ISSN 2304—1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК
ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Математика і механіка

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

Том 19. Випуск 4 (24). 2014

Одеса
«Астропринт»
2014

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

І. М. Коваль (головний редактор)
О. В. Запорожченко (заступник головного редактора)
В. О. Іваниця (заступник головного редактора)
В. М. Хмарський (заступник головного редактора)

С. М. Андрієвський
Ю. Ф. Ваксман
В. В. Глєбов
Л. М. Голубенко
Л. М. Дунаєва
В. В. Заморов
В. Є. Круглов
В. Г. Кушнір
В. В. Менчук
О. В. Сминтина
В. І. Труба
О. В. Тюрін
Є. А. Черкез
Є. М. Черноіваненко

Редакційна колегія серії
Математика і механіка

В. Є. Круглов (науковий редактор)
В. М. Євтухов (заступник наукового редактора)

A. Ashyralyev
L. Fridman
I. Kátai
A. Laurinčikas
С. К. Асланов
Р. Д. Банцурі
В. І. Берник
О. А. Бойчук
Н. Д. Вайсфельд
П. Д. Варбанець
О. В. Вербицький
О. Н. Вітюк
Г. О. Воропаєв
І. М. Гашененко
Д. В. Дмитришин
А. А. Дороговцев
В. Й. Жуковський
М. І. Іванчов
А. Й. Калінін
В. О. Капустян
І. Т. Кігурадзе
П. І. Когут
Ан. О. Кореновський
О. Ф. Кривий
Д. Д. Лещенко
А. Д. Мілко
С. М. Мхитарян
О. Г. Наконечний
Ю. В. Нестеренко
А. П. Петравчук
В. В. Пічкур
А. В. Плотніков
В. Г. Попов
В. Г. Самойленко
Н. В. Скрипник
О. М. Станжицький
В. І. Сущанський
Ю. В. Теплінський
Р. С. Хапко
І. М. Черевко
В. В. Шарко
І. О. Шевчук
Г. А. Шинкаренко
С. А. Щоголєв

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко

«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» внесений до Переліку наукових фахових видань України постановою Президії ВАК України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2014

ISSN 2304—1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK
ODESKOHO NATSIONALNOHO UNIVERSYTETU

(Odesa National University Herald)

Matematyka i Mekhanika
(Mathematics and Mechanics)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

Volume 19. Issue 4 (24). 2014

Odesa
«Astroprint»
2014

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

I. M. Koval (Editor-in-chief)
O. V. Zaporozhchenko (Deputy Editor-in-chief)
V. O. Ivanytsia (Deputy Editor-in-chief)
V. M. Khmarsky (Deputy Editor-in-chief)

S. M. Andrievskyi
Yu. F. Vaksman
V. V. Glebov
L. M. Golubenko
L. M. Dunaeva
V. V. Zamorov
V. Ye. Kruglov
V. G. Kushnir
V. V. Menchuk
O. V. Smyntyna
V. I. Truba
O. V. Tiurin
Ye. A. Cherkez
Ye. M. Chernoivanenko

Editorial board of the series
Mathematics and mechanics

V. Ye. Kruglov (Scientific Editor)
V. M. Evtukhov (Deputy Scientific Editor)

A. Ashyralyev
L. Fridman
I. Kátai
A. Laurinčikas
S. K. Aslanov
R. D. Bantsuri
V. I. Bernik
O. A. Boichuk
N. D. Vaysfeld
P. D. Varbanets
O. V. Verbitsky
O. N. Vitjuk
G. O. Voropaev
I. M. Gashenenko
D. V. Dmitrishin
A. A. Dorogovtsev
V. I. Zhukovsky
M. I. Ivanchov
A. I. Kalinin
V. O. Kapustyan
I. T. Kiguradze
P. I. Kogut
An. O. Korenovskyi
O. F. Kryvyy
D. D. Leshchenko
A. D. Milko
S. M. Mkhitaryan
O. G. Nakonechny
Yu. V. Nesterenko
A. P. Petravchuk
V. V. Pichkur
A. V. Plotnikov
V. G. Popov
V. G. Samoilenko
N. V. Skripnik
O. M. Stanzhytskyi
W. I. Sushchansky
Yu. V. Teplinskyi
R. S. Hapko
I. M. Cherevko
V. V. Sharko
I. A. Shevchuk
G. A. Shynkarenko
S. A. Schogolev

Executive Editor — O. D. Kichmarenko

© Odesa I. I. Mechnikov National University, 2014

ЗМІСТ

М А Т Е М А Т И К А

Гунявий О. А. Інтеграл Стілтьєса та формула підсумовування . . 7

Копач М. І., Шувар Б. А. Аналоги однопараметричного методу ітеративного агрегування для рівнянь з незнакосталими операторами 12

Кореновский А. А. Асимптотические разложения исчезающих решений дифференциальных уравнений в одном особом случае . . 17

Чайченко С. О. Приближение периодических функций в весовых пространствах Орлича 32

Drebotiy R., Shynkarenko H. Comparison of error indicators and refinement criteria for hp-adaptation algorithm for finite element method 45

Kichmarenko O. D., Sapozhnikova K. Yu. Averaging scheme for controlled systems with maximum of control function 58

Shchogolev S. On a one class of the solutions of the nonlinear first-order differential equation with oscillating coefficients 65

Vityuk A. N., Mykhailenko A. V. Boundary-value problem for differential equation with mixed Riemann—Liouville derivative of fractional order 71

М Е Х А Н І К А

Рачинская А. Л. Быстрое вращение динамически несимметричного спутника в гравитационном поле 80

Чекурин В. Ф., Постолаки Л. И. Вариационный метод однородных решений для осесимметричных задач теории упругости 88

Шацький І. П. Закриття тріщини, сполученої зі щілиною, в пластині за згину з розтягом – стиском 103

CONTENTS

M A T H E M A T I C S

Gunyavy O. Stieltjes integral and summation formula 7

Kopach M. I., Shuvar B. A. Analogs of single parametric aggregation-iterative method for equations with non constant sign operators . . . 12

Korenovskyi A. Asymptotical expansion of vanishing solutions of differential equations in one special case 17

Chaichenko S. O. Approximation of periodical function in the weighted Orlicz spaces 32

Drebotiy R., Shynkarenko H. Comparison of error indicators and refinement criteria for hp-adaptation algorithm for finite element method 45

Kichmarenko O. D., Sapozhnikova K. Yu. Averaging scheme for controlled systems with maximum of control function 58

Shchogolev S. On a one class of the solutions of the nonlinear first-order differential equation with oscillating coefficients 65

Vityuk A. N., Mykhailenko A. V. Boundary-value problem for differential equation with mixed Riemann—Liouville derivative of fractional order 71

M E C H A N I C S

Rachinskaya A. L. The rapid rotation of a dynamically asymmetric satellite in a gravitational field 80

Chekurin V. F., Postolaki L. I. Variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems 88

Shatskyi I. P. Closure of crack connected with a slit in a plate under bending and tension – compression loads 103

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 7–11

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 65B15
УДК 517.521.8

О. А. Гунявий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ІНТЕГРАЛ СТІЛТЬЄСА ТА ФОРМУЛА ПІДСУМОВУВАННЯ

Гунявий О. А. Інтеграл Стілтьєса та формула підсумовування. У роботі доводиться узагальнена формула підсумовування з використанням розширеного визначення інтегралу Стілтьєса.
Ключові слова: інтеграл Стілтьєса, сума, формула підсумовування.

Гунявый О. А. Интеграл Стилтьеса и формула суммирования. В работе доказывается обобщенная формула суммирования с использованием расширенного определения интеграла Стилтьеса.
Ключевые слова: интеграл Стилтьеса, сумма, формула суммирования.

Gunyavy O. Stieltjes integral and summation formula. In the article we prove a generalized summation formula using the expanded definition of the Stieltjes integral.
Key words: Stieltjes integral, sum, summation formula.

Вступ. В математиці часто доводиться користуватися різноманітними корисними інструментами. До таких інструментів, до прикладу, належать інтеграл Стілтьєса та всілякі формули підсумовування, див. [1]. Кожен інструмент може мати деякі обмеження на використання. Наприклад, інтеграл Стілтьєса $\int\limits_a^b f(x)dg(x)$ не існує у випадку, коли на відрізку $[a,b]$ знаходиться точка, в якій функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розрив. Однак можливо трохи змінити визначення інтегралу Стілтьєса і в таких випадках він вже буде існувати. Крім того, таке розширене визначення інтегралу Стілтьєса дозволить використовувати його для підсумовування більш широкого класу функцій за допомогою узагальненої формули підсумовування, окремим випадком якої є формула Ейлера—Маклорена, див. [1] та [2].

Основні результати

1. Зауваження щодо інтегралу Стілтьєса. Зробимо деякі поправки відносно визначення інтегралу Стілтьєса. Отже, нехай на відрізку $[a,b]$ задані функції $f(x)$ та $g(x)$, і нехай

$$D: a = x_0 < \zeta_1 \le x_1 \le \zeta_2 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le \zeta_n < x_n = b-$$

довільне розбиття відрізку $[a,b]$, а $|D| = \sup\limits_{i=\overline{1,n}} (x_i - x_{i-1})-$ діаметр розбиття. Розбиттю D поставимо у відповідність суму $S_D = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$. Тоді під

© Гунявий О. А., 2014

інтегралом Стілтьєса у вузькому розумінні будемо вважати

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \lim_{D,|D|\to 0} S_D,$$

якщо така границя існує.

Відмінність наведеного визначення від звичайного в строгих нерівностях $a < \zeta_1$ та $\zeta_n < b$, що дає можливість розглядати інтеграл Стілтьєса у випадках, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають в точках a і b розриви.

Нехай далі на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно можуть мати ізольовані розриви лише в точках $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$. Тоді під інтегралом Стілтьєса в широкому розумінні будемо вважати

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^{c_1} f(x)dg(x) + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dg(x) + \ldots + \int\limits_{c_k}^{b} f(x)dg(x),$$

де кожен інтеграл в сумі визначається у вузькому розумінні.

Всі властивості, справедливі для звичайного інтеграла Стілтьєса, будуть залишатися справедливими і для інтеграла Стілтьєса в широкому розумінні, за винятком інтегрування частинами.

Далі під $F(x+0)$ будемо розуміти $F(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} F(x+\varepsilon)$. Аналогічно $F(x-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to-0} F(x+\varepsilon)$. У випадку, коли на відрізку $[a, b]$ не існує точок, у яких функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розриви, інтеграл Стілтьєса в широкому розумінні співпадає зі звичайним інтегралом Стілтьєса. Тепер розглянемо випадок, коли функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розриви лише в крайніх точках a і b. У цьому випадку

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) = \int\limits_a^{a+0} f(x)dg(x) + \int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x) + \int\limits_{b-0}^{b} f(x)dg(x).$$

Але $\int\limits_a^{a+0} f(x)dg(x) = f(a+0)(g(a+0) - g(a))$.

Аналогічно $\int\limits_{b-0}^{b} f(x)dg(x) = f(b-0)(g(b) - g(b-0))$. Крім того, $\int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x)$ співпадає зі звичайним інтегралом Стілтьєса. Таким чином,

$$\int\limits_a^b f(x)dg(x) =$$

$$= f(a+0)(g(a+0) - g(a)) + \int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x) + f(b-0)(g(b) - g(b-0)).$$

Далі, інтегруючи частинами, маємо

$$\int\limits_{a+0}^{b-0} f(x)dg(x) = f(b-0)g(b-0) - f(a+0)g(a+0) - \int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x).$$

Тоді

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = -\int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x)+ \\ + f(b-0)g(b-0) + f(b-0)(g(b)-g(b-0))+ \\ + f(a+0)(g(a+0)-g(a)) - f(a+0)g(a+0) = \\ = -\int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x) + f(b-0)g(b) - f(a+0)g(a).\end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned}-\int\limits_{a+0}^{b-0} g(x)df(x) = \\ = g(a+0)(f(a+0)-f(a)) - \int\limits_{a}^{b} g(x)df(x) + g(b-0)(f(b)-f(b-0)),\end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = -\int\limits_{a}^{b} g(x)df(x)+ \\ + f(b-0)g(b) + g(b-0)(f(b)-f(b-0))- \\ - f(a+0)g(a) + g(a+0)(f(a+0)-f(a)).\end{aligned}$$

І тоді, остаточно

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_{x=a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} g(x)df(x)- \\ - (f(b)-f(b-0))(g(b)-g(b-0)) + (f(a+0)-f(a))(g(a+0)-g(a)).\end{aligned}$$

Із цієї формули, отриманої для інтеграла Стілтьєса у вузькому розумінні, отримуємо формулу для інтеграла Стілтьєса в широкому розумінні:

$$\begin{aligned}\int\limits_{a}^{b} f(x)dg(x) = f(x)g(x)|_{x=a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} g(x)df(x)+ \\ + (f(a+0)-f(a))(g(a+0)-g(a)) - (f(b)-f(b-0))(g(b)-g(b-0))+\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\left[(f(c_i+0)-f(c_i))(g(c_i+0)-g(c_i))-\right.$$
$$\left.-(f(c_i)-f(c_i-0))(g(c_i)-g(c_i-0))\right],$$

де $a<c_1<c_2<\ldots<c_k<b$ — всі точки на відрізку $[a,b]$, в яких функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно можуть мати розриви.

Зауважимо, що отримана формула залишається справедливою і для звичайного інтеграла Стілтьєса, який якщо існує, то не допускає наявності точок, в яких функції $f(x)$ та $g(x)$ одночасно мають розриви. А в цьому випадку $\forall c\in[a,b]$

$$(f(c+0)-f(c))(g(c+0)-g(c))=(f(c)-f(c-0))(g(c)-g(c-0))=0.$$

2. Формула підсумовування. Нехай $a_{n_1,\ldots,n_l}=a_{\mathbf{n}}$ і $\varphi(n_1,\ldots,n_l)=\varphi(\mathbf{n}):\mathbb{Z}^l\to\mathbb{R}-$ довільна арифметична функція від l змінних, де $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_l)$. $\mathbb{R}_\varphi=\left\{\varphi(\mathbf{n})\,\middle|\,\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^l\right\}$, до того ж $\forall r\in\mathbb{R}_\varphi$ діофантове рівняння $\varphi(n_1,\ldots,n_l)=r$ має скінчене число розв'язків.

Нехай далі

$$S(x)=\sum_{r_0<r\le x}\sum_{\varphi(\mathbf{n})=r}a_{\mathbf{n}}=\sum_{r_0<\varphi(\mathbf{n})\le x}a_{\mathbf{n}}=M(x)+E(x),$$

до того ж $M(x)\in C_{[a,b]}$, а отже, $E(x)$ може мати розриви тільки в елементах множини $\mathbb{R}_\varphi$, r_0- довільне фіксоване дійсне число, $r_0<x$.

Доведемо далі наступний результат.

Теорема. *Нехай $f(x)\in V_{[a,b]}$, де $r_0<a<b$. Тоді у вище наведених визначеннях справедлива наступна формула:*

$$\sum_{a<\varphi(\mathbf{n})\le b}a_{\mathbf{n}}f(\varphi(\mathbf{n}))=\int_a^b f(x)dM(x)+f(x)E(x)\big|_{x=a}^{b}-\int_a^b E(x)df(x),$$

де інтеграл Стілтьєса визначається в широкому розумінні.

Доведення. Дійсно, з одного боку

$$\int_a^b f(x)dS(x)=\sum_{a<\varphi(\mathbf{n})\le b}a_{\mathbf{n}}f(\varphi(\mathbf{n})-0).$$

З іншого боку

$$\int_a^b f(x)dS(x)=\int_a^b f(x)d(M(x)+E(x))=\int_a^b f(x)dM(x)+\int_a^b f(x)dE(x),$$

звідки

$$\sum_{a<\varphi(\mathbf{n})\le b}a_{\mathbf{n}}f(\varphi(\mathbf{n})-0)=\int_a^b f(x)dM(x)+\int_a^b f(x)dE(x).$$

Далі, інтегруючи частинами і пам'ятаючи, що функція $E(x)$ може мати розриви тільки в елементах множини $\mathbb{R}_\varphi$, отримуємо

$$\int\limits_a^b f(x)dE(x) = f(b)E(b) - f(a)E(a) - \int\limits_a^b E(x)df(x) +$$
$$+ (f(a+0) - f(a))(E(a+0) - E(a)) - (f(b) - f(b-0))(E(b) - E(b-0)) +$$
$$+ \sum_{r \in \mathbb{R}_\varphi \cap (a,b)} [(f(r+0) - f(r))(E(r+0) - E(r)) -$$
$$-(f(r) - f(r-0))(E(r) - E(r-0))] .$$

Але $S(x) = \sum\limits_{r_0 < \varphi(\mathbf{n}) \le x} a_{\mathbf{n}} = M(x) + E(x)$ і $M(x) \in C_{[a,b]}$, звідки

$$E(r+0) - E(r) = 0;$$
$$E(r) - E(r-0) = S(r) - S(r-0) = \sum_{\varphi(\mathbf{n}) = r} a_{\mathbf{n}},$$

і тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dE(x) = f(b)E(b) - f(a)E(a) - \int\limits_a^b E(x)df(x) - \sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} (f(\varphi(\mathbf{n})) - f(\varphi(\mathbf{n}) - 0))a_{\mathbf{n}}.$$

Таким чином,

$$\sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} a_{\mathbf{n}} f(\varphi(\mathbf{n}) - 0) = \int\limits_a^b f(x)dM(x) + f(b)E(b) - f(a)E(a) - \int\limits_a^b E(x)df(x) -$$
$$- \sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} (f(\varphi(\mathbf{n})) - f(\varphi(\mathbf{n}) - 0))a_{\mathbf{n}}.$$

Тоді остаточно маємо

$$\sum_{a < \varphi(\mathbf{n}) \le b} a_{\mathbf{n}} f(\varphi(\mathbf{n})) = \int\limits_a^b f(x)dM(x) + f(x)E(x)\big|_{x=a}^b - \int\limits_a^b E(x)df(x),$$

що і потрібно було довести.

Висновки. Таким чином, доведено узагальнену формулу підсумовування, яку можна використовувати для підсумовування широкого класу функцій.

1. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 7-е изд., стереотип. – М.: Наука, 1969. – Т.2. – 800 с.
2. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. – М.: Мир, 1998. – 703 с.

Надійшла 10.06.2014

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 12–16

Mathematical Subject Classification: 47J05, 47J25
УДК 517.988.6:517.988.8

М. І. Копач, Б. А. Шувар
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Національний університет «Львівська політехніка»

АНАЛОГИ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОГО МЕТОДУ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ З НЕЗНАКОСТАЛИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Копач М. І., Шувар Б. А. Аналоги однопараметричного методу ітеративного агрегування для рівнянь з незнакосталими операторами. Встановлені достатні умови збіжності одного класу однопараметричних агрегаційно-ітеративних методів. Отримані результати не містять вимог про додатність операторів і агрегуючих функціоналів, а також не потребують, щоб відповідні лінійні неперервні оператори були стискуючими.
Ключові слова: однопараметричні методи, агрегуючі функціонали, оператори стиску, декомпозиція.

Копач М. И., Шувар Б. А. Аналоги однопараметрического метода итеративного агрегирования для уравнений с незнакопостоянными операторами. Установлены достаточные условия сходимости одного класса однопараметрических агрегационно-итеративных методов. Полученные результаты не содержат требований о положительности операторов и агрегирующих функционалов, а также не требуют, чтобы соответствующие линейные непрерывные операторы были сжимающими.
Ключевые слова: однопараметрические методы, агрегирующие функционалы, операторы сжатия, декомпозиция.

Kopach M. I., Shuvar B. A. Analogs of single parametric aggregation-iterative method for equations with non constant sign operators. We establish sufficient conditions for the convergence of a class of one-parameter aggregation-iterative methods. Obtained results do not include conditions about positiveness of operators and aggregate functionals, and also claim that the corresponding linear continuous operators were contraction is not required.
Key words: single parametric methods, aggregative functionals, operators of compression, decomposition.

Вступ. При застосуванні багатопроцесорних обчислювальних пристроїв виникає потреба в наближених методах, що використовують принцип декомпозиції задач великої розмірності до задач меншої розмірності. Часто вживаний на практиці спосіб декомпозиції операторних рівнянь грунтується на методах ітеративного агрегування (див., напр., [1]), які виникли в математичній економіці (див., також [2, с. 157-158]). В [3–5] започатковано методику, яка дозволяє отримувати достатні умови збіжності методів ітеративного агрегування та їх узагальнень і аналогів. Ці умови не містять вимог про знакосталість заданого оператора і агрегуючих функіоналів та не передбачають, щоб спектральний радіус заданого оператора був меншим від одиниці.

© Копач М. І., Шувар Б. А., 2014

Основні результати

1. Основні алгоритми та допоміжні припущення і твердження. Однопараметричний алгоритм, досліджений в [2] для рівняння

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

можна записати за допомогою формул

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{2}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) + \alpha(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}) - (\varphi, b) \tag{3}$$

за припущень, що E — евклідів простір, $A, \widetilde{A} : E \to E$ є лінійними неперервними операторами, $b \in E$, λ — дійсне число, $\lambda \neq 1$, (φ, x) — значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементах $x \in E$, E^* — спряжений з E простір.

Вважаємо, що оператор $\widetilde{A}$ є таким, що

$$(\varphi, (A + \widetilde{A})x) = \lambda(\varphi, x) \quad (x \in E), \tag{4}$$

і справджуються рівності

$$a(x) = \frac{1}{(\varphi, x)} Ax, \quad (\varphi, a(x)) + \alpha(x) = \lambda \quad (x \in E). \tag{5}$$

Встановлені в [4] достатні умови збіжності цього алгоритму не передбачають умов, постульованих у [2], зокрема, A, φ, b не обовязково повинні бути додатніми, а спектральний радіус $\rho(A)$ може бути більшим від одиниці.

Розглядатимемо алгоритм (2), (3) замінивши в ньому формули (5) наступними:

$$a(x) = \frac{(A + \widetilde{A})}{(\varphi, x)}, \quad \alpha(x) = 0 \quad (x \in E). \tag{6}$$

Означимо множину Ξ як сукупність пар $\{x, y\}$, компоненти яких задовольняють рівність

$$(\varphi, x) + y = 0, \tag{7}$$

де $x \in E$, $y \in E'$, E' — множина дійсних чисел. Очевидно, що Ξ є підпростором простору $\widetilde{E} = E \times E'$, в якому норму $||x, y||$ пар $\{x, y\}$ означуємо за формулою

$$||x, y|| = \sqrt{||x||^2 + |y|},$$

в якій $||x||$ — норма елемента $x \in E$, $|y|$ — абсолютна величина числа y. До рівняння (1) приєднаємо рівняння

$$y = \lambda y + (\varphi, \widetilde{A}x) - (\varphi, b). \tag{8}$$

Наступні допоміжні твердження є аналогами відповідних лем із [3–5].

Лема 1. *Нехай $\lambda \neq 1$ і пара $\{x^*, y^*\}$ є розв'язком системи (1), (8) при $x = x^*, y = y^*$. Тоді $\{x^*, y^*\} \in \Xi$.*

Доведення. Очевидно, що

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, Ax^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* + (\varphi, \widetilde{A}x^*) - (\varphi, b) =$$

$$= (\varphi, (A + \widetilde{A})x^*) + \lambda y^* = \lambda[(\varphi, x^*) + y^*].$$

Звідси отримуємо, що при $\lambda \neq 1$ пара $\{x^*, y^*\}$ задовольняє співвідношення (7), що і завершує доведення леми. □

Лема 2. *Нехай $\lambda \neq 1$ і $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \Xi$. Якщо справджуються рівності (6), то для послідовностей $\{x^{(n)}\}$, $\{y^{(n)}\}$, побудованих за допомогою формул (2), (3), маємо $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \Xi \quad (n = 1, 2, \ldots)$.*

Доведення. З рівностей (2), (3) отримуємо

$$(\varphi, x^{(n+1)}) + y^{(n+1)} = (\varphi, Ax^{(n)}) + (\varphi, a(x^{(n)}))y^{(n)} -$$

$$-(\varphi, a(x^{(n)}))y^{(n+1)} + (\varphi, b) + \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) - (\varphi, b) =$$

$$= (\varphi, (A + \widetilde{A})x^{(n)}) + \lambda y^{(n)} - \lambda y^{(n+1)} + \lambda y^{(n+1)} = \lambda[(\varphi, x^{(n)}) + y^{(n)}],$$

де враховано, що з (4), (6) випливає рівність

$$(\varphi, a(x^{(n)})) = \lambda.$$

На підставі принципу індукції можна вважати лему доведеною. ■

2. Дослідження збіжності. Враховуючи рівності (6), перепишемо формули (2), (3) у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \tag{9}$$

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} + (\varphi, \widetilde{A}x^{(n)}) - (\varphi, b). \tag{10}$$

Співвідношення (1),(8) та (9), (10) є підставою для рівностей

$$y^{(n+1)} - y^* = (1 - \lambda)^{-1}(\varphi, \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*)),$$

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) + \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(y^{(n)} - y^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(y^{(n+1)} - y^*) =$$

$$= A(x^{(n)} - x^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(\varphi, x^{(n)} - x^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(1 - \lambda)^{-1}(\varphi, \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*)).$$

Звідси отримуємо

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{(A + \widetilde{A})x^{(n)}}{(\varphi, x^{(n)})}(1 - \lambda)^{-1}(\varphi, (I - A)(x^{(n)} - x^*)),$$

де I – тотожний оператор в E. Позначимо

$$B(x)\omega = A\omega - (1 - \lambda)^{-1}\frac{(A + \widetilde{A})x}{(\varphi, x)}(\varphi, (I - A)\omega), \tag{11}$$

вважаючи, що $\{x, y\} \in \Xi$, $\omega = x - x^*$.

