_n \sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l} (t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}) ch\xi y + \alpha_0 \sum_{l=1}^{m-1} e^{i\xi x_l} (t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}) ch\xi(y - y_n) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Применив обратное интегральное преобразование Фурье к соотношению (12), найдем выражение для функции \mathfrak{G} :

$$\mathfrak{G} = -\frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(k)} - t_l^{(k)}) [\lambda_{k+1}(t_{l+1}^{(k)}) - \lambda_k(t_{l+1}^{(k)})] \int_0^{\infty} \frac{\sin \xi(x - x_l)}{\xi} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[(1 - ch\xi(y - y_k)) S_-(y - y_k) + \frac{sh\xi(y_n - y_k)}{sh\xi y_n} ch\xi y \right] d\xi + \\
 & + q_0 \int_0^\infty \frac{[\sin\xi(x - h) - \sin\xi(x + h)]}{\xi^3} \left(N_1(y, y_{j-1}) - ch\xi(y - y_{j-1}) S_-(y - y_{j-1}) + \right. \\
 & \left. + ch\xi(y - y_j) S_-(y - y_j) + ch\xi y \frac{sh\xi(y_n - y_{j-1}) - sh\xi(y_n - y_j)}{sh\xi y_n} \right) d\xi + \\
 & + \alpha_n \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(n)} - t_l^{(n)}) \int_0^\infty \frac{\sin\xi(x - x_l)}{\xi^2 sh\xi y_n} ch\xi y d\xi + \\
 & + \alpha_0 \sum_{l=1}^{m-1} (t_{l+1}^{(0)} - t_l^{(0)}) \int_0^\infty \frac{\sin\xi(x - x_l)}{\xi^2 sh\xi y_n} ch\xi(y - y_n) d\xi \}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Подставив выражения зависимости коэффициента теплопроводности от температуры для каждого из слоев пластины в соотношения (3), (13), после некоторых преобразований получим систему нелинейных уравнений для определения неизвестных аппроксимирующих значений температуры $t_l^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$, $l = \overline{1, m}$. Искомое температурное поле для рассматриваемой системы определяем с помощью полученного нелинейного уравнения после подстановки в (3), (13) конкретных выражений зависимостей коэффициента теплопроводности от температуры для материалов каждого слоя пластины.

Расчетные формулы для трехслойной пластины. Рассмотрим пластину, состоящую из трех слоев, с внутренними источниками тепла в среднем слое ($n = 3$, $j = 2$). Пусть зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для материалов каждого из слоев пластины, которая используется для решения многих практических задач, описывается соотношением $\lambda(t) = \lambda^0(1 - kt)$ [21, 22], где λ^0 и k — опорный и температурный коэффициенты теплопроводности. Из выражений (3), (13) получим формулы для определения температуры t :

в области $0 \leq y < y_1$ —

$$t = (1 - \sqrt{1 - 2k_1\vartheta / \lambda_1^0}) / k_1, \quad (14)$$

в области $y_1 \leq y < y_2$ —

$$t = (1 - \sqrt{1 - 2k_2(\vartheta / \lambda_2^0 + \vartheta_1^*)}) / k_2, \quad (15)$$

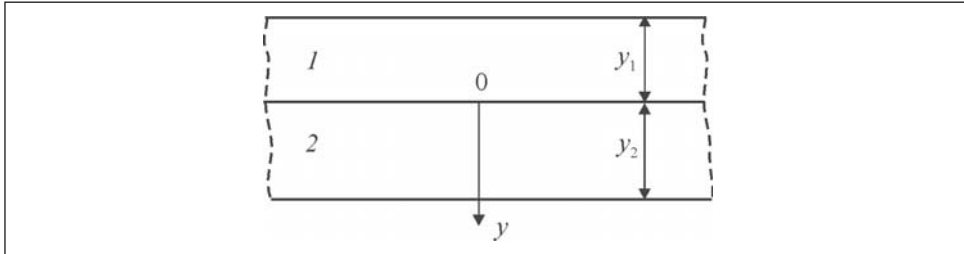


Рис. 2. Двухслойная термочувствительная бесконечная пластина

в области $y_2 \leq y \leq y_3$ —

$$t = (1 - \sqrt{1 - 2k_3(\vartheta / \lambda_3^0 + \vartheta_2^*)}) / k_3, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_1^* &= \left\{ \left[1 - \lambda_1^0 / \lambda_2^0 + \frac{1}{2} (k_1 \lambda_1^0 / \lambda_2^0 - k_2) t \right] t \right\} \Big|_{y=y_1}; \quad t|_{y=y_1} = (1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta|_{y=y_1} / \lambda_1^0}) / k_1; \\ \vartheta_2^* &= \left\{ \left[1 - \lambda_2^0 / \lambda_3^0 + \frac{1}{2} (k_2 \lambda_2^0 / \lambda_3^0 - k_3) t \right] t \right\} \Big|_{y=y_2} + \\ &+ \frac{1}{\lambda_3^0} \left\{ \left[\lambda_2^0 - \lambda_1^0 + \frac{1}{2} (k_1 \lambda_1^0 - k_2 \lambda_2^0) t \right] t \right\} \Big|_{y=y_1}; \\ t|_{y=y_2} &= (1 - \sqrt{1 - 2k_2(\vartheta|_{y=y_2} / \lambda_2^0 + \vartheta_1^*)}) / k_2. \end{aligned}$$

Формулы (14)—(16) полностью описывают распределение температуры в термочувствительной многослойной бесконечной пластине с теплоизолированными лицевыми поверхностями, конвективным теплообменом и локально сосредоточенными внутренними источниками тепла.

Пример. Рассмотрим пластину, состоящую из двух слоев с равномерно распределенными источниками тепла на поверхностях сопряжения слоев (рис. 2). Предположим, что на граничных поверхностях пластины $y = -y_1$, $y = y_2$ температура соответственно составляет $t_1 = 0$, $t_2 = 700$ °С. Для рассматриваемой системы соотношения (1)—(5) и (13) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[\lambda(y, t) \frac{dt}{dy} \right] &= -q_0 \delta(y), \quad t|_{y=-y_1} = t_1, \quad t|_{y=y_2} = t_2, \\ \vartheta &= \int_{t_1}^t \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(y) \int_{t_1}^t [\lambda_2(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta, \end{aligned}$$

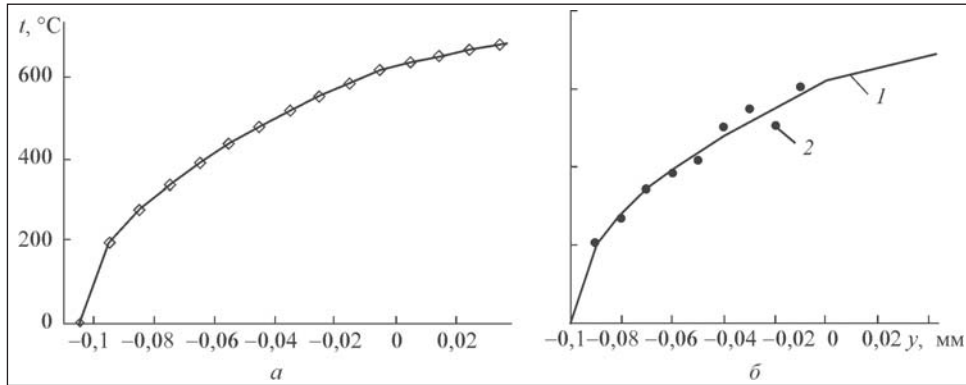


Рис. 3. Зависимость температуры термочувствительной пластины от пространственной координаты y : a — численные расчеты на модели в диапазоне температур от нуля до 700 °С; b — 1 — расчетная кривая; 2 — экспериментальные значения

$$\frac{d^2\vartheta}{dy^2} = -q_0\delta(y), \quad \vartheta|_{y=-y_1} = 0, \quad \vartheta|_{y=y_2} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_1(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)] dt,$$

$$\vartheta = \frac{y+y_1}{y_1+y_2} \left\{ y_2 q_0 + \int_{t_1}^t \lambda_1(\zeta) d\zeta + S_-(y) \int_{t_1}^t [\lambda_2(\zeta) - \lambda_1(\zeta)] d\zeta \right\} - y q_0 S(y),$$

где $\lambda(y, t) = \lambda_1(t) + [\lambda_2(t) - \lambda_1(t)] S_-(y)$; $\delta(y)$ — дельта-функция Дирака; $S(y)$ — симметрическая единичная функция. В качестве материалов слоев пластины возьмем сталь У12 и 08. В диапазоне температур от нуля до 700 °С эти материалы описываются следующими зависимостями коэффициента теплопроводности от температуры:

$$\lambda_1(t) = 47,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \left(1 + 0,37 \frac{1}{\text{град}} t \right), \quad \lambda_2(t) = 64,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{град}} \left(1 + 0,49 \frac{1}{\text{град}} t \right).$$

Распределение температуры в рассматриваемой структуре определяется из квадратного уравнения для первого слоя,

$$\lambda_1^0 k_1 t^2 - 2\lambda_1^0 t + \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) + \frac{y+y_1}{y_1+y_2} \{ 2y_2 q_0 - \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) + \lambda_2^0 t_2 (2 - k_2 t_2) + t_0 [\lambda_1^0 (2 - k_1 t_0) - \lambda_2^0 (2 - k_2 t_0)] \} = 0,$$

и для второго слоя —

$$\lambda_2^0 k_2 t^2 - 2\lambda_2^0 t + \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) - \lambda_1^0 t_0 (2 - k_1 t_0) + \lambda_2^0 t_0 (2 - k_2 t_0) + \frac{y+y_1}{y_1+y_2} \{ 2y_2 q_0 - \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) + \lambda_2^0 t_2 (2 - k_2 t_2) + t_0 [\lambda_1^0 (2 - k_1 t_0) - \lambda_2^0 (2 - k_2 t_0)] \} - 2y q_0 = 0.$$

Здесь $t_0 = t(0)$ и определяется из квадратного уравнения

$$\begin{aligned} & [\lambda_1^0 k_1 + \frac{y_1}{y_1 + y_2} (\lambda_2^0 k_2 - \lambda_1^0 k_1)] t_0^2 - 2 [\lambda_1^0 + \frac{y_1}{y_1 + y_2} (\lambda_2^0 - \lambda_1^0)] t_0 + \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) + \\ & + \frac{y_1}{y_1 + y_2} [2y_2 q_0 - \lambda_1^0 t_1 (2 - k_1 t_1) + \lambda_2^0 t_2 (2 - k_2 t_2)] = 0. \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов температурного поля, выполненных с помощью математической модели, адекватны реальному физическому процессу (рис. 3, а). Максимальная относительная ошибка между расчетными значениями температуры и результатами эксперимента составляет 15 % (рис. 3, б).

Выводы

Предложенная кусочно-линейная аппроксимация температуры на граничных поверхностях инородных слоев и пластины дала возможность полностью линеаризовать задачу, численно-аналитическое решение которой получено с использованием интегрального преобразования Фурье.

A method has been proposed for solving the nonlinear boundary value problems of heat conduction as an example of an infinite plate with temperature-sensitive multilayer insulated facial surfaces, convective heat transfer and locally focused internal heat sources. A numerical analysis of temperature field for the two-layer plate has been done with results of the experiment presented.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carpinteri A., Paggi M.* Thermoelastic Mismatch in Nonhomogeneous Beams // J. Eng. Math. — 2008. — 61, No. 2—4. — P. 371—384.
2. *Noda N.* Thermal Stresses in Materials with Temperature-dependent Properties // Appl. Mech. Rev. — 1991. — 44. — P. 383—397.
3. *Otao Y., Tanigawa O., Ishimaru O.* Optimization of Material Composition of Functionality Graded Plate for Thermal Stress Relaxation Using a Genetic Algorithm // J. Therm. Stresses. — 2000. — 23. — P. 257—271.
4. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R.* Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate With Temperature-dependent Material Properties // Ibid. — 1996. — 19, No. 1. — P. 77—102.
5. *Tanigawa Y., Otao Y.* Transient Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Plate with Temperature-dependent Material Properties Taking into Account the Thermal Radiation // Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu. — 2002. — 2. — P. 133—134.
6. *Yangian Xu, Daihui Tu.* Analysis of Steady Thermal Stress in a ZrO₂/FGM/Ti-6Al-4V Composite ECBF Plate with Temperature-dependent Material Properties by NFEM // 2009-WASE Int. Conf. on Informa. Eng. — Vol. 2 — 2. — P. 433—436.
7. *Сергеев В.А., Ходаков А.М.* Тепловая модель биполярной транзисторной структуры с неоднородностью в области контакта кристалла с теплоотводом // Электронная техника. Сер. 2. Полупроводниковые приборы. — 2010. — № 1. — С. 12—18.

8. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Решение стационарной задачи теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин методом начальных функций // Мат. методы та физ.-мех. поля. — 2008. — **51**, №2. — С. 222—238.
9. Турій О. Нелінійна контактнo-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двохшарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2008. — Вип. 8. — С. 118—132.
10. Белик В.Д., Урюков Б.А., Фролов Г.А., Ткаченко Г.В. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инженерно-физический журнал. — 2008. — **81**, № 6. — С. 1058—1062.
11. Берлов О.В., Веселовський В.В. Розв'язок нелінійних задач теплопровідності для складених елементів конструкцій // Металургійна теплотехніка: Зб. наук. праць Національної металургійної академії України. — 2008. — С. 20—30.
12. Барвінський А.Ф., Гавриш В.І. Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблеми машиностроения. — 2009. — **12**, № 1. — С. 47—53.
13. Гавриш В.І., Федасюк Д.В. Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. — 2010. — **32**, № 5. — С. 18—25.
14. Гавриш В.І. Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 4. — С. 99—107.
15. Gavrysh V.I. Thermal State Modelling in Thermosensitive Elements of Microelectronic Devices with Reach-through Foreign Inclusions // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. — 2012. — **15**, No 3. — P. 247—251.
16. Gavrysh V.I. Modelling the Temperature Conditions in the Three-dimensional Piecewise Homogeneous Elements of Microelectronic Devices // Ibid. — 2011. — **14**, No 4. — P. 478—482.
17. Гавриш В. Дослідження температурних режимів у термочутливій пластині з чужорідним наскрізним включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2013. — Вип. 18. — С. 43—50.
18. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. — Киев: Наук. думка, 1992. — 280 с.
19. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
20. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1977. — 720 с.
21. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 376 с.
22. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. — М.: Мир, 1979. — 288 с.

Поступила 13.02.14;
после доработки 17.03.14

ГАВРЫШ Василий Иванович, д-р техн. наук, доцент, доцент Национального университета «Львовская политехника». В 1982 г. окончил Львовский госуниверситет им. И. Франко. Область научных исследований — моделирование процессов теплопроводности в телах кусочно-однородной структуры и разработка методов решения линейных и нелинейных граничных задач теплопроводности.

УДК 004.021

В.А. Федорчук, д-р техн. наук, **А.И. Махович**
Каменец-Подольский национальный университет им. Ивана Огиенко
(Украина, 32300, Каменец-Подольский, ул. Огиенко, 61,
тел. (03849) 31642, e-mail: fedva@ukr.net; umismag@gmail.com)

Метод исследования динамики нестационарных тепловых процессов при наличии симметричных граничных условий

Рассмотрен метод исследования динамики нестационарных тепловых процессов с учетом особенности симметричных граничных условий.

Розглянуто метод дослідження динаміки нестационарних теплових процесів з врахуванням особливості симетричних граничних умов.

Ключевые слова: моделирование тепловых процессов, симметричные граничные условия, универсальность выражений.

Исследование процессов теплопроводности является важным этапом при решении задач проектирования элементов современных технических систем, поскольку надежность различных промышленных изделий, а также отдельных узлов и деталей, в значительной степени зависит от температурных режимов, при которых эти изделия и их отдельные части эксплуатируются. Сложность таких задач обусловлена характером исследуемых процессов, а также видом граничных и начальных условий [1, 2].