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \neq 1$, $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \Xi$ *і при* $\{x, y\} \in \Xi$ *справджуються рівності (4), (6) та умова*

$$||B(x)|| \leqslant Q.$$

Якщо $Q < 1$, *то послідовність* $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, *отримана за допомогою процесу (9), (10), збігається за нормою в* $\widetilde{E}$ *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* Q *до розв'язку* $\{x^*, y^*\}$ *системи (1), (8), причому* $\{x^*, y^*\} \in \Xi$, $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \Xi \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

Доведення. Достатньо зазначити, що умови теореми забезпечують можливість використовувати принцип стиску і тому можна вважати її доведеною. ■

В окремому випадку, коли в умовах теореми 1 оператор $\widetilde{A}$ є нульовим, формула (11) має вигляд

$$B_0(x)\omega = A\omega - \frac{Ax}{(\varphi, x)}(\varphi, \omega).$$

Наслідок. *Нехай справджуються умови теореми 1 для випадку, коли* $\widetilde{A}$ *є нульовим оператором. Тоді для виконання твердження теореми 1 достатньо, щоб оператор* $B_0(x)\omega$ *задовольняв умову* $||B_0(x)|| \leqslant Q_0 < 1$.

Приклад. *Застосуємо алгоритм (9), (10) до системи*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,9x_1 + 11,8x_2 - 156, \\ x_2 &= 1,9x_1 + 7,9x_2 - 107, \end{aligned}$$

яка має розвязок $x^* = \{20; 10\}$.

Нехай $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$. *Тоді* $A + \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. *Для цієї матриці* $\lambda = 11$, $\varphi = \{1; 4\}$. *При* $x^{(0)} = \{1; 1\}$ *знаходимо* $y^{(0)} = -(\varphi, x^{(0)}) = -5$, $y^{(1)} = -\frac{(\varphi, b)}{1-\lambda} + \frac{(\varphi, \widetilde{A}x^{(0)})}{1-\lambda} = -58,51$, $y^{(0)} - y^{(1)} = 53,51$. *Для першої ітерації маємо*

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 2,9 \cdot 1 + 11,8 \cdot 1 + \tfrac{3 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 4 \cdot 1} \cdot 53,51 - 156 = 19,23, \\ x_2^{(1)} &= 1,9 \cdot 1 + 7,9 \cdot 1 + \tfrac{2 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{1 \cdot 1 + 4 \cdot 1} \cdot 53,51 - 107 = 9,82, \end{aligned}$$

Обчислимо

$$y^{(2)} = -\frac{(\varphi, b)}{1-\lambda} + \frac{(\varphi, \widetilde{A}x^{(1)})}{1-\lambda} = 59,9507,$$

$$y^{(1)} - y^{(2)} = 1,6013, \quad x^{(2)} = \{19,9651; 9,9964\}.$$

Висновки.

1. Ітераційний процес (9), (10), що отримується з формул (2), (3) при виборі $a(x), \alpha(x)$ за формулами (6) і побудові оператора $\widetilde{A}$ таким способом, щоб λ було власним числом оператора $A + \widetilde{A}$, а φ був лівим власним елементом цього оператора, дозволяє отримати просту умову збіжності алгоритму.

2. Умови збіжності не потребують, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус оператора A.

3. Умови збіжності алгоритму не містять вимог про знакосталість A, b, φ.
4. Методика занурення простору E в ширший простір $\widetilde{E} = E \times E'$ дозволяє дослідити клас однопараметричних агрегаційно-ітеративних методів, що охоплює, зокрема, однопараметричний метод ітеративного агрегування, досліджений в ([2], стор. 155 – 158).

1. **Цурков В.И.** Декомпозиция в задачах большой размерности. – М. : Наука, 1979. – 268 с.
2. **Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.** Позитивные линейные системы. – М. : Наука, 1985. – 255 с.
3. **Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.** Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 515 с.
4. **Шувар Б.А.** О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений // Львовский политехнический иститут. Львов. Деп.в Укр. НИИНТИ 10.08.88, № 1989. – Ук-88. Рус. – 1988. – 11 с.
5. **Шувар Б.А.** О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования // Вестник Львовского политехнического института. – 1989. – 232. – С. 140–142.

Надійшла 15.08.2014

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 17–31

Mathematical Subject Classification: 34E05, 34A12
УДК 517.925.54

А. А. Кореновский
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСЧЕЗАЮЩИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМ ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Кореновський А. О. Асимптотичні розвинення зникаючих розв'язків диференціальних рівнянь в одному особливому випадку. Розглядається система квазілінійних диференціальних рівнянь зі зникаючими (сумованими та несумованими) при $t \to +\infty$ множниками в правій частині. Наведені достатні умови, за яких для даної системи побудовані асимптотичні в певному сенсі розвинення O-розв'язків при $t \to +\infty$.
Ключові слова: квазилінійні сингулярні диференціальні рівняння, існування та асимптотичні розвинення зникаючих розв'язків.

Кореновский А. А. Асимптотические разложения исчезающих решений дифференциальных уравнений в одном особом случае. Рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений с исчезающими (суммируемыми и несуммируемыми) при $t \to +\infty$ множителями в правой части. Приведены достаточные условия, при выполнении которых для данной системы построены асимптотические в определенном смысле разложения O-решений при $t \to +\infty$.
Ключевые слова: квазилинейные сингулярные дифференциальные уравнения, существование и асимптотические разложения исчезающих решений.

Korenovskyi A. Asymptotical expansion of vanishing solutions of differential equations in one special case. Considered in this paper is a system of quasilinear differential equations with factors on the right side that disappear when $t \to \infty$ (absolutely integrable or not). Sufficient conditions are obtained under which it is possible to conduct the asymptotic in a certain sense at $t \to \infty$ expansions of O– solutions of the described system.
Key words: quasilinear singular differential equations, existence and asymptotic expansion of disappearing solutions.

Введение. Данная статья является непосредственным продолжением работы [1]. На исследуемую в [1] систему дифференциальных уравнений наложены дополнительные условия. Построены обобщенные (в смысле работ [2–4]) асимптотические разложения исчезающих при $t \to +\infty$ решений этой системы.

Основные результаты. Рассмотрим в некоторой области $G = \Delta \times \nabla$, $\Delta = \{t : \ t_0 \leqslant t < +\infty\}$,

$$\begin{aligned}
&\nabla = \{\xi : \ \mathrm{colon}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,, \\
&\xi_1 = \mathrm{colon}\,(\xi_{0,1}, \ldots, \xi_{0,n_1}) \in \mathbb{C}^{n_1}, \\
&\xi_2 = \mathrm{colon}\,(\xi_{0,n_1+1}, \ldots, \xi_{0,n_1+n_2}) \in \mathbb{C}^{n_2}, \\
&\xi_3 = \mathrm{colon}\,(\xi_{0,n_1+n_2+1}, \ldots, \xi_{0,n_1+n_2+n_3}) \in \mathbb{C}^{n_3}, \\
&\|\xi\| \leqslant c, \ c = const > 0, \ n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

© Кореновский А. А., 2014

(здесь и далее используется обозначение $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{i\,k}|$, где $A = (a_{i\,k})$ – $m\times n$-матрица, $n, m \in \mathbb{N}$) систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\xi_1' = Q_1(t) + B_{1\,1}(t)\xi_1 + B_{1\,2}(t)\xi_2 + B_{1\,3}(t)\xi_3 + F_1(t,\xi),\\
&\xi_2' = \alpha(t)\left[Q_2(t) + B_{2\,1}(t)\xi_1 + B_{2\,2}(t)\xi_2 + B_{2\,3}(t)\xi_3 + F_2(t,\xi)\right],\\
&\xi_3' = \beta(t)\left[Q_3(t) + B_{3\,1}(t)\xi_1 + B_{3\,2}(t)\xi_2 + B_{3\,3}(t)\xi_3 + F_3(t,\xi)\right]
\end{aligned} \tag{1}$$

(здесь и далее под произведением вектора $\beta(t)$ на матрицу будем подразумевать $\beta(t)B = (\beta_k(t)\,b_{k\,i})$, где $B = (b_{k\,i})$ – $m\times n$-матрица, $m = n_3$, $n \in \mathbb{N}$), в которой все величины, исключая t, являются, в общем случае комплексными, и выполняются такие условия:

1) $\beta(t) = \operatorname{colon}(\beta_1(t), \ldots, \beta_{n_3}(t))$,
$\beta_k(t)$ $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$, $\alpha(t)$ – скалярные функции,
$\alpha(t) \neq 0$, $\beta_k(t) \neq 0$ $(t \in \Delta)$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty}|\alpha(t)|\,dt = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\alpha(t) = 0$,
$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty}|\beta_k(t)|\;dt = l_k < +\infty$ $(l_k = const)$ $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$,
$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\beta_k'(t)}{\beta_k(t)} = 0$, $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$,
$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\beta_s(t)}{\beta_k(t)} = 0$ $\left(s > k,\ k = \overline{1, n_3 - 1},\ s = \overline{2, n_3}\right)$,
$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\beta_1(t)}{\alpha(t)} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\left(\alpha^{-1}(t)\beta_k(t)\right)'}{\beta_k(t)} = 0$ $\left(k = \overline{1, n_3}\right)$;

2) $Q_1(t) = \operatorname{colon}(q_1(t), \ldots, q_{n_1}(t))$, $Q_2(t) = \operatorname{colon}(q_{n_1+1}(t), \ldots, q_{n_1+n_2}(t))$, $Q_3(t) = \operatorname{colon}(q_{n_1+n_2+1}(t), \ldots, q_{n_1+n_2+n_3}(t))$,
$q_k(t) \in C_\Delta$, $\lim\limits_{t\to+\infty} q_k(t) = 0$ $\left(k = \overline{1, n_1 + n_2 + n_3}\right)$;

3) $B_{k\,i}(t)$ – матрицы соответствующей размерности, $B_{k\,i}(t) \in C_\Delta$ и существуют пределы $B_{k\,i}(+\infty) = B_{0,k\,i}$ $\left(k, i = \overline{1, 3}\right)$, где $B_{0,k\,i}$ – постоянные матрицы; корни λ_k $\left(k = \overline{1, n_1}\right)$ уравнения

$$\det\left(B_{0,11} - \lambda E\right) = 0$$

(E – единичная $n_1 \times n_1$-матрица) обладают свойством

$$|\operatorname{Re}\lambda_k| \geqslant \gamma,\ \ \gamma = const > 0,$$

корни γ_{n_1+k} $\left(k = \overline{1, n_2}\right)$ уравнения

$$\det\Big(B_{0,22} - B_{0,21}\left(B_{0,11}\right)^{-1}B_{0,12} - \lambda E\Big) = 0$$

(E – единичная $n_2 \times n_2$-матрица) обладают свойством

$$|\operatorname{Re}\left(\alpha(t)\gamma_{n_1+k}\right)| \geqslant \gamma|\alpha(t)| \quad (t \in \Delta);$$

4) вектор-функция

$$F(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(F_1(t,\xi), F_2(t,\xi), F_3(t,\xi)\right)$$

$$(F_1(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(f_1(t,\xi),\ldots,f_{n_1}(t,\xi)\right),$$
$$F_2(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(f_{n_1+1}(t,\xi),\ldots,f_{n_1+n_2}(t,\xi)\right),$$
$$F_3(t,\xi) = \operatorname{colon}\left(f_{n_1+n_2+1}(t,\xi),\ldots,f_{n_1+n_2+n_3}(t,\xi)\right))$$

удовлетворяет в области G условию Липшица по ξ

$$\left\|F\left(t,\xi_{(1)}\right) - F\left(t,\xi_{(2)}\right)\right\| \leq L\left\|\xi_{(1)} - \xi_{(2)}\right\|,\ L = L(c) = const,$$

где постоянную L можно сделать сколь угодно малой уменьшением числа c, определяющего область G, а также условию $F(t,0) = 0$.

Пусть $f(t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t) \in C^\infty_\Delta$, $f(t)\,\alpha_i(t)$, $\beta_j(t) : \Delta \to \mathbb{C}$ $(i = \overline{1,s};\ j = \overline{1,k})$ – некоторые скалярные функции, причем $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ удовлетворяют условиям типа 1)

$$\Bigg(\alpha_i(t) \neq 0,\ \beta_j(t) \neq 0\ (t \in \Delta),\ \int_{t_0}^{+\infty} |\alpha_i(t)|\ dt = +\infty,$$
$$\int_{t_0}^{+\infty} |\beta_j(t)|\ dt = l_j < \infty\ \ (l_j = const),\ \lim_{t\to+\infty} \frac{\left(\alpha_s^{-1}(t)\beta_1(t)\right)'}{\beta_1(t)} = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\alpha_m(t)}{\alpha_n(t)}\right)' \frac{1}{\alpha_m(t)} = 0,\ m > n,\ m = \overline{2,s},\ n = \overline{1,s-1},$$
$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\beta_r(t)}{\beta_p(t)}\right)' \frac{1}{\beta_r(t)} = 0,\ r > p,\ r = \overline{2,k},\ p = \overline{1,k-1}\Bigg).$$

Введем обозначения

$$f^{\{0\}}(t) = |f(t)|,\ f^{\{1\}}_{\alpha_i(t)}(t) = \frac{f'(t)}{\alpha_i(t)},\ \left(i = \overline{1,s}\right),\ f^{\{1\}}(t) = \sum_{i=1}^{s} \left|f^{\{1\}}_{\alpha_i(t)}(t)\right|,$$

$$f^{<0>}(t) = |f(t)|,\ f^{<1>}_{\beta_i(t)}(t) = \int_{+\infty}^{t} \beta_i(t) f(t)\,dt,\ \left(i = \overline{1,k}\right),$$

$$f^{<1>}(t) = \sum_{i=1}^{k} \left|f^{<1>}_{\beta_i(t)}(t)\right|,$$

$$f^{[0]}(t) = |f(t)|,\ f^{[1]}_{\alpha_i(t)}(t) = f^{\{1\}}_{\alpha_i(t)}(t),\ \left(i = \overline{1,s}\right),$$

$$f^{[1]}_{\beta_j(t)}(t) = f^{<1>}_{\beta_j(t)}(t),\ \left(j = \overline{1,k}\right),\ f^{[1]} = f^{\{1\}}(t) + f^{<1>}(t).$$

Обозначив $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ символами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{s+k}$ соответственно, положим

$$f^{[r]}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_{r-1}}\gamma_{i_r}}(t) = \begin{cases} \left[f^{[r-1]}_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_{r-1}}}(t)\right]^{\{1\}}_{\gamma_{i_r}}, & i_r \leqslant s, \\ \left[f^{[r-1]}_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_{r-1}}}(t)\right]^{<1>}_{\gamma_{i_r}}, & s < i_r \leqslant s+k, \end{cases}$$

$$\left(i_1, i_2, \ldots, i_r, r \in \mathbb{N};\ i_1, i_2, \ldots, i_r = \overline{1, s+k}\right),$$

$$f^{[r]}(t) = \sum_{i_r=1}^{s+k} \sum_{i_{r-1}=1}^{s+k} \cdots \sum_{i_1=1}^{s+k} \left| f^{[r]}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_r}}(t) \right|.$$

$f^{[r]}_{\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_r}}(t)$ будем называть $\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\ldots\gamma_{i_r}$-производной функции $f(t)$ r-го порядка, а $f^{[r]}(t)$ – мажорантой полной $\binom{\alpha}{\beta}$-производной функции $f(t)$ r-го порядка, где $\alpha = \operatorname{strit}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, $\beta = \operatorname{strit}(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$.

Дополнительно к условиям 1) – 4) относительно системы дифференциальных уравнений (1) будем предполагать, что для нее выполнены следующие условия:

1a) $\alpha(t) \in C^\infty_\Delta,\ \beta_i(t) \in C^\infty_\Delta,\ \left(i = \overline{1, n_3}\right)$;

2a) $q_k(t) \in C^\infty_\Delta,\ \left(k = \overline{1, n_1+n_2+n_3}\right)$;

3a) $b_{ki}(t) \in C^\infty_\Delta,\ \left(k, i = \overline{1, n_1+n_2+n_3}\right)$;

4a) $F(t,\xi) \in C^\infty_G$ и существует функция $L(t) \in C^\infty_\Delta$, $\sup\limits_\Delta |L(t)| < +\infty$ такая, что в области G справедливы неравенства

$$\|F(t,\xi)\| \leqslant L(t)\|\xi\|^2, \quad \left\|F'_\xi(t,\xi)\right\| \leqslant L(t)\|\xi\|,$$

$$\left\| \left(\frac{\partial^N F}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_{n_1+n_2+n_3}^{k_{n_1+n_2+n_3}}}(t,0) \right)^{[r]} \right\| = O\left(L^{[r]}(t)\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+n_3} k_i = N;\ N = 2, 3, \ldots;\ r = 0, 1, 2, \ldots \right),$$

и, кроме того,

$$b^{[r]}_{ki}(t) = O\left(L^{[r]}(t)\right),\ \left(k, i = \overline{1, n_1+n_2+n_3},\ r = 0, 1, 2, \ldots\right);$$

5a) если обозначить

$$P_r(t) = \sup_{\tau \geqslant t} \max_k \left\{ q_k^{[r-1]}(\tau),\ \alpha^{[r-1]}(\tau),\ \beta^{[r-1]}(\tau),\ L^{[r]}(\tau) \right\},$$

$$\left(k = \overline{1, n_1+n_2+n_3};\ r = 1, 2, \ldots\right),$$

где максимум берется при каждом фиксированном $\tau > t_0$, то

$$\lim_{t \to +\infty} P_r(t) = 0,\ (r = 1, 2, \ldots).$$

Определение 1. *Для каждой функции $v(t)$, $t \geqslant t_0$, для которой выполняется оценка вида*

$$|v(t) \leqslant A_v \sum_{r=r_1}^{r_2} P_1^{k_1}(t) P_2^{k_2}(t) \ldots P_r^{k_r}(t),\ t \geqslant t_0,\ A_v = const,$$

где r_1, r_2 – некоторые натуральные числа, $r_1 \leqslant r_2$ и где для каждого данного значения r показатели $k_1, \ldots, k_r$ могут принимать любые целые неотрицательные значения с условием, что $k_1 + 2k_2 + \cdots + rk_r = r$, условимся говорить, что она имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r_1$ и будем писать $R^\beta_\alpha(v) \geqslant r_1$.

Чтобы обобщить это определение на матрицы (в частности, столбцы) условимся неравенство $R_\alpha^\beta(D) \geqslant r_1$, где $D = (d_{ki}(t))$, $t \geqslant t_0$ считать равносильным требованию

$$R_\alpha^\beta(\|D\|) \geqslant r_1.$$

Условимся также неравенство $R_\alpha^\beta(v) \geqslant 0$ считать эквивалентным свойству ограниченности функции $v(t)$ при $t \geqslant t_0$.

Приведем без доказательства некоторые очевидные свойства $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга.

Свойство 1. *Из неравенства $R_\alpha^\beta(v) \geqslant r_1$ вытекает любое неравенство вида $R_\alpha^\beta(v) \geqslant r$, где $r = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$.*

Свойство 2. *Из неравенства $|v_1(t)| \leq |v_2(t)|$, $t \geqslant t_0$ и $R_\alpha^\beta(v_2) \geqslant r_1$ вытекает неравенство $R_\alpha^\beta(v_1) \geqslant r_1$.*

Свойство 3. *Если даны функции $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$ и известно, что $R_\alpha^\beta(v_k) \geqslant r_k$, то имеют место также следующие неравенства*

1. $$R_\alpha^\beta(v_1 + \cdots + v_l) \geqslant \widetilde{r}, \text{ где } \widetilde{r} = \min_k \{r_k\},$$

2. $$R_\alpha^\beta(v_1 \cdot v_2 \ldots v_l) \geqslant r_1 + r_2 + \cdots + r_l,$$

$$R_\alpha^\beta\left(v_1^{k_1} \cdot v_2^{k_2} \ldots v_l^{k_l}\right) \geqslant r_1 k_1 + r_2 k_2 + \cdots + r_l k_l,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – любые натуральные числа.

Следствие 1. *Если $D = (d_{ki}(t))$ – некоторая $n_1 \times n_2$ матрица, то условие $R_\alpha^\beta(D) \geqslant r$ равносильно $n_1 \cdot n_2$ условиям*

$$R_\alpha^\beta(d_{ki}) \geqslant r, \ \left(k = \overline{1,n_1}, \ i = \overline{1,n_2}\right).$$

Это свойство вытекает из свойства 3.

Следствие 2. *Если $R_\alpha^\beta(v) \geqslant r$, а функция $\omega(t)$ ограничена при $t \geqslant t_0$, то $R_\alpha^\beta(v\omega) \geqslant r$.*

Свойство 4. *Если для функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$ существуют производные $v_k'(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$ и известно, чт*

$$R_\alpha^\beta(v_k) \geqslant r_k, \ R_\alpha^\beta\left(v_k^{[1]}\right) \geqslant r_k + 1,$$

то будут иметь место также неравенства

$$R_\alpha^\beta\left[(v_1 \ldots v_l)^{[1]}\right] \geqslant r_1 + \cdots + r_l + 1,$$

$$R_\alpha^\beta\left[\left(v_1^{k_1} \ldots v_l^{k_l}\right)^{[1]}\right] \geqslant r_1 k_1 + \cdots + r_l k_l + 1,$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_l$ – любые натуральные числа.

Определение 2. *Условимся функциями класса W_α^β называть такие функции $v(t)$, $t \geqslant t_0$, для которых существуют $v^{[k]}(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ при $t \geqslant t_0$ и существует хотя бы одно целое число $r \geqslant 0$ такое, что имеет место бесконечная последовательность неравенств*

$$R_\alpha^\beta(v) \geqslant r,\ R_\alpha^\beta\left(v^{[1]}\right) \geqslant r+1,\ \dots\ ,\ R_\alpha^\beta\left(v^{[k]}\right) \geqslant r+k,\ \dots .$$

Число r, входящее в это определение, мы будем называть начальным $\binom{\alpha}{\beta}$-рангом данной функции $v(t)$. Отсутствие однозначности в определении r не препятствует использованию такого понятия.

Свойство 5. *К классу W_α^β заведомо относятся все коэффициенты системы (1) (удовлетворяющие условиям 1) – 4), 1a) – 5a)) (при этом можно взять $r = 0$) и их $\binom{\alpha}{\beta}$-производные любого порядка (при этом можно считать r равным порядку $\binom{\alpha}{\beta}$-производной).*

Свойство 6. *Если функции $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$ принадлежат классу W_α^β, а числа r_k $\left(k = \overline{1,l}\right)$ являются начальными $\binom{\alpha}{\beta}$-рангами этих функций, то число $r_0 = \min\limits_k \{r_k\}$ можно рассматривать как начальный $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг любой из функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$.*

Условимся называть r_0 общим начальным $\binom{\alpha}{\beta}$-рангом функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$.

Свойство 5 очевидно, а свойство 6 вытекает из свойства 1.

Свойство 7. *Если для функций $v_k(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$, существуют производные $v_k^{(r)}(t)$ $\left(k = \overline{1,l}\right)$ и известно, что*

$$R_\alpha^\beta\left(v_k\right) \geqslant r_k,\ R_\alpha^\beta\left(v_k^{[r]}\right) \geqslant r_k + r,$$

$\omega(t)$ – функция класса W_α^β с начальным $\binom{\alpha}{\beta}$-рангом равным нулю, $\omega(t) \neq 0$ и $\omega^{-1}(t)$ – ограничена при $t \geqslant t_1$, то имеют место такие неравенства

$$R_\alpha^\beta\left[\left(\frac{v_1^{k_1}\dots v_l^{k_l}}{\omega(t)}\right)^{[1]}\right] \geqslant r_1k_1 + r_2k_2 + \dots + r_lk_l + 1,$$

$$R_\alpha^\beta\left[\left(\frac{v_1^{k_1}\dots v_l^{k_l}}{\omega(t)}\right)^{[r]}\right] \geqslant r_1k_1 + r_2k_2 + \dots + r_lk_l + r,$$

где $k_1, k_2, \dots, k_l$ – любые натуральные числа.

Условимся еще в тех случаях, когда нам задана вектор-функция $\widetilde{F}(t, Z)$, компоненты разложения в ряд Тейлора по Z которой являются рядами от $Z_1, \dots, Z_l$ тип

$$\sum_{k_1+k_2+\dots+k_l=0}^{\infty} \widetilde{p}_{kk_1\dots k_l}(t) Z_1^{k_1}\dots Z_l^{k_l},$$

выражения $\widetilde{p}_{kk_1\ldots k_l}(t)Z_1^{k_1}\ldots Z_l^{k_l}$ называть составляющими вектор-функции $\widetilde{F}(t,Z)$, а саму вектор-функцию будем называть v-рядом от Z. Функции $\widetilde{p}_{kk_1\ldots k_l}(t)$ будем называть коэффициентами v-ряда $\widetilde{F}(t,Z)$.

Применим к системе (1) преобразование

$$\begin{gathered}\xi_1 = X_1,\\ \xi_2 = \alpha(t)C_{21}(t)X_1 + X_2,\\ \xi_3 = X_3,\end{gathered} \tag{2}$$

где $X_i(t)$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ – столбцы новых неизвестных функций,

$$C_{21}(t) = B_{21}(t)B_{11}^{-1}(t);$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}X_1' = Q_1(t) + \left[B_{11} + \alpha B_{12}C_{21}\right]X_1 + B_{12}X_2 + B_{13}X_3 + \Phi_1(t,X),\\ X_2' = \alpha\left\{Q_2(t) - C_{21}Q_1(t) + \left[\alpha B_{22}C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha}C_{21} - C_{21}' - \alpha C_{21}B_{12}C_{21}\right]X_1 + \right.\\ \left. + \left[B_{22} - C_{21}B_{12}\right]X_2 + \left[B_{13} + \alpha B_{32}C_{21}\right]X_3 + \Phi_2(t,X)\right\},\\ X_3' = \beta\left\{Q_3(t) + \left[B_{31} + \alpha B_{32}C_{21}\right]X_1 + B_{32}X_2 + B_{33}X_3 + \Phi_3(t,X)\right\},\end{gathered} \tag{3}$$

где все величины – функции переменной t,

$$\Phi_1(t,X) = F_1(t,\xi(X)), \quad \Phi_2(t,X) = F_2(t,\xi(X)) - C_{21}(t)F_1(t,\xi(X)),$$

$$\Phi_3(t,X) = F_3(t,\xi(X)), \quad \xi(X) = \operatorname{colon}\left(X_1, \alpha(t)C_{21}(t)X_1 + X_2, X_3\right).$$

Составим вспомогательную линейную относительно X_k $\left(k=\overline{1,3}\right)$ систему уравнений

$$\begin{gathered}Q_1(t) + \left[B_{11} + \alpha B_{12}C_{21}\right]X_1 + B_{12}X_2 + B_{13}X_3 = 0,\\ Q_2(t) - C_{21}Q_1(t) + \left[B_{22} - C_{21}B_{12}\right]X_2 + \left[B_{13} + \alpha B_{32}C_{21}\right]X_3 = 0,\\ X_3 - \int_{+\infty}^{t}\beta Q_3(t)\,dt = 0.\end{gathered}$$

Запишем ее сокращенно в форме

$$H(t,Z) = 0, \tag{4}$$

где $Z = \operatorname{colon}\left(X_{11}(t), X_{21}(t), X_{31}(t)\right)$. Предполагая далее, что все нижеследующие операции законны, применим к системе (3) преобразование

$$Z = \widetilde{Z_1}(t) + Z_2,$$

где $Z_2 = \operatorname{colon}\left(X_{12}(t), X_{22}(t), X_{32}(t)\right)$ – новый неизвестный столбец, а столбец $\widetilde{Z_1}(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{11}}, \widetilde{X_{21}}, \widetilde{X_{31}}\right)$ определяется из векторного уравнения

$$H\left(t,\widetilde{Z}\right) = 0, \quad t \geqslant t_0$$

и обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty}\widetilde{Z_1}(t)=0$.

Очевидно, что такое решение системы уравнений является единственным при выполнении условий 2), 3).

Запишем вспомогательную систему дифференциальных уравнений для столбцов $X_{12}(t),\ X_{22}(t),\ X_{32}(t)$

$$X'_{12}=-\widetilde{X_{11}}'(t)+\Phi_1\left(t,\widetilde{Z_1}\right)+\left[B_{11}+\alpha B_{12}C_{21}\right]X_{12}+$$

$$+B_{12}X_{22}+B_{13}X_{32}+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{1X_i}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{i2}+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{1X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}+\ldots,$$

$$X'_{22}=\alpha\left\{-\frac{\widetilde{X_{21}}'(t)}{\alpha}+\Phi_2\left(t,\widetilde{Z_1}\right)+\right.$$

$$+\left[\alpha B_{22}C_{21}-\frac{\alpha'}{\alpha}C_{21}-C'_{21}-\alpha C_{21}B_{12}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{11}}(t)+X_{12}\right)+$$

$$+\left[B_{22}-C_{21}B_{12}\right]X_{22}+\left[B_{13}+\alpha B_{32}C_{21}\right]X_3+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{2X_i}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{i2}+$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{2X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}+\ldots\right\},$$

$$X'_{32}=\beta\left\{\Phi_3\left(t,\widetilde{Z_1}\right)+\left[B_{31}+\alpha B_{32}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{11}}(t)+X_{12}\right)+\right.$$

$$+B_{32}\left(\widetilde{X_{21}}(t)+X_{22}\right)+B_{33}\left(\widetilde{X_{31}}(t)+X_{32}\right)+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{3X_i}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{i2}+$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\Phi''_{3X_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}+\ldots\right\}.$$

Здесь $X_{12}=\mathrm{colon}\,(x_{12},\ldots,x_{n_12})$, $X_{22}=\mathrm{colon}\,(x_{n_1+1\,2},\ldots,x_{n_1+n_2\,2})$,

$$X_{32}=\mathrm{colon}\,(x_{n_1+n_2+1\,2},\ldots,x_{n_1+n_2+n_3\,2}),$$

$$\Phi^{(N)}_{sX_1^{k_1}X_2^{k_2}X_3^{k_3}}\left(t,\widetilde{Z_1}\right)X_{12}^{k_1}X_{22}^{k_2}X_{32}^{k_3}=\left(p_{l_s i_1\ldots i_{n_1+n_2+n_3}}(t)\prod_{s=1}^{n_1+n_2+n_3}x_{s2}^{i_s}\right),$$

($s=\overline{1,3}$, $l_1=\overline{1,n_1}$, $l_2=\overline{n_1+1,n_1+n_2}$, $l_3=\overline{n_1+n_2+1,n_1+n_2+n_3}$, N, $i_1,\ldots,$ $i_{n_1+n_2+n_3}$ — натуральные числа такие, что $i_1+\cdots+i_{n_1+n_2+n_3}=N$; $p_{l_s i_1\ldots i_{n_1+n_2+n_3}}(t)$ представляют собой коэффициенты разложения функции $f_{l_s}(t,X)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\widetilde{Z_1}$).

Эта система позволяет найти столбец $\widetilde{Z_2}$ тем же способом, что и столбец $\widetilde{Z_1}$. Затем полагаем

$$Z = \widetilde{Z_1}(t) + \widetilde{Z_2}(t) + Z_3,$$

где Z_3 – новый неизвестный столбец.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим ряд, формально удовлетворяющий системе (3) и, вообще говоря, расходящийся.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о взаимосвязи между полученным формальным рядом и истинными решениями системы (3).

Теорема 1. *При выполнении условий 1) – 4), 1a) – 5a) решение системы уравнений (4) $Z = U_1(t)$, $t \in \Delta$ с условием $Z(t) \to 0$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-производные любого порядка, причем $U_1^{[r]}(t)$ $(r = 0, 1, \dots)$ есть вектор $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга $\geqslant r + 1$.*

Существование всех $\binom{\alpha}{\beta}$-производных $(r = 1, 2, \dots)$ вытекает из известных теорем анализа, остается только получить для них оценку (при этом наличие свойства $R_\alpha^\beta(U_1) \geqslant 1$ очевидно).

Запишем тождество $H(t, U_1) = 0$ в виде

$$Q(t) + P(t)U_1 = 0 \tag{5}$$

($Q(t) = H(t, 0)$, $P(t) = H'_Z(t, U_1)$, причем $|\mathrm{Det}\,(H'_Z(t, U_1))| \geqslant d > 0$, $d = const$ при $t \geqslant t_0$, $P(t)$ и $Q(t)$ принадлежат классу W_α^β).

Из (5), с одной стороны, следует

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| - U_1^{\{1\}}(t) = 0. \tag{6}$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| - U_1^{<1>}(t) = 0. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| + \sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| = U_1^{[1]}.$$

Так как каждая составляющая левой части меет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant 2$ (легко проверить, применяя свойства 3, 4 и 7 $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга), то непосредственно из этого тождества ясно, что

$$R_\alpha^\beta\left(U_1^{[1]}(t)\right) \geqslant 2.$$

Докажем по индукции, что $U_1^{[r]}(t)$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r + 1$. В самом деле, для $r = 1$ это верно. Предположим, что это утверждение верно для номера r. Поскольку из (5) следует, что

$$P^{-1}(t)Q(t) + U_1(t) = 0,$$

$$U_1^{[r]}(t) = \sum_{i_r=1}^{n_3+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{n_3+1} \left| U^{[r]}_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t) \right| \tag{8}$$

($\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_3+1}$ равны $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n_3}$ соответственно), то каждая составляющая правой части (8) определяется из равенств вида

$$U^{[r]}_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t) - H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t) = 0, \tag{9}$$

где $H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)$ – некоторая функция $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга $\geqslant r+1$. Из (9), с одной стороны, следует

$$\left[U^{[r]}_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\right]^{\{1\}} - \left|\alpha(t) H'_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\right| = 0. \tag{10}$$

С другой стороны

$$\left[U^{[r]}_{1\,\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\right]^{<1>} - \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t) H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\, dt \right| = 0. \tag{11}$$

Складывая (10) и (11) и суммируя их по i_1, i_2, …, i_r будем иметь

$$U_1^{[r+1]} = \sum_{i_r=1}^{n_3+1} \cdots \sum_{i_1=1}^{n_3+1} \left(\left|\alpha(t) H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\right| + \sum_{i=1}^{n_3} \left| \int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t) H_{\gamma_{i_1}\ldots\gamma_{i_r}}(t)\, dt \right| \right). \tag{12}$$

Поскольку все составляющие правой части (12) имеют $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r+2$, то и $U_1^{[r+1]}$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant r+2$. Тем самым теорема 1 доказана.

Анализируя метод построения формальных решений, а также учитывая, что $H(t, U_1) \equiv 0$ при $t > t_0$ $\left(U_1(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{11}}, \widetilde{X_{21}}, \widetilde{X_{31}}\right)\right)$, нетрудно далее убедиться, что столбец $U_2(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{12}}, \widetilde{X_{22}}, \widetilde{X_{32}}\right)$ формального решения находится из системы неявных уравнений

$$\begin{gathered}
-\Phi_1(t, U_1) + \widetilde{X_{11}}'(t) = \left[B_{11} + \alpha B_{12} C_{21} + \Phi'_{1\,X_1}(t, U_1)\right] X_{12} + \\
+ \left[B_{12} + \Phi'_{1\,X_2}(t, U_1)\right] X_{22} + \left[B_{13} + \Phi'_{1\,X_3}(t, U_1)\right] X_{32}, \\
-\Phi_2(t, U_1) + \alpha^{-1} \widetilde{X_{21}}'(t) - \left[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - \right. \\
\left. - C'_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21}\right] \widetilde{X_{11}}(t) = \\
= \left[B_{22} - C_{21} B_{12} + \Phi'_{2\,X_2}(t, U_1)\right] X_{22} + \left[B_{13} + \alpha B_{32} C_{21} + \Phi'_{2\,X_3}(t, U_1)\right] X_{32}, \\
X_{32} = \int\limits_{+\infty}^{t} \beta(t) \left[\left(B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}\right) \widetilde{X_{11}}(t) + B_{32} \widetilde{X_{21}}(t) + \right. \\
\left. + B_{33} \widetilde{X_{31}}(t) + \Phi_3(t, U_1)\right] dt, \quad t \geqslant t_0,
\end{gathered} \tag{13}$$

где

$$\Phi'_{1\,X_1}(t, U_1),\ \Phi'_{1\,X_2}(t, U_1),\ \Phi'_{1\,X_3}(t, U_1),\ \Phi'_{2\,X_2}(t, U_1),\ \Phi'_{2\,X_3}(t, U_1)$$

стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Имеет место

Лемма 1. *При выполнении для системы уравнений (4) условий 1) – 4), 1a) – 5a) существует вектор* $U_2(t) = \operatorname{colon}\left(\widetilde{X_{12}}, \widetilde{X_{22}}, \widetilde{X_{32}}\right)$, *стремящийся к нулю при* $t \to +\infty$, *удовлетворяющий системе (13) и обладающий свойством*

$$R_\alpha^\beta(U_2) \geqslant 2.$$

Чтобы оценить $\binom{\alpha}{\beta}$–производные $U_2^{[r]}(t)$ $(r = 1, 2, \dots)$, докажем следующую теорему, более общую, чем теорема 1.

Теорема 2. *Пусть дано векторное уравнение*

$$\widetilde{H}(t, Z) = Q(t) + P(t)Z = 0,\ t \geqslant t_0, \tag{14}$$

$$\left(Q(t) = \widetilde{H}(t, 0),\ P(t) = \widetilde{H}'_Z(t, 0)\right),$$

коэффициенты которого являются при $t \geqslant t_0$ *функциями класса* W_α^β, *причем общий начальный* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранг элементов столбца* $Q(t)$ *равен* $\widetilde{r_0} \geqslant 1$, *а остальные коэффициенты имеют начальный* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранг* $\geqslant 0$ *и известно, что*

$$|\mathrm{Det}P(t)| \geqslant d_1 > 0,\ t \geqslant t_0,\ d_1 = const.$$

Тогда уравнение (14) заведомо имеет решение $Z = \widetilde{U}(t)$, *стремящееся к нулю при* $t \to +\infty$, *непрерывное в некотором промежутке* $\left[\widetilde{t}, +\infty\right[$, *это решение имеет* $\binom{\alpha}{\beta}$*-производные любого порядка, причем* $\widetilde{U}^{[r]}(t)$ $(r = 1, 2, \dots)$ *есть столбец* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранга* $\geqslant r + \widetilde{r_0}$.

Существование искомых решений $Z = \widetilde{U}(t)$, а также тот факт, что $\widetilde{U}(t)$ есть стобец $\binom{\alpha}{\beta}$-ранга $\geqslant \widetilde{r_0}$, очевидны.

Заметим, что тогда любое слагаемое в левой части (14) после подстановки в (14) вместо Z вектора $\widetilde{U}(t)$ будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг не меньше, чем $\widetilde{r_0}$. Чтобы оценить $\widetilde{U}^{[1]}(t)$, запишем тождество $\widetilde{H}\left(t, \widetilde{U}\right) = 0$ в виде

$$P^{-1}(t)Q(t) + \widetilde{U}(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| - \widetilde{U}^{\{1\}}(t) = 0.$$

С другой стороны

$$\sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| - \widetilde{U}^{<1>}(t) = 0.$$

Сложив два последних равенства, получим

$$\left|\alpha^{-1}(t)\left(P^{-1}(t)Q(t)\right)'\right| + \sum_{i=1}^{n_3}\left|\int\limits_{+\infty}^{t} \beta_i(t)P^{-1}(t)Q(t)\,dt\right| - \widetilde{U}^{[1]}(t) = 0,\ t \geqslant t_0.$$

Легко убедиться, что каждая составляющая v-ряда, состоящего из первых n_3+1 слагаемых, будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг не меньше, чем $\widetilde{r_0}+1$, а тогда и $\widetilde{U}^{[1]}(t)$ будет иметь $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant \widetilde{r_0}+1$. Дальше поступаем так же как и в случае теоремы 1.

Сформулируем теперь две основные теоремы о формальных рядах указанного типа.

Теорема 3. *Если система (3) удовлетворяет условиям 1) – 4), 1a) – 5a), то для нее заведомо существует формальное частное решение*

$$Z = \operatorname{colon}(X_1, X_2, X_3) \sim \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t),$$

обладающее такими свойствами:

1. *Каждый столбец $U_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ существует и имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-производные любого порядка в некотором промежутке $[T_k, +\infty\,[$, причем числа T_k $(k = 1, 2, \dots)$, вообще говоря, не равны между собой;*
2. *k-й столбец $U_k(t)$ $(k = 1, 2, \dots)$ имеет $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant k$, а его $\binom{\alpha}{\beta}$-производная r-го порядка $U_k^{[r]}(t)$ $(r = 1, 2, \dots)$ – $\binom{\alpha}{\beta}$-ранг $\geqslant k + r$.*

Действительно, существование столбца $U_2(t)$ в некотором промежутке $[T, +\infty\,[$ и то, что $R_\alpha^\beta\left(U_2^{[r]}\right) \geqslant r+2$ $(r = 0, 1, \dots)$, уже было установлено.

Для доказательства теоремы 3 по индукции допустим, что столбцы $U_1(t), \dots,$ $U_{k-1}(t)$ существуют и обладают нужными свойствами. Нетрудно показать, что столбец $U_k(t)$ должен определяться тогда из такой системы уравнений

$$\widetilde{X_{11}}' + \widetilde{X_{12}}' + \dots + \widetilde{X_{1\,k-1}}' = Q_1(t) + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}]\left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}}\right) +$$

$$+ B_{12}\left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}}\right) + B_{13}\left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}}\right) +$$

$$+ \Phi_1(t, U_{k-1} + \dots + U_1) + \sum_{i=1}^{3} \Phi'_{1\,X_i}(t, U_{k-1} + \dots + U_1)\, X_{i\,k},$$

$$\widetilde{X_{21}}' + \widetilde{X_{22}}' + \dots + \widetilde{X_{2\,k-1}}' = \alpha\Bigg\{Q_2 - C_{21}Q_1 + \Bigg[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} -$$

$$- C'_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21}\Bigg]\left(\widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}}\right) +$$

$$+ [B_{22} - C_{21} B_{12}]\left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}}\right) +$$

$$+ [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}]\left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}}\right) + \Phi_2(t, U_{k-1} + \dots + U_1) +$$

$$+ \sum_{i=2}^{3} \Phi'_{2\,X_i}(t, U_{k-1} + \dots + U_1)\, X_{i\,k}, \tag{15}$$

$$X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}} = \int\limits_{+\infty}^{t} \beta(t) \Big[Q_3(t) +$$

$$+ \left[B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}\right] \left(\widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}}\right) + B_{32} \left(\widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}}\right) +$$

$$+ B_{33} \left(\widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}}\right) + \Phi_3\left(t, U_{k-1} + \dots + U_1\right) \Big]\, dt.$$

Вычитая из (15) аналогичное равенство, полученное из (15) заменой k на $k-1$, в котором $Z_{k-1} = U_{k-1}$, придем к следующей системе уравнений:

$$\widetilde{X_{1\,k-1}}' = \left[B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}\right] X_{1\,k} + B_{12} X_{2\,k} + B_{13} X_{3\,k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \Phi'_{1\,X_i}\left(t, U_1 + \dots + U_{k-1}\right) X_{i\,k},$$

$$\widetilde{X_{2\,k-1}}' = \alpha \Bigg\{ \Big[\alpha B_{22} C_{21} - \frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C_{21} - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} +$$

$$+ \Phi'_{2\,X_1}\left(t, U_1 + \dots + U_{k-2}\right) \Big] \widetilde{X_{1\,k-1}} + \tag{16}$$

$$+ \left[B_{22} - C_{21} B_{12}\right] X_{2\,k} + \left[B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}\right] X_{3\,k} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{3} \Phi'_{2\,X_i}\left(t, U_{k-1} + \dots + U_1\right) X_{i\,k} \Bigg\},$$

$$X_{3\,k} = \int\limits_{+\infty}^{t} \beta(t) \Bigg\{ \left[B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}\right] \widetilde{X_{1\,k-1}} + B_{32} \widetilde{X_{2\,k-1}} + B_{33} \widetilde{X_{3\,k-1}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \Phi'_{3\,X_i}\left(t, U_{k-2} + \dots + U_1\right) \widetilde{X_{i\,k-1}} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{k_1+k_2+k_3=2} \Phi''_{3\,X_1^{k_1} X_2^{k_2} X_3^{k_3}}\left(t, U_{k-2} + \dots + U_1\right) \widetilde{X_{1\,k-1}}^{\,k_1} \widetilde{X_{2\,k-1}}^{\,k_2} \widetilde{X_{3\,k-1}}^{\,k_3} + \dots \Bigg\} dt.$$

Применяя к системе (16) теорему 2, убеждаемся в существовании вектора $U_k(t)$, указанного в теореме 3 типа. Отсюда вытекает справедливость теоремы 3.

Доказательству следующей теоремы предпошлем одно определение.

Определение 3. *Формальный в общем случае ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(t)$, *каждый элемент* $U_k(t)$ *(*$U_k(t)$ *– функции) которого определен, вообще говоря, в своем промежутке вида* $[T_k, +\infty[$, *условимся называть обобщенно-асимптотическим рядом для данной функции* $v(t)$, $t \geqslant t_0$, *если для каждого* $m = 1, 2, \dots$ *выполняется равенство*

$$v(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) + \varepsilon_m(t), \;\; t \geqslant \max\left\{t_0, T_1, \dots, T_m\right\},$$

в котором "добавок" $\varepsilon_m(t)$ *удовлетворяет оценке типа (12) из [1] с функциями* $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$, *имеющими* $\binom{\alpha}{\beta}$*-ранг* $\geqslant m$.

Покажем, что справедливо следующее утверждение

Теорема 4. *Если система (1) удовлетворяет условиям 1) – 4), 1a) – 5a), то найденный в теореме 3 формальный ряд будет являться обобщенно-асимптотическим рядом для любого решения* $Z(t) = \operatorname{colon}(X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ *системы (3) с условием* $\lim\limits_{t\to+\infty} Z(t) = 0$*, причем решения последнего типа заведомо существуют.*

Действительно, сделаем в системе (3) замену

$$X_1 = \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{1\,m}}(t) + X_{1\,k},$$

$$X_2 = \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{2\,m}}(t) + X_{2\,k},$$

$$X_3 = \sum_{m=1}^{k-1} \widetilde{X_{3\,m}}(t) + X_{3\,k}.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\widetilde{X_{11}}' + \widetilde{X_{12}}' + \dots + \widetilde{X_{1\,k-1}}' + X_{1\,k}' = Q_1(t) + \\
+ [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] \left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\
+ B_{12} \left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}} \right) + B_{13} \left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}} \right) + \\
+ \Phi_1 \left(t, Z_k + U_{k-1} + \dots + U_1 \right), \qquad (17) \\
\widetilde{X_{21}}' + \widetilde{X_{22}}' + \dots + \widetilde{X_{2\,k-1}}' + X_{2\,k}' = \alpha \Bigg\{ Q_2 - C_{21} Q_1 + \Bigg[\alpha B_{22} C_{21} - \\
- \left[\frac{\alpha'}{\alpha} C_{21} - C_{21}' - \alpha C_{21} B_{12} C_{21} \right] \left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\
+ [B_{22} - C_{21} B_{12}] \left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}} \right) + \\
+ [B_{13} + \alpha B_{32} C_{21}] \left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}} \right) + \Phi_2 \left(t, Z_k + U_{k-1} + \dots + U_1 \right), \\
X_{3\,k}' + \widetilde{X_{3\,k-1}}' + \dots + \widetilde{X_{31}}' = \beta \Big[Q_3 + [B_{31} + \alpha B_{32} C_{21}] \left(X_{1\,k} + \widetilde{X_{1\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{11}} \right) + \\
+ B_{32} \left(X_{2\,k} + \widetilde{X_{2\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{21}} \right) + B_{33} \left(X_{3\,k} + \widetilde{X_{3\,k-1}} + \dots + \widetilde{X_{31}} \right) + \\
+ \Phi_3 \left(t, Z_k + U_{k-1} + \dots + U_1 \right) \Big].
\end{gathered}$$

Раскладывая нелинейности в правой части (17) по компонентам вектора Z_k, учитывая равенства, полученные из (15) заменой k на $k-1$, получим систему дифференциальных уравнений

$$X_{1\,k}' = -\widetilde{X_{1\,k-1}}' + [B_{11} + \alpha B_{12} C_{21}] X_{1\,k} + B_{12} X_{2\,k} + B_{13} X_{3\,k} +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{1\,X_i}\left(t,U_1+\cdots+U_{k-1}\right)X_{i\,k}+\Phi_{*1}\left(t,Z_k\right),$$

$$X'_{2\,k}=\alpha\left\{-\frac{\widetilde{X_{2\,k-1}}'}{\alpha}+\left[\alpha B_{22}C_{21}-\frac{\alpha'}{\alpha}C_{21}-C'_{21}-\right.\right.$$

$$\left.-\alpha C_{21}B_{12}C_{21}\right]X_{1\,k}+\left[B_{22}-C_{21}B_{12}\right]X_{2\,k}+\left[B_{13}+\alpha B_{32}C_{21}\right]X_{3\,k}+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{2\,X_i}\left(t,U_1+\cdots+U_{k-1}\right)X_{i\,k}+\Phi_{*2}\left(t,Z_k\right)\right\},\qquad(18)$$

$$X'_{3\,k}=\beta\left\{\left[B_{31}+\alpha B_{32}C_{21}\right]\left(\widetilde{X_{1\,k-1}}+X_{1\,k}\right)+B_{32}\left(\widetilde{X_{2\,k-1}}+X_{2\,k}\right)+\right.$$

$$+B_{33}\left(\widetilde{X_{3\,k-1}}+X_{3\,k}\right)+\Phi_3\left(t,U_{k-1}+\cdots+U_1\right)-\Phi_3\left(t,U_{k-2}+\cdots+U_1\right)+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\Phi'_{3\,X_i}\left(t,U_{k-1}+\cdots+U_1\right)X_{i\,k}+\Phi_{*3}\left(t,Z_k\right)\right\},$$

где v-ряды $\Phi_{*1}\left(t,Z_k\right)$, $\Phi_{*2}\left(t,Z_k\right)$, $\Phi_{*3}\left(t,Z_k\right)$ не содержат составляющих нулевой и первой степени относительно компонент вектора Z_k.