Базовыми математическими представлениями процессов теплопроводности являются дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа, для численного решения которых в настоящее время можно использовать множество программных средств компьютерного моделирования (например, 3D-MAX, ANSYS, T-FLEX, MAYA, CATI и др.). При этом используются преимущественно сеточные методы, требующие больших вычислительных мощностей [3].

При решении оптимизационных задач, требующих высокой скорости вычислений, возникает необходимость в разработке универсальных и относительно простых методов численной реализации моделей динамики нестационарных тепловых процессов. Одним из способов решения данной

© В.А. Федорчук, А.И. Махович, 2014

проблемы является учет особенности объекта моделирования. В случае симметричных граничных условий первого, второго и третьего рода перспективным представляется метод сечений для получения аппроксимирующих выражений.

Получение аппроксимирующих уравнений нестационарных тепловых процессов методом сечений. Методику преобразования уравнений в частных производных в систему обыкновенных дифференциальных уравнений без потери общности рассмотрим на примере одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

с граничными условиями первого рода $u(x, t)|_{x=\pm 1} = F_{\text{гр1}}(t)$, где $F_{\text{гр1}}(t)$ — входное воздействие, и начальным условием $u(x, t)|_{t=0} = E(x)$. Предполагаем, что решение $u(x, t)$ уравнения (1) может быть приближенно аппроксимировано рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Q_n(x),$$

в котором $Q_n(x)$ — известные функции, например x^n , x^{2n} , $\cos nx$ и другие, имеющие соответствующее число производных по x . Производные

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

с использованием граничных условий могут быть разложены в ряды по функциям $u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \frac{\partial^2 Q_n(x)}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{\infty} D_i(x, x_i) u(x_i, t). \quad (2)$$

Коэффициенты $D_i(x, x_i)$ будем выражать через известные функции $Q_n(x)$, их производные и через граничные условия. Явный вид выражений для коэффициентов $D_i(x, x_i)$ можно определить различными способами. Можно построить интерполяционный полином Лагранжа

$$u(x, t) = u(x_0, t) \frac{(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)}{(x_0^2 - x_1^2)(x_0^2 - x_2^2)} + \\ + u(x_1, t) \frac{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_2^2)}{(x_1^2 - x_0^2)(x_1^2 - x_2^2)} + u(x_2, t) \frac{(x^2 - x_0^2)(x^2 - x_1^2)}{(x_2^2 - x_0^2)(x_2^2 - x_1^2)},$$

проходящий через заданные опорные точки x_0, x_1, x_2 , и выражения частных производных получать его дифференцированием по координате x .

Для задач, имеющих симметричное решение, выберем функцию $Q_n(x) = x^{2n}$ и ограничимся тремя членами ряда в (2). Выбрав опорные точки $x = 0, x_1 = 0,5$ и $x_2 = 1$, запишем

$$u(x, t) = u(0, t) \frac{\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 - 1)}{\left(0 - \frac{1}{4}\right)(0 - 1)} + u\left(\frac{1}{2}, t\right) \frac{(x^2 - 0)(x^2 - 1)}{\left(\frac{1}{4} - 0\right)\left(\frac{1}{4} - 1\right)} + u(1, t) \frac{(x^2 - 0)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{(1 - 0)\left(1 - \frac{1}{4}\right)},$$

откуда

$$u(x, t) = (4x^4 - 5x^2 + 1)u(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{\text{rp1}}(t). \quad (3)$$

Дифференцируя (3) по x , получаем выражение частной производной первого порядка

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 2x(8x^2 - 5)u(0, t) + \frac{32}{3}x(1 - 2x^2)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{\text{rp1}}(t),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = (48x^2 - 10)u(0, t) + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{\text{rp1}}(t). \quad (4)$$

Подставив в (1) выражение частной производной (4), запишем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2(x) \left[(48x^2 - 10)u(0, t) + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{\text{rp1}}(t) \right] + f(x, t). \quad (5)$$

Полагая в (5) $x = 0$ и $x = 1/2$, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения величин $u(0, t)$ и $u(1/2, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + a^2(0) \left[10u(0, t) - \frac{32}{3} u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] &= -\frac{2}{3} a^2(0) F_{\text{rp1}}(t) + f(0, t), \\ \frac{\partial u\left(\frac{1}{2}, t\right)}{\partial t} + a^2\left(\frac{1}{2}\right) \left[-2u(0, t) + \frac{16}{3} u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] &= \frac{10}{3} a^2\left(\frac{1}{2}\right) F_{\text{rp1}}(t) + f\left(\frac{1}{2}, t\right), \end{aligned} \quad (6)$$

с заданными соответствующими начальными условиями. Решая систему (6), с учетом (3) получаем возможность вычислить значения функции $u(x, t)$ в любой точке.

Полученные выражения (6) справедливы для симметричных граничных условий первого рода. Если заданы граничные условия второго рода

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = \pm F_{\text{rp2}}(t),$$

то аппроксимация частной производной второго порядка по переменной x функции $u(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{64}{7} (3x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} (24x^2 - 1) F_{\text{rp2}}(t), \quad (7)$$

а частная производная первого порядка — соответственно вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{64}{7} x (x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} x (8x^2 - 1) F_{\text{rp2}}(t). \quad (8)$$

Проинтегрировав (8) по переменной x , получим выражение для вычисления функции $u(x, t)$ в произвольной точке в случае граничных условий второго рода:

$$u(x, t) = \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} x^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2} \right) F_{\text{rp2}}(t) + u(0, t). \quad (9)$$

Непосредственной подстановкой в (9) значений x в опорных точках получаем соответствующие значения $u(0, t)$ и $u(1/2, t)$.

Подставив в (1) выражение частной производной (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \\ &= \frac{1}{7} a^2(x) \left\{ 64(3x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + (24x^2 - 1) F_{\text{rp2}}(t) \right\} + f(x, t). \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения искомым функций $u(0, t)$ и $u(1/2, t)$ необходимо подставить в (10) по очереди $x=0$ и $x=1/2$, получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = \frac{1}{7} a^2(0) \left\{ 64 \left[u\left(\frac{1}{2}, t\right) - u(0, t) \right] - F_{\text{rp2}}(t) \right\} + f(0, t),$$

$$\frac{\partial u\left(\frac{1}{2}, t\right)}{\partial t} = \frac{1}{7} a^2\left(\frac{1}{2}\right) \left\{ 16 \left[u\left(\frac{1}{2}, t\right) - u(0, t) \right] + 5F_{\text{rp2}}(t) \right\} + f\left(\frac{1}{2}, t\right),$$

и решить ее.

При заданных граничных условиях третьего рода

$$\left[\pm \alpha u(x, t) + \beta \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right]_{x=\pm 1} = F_{\text{rp3}}(t)$$

выражение для аппроксимации частной производной второго порядка по переменной x примет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \left[\frac{48(3\alpha + 8\beta)x^2 - 30\alpha - 128\beta}{3\alpha + 14\beta} \right] u(0, t) + 32 \left[\frac{\alpha + 4\beta - 6(\alpha + 2\beta)x^2}{3\alpha + 14\beta} \right] u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{48x^2 - 2}{3\alpha + 14\beta} F_{\text{rp3}}(t). \quad (11)$$

Частная производная первого порядка будет иметь вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \left[\frac{16(3\alpha + 8\beta)x^3 - (30\alpha + 128\beta)x}{3\alpha + 14\beta} \right] u(0, t) + \left[\frac{(32\alpha + 128\beta)x - (64\alpha + 128\beta)x^3}{3\alpha + 14\beta} \right] u\left(\frac{1}{2}, t\right) + 2x \frac{8x^2 - 1}{3\alpha + 14\beta} F_{\text{rp3}}(t),$$

а выражение для приближенного вычисления значений функции:

$$u(x, t) = \left[\frac{4(3\alpha + 8\beta)x^4 - (15\alpha + 64\beta)x^2}{3\alpha + 14\beta} \right] u(0, t) + \left[\frac{(16\alpha + 64\beta)x^2 - (16\alpha + 32\beta)x^4}{3\alpha + 14\beta} \right] u\left(\frac{1}{2}, t\right) + x^2 \frac{4x^2 - 1}{3\alpha + 14\beta} F_{\text{rp3}}(t) + u(0, t). \quad (12)$$

После подстановки соответствующих значений убеждаемся, что в точках $x = 0$ и $x = 1/2$ из выражения (12) можно получить соответственно значения $u(0, t)$ и $u(1/2, t)$.

Подставив в (1) выражение частной производной (11), получим

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{a^2(x)}{3\alpha + 14\beta} \left[(48(3\alpha + 8\beta)x^2 - 30\alpha - 128\beta)u(0, t) + \right. \\ \left. + 32(\alpha + 4\beta - 6(\alpha + 2\beta)x^2)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + 2(24x^2 - 1)F_{\text{гр3}}(t) \right] + f(x, t). \quad (13)$$

Для определения искомых функций $u(0, t)$ и $u(1/2, t)$ необходимо подставить в (13) по очереди $x = 0$ и $x = 1/2$, получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и решить ее.

Формула аппроксимации частных производных и дифференциальные уравнения, полученные для задач с граничными условиями третьего рода, являются наиболее общими. Полагая $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, из них определяют соответствующие выражения для задач с граничными условиями первого и второго рода, совпадающие с (4) и (7).

Исследование нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с симметричными граничными условиями первого рода. Имеется неограниченная пластина толщиной $2R$ (рис. 1) с коэффициентом теплопроводности, зависящим от координаты x . Температура на границах пластины принудительно меняется по закону, заданному функцией времени $F_{\text{гр1}}(t)$. Внутри пластины действует источник тепла, мощность которого пропорциональна $f(t)$. В начальный момент времени задано распределение температуры по толщине. Необходимо найти распределение температуры в любой точке по толщине в любой момент времени.

В этом случае нестационарный тепловой процесс описывается одномерным уравнением теплопроводности (1), где коэффициент теплопроводности имеет вид

$$a^2(x) = \frac{b_2(a_0 - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 - a_2x^2 > 0, \quad 0 < a_2 \leq a_0, \quad b_2 > 0,$$

а внутренний источник тепла $f(t) = b_1 e^{-b_1 t}$.

Для уравнения (1) заданы граничные условия,

$$T(x, t)|_{x=\pm 1} = F_{\text{гр1}}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2) e^{-b_2 t},$$

и начальное условие

$$T(x, t)|_{t=0} = a_0 - a_2 x^2. \quad (14)$$

Задача (1) имеет точное аналитическое решение:

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2 x^2) e^{-b_2 t}.$$

Решение задачи будем искать методом сечений. Заменяя в (1) частную производную второго порядка по пространственной переменной выражением (4), запишем:

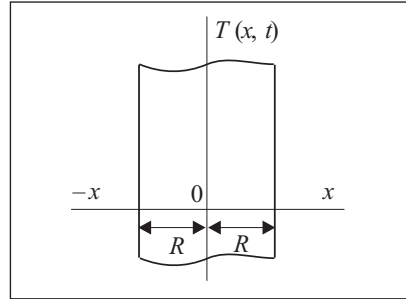


Рис. 1. Схематическое изображение объекта моделирования

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a^2(x) & \left[(48x^2 - 10) T(0, t) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{32}{3} - 64x^2 \right) T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3} \right) F_{\text{гп1}}(t) \right] + f(x, t). \end{aligned}$$

Полагая последовательно $x = 0$ и $x = 1/2$, получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения величин $T(0, t)$ и $T(1/2, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(0, t)}{\partial t} + a^2(0) & \left[10T(0, t) - \frac{32}{3} T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] = -\frac{2}{3} a^2(0) F_{\text{гп1}}(t) + f(0, t), \\ \frac{\partial T\left(\frac{1}{2}, t\right)}{\partial t} + a^2\left(\frac{1}{2}\right) & \left[-2T(0, t) + \frac{16}{3} T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] = \frac{10}{3} a^2\left(\frac{1}{2}\right) F_{\text{гп1}}(t) + f\left(\frac{1}{2}, t\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Для уравнений (15) задаем соответствующие начальные условия, полученные из (14):

$$T(0, t)|_{t=0} = a_0, \quad T(1/2, t)|_{t=0} = a_0 - (a_2 / 4). \quad (16)$$

Решив систему (15), с учетом формулы (3) получим возможность вычислить значения функции $T(x, t)$ в любой точке:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & (4x^4 - 5x^2 + 1) T(0, t) + \\ & + \frac{16}{3} x^2 (1 - x^2) T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3} x^2 (4x^2 - 1) F_{\text{гп1}}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) и система (15) могут быть решены при любых имеющих физический смысл значениях $a^2(x)$, $F_{\text{гп1}}(t)$, $f(x, t)$. Для примера

выберем следующие значения коэффициентов: $a_0 = 2$; $a_2 = 0,5$; $b_1 = 0,1$; $b_2 = 0,5$. Тогда $a^2(0) = 1$; $a^2(1/2) = 15/16$; $f(0, t) = f(1/2, t) = 0,1b^{-0,1t}$; $F_{\text{гр1}}(t) = 1 - e^{-0,1t} + 1,5e^{-0,5t}$.

При выбранных коэффициентах система (15) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(0, t)}{\partial t} &= -10T(0, t) + \frac{32}{3}T\left(\frac{1}{2}, t\right) - \frac{2}{3} + \frac{23}{30}e^{-0,1t} - e^{-0,5t}, \\ \frac{\partial T\left(\frac{1}{2}, t\right)}{\partial t} &= \frac{15}{8}T(0, t) - 5T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{25}{8} + 3\frac{1}{40}e^{-0,1t} + \frac{75}{16}e^{-0,5t}. \end{aligned} \quad (18)$$

Полученная система (18) численно решена с помощью стандартного решателя в среде Matlab. Дискретизация по времени и пространственной координате проведена соответственно с шагом 0,0001 и 0,05. Полученные результаты использованы для численного решения в любой пространственной координате и в любой момент времени с помощью формулы (17), которая с учетом заданных коэффициентов имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, t) &= (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0, t) + \\ &+ \frac{16}{3}x^2(1-x^2)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)(1 - e^{-0,1t} + 1,5e^{-0,5t}). \end{aligned}$$

Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 2 (см. вклейку). При сравнении численного решения с аналитическим получена величина относительной погрешности $\delta(t, x)$ (рис. 3, см. вклейку).

Выводы

Аппроксимация дифференциального уравнения в частных производных системой обыкновенных дифференциальных уравнений позволила существенно упростить вычислительный алгоритм при условии обеспечения приемлемой точности решения.

С помощью предлагаемого метода получено решение рассматриваемой модельной задачи с погрешностью, не превышающей 0,05 %, что вполне приемлемо для выполнения инженерных расчетов в практических задачах. Умеренная точность компенсируется универсальностью полученных выражений, в которых учтены симметричные граничные условия первого, второго и третьего рода. Предлагаемый метод может быть эффективен в случае ограниченных вычислительных ресурсов, а также в задачах, требующих сверхбыстрого получения решений.

The method for studying of the dynamics of transient thermal processes, which takes into account the symmetric boundary conditions, is considered in the article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верлань А.Ф., Горошко И.О., Николаенко Ю.Е.* Компьютерное моделирование процессов передачи тепла в перспективных базовых несущих конструкциях стоечного типа с тепловыми трубами // Математичні машини і системи. — 2008. — № 2. — С. 90—99.
2. *Верлань А.Ф., Евдокимов В.Ф.* Электронное моделирование передаточных функций. — Київ : Техніка, 1970. — 232 с.
3. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов: Пер с англ. — М. : Мир, 1981. — 304 с.

Поступила 22.04.14

ФЕДОРЧУК Владимир Анатольевич, д-р техн. наук, зав. кафедрой информатики Каменец-Подольского национального университета им. Ивана Огиенко. В 1984 г. окончил Каменец-Подольский государственный педагогический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование неоднородных электромеханических систем и объектов с распределенными параметрами.

МАХОВИЧ Александр Иванович, аспирант Каменец-Подольского национального университета им. Ивана Огиенко. В 1995 г. окончил Каменец-Подольский государственный педагогический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование объектов с распределенными параметрами, программирование.



УДК 517. 983. 54; 519. 67; 539.122

В.Н. Старков, д-р физ.- мат. наук, **А.А. Семенов**, канд. физ.- мат. наук
Ин-т физики НАН Украины
(Украина, 03028, Киев, пр. Науки, 46,
тел. 5257994, 5240496, e-mail: nikol12@voliacable.com, sem@iop.kiev.ua),
Е.В. Гомонай, д-р физ.- мат. наук
Физико-технический ин-т Национального технического
университета Украины «Киевский политехнический ин-т»
(Украина, 03056, Киев, пр. Победы, 37,
тел. 2367098, e-mail: Helen.gomonay@gmail.com)

Операторное уравнение первого рода в проблеме реконструкции статистики числа фотонов квантового света

Методами вычислительной физики реализован алгоритм исследования некорректной проблемы редукции шума, связанного с потерями, темными отсчетами и фоновым излучением, в статистике фотоотсчетов квантового света. Регуляризирующий оператор в уравнении первого рода позволяет напрямую восстановить функцию распределения числа фотонов из статистики фотоотсчетов при известных параметрах шума, что подтверждено вычислительными экспериментами.

Методами обчислювальної фізики реалізовано алгоритм дослідження некоректної задачі редукції шуму, пов'язаного із втратами, темними відліками і фоновим випромінюванням, в статистиці фотовідліків квантового світла. Регуляризуючий оператор в рівнянні першого роду дозволяє пряму відновити функцію розподілу числа фотонів із статистики фотовідліків при відомих параметрах шуму, що підтверджено обчислювальними експериментами.

Ключевые слова: квантовая оптика, фотон, вероятность, некорректная задача, оператор.

В настоящее время существенно возрос интерес к исследованию процессов, свойств и явлений в квантовой физике. Одним из наиболее важных направлений как в современных технологиях, так и в фундаментальных исследованиях, является фотоэлектрическое детектирование. В текущем десятилетии особый интерес связан с детектированием, различающим от-

© В.Н. Старков, А.А. Семенов, Е.В. Гомонай, 2014

дельные количества фотонов [1], что обусловлено существенным прогрессом в области квантовой оптики и квантовой обработки информации.

В основе процесса фотодетектирования лежит использование фотоэлектрического эффекта: атомы детектора излучают электроны под воздействием света. Число электронов можно определить, в частности, по величине соответствующего фототока. В идеальной ситуации число эмитированных электронов равно числу поглощенных фотонов. Однако на практике падающий фотон поглощается лишь с определенной вероятностью η , называемой квантовым выходом детектора. В современных детекторах эта величина может достигать значений, достаточно близких к единице [1]. Проблема заключается в том, что повышение квантового выхода в большинстве детекторов ведет к возрастанию числа ложных срабатываний детектора (так называемых темных отсчетов). Подобный эффект вызывает и фоновое излучение. Такой источник приводит к независимому аддитивному пуассоновскому шуму.

Следует также заметить, что большинство современных детекторов, различающих число фотонов, основано на технологии детекторных кластеров [1, 2]. Идея заключается в разбиении исходного пучка на множество составляющих лучей, каждый из которых анализируется отдельно. По числу сработавших детекторов делается вывод о количестве поглощенных фотонов. Такая методика имеет свои недостатки. Чтобы исключить возможные ошибки, необходимо с особой тщательностью подбирать число детекторов [3, 4].

Поскольку процесс детектирования фотонов является случайным, соответствующее моделирование требует вероятностного подхода. Теория фотодетектирования [5] предопределяет основной экспериментальный результат таких исследований — функцию распределения числа фотоотсчетов P_m , которая несет в себе информацию о потерях, связанных с неидеальностью квантового выхода и наличием темных отсчетов. Для того чтобы иметь возможность анализировать непосредственно световое излучение, необходимо исключить искажающую информацию при работе с истинной функцией распределения числа фотонов p_n . Особенность такого подхода состоит в том, что исследование математической компоненты его содержательной части сопряжено с необходимостью преодоления проблемы некорректности (неустойчивости) задачи.

Физическая формулировка рассматриваемой задачи заключается в следующем [6, 7]. Распределение вероятности фотоотсчетов P_m при конечном квантовом выходе детектора η и среднем числе шумовых отсчетов

N_{nc} , связанных с темновым фототоком и фоновым излучением, определяется выражением [7, 8]

$$P_m = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{mn}(\eta, N_{nc}) p_n, \quad (1)$$

где S_{mn} — вероятность регистрации m фотоотсчетов в n -фотонном (Фокковском) состоянии; p_n — априорная (квантовая) вероятность найти это состояние. Величина S_{mn} вычисляется по формуле

$$S_{mn}(\eta, N_{nc}) = e^{-N_{nc}} N_{nc}^{m-n} \eta^n \frac{n!}{m!} L_n^{m-n}(N_{nc}(1-\eta^{-1})), \quad m \geq n,$$

$$S_{mn}(\eta, N_{nc}) = e^{-N_{nc}} (1-\eta)^{n-m} \eta^m L_m^{m-n}(N_{nc}(1-\eta^{-1})), \quad m \leq n,$$

где $L_n^\alpha(z)$ — полином Лагерра. Относительно квантовой вероятности p_n априори справедливы утверждения

$$p_n \geq 0, \quad (2)$$

$$\sum_n p_n = 1. \quad (3)$$

В результате целенаправленных поисков выражение (1) формально обращено аналитически [7]:

$$p_n = \sum_{m=0}^{+\infty} S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) P_m, \quad (4)$$

где

$$S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) = \eta^{-n} \Phi(m+1, m-n+1; N_{nc}(\eta^{-1}-1)) e^{N_{nc}} \binom{m}{n} (1-\eta^{-1})^{m-n}, \quad m \geq n,$$

$$S_{nm}^{-1}(\eta, N_{nc}) = \eta^{-n} \Phi(n+1, n-m+1; N_{nc}(\eta^{-1}-1)) e^{N_{nc}} \frac{(-N_{nc})^{n-m}}{(n-m)!}, \quad m \leq n,$$

являются элементами матрицы, обратной к матрице $\{S_{mn}\}$; $\Phi(n, m; z)$ — гипергеометрическая функция Куммера.

В двух предельных случаях выражение (4) может быть упрощено. Так, в случае отсутствия шумовых отсчетов, когда $\bar{N}_{nc} = 0$, оно имеет вид [9]

$$p_n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \eta^{-n} (1-\eta^{-1})^{n-m} P_m.$$

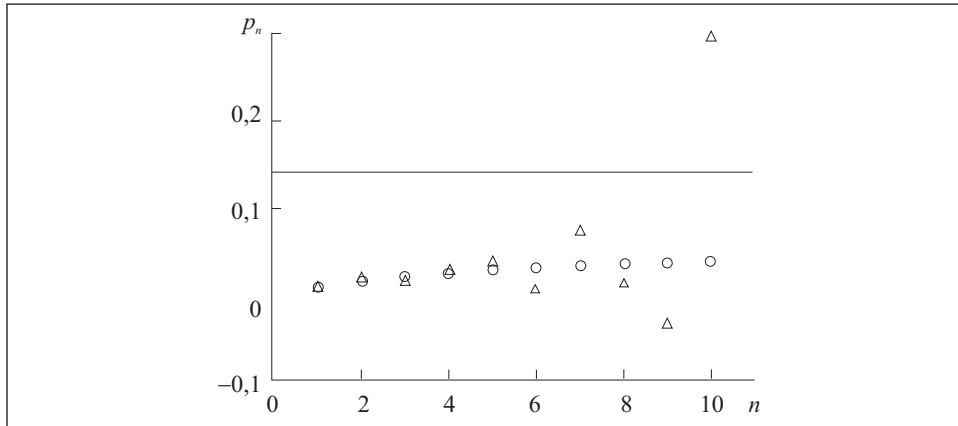


Рис. 1. Истинное распределение (o) числа фотонов p_n при хаотическом состоянии световой моды с добавленным фотоном [6] и результат прямого восстановления (Δ) числа фотонов согласно (4) при $N_{nc} = 0,748$; $\eta = 0,7764$

Во втором случае, при квантовом выходе $\eta = 1$ значение p_n определяется по формуле

$$p_n = e^{-\bar{N}_{nc}} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(-\bar{N}_{nc})^{m-n}}{(m-n)!} P_m.$$

В процессе проведения вычислительных экспериментов установлено, что выражение (4), как формальное обращение выражения (1), не обеспечивает удовлетворительных результатов в условиях реального эксперимента, поскольку малейшие погрешности в статистике фотоотсчетов P_m , связанные с экспериментальной процедурой, вызывают большие отклонения в реконструируемой статистике числа фотонов p_n (рис. 1).

Будем рассматривать метод, позволивший получить результаты [6], основа которых состоит в восстановлении статистики числа фотонов (задаваемой распределением вероятностей p_n) по измеряемой экспериментально статистике фотоотсчетов P_m . Представим математическую формулировку проблемы восстановления статистики числа фотонов. Статистика фотоотсчетов P_m связана со статистикой числа фотонов p_n операторным уравнением

$$u = Av, \quad u \in U, \quad v \in V, \tag{5}$$

где оператор A порожден матрицей $\{S_{mn}\}$ с элементами $S_{mn}(\eta, N_{nc})$ — вероятностями регистрации $m = 0, 1, 2, \dots$ фотоотсчетов при наличии $n = 0, 1, 2, \dots$ фотонов. Для обоснования этого утверждения использована следующая теорема [10].

Теорема 1. Для того чтобы матрица $\{S_{mn}\}$ представляла ограниченный линейный оператор, определенный всюду в действительном гильбертовом пространстве $V = l_2$, необходимо и достаточно выполнение при любых конечных q и r и любых $x_0, x_1, \dots, x_q; y_0, y_1, \dots, y_r$ неравенства

$$\left| \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^r S_{mn} x_n y_m \right| \leq M \left(\sum_{n=0}^q x_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^r y_m^2 \right)^{1/2},$$

где M — фиксированное число; x_0, x_1, \dots, x_q — компоненты вектора $f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e_k \in l_2$; y_0, y_1, \dots, y_r — компоненты вектора $g = \sum_{k=0}^{\infty} y_k e_k \in l_2$; $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в l_2 .

Поскольку вместо точных значений $S_{mn}(\eta, N_{nc})$ и P_m , как правило, известны лишь их приближения $\tilde{S}_{mn}(\eta, N_{nc})$ и \tilde{P}_m , при проведении вычислительных экспериментов проверке подлежит в первую очередь соблюдение неравенства

$$\left| \sum_{n=0}^q \sum_{m=0}^r \tilde{S}_{mn} x_n y_m \right| \leq M \left(\sum_{n=0}^q x_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^r y_m^2 \right)^{1/2}. \quad (6)$$

В случае подтверждения выполнения условий (6) исходную систему уравнений (1) можно записать в виде приближенного операторного уравнения с уровнем погрешности δ, h :

$$A_h v = u_\delta, \quad u_\delta \in U, \quad v \in V. \quad (7)$$

При этом $\|u - u_\delta\| \leq \delta, \|A - A_h\| \leq h$. Условия (6) будут заведомо выполнены, если окажется справедливым более лаконичное соотношение

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{S}_{mn} x_n y_m \right| = |(A_h f, g)| \leq M \|f\| \|g\|.$$

Важнейшим этапом исследования свойств линейного матричного оператора A_h является определение его компактности (вполне непрерывности). Достаточным, но не необходимым условием компактности оператора A_h является конечность его абсолютной нормы, или сходимости ряда [10]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{S}_{mn}^2 < \infty. \quad (8)$$

При соблюдении условия (8) можно утверждать, что уравнение (7) — это операторное уравнение первого рода, где $A_h \in \Lambda(V, U)$ — линейный

компактный оператор, действующий из гильбертова пространства $V = l_2$ в гильбертово пространство $U = l_2$; $u_\delta = \{\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_m, \dots\} \in U$ — заданный элемент; $v = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \in V$ — искомый элемент; $\Lambda(V, U)$ — пространство всех ограниченных линейных операторов, определенных на V .

Компактность оператора A_h имеет принципиальное значение при выборе метода и построении алгоритма решения операторного уравнения первого рода (7), так как в бесконечномерном пространстве V компактный оператор A_h не может иметь ограниченного обратного оператора A_h^{-1} в пространстве U [11]. Это означает что формальное обращение (4) или попытка поиска решения задачи (7) в виде $v = A_h^{-1} u_\delta$ не приводит к удовлетворительным результатам в условиях реального эксперимента, поскольку бесконечно малые вариации в статистике фотоотсчетов P_m , связанные с экспериментальной процедурой, приводят к сколь угодно большим отклонениям в реконструируемой статистике числа фотонов p_n . Таким образом, решение задачи (7) неустойчиво, а задача является некорректно поставленной по Адамару [12—15].

Для преодоления проблемы некорректности задачи в рассмотрение вводится регуляризирующий оператор (регуляризатор) $R_\alpha(\delta, h, A_h)$ [12] такой, что

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \sup_{\substack{A_h: \\ \|A - A_h\|_{V \rightarrow U} \leq h}} \sup_{\substack{u_\delta: \\ \|u - u_\delta\|_U \leq \delta}} \inf_{v \in A^{-1}u} \|v - R_\alpha(\delta, h, A_h) u_\delta\|_V = 0,$$

где $A^{-1}u$ — полный прообраз элемента u ; α — параметр регуляризации.

При проведении экспериментальных исследований в лазерной физике, нелинейной оптике, квантовой оптике вместо точных данных задачи A и u известны лишь их приближения с уровнем погрешности δ, h : $\|u - u_\delta\| \leq \delta$, $\|A - A_h\| \leq h$, т.е. вместо (1) решается приближенное операторное уравнение $A_h v = u_\delta$, $u_\delta \in U$, $A_h \in \Lambda(V, U)$.

Конструктивное решение задачи заключается в аппроксимации нормального решения уравнения (5) (или решения (5) с наименьшей нормой в пространстве V) $v^+ \in \text{Range}(A^+) = \text{Range}(A^*) = \text{Ker}(A)^\perp$ приближенным решением уравнения (7). При этом следует учесть, что A^+ — линейный оператор, псевдообратный к оператору A , такой, что $A^+ : \text{Range}(A^+) = \text{Range}(A^*) = \text{Ker}(A)^\perp$, A^+ — непрерывный оператор, если $\text{Range}(A) = \overline{\text{Range}(A)}$.

Справедливо следующее утверждение [16]: нормальное решение $v^+ = A^+ u$ ($u \in \text{Range}(A) \oplus \overline{\text{Range}(A)^\perp}$) является единственным решением уравнения $A^* A v = A^* u$ ($v \in \text{Range}(A^*)$).