С помощью метода последовательных приближений можно показать, что у системы (18) существуют частные решения, стремящиеся к нулю при $t\to+\infty$. Используя затем теорему 5 из [1] и учитывая, что $R_\alpha^\beta\left(U'_{k-1}\right)\geqslant R_\alpha^\beta\left(U_{k-1}^{[1]}\right)\geqslant k$, в силу теоремы 3 получаем нужный результат.

Заключение. Построены обобщенные асимптотические (в смысле работ [2–4]) ряды для O-решений системы дифференциальных уравнений (1). В дальнейшем предполагается рассмотреть аналогичную задачу для системы типа (1) с несколькими несуммируемыми множителями в правой части.

1. **Кореновский А. А.** Существование решений дифференциальных уравнений в особых случаях / Кореновский А. А. // Вiсник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. i механ. - 2012. Т. 17, вип. 4(16). - С. 47-58.
2. **Костин А.В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - Т. 3, № 6. - С. 875-889.
3. **Костин А.В.** Об асимптотических рядах в теории нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II / А. В. Костин // Дифференциальные уравнения. - 1967. - Т. 3, № 7. - С. 1070-1077.
4. **Костин, А. В.** О представлении решений дифференциальных уравнений асимптотическими рядами в особых случаях / А. В. Костин, А. А. Кореновский. – К., 1983. – 45 с. – Деп УКРНИИНТИ 30.12.83, № 1470Ук-Д83.

Получена 20.08.2014

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 32–44

Mathematical Subject Classification: 41A10, 42A10, 46E30
УДК 517.5

С. О. Чайченко
Донбасский государственный педагогический университет

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

Чайченко С. О. Наближення періодичних функцій у вагових просторах Орлича. Отримано ряд прямих і обернених теорем теорії наближення для ψ-диференційовних функцій в метриках вагових просторів Орлича з вагами, що належать класу Макенхаупта.
Ключові слова: простори Орлича, нерівність Бернштейна, найкраще наближення, ψ-похідна, прямі і обернені теореми, класи Макенхапта.

Чайченко С. О. Приближение периодических функций в весовых пространствах Орлича. В работе получен ряд прямых и обратных теорем теории приближения для ψ-дифференцируемых функций в метриках весовых пространств Орлича с весами, которые принадлежат классу Макенхаупта.
Ключевые слова: пространства Орлича, неравенство Бернштейна, наилучшее приближение, ψ-производная, прямые и обратные теоремы, классы Макенхаупта.

Chaichenko S. O. Approximation of periodical function in the weighted Orlicz spaces. We obtain some direct and inverse theorems of theory of approximation for ψ-differentiable functions in the metrics of weighted Orlicz spaces with weight functions, which belongs to the Muckenhoupt class.
Key words: Orlicz spaces, Bernstain's inequality, the best aproximation, ψ-derivative, direct and inverce theorems, Muckenhoupt class.

Введение. Исследованию различных вопросов теории приближения в пространствах Орлича посвящено значительное количество публикаций. Упомянем здесь лишь некоторые работы, где рассматривались вопросы получения прямых и обратных теорем теории аппроксимации в этих пространствах.

В работах [1–3] исследовались проблемы приближения в метриках пространств Орлича, а случай весовых пространств был рассмотрен в [4, 5]. В работах [6–9] были получены распространения упомянутых результатов на случай приближения в некоторых областях комплексной плоскости. Кроме того, различные уточнения и обобщения прямых и обратных теорем теории приближения в весовых пространствах Орлича были доказаны в [10, 11].

Целью этой работы является получение утверждений типа прямых и обратных теорем теории приближения для ψ-дифференцируемых и $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций в весовых пространствах Орлича $L_{M,\omega}$ с весами, которые принадлежат так называемому классу Макенхаупта. Используемое в этой работе понятие ψ-производной обобщает известные понятия $(\psi;\beta)$-производной, дробных производных в смысле Вейля и Вейля—Надя, обычной производной, а полученные результаты, с одной стороны, содержат как частные случаи некоторые из упомянутых выше результатов предшественников, а с другой стороны, позволяют обнаружить новые факты.

© Чайченко С. О., 2014

Приведем некоторые сведения из теории выпуклых функций и весовых пространств Орлича (см. [12, 13]), которые будем использовать в этой работе.

Нерерывная выпуклая функция $\Phi = \Phi(x)$ называется функцией Юнга, если Φ является четной и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty.$$

Говорят, что функция Φ удовлетворяет условию Δ_2 ($\Phi \in \Delta_2$), если существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\Phi(2x) \leqslant c\ \Phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Неотрицательная функция $M = M(t),\ t \geq 0$ называется квазивыпуклой функцией Юнга, если существует выпуклая функция Юнга Φ и постоянная $c > 1$ такая, что выполняется неравенство

$$\Phi(x) \leqslant M(x) \leq \Phi(cx), \quad \forall x \geqslant 0.$$

Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество всех квазивыпуклых функций Юнга. Пусть $M \in \mathcal{Q}$. Тогда через $\tilde{L}_{M,\omega}$ обозначают класс 2π-периодических измеримых по Лебегу функций f, которые удовлетворяют условию

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|f(x)|)\omega(x)\ dx < \infty,$$

где $\omega(x)$ — 2π-периодичная измеримая и почти везде положительная функция (вес), а через $L_{M,\omega}$ обозначают линейную оболочку класса $\tilde{L}_{M\omega}$. Множество $L_{M\omega}$ становится нормированным пространством, если

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup\left\{ \int\limits_0^{2\pi} |f(t)g(t)|\omega(t)\ dt : \quad \int\limits_0^{2\pi} \tilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\ dt \leqslant 1 \right\},$$

где $\tilde{M}(y) := \sup\limits_{x\geqslant 0}(xy - M(x)),\ y \geqslant 0$ — дополнительная в смысле Юнга функция.

Говорят, что весовая функция $\omega = \omega(t)$ принадлежит классу Макенхаупта A_p, $1 < p < \infty$, если ω является 2π-периодической и

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \omega(t)\ dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\ dt\right)^{p-1} \leqslant c = \text{const},$$

где $[a, b]$ произвольный отрезок из $[0, 2\pi]$.

Для квазивыпуклой функции M определим величину

$$\frac{1}{p(M)} := \inf\{p : \quad p > 0,\ M^p \in \mathcal{Q}\},$$

$$p'(M) := \frac{p(M)}{p(M) - 1},$$

которая впервые была введена в работе [14]. Если $\omega \in A_{p(M)}$, то $L_{M,\omega} \in L$, где L — пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций и $L_{M,\omega}$ становится банаховым пространством с нормой Орлича. Банахово пространство $L_{M,\omega}$ называется весовым пространством Орлича.

Через $\mathcal{Q}_2^\theta$ обозначают класс функций $M \in \Delta_2$ таких, что M^θ является квазивыпуклой для некоторого $\theta \in (0;1)$.

Пусть $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_{p(M)}$ и

$$(\sigma_h f) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt, \quad 0 < h < \pi, \quad x \in [-\pi;\pi]$$

— оператор усреднения по Стеклову. Обозначив через I — единичный оператор, рассмотрим величины

$$\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega} := \sup_{0<h_i<\delta, 1\leqslant i\leqslant r} \left\| \prod_{i=1}^{r}(I-\sigma_{h_i})f \right\|_{M,\omega}, \quad (\delta > 0,\ r = 1,2,\dots,)$$

которые называются модулями гладкости порядка r функции f.

Известно (см., например, [4]), что модули гладкости $\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega}$ обладают такими свойствами:

1. Величина $\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega}$ является неотрицательной и не убывает, как функция переменной $\delta > 0$.

2. Справедливо неравенство

$$\Omega_r(f_1+f_2;\delta)_{M,\omega} \leqslant \Omega_r(f_1;\delta)_{M,\omega} + \Omega_r(f_2;\delta)_{M,\omega}.$$

3. Если $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{Q}_2^\theta$, $\omega \in A_{p(M)}$, то

$$\Omega_r(f;\delta)_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega}.$$

Далее нам понадобятся определения ψ-интеграла и ψ-производной, которые принадлежат А.И. Степанцу [15, с. 149–150].

Пусть $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции f. Пусть, далее, $\psi(k) = (\psi_1;\psi_2)$ — пара произвольных числовых последовательностей $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 1,2,\dots$ .. Рассмотрим ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)A_k(f,x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f,x)), \tag{2}$$

где A_0 — некоторое число и

$$\tilde{A}_k(f,x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx.$$

Если ряд (2) для данной функции f и пары ψ является рядом Фурье некоторой функции из $F \in L$, то функцию F называют ψ-интегралом функции f и обозначают $F(\cdot) = \mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)$. Множество ψ-интегралов всех функций из L обозначается L^{ψ}.

Пусть $f \in L$, ряд (1) — ряд Фурье функции f и пара $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ удовлетворяет условию

$$\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f;x) \right) \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L$, то φ называют ψ-производной функции f и используют обозначение $\varphi(\cdot) = D^{\psi}(f;\cdot) = f^{\psi}(\cdot)$. Подмножество функций $f \in L$, у которых существуют ψ-производные, обозначают через $\bar{L}^{\psi}$.

Связь между ψ-интегралами и ψ-производными установлена в монографии [15, с. 150]. Там показано, что если функция $f \in L$, ряд (1) — ее ряд Фурье, и выполнено условие (3), то функция $\mathcal{J}^{\psi}(f;x)$ обладает ψ-производной и справедливо равенство

$$D^{\psi}(\mathcal{J}^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) - \frac{a_0}{2}.$$

Если же функция $f \in \bar{L}^{\psi}$, и ряд (1) — ее ряд Фурье, то функция $D^{\psi}(f;x)$ обладает ψ-интегралом и при этом

$$\mathcal{J}^{\psi}(D^{\psi}(f;\cdot)) = f(\cdot) + A_0,$$

где A_0 — некоторая постоянная.

Отметим также, что в случае, когда

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\frac{\beta\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\frac{\beta\pi}{2},$$

определение ψ-производной совпадает с определением $(\psi;\beta)$-производной [15, с. 132]. Если к тому же $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, то понятие ψ-производной совпадает с хорошо известным понятием $(r;\beta)$-производной в смысле Вейля—Надя, которая, в свою очередь, является обобщением дробной производной Вейля и обычной производной порядка r, $r = 1, 2, \ldots$.

При доказательстве основных результатов этой работы будет использоваться факт ограниченности в пространствах $L_{M,\omega}$ оператора Фурье и оператора тригонометрического сопряжения, который был установлен в [12, с. 278].

Теорема. *Если $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega \in A_{p(M)}$, то для произвольной функции $f \in L_{M,\omega}$ выполняются неравенства*

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega} \tag{5}$$

и

$$\|\tilde{f}\|_{M,\omega} \leqslant C\|f\|_{M,\omega}, \tag{6}$$

где

$$S_n(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

— частные суммы Фурье порядка n функции f, $\tilde{f}(\cdot)$ — функция, тригонометрически сопряженная с $f(\cdot)$ и $C > 0$ — некоторая постоянная, которая не зависит от f и n.

Из неравенств (5) и (6), в частности, следует, что

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(f)_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(\tilde{f})_{M,\omega}, \tag{8}$$

где

$$E_n(\varphi)_{M,\omega} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{M,\omega}, \quad \varphi \in L_{M,\omega},$$

— наилучшее приближение функции φ с помощью подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка, не выше $n-1$, а $\mathcal{O}(1)$ — величины, равномерно ограниченные по n.

Нам понадобится также следующее утверждение, доказанное в работе [16], которое позволяет находить оценку сверху нормы $(\psi;\beta)$-производной тригонометрического полинома через норму самого полинома в пространстве $L_{M,\omega}$ и является аналогом классического результата С.Н. Бернштейна [17] о неравенстве для максимума модуля производной тригонометрического полинома. Для его формулировки через $D^{\psi}_{\beta}f$ обозначим $(\psi;\beta)$-производную функции f, а через $\mathfrak{M}^*$ множество не возрастающих и исчезающих на бесконечности последовательностей $\psi(k) > 0$, то есть:

$$\mathfrak{M}^* = \{\psi(k): \quad \psi(k) - \psi(k+1) \geqslant 0, \ \lim_{k\to\infty}\psi(k) = 0, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\psi \in \mathfrak{M}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{Q}^{\theta}_2$ и $\omega \in A_{p(M)}$. Тогда для произвольного тригонометрического полинома T_n порядка, не выше n, выполняется неравенство*

$$\|D^{\psi}_{\beta}T_n\|_{M,\omega} \leqslant \frac{K}{\psi(n)}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

где $1/\psi(0) := 0$, а K — положительная постоянная, которая не зависит от n.

Будем также использовать следующую лемму, доказанную в работе [4].

Лемма 2. *Пусть $M \in \mathcal{Q}^{\theta}_2$ и $\omega \in A_{p(M)}$. Тогда, если $f^{(2k)} \in L_{M,\omega}$, $k = 1, 2, \ldots$, то имеет место неравенство*

$$\Omega_k(f;\delta)_{M,\omega} \leqslant C\delta^{2k}\|f^{(2k)}\|_{M,\omega}, \quad k = 1, 2, \ldots\ . \tag{10}$$

Основные результаты. Пусть $\mathfrak{M}$ — подмножество выпуклых последовательностей действительных чисел $\psi(k) > 0$, из множества $\mathfrak{M}^*$, то есть:

$$\mathfrak{M} := \{\psi \in \mathfrak{M}^*: \ \psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}\},$$

а $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty$.

Обозначим через $L^{\psi}L_{M,\omega}$ классы ψ-интегралов функций $f \in L_{M,\omega}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L^{\psi}L_{M,\omega}$, *причем* $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$, $\omega \in A_{p(M)}$ *и* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$. *Тогда для произвольного натурального* n *выполняется неравенство*

$$E_n(f)_{M,\omega} \leqslant K\psi(n)E_n(f^{\psi})_{M,\omega}, \tag{11}$$

в котором $\psi(n) = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)}$, K *— константа, которая не зависит от* n *и функции* f.

Отметим, что утверждение теоремы 1 в большинстве случаев является хорошо известным. При $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ оценка (11) получена в работе [4]. При $\psi_1(n) = \psi(n)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(n) = \psi(n)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi \in \mathfrak{M}$, $\beta \in \mathbb{R}$ соответствующие результаты найдены в работе [16], а если $M = t^p$, $1 \leqslant p \leq \infty$, то такие результаты принадлежат А. И. Степанцу и А. К. Кушпелю [18, 19]. Если же $1 < p < \infty$ и к тому же $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $n, r \in \mathbb{N}$, неравенство (11) доказано А. Ф. Тиманом [20, с. 316].

Доказательство. Пусть $f \in L^{\psi}L_{M,\omega}$, где $M \in \mathcal{Q}_2^{\theta}$ и $\omega \in A_{p(M)}$, Тогда, если $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$ то [15, с. 151–152], всегда существует функция $f^{\psi} \in L^0$, $L^0 := \{\varphi \in L : \ \varphi \perp 1\}$, ряд Фурье которой совпадает с (4). В работе [21, лемма 3] показано, что для данной функции $f \in L_{M,\omega}$ и произвольного $\varepsilon > 0$ всегда найдется тригонометрический полином $T(x)$, для которого

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\omega(x)\ dx < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$E_n(f)_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому, учитывая соотношение (8), можем утверждать, что в смысле сходимости в метрике пространств $L_{M,\omega}$ выполняются равенства

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

и

$$f^{\psi}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f^{\psi};x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}(f;x). \tag{12}$$

Из разложения (12) следуют формулы связи между коэффициентами Фурье функций f^{ψ} и f:

$$a_k(f) = \psi_1(k)a_k(f^{\psi}) - \psi_2(k)b_k(f^{\psi}), \tag{13}$$

$$b_k(f) = \psi_2(k)a_k(f^{\psi}) + \psi_1(k)b_k(f^{\psi}). \tag{14}$$

Учитывая теперь равенства (13) – (14), находим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\Big[\psi_1(k) a_k(f^\psi) - \psi_2(k) b_k(f^\psi) \Big] \cos kx +$$

$$+ \Big[\psi_2(k) a_k(f^\psi) + \psi_1(k) b_k(f^\psi) \Big] \sin kx \Bigg) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\psi_1(k) \Big[a_k(f^\psi) \cos kx + b_k(f^\psi) \sin kx \Big] +$$

$$+ \psi_2(k) \Big[a_k(f^\psi) \sin kx - b_k(f^\psi) \cos kx \Big] \Bigg) =$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x). \tag{15}$$

На основании соотношений (7) и (15), получаем

$$f(x) - S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=n}^{\infty} A_k(f; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x). \tag{16}$$

Далее имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f^\psi; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \Bigg[\Big(S_k(f^\psi; x) - f^\psi(x) \Big) - \Big(S_{k-1}(f^\psi; x) - f^\psi(x) \Big) \Bigg] =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \Big(S_k(f^\psi; x) - f^\psi(x) \Big) - \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \Big(S_{k-1}(f^\psi; x) - f^\psi(x) \Big) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_1(k) - \psi_1(k+1)] \Big[S_k(f^\psi; x) - f^\psi(x) \Big] - \psi_1(n) \Big[S_{n-1}(f^\psi; x) - f^\psi(x) \Big]. \tag{17}$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \tilde{A}_k(f^\psi; x) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) A_k(\tilde{f}^\psi; x) =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} [\psi_2(k) - \psi_2(k+1)] \Big[S_k(\tilde{f}^\psi; x) - \tilde{f}^\psi(x) \Big] - \psi_2(n) \Big[S_{n-1}(\tilde{f}^\psi; x) - \tilde{f}^\psi(x) \Big]. \tag{18}$$

Используя свойства нормы, на основании равенств (16) – (18) находим

$$E_n(f)_{M,\omega} \leqslant \|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \leq$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}[\psi_1(k)-\psi_1(k+1)]\big\|S_k(f^\psi)-f^\psi\big\|_{M,\omega}+\psi_1(n)\big\|S_{n-1}(f^\psi)-f^\psi\big\|_{M,\omega}+$$

$$+\sum_{k=n}^{\infty}[\psi_2(k)-\psi_2(k+1)]\big\|S_k(\tilde f^\psi)-\tilde f^\psi\big\|_{M,\omega}+\psi_2(n)\big\|S_{n-1}(\tilde f^\psi)-\tilde f^\psi\big\|_{M,\omega}\leq$$

$$\leqslant K\Big(\psi_1(n)E_n(f^\psi)_{M,\omega}+\psi_2(n)E_n(\tilde f^\psi)_{M,\omega}\Big)\leq K\psi(n)E_n(f^\psi)_{M,\omega},$$

где $\psi^2(n)=\psi_1^2(n)+\psi_2^2(n)$ и K — константа, которая не зависит от n. Теорема доказана.

Отметим, что в условиях теоремы 1 имеет место неравенство

$$E_n(f)_{M,\omega}\leqslant K\psi(n).$$

Считая, что последовательности $\psi(k)$ из $\mathfrak{M}$ являются сужениями на множество натуральних чисел непрерывных функций $\psi(t)$ непрерывного аргумента $t\geqslant 1$, в соответствии с [15, с. 159] через $\eta(t)=\eta(\psi;t)$ обозначим функцию, которая связана с ψ равенством

$$\psi(\eta(t))=\frac{1}{2}\psi(t),\quad t\geqslant 1.$$

Отсюда, вследствие строгой монотонности и убывания к нулю ψ, функция $\eta(t)$ для всех $t\geqslant 1$ определяется однозначно

$$\eta(t)=\eta(\psi;t)=\psi^{-1}\Big(\frac{1}{2}\psi(t)\Big),\tag{19}$$

где ψ^{-1} — функция, обратная к ψ.

Для получения следующих результатов будем использовать определения множеств $\mathfrak{M}_0$ и F, принадлежащие А.И. Степанцу [15, с. 160, 165]:

$$\mathfrak{M}_0=\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad 0<\frac{t}{\eta(\psi;t)-t}\leqslant K,\ t\geq 1\},$$

$$F=\{\psi\in\mathfrak{M}:\quad \eta'(\psi;t)\leqslant K\},$$

где $\eta(\psi;t)$ — функция, которая определяется равенством (19).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $M\in\mathcal{Q}_2^\theta$ и $\omega\in A_{p(M)}$. Тогда для произвольной функции $f\in L_{M,\omega}$ и $n\in\mathbb{N}$ будем иметь:*

1. *Если $\psi\in\mathfrak{M}_0$ и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}E_k(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1},$$

сходится, тогда существует производная f_β^ψ, такая что для $r=0,1,2,\dots$, и произвольного натурального n выполняется неравенство

$$\Omega_r\Big(f_\beta^\psi;\frac{1}{n}\Big)_{M,\omega}\leq\frac{C}{n^{2r}}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)}E_\nu(f)_{M,\omega}+C\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{E_\nu(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}.$$

2. Если $\psi \in F$, $\eta(\psi;t) - t \geqslant C > 0$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)(\eta(k)-k)|^{-1}$$

сходится, то существует производная f_β^ψ для которой

$$\Omega_r\left(f_\beta^\psi; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leq C\left(\frac{1}{n^{2r}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)} E_\nu(f)_{M,\omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_{M,\omega}}{\psi(\nu)(\eta(\nu)-\nu)}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где C — константа, которая не зависит от n и функции f.

Если $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, r, $n \in \mathbb{N}$, тогда утверждение теоремы 2 совпадает с теоремой 1 из работы [11]. В случае $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, аналогичные результаты были получены в работе [4].

Доказательство. Для доказательства теоремы будем использовать схему, предложенную в книге [22, с. 120–126]. Пусть $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность тригонометрических полиномов, которые осуществляют наилучшее приближение функции $f \in L_{M,\omega}$. Положим для данной функции ψ и каждого натурального n

$$n_0 = n, n_1 = [\eta(\psi;n)] + 1, \ldots, n_i = [\eta(\psi;n_{i-1})] + 1, \ldots \ .$$

В этом случае ряд

$$t_{n_0}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (t_{n_i}(x) - t_{n_{i-1}}(x))$$

будет сходиться к функции f в пространстве $L_{M,\omega}$. Рассмотрим ряд

$$(D_\beta^\psi t_{n_0})(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (D_\beta^\psi [t_{n_i} - t_{n_{i-1}}])(x)$$

и убедимся, что он будет сходиться в пространстве $L_{M,\omega}$ к сумме $T(x)$, ряд Фурье которой имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k(f) \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k(f) \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \tag{20}$$

Применяя неравенство (9) к разности $u_i(x) = t_{n_i}(x) - t_{n_{i-1}}(x)$ (которая, очевидно, является полиномом порядка n_i), получаем

$$\|(D_\beta^\psi u_i)(\cdot)\|_{M,\omega} \leq C E_{n_{i-1}+1}(f)_{M,\omega} |\psi(n_i)|^{-1},$$

вследствие чего

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_i)(\cdot)\|_{M,\omega} \leqslant C\Big(E_{n+1}(f)_{M,\omega} (\psi(n))^{-1} +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty} E_{n_i+1}(f)_{M,\omega}|\psi(n_i)|^{-1}\Bigg). \tag{21}$$

Используя оценку

$$\frac{E_{n_i+1}(f)}{\psi(n_i)} \leqslant \sum_{\nu=n_{i-1}}^{n_i-1} \frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}, \quad \psi \in \mathfrak{M}_0, \tag{22}$$

полученную в книге [22, с. 124–125], из соотношения (21) получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|(D_\beta^\psi u_i)(\cdot)\|_{M,\omega} \leqslant C\Bigg(\frac{E_{n+1}(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{E_\nu(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}\Bigg). \tag{23}$$

Поскольку по условию теоремы ряд в правой части соотношения (23) сходится, то это означает, что ряд (20) действительно сходится в пространстве $L_{M,\omega}$ к некоторой функции $T(x) \in L_{M,\omega}$.

Пусть $a_k^{(n_i)} = a_k(t_{n_i})$ и $b_k^{(n_i)} = b_k(t_{n_i})$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — коэффициенты Фурье полиномов $t_{n_i}(x)$. Тогда в соответствии с равенствами (13) и (14) коэффициенты $\alpha_k^{(n_i)}$ и $\beta_k^{(n_i)}$ полиномов $(D_\beta^\psi t_{n_i})(\cdot)$ имеют вид

$$\alpha_k^{(n_i)} = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(a_k^{(n_i)} \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k^{(n_i)} \sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg) \tag{24}$$

$$\beta_k^{(n_i)} = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(b_k^{(n_i)} \cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k^{(n_i)} \sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg). \tag{25}$$

Поскольку равенство

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} (D_\beta^\psi t_{n_i})(x)$$

выполняется в смысле сходимости в метрике пространств $L_{M,\omega}$, то

$$a_k(T) = \lim_{i\to\infty} \alpha_k^{(n_i)}, \quad b_k(T) = \lim_{i\to\infty} \beta_k^{(n_i)}, \quad k = 0, 1, \ldots\ .$$

Принимая во внимание то, что

$$\lim_{i\to\infty} a_k^{(n_i)} = a_k(f), \quad \lim_{i\to\infty} b_k^{(n_i)} = b_k(f), \quad k = 0, 1, \ldots\ ,$$

из равенств (24)–(25) получаем

$$a_k(T) = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(a_k(f) \cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f) \sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg),$$

$$b_k(T) = \frac{1}{\psi(k)}\Bigg(b_k(f) \cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f) \sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg).$$

Отсюда следует, что ряд Фурье функции $T(x)$ действительно совпадает с рядом (20). Это означает, что функция $f(x)$ действительно имеет $(\psi;\beta)$-производную

$f^{\psi}_{\beta}(x)$, которая принадлежит пространству $L_{M,\omega}$, и для неё выполняется равенство

$$f^{\psi}_{\beta}(x) = (D^{\psi}_{\beta} t_{n_0})(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (D^{\psi}_{\beta}[t_{n_i} - t_{n_{i-1}}])(x), \tag{26}$$

в метрике пространства $L_{M,\omega}$.