Как правило, математические модели (5) в экспериментальных исследованиях лазерной физики, нелинейной оптики, квантовой оптики обладают таким свойством, что $\text{Range}(A) \neq \text{Range}(A)$ (например, A — линейный компактный оператор), т.е. решение операторного уравнения $Av = u$ представляет собой некорректно поставленную задачу. Решить задачу устойчивого приближения к точному решению уравнения (5) при неточно заданных исходных данных $u_\delta \in U, A_h \in \Lambda(V, U), \|u - u_\delta\| \leq \delta, \|A - A_h\| \leq h$ с известными δ и h можно лишь одним из методов регуляризации. Среди них наиболее известен метод, теоретические основы которого были заложены в работах А.Н. Тихонова. В соответствии с этим методом для решения (7) вводится сглаживающий функционал (параметрический функционал Тихонова) [12]:

$$\Phi_\alpha[v, u_\delta] = \|A_h v - u_\delta\|_U^2 + \alpha \Omega[v], \quad (9)$$

где $\Omega[v]$ — стабилизирующий функционал (обычно $\Omega[v] = \|v\|_V^2$); $1 > \alpha > 0$ — параметр регуляризации; $\|A_h v - u_\delta\|_U^2$ — невязка уравнения (7) на элементе v . Определяется элемент v_α такой, что функционал (9) имеет на нем минимальное значение, т.е.

$$\Phi_\alpha[v_\alpha, u_\delta] = \inf_{v \in V} \Phi_\alpha[v, u_\delta]. \quad (10)$$

Если в (9) $\Omega[v] = \|v\|_V^2$, то уравнение Эйлера принимает достаточно простой вид: $\alpha v_\alpha + A_h^* A_h v_\alpha = A_h^* u_\delta$. При этом

$$v_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^* u_\delta = R_\alpha u_\delta, \quad (11)$$

где $R_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^*$. При $\delta, h \rightarrow 0$ должно и $\alpha \rightarrow 0$ в силу определения регуляризирующего оператора. Поэтому в качестве решения задачи (10) следует принять

$$v^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* u \quad (12)$$

при $\Omega[v] = \|v\|_V^2$. Решение (12) — нормальное решение, т.е. при точных значениях v и A из всех решений уравнения $Av = u, u \in U, v \in V$, методом Тихонова выбирается нормальное решение. Формула (12) может быть записана в виде $v^+ = A^+ u$, где $A^+ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\alpha E + A^* A)^{-1} A^*$ — оператор, псевдообратный к A . Если $\delta \neq 0$ (или) $h \neq 0$, то метод дает решение v_α , которое является приближением к нормальному решению v^+ . Справедливо следующее утверждение [17].

Теорема 2. Пусть $v^+ \in V$ — нормальное решение уравнения (5). Согласно методу (11), если $\alpha(\delta, h) \rightarrow 0$ так, что

$$\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \frac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\delta, h)} = 0,$$

то $\lim_{\delta, h \rightarrow 0} \|v_{\alpha(\delta, h)} - v^+\| = 0$.

Как правило, для решения сложной задачи имеется несколько методов. Это в полной мере относится и к некорректно поставленной задаче. В данном случае следует сослаться на важный класс регулярирующих алгоритмов, предложенный А.В. Бакушинским [17]. Идея подхода заключается в построении параметрического семейства функций $G = \{g_\alpha(\lambda), \alpha \in (0, 1)\}$, измеримых по Борелю на полуоси $[0, \infty)$ и удовлетворяющих при $\forall \nu \in [0, \nu_*]$ условиям

$$\sup_{0 \leq \lambda < \infty} \lambda^\nu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \leq \chi_\nu \alpha^\nu, \tag{13}$$

$$\sup_{0 \leq \lambda < \infty} \sqrt{\lambda} |g_\alpha(\lambda)| \leq \chi_* \alpha^{-1/2}, \tag{14}$$

где ν_*, χ_ν, χ_* — некоторые положительные константы, не зависящие от α . Система функций G называется порождающей для метода регуляризации

$$R = R_\alpha = g_\alpha(A_h^* A_h) A_h^*, \quad g_\alpha \in G. \tag{15}$$

Параметр ν_* функции g_α называют квалификацией метода R_α , а параметр $\alpha = \alpha(\delta, h)$ — параметром регуляризации. Регуляризаторы (15) позволяют достичь оптимального порядка точности на классах уравнений (5) с истокорпредставимыми решениями.

При исследовании задачи построения оптимальных методов решения некорректного уравнения (5) в рассмотрение вводится некоторое центрально-симметричное множество M , которое в теории некорректных задач имеет вид [18]

$$M_{\nu, \rho}(A) := \{z: z = |A|^\nu w, \|w\|_V \leq \rho\},$$

где $\nu > 0, \rho > 0, |A| = (A^* A)^{1/2}$. Элементы множества $M_{\nu, \rho}(A)$ называются истокорпредставимыми. Известно, что если уравнение (5) имеет истокорпредставимое решение $v^+ \in M_{\nu, \rho}(A)$, то v^+ — наименьшее в метрике V решение (5). Кроме того, для $\forall \nu > 0$ справедливо соотношение $\text{Range}(|A|^\nu) = \text{Range}(A^*)$, т.е. элементы $|A|^\nu w$ образуют всюду плотное множество в

подпространстве $\text{Ker}(A)^\perp$, которому принадлежит нормальное решение уравнения (5).

Множество регуляризаторов $R_0 = \{g_\alpha(A_h^* A_h) A_h^*, g_\alpha \in G\} \subset R$, включает в себя большинство известных методов регуляризации [18].

1. Регуляризатор метода Тихонова $R_\alpha = (\alpha E + A_h^* A_h)^{-1} A_h^*$ является элементом множества R_0 с порождающей функцией $g_\alpha(\lambda) = (\alpha + \lambda)^{-1}$ и параметрами $\chi_* = 1/2, \chi_\nu = \nu^\nu (1-\nu)^{(1-\nu)}$. Квалификация метода Тихонова $\nu_* = 1$.

2. Обобщенный регуляризатор метода Тихонова

$$R_\alpha = (\alpha^{q+1} E + (A_h^* A_h)^{q+1})^{-1} (A_h^* A_h)^q A_h^* \in R_0, q \geq -1/2 \quad (16)$$

порождается функцией $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q (\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})^{-1}$ при $\nu_* = q+1$.

3. Нестационарная итерационная схема метода Тихонова. Задается $\nu_0 = 0$. Последовательно находятся элементы ν_k ($k = 1, 2, \dots$) как решения уравнений

$$\alpha_k \nu_k + A_h^* A_h \nu_k = \alpha_k \nu_{k-1} + A_h^* u_\delta, \\ (0 < \alpha_k < \alpha_{k-1}, \text{ например, } \alpha_k = q^k, 0 < q < 1). \quad (17)$$

Метод (17) порождается функцией

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \prod_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \lambda} \right), \lambda \neq 0,$$

и удовлетворяет условиям (13), (14) для $\chi_\nu = O(\nu^\nu)$ при $0 < \nu \leq 1$ и $\chi_\nu = O(c^{\nu^\nu})$ при $1 < \nu$. Квалификация метода $\nu_* = \infty$.

4. Неявная итерационная схема (метод Факеева—Ларди). Задается $\nu_0 = 0$. Последовательно находятся элементы ν_k из уравнения

$$\mu \nu_k + A_h^* A_h \nu_k = \mu \nu_{k-1} + A_h^* u_\delta, k = 1, 2, \dots (0 < \mu = \text{const}). \quad (18)$$

Итерационный метод (18) является регуляризирующим (15), если

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^{1/\alpha} \right), \lambda \neq 0, 1/\alpha = k = 1, 2, \dots$$

Условия (13), (14) выполняются при $\chi_* = \mu^{-1/2}, \chi_\nu = (\nu\mu)^\nu$ и $k \geq \nu$. Квалификация метода $\nu_* = \infty$.

5. Метод асимптотической регуляризации, порождающая функция которого имеет вид

$$g_t(\lambda) = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda} ds = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-t\lambda}),$$

так что $1 - \lambda g_t(\lambda) = e^{-t\lambda}$, а приближенное решение определяется формулой

$$v_t = (E - A_h^* A_h g_t(A_h^* A_h)) v_0 + g_t(A_h^* A_h) A_h^* u_\delta \quad (19)$$

для произвольных $t = \alpha^{-1}$. Условия (13), (14) в методе (19) выполняются при $\chi_* = 0,6382$, $\chi_v = (ve)^v$. Квалификация метода $v_* = \infty$.

6. Явная итерационная схема (метод Ландвебера). Задается $v_0 = 0$. Последовательно находятся элементы v_k из уравнения

$$v_k = (E - \mu A_h^* A_h) v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta, \quad k=1, 2, \dots \quad (0 < \mu < 2/\|A_h\|^2). \quad (20)$$

Итерационный метод (20) порождается функцией

$$g_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda} (1 - (1 - \mu\lambda)^{1/\alpha}), \quad \lambda \neq 0,$$

где параметр регуляризации α таков, что величина $1/\alpha$ принимает лишь целочисленные значения $1/\alpha = k = 1, 2, \dots$. Условия (13), (14) выполняются при $\chi_* = \mu^{1/2}$, $\chi_v = (v/(\mu e))^v$. Квалификация метода $v_* = \infty$.

Основной результат теории некорректных задач по вычислению точных оценок приближения для уравнения (7) можно сформулировать следующим образом. Для уравнения (7) с приближенно заданными оператором A_h и правой частью u_δ при $\forall v > 0$ порядок сходимости к истокорреставляемому нормальному решению $v^+ \in M_{v,\rho}(A)$ не превышает величины

$$\frac{v}{v+1}, \quad \text{т.е. } \|v^+ - R_\alpha u_\delta\| = O((\delta+h)^{v/(v+1)}). \quad \text{Оптимальный порядок точности}$$

при указанных предположениях априори обеспечивает выбор параметра регуляризации α , удовлетворяющего условию $\alpha = c(\delta+h)^{2/(v+1)}$, $c = \text{const} > 0$.

В условиях отсутствия информации о точном значении параметра v , определяющего множество $M_{v,\rho}(A)$, при практическом решении задачи (7) значение параметра регуляризации определяется непосредственно в процессе решения, т.е. осуществляется апостериорный выбор параметра α . Один из наиболее эффективных и распространенных способов апостериорного выбора параметра регуляризации α при решении (5) методом Тихонова (11) (в случае, когда $A = A_h$, $h=0$), называемый принципом невязки, предложен и обоснован В.А. Морозовым [19]. В соответствии с принципом невязки параметр α выбирается из условия

$$\|A v_\alpha - u_\delta\| = \delta, \quad (21)$$

где $v_\alpha = (\alpha E + A^* A)^{-1} A^* u_\delta$. На практике α выбирают так, чтобы функционал $\|A v_\alpha - u_\delta\|$ удовлетворял условию

$$\|A v_\alpha - u_\delta\| \in [a_1 \delta, a_2 \delta], \quad (22)$$

где $1 < a_1 < a_2$ — некоторые заранее заданные числа. В случае неточно заданного оператора A_h в работе [20] был предложен обобщенный принцип невязки, в соответствии с которым требуется выполнение условия

$$\|A_h v_\alpha - u_\delta\| \in [a_1(\delta + \|v_\alpha\| h), a_2(\delta + \|v_\alpha\| h)]. \quad (23)$$

Известно, что регуляризирующие алгоритмы (15), удовлетворяющие условиям (13), (14) совместно с принципом невязки (22) или обобщенным принципом невязки (23), позволяют найти решение задачи (5) с оптимальной по порядку точностью на множестве $M_{\nu, \rho}(A)$ для всех ν таких, что $0 < \nu < (2\nu_* - 1)$.

Для решения задачи (7) М. Defriese и С. De Mol объединили итерационный метод Ландвебера с апостериорным выбором параметра регуляризации α (числа итераций $1/\alpha = k_*$) [21]. Суть правила останова заключается в следующем. Итерационный процесс (11) продолжается, если

$$\|A_h v_k - u_\delta\| > \frac{2\delta}{2\delta - \mu \|A_h\|^2},$$

и прекращается, если неравенство

$$\|A_h v_{k_*} - u_\delta\| \leq \frac{2\delta}{2\delta - \mu \|A_h\|^2} \quad (24)$$

выполнено впервые. В качестве приближенного решения уравнения (7) принимается v_{k_*} .

Особенностью принципов (21), (22) и (24), как и многих других, является то обстоятельство, что в них величина погрешности δ правой части u_δ в уравнении (7) присутствует в явном виде. Однако в научных экспериментальных исследованиях в силу их уникальности определение погрешности δ нередко носит достаточно субъективный характер, как и выбор величин a_1 и a_2 в (22) или (23). Значительный уровень субъективности присутствует и при выборе метода регуляризации. Важную роль в этом случае играет наличие априорной или апостериорной информации о решении задачи [14], а также опыт проведения вычислительных экспериментов.

Для приближенного решения уравнения (7) в рассматриваемой конкретной задаче выбран итерационный метод Ландвебера (20):

$$v_k = (E - \mu A_h^* A_h) v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta, \\ k = 1, 2, \dots \quad (0 < \mu < 2/\|A_h\|^2), \quad v_0 = 0.$$

Весомыми аргументами в пользу такого выбора послужили простота программной реализации метода, высокий уровень компьютерной совместимости.

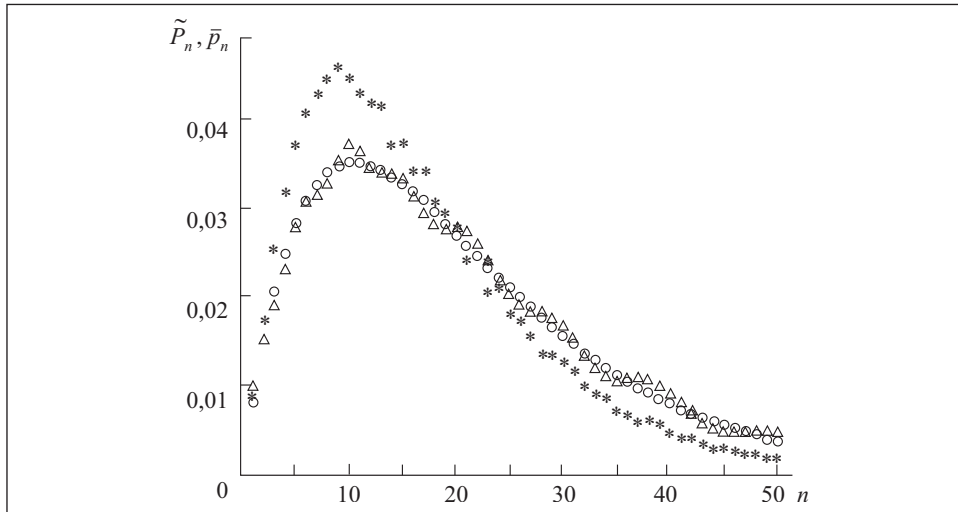


Рис. 2. Результаты вычислительного эксперимента: Δ — функция распределения числа фотонов p_n ; * — реконструированная функция распределения числа фотоотчетов \tilde{P}_n для хаотического состояния световой моды с добавленным фотоном [6] методом регуляризации Ландвебера; o — истинная функция распределения числа фотонов \bar{p}_n

тимости и достаточный уровень эффективности как по числу итераций, так и по точности приближенного решения. При реализации метода Ландвебера необходимо определение параметра регуляризации α как момента останова итерационного процесса.

Предложенный подход к апостериорному определению числа итераций k_* , основан на использовании соотношения (3). При этом вводится функционал

$$\varphi [w] := \left| \sum_{n=0}^{\infty} |w_n| - 1 \right|, \quad (25)$$

позволяющий построить алгоритм решения (7) с использованием (20).

На первом этапе фиксируется число итераций m_1 , затем определяется множество $V_{m_1} = \{v_k = (E - \mu A_h^* A_h) v_{k-1} + \mu A_h^* u_\delta, k = 1, 2, \dots, m_1\}$ приближенных решений уравнения (7). Множество V_{m_1} рассматривается как область определения функционала (25) $V_{m_1} = D_1(\varphi)$. Осуществляя в ходе вычислительного эксперимента анализ области значений функционала (25) и невязки $\|A_h v_k - u_\delta\|$ для различных m_1 , принимаем за искомое следующее решение:

$$v_{k_*} = \arg \min_{k=m_0, m_1} \| \|v_k\|_1 - 1 \|,$$

где $\|\cdot\|_1$ норма в пространстве l_1 .

Для проверки работоспособности предложенного алгоритма проведен вычислительный эксперимент с уравнением (7) при наличии дополнительного условия (2). На рис. 2 приведены результаты вычислительного эксперимента, в процессе выполнения которого выяснилось, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{S}_{mn}^2 = 14,195$$

при заданных значениях $N_{nc} = 0,75$, $\eta = 0,77$, $\mu = 0,6$. Рабочее число итераций в этом примере $k_* = 101$, величина относительной невязки $(\|A_h v_{k_*} - u_\delta\| / \|u_\delta\|) = 0,0201875$. Относительная погрешность аппроксимации решения v^+ составила $(\|v_{k_*} - v^+\| / \|v^+\|) = 0,041438$.

Выводы

Предложено каноническое представление бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, описывающей регистрируемый вектор плотности вероятностей фотоотсчетов с помощью вектора плотности квантовых вероятностей фотонов, в виде операторного уравнения первого рода. Указаны необходимые и достаточные условия линейности и непрерывности оператора, определенного во всем действительном гильбертовом пространстве l_2 . Определено достаточное условие компактности исследуемого оператора. Представлен перечень методов регуляризации исходной некорректно поставленной задачи. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Using methods of computational physics the algorithm is implemented that allows investigating the ill-posed problem of noise reduction, connected with losses, dark counts and background radiation in photocounting statistics of quantum light. The regularizing operator in operator equation of the first kind allows direct restoration of photon distribution function from photon-number statistics with known noise parameters. This is confirmed by computational experiments.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waks E., Diamanti E., Sanders B.C. et al. Direct Observation of Non-classical Photon Statistics in Parametric Downconversion// Phys. Rev. Lett. — 2004. — 92. — 113602.
2. Achilles D., Silberhoen C., Sliwa C. et al. Fiber-assisted Detection with Photon Number Resolution// Opt. Lett. — 2003. — 28 (23) : 2387-9.
3. Sperling J., Vogel W. and Agarwal G.S. Correlation Measurements with on-off Detectors// Phys. Rev. — 2013. — A 88. — 043821.
4. Sperling J., Vogel W. and Agarwal G.S. Sub-Binomial Light// Phys. Rev. Lett. — 2012. — 109. — 093601.
5. Mandel L. and Wolf E. Optical Coherence and Quantum Optics. — Cambridge University Press, 1995.

6. Starkov V.N., Semenov A.A., Gomonay H.V. Numerical Reconstruction of Photon-number Statistics from Photocounting Statistics: Regularization of an Ill-posed Problem // Phys. Rev. — 2009. — A 80. — 013813.
7. Semenov A.A., Turchin A.V., Gomonay H.V. Detection of Quantum Light in the Presence of Noise // Phys. Rev. — 2008. — A 78. — 055803.
8. Welsch D.-G., Vogel W., Opatrny T. Homodyne Detection and Quantum State Reconstruction // Progress in Optics. — 1999. — 39. — P. 63. 2. ... A 261, 20.
9. Mandel L. Squeezed States and Sub-Poissonian Photon Statistics // Phys. Rev. Lett. — 1982. — 49. — 136.
10. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М. : Наука, 1966. — 544 с.
11. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1972. — 496 с.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1966. — 288 с.
13. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Спр. пособие. — Киев : Наук. думка. — 1986. — 544 с.
14. Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. — Екатеринбург: Уральская издательская фирма «Наука», 1993. — 263 с.
15. Сизиков В.С. Обратные прикладные задачи и MatLab: Учеб. пособие. — СПб. : «Лань», 2011. — 256 с.
16. Lowes A.K. Inverse und schlecht gestellte Probleme. — Stuttgart: Teubner, 1989. — 205 p.
17. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989. — 199 с.
18. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. — М. : Наука, 1986. — 182 с.
19. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 359 с.
20. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки. — Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1973. — 13, № 2. — С. 294—302.
21. Defrise M. and De Mol C. A Note on Stopping Rules for Iterative Methods and Filtered svd // Inverse Problems: An Interdisciplinary Study. P.C. Sabatier, editor. Academic Press, 1987. — P. 261 — 268.

Поступила 26.02.14

СТАРКОВ Вячеслав Николаевич, д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. отдела теоретической физики Ин-та физики НАН Украины. В 1964 г. окончил Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева. Область научных исследований — некорректные и нелинейные проблемы вычислительной физики.

СЕМЕНОВ Андрей Александрович, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела теоретической физики Ин-та физики НАН Украины. В 1994 г. окончил Киевский национальный университет им. Т. Шевченко. Область научных исследований — квантовая оптика.

ГОМОНАЙ Елена Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор Физико-технического ин-та Национального технического университета Украины «Киевский политехнический ин-т». В 1985 г. окончила Московский физико-технический ин-т. Область научных исследований — квантовая оптика.

УДК 608.03

Р.А. Абдикаримов, канд. техн. наук
Ташкентский финансовый ин-т
(Республика Узбекистан, 100084, Ташкент, Кичик халка йули, 7,
тел. (99871) 2346641, e-mail: rabdikarimov@mail.ru)

Моделирование динамической устойчивости вязкоупругих ортотропных прямоугольных пластин переменной жесткости

На основе гипотезы Кирхгофа—Лява в геометрически нелинейной постановке приведена математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругих прямоугольных ортотропных пластин переменной жесткости с учетом распространения упругих волн. С помощью метода Бубнова—Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогиба и перемещений, задача сведена к решению систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рассмотрено влияние вязкоупругих свойств материала и изменения толщины на процесс динамической устойчивости ортотропной пластины.

На основі гіпотези Кірхгофа—Лява в геометрично нелінійній постановці наведено математичну модель задачі про динамічну стійкість в'язкопружних прямокутних ортотропних пластин змінної жорсткості з урахуванням розповсюдження пружних хвиль. За допомогою метода Бубнова—Гальоркіна, базованого на багаточленній апроксимації прогибу і переміщень, задачу зведено до розв'язку систем нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Розглянуто вплив в'язкопружних властивостей матеріалу та зміни товщини на процес динамічної стійкості ортотропної пластини.

Ключевые слова: математическая модель, вязкоупругость, ортотропность, динамическая устойчивость, интегро-дифференциальное уравнение, метод Бубнова—Галеркина.

В различных областях техники широко внедряются пластины и оболочки переменной жесткости. Это связано, прежде всего, с предъявляемыми требованиями к прочности, долговечности, а также к дизайну тонкостенных элементов современных конструкций. Наряду с тонкостенными элементами конструкций из традиционных металлических материалов широко используются конструкции из композиционных материалов, что приводит к необходимости изучения ортотропных или, в общем случае, анизотропных пластин и оболочек.

Такие задачи следует описывать с помощью моделей теории пластин и оболочек в классической и уточненной постановках. Исследования плас-

© Р.А. Абдикаримов, 2014

тин и оболочек переменной жесткости представляют собой достаточно сложную задачу, а иногда связаны с непреодолимыми трудностями. С одной стороны, требуется решение довольно громоздких уравнений, получаемых посредством математического моделирования, при стремлении отразить реальную механическую сущность процесса. С другой стороны, для решения полученных уравнений отсутствуют подходящие универсальные численные методы и единые вычислительные алгоритмы. Применение современных компьютеров и программных продуктов для решения задач динамики пластин и оболочек переменной жесткости способствует более широкому использованию численных методов.

Разработка математических моделей, вычислительных алгоритмов и программных средств для решения задач динамики вязкоупругих ортотропных элементов тонкостенных конструкций переменной жесткости является актуальной проблемой. Исследованию колебаний и динамической устойчивости элементов тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек переменной толщины в геометрически нелинейной постановке при учете вязкоупругих свойств материала посвящены работы [1—8].

Исследуем влияние вязкоупругих свойств материала и изменения толщины на процесс динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости.

Математическая модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости. Построим математическую модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой прямоугольной пластины ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) переменной толщины $h = h(x, y)$ в геометрически нелинейной постановке согласно классической теории Кирхгофа—Лява. Предположим, что вязкоупругая пластина изготовлена из материала, обладающего ортотропными свойствами, нагружена поперечной нагрузкой q и подвергается быстровозрастающему сжатию вдоль стороны a силой $P(t) = \upsilon t$, где υ — скорость нагружения.

В этом случае физическую зависимость между напряжениями σ_x , σ_y , τ_{xy} и деформациями ε_x , ε_y , γ_{xy} запишем в виде [9, 10]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}(1 - \Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1 - \Gamma_{12}^*) \varepsilon_y, \\ (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2), \tau_{xy} &= 2B(1 - \Gamma^*) \gamma_{xy}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Γ^* , Γ_{ij}^* — интегральные операторы с ядрами релаксации соответственно $\Gamma(t)$ и $\Gamma_{ij}(t)$,

$$\Gamma^* \varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau; \quad \Gamma_{ij}^* \varphi = \int_0^t \Gamma_{ij}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad i, j = 1, 2;$$

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}; \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}; \quad B_{12} = B_{21} = \mu_1 B_{22} = \mu_2 B_{11}; \quad B = \frac{G}{2};$$

E_1, E_2 — модули упругости в направлении осей x и y ; G — модуль сдвига; μ_1, μ_2 — коэффициенты Пуассона. Здесь и в дальнейшем символы $x \leftrightarrow y$, $1 \leftrightarrow 2$ указывают на то, что остальные соотношения получаются круговой подстановкой индексов.

Связь между деформациями в срединной поверхности $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ и перемещениями u, v, w по направлениям x, y, z с учетом начальных непрямолинейностей представим в виде [11]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y},$$
(2)

где $w_0 = w_0(x, y)$ — начальный прогиб пластины. Изгибающие M_x, M_y и крутящие H моменты с учетом (2) имеют вид [9, 10]

$$M_x = -\frac{h^3}{12} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2} \right], \quad (x \leftrightarrow y, 1 \leftrightarrow 2),$$

$$H = -\frac{Bh^3}{3} (1-\Gamma^*) \frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial x \partial y}.$$
(3)

Подставляя (1) и (3) в уравнения движения [11]

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

получаем систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial h}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\
 & \quad h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + \\
 & + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (4) \\
 & D \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial x^4} + (8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
 & \quad \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 (w-w_0)}{\partial y^4} \right] + \frac{\partial^4 D}{\partial x^2} \left(B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x^2} + \right. \\
 & \quad \left. + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial D}{\partial y} \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 (w-w_0)}{\partial y^3} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + \right. \\
 & \quad \left. + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 (w-w_0)}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial y^2} + \right. \\
 & \quad \left. + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x^2} \right] + 8 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 (w-w_0)}{\partial x \partial y} - \\
 & \quad - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] + \frac{\partial h}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} \right\} - \\
 & \quad + h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial y} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] \right\} - h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + \\
 & \quad + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] - 4h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B(1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + P(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
 \end{aligned}$$

Полученная математическая модель (4) с соответствующими граничными и начальными условиями учитывает одновременно вязкоупругие и ортотропные свойства материала, а также переменность толщины.

Следует заметить, что если при решении задач динамики вязкоупругих систем в изотропной постановке в системе интегро-дифференциальных уравнений участвует только одно ядро релаксации с тремя различными реологическими параметрами, то в ортотропной постановке согласно гипотезе Кирхгофа—Лява принимают участие пять различных ядер с 15-ю реологическими параметрами вязкости. При расчетах в качестве ядер релаксации $\Gamma(t), \Gamma_{ij}(t), i, j = 1, 2$, используются сингулярные ядра Колтунова—Ржаницына [10]:

$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1} \quad (0 < \alpha < 1), \quad \Gamma_{ij}(t) = A_{ij} e^{-\beta_{ij} t} t^{\alpha_{ij}-1} \quad (0 < \alpha_{ij} < 1).$$

Дискретная модель задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости. Наиболее эффективным методом построения дискретной модели нелинейных задач динамики наследственной теории вязкоупругости является вариационный метод Бубнова—Галеркина, с помощью которого получим основные разрешающие интегро-дифференциальные уравнения данной задачи.

Пусть зависимость изменения толщины имеет вид $h = 1 + \alpha^* x$, $h_0 = h(0) = \text{const}$, где α^* — параметр изменения толщины. Решение системы (4), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать относительно перемещений u и v , а также прогиба w в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \phi_{nm}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y),$$

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y). \quad (5)$$

Подставляя (5) в систему уравнений (4) и выполняя процедуру Бубнова—Галеркина, с учетом безразмерных величин $u/h_0, v/h_0, w/h_0, w_0/h_0, x/a, y/b, h/h_0, \lambda = a/b, \delta = b/h_0, t^* = P/P_{кр} = \nu t/P_{кр} = \omega t/\sqrt{S} = P^*/P_{кр}^*$,

$$P^* = \frac{P}{E} \left(\frac{b}{h_0} \right)^2, \quad q^* = \frac{q}{E} \left(\frac{b}{h_0} \right)^4, \quad S = P_{кр}^{*3} \left(\frac{\pi c E h_0^3}{\nu b^4} \right)^2$$

и при сохранении прежних обозначений получаем следующую систему основных разрешающих нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{klmn} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{ [(1-\Gamma_{11}^*) d_{1klmn} + (1-\Gamma^*) d_{2klmn}] u_{nm} + \right.$$

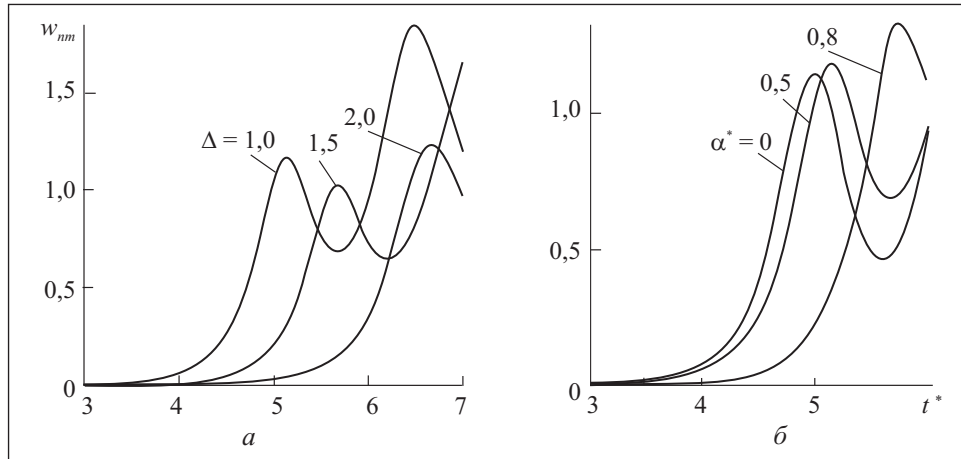
$$\begin{aligned}
 & + \left[(1-\Gamma_{12}^*) d_{3klm} + (1-\Gamma^*) d_{4klm} \right] v_{nm} \} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M [(1-\Gamma_{11}^*) d_{7klmij} + \\
 & \quad + (1-\Gamma_{12}^*) d_{8klmij} + (1-\Gamma^*) d_{9klmij}] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \} = 0, \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{klm} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \{ [(1-\Gamma_{21}^*) e_{1klm} + (1-\Gamma^*) e_{2klm}] u_{nm} + \right. \\
 & \quad + \left. [(1-\Gamma_{22}^*) e_{3klm} + (1-\Gamma^*) e_{4klm}] v_{nm} \} + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M [(1-\Gamma_{22}^*) e_{7klmij} + \right. \\
 & \quad \left. + (1-\Gamma_{21}^*) e_{8klmij} + (1-\Gamma^*) e_{9klmij}] (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) \} = 0, \\
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{klm} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M [(1-\Gamma_{11}^*) f_{5klm} + (1-\Gamma_{12}^*) f_{6klm} + (1-\Gamma_{22}^*) f_{7klm} + \\
 & \quad + (1-\Gamma_{21}^*) f_{8klm} + (1-\Gamma^*) f_{9klm}] (w_{nm} - w_{0nm}) + \eta_3 \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{klm}^* w_{nm} t^* - \\
 & - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \{ [(1-\Gamma_{11}^*) \xi_{1klmij} + (1-\Gamma_{21}^*) \xi_{2klmij} + (1-\Gamma^*) \xi_{3klmij}] u_{ij} + \right. \\
 & \quad + \left. [(1-\Gamma_{22}^*) \xi_{4klmij} + (1-\Gamma_{12}^*) \xi_{5klmij} + (1-\Gamma^*) \xi_{6klmij}] v_{ij} \} + \right. \\
 & \quad + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \{ [(1-\Gamma_{11}^*) g_{5klmijrs} + (1-\Gamma_{12}^*) g_{6klmijrs} + (1-\Gamma_{22}^*) g_{7klmijrs} + \\
 & \quad \left. + (1-\Gamma_{21}^*) g_{8klmijrs} + (1-\Gamma^*) g_{9klmijrs} \} (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) \} = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где постоянные коэффициенты связаны с координатными функциями и их производными; $c = \sqrt{\frac{E_1 E_2}{\rho}}$ — скорость звука в материале пластины;

$\omega = \sqrt{\pi^2 \frac{\sqrt{E_1 E_2} h^2 P_{кр}^*}{\rho b^4}}$; $P_{кр}$ — статическая критическая нагрузка; ρ — плот-

ность материала пластины. На основе разработанного алгоритма составлена программа на языке Delphi.