Используя свойство 2 величины $\Omega_r(f^{\psi}; \frac{1}{n})_{M,\omega}$, на основании соотношения (26) получаем

$$\Omega_r\left(f^{\psi}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant \Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right) + \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \tag{27}$$

Учитывая свойство 3 модуля непрерывности и неравенство (9), находим

$$\Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant C\|f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}]\|_{M,\omega} =$$

$$= C\|\sum_{i=1}^{\infty} (D^{\psi}_{\beta}(t_{n_i} - t_{n_{i-1}}))(x)\|_{M,\omega} \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(n_i)} \|t_{n_i} - t_{n_{i-1}}\|_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|t_{n_i} - f\|_{M,\omega}}{\psi(n_i)} + C \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|f - t_{n_{i-1}}\|_{M,\omega}}{\psi(n_i)} \leq K \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_{n_i+1}(f)_{M,\omega}}{\psi(n_i)}. \tag{28}$$

Используя оценку (22), из соотношения (28) получаем

$$\Omega_r\left(f^{\psi} - D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant C \sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)}. \tag{29}$$

Принимая во внимание неравенства (9) и (10), находим

$$\Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_{n_0}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta} t_0; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} + \sum_{i=1}^{n_0} \Omega_r\left(D^{\psi}_{\beta}(t_i - t_{i-1}); \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n^{2r}} \left(\left\| (D^{\psi}_{\beta} t_0)^{(2r)} \right\|_{M,\omega} + \sum_{i=1}^{n_0} \left\| (D^{\psi}_{\beta}(t_i - t_{i-1}))^{(2r)} \right\|_{M,\omega} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n^{2r}} \sum_{\nu=0}^{n_0} \nu^{2r} \frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\psi(\nu)}. \tag{30}$$

Объединяя теперь соотношения (27), (29) и (30), получаем

$$\Omega_r\left(f^{\psi}_{\beta}; \frac{1}{n}\right)_{M,\omega} \leqslant \frac{C}{n^{2r}} \sum_{\nu=0}^{n_0} \frac{\nu^{2r}}{\psi(\nu)} E_{\nu}(f)_{M,\omega} + C \sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \frac{E_{\nu}(f)_{M,\omega}}{\nu\psi(\nu)},$$

и, поскольку по определению $n_0 = n$, заканчиваем доказательство пункта 1 теоремы.

Доказательство пункта 2 проводится аналогично, с учетом следующего аналога неравенства (22), полученного в книге [22, с. 125–126]:

$$\frac{E_{n_i+1}(f)}{\psi(n_i)} \leqslant \sum_{\nu=n_{i-1}}^{\eta(n_{i-1})} \frac{E_{\nu+1}(f)}{(\eta(\nu) - \nu)\psi(\nu)}, \quad \psi \in F.$$

Заключение. В работе нами получен ряд прямых и обратных теорем теории приближения для ψ-дифференцируемых функций в метриках весовых пространств Орлича с весами, которые принадлежат классу Макенхаупта.

1. **Ramazanov A. R-K.** On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces // Anal. Math. — 10, (1984) — 117–132.
2. **Garidi W.** On approximation by polynomials in Orlicz spaces, Approx. Theory Appl. (N.S.) 7 (1991), 97–110.
3. **Runovski K.** On Jackson type inequality in Orlicz classes, Rev. Mat. Complut. 14 (2001), 395–404.
4. **Akgün R.** Approximating polynomials for functions of Weighted Smirnov-Orlicz spaces // Jorn. of funct. spacas and applic. — 2012. — P. 1–41.
5. **Israfilov D. M., Guven A.** Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces, Studia Math. 174 (2006), 147–168.
6. **Kokilashvili V. M.** A direct theorem on mean approximation of analytic functions by polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR 10 (1969), 411–414.
7. **Kokilashvili V. M.** On analytic functions of Smirnov-Orlicz classes, Studia Math. 31 (1968), 43–59.
8. **Israfilov D. M.** Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov class $E^p(G,\omega)$ and the Bieberbach polynomials, Constr. Approx. 17 (2001), 335–351.
9. **Israfilov D. M.** Approximation by p-Faber-Laurent rational functions in the weighted Lebesgue spaces, Czechoslovak Math. J. 54 (2004), 751–765.
10. **Akgun R., Israfilov D. M.** Approximation in weigted Orlicz spaces // Math. Slovaca. — 61 (2011), No. 4, P. 601–618.
11. **Guven A., Israfilov D.M.** On approximation in weigted Orlicz spaces // Math. Slovaca 62 (2012), No. 1, P. 77–86.
12. **Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V.Krbec M.** Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998.
13. **Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.** Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.
14. **Gogatishvili A., Kokilashvili V.** Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces // Georgian Mathematical Journal. — 1994.— **1,** № 6. — P. 641–673.
15. **Степанец А.И.** Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.
16. **Чайченко С.О.** Найкращі наближення періодичних функцій у вагових просторах Орліча // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. — 2013. — Вип. 2. — С. 33–40.
17. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912). — Собрание сочинений, Изд. АН СССР, 1952. — Т. 1. — С. 11–104.

18. **Степанец А.И., Кушпель А.К.** Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций. — Киев, 1984. — 44 с. — (Препр./ АН УССР, Ин-т математики; 84.15).

19. **Степанец А.И., Кушпель А.К.** Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39,** № 4. — С. 483–492.

20. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

21. **Khabazi M.** The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. – 2002. – **129.** — P. 65–75.

22. **Степанец А.И.** Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Т. 2. — 468 с.

Получена 16.07.2014

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2014 .–V.19,Is.4(24).–P.45–57

Mathematical Subject Classification: 65L60
UDC 519.632.4

R. Drebotiy, H. Shynkarenko
Ivan Franko National University of Lviv
Opole Univesity of Technology, Poland

COMPARISON OF ERROR INDICATORS AND REFINEMENT CRITERIA FOR *HP*-ADAPTATION ALGORITHM FOR FINITE ELEMENT METHOD

Дреботій Р. Г., Шинкаренко Г. А. Порівняння апостеріорних оцінювачів похибки та критеріїв згущення сітки для hp-адаптивного алгоритму методу скінченних елементів. В цій статті ми коротко розглядаємо *hp*-адаптивний метод скінченних елементів для одновимірної задачі конвекції-дифузії-реакції і проводимо порівняльний аналіз чисельних результатів, одержаних за допомогою комбінування розглядуваного алгоритму з різними оцінювачами похибки та критеріями покращення елементів.
Ключові слова: метод скінченних елементів (МСЕ), метод Гальоркіна, критерій Пекле, критерій Струхаля, метод конденсації внутрішніх параметрів, hp-адаптивність, апостеріорний оцінювач похибки (АОП), коректна задача, крайова задача дифузії-адвекції-реакції, контрольний розв'язок.

Дреботий Р. Г., Шинкаренко Г. А. Сравнение апостериорных оценок погрешности и критериев сгущения сетки для hp-адаптивного алгоритма метода конечных элементов. В этой статье мы коротко рассматриваем *hp*-адаптивный метод конечных элементов для одномерной задачи конвекции-диффузии-реакции и сравниваем численные результаты, полученные с помощью комбинирования рассматриваемого алгоритма с разными оценивателями погрешности и критериями улучшения конечных элементов.
Ключевые слова: метод конечных элементов (МКЭ), метод Галеркина, критерий Пекле, критерий Струхаля, метод конденсации внутренних параметров, hp-адаптивность, апостериорный оцениватель погрешности (АОП), корректная задача, краевая задача диффузии-адвекции-реакции, контрольное решение.

Drebotiy R., Shynkarenko H. Comparison of error indicators and refinement criteria for hp-adaptation algorithm for finite element method. In this paper we consider *hp*-adaptive finite element method for 1D
convection-diffusion-advection boundary value problem and present comparative analysis of numerical results obtained using combination of introduced algorithm with different kinds of a posteriori error estimators, and element refinement criteria.
Key words: finite element method, Galerkin method, Peclet criteria, Strouhal criteria, static condensation, hp-adaptivity, a posteriori error estimator, well posed problem, diffusion-advection-reaction boundary value problem.

Introduction. Finite element method is an universal tool for solving boundary value problems for partial differential equations (see [1]). It is applicable for problems on very complex domains in 2- and 3-dimensional spaces. During last years the main focus is on the adaptive algorithms for FEM. The main idea is to adapt mesh

© Drebotiy R., Shynkarenko H., 2014

(h-adaptivity), element polynomial order (p-adaptivity) or both mesh and order (hp-adaptivity) to minimize computational cost needed for solving the given problem. Such algorithms are implemented using local a posteriori error estimators. It's naturally to interpret hp-schemes as most advanced as they give us most wide approximation capabilities. Theoretically it is proven that they can produce exponentially convergent sequences of approximations to original solution of boundary value problem [2].

In this work we recall hp-adaptive algorithm for solving the diffusion-advection-reaction boundary value problems with self-adjoint operators introduced in [11]. We extend the step of selection of elements for refinement with other error indicator and other selection criteria than were used in initial version of algorithm, providing numerical results for each of them.

The paper is structured according to the following order: in section 2 we define model problem; in section 3 we provide some specific problem transformations; in section 4 we construct variational formulation; in section 5 we make review of general finite element method schemes; section 6 we provide error estimators which will be used in adaptation algorithm; in section 7 we introduce various element selection criteria; in section 8 hp-adaptation algorithm is described. In section 9 we demonstrate some numerical results. Final conclusions are given in the last section.

Main Results

1. Model problem. We consider the following convection-diffusion-reaction boundary value
problem:

$$\begin{cases} \textit{given } \bar{\mu} = \bar{\mu}(x),\ \bar{\beta} = \bar{\beta}(x),\ \bar{\sigma} = \bar{\sigma}(x),\ \bar{f} = \bar{f}(x); \\ \textit{and } \bar{\alpha},\ \bar{\gamma},\ \bar{g}_0,\ \bar{g}_L \in \mathbb{R}, \\ \textit{find function } u = u(x) \textit{ such that} \\ -\dfrac{d}{dx}\left(\bar{\mu}\dfrac{du}{dx}\right) + \bar{\beta}\dfrac{du}{dx} + \bar{\sigma}u = \bar{f} \text{ on } G = (0, L); \\ \bar{\mu}\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=0} = \bar{\alpha}[u(0) - \bar{u}_0],\ -\bar{\mu}\dfrac{du}{dx}\Big|_{x=L} = \bar{\gamma}[u(L) - \bar{u}_L]. \end{cases} \tag{1.1}$$

2. Scaling of variables. In order to show specific of the boundary value problem (1.1) we introduce a scaled variable $t \in [0, 1]$, in such way that $x := Lt$ transforming dependent variables

$$\begin{cases} \mu := \bar{\mu}\|\bar{\mu}\|^{-1}_{\infty,G},\ \beta := \bar{\beta}\|\bar{\beta}\|^{-1}_{\infty,G},\ \sigma := \bar{\sigma}\|\bar{\sigma}\|^{-1}_{\infty,G},\ f := \bar{f}\|\bar{f}\|^{-1}_{\infty,G}, \\ \alpha := \bar{\alpha}L\|\bar{\mu}\|^{-1}_{\infty,G},\ \gamma := \bar{\gamma}L\|\bar{\mu}\|^{-1}_{\infty,G},\ g_0 := L\|\bar{\mu}\|^{-1}_{\infty,G}\bar{u}_0,\ g_1 := L\|\bar{\mu}\|^{-1}_{\infty,G}\bar{u}_L, \end{cases}$$

and after small algebra we rewrite problem (1.1) in the following form

$$\begin{cases} \textit{find function } u = u(t) \textit{ such that} \\ -(\mu u')' + Pe[\beta u' + St\sigma u] = f \text{ in } \Omega = (0, 1); \\ (\mu u' - \alpha u)|_{t=0} = g_0,\ -(\mu u' - \gamma u)|_{t=1} = g_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $v' := \frac{dv}{dt}$, and dimensionless numbers

$$Pe := \frac{L\|\bar{\beta}\|_{\infty,G}}{\|\bar{\mu}\|_{\infty,G}},\ St := \frac{L\|\bar{\sigma}\|_{\infty,G}}{\|\bar{\beta}\|_{\infty,G}} \tag{2.2}$$

are well-known Peclet criteria and Strouhal criteria respectively.

3. Variational formulation. The boundary value problem (2.1) admits the following variational formulation

$$\begin{cases} \textit{find } u \in V := H^1(\Omega) \textit{ such that} \\ c_\Omega(u,v) = \langle l_\Omega, v\rangle \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{3.1}$$

where

$$\begin{aligned} c_\Omega(u,v) :=& (\mu u', v')_{L^2(\Omega)} + Pe[(\beta u', v)_{L^2(\Omega)} + St(\sigma u, v)_{L^2(\Omega)}] + \\ &+ \alpha uv|_{t=0} + \gamma uv|_{t=1} \ \ \forall u, v \in V, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\langle l_\Omega, v\rangle := (f, v)_{L^2(\Omega)} + \alpha g_0 v(0) + \gamma g_1 v(1) \ \forall v \in V. \tag{3.3}$$

4. Petrov-Galerkin finite element scheme. Let $\{V_h\}_{h>0}$ be a family of finite element approximation subspaces $V_h \subset V$, $\dim V_h = N_h < +\infty$ is dense in V, moreover, for each $v \in V$ there is $v_h \in V_h$ such that

$$\|v - v_h\|_{H^1(\Omega)} \le Ch^k \|v\|_{H^{k+1}(\Omega)}, C = const > 0. \tag{4.1}$$

Let $\{W_h\}_{h>0}$ be the family of spaces with the same properties as $\{V_h\}_{h>0}$. In general case Petrov-Galerkin finite element scheme deal with following discrete variational problem

$$\begin{cases} \textit{given subspaces } V_h \subset V \textit{and } W_h \subset V; \\ \dim V_h = \dim W_h = N_h < +\infty, \\ \textit{find } u_h \in V_h \textit{ such that} \\ c_\Omega(u_h, v) = \langle l_\Omega, v\rangle \ \forall v \in W_h. \end{cases} \tag{4.2}$$

Let $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ and $\{w_m\}_{m=1}^N$ be basis of and spaces respectively. Then problem (4.2) results to system of linear algebraic equations

$$\begin{cases} \textit{given subspaces } V_h \subset V \textit{and } W_h \subset V; \\ \dim V_h = \dim W_h = N_h < +\infty, \\ \textit{find } u_h = \displaystyle\sum_{k=1}^N q_k \phi_k \in V_h \textit{ such that} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^N q_k c_\Omega(\phi_k, w_i) = \langle l_\Omega, w_i\rangle \ i = 1, ..., N. \end{cases} \tag{4.3}$$

In the current paper we use classic Galerkin method i.e. $V_h = W_h$. In general we can use Petrov-Galerkin method to obtain system of linear equations with symmetric matrix by choosing $w_i := z\phi_i$, where

$$z(x) := exp[-Pe \int_0^x \mu^{-1}\beta \, dt], \forall x \in [0,1]. \tag{4.4}$$

5. A posteriori error estimators of finite element approximations. Let us describe different ways for obtaining error level on each finite element. We can use

explicit estimator - an explicit formula which gives us upper bound of error estimate as one number or implicit estimator which is obtained as function which approximates actual error of finite element discretization. To obtain it we solve auxiliary variational problem.

5.1. Explicit error estimator. To estimate error level we can use explicit error estimator i.e. explicit formula which gives us upper bound to approximation error on each finite element. Let us define the *approximation error* $e = u - u_h \in V_h \subset V$, the residual

$$R[u_h] := f + (\mu u_h')' - \beta Pe u_h' - \sigma PeStu_h, \tag{5.1}$$

and bubble function

$$\omega_K(x) := (x_k - x)(x - x_{k-1}), supp\omega_K = K, \forall K \in \Im_h. \tag{5.2}$$

Then for each element we can compute the following error indicator [11]

$$\eta_K = \frac{C}{\sqrt{p_K(p_K+1)}} \left\| \sqrt{\omega_K} R\left[u_h^K\right] \right\|_{L^2(K)}, \tag{5.3}$$

where $p_K = \deg(\, u_h \| \, K)$ and

$$C = 4[\min(\mu_0, c_0)]^{-1},\ \mu(t) \geq \mu_0 = const > 0,$$
$$\sigma(t) - Pe\beta'(t) \geq c_0 = const > 0 \ a.e. \ in \ \Omega.$$

5.2. Implicit error estimator. Described estimator gives us only one number per finite element which we interpret as error level. To combine h- and p- refinements of elements we need to construct some type of estimator which:

i. will give us distinct error estimate for each of available refinement patterns of element;

ii. will be simply computable on each element.

For this purposes we will solve auxiliary variational problem for error on each element, using finite element method for different finite element spaces. Let us define $X^p(a,b)$ as a space of all polynomials of order p on closed interval $[a,b]$. For all refinement patterns we may define corresponding approximation spaces. We will use only two refinements: division of the element into two elements with the same polynomial orders and increasing element order by one. Corresponding spaces are the following:

$$\begin{aligned} V_{hp}^1(K) &:= \left\{ v \in C_0(K) |\ v \in X^{p_K}(x_{k-1}, x_{k-1/2}), \right. \\ &\qquad\qquad \left. v \in X^{p_K}(x_{k-1/2}, x_k) \right\}, \\ V_{hp}^2(K) &:= \left\{ v \in X^{p_K+1}(K) |\ v|_{\partial K} = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

To obtain error estimate as a single number for finite element error approximation on each space for $m = 1, 2$ we solve the next problems for local error:

$$\begin{cases} \textit{find function } e_h^m \in V_{hp}^m(K) \textit{ such that} \\ c_\Omega(e_h^m, v_h) = \displaystyle\int_K R\left[u_h^K\right] v_h \, dx, \quad \forall v_h \in V_{hp}(K). \end{cases} \tag{5.5}$$

then error estimates for given two refinements are defined as $r_m = \|e_h^m\|_E, m = 1, 2$.

5.3. Error estimator based on fundamental solution. For error indicator η_K, introduced in 6.1, instead of using explicit formula, defined by error estimate (5.3) we can use implicit indicator in the form of problem (5.5) but with special assumptions [12]:

i. for local error approximation we use 1D space of finite functions;

ii. those functions are constructed for element $K = [t_{k-1}, t_k]$ in the form:

$$\varphi_K(x) = \begin{cases} \varphi_1(t) = c_{11}\varphi_{11}(t) + c_{12}\varphi_{12}(t) \ on \ t \in [t_{k-1}, t_{k-1/2}], \\ \varphi_1(t_{k-1}) = 0, \varphi_1(t_{k-1/2}) = 1 \\ \varphi_2(t) = c_{21}\varphi_{21}(t) + c_{22}\varphi_{22}(t) \ on \ t \in [t_{k-1/2}, t_k], \\ \varphi_2(t_{k-1/2}) = 1, \varphi_2(t_k) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

where $\{\varphi_{1i}(t)\}, \{\varphi_{2i}(t)\}$ are the sets of fundamental solutions for equation

$$-\left(\tilde{\mu}u'\right)' + Pe[\tilde{\beta}u' + St\tilde{\sigma}u] = 0 \tag{5.7}$$

with constant coefficients (selected as mean values of corresponding functions) on corresponding intervals $[t_{k-1}, t_{k-1/2}]$ and $[t_{k-1/2}, t_k]$. Then we solve (5.5) and use the energy norm of obtained approximation as an error indicator η_K. To find corresponding fundamental solutions we solve quadratic equation

$$-\tilde{\mu}\lambda^2 + Pe\tilde{\beta}\lambda + PeSt\tilde{\sigma} = 0. \tag{5.8}$$

For the roots λ_1, λ_2 we have three cases possible:

i. if $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$ then $\varphi_{i1}(t) = \exp(\lambda_1 t), \varphi_{i2}(t) = \exp(\lambda_2 t)$;

ii. if $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$ then $\varphi_{i1}(t) = \exp(\lambda_1 t), \varphi_{i2}(t) = t\exp(\lambda_1 t)$

iii. if $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ then
$\varphi_{i1}(t) = \exp(\alpha t)\sin(\beta t), \varphi_{i2}(t) = \exp(\alpha t)\cos(\beta t)$.

6. Element selection criteria.

To drive adaptation algorithm we need some rule using which we will be able to choose elements for the further refinement procedure. The key and most wide-used idea is to choose elements with greater error, in some sense. Suppose we have calculated error indicators $\{\eta_K\}$ for each elements on the mesh. In this paper we use two selection criteria:

i. (*"maximum"* criteria) element K is refined if

$$\eta_K > (1 - \theta)\eta_{max}, \tag{6.1}$$

where $\eta_{max} = \max\limits_K \eta_K$ and $\theta \in (0, 1)$ is fixed value;

ii. (*"average"* criteria) element K is refined if

$$\frac{\sqrt{N}\eta_K}{\sqrt{\|u_h\|_E^2 + \sum_{K'} \eta_{K'}^2}} 100\% > \varepsilon, \tag{6.2}$$

where ε is is acceptable tolerance in % for average error level over finite element, N is element count.

7. Adaptation algorithm. Let us define: TOL - acceptable relative error level in percent, p_{max} - maximum element order (polynomial degree).

Step 1: *Find finite element solution u_h on the current mesh $\Im_h$;*

Step 2: *Stop condition check.* For all elements K compute η_K as in section 6.1 (or 6.3). Define $\eta := \left(\sum_{K \in \Im_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}$. If $\eta \|u_h\|_E^{-1} \times 100\% < TOL$ we stop the algorithm (TOL is acceptable relative error level in percent), else:

Step 3: *Choose elements for refinement* using (6.1) (or (6.2)). The set of all selected elements we name as A_θ.

Step 4: *Mesh modification.* For all selected elements $K = [x_{k-1}, x_k]$ ($p_K := \deg(u_h|_K)$) choose between bisection and increasing of polynomial degree on it by one. Compute values $r_m = \|e_h^m\|_E, m = 1, 2$ by solving problems (5.5). Consider the difference $\Delta = r_2 - r_1$. If $\Delta > \delta$, where $\delta > 0$ is predefined value, then we increase element order by 1, otherwise we bisect it into two elements with approximation polynomial orders (p_K, p_K).

Step 5: *Go to* Step 1.

Remark 1. *From the theoretical point of view we should set $\delta = 0$ but in practice, according to errors in numerical quadratures and round-off errors, furthermore the maximum order of approximating polynomial is bounded - so it's logically to use bisection in case when Δ is very small. For this purposes we choose small number $\delta > 0$.*

8. Numerical results. In this chapter we present results of our algorithm for some singular perturbed problems. Parameters δ and θ are equal for all iterations and are selected using search from several values to provide "optimal" values which minimize final number of iterations and final count of degrees of freedom.

We will analyze two sample problems and for each of them we obtain numerical results for four combinations derived from two estimators described in s.6.1 (explicit estimator) and s.6.3 (estimator based on fundamental solution) and two selection criteria (6.1) (or "maximum" criteria) and (6.2) which we will call "average" criteria. Initial mesh size is 7 elements. Average convergence rate was calculated using least squares method.

Problem 1: We consider boundary value problem (1.1) with the following data

$$\mu = 1, \beta = 0, \sigma = 10^5 e^x, f = 10^5, \alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Algorithm parameters are: $TOL = 1\%, p_{max} = 9, \delta = 2, \theta = 0.6$. Figure 1 and table 1 demonstrates algorithm behavior for Problem 1 when using indicators from sections 6.3 and 6.1 in combination with "maximum" criteria (6.1).

We can observe from table 1 than indicator based on fundamental solution can be more efficient but its error is not monotonically decreasing as in example with explicit error indicator.

Figure 2 and table 2 demonstrates algorithm behavior for Problem 1 when using indicators from sections 6.3 and 6.1 in combination with "average" criteria (6.2).

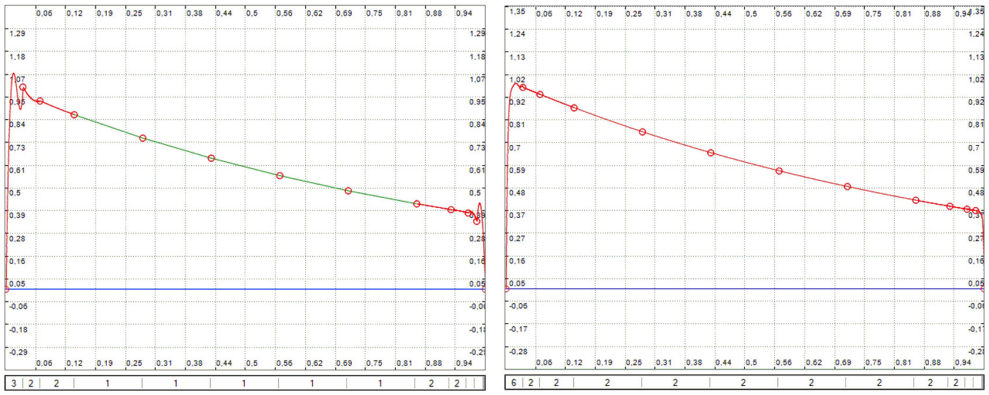

Figure 1: Approximation to solution of Problem 1 using implicit error indicator based on fundamental solution basis which was introduced in section 6.3 (left part) and explicit indicator from 6.1 (right part). Both combined with the "maximum" criteria (6.1). The row in the bottom of each plot shows polynomial degrees on each finite element.