Расчет деформирования вязкоупругой ортотропной прямоугольной пластины переменной жесткости. Интегрирование системы (6) выполнено с помощью численного метода, основанного на использовании



Зависимость прогиба пластины от времени при изменении параметров Δ (а) и α^* (б)

квадратурных формул [12, 13]. Как и в работе [11], в качестве критерия, определяющего критическое время и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине пластины h_0 . В качестве параметра, определяющего устойчивость пластины, принят коэффициент динамичности K_d , равный отношению динамической критической нагрузки к эйлеровой статической.

На рисунке приведены результаты расчетов динамической устойчивости пластины из неоднородного вязкоупругого материала при различных физических и геометрических параметрах. Изучено влияние неоднородных свойств материала на процесс устойчивости пластины. Как видно из рисунка а, увеличение параметра $\Delta = \sqrt{E_1/E_2}$, определяющего степень анизотропии, приводит к более позднему интенсивному возрастанию прогибов и соответственно увеличению критического значения K_d . Аналогичные результаты для вязкоупругой пластины постоянной толщины получены в работе [14].

Результаты исследования влияния изменения толщины пластины α^* на динамическую устойчивость приведены на рисунке б. При значениях $\alpha^* = 0; 0,5; 0,8$ коэффициент динамичности K_d равен соответственно 4,85; 4,97; 5,52. Напомним, что увеличение параметра α^* влечет за собой увеличение толщины пластины. Вычисления выполнены при равных объемах пластин постоянной и переменной толщины. Из рисунка видно, что с увеличением толщины пластины значение K_d увеличивается.

Выводы

Разработанный вычислительный алгоритм позволяет исследовать нелинейные задачи динамики вязкоупругих систем переменной жесткости.

Созданный комплекс прикладных программ на языке Delphi дает возможность получить решения задач в числовом и графическом виде.

Исследование задачи о динамической устойчивости вязкоупругой ортотропной пластины переменной жесткости на основе многочленной аппроксимации прогибов позволило установить, что изменение толщины пластины по различным законам приводит к уменьшению критической нагрузки в пределах от 20 до 50 %, а учет вязких свойств материала — к уменьшению коэффициента динамичности на 20—40 %.

Based on the Kirchhoff—Love hypothesis a mathematical model of the problem on dynamic stability of visco-elastic rectangular orthotropic plates of variable rigidity is presented in geometric nonlinear posing with respect to propagation of elastic waves. The problem is reduced to solution of the system of nonlinear integro-differential equations with variable coefficient with the help of Bubnov—Galyorkin method based on the polynomial approximation of a sagging and translations. The effect of visco-elastic properties of material and thickness changes on the process of dynamic stability of the orthotropic plate has been considered.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электрон. моделирование. — 2010. — **32**. — № 2. — С. 3—14.
2. Абдикаримов Р.А., Жгуты В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. — 2010. — **23**. — № 6. — С. 38—47.
3. Абдикаримов Р.А. Нелинейные колебания вязкоупругих пластин с переменной жесткостью // ДАН РУз. — 2010. — № 4. — С. 40—42.
4. Абдикаримов Р.А., Жгуты В.М. Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. — 2011. — **24**. — № 6. — С. 12—22.
5. Abdikarimov R.A. Numerical Research of Nonlinear Vibrations of Isotropic Viscoelastic Plates with Variable Rigidity by the Method of Computer Simulation // Social and Natural Sciences Journal. — 2011. — Vol. 3. — P. 46—49.
6. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Моделирование колебательных процессов вязкоупругих ортотропных пластин с переменной жесткостью // Mechanics. Proc. of National Academy of Sciences of Armenia. — 2011. — № 4 (64). — P. 30—38.
7. Абдикаримов Р.А., Голоскоков Д.П. Численное исследование нелинейных колебаний вязкоупругих пластин переменной толщины // Журнал Университета водных коммуникаций. — 2011. — № 2. — С. 102—107.
8. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Исследование вязкоупругих круговых цилиндрических панелей переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — **5**. — № 1. — С. 11—18.

9. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
10. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. — М. : Высшая школа, 1976. — 276 с.
11. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972. — 432 с.
12. *Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем ИДУ, встречающихся в задачах вязкоупругости // ПММ. — 1987. — № 5 (51). — С. 867—871.
13. *Эшматов Х.* Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем. Автореферат дисс... д-ра тех. наук. — Ин-т проблем моделирования в энергетике НАН Украины. — Киев, 1991. — 40 с.
14. *Eshmatov V.Kh.* Nonlinear Vibrations and Dynamic Stability of Viscoelastic Orthotropic Rectangular Plate // Journal of Sound and Vibration. — 2007. — Vol. 300. — P. 709—726.

Поступила 22.01.14;
после доработки 07.04.14

АБДИКАРИМОВ Рустамхан Алимханович, канд. техн. наук, профессор кафедры математики Ташкентского финансового ин-та. В 1982 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование.



УДК 539.3: 534.1

А.Ф. Верлань¹, Б.А. Худаяров², доктора техн. наук,

Э.Ф. Файзибоев², канд. физ.-мат. наук

¹ Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4241063, e-mail: a.f.verlan@gmail.com),

² Ташкентский ин-т ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары-Ниязова, 39,
тел. (+99871) 2370986, e-mail: bakht-flpo@yandex.ru; fayziboeyev@inbox.ru)

Моделирование флаттера вязкоупругой цилиндрической оболочки в потоке газа

На примере вязкоупругой оболочки рассмотрены задачи динамики тонкостенных конструкций при аэродинамической нагрузке с учетом вязкоупругих свойств материала и геометрической нелинейности. Аэродинамическое давление определено в соответствии с поршневой теорией А.А. Ильюшина. С помощью метода Бубнова — Галеркина математическая модель задачи сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений, решаемых численным методом, основанным на использовании квадратурных формул. Определена критическая скорость флаттера вязкоупругих оболочек при различных физических и геометрических параметрах.

На прикладі в'язкопружної оболонки розглянуто задачі динаміки тонкостінних конструкцій при аеродинамічному навантаженні з урахуванням в'язкопружних властивостей матеріалу та геометричної нелінійності. Аеродинамічний тиск визначено згідно з поршневою теорією О.А. Ільюшина. За допомогою метода Бубнова — Гальоркіна математичну модель задачі зведено до дослідження системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь, які розв'язуються чисельним методом, базованим на використанні квадратурних формул. Визначено критичну швидкість флатера в'язкопружних оболонок при різних фізичних та геометричних параметрах.

Ключевые слова: вязкоупругость, интегро-дифференциальные уравнения, алгоритм, флаттер, оболочка.

Рассмотрим шарнирно опертую замкнутую вязкоупругую цилиндрическую оболочку с радиусом кривизны R срединной поверхности и длиной L , обтекаемую с внешней стороны потоком газа, направленным вдоль обра-

© А.Ф. Верлань, Б.А. Худаяров, Э.Ф. Файзибоев, 2014

зующих со сверхзвуковой скоростью V [1—5]. Уравнения вязкоупругой цилиндрической оболочки запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{D}{h}(1-R^*)\nabla^4 W &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{q}{h}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -(1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\nabla^2 W$ — оператор Лапласа; ρ — плотность материала оболочки; h — толщина оболочки; E — модуль Юнга; R^* — интегральный оператор с ядром релаксации $R(t)$; $W(x, y, t)$ — прогиб оболочки; $\Phi(x, y, t)$ — функция напряжений, действующих в срединной поверхности оболочки; D — цилиндрическая жесткость, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; μ — коэффициент Пуассона; q —

аэродинамическое давление, определяемое согласно теории Ильюшина [6],

$$q = -B \frac{\partial W}{\partial t} - BV \frac{\partial W}{\partial x} - B_1 V^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2,$$

где $B = \alpha p_\infty / V_\infty$; $B_1 = \alpha(\alpha + 1) p_\infty / 4V_\infty^2$; α — показатель политропы газа; p_∞ и V_∞ — давление и скорость звука в невозмущенном потоке.

Решение системы (1) находим в виде

$$\begin{aligned} W(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m y}{R}, \\ \Phi(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m y}{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова — Галеркина, получаем систему интегро-дифференциальных уравнений относительно $W_{nm}(t)$ и $\Phi_{nm}(t)$:

$$\begin{aligned} A_{kl} \Phi_{kl}(t) &= E(1-R^*) \sum_{n,i=1}^{\infty} \sum_{m,r=1}^{\infty} C_{klnmir} W_{nm} W_{ir} + E(1-R^*) R \left(\frac{k}{\lambda} \right) W_{kl}, \\ \frac{D}{h} (1-R^*) \left[\left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{l}{R} \right)^2 \right]^2 W_{kl} &= -\frac{1}{R} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \Phi_{kl} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{E\pi}{L^2 R^2} \sum_{n,i,j=1}^{\infty} \sum_{m,r,s=1}^{\infty} a_{klnmirjs} W_{nm} (1-R^*) W_{ir} W_{js} + \\
 & + \frac{E\pi}{L^2 R} \sum_{n,i=1}^{\infty} \sum_{m,r=1}^{\infty} W_{nm} F_{klnmir} (1-R^*) W_{ir} - \rho \ddot{W}_{kl} - \frac{B}{h} \dot{W}_{kl} - \\
 & - \frac{2BV}{Lh} \sum_{n=1}^{\infty} n (\gamma_{k-n} + \gamma_{k+n}) W_{nl} - \frac{B_1 V^2}{h} \frac{\pi}{2L^2} \sum_{n,i=1}^{\infty} \sum_{m,r=1}^{\infty} \Gamma_{klnmir} W_{nm} W_{ir}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Вводя безразмерные коэффициенты, сводим систему (3) к уравнению относительно амплитуды прогиба W_{kl} :

$$\begin{aligned}
 & \ddot{W}_{kl} + \lambda^4 \Omega^2 \left\{ \left[\left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{l}{\pi} \right)^2 \right]^2 + \frac{12(1-\mu^2)}{\pi^2 \beta_1^2} \left(\frac{k}{\lambda} \right)^2 E_{kl} \right\} (1-R^*) W_{kl} + \beta_1 \pi^2 M_E^2 \times \\
 & \times \sum_{n,i=1}^{\infty} \sum_{m,r=1}^{\infty} K_{klnmir} (1-R^*) W_{nm} W_{ir} - \frac{12\lambda^2 (1-\mu^2) \Omega^2}{\pi^3} \times \\
 & \times \sum_{n,i,j=1}^{\infty} \sum_{m,r,s=1}^{\infty} a_{klnmirjs} W_{nm} (1-R^*) W_{ir} W_{js} - \\
 & - \pi \beta_1 M_E^2 \sum_{n,i=1}^{\infty} \sum_{m,r=1}^{\infty} F_{klnmir} W_{nm} (1-R^*) W_{ir} + MM_0 \dot{W}_{kl} + 2MM^* \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{kl} W_{nl} + \\
 & + \frac{M_1 M^{*2}}{2} \pi \sum_{n,i=1}^{\infty} \sum_{m,r=1}^{\infty} \Gamma_{klnmir} W_{nm} W_{ir} = 0, \quad (4)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Omega^2 &= \frac{\pi^4}{12(1-\mu^2)} M_E^2 \left(\frac{h}{E} \right)^2; \quad M = \alpha M_P^2 \left(\frac{L}{h} \right); \quad M_1 = \frac{\alpha(\alpha+1) M_P^2}{4}; \\
 M_E &= \sqrt{\frac{E}{\rho V_0^2}}; \quad M_P = \sqrt{\frac{P_\infty}{\rho V_0^2}};
 \end{aligned}$$

$M_0 = V_0/V_\infty$; $\beta_1 = h/R$; $M^* = V/V_\infty$ — число Маха; γ_{kl} , Γ_{klnmir} , a_{klnmir} , K_{klnmir} , F_{klnmir} — безразмерные коэффициенты [5].

Требуется найти критическую скорость флаттера V^* из решения системы интегро-дифференциальных уравнений (4), удовлетворяющую начальным условиям $W_{nm}(0) = W_{0nm}, \dot{W}_{nm}(0) = \dot{W}_{0nm}$. Уравнения (4) позволяют выполнить качественный анализ решения задачи о флаттере вязкоупругой цилиндрической оболочки. Интегрирование системы (4) с использованием ядра Колтунова—Ржаницына ($R(t) = A \exp(-\beta t) t^{\alpha-1}, A > 0, \beta > 0, 0 < \alpha < 1$) проводилось численным методом [7—11].

В таблице приведены результаты расчетов, выполненных в процессе многократного решения уравнения (4) при $n = 2$ для оболочек, обтекаемых потоком газа со сверхзвуковой скоростью, которые имеют параметры $p_\infty = 1,014 \text{ кг/см}^2, \kappa = 1,4$ и $V_\infty = 340 \text{ м/с}$. В качестве критерия, определяющего критическую скорость флаттера V^* , примем следующее условие: при дан-

Зависимость критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров оболочки

A	α	β	λ	L/h	m	$V^*, \text{ м/с}$
0,0						780
0,001						687
0,01	0,25	0,05	1	4000	6	555
0,1						423
0,01	0,1	0,05	1	4000	6	505
	0,5					550
	0,75					575
0,01	0,25	0,1	1	4000	6	540
		0,01				545
0,01	0,025	0,05	1,2	4000	6	380
			1,4			875
			1,5			1230
0,01	0,25	0,05	1	2000	6	1081
				2200		815
				2500		547
0,01	0,025	0,05	1	4000	2	1053
					4	1010
					6	555
					8	605
					10	1000

ных скоростях амплитуда колебаний изменяется по гармоническому закону. При сверхкритических скоростях происходит колебательное движение с интенсивно нарастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению. В случае $V < V^*$ амплитуда колебаний затухает [10—12].

Из таблицы видно, что увеличение коэффициента вязкости A приводит к уменьшению критической скорости флаттера на 45 %. При $A = 0$ $V^* = 780$ м/с, а при $A = 0,1$ $V^* = 423$ м/с. Увеличение параметра α приводит к существенному изменению значения V^* . Исследования проведены при $\alpha = 0,1; 0,5; 0,75$. Как видим, увеличение параметра α от 0,1 до 0,75 сопровождается увеличением критического числа флаттера от $V^* = 505$ м/с до $V^* = 575$ м/с. В результате исследования влияния параметра L/h на поведение оболочек установлено, что увеличение отношения L/h от 2000 до 2500 приводит к уменьшению значения V^* на 50 %.