Fundamental solution indicator						Explicit indicator					
n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n	n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n
0	7	8	20.58	8.58		0	7	8	2124.36	886.20	
1	7	10	7.51	3.04	4.51	1	7	10	669.04	271.33	5.17
2	9	14	3.00	1.39	2.29	2	9	14	221.91	89.12	3.27
3	10	16	2.92	1.17	1.29	3	11	18	77.71	31.07	4.17
4	12	20	3.42	1.37	-0.71	4	12	21	29.82	11.90	6.21
5	12	21	1.92	0.76	11.84	5	12	23	12.94	5.16	9.17
						6	12	25	6.10	2.68	7.84
						7	12	32	1.77	0.70	5.39
average rate of convergence 2.37, execution time 208ms						average rate of convergence 5, execution time 330ms					

Table 1: Convergence history for Problem 1 with the "maximum" criteria (6.1): n is an iteration number, N element count, $N_{dof}^{(n)}$ count of degrees of freedom, $\epsilon_n^\Omega = \eta$ absolute error indicator, $r_n^\Omega = \eta \|u_h\|_E^{-1} \times 100\%$ relative error, $p_n = -\left(\ln \epsilon_n^\Omega - \ln \epsilon_{n-1}^\Omega\right) \times \left(\ln N_{dof}^{(n)} - \ln N_{dof}^{(n-1)}\right)^{-1}$ rate of convergence.

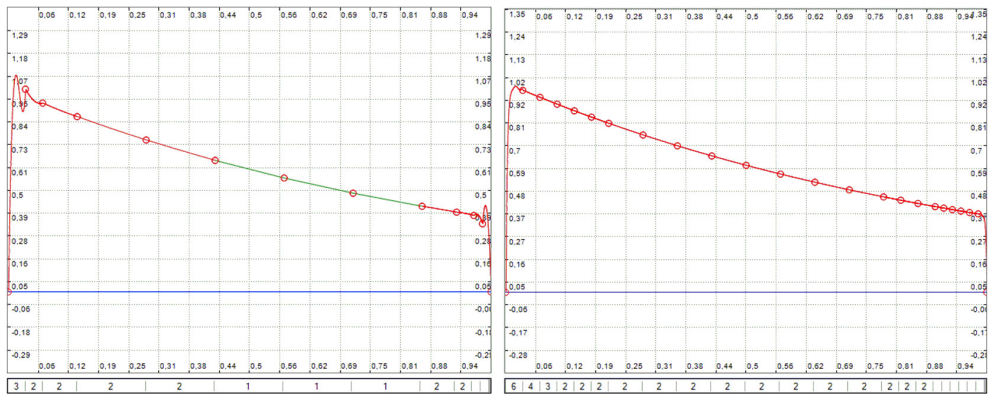

Figure 2: Approximation to solution of Problem 1 using implicit error indicator based on fundamental solution basis which was introduced in section 6.3 (left) and explicit indicator from 6.1 (right). Both combined with the "average" criteria (6.2). The row in the bottom of each plot shows polynomial degrees on each finite element.

Fundamental solution indicator						Explicit indicator					
n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n	n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n
0	7	8	21.43	8.94		0	7	8	2124.30	886.20	
1	7	12	4.08	1.65	4.08	1	7	15	627.39	254.32	1.94
2	9	16	5.44	2.18	-0.99	2	14	29	220.92	88.72	1.58
3	11	20	3.96	1.58	1.42	3	20	41	77.51	30.99	3.02
4	12	23	0.84	0.33	11.04	4	23	50	29.30	11.69	4.90
						5	23	54	12.02	4.79	11.57
						6	23	56	4.82	1.92	25.11
						7	23	58	1.77	0.70	28.48
average rate of convergence 1.88, execution time 197ms						average rate of convergence 3.08, execution time 504ms					

Table 2: Convergence history for Problem 1 with the "average" criteria (6.2).

The results for fundamental solution indicator in table 2 are almost the same as in table 1. Furthermore the behavior of the error has the same specialty with small peak inside. In general for Problem 1:

i. Comparing table 2 with example from table 1 we can see explicit indicator was twice more deficient in according to iterations, element and d.o.f. counts.

ii. Error is monotonic in relation to count of d.o.f.

iii. From examples above we can clearly see that convergence rate is monotonically increasing so this is the fact that approves the possibility of presence of exponential convergence.

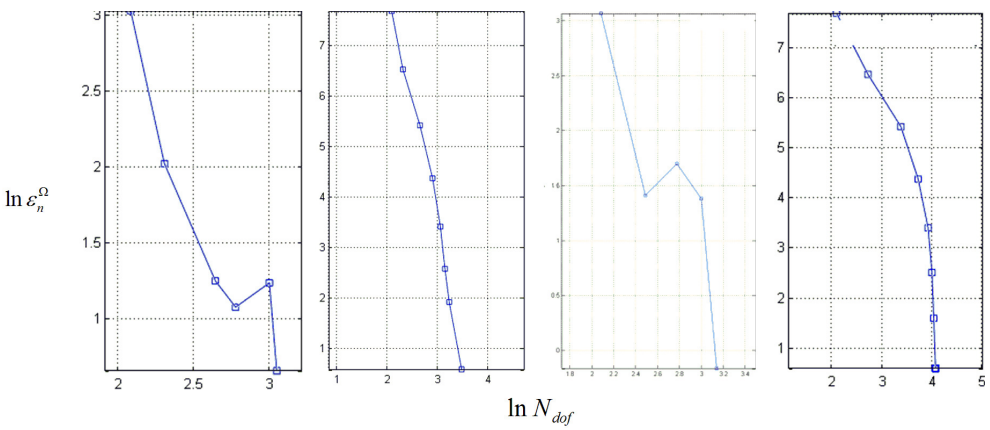

Figure 3: Dependency between absolute error indicator ϵ_n^{Ω} and number of degrees of freedom $N_{dof}^{(n)}$ in logarithmic scale for Problem 1. a) for algorithm with indicator based on fundamental solution described in section 6.3 and "maximum" criteria (6.1); b) for algorithm with explicit error indicator from section 6.1 and "maximum" criteria (6.1); c) for algorithm with indicator based on fundamental solution described in section 6.3 and "average" criteria (6.2); d) for algorithm with explicit error indicator from section 6.1 and "average" criteria (6.1).

Also we can conclude from numerical examples for Problem 1: fundamental solution-based indicator is a bit more efficient but it is not providing monotonically convergent error. For the last example we possibly observed exponential convergence. Comparing two criteria for element selection leads to conclusion that "maximum" criteria from (6.1) is a bit more efficient than "average" criteria (6.2) but in general they are almost identical in according to numerical results.

Problem 2: We consider boundary value problem (1.1) with the following data

$$\mu = 1, \beta = e^{2x} - 2 \cdot 10^2, \sigma = 10^2(\cos x + 2), f = 10^3 e^{-10^2(x-0.5)^2},$$
$$\alpha = \gamma = 10^8, \bar{u}_0 = \bar{u}_L = 0, L = 1.$$

Algorithm parameters are: $TOL = 1\%, p_{max} = 9, \delta = 0, \theta = 0.6$. Figure 4 and table 3 demonstrates algorithm behavior for Problem 2 when using indicators from sections 6.3 and 6.1 in combination with "maximum" criteria (6.1).

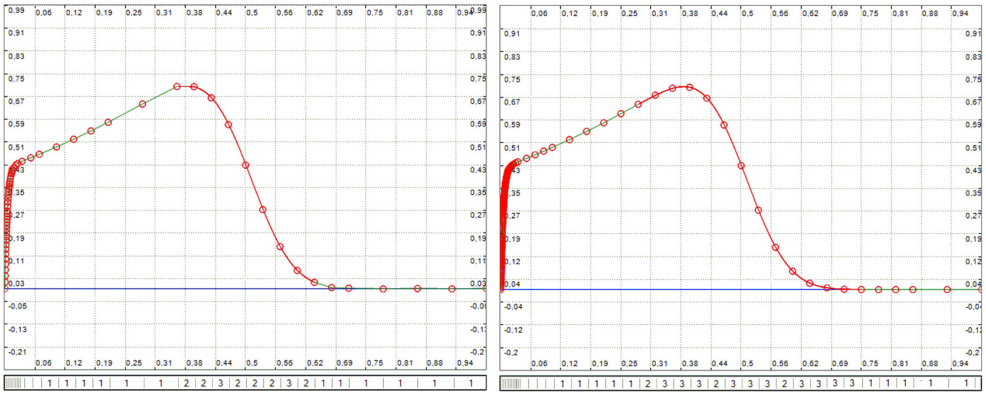

Figure 4: Approximation to solution of Problem 2 using implicit error indicator based on fundamental solution basis which was introduced in section 6.3 (left) and explicit indicator from 6.1 (right). Both combined with the "maximum" criteria (6.1). The row in the bottom of each plot shows polynomial degrees on each finite element.

Fundamental solution indicator						Explicit indicator					
n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n	n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n
1	7	8	19.97	118.83		0	7	8	53.86	320.53	
1	12	13	16.62	96.31	0.37	1	11	12	33.56	194.66	1.16
2	15	16	3.8	27.81	7.09	2	14	15	18.85	135.13	2.58
3	17	18	5.07	48.95	-2.42	3	16	17	11.07	104.86	4.25
4	18	19	1.66	18.85	20.65	4	17	19	5.09	57.91	6.96
5	19	20	1.15	12.1	7.1	5	18	20	3.44	36.14	7.64
6	20	23	0.65	6.86	4.04	6	20	26	1.54	16.25	3.04
7	26	31	0.32	3.33	2.39	7	24	30	0.92	9.63	3.61
8	33	40	0.32	3.3381	0	8	35	44	0.48	5.02	1.7
9	37	44	0.27	2.88	1.59	9	56	69	0.22	2.34	1.69
10	37	46	0.21	2.26	5.51	10	85	101	0.11	1.24	1.6
11	42	53	0.15	1.57	2.53	11	138	160	0.06	0.66	1.35
12	58	69	0.08	0.93	1.98						
average rate of convergence 2.72, execution time 825ms						average rate of convergence 2.29, execution time 1248ms					

Table 3: Convergence history for Problem 2 with the "maximum" criteria (6.1).

As in the Problem 1 results error is not monotonic for indicator based on fundamental solution and it is monotonic for explicit indicator i.e. exactly the same behavior as in the Problem 1.

Figure 5 and table 4 demonstrates algorithm behavior for Problem 1 when using indicators from sections 6.3 and 6.1 in combination with "average" criteria (6.2).

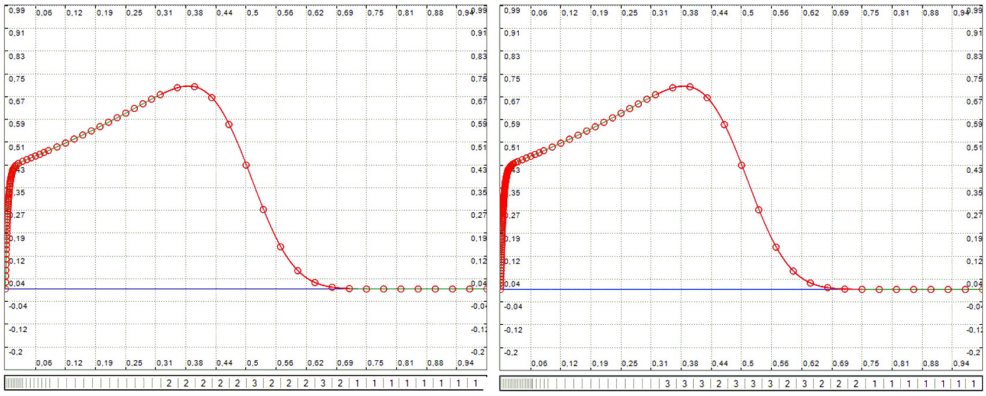

Figure 5: Approximation to solution of Problem 2 using implicit error indicator based on fundamental solution basis which was introduced in section 6.3 (left) and explicit indicator from 6.1 (right). Both combined with the "average" criteria (6.2). The row in the bottom of each plot shows polynomial degrees on each finite element.

Fundamental solution indicator						Explicit indicator					
n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n	n	N	$N_{dof}^{(n)}$	ϵ_n^Ω	r_n^Ω	p_n
0	7	8	9.17651	54.6	-	0	7	8	53.86	320.53	
1	14	15	11.58043	67.35	0.37	1	14	15	33.33	193.88	0.76
2	25	29	10.38023	75.74	0.16	2	25	29	17.3	126.26	0.99
3	36	45	3.89025	37.63	2.23	3	37	48	8.75	84.66	1.35
4	41	51	1.96705	22.38	5.44	4	42	56	4.38	49.93	4.47
5	44	58	1.03781	10.91	4.97	5	44	60	2.19	23.11	10.02
6	49	63	0.4601	4.83	9.83	6	49	65	1.09	11.54	8.64
7	58	72	0.23279	2.43	5.1	7	60	77	0.55	5.76	4.08
8	69	83	0.11914	1.24	4.71	8	77	95	0.27	2.89	3.27
9	84	98	0.06066	0.63	4.06	9	100	119	0.14	1.48	2.96
						10	129	149	0.07	0.83	2.56
average rate of convergence 2.58, execution time 1222ms						average rate of convergence 2.44, execution time 1719ms					

Table 4: Convergence history for Problem 2 with the "average" criteria (6.2).

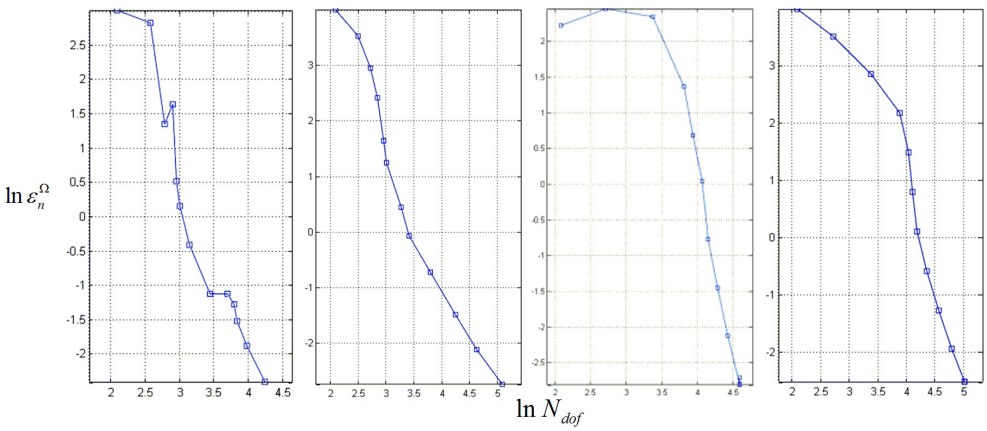

Figure 6: Dependency between absolute error indicator ϵ_n^{Ω} and number of degrees of freedom $N_{dof}^{(n)}$ in logarithmic scale for Problem 2. a) for algorithm with indicator based on fundamental solution described in section 6.3 and "maximum" criteria (6.1); b) for algorithm with explicit error indicator from section 6.1 and "maximum" criteria (6.1); c) for algorithm with indicator based on fundamental solution described in section 6.3 and "average" criteria (6.2); d) for algorithm with explicit error indicator from section 6.1 and "average" criteria (6.1).

In general we can see from provided numerical examples that: 1) the better choice in according to count of elements, iterations and d.o.f. reached is a combination of the indicator from chapter 6.3 based on fundamental solution and "maximum" criteria (6.1); 2) there is no large difference between "maximum" and "average" selection criteria; 3) if we need to have monotonic error decreasing we need to choose explicit indicator from 6.1.

Conclusion. In this work we constructed *hp*-adaptive algorithm for solving the diffusion-advection-reaction boundary value problems with self-adjoint operators. We proved the optimality in some sense of refinement selection step used in algorithm. Also we introduced symmetrization procedure which can be used to transform given nonsymmetrical variational problem to equivalent symmetric problem, therefore making possible application of constructed algorithm to nonsymmetrical problems too. Also we studied precisely conditions which problem data needs to satisfy to make boundary problem well-posed.

To drive adaptation process we introduce two a posteriori error estimators. For element selection for refinement procedure we use explicit estimator, i.e. explicit formula which gives upper bound of actual error on finite element. After elements for refinement were selected we need to choose on each element refinement pattern: bisection with original element order preservation or increment of polynomial degree on element by one. For this purpose we use classic implicit error estimator (i.e. in the form auxiliary variational problem for error function). Using explicit estimator gives us way of homogeneous computation of per-element error, needed for proper selection elements for refinement. Respectively, using auxiliary error problem gives us elegant way to choose between different types of elements refinement.

In the end we present comparative analysis of numerical results obtained using

combination of introduced algorithm with different kinds of a posteriori error estimators, and element refinement criteria.

1. **Brenner S.** The Mathematical Theory of Finite Element Methods / S. Brenner, L. Scott. – Springer, 2008, 3ed. – 404p.
2. **Schwab Ch.** p and hp-Finite Element Methods // Clarendon Press, 1998.
3. **Demkowicz L.** Computing with hp-adaptive finite elements. I. One- and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems / L. Demkowicz. – Austin, 2005. – 418 p.
4. **Doolan E.P.** Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers / E.P. Doolan, J.J.H. Miller, W.H.A. Schilders. – BOOLE PRESS, 1980. – 198 p.
5. **Dorfler W.** Dorfler W. Convergence of an adaptive hp finite element strategy in one space dimension. / W. Dorfler, V. Heuveline // Applied Numerical Mathematics. – 2007. – No.57, 1108–1124.
6. **Logan J. D.** Transport modeling in hydrogeochemical systems. New York: Springer, 2001. – 226 p.
7. **Sinchuk Y. O.** Finite element method approximation with exponential weighting functions / Y. O. Sinchuk, G. A. Shynkarenko // App. Problems Mech. Math. – 2007. – 5. – P. 61–70 (in Ukrainian).
8. **Solin P.** Higher-Order Finite Element Methods / P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel. – Chapman & Hall, 2003. – 388 p.
9. **Solin P.** Static Condensation, Partial Orthogonalization of Basis Functions, and ILU Preconditioning in the hp-FEM / P. Solin, T. Vejchodsky // The University of Texas at El Paso, Department of Mathematical Sciences Research Reports Series, Research Report. – 2007. – No.4.
10. **Rektorys K.** Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering. Second edition. – Dr. Reidel Publishing Company, 1980. – 589 p.
11. **Drebotiy R.** HP-adaptive finite element method for 1d diffusion-convection-reaction boundary value problems / R.Drebotiy, H.Shynkarenko. – Opole 2014, in preparation.
12. **Сінчук Ю. О.** Апостеріорний оцінювач похибки апроксимацій МСЕ для задач конвекції-дифузії / Ю. О. Сінчук, Г. А. Шинкаренко // Вісник Тернопільського держ. техн. ун-ту. – 2008. – Т. 13, №2. – С.169–174.

Received 08.08.2014

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2014 .–V.19,Is.4(24).–P.58–64

Mathematical Subject Classification: 34C29, 65L03, 93C23
UDC 517.93

O. D. Kichmarenko, K. Yu. Sapozhnikova
I. I. Mechnikov Odesa National University

AVERAGING SCHEME FOR CONTROLLED SYSTEMS WITH MAXIMUM OF CONTROL FUNCTION

Кічмаренко О. Д., Сапожнікова К. Ю. Схема усереднення керованої системи з максимумом за керуванням. В даній статті розглядається керована система з максимумом за керуванням. Для дослідження системи використовується метод усереднення. Розроблено алгоритм співвідношення керувань початкової та усередненої систем. Наводиться обґрунтування методу усереднення для керованої системи з максимумом за керуванням.
Ключові слова: керовані системи з максимумом, асимптотичні методи, усереднення керованих систем, алгоритм відповідності керувань.

Кичмаренко О. Д., Сапожникова Е. Ю. Схема усреднения управляемой системой с максимумом по управлению. В данной статье рассматривается управляемая система с максимумом по управлению. Для исследования системы применяется метод усреднения. Разработан алгоритм соответствия управлений начальной и усредненной систем. Представлено обоснование метода усреднения для управляемой системы с максимумом по управлению.
Ключевые слова: управляемые системы с максимумом, асимптотические методы, усреднение управляемых систем, алгоритм соответствия управлений.

Kichmarenko O. D., Sapozhnikova K. Yu. Averaging scheme for controlled systems with maximum of control function. In this paper controlled system with maximum of control function is considered. Averaging method is used for system researching. Algorithm of correspondence between control functions of getting and averaged systems is presented. Justification of the averaging method for controlled system with maximum of control function is established.
Key words: controlled systems with maximum, asymptotic methods, averaging method for controlled systems, algorithm of correspondence between control functions.

Introduction. Nowadays interest in differential equations with maximum increases exponentially. For instance, it is easy to notice in the theory of automatic regulation [9]. Of course systems that describe real processes sometimes are not easy to research. That is why it is important to find methods for getting more simple systems that could be studied easier. It can be averaging method for controlled system that N.N.Moiseev [4] offered in XX century. Application of the averaging method for differential equations with maximum and controlled systems with maximum of state has been studied extensively by O.D.Kichmarenko and V.A.Plotnikov [2], [3], [5]- [7], [10]. In this paper we present conditions for applying averaging method for controlled systems with maximum of control function.

Main Results

1.Problem statement of averaging method for controlled system with maximum of control function. We consider motion of automatic regulation system

© Kichmarenko O. D., Sapozhnikova K. Yu., 2014

that is described by system of differential equation with maximum of control function and small parameter

$$\dot{x}(t) = \varepsilon \left(f(t, x(t)) + A(x(t))\varphi(t, u(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} u(s)) \right), \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$ is a phase vector, $f : [0, L\varepsilon^{-1}] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is 2π-periodic vector function on t; $\varepsilon > 0$ — small parameter; $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ is a time of system exists; $A - n \times m$— matrix, $a_{ij} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$; $\varphi : [0, L\varepsilon^{-1}] \times U \times U \to \mathbb{R}^m$, — 2π—periodic vector function on t; $g(t), \gamma(t)$ - are known functions and $0 \leqslant g(t) \leqslant \gamma(t) \leqslant t$; u —is a control function, $u \in \mathfrak{U}$, $u(t) \in U \subset comp(\mathbb{R}^r)$; $\max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} u(s) = (\max_{s\in[g(t),\gamma(t)]}(u_1(s)), ..., \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]}(u_r(s)))$.

Piecewise continuous functions are considered as admissible control functions and absolutely continuous functions as solution for problem (1).

Note that for different ε we get different $u(t)$ i.e. $u(t) = u(t, \varepsilon)$.

Let us consider the correspondence averaged problem

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \left[\overline{f}(y(t)) + A(y(t))v(\tau) \right], \quad y(0) = x_0, \tag{2}$$

for problem (1). Where

$$\overline{f}(y(t)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x(t))dt, \tag{3}$$

$v(t)$ is the control function such that the following condition is holds:

$$\int_{2\pi}^{2\pi(i+1)} v(t)dt = \int_{2\pi}^{2\pi(i+1)} \varphi(t, u(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} u(s))dt, \tag{4}$$

i.e.

$$V = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t, u(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} u(s))dt, u(t) \in U \right\}.$$

Here V is Auman integral [1], $v \in \mathfrak{V}$ is a set of admissible control functions of averaged problem (2). Furthermore, note that for different ε we obtain different $v(t)$ i.e. $v(t) = v(t, \varepsilon)$.

Average system is more simple and does not include maximum.

2.Algorithm of correspondence between control functions of getting and averaged systems.

Establish the correspondence between control functions $u(t) \in U$ and $v(t) \in V$.

i. For admissible control $v \in \mathfrak{V}$ find the correspondence admissible control $u \in \mathfrak{U}$ in the following way:

   (a) calculate points $v_i = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} v(t)dt$,

(b) assign control $u(t) = \{u_i(t), 2\pi i \leqslant t \leqslant 2\pi(i+1), i = 1, 2, ..\}$, where $u_i(t)$ can be obtained from the conditions:

$$\arg\min_{u(t)\in U} \left\| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi(t, u(t), \max_{s\in[g(t),\gamma(t)]} u(s))dt - v_i \right\|. \tag{5}$$

ii. For admissible control $u \in \mathfrak{U}$ find the correspondence admissible control $v \in \mathfrak{V}$ in the following way:

(a) denote values $u_i(t) = \{u(t), 2\pi i \leqslant t \leqslant 2\pi(i+1), i = 1, 2, ..\}$ calculate points $w_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} \varphi(t, u_i(t), \max\limits_{s\in[g(t),\gamma(t)]} u_i(s))dt$;

(b) assign control $v(\varepsilon t) = \{v_i(t), 2\pi i \leqslant t \leqslant 2\pi(i+1), i = 1, 2, ..\}$, where v_i can be obtained from condition: $\arg\min\limits_{v\in V} \|w_i - v\|$.

Remark. *Control functions $u(t)$ in it.1(b) and $v(t)$ in it.2(b) can be determined ambiguously.*

3. Justification of averaging method for controlled system with maximum of control function.

Theorem. *Suppose that in domain $Q = \{t \geqslant 0, x, y \in D \subset \mathbb{R}^n, u(t) \in U \subset comp(\mathbb{R}^r)\}$ the following conditions hold:*

1) $f(t, x)$ is continuous function on t, 2π— periodic and bounded by constant K_1,

$$\|f(t, x)\| \leqslant K_1,$$

satisfy the Lipschitz condition with respect to x and with constant λ_1:

$$\|f(t, x') - f(t, x'')\| \leqslant \lambda_1 \|x' - x''\|;$$

2) $A(x)$ is bounded by constant K_2 matrix s.t.:

$$\|A(x)\| \leqslant K_2,$$

where $\|A(x)\|$ is Euclidian norm, and satisfy Lipschitz condition with constant λ_2:

$$\|A(x') - A(x'')\| \leqslant \lambda_2 \|x' - x''\|;$$

3) $\varphi(t, u, w)$ is 2π — periodic function and continuous with respect to t, u, w;

4) for any admissible control $v(t) \in \mathfrak{V}$ the corresponding trajectory $y(t)$ of the averaged system (2), $y(0) = x_0 \in D'$ is defined by $t \geqslant 0$, and with its ρ — neighborhood is in domain D.

Then for any $L > 0$ there exists $\varepsilon^0 > 0$, $C > 0$ such that for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ and $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ following statements hold:

1) *for any admissible control $u \in \mathfrak{U}$ of system (1) exists control function $v \in \mathfrak{V}$ of system (2), such that:*

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant C\varepsilon, \tag{6}$$

where $x(t), y(t)$ are solutions of systems (1) and (2) accordingly, $x(0) = y(0) \in D' \subset D$.

2) *for any admissible control $v \in \mathfrak{V}$ of system (2) exists control function $u \in \mathfrak{U}$ of system (1), such that (6) is holds.*

Proof.
Using the integral equations for (1) and (2), we can write:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \varepsilon \int_0^t \|f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\| \, d\tau + \varepsilon \left\| \int_0^t \left[f(\tau, y(\tau)) - \overline{f}(y(\tau)) \right] d\tau \right\| +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \left\| [A(x(\tau)) - A(y(\tau))] \, \varphi(\tau, u(\tau), \max_{s \in [g(\tau), \gamma(\tau)]} u(s)) \right\| d\tau +$$

$$+\varepsilon \left\| \int_0^t A(y(\tau)) \left[\varphi(\tau, u(\tau), \max_{s \in [g(\tau), \gamma(\tau)]} u(s)) - v(\tau) \right] \right\| d\tau \leq$$

$$\leqslant \varepsilon \left\{ [\lambda_1 + M\lambda_2] \int_0^t \delta(\tau) d\tau + \int_0^t \left\| f(\tau, y(\tau)) - \overline{f}(y(\tau)) \right\| d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \left\| A(y(\tau)) \left[\varphi(\tau, u(\tau), \max_{s \in [g(\tau), \gamma(\tau)]} u(s) - v(\tau) \right] \right\| d\tau \right\}, \tag{7}$$

note that $\delta(t) = \|x(\tau) - y(\tau)\|$ is the uniform metric, i.e. $\varphi(\tau, u, w)$ is continuous function with respect to τ, u, w then

$$\|\varphi(\tau, u, w)\| \leqslant M = \max_{\tau, u, w} \|\varphi(\tau, u, w)\| .$$

Since previous inequality (7) is justly for any $t \in [0, \tau]$, we get

$$\delta(t) \leqslant \varepsilon \left\{ [\lambda_1 + M\lambda_2] \int_0^t \delta(\tau) d\tau + I_1 + I_2 \right\},$$

where

$$I_1 = \left\| \int_0^t f(\tau, y(\tau)) - \overline{f}(y(\tau)) d\tau \right\|,$$

$$I_2 = \int\limits_0^t \left\| A(y(\tau)) \left[\varphi(\tau, u(\tau), \max_{s\in[g(\tau),\gamma(\tau)]} u(s) - v \right] \right\| d\tau.$$

Applying the Gronwall-Bellman lemma, we obtain:

$$\varepsilon \left\{ [\lambda_1 + M\lambda_2] \int\limits_0^t \delta(\tau) d\tau + I_1 + I_2 \right\} \leq \varepsilon \left(I_1 + I_2 \right) e^{\varepsilon[\lambda_1 + M\lambda_2]\tau} \leq$$

$$\leqslant \varepsilon \left(I_1 + I_2 \right) e^{L[\lambda_1 + M\lambda_2]}. \tag{8}$$

We denote $t_i = 2\pi$. Let $t \in [t_i, t_{i+1})$. Then, using the additive property of the integral, we get for I_1:

$$I_1 \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\|f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, y(t_i))\| + \left\|\overline{f}(y(\tau)) - \overline{f}(y(t_i))\right\| \right] d\tau + \right.$$

$$\left. + \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau, y(t_i)) - \overline{f}(y(t_i)) d\tau \right\| \right\} + \int\limits_{t_k}^{t} \left\|\overline{f}(y(\tau)) - \overline{f}(y(t))\right\| d\tau \leq$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ 2\lambda_1 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|y(\tau) - y(t_i)\| \, d\tau + \left\| \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tau, y(t_i)) - \overline{f}(y(t_i)) d\tau \right\| \right\} +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} \left\| f(y(\tau)) - \overline{f}(y(\tau)) \right\| d\tau \leq$$

$$\leq 2 \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \lambda_1 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \|y(\tau) - y(t_i)\| \, d\tau \right\} + 4\pi K_1 \leqslant 2\lambda_1 \varepsilon (K_1 + K_2 M) \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\tau - 2\pi i) \, d\tau + 4\pi K_1 =$$

$$= 2\pi\lambda_1 L(K_1 + K_2 M) + 4\pi K_1.$$

Similarly to the way of previous estimation we can write for I_2:

$$I_2 \leq \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| (A(y(\tau)) - A(y(t_i))) \left(\varphi(\tau, u(\tau), \max_{s\in[g(\tau),\gamma(\tau)]} u(s)) - v(\tau) \right) \right\| d\tau +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\| A(y(t_i)) \left(\varphi(\tau, u(\tau), \max_{s\in[g(\tau),\gamma(\tau)]} u(s)) - v(\tau) \right) \right\| d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_k}^{t}\left\|A(y(\tau))\left(\varphi(\tau,u(\tau),\max_{s\in[g(\tau),\gamma(\tau)]}u(s))-v(\tau)\right)\right\|d\tau\leq$$

$$\leq\sum_{i=0}^{k-1}\left\{\lambda_2\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\|y(\tau)-y(t_i)\|\left\|\varphi(\tau,u(\tau),\max_{s\in[g(\tau),\gamma(\tau)]}u(s))-v(\tau)\right\|d\tau\right\}+$$

$$+\int\limits_{t_k}^{t}\left\|A(y(\tau))\left(\varphi(\tau,u(\tau),\max_{s\in[g(\tau),\gamma(\tau)]}u(s))-v(\tau)\right)\right\|d\tau.$$

Then, using Cauchy formula, 2) assumption of the theorem, estimation for function φ and (4) we get:

$$I_2\leqslant 2\lambda_2M(K_1+K_2M)\pi L+4\pi K_2M.$$

So, from estimations for I_1, I_2 and using inequality (8), we obtain:

$$\|x(t)-y(t)\|\leqslant\varepsilon C,$$

where

$$C=2\pi\left[L\left(K_1+K_2M\right)\left\{\lambda_1+\lambda_2M+2\right\}\right].$$

Theorem is proved.

Conclusion. Thus, algorithm of correspondence between control function $u(t)$ of getting system and control function $v(t)$ of averaged system is established. Proved theorem substantiates applying the averaging method for controlled system with maximum of control function.

1. **Aumann R. J.** Integrals of Set-Valued Functions / R. J. Auman // Math. Analysis and Applic. – 1965. – Vol. 12, Is. 1. – P. 1–12.
2. **Kichmarenko O. D.** The averaging method for optimal control problem with maximum / O. D. Kichmarenko, V. A. Plotnikov // Abstract of 6th International ISAAC Congress, Ankara. – 2007. – P. 86.
3. **Kichmarenko O. D.** Averaging method for controlled motion with a maximum / O. D. Kichmarenko // Mezhd. confer. Pyatue Bogolyubovskie chteniya. – 2002. – P. 84.
4. **Moiseev N. N,** Asymptotic methods in nonlinear mechanics / N. N. Moiseev. K.: Nauka. – 1981. – 260 p.
5. **Plotnikov V. A.** A note on the averaging for differential equations with maxima / V. A. Plotnikov, O. D. Kichmarenko // Iranian J. Optimization. – 2009 – Is. 1. – P. 132–140.
6. **Plotnikov V. A.** The averaging schemes of the controlled movement equations with maximum / V. A. Plotnikov, O. D. Kichmarenko // Proc. Odessa Polytech. Uni. – 2006. – 2(26). – P. 106–114.

7. **Plotnikov V. A.** Averaging of differential equations with maximum / V. A. Plotnikov, O. D. Kichmarenko // Nauk. Visn. Cherniv. Univer: Zbir. Nauk. Prat., Matem. – 2002. – 150. – P. 78–82.

8. **Plotnikov V. A.** Averaging method in problems of control / V. A. Plotnikov. K.; Odessa: Lybid. – 1992. – 188 p.

9. **Popov E. P.** Automatic regulation and control / E. P. Popov. M.: Nauka. – 1966 – 388 p.

10. **Plotnikov V. A.** Averaging for differential equations with maximum / V. A. Plotnikov, O. D. Kichmarenko // Nauk. Vist. Chtrnivetskogo Univers.: Zb.nauk.pr. – 2002. – Vol. 150. – P. 78–82.

11. **Shpakovich V. P.** Averaging method for differential equations with maximum / V. P. Shpakovich, V. I. Muntyan. K.: Inst. matematiki AN USSR. – 1986. – P. 662–665.

Received 21.09.2014

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2014 .–V.19,Is.4(24).–P.65–70

Mathematical Subject Classification: 34A34, 34A25
UDC 517.926

S. Shchogolev
I. I. Mechnikov Odesa National University

ON A ONE CLASS OF THE SOLUTIONS OF THE NONLINEAR FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH OSCILLATING COEFFICIENTS

Щоголев С. А. Про один клас розв'язків нелінійного диференціального рівняння першого порядку з коливними коефіцієнтами. Для нелінійного диференціального рівняння першого порядку, коефіцієнти якого зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано умови існування частинного розв'язку аналогічної структури в резонансному випадку.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

Щёголев С. А. Об одном классе решений нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с осциллирующими коэффициентами. Для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка, коэффициенты которого представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования частного решения аналогичной структуры в резонапнсном случае.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье.

Shchogolev S. On a one class of the solutions of the nonlinear first-order differential equation with oscillating coefficients. For the nonlinear first-order differential equation, whose coefficients are represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the condidtions of existence of the particular solution of analogous structure are obtained at resonance case.
Key words: differential, slowly-varying, Fourier series.

Introduction. This paper is a continuation of research initiated in paper [1]. Here we using the definitions and designations from [1]. In this paper are considered the next system of the differential equations:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)x_k + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,x_2),\ j=1,2, \qquad (1)$$

where $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0) = \{t,\varepsilon:\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0,\ -L\varepsilon^{-1} \le t \le L\varepsilon^{-1},\ 0<L<+\infty\}$, colon$(x_1,x_2) \in D \subset \mathbf{R}^2$, $a_{jk} \in S(m,\varepsilon_0)$, $f_j \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, $X_1, X_2 \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ with respect t,ε,θ and analytic with respect $x_1,x_2 \in D$; $\mu \in (0,\mu_0) \subset \mathbf{R}^+$. Functions a_{jk}, f_j, X_j $(j,k=1,2)$ are real, and eigenvalues of matrix $(a_{jk}(t,\varepsilon))$ have a form $\pm i\omega(t,\varepsilon)$, where $\omega \in \mathbf{R}^+$.

In paper [1] the conditions of existence of the particular solutions belongs to class $F(m^*,l^*,\varepsilon^*,\theta)$ $(m^* \le m,,\ l^* \le l,\ \varepsilon^* \le \varepsilon_0)$ are obtained (the definitions of classes $S(m,\varepsilon_0)$, $F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ given in [1]). It was assumed that the conditions:

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |a_{12}(t,\varepsilon)| > 0,$$

© Shchogolev S., 2014

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |k\omega(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon)| \geq \gamma > 0,\ k = 1,2;\ n \in \mathbf{Z},$$

$\varphi(t,\varepsilon) = d\theta/dt$, means considered noresonance case. The purpose of this paper is to obtain analogous results in resonance case, means when eigenvalues of matrix $(a_{jk}(t,\varepsilon))$ have a form $\pm ir\varphi(t,\varepsilon)$, $r \in \mathbf{N}$. In order to simplify the presentation instead of system (1) we consider the first-order differential equation of special kind. The results for this equation can be easily extended to a system (1) and to the same systems of the more general kind [2].

Main Results

1. Statement of the Problem. We consider the next first-order differential equation:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x), \tag{2}$$

where $t,\varepsilon \in G(\varepsilon_0)$, $|x| \leq d < +\infty$, $f \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, $X \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ with respect t,ε,θ and analytic with respect x, at $|x| \leq d$.

We study the problem of existence of the particular solutions of the classes $F(m^*,l^*,\varepsilon^*,\theta)$ $(m^* \leq m,,\ l^* \leq l,\ \varepsilon^* \leq \varepsilon_0)$ of the equation (2).

2. Auxiliary results.

Lemma 1. *Suppose we are given the following linear first-order differential equation*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(t,\varepsilon)x + u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)), \tag{3}$$

where $\lambda \in S(m,\varepsilon_0)$, $u \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$. Let condition:

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon)| = \gamma > 0. \tag{4}$$

Then the equation (3) has a particular solution $x(t,\varepsilon,\theta) \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ for any function $u \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, and exists $K_0 \in (0,+\infty)$ such that

$$\|x\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \leq \frac{K_0}{\gamma}\ \|u\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}. \tag{5}$$

Proof. We represent the function u in the form of Fourier-series:

$$u(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta).$$

The desired solution will be sought in the form of a Fourier series:

$$x(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta). \tag{6}$$

Then for coefficients $x_n(t,\varepsilon)$ we obtain the following differential equations:

$$\frac{dx_n}{dt} = \sigma_n(t,\varepsilon)x_n + u_n(t,\varepsilon),\ n \in \mathbf{Z}, \tag{7}$$

where $\sigma_n(t,\varepsilon) = \lambda(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon)$.

We consider the following solution of equation (7):

$$x_n(t,\varepsilon) = \int\limits_{\pm\frac{L}{\varepsilon}}^{t} u_n(\tau,\varepsilon)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\sigma_n(s,\varepsilon)ds\right)d\tau, \tag{8}$$

where the sign in lower limit of integration coincides with the sign of $\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon)$.

We consider the case $m=0$ and $\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon)\le-\gamma<0$. We have:

$$x_n(t,\varepsilon) = \int\limits_{-\frac{L}{\varepsilon}}^{t} u_n(\tau,\varepsilon)\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\sigma_n(s,\varepsilon)ds\right)d\tau,$$

$$\sup_{G(\varepsilon_0)}|x_n(t,\varepsilon)| \le \sup_{G(\varepsilon_0)}|u_n(t,\varepsilon)|\int\limits_{-\frac{L}{\varepsilon}}^{t}\exp\left(\int\limits_{\tau}^{t}\mathrm{Re}\lambda(s,\varepsilon)ds\right)d\tau \le$$

$$\le \sup_{G(\varepsilon_0)}|u_n(t,\varepsilon)|\int\limits_{-\frac{L}{\varepsilon}}^{t}\exp\left(-\gamma(t-\tau)\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma}\sup_{G(\varepsilon_0)}|u_n(t,\varepsilon)|\left(1-\exp\left(-\gamma\left(t+\frac{L}{\varepsilon}\right)\right)\right) < \frac{1}{\gamma}\sup_{G(\varepsilon_0)}|u_n(t,\varepsilon)|. \tag{9}$$

It is easy to show that a similar estimate holds in the case $\mathrm{Re}\lambda(t,\varepsilon)\ge\gamma>0$. Thus in case $m=0$ Lemma are proved. For the case $m\ge1$ using arguments similar to those given in [3], and using estimation (9), we obtain the Lemma.

We suppose, that

$$\int\limits_{0}^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)d\theta = 0 \ \forall\ (t,\varepsilon)\in G(\varepsilon_0). \tag{10}$$

We consider the function:

$$\xi_0(t,\varepsilon,\theta) = M_0(t,\varepsilon) + \widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta),$$

where

$$\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta) = L[f(t,\varepsilon,\theta)] = \sum_{\substack{\nu=-\infty\\(\nu\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[f]}{in\varphi}\ \exp(in\theta),$$

and function $M_0(t,\varepsilon)$ are defined as the root of equation:

$$P(t,\varepsilon,M) = \int\limits_{0}^{2\pi} X(t,\varepsilon,\theta,M+\widetilde{\xi}(t,\varepsilon,\theta))d\theta = 0. \tag{11}$$

Lemma 2. *Let the equation (2) such that:*
1) *the function $f(t,\varepsilon,\theta)$ satisfy condition (10);*

2) *the equation (11) has a root* $M_0(t,\varepsilon)$ *such that*

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}\left|\mathrm{Re}\frac{\partial P(t,\varepsilon,M_0)}{\partial M}\right| = \gamma_0 > 0. \tag{12}$$

Then exists $\mu_1 \in (0,\mu_0)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0,\mu_1)$ *exists the non-degenerate transformation of kind*

$$x = \psi_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \psi_2(t,\varepsilon,\theta,\mu)y,$$

where $\psi_1,\psi_2 \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, *reducing the equation (2) to kind:*

$$\frac{dy}{dt} = \mu\lambda_0(t,\varepsilon)y + \mu^2 r(t,\varepsilon,\theta,\mu)y + \mu\varepsilon v(t,\varepsilon,\theta,\mu)y+$$

$$+\varepsilon c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^2 d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu Y(t,\varepsilon,\theta,y,\mu), \tag{13}$$

where $\lambda_0 \in S(m,\varepsilon_0)$, $r,d \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, $v \in F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta)$, *function* Y *belong to class* $F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ *with respect* t,ε,θ *and contain terms not lower than second order with respect* y.

Proof. We make in the equation (2) the substitution:

$$x = \xi_0(t,\varepsilon,\theta) + z, \tag{14}$$

where z – the new unknown function, for which we obtain the equation:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon g(t,\varepsilon,\theta) + \mu h(t,\varepsilon,\theta) + \mu p(t,\varepsilon,\theta)z + \mu Z(t,\varepsilon,\theta,z,\mu), \tag{15}$$

where

$$g = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\xi_0}{\partial t} \in F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta),\ h = X(t,\varepsilon,\theta,M_0+\widetilde{\xi}) \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta),$$

$$p = \frac{\partial X(t,\varepsilon,\theta,M_0+\widetilde{\xi})}{\partial x} \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta),\ Z = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 X(t,\varepsilon,\theta,\xi_0+\nu z)}{\partial x^2}\ z^2\ (0<\nu<1).$$

By condition (11) we have:

$$\Gamma_0[h(t,\varepsilon,\theta)] \equiv 0.$$

We make in equation (15) the substitution:

$$z = \mu z_0(t,\varepsilon,\theta) + \widetilde{z}, \tag{16}$$

where $z_0 = L[h(t,\varepsilon,\theta)] \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, and $\widetilde{z}$ – new unknown function. We obtain:

$$\frac{d\widetilde{z}}{dt} = \varepsilon c_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^2 d_1(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu p(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{z}+$$

$$+\mu^2 q(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{z} + \mu\widetilde{Z}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{z},\mu), \tag{17}$$

where

$$c_1 = -\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\partial z_0}{\partial t} + g \in F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta),\ d_1 = pz_0 + \frac{1}{\mu}\ Z(t,\varepsilon,\theta,\mu z_0,\mu) \in F(m,l,\varepsilon,\theta),$$

$$q = \frac{1}{\mu}\frac{\partial Z(t,\varepsilon,\theta,\mu z_0,\mu)}{\partial z} \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta),\ \widetilde{Z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z(t,\varepsilon,\theta,\mu z_0+\nu_1\widetilde{z},\mu)}{\partial z^2}\,\widetilde{z}^2\ (0<\nu_1<1).$$

We make in equation (17) the transformation:

$$\widetilde{z} = (1+\mu\widetilde{\psi}(t,\varepsilon,\theta))y, \tag{18}$$

where $\widetilde{\psi} = L[p(t,\varepsilon,\theta)]$. For sufficiently small μ this transformation is non-degenerate, and as result of its application we obtain the equation (13), in which:

$$\lambda_0(t,\varepsilon) = \Gamma_0[p(t,\varepsilon,\theta)], \tag{19}$$

$$c = (1+\mu\widetilde{\psi})^{-1}c_1,\ d = (1+\mu\widetilde{\psi})^{-1}d_1,\ r = (1+\mu\widetilde{\psi})^{-1}\left(p\widetilde{\psi} - q(1+\mu\widetilde{\psi}) - \widetilde{\psi}\lambda_0\right),$$

$$v = -\frac{1}{\varepsilon}\,(1+\mu\widetilde{\psi})^{-1}\frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial t},\ Y = (1+\mu\widetilde{\psi})^{-1}\widetilde{Z}(t,\varepsilon,\theta,(1+\widetilde{\psi})y,\mu).$$

Lemma 2 are proved.

3. Principal results.

Theorem. *Let the equation (2) satisfy condidtions of Lemma 2. Then exists* $\mu_2 \in (0,\mu_0)$, $\varepsilon_1(\mu) \in (0,\varepsilon_0)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1(\mu))$ *the equation (2) has a perticular solution* $x(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m-1,l,\varepsilon_1(\mu),\theta)$.

Proof. Based on Lemma 2 for sufficienly small μ we reduce the equation (2) to the equation (13). In equation (13) we make the sustitution:

$$y = \frac{\varepsilon+\mu^2}{\mu}\,\widetilde{y}, \tag{20}$$

where $\widetilde{y}$ – new unknown function. Since the function Y contain the terms njt lower the second order with respect y, we obtain:

$$\frac{d\widetilde{y}}{dt} = \mu\lambda_0(t,\varepsilon)\widetilde{y} + \mu^2 r(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y} + \mu\varepsilon v(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y} +$$

$$+\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon+\mu^2}\,c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^3}{\varepsilon+\mu^2}\,d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \left(\varepsilon+\mu^2\right)\widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y},\mu). \tag{21}$$

Consider corresponding to equation (21) the linear nonhomogeneous equation:

$$\frac{d\widetilde{y}_0}{dt} = \mu\lambda_0(t,\varepsilon)\widetilde{y}_0 + \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon+\mu^2}\,c(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^3}{\varepsilon+\mu^2}\,d(t,\varepsilon,\theta,\mu). \tag{22}$$

Based on (19) and condidtion (12) we have:

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\mathrm{Re}\lambda_0(t,\varepsilon)| > 0.$$

Then based on Lemma 1 the equation (22) has a particular solution $\widetilde{y}_0(t,\varepsilon,\theta,\mu) \in F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta)$, and exists $K_1 \in (0,+\infty)$ such that:

$$\|\widetilde{y}_0\|_{F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta)} \le K_1\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu^2}\,\|c\|_{F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta)} + \frac{\mu^2}{\varepsilon+\mu^2}\,\|d\|_{F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta)}\right).$$

We construct the process of successive approximations, defining as initial approximation $\widetilde{y}_0$, and subsequent approximations defining as solutions from class $F(m-1, l\varepsilon_0, \theta)$ of the equations:

$$\frac{d\widetilde{y}_{s+1}}{dt} = \mu\lambda_0(t,\varepsilon)\widetilde{y}_{s+1} + \mu^2 r(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_s + \mu\varepsilon v(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_s + + \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon+\mu^2}\ c(t,\varepsilon,\theta,\mu) +$$

$$+ \frac{\mu^3}{\varepsilon+\mu^2}\ d(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \left(\varepsilon+\mu^2\right)\widetilde{Y}(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y}_s,\mu),\ \ s = 0,1,2,\dots\ . \tag{23}$$

Using techniques contraction mapping principle [4] it is easy to show that exists $\mu_2 \in (0,\mu_0)$ and $\varepsilon_2(\mu) = K_2\mu$, where K_2 – sufficiently small constant, such that $\forall\ \mu \in (0,\mu_2)$, $\forall\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_2(\mu))$ the process (23) converges to the solution $\widetilde{y}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ of the equation (21), From its based on (21) and Lemma 2 we obtain the theorem.

Conclusion. Thus, for the equation (2) with the oscillating coefficients the sufficient conditions of the existence of the solution which represented by a Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency are obtained in a one critical case.

1. **Shchogolev S.A.** On the oscillations in the quasi-linear second-order differential system with slowly-varying parameters // Odessa National University Herald. Mat i Mekh. – 2014. – V. 19, Is. 2(22). – P. 75–86.
2. **Shchogolev S.A.** On a special classes of solutions of the differential system with quasi-jordan matrix of linear part [in Rissian] // Odessa National University Herald. Math. and Mechan. – 2012. - V. 17, Is. 3(15). – P. 68–81.
3. **Shchogolev S.A., Sitnik V.A.** On existence and stability of the solutions of special type of the quasilinear differential equation at the Banakh space [in Russian] // Odessa National University Herald. Math. and Mechan. – 2010. – V. 15, Is. 18. – P. 102–111.
4. **Kantorovich L.V., Akilov G.P.** Functional Analysis. [in Russian], Moscow: Nauka, 1984. – 752 p.