Определение числа волн m в окружном направлении представляет интерес при решении задач панельного флаттера оболочек. Во-первых, зная число m , можно устранить известную неопределенность задачи флаттера, обусловленную наличием m в исходных уравнениях. Во-вторых, определив m , можно глубже проникнуть в суть явления флаттера оболочек.

До настоящего времени не удалось построить достаточно простого и эффективного метода определения числа волн m в окружном направлении, реализуемого в каждой конкретной задаче колебания оболочки в потоке газа. Объясняется это существенными затруднениями, стоящими на пути решения этой задачи. Число m в значительной степени определяет общую картину волнообразования оболочки в процессе колебаний, которая, в свою очередь, определяет суммарную энергию вязкоупругой конструкции, обтекаемой потоком газа. При этом из множества возможных картин волнообразования оболочки реализуется та, которая является наиболее устойчивой в рассматриваемой ситуации, определяемой всей совокупностью параметров, характеризующих как вязкоупругую конструкцию, так и окружающий ее поток газа. Рациональное решение вопроса об устойчивости той или иной формы колебаний оболочки в наиболее общем виде представляется в настоящее время достаточно проблематичным.

В силу указанных причин не существует какого-либо общего аналитического и достоверного выражения для вычисления числа m в задачах панельного флаттера оболочек. Обычно каждую конкретную задачу сначала решают для ряда значений m и выбирают то значение m_{\min} , которое соответствует минимальной критической скорости флаттера (см. таблицу). Все дальнейшие вычисления проводят, используя полученное значение m_{\min} .

Выводы

Таким образом, рассмотренная математическая модель флаттера вязкоупругой оболочки позволяет с достаточной для инженерных расчетов точностью исследовать колебательные процессы объектов данного класса в потоке газа, в том числе определять минимальную критическую скорость потока, при которой начинает проявляться эффект флаттера. В частности установлено, что для круговой цилиндрической оболочки минимальной критической скорости соответствует число волн в окружном направлении, равное шести. Вычислительные эксперименты с моделью позволяют оценить влияние размеров и характеристик материала оболочки на количество указанных волн.

Problems of dynamics of thin-walled structures under aerodynamic load with allowance for viscoelastic properties of material and geometric nonlinearity were considered on the example of viscoelastic shell. The aerodynamic pressure was determined in correspondence with A.A. Piyushin's piston theory. With the help of the Bubnov-Galyorkin method the mathematical model was reduced to investigation of the system of ordinary integro-differential equations which are solved by the numerical method based on the use of quadrature formulas. A critical rate of the flutter of visco-elastic shells was determined under different physical and geometrical parameters.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скурлатов Э.Д. Поведение цилиндрических оболочек в сверхзвуковом потоке газа // Сб. статей. «Расчеты на прочность». Вып. 15. — М. : Машиностроение, 1971. — С. 356—365.
2. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // МТТ. Итоги науки и техники. Вып. 11. — М. : ВИНТИ, 1978. — С. 67—122.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М. : Наука, 1972.
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Численное исследование флаттера пологой оболочки // ПМТФ. — 1999. — 40, № 6. — С. 97—102.
5. Эшматов Х., Худаяров Б.А. Алгоритмизация нелинейных задач о флаттере вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей // Проблемы информатики и энергетики. (г. Ташкент). — 1999. — № 1. — С. 3—8.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. — 1956. — XX. — Вып.6. — С. 733—755.
7. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. — Ташкент : Мехнат, 1987. — 271 с.
8. Верлань А.Ф., Худаяров Б.А., Файзибоев Э.Ф., Юлдашев З.У. Компьютерное моделирование флаттера вязкоупругих ортотропных пластин в сверхзвуковом потоке газа // Вест. НТУ «ХПИ». — 2012. — № 62 (968). — С. 8—17.
9. Абдикаримов Р., Худаяров Б.А. Исследование вязкоупругих круговых цилиндрических панелей переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — 5, № 1. — С. 11—18.
10. Худаяров Б.А. Об одном численном методе решения интегральных уравнений задачи нелинейного флаттера вязкоупругих систем // Междунар. конф. «Интегральные

уравнения-2009». 26—29 января. Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины, 2009. — С. 147—149.

11. *Худаяров Б.А.* Математическое моделирование нелинейного флаттера вязкоупругих элементов и узлов летательного аппарата // Математическое моделирование. — 2010. — **22**, № 6. — С. 111—131.
12. *Khudayarov B.A.* Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates//Intern. J. Applied mechanics. — 2005. — Vol. 41, № 5. — P. 538—542.

Поступила 22.01.14;
после доработки 04.03.14

ВЕРЛЯНЬ Анатолий Федорович, д-р техн. наук, зав. отделом Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. В 1956 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования в задачах исследования динамических систем, электрических цепей; численные методы и алгоритмы решения интегральных уравнений.

ХУДАЯРОВ Бахтияр Алимович, д-р техн. наук, зав. кафедрой высшей математики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1990 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование, численные методы и алгоритмы решения интегро-дифференциальных уравнений, механика деформируемого твердого тела.

ФАЙЗИБОВЕВ Элчи Файзибоевич, канд. физ.-мат. наук, проф. кафедры высшей математики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1959 г. окончил Среднеазиатский госуниверситет. Область научных исследований — дифференциальные уравнения.

УДК 519.6

В.А. Иванюк, канд. тех. наук
Каменец-Подольский национальный университет им. Ивана Огиенко
(Украина, 32300, Каменец-Подольский, ул. Уральская, 1,
тел. (097) 8051401, e-mail: wivanyuk@gmail.com),

Н.Л. Костьян
Киевский национальный университет технологий и дизайна
(Украина, 01011, Киев, ул. Немировича-Данченка, 2,
e-mail: k_n_l@mail.ru)

Способ построения динамической модели линейного объекта по реакции на входное воздействие произвольной формы

Рассмотрен способ построения динамической модели линейного объекта в форме дробно-рациональной передаточной функции по реакции на входное воздействие произвольной формы. Получена оценка точности идентификации.

Розглянуто спосіб побудови динамічної моделі лінійного об'єкта у формі дробово-раціональної передатної функції по реакції на вхідний вплив довільної форми. Отримано оцінку точності ідентифікації.

Ключевые слова: передаточная функция, идентификация, преобразование Лапласа.

Известно, что наилучшую оценку параметров математической модели объекта может дать только специально организованный активный эксперимент с аналитического вида тестовым воздействием [1]. Однако организация такого эксперимента не всегда возможна по причине высокой стоимости или практической неосуществимости. Поэтому приходится определять параметры модели объекта по его отклику на входное воздействие произвольной формы. Эти динамические характеристики часто бывают либо уникальными, либо неподдающимися улучшению.

Методика оценки параметров математической модели объекта заданного аналитического вида (обычно дробно-рациональной передаточной функции $H(p) = \frac{\sum_{k=0}^m a_k p^k}{\sum_{i=0}^n b_i p^i}$, $n \geq m$), наиболее применимая для решения поставленной задачи, описана в [2, 3]. Суть методики заключается в следующем. Передаточная функция объекта бесконечно-дифференцируе-

© В.А. Иванюк, Н.Л. Костьян, 2014

ма ($H(p) \in C^\infty$), а измеренное входное воздействие и реакция объекта, заданные на конечном дискретном множестве, описываются некоторыми непрерывными функциями $x(t), y(t) \in C^0$. При этом непосредственно использовать измеренные значения $x(t)$ и $y(t)$ для оценки параметров модели $H(p)$ затруднительно, так как любой метод решения системы алгебраических уравнений, к которой сводится данная задача, по сути, заключается в оценке не менее чем $2n$ первых конечных разностей от $x(t), y(t)$ (где n — порядок знаменателя $H(p)$). Поэтому на первом шаге необходимо обеспечить мощное сглаживание $x(t)$ и $y(t)$, такое, чтобы выполнялось условие $x(t), y(t) \in C^{2n}$, что может быть достигнуто, например, последовательным $2n$ -кратным интегрированием.

Наиболее удобная форма интегрального сглаживания вытекает из определения преобразования Лапласа

$$H(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \eta(t) dt. \quad (1)$$

Если в (1) экспоненту заменить ее разложением в ряд Тейлора—Маклорена в точке $p^* = p + \alpha$, где α — произвольное положительное действительное число, то получим

$$H(p^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-p^*)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{\alpha t} t^k \eta(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k p^{*k}, \quad (2)$$

$$P_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{\alpha t} t^k \eta(t) dt,$$

где P_k — k -й момент Пуассона [2, 3]; $\eta(t)$ — импульсная переходная функция объекта. Можно показать, что $P_k \in C^k$, т.е. удовлетворяют условиям корректности решения поставленной задачи. Если при проведении эксперимента измерена не функция $\eta(t)$, а реакция $y(t)$ объекта на воздействия $x(t)$, то необходимый для оценки величин коэффициентов дробно-рациональной функции $H(p)$ спектр Пуассона $H_k, k = 0, 2n$, определяется из решения известного равенства

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (3)$$

Пусть Y_k и X_k — последовательность моментов Пуассона входного воздействия $x(t)$ и реакции объекта $y(t)$. Тогда искомым спектр H_k вычисляется

по вытекающим из равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k p^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} Y_k p^k}{\sum_{k=0}^{\infty} X_k p^k}$$

формулам

$$H_0 = \frac{Y_0}{X_0}, \quad H_k = \frac{Y_k - \sum_{m=0}^{k-1} H_m X_{k-m}}{X_0}. \quad (4)$$

Из системы (4) непосредственно следует, что погрешность в определении k -го момента Пуассона значительно больше погрешности оценок моментов Y_k и X_k . Следовательно, достоверность параметров модели $H(p)$ при произвольном входном воздействии будет существенно хуже, чем при оценке их величин, например, по переходной или импульсной функции объекта. Этот недостаток метода принципиально неустраним при любой методике вычислений.

В этом случае рекомендуется обеспечение хорошей помехозащищенности и надежности измерительной аппаратуры, а также достаточной избыточности обмеров $x(t)$ и $y(t)$. Иными словами, частота дискретизации $x(t)$ и $y(t)$ не должна существенно отличаться от частоты по Котельникову т.е. шаг измерений должен быть не больше, чем $\Delta t \approx 1/f_{\text{срез}}$, где $f_{\text{срез}}$ — верхняя граница спектра $H(j\omega)$, соответствующая частоте (в герцах), при которой модуль амплитудно-частотной характеристики объекта становится меньше утроенной величины приведенной погрешности измерительного комплекса.

При вычислении спектров Пуассона существенное значение имеет используемый метод численного интегрирования. В [4] показано, что при применении классических методов интегрирования получают смещенные оценки величин моментов вследствие эффекта «мимикрии» частот. Наиболее подходит для вычисления спектра Пуассона метод Филона второго порядка [4], суть которого состоит в том, что на шаге интегрирования функция $x(t)$ или $y(t)$ представляется параболой второго порядка. При этом интеграл (2) берется в явном виде, и вычисление спектра p_k выполняется по рекуррентной формуле.

При решении ряда практических задач существенное значение имеет выбор порядка метода Филона. В случае использования данного метода

первого порядка достоверность результатов часто оказывается недостаточной, а при использовании метода третьего порядка значительно увеличивается вычислительное время, однако сохраняется качество результатов. Наилучшие результаты обработки сигналов, имеющих непрерывную первую производную, достигаются аппроксимацией $x(t)$ и $y(t)$ на шаге интегрирования сплайном третьего порядка $f(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$, удовлетворяющим условию непрерывности производной $f'(t)$.

Известно [4], что определители систем алгебраических уравнений, при решении которых определяются коэффициенты $H(p)$, плохо обусловлены, точнее, близки к гильбертовским. Величины гильбертовского определителя ΔG для ряда значений n систем алгебраических уравнений, соответствующих числу неизвестных коэффициентов передаточной функции $H(p)$, следующие:

n	4	5	6	7	8
ΔG	$2 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-12}$	$5,4 \cdot 10^{-18}$	$4,8 \cdot 10^{-25}$	$2,7 \cdot 10^{-33}$

Отсюда следует, что оценка определителя по экспериментально измеренным динамическим характеристикам более семи неизвестных коэффициентов $H(p)$ является нереальной задачей. Причина этого заключается в свойствах k -го момента Пуассона

$$P_k = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^T e^{-\alpha t} t^k \eta(t) dt,$$

где T — длительность переходного процесса, по истечении которого амплитуда $\eta(t)$ будет меньше, чем утроенная величина погрешности измерительного комплекса.

Из известной теоремы Чебышева о полиномах, наименее отклоняющихся от нуля, следует, что парабола $t^k \in [0, T]$ может быть представлена параболой степени $k-1$ с погрешностью не менее чем 2^{1-2k} . Например, параболу t^5 можно заменить параболой четвертой степени

$$t^5 = 2,5t^4 - \frac{35}{16}t^3 + \frac{25}{32}t^2 + \frac{25}{256}t + \frac{1}{512}$$

с погрешностью не больше чем 0,2%. Следовательно, можно утверждать, что если погрешность измерительного комплекса $\sigma = 0,5\%$, то все моменты Пуассона, начиная с пятого, будут линейно зависимыми от первых четырех. Если $\sigma = 0,1\%$, то шестой и последующие моменты Пуассона можно представить как линейную комбинацию первых пяти. Таким образом, при реально достижимой точности обмеров динамических характеристик промышленных

объектов ($\tilde{\sigma} = 1\%$) можно оценить величины не более чем четырех-пяти неизвестных коэффициентов передаточной функции $H(p)$.

С помощью алгоритма идентификации объекта, построенного по данной схеме, вычисляются коэффициенты дробно-рациональных функций второго и третьего порядка по следующим формулам:

при $n = 2$

$$D_0 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} P_0 & P_2 \\ P_1 & P_3 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{vmatrix};$$

$$D = D_0 - D_1 + D_2;$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{\tau(D_1 - 2D_0)}{D}, \quad b_2 = \frac{\tau^2 D_0}{D},$$

$$a_0 = \frac{P_0(D_2 - D_1) + P_1 D_2}{2D}, \quad a_1 = \frac{\tau(P_0 D_1 - P_1 D_2)}{2D};$$

при $n = 3$

$$D_0 = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \\ P_3 & P_4 & P_5 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} P_0 & P_2 & P_3 \\ P_1 & P_3 & P_4 \\ P_2 & P_4 & P_5 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_3 \\ P_1 & P_2 & P_4 \\ P_2 & P_3 & P_5 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix};$$

$$D = D_3 - D_2 + D_1 - D_0;$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{\tau(D_2 - 2D_1 + 3D_0)}{D}, \quad b_2 = \frac{\tau^2(D_1 - 3D_0)}{D}, \quad b_3 = \frac{\tau^3 D_0}{D};$$

$$a_0 = \frac{[P_0(D_3 - D_2 + D_1) + P_1(D_3 - D_2) + P_2 D_3]}{2D},$$

$$a_1 = \frac{\tau[P_0(D_2 - 2D_1) - P_1(D_3 - 2D_2) - 2P_2 D_3]}{2D},$$

$$a_2 = \frac{\tau^2[P_0 D_1 - P_1 D_2 + P_2 D_3]}{2D},$$

где $\tau = 1/\alpha$.

Как свидетельствуют результаты расчетов, их качество существенно зависит от удачного выбора весового коэффициента α в (2). Каких-либо теоретических оценок для выбора оптимальной величины α не существует.

вует. Однако область существования оптимальной величины известна. Ее обратная величина τ должна быть не меньше шага дискретизации $x(t)$ или $y(t)$ и не больше длительности переходного процесса. Оптимальной величине τ_0 соответствует наименьшее среднеквадратичное отклонение S между измеренной и расчетной реакцией объекта на заданное входное воздействие. Зависимость величины S от τ многоэкстремальна. Кроме того, область существования τ может оказаться разбитой на подобласти физически реализуемых решений, определяемых условиями Гурвица.

Для определения наименьшей величины среднеквадратического отклонения S выбирается сочетание панорамной оценки зависимости $S(\tau)$ для двадцати значений $\tau_i = 1,16\tau_{i-1}$ согласно методу градиента на интервале $0,87\tau_0 \leq \tau_j \leq 1,13\tau_0$, где τ_0 соответствует наименьшей величине S , полученной при панорамном просмотре.

Задача определения среднеквадратического отклонения с помощью данного алгоритма имеет свои особенности. Необходимо найти отклик объекта, заданного передаточной дробно-рациональной функцией второго или третьего порядка, на заданное на дискретной сетке (в общем случае не обязательно регулярной) входное воздействие. При этом реакцию объекта следует вычислять на дискретной сетке, в общем не совпадающей с той, на которой была измерена реакция объекта. Алгоритм вычисления отклика объекта должен быть максимально быстродействующим, так как при решении задачи идентификации он выполняется не менее 40—50 раз и определяет время счета. Достаточно эффективен в этом случае метод интегрирования Тейлора [5].

При реализации алгоритма интегрирования входное воздействие может ступенчато изменяться только в точках отсчета. Между дискретами измерения оно описывается параболой третьего порядка или, если априори известно, что входной сигнал есть гладкая аналитическая функция, — сплайном третьего порядка, обеспечивающим непрерывность первой производной $x(t)$. При этом как входное воздействие, так и отклик объекта может быть представлен рядом Тейлора. Следовательно, можно записать

$$X(p) = \frac{\sum_{k=0}^3 X(k) k!}{(Hp)^k}, \quad Y(p) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} Y(k) k!}{(Hp)^k}, \quad (5)$$

где $X(k)$ и $Y(k)$ — коэффициенты разложения функций $x(t)$ и $y(t)$ в ряды Тейлора; k — шаг их дискретизации. Подставив (5) в (3), помножив

полученное равенство на знаменатель передаточной функции $H(p)$, а затем приравняв члены с одинаковыми степенями при p , получим

$$\sum_{k=0}^m \frac{Y(k) b_{n-m+k}}{H^{-k}} = \sum_{k=0}^m \frac{X(k) a_{n-m+k}}{H^{-k}}, \quad m = \overline{0, n-1}, \quad (6)$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{Y(k) b_k(k+m)}{H^{-k}} = \sum_{k=0}^n \frac{X(k) a_k(k+m)}{H^{-k}}, \quad m = \overline{0, \infty}, \quad (7)$$

где n — порядок знаменателя $H(p)$.

Равенство (6) определяет реакцию объекта на ступенчатое изменение в момент $t = t_i$ величины входного воздействия. Равенство (7) описывает реакцию объекта на монотонно изменяющуюся часть входного воздействия. Искомая величина реакции объекта в момент времени $t_{i+1} = t_i + t_1$, где $t_1 \leq H$, имеет вид

$$Y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^m Y_i(k) \left(\frac{t_1}{H} \right)^k.$$

Для практических задач можно ограничиться членом $Y(m) < 10^{-4} Y(t_i)$, что обеспечивает методическую погрешность не более 0,1 %.

Выводы

Предложенный алгоритм позволяет на основе пассивных экспериментов вычислить коэффициенты дробно-рациональной передаточной функции с точность до 0,1 %.

A method for construction of a dynamic model of a linear object in the form of rational fractional transfer function by the reaction to the input action of arbitrary shape has been considered. The identification accuracy estimate is obtained.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верлань А.Ф., Абдусаров Б.Б., Игнатченко А.А., Максимович Н.А. Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов. — Киев : Наук. думка, 1993. — 208 с.
2. Надежность современных и перспективных турбогенераторов / Ред. Г.Г. Счастливым. — Киев : Наук. думка, 1978. — 203 с.
3. Дехтяренко П.И., Коваленко В.П. Определение характеристик звеньев систем автоматического регулирования. — М. : Энергия, 1973. — 120 с.

4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: учеб. пособие. — 2-е изд., исправленное. — СПб. : Изд-во СПб, БХВ-Петербург, 2011. — 592 с.
5. *Пухов Г.Е.* Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике. — Киев : Наук. думка, 1978. — 259 с.

Поступила 23.04.14

ИВАНЮК Виталий Анатольевич, канд. техн. наук, доцент кафедры информатики Каменец-Подольского национального университета им. Ивана Огиенко. В 2003 г. окончил Каменец-Подольский государственный университет. Область научных исследований — методы математического и компьютерного моделирования динамических систем.

КОСТЯН Наталья Леонидовна, ст. преподаватель кафедры информационно-компьютерных технологий и фундаментальных дисциплин Киевского национального университета технологий и дизайна. В 1999 г. окончила Черкасский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое и компьютерное моделирование, параметрическая идентификация динамических объектов.

Новые правила оформления статьи для журнала «Электронное моделирование»

В связи с подготовкой журнала «Электронное моделирование» к регистрации в базе данных «Scopus» вводятся следующие правила.

К опубликованию в журнале «Электронное моделирование» принимаются нигде не опубликованные ранее статьи, которые соответствуют профилю и научному уровню журнала.

В редакцию следует направлять:

1. Полную электронную версию статьи с рисунками и таблицами (E-mail: em@ipme.kiev.ua).

2. Копию первой страницы с подписями авторов.

3. Отдельный файл с рисунками, выполненными в форматах TIF, EPS, JPG, GIF и фотографиями (разрешением не менее 300 dpi, в случае необходимости можно в цвете). Допускается передача графиков и диаграмм в редакторе Excel. Не допускаются рисунки, подготовленные в редакторе Word. Если рисунки выполнены в программах MatCad, MatLab, AutoCad и подобных, необходимо переводить их в формат .eps или, как исключение, – .tif с разрешением не менее 300 dpi.

4. Сведения о каждом соавторе: фамилия, имя и отчество (на русском и английском языках), страна, город, место работы, занимаемая должность, ученое звание, степень; для переписки с редакцией – служебный адрес и телефон, домашний адрес и телефон, e-mail.

5. Название статьи и расширенную аннотацию на английском языке (до 12 строк), отражающую суть решаемой задачи, методы исследования и полученные результаты.

6. Сведения о научных интересах авторов.

7. Авторскую справку, подтверждающую права на интеллектуальную собственность авторов.

Направляемая в редакцию статья должна содержать следующие элементы:

1. Аннотацию (объемом не более восьми строк), в которой лаконично и четко следует перечислить выполненные исследования и полученные результаты. Аннотация должна быть интересной и понятной для отечественных и зарубежных ученых (не более 600 знаков).

2. Общую оценку проблемы и ее актуальности на основании анализа публикаций, имеющих отношение к данной проблеме, в том числе — последних. Следует учесть, что достаточное количество необходимых ссылок повышает значимость статьи и ее цитируемость.

СПРАВКА

(предоставляется в редакцию каждым автором/соавтором статьи)

Сообщаю, что я,

автор/соавтор

уведомлен об ответственности за использование в статье материалов, защищенных авторским правом, включая цитаты, воспроизведенные данные, иллюстрации и иные материалы, и о том, что ответственность за нарушение авторских прав ложится на автора статьи.

Я сообщаю, что данная статья не опубликована и не представлена для опубликования в другие периодические издания.

Подаявая статью в редакцию журнала, я передаю редакции право на ее опубликование и дальнейшее распространение и сообщаю, что при этом не нарушаются авторские права других лиц и организаций.

Подпись автора _____ « ____ » _____ 20__ г.

Ф.И.О. _____

Адрес _____

Место работы _____

(для работающих) _____

Тел. _____

Факс _____

3. Постановку задачи и ее решение с обоснованием полученных результатов.

4. Выводы, в которых следует кратко сформулировать теоретическое и практическое значение полученных результатов, не повторяя информацию из других разделов и не перечисляя, что выполнено.

Объем статьи, включая список литературы, таблицы, рисунки и подрисуночные подписи, не должен превышать 16 с. (через полтора интервала), обзорной статьи – 25 с., краткого сообщения – 7 с.

Оформление текста. Текст статьи должен быть набран шрифтом Times New Roman, 12 pt с полуторным интервалом в редакторе Microsoft Word 97 (2003) либо более поздних версиях и представлен файлом типа *.doc.

На первой странице в точном порядке следует разместить:

- 1) индекс по универсальной десятичной классификации (УДК);
- 2) инициалы и фамилии авторов с указанием ученой степени;
- 3) полное название организаций, в которых работают авторы (страна, адрес, контактный телефон, e-mail);

4) название статьи — наиболее лаконичное и понятное, без малоизвестных аббревиатур (шрифт Arial жирный, размещение по левому краю, не допускаются переносы);

5) текст аннотации на русском и украинском языках (через полтора интервала);

6) ключевые слова (3—5 слов курсивом);

7) основной текст.

В статье необходимо использовать общепринятые научные термины и условные обозначения, единицы физических величин должны соответствовать требованиям Международной системы единиц (SI).

Математические формулы создаются в виде отдельных объектов в редакторе формул Equation, располагаются по центру. Формулы, на которые имеются ссылки в тексте, должны иметь сквозную нумерацию, формулы, на которые ссылки в тексте отсутствуют, не нумеруются. Номер формулы ставится в круглых скобках у края правого поля. Размеры символов в формулах: обычный — 14 pt, крупный — 18 pt, мелкий — 12 pt, крупный индекс — 7 pt, мелкий индекс — 5 pt.

Пример:

$$V'(t) = p^{\frac{1}{\alpha}(t)} y'(t) (p(t)(y')^{\alpha})' + (q(t)p^{1/\alpha}(t))' \int_0^{y(t)} f(u) du + \\ + q(t)p^{1/\alpha}(t) f(y(t)) y'(t) = (q(t)p^{1/\alpha}(t))'. \quad (1)$$

Таблицы следует пронумеровать по порядку упоминания и сослаться на них в тексте. В таблицах не должно быть пустых граф, прочерков и сокращенных слов. Прографика таблицы набирается шрифтом Times New Roman – 9 pt, головка таблицы – 8,5 pt. Цифровой материал в таблицах печатают с двойным интервалом, текст головки и боковика – с одинарным. Таблицы должны быть либо все с названиями, либо все без них.

Пример:

Таблица 1

Число альтернатив	Частота появления реверса рангов при оценивании по трем критериям			
	Методом непосредственного оценивания		Методом «линия»	
	По максимуму	По сумме	По максимуму	По сумме
3	0,602	0,0886	0,1266	0,1591
4	0,0527	0,1007	0,1280	0,1664

Рисунки с подтекстовками (если они есть) должны быть пронумерованы в соответствии с порядком упоминания в тексте. Одни и те же сведения не должны повторяться в тексте и подрисуночных подписях. Рисунки должны быть либо все с подписями, либо все без них. Обозначения на рисунке должны быть четкими и легко читаемыми. Оси координат на графиках должны быть обозначены. В тексте обязательно должны быть ссылки на каждый рисунок.

Список использованной литературы составляется в порядке упоминания источников в тексте согласно ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 (ГОСТ 7.1—2003, ИДТ); ДСТУ 7093:2009 (ГОСТ 7.11—2004 (ИСО 832:1994), МОД; ISO 832:1994, МОД); ДСТУ 7152:2010; ДСТУ 7157:2010. Названия источников в списке приводятся на языке оригинала. В тексте номер источника указывается в квадратных скобках. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются. Если в списке литературы имеется ссылка на электронный ресурс, необходимо указать фамилию и инициалы автора, название работы, в квадратных скобках – электронный ресурс, затем – режим доступа. Примеры оформления списка литературы см. на сайте журнала www.emodel.org.ua

При формировании списка использованной литературы следует придерживаться норм самоцитируемости, т.е. число работ автора (авторов) статьи, использованных в списке, не должно превышать 30%.

После основного текста помещается следующая информация **на английском языке**:

- фамилии и инициалы авторов (в английской транслитерации, если в основном тексте эта информация подана кириллицей);
- название статьи;
- текст расширенной аннотации (до 12 строк), отражающей суть решаемой задачи, методы исследования и полученные результаты;
- ключевые слова;
- список используемых источников согласно Harvard Style. Источники с заглавиями на латинице приводятся без перевода. Для литературных источников на языках, не использующих латинский алфавит, необходимо обеспечить перевод названий источников и указать после них в скобках язык оригинала. Фамилии и инициалы авторов следует транслитерировать как для загранпаспорта. Примеры оформления библиографических ссылок согласно требованиям Harvard Style приведены, например, по электронному адресу http://www.staffs.ac.uk/assets/harvard_referencing_examples_tcm44-39847.pdf.

Статья, доработанная автором после рецензирования, должна быть возвращена в редакцию с ответом рецензенту, в котором следует указать какие замечания рецензента учтены. В случае несогласия с мнением ре-

цензента автор может представить аргументированный ответ для рассмотрения редколлегией.

Для обеспечения высокого уровня журнала предусматривается внутреннее и независимое внешнее рецензирование, после которого решение о публикации принимается редакционной коллегией. Решение редколлегии считается окончательным.

Дорабатывать статью можно не более одного месяца.

После получения верстки статьи автор должен исправить замеченные ошибки и в тот же день отправить в редакцию по e-mail перечень исправлений с указанием страницы, абзаца и строки. В случае задержки авторской верстки редакция, придерживаясь существующего производственного графика, оставляет за собой право сдать верстку в типографию без авторских правок.

подавая статью в редакцию журнала, автор передает редакции право на ее опубликование и дальнейшее распространение.

Статьи, подготовленные не в соответствии с данными правилами, не будут рассматриваться и рецензироваться.

Перед подготовкой статьи рекомендуем внимательно ознакомиться хотя бы с одним номером нашего журнала.

Перед отправлением статьи в редакцию рекомендуем прочесть ее глазами читателя, и это позволит избежать многих досадных ошибок.

CONTENTS

Integral Equations in the Problems of Mathematical Modeling	3
Mathematical Modeling and Computation Methods	
APARTSIN A.S. Volterra Nonclassical Equations of the First Kind in the Integral Models of Developing Systems	7
BULATOV M.V. Investigation of Integral Equations with a Identically Degenerate Matrix before the Principal Part	19
MENSHIKOV Yu.L. Method for Ensuring Adequacy of Dynamic Models	31
VERLAN D.A. Method of Degenerate Kernels under Numerical Implementation of Integral Dynamic Models	41
Computational Processes and Systems	
GAVRYSH V.I. Numerical-analytical Solution of a Nonlinear Stationary Heat Conduction Problem for the Infinite Temperature-sensitive Multilayer Plate	59
FEDORCHUK V.A., MAKHOVICH A.I. Method for Studying the Dynamics of Nonstationary Thermal Processes in the Presence of Symmetric Boundary Conditions	71
Application of Modelling Methods and Facilities	
STARKOV V.N., SEMENOV A.A., GOMONAY E.V. The First Kind Operator Equation in the Problem of Statistics Reconstruction of the Number of Quantum Light Photons	81
ABDIKARIMOV R.A. Modeling of Dynamic Stability of Visco-Elastic Orthotropic Rectangular Plates of Variable Rigidity	95
Short Notes	
VERLAN A.F., KHUDOYAROV B.A., FAZIBOEV E.F. Modeling of a Flutter of Visco-Elastic Cylindrical Shell in the Gas Flow	105
IVANYUK V.A., KOST'YAN N.L. Method for Construction of a Dynamic Model of a Linear Object by the Reaction to the Input Action of Arbitrary Shape	113
New Rules of Paper Presentation to the Journal «Electronic Modeling»	121