Received 05.10.2014

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2014 .–V.19,Is.4(24).–P.71–79

Mathematical Subject Classification: 26A33
UDC 517.954

A. N. Vityuk, A. V. Mykhailenko
I. I. Mechnikov Odesa National University
Odesa National Economical University

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH MIXED RIEMANN—LIOUVILLE DERIVATIVE OF FRACTIONAL ORDER

Вітюк О. Н., Міхайленко А. В. Крайова задача для диференціального рівняння із змішаною похідною Рімана—Ліувілля дробового порядку. В роботі отримано достатні умови розв'язності крайовоі задачі для диференціального рівняння, що містить мішану похідну Рімана-Ліувілля дробового порядку.
Ключові слова: лівостороння змішана похідна Рімана"– Ліувілля, дробовий порядок, теорема існування та єдиності.

Витюк А. Н., Михайленко А. В. Краевая задача для дифференциального уравнения со смешанной производной Римана—Лиувилля дробного порядка. В работе получены достаточные условия разрешимости краевой задачи для диференциального уравнения со смешанной производной Римана-Лиувилля дробного порядка.
Ключевые слова: левосторонняя смешанная производная Римана—Лиувилля, дробный порядок, теорема существования и единственности.

Vityuk A. N., Mykhailenko A. V. Boundary-value problem for differential equation with mixed Riemann—Liouville derivative of fractional order. In this paper, we find a sufficient condition for solvability of boundary-value problem for differential equation with mixed Riemann-Liouville derivative of fractional order.
Key words: left-sided mixed Riemann—Liouville derivative, fractional order, existence and uniqueness theorem.

Introduction. Let $P = [0, a] \times [0, b], 0 < a, b < \infty, \alpha > 0, \beta > 0, r = (\alpha; \beta), \Theta = (0; 0)$. By C(P) we denote the space of continuous functions $f : P \to R$ with the norm

$$\|f(x, y)\|_C = \max_P |f(x, y)|.$$

By $AC(P)$ and $L(P)$ we denote the space of absolutely continuous and summable by Lebesgue functions $f : P \to R$ accordingly. The following expression

$$\phi_\alpha(x) = I_0^\alpha \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - t)^{\alpha-1} \phi(t) dt,$$

where $\Gamma(\cdot)$ is the gamma-function of Euler, is called [1,2] left-sided Riemann—Liouville integral of order α. Let $\alpha = [\alpha] + \alpha, n = [\alpha] + 1$. Then the expression

$$D_0^\alpha \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x - t)^{n-\alpha-1} \phi(t) dt$$

© Vityuk A. N., Mykhailenko A. V., 2014

is called [1, §2,p.42],[2, §1.1, p.9] the left-sided fractional derivative of Riemann—Liouville of order α of function $\phi : [0, a] \to R$. Left-sided mixed integral and derivative of order r are defined as follows [1, §24, p.340]:

$$I^{\alpha}_{0,x} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t,y)dt,$$

$$I^{\beta}_{0,y} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^y (y-s)^{\beta-1} f(x,s)ds,$$

$$f_r(x,y) = I^{(\alpha,\beta)}_{\Theta} f(x,y) = I^{r}_{\Theta} f(x,y) = I^{\alpha}_{0,x} I^{\beta}_{0,y} f(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y (x-t)^{\alpha-1}(y-s)^{\beta-1} f(t,s)dsdt,$$

$$D^{\alpha}_{0,x} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t,y)dt,$$

$$D^{r}_{\Theta} f(x,y) = D^{\alpha}_{0,x} D^{\beta}_{0,y} f(x,y) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)\cdot\Gamma(m-\beta)} \cdot \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \int_0^x \int_0^y (x-t)^{n-\alpha-1}(y-s)^{m-\beta-1} f(t,s)dsdt,$$

where $n = [\alpha]+1, m = [\beta]+1$. Elliptic boundary-value problems with area boundary conditions are comprehensively studied. First results dedicated to the research of hyperbolic boundary-value problems with area boundary conditions were obtained in papers [3-6]. The research of following boundary-value problem

$$\frac{\partial^4 z(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} = F(x,y,z(x,y)), \tag{1.1}$$

$$z(i,y) = z(x,j) = 0, 0 \leqslant x, y \leqslant 1; i,j = 0,1 \tag{1.2}$$

began in [3]. In [8] were established that this problem is equivalent to the solution of some Fredholm integral equation. Based on this equivalence in [7] the numerical method of solution of this problem was constructed.

In [9] the conditions of existence and uniqueness of solution of differential inclusion

$$\frac{\partial^4 z(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \in F(x,y,z(x,y))$$

that satisfies the conditions (1.2) were obtained and its properties were studied.

In [6] the following boundary-value problem was considered,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - A(x,y)u = f(x,y), (0 < x < a, 0 < y < b),$$

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{y=b} = 0,$$

and for this problem Green's function $G(x,y;t,s)$ was constructed such that

$$u(x,y)=\int_0^a\int_0^b G(x,y;t,s)f(t,s)dsdt.$$

Let now $0<\alpha,\beta\leqslant 1, p=(1+\alpha;1+\beta), q=(1-\alpha;1-\beta)$. In [10] the following boundary-value problem were considered

$$D^p_\Theta u(x,y)=F(x,y,u(x,y),D^r_\Theta u(x,y)),$$

$$u_q(x,0)=u_q(x,b)=u_q(0,y)=u_q(a,y)=0, 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b.$$

The sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of this problem were received. The present paper deals with conditions of solvability of the boundary-value problem

$$D^p_\Theta u(x,y)=F[u(x,y)]\equiv F(x,y,u(x,y)), \tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u(x,b)=u(0,y)=u(a,y)=0; 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b. \tag{1.4}$$

Main Results.

2. Preliminaries. In this section we introduce notations, definitions and preliminary facts which are used thoughout this paper.

Definition 2.1 ([11]) *Continuous function $z(x,y):P\to R$ is called absolutely continuous if and only if it can be presented as follows*

$$z(x,y)=z_1(x)+z_2(y)-z(0,0)+\int_0^x\int_0^y v(t,s)dsdt,$$

where $z_1(x)\in AC([0,a]), z_2(y)\in AC([0,b]), v(x,y)\in L(P)$.

Definition 2.2 ([1, §1, p.21]) *Function $u(x):J\to R, J=[a,b]$ belongs to the set $AC^n(J)$, if $u^{(k)}(x)\in AC(J), k=\overline{0,n-1}$.*

Let $D^k_{xy}u(x,y)=\frac{\partial^2 ku(x,y)}{\partial x^k\partial y^k}, k=0,1,\dots (D^0_{xy}u(x,y)=u(x,y))$.

By $AC^n(P)$ we denote class of functions $v(x,y):P\to R$ such that $D^k_{xy}v(x,y)\in AC(P), k=(0,n-1)$.

Lemma 2.1 ([12]) *Let σ_1,σ_2 are any positive numbers and $0\leqslant\tau\leqslant 1$. Then*

$$|\sigma_1^\tau-\sigma_2^\tau|\leq|\sigma_1-\sigma_2|^\tau.$$

Lemma 2.2 *Let $u(x)\in AC([0,a]), v(y)\in AC([0,b])$ and $u(0)=v(0)$. Then $z(x,y)=u(x)\cdot v(y)\in AC(P)$.*

We consider a boundary-value problem

$$D_0^{1+\alpha}y(x)=f(x), \tag{2.1}$$

$$y(0)=y(a)=0, \tag{2.2}$$

where $f(x)$ is a measurable function.

For the solution of boundary-value problem we name function $y(x):[0,a]\to R$, so that $y(x)\in C([0,a]), y_{1-\alpha}(x)\in AC^2([0,a])$, satisfies the boundary-value conditions (2.2) and differential equation (2.1) for almost all $x\in[0;a]$.

Lemma 2.3 ([14]) *Let $f(x) : [0, a] \to R$ be a measurable function and $|f(x)| \leqslant M$. Then the solution of boundary-value problem (2.1), (2.2) is represented as follows:*

$$y(x) = \int_0^a G(x,t)f(t)dt,$$

where

$$G(x,t) = \left[\begin{array}{c} -\frac{(x(a-t))^\alpha - (a(x-t))^\alpha}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant x \\ -\frac{(x(a-t))^\alpha}{a^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)}, x \leqslant t \leqslant a. \end{array} \right.$$

3. Existence of solutions. Consider a boundary-value problem

$$D^p_\Theta u(x,y) = w(x,y), w(x,y) \in C(P), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = u(x,b) = 0, 0 \leqslant x \leqslant a; u(0,y) = u(a,y) = 0, 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{3.2}$$

Definition 3.1 *Continuous function $u(x,y) : P \to R$, so that $u_q(x,y) \in AC^2(P)$, satisfies the boundary-value conditions (3.2) and differential equation (3.1) for $(x,y) \in P$ is called the solution of boundary-value problem (3.1), (3.2).*

Lemma 3.1 The solution of boundary-value problem (3.1), (3.2) is represented as follows

$$u(x,y) = \int_0^a \int_0^b \Phi(x,y;t,s)w(t,s)dsdt,$$

where $\Phi(x,y;t,s) = G(x,t) \cdot G(y,s)$,

$$G(y,s) = \left[\begin{array}{c} -\frac{(y(b-s))^\beta - (b(y-s))^\beta)}{b^\beta \cdot \Gamma(1+\beta)}, 0 \leqslant s \leqslant y, \\ -\frac{(y(b-s))^\beta}{b^\beta \cdot \Gamma(1+\beta)}, y \leqslant s \leqslant b. \end{array} \right.$$

Proof. Assume that $u(x,y)$ is the solution of boundary-value problem (3.1), (3.2) and

$$v(x,y) = D^{1+\beta}_{0,y} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^y (y-s)^{-\beta} u(x,s)ds. \tag{3.3}$$

As $u(0,y) = u(a,y) = 0$ for $y \in [0,b]$ then

$$v(0,y) = v(a,y) = 0, 0 \leqslant y \leqslant b. \tag{3.4}$$

Take into account that $u(x,y)$ is the solution of boundary-value problem (3.1), (3.2). Then

$$D^p_\theta u(x,y) = D^{1+\alpha}_{0,x} D^{1+\beta}_{0,y} u(x,y) = D^{1+\alpha}_{0,x} v(x,y) = w(x,y), (x,y) \in P.$$

Consequently at any fixed $y \in [0,b]$ function $v(x,y)$ is the solution of the equation

$$D^{1+\alpha}_{0,x} v(x,y) = w(x,y). \tag{3.5}$$

Under lemma 2.3 the solution of boundary-value problem (3.5), (3.4) is represented as follows

$$v(x,y) = \int_0^a G(x,t)w(t,y) \equiv \delta(x,y), y \in [0,b]. \tag{3.6}$$

From (3.3), (3.2) it follows that at any $x \in [0, a]$

$$D_{0,y}^{1+\beta} u(x, y) = \delta(x, y), \tag{3.7}$$

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0. \tag{3.8}$$

Thereby $u(x, y)$ under lemma 2.3 can be presented as follows

$$u(x, y) = \int_0^b G(y, s)\delta(x, s)ds = \int_0^b G(y, s) \left(\int_0^a G(x, t)w(t, s)dt \right) ds =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y; t, s)w(t, s)dsdt.$$

Consider a boundary-value problem (1.3), (1.4). The solution of this problem is such a continuous function $u(x, y) : P \to R$ that $u_q(x, y) \in AC^2(P)$ and that satisfies the condition (1.4) and differential equation (1.3) for $(x, y) \in P$.

Theorem 3.1 *Suppose that function $F(x, y, u) : P \times R \to R$ is continuous and $|F(x, y, u)| \leqslant M$. Then boundary-value problem (1.3), (1.4) is equivalent to the integral equation*

$$u(x, y) = \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y; t, s)F(t, s, u(t, s))dsdt. \tag{3.9}$$

Proof. Let $u(x, y) \in C(P)$ be solution of boundary-value problem (1.3), (1.4). Then $F[u(x, y)] \in C(P)$ and according to lemma 3.1 $u(x, y)$ is represented by (3.9).

Suppose now that $u(x, y) \in C(P)$ is the solution of integral equation (3.9) and let's prove that $u(x, y)$ is the solution of boundary-value problem (1.3), (1.4). For $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$

$$u(x, y) = \frac{1}{a^\alpha b^\beta \Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \left(\int_0^x \int_0^y ((x(a-t)^\alpha - (a(x-t))^\alpha) \cdot \big((y(b-s)^\beta - \right.$$

$$-(b(y-s))^\beta\big) F[u(t, s)]dsdt + \int_x^a \int_0^y (x(a-t))^\alpha \left((y(b-s))^\beta - (b(y-s))^\beta\right) F[u(t, s)]dsdt +$$

$$+ \int_0^x \int_y^b ((x(a-t))^\alpha - (a(x-t))^\alpha)\,(y(b-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt +$$

$$+ \int_x^a \int_y^b (x(a-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt =$$

$$= \frac{1}{a^\alpha b^\beta \Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \left[\int_0^x \int_0^y (x(a-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt - \right.$$

$$- \int_0^x \int_0^y (x(a-t))^\alpha (b(y-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt - \int_0^x \int_0^y (a(x-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt +$$

$$+ \int_0^x \int_0^y (a(x-t))^\alpha (b(y-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt + \int_x^a \int_0^y (x(a-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt -$$

$$- \int_x^a \int_0^y (x(a-t))^\alpha (b(y-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt? + \int_0^x \int_y^b (x(a-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t, s)]dsdt -$$

$$-\int_0^x\int_y^b (a(x-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t,s)]dsdt+$$
$$+\int_x^a\int_y^b (x(a-t))^\alpha (y(b-s))^\beta F[u(t,s)]dsdt \tag{3.10}$$

In (3.10) the summands are grouped like this: the first, the fifth, the seventh and the ninth; the second and the sixth; the third and the eighth; the fourth. We receive

$$u(x,y)=\frac{x^\alpha y^\beta}{a^\alpha b^\beta\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^a\int_0^b (a-t)^\alpha (b-s)^\beta F[u(t,s)]dsdt-$$
$$\frac{x^\alpha}{a^\alpha\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^a\int_0^y (a-t)^\alpha (y-s)^\beta F[u(t,s)]dsdt-$$
$$-\frac{y^\beta}{b^\beta\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^x\int_0^b (x-t)^\alpha (b-s)^\beta F[u(t,s)]dsdt+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\int_0^x\int_0^y (x-t)^\alpha (y-s)^\beta F[u(t,s)]dsdt. \tag{3.11}$$

Then we prove that $u_q(x,y)=I_\theta^{(1-\alpha;1-\beta)}u(x,y)\in AC^2(P)$. Direct computation results

$$u_q(x,y)=xy\gamma-\frac{x}{a^\alpha}\int_0^y (y-\tau)\left(\int_0^a (a-z)^\alpha F[u(z,\tau)]dz\right)d\tau-$$
$$-\frac{y}{b^\beta}\int_0^x (x-z)\left(\int_0^b (b-\tau)^\beta F[u(z,\tau)]d\tau\right)dz+I_\theta^{(2;2)}F[u(x,y)]\equiv A_1-A_2-A_3+A_4, \tag{3.12}$$

where

$$\gamma=\int_0^a\int_0^b (a-t)^\alpha (b-s)^\beta F[u(t,s)]dsdt,$$
$$I_\theta^{(2;2)}F[u(x,y)]=\int_0^x\int_0^y (x-t)(y-s)F[u(t,s)]dsdt.$$

If $\phi(\tau)=\int_0^a (a-z)^\alpha F[u(z,\tau)]dz$, then $A_2=\frac{x}{a^\alpha}\int_0^y (t-\tau)\phi(\tau)d\tau$.

Since $\phi(\tau)\in C([0,b])$, then $\int_0^y (y-\tau)\phi(\tau)d\tau\in AC([0,b])$ and by lemma 2.2 $A_2\in AC(P)$. It is obvious that $A_1,A_3,A_4\in AC(P)$. Consequently, $u_q(x,y)\in AC(P)$. Next, prove that $D_{xy}u_q(x,y)\in AC(P)$. Really, by (3.12) we receive

$$D_{xy}u_q(x,y)=\gamma-\frac{1}{a^\alpha}\int_0^y \phi(\tau)d\tau-\frac{1}{b^\beta}\int_0^x \psi(z)dz+\int_0^x\int_0^y F[u(t,s)]dsdt,$$

where

$$\psi(z)=\int_0^b (b-\tau)F[u(z,\tau)]d\tau.$$

It is obvious that $D_{xy}u_q(x,y)\in AC(P)$. Consequently, $u_q(x,y)\in AC^2(P)$.Applying (3.11) we will convince that $u(x,u)$ satisfy boundary-value condition (1.4). In addition, $D_\theta^p u(x,y)=D_{xy}^2u(x,y)=F[u(x,y)]$ for $(x,y)\in P$. Theorem 3.1 is proved.

Theorem 3.2 *Assume that function $F(x,y,u) : P \times R \to R$ satisfies conditions of theorem 3.1 and Lipschitz condition $|F(x,y,u) - F(x,y,v)| \leqslant L|u-v|$, at that*

$$\rho = \frac{a^{1+\alpha} b^{1+\beta} \cdot L}{4^{\alpha+\beta} \cdot \Gamma(1+\alpha) \cdot \Gamma(1+\beta)} < 1.$$

Then in the area P the unique solution of boundary-value problem (1.3), (1.4) exists.

Proof: For $u(x,y) \in C(P)$ we define operator Tu

$$Tu(x,y) = \int_0^a \int_0^b \Phi(x,y;s,t) \cdot F(t,s,u(t,s)) ds dt.$$

Now prove that $T : C(P) \to C(P)$. Let $w(x,y) = Tu(x,y)$ and $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$. Then

$$|w(x_2,y) - w(x_1,y)| \leqslant M \int_0^a \int_0^b |G(x_2,t) - G(x_1,t)| \cdot |G(y,s)| ds dt,$$

at that

$$\int_0^b |G(y,s)| ds = \int_0^y |G(y,s)| ds + \int_y^b |G(y,s)| ds \equiv B_1 + B_2.$$

Applying lemma 2.1 we receive

$$B_1 = \frac{1}{b^\beta \cdot \Gamma(1+\beta)} \int_0^y \left|(y(b-s))^\beta - (b(y-s))^\beta\right| ds \leqslant \frac{1}{b^\beta \cdot \Gamma(1+\beta)} \int_0^y ((b-y)s)^\beta ds \leq$$

$$\leqslant \frac{1}{b^\beta \cdot \Gamma(1+\beta)} \int_0^y b^\beta s^\beta ds = \frac{y^{\beta+1}}{(\beta+1) \cdot \Gamma(\beta+1)} \leqslant \frac{b^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)};$$

$$B_2 = \frac{1}{b^\beta \cdot \Gamma(\beta+1)} \int_y^b (y(b-s))^\beta \leqslant \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_y^b (b-s)^\beta ds = \frac{(b-y)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} \leqslant \frac{b^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}.$$

Consequently,

$$\int_0^b |G(y,s)| ds \leqslant B, B = \frac{2b^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}.$$

Now

$$|w(x_2,y) - w(x_1,y)| \leq \frac{2Mb^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)} \left(\int_0^{x_1} |G(x_2,t) - G(x_1,t)| dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^{x_2} |G(x_2,t) - G(x_1,t)| dt + \int_{x_2}^b |G(x_2,t) - G(x_1,t)| dt \right) \equiv K_1 + K_2 + K_3.$$

On application of lemma 2.1 we receive

$$K_1 \leqslant \frac{M}{a^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)} \int_0^{x_1} (((x_2(a-t))^\alpha - (x_1(a-t))^\alpha) + ((a(x_2-t))^\alpha \ -$$

$$- (a(x_1-t))^\alpha)) \, dt \leq \frac{2MBa^{\alpha+1}(x_2-x_1)^\alpha}{a^\alpha \Gamma(\alpha+1)} = \frac{2MBa}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2-x_1)^\alpha;$$

$$K_2 \leqslant \frac{MB}{a^\alpha \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{x_1}^{x_2} |(x_2(a-t))^\alpha + (a_1(x_2-t))^\alpha - (x_1(a-t)^\alpha)| dt \leq$$

$$\leqslant \frac{MB}{a^\alpha \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{x_1}^{x_2} ((a-t)^\alpha (x_2^\alpha - x_1^\alpha) + a^\alpha (x_2-t)^\alpha) dt \leq$$

$$\leqslant \frac{MB}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x_1}^{x_2} ((x_2-x_1)^\alpha + (x_2-t)^\alpha) dt \leq \frac{MB}{\Gamma(\alpha+1)} (a(x_2-x_1)^\alpha +$$

$$+ \frac{(x_2-x_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{MB}{\Gamma(1+\alpha)} (a(x_2-x_1)^\alpha + a(x_2-x_1)^\alpha) \leq \frac{2aMB}{\Gamma(\alpha+1)};$$

$$K_3 \leqslant \frac{MB}{a^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \int_{x_2}^{a} (x_2^\alpha - x_1^\alpha)(a-t)^\alpha dt \leqslant \frac{MBa}{\Gamma(1+\alpha)} (x_2^\alpha - x_1^\alpha) \leqslant \frac{MBa}{\Gamma(1+\alpha)} (x_2-x_1)^\alpha.$$

So,

$$|w(x_2,y) - w(x_1,y)| \leq \frac{5MBa}{\Gamma(1+\alpha)} (x_2-x_1)^\alpha.$$

By analogy for $0 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant b, 0 \leqslant x \leqslant b$ we receive

$$|w(x,y_2) - w(x,y_1)| \leqslant \frac{5MAb}{\Gamma(1+\beta)} (y_2-y_1)^\beta, A = \frac{2a^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)}.$$

For $\varepsilon > 0$, if $|x_1 - x_2| \leqslant \delta, |y_1 - y_2| \leqslant \delta$, where

$$\delta = \max\left(\frac{\varepsilon\Gamma(1+\alpha)}{10aMB}, \frac{\varepsilon\Gamma(1+\beta)}{10bMA}\right),$$

then $|w(x_1,y_1) - w(x_2,y_2)| \leq \varepsilon$. In theorem 3.1 it is proved that if $u(x,y)$ is the solution of integral equation (3.10), then $u_q(x,y) \in AC^2(P)$. By analogy it is possible to prove that $w_q(x,y) \in AC^2(P)$.

Consequently, the fixed point of operator T will be the solution of boundary-value problem (1.3), (1.4). Next, prove that operator $T : C(P) \to C(P)$ is compressive operator. Let $u_k(x,y) \in C(P), w_k(x,y) = Tu_k(x,y), k = 1,2$.

Then for $(x,y) \in P$

$$|w_1(x,y) - w_2(x,y)| \leq \frac{La^{\alpha+1} \cdot b^{\beta+1}}{4^{\alpha+\beta}\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \|u_1(x,y) - u_2(x,y)\|_C, \tag{3.13}$$

since

$$|G(x,t)| \leqslant \frac{a^\alpha}{4^\alpha \cdot \Gamma(1+\alpha)}, |G(y,s)| \leqslant \frac{b^\beta}{4^\beta \cdot \Gamma(1+\beta)}.$$

Hereby, from (3.13)

$$\|Tu_1(x,y) - Tu_2(x,y)\|_C \leqslant \rho \|u_1(x,y) - u_2(x,y)\|_C,$$

notably operator $T : C(P) \to C(P)$ is compressive operator. Consequently, operator T has the unique fixed point that will be the solution of boundary-value problem (1.3), (1.4). Theorem 3.2 is proved.

Conclusion. In this paper was found a sufficient condition for solvability of boundary-value problem for differential equation with mixed Riemann—Liouville derivative of fractional order.

1. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. – Минск: Наука и техника. – 1987. – 688 с.
2. **Вірченко Н. О.** Основи дробового інтегродиференціювання/Вірченко Н.О., Рибак В.Я. – Київ: Задруга. – 2007. – 361 с.
3. **Hadamard J.** Equations aux derivees partielles, le cas hyperbolique/Hadamard J.// L'enseignment Math. – 1936. – 35, No. 1. – P. 25–29.
4. **Huber A.** Die erste fur Randwertaufgabe geschlossene Berichte bei der Gleichung $u_x y = f(x, y)$ /Huber A. // Monatsh.Math. and Phys. – 1932. – 39. – S. 79–100.
5. **Mangeron D.** Sopra un problema al contoro per un'equazione alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppi/Mangeron D. // Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli. – 1932. – 2. – P. 28–40.
6. **Mangeron D.** New methods for determining solution of mathematical models governing polyvibrating phenomena/Mangeron D. // Bull. Inst. Politeh. Iasi. – 1968. – 14, No. 1 – 2. – P. 433–436.
7. **Seifert P.** Fehlerabschatzungen fur Differenzenverfahren bei einer hiperbolischen Differentialgleichung/Seifert P. // Beitrage zur Numer. Math. – 1974. – 2. – P. 193–209.
8. **Birkhoff G.** The draftman's and related equations/Birkhoff G., Gordon W.J.// J. Approx. Theory. – 1968. – 1. – P. 199–208.
9. **Витюк А. Н.** О множестве решений краевой задачи для гиперболического дифференциального включения/ Витюк А.Н. // Дифференциальные уравнения. – 1999. – 35, №6. – С. 780–783.
10. **Витюк А. Н.** О разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка/Витюк А.Н., Михайленко А.В. // Дифференциальные уравнения. – 2011. – 47, №12. – С. 1803–1807.
11. **Walczak S.** Absolutely continuous functions of several variables and their application to differential equations/Walczak S. // Bull. Polon.Acad.sci.Math. – 1987. – 35, Is. 11 – 12. – P. 733–744.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения Мусхелишвили Н.И. – Москва: Наука. – 1968. – 511 с.
13. **Vityuk A. N.**, The Darboux problem for an implicit fractional – order differential equation/Vityuk A.N., Mykhailenko A.V. // J. of Math. Sci. – 2011. – 175, N4. – P. 391–400.
14. **Mykhailenko A. V.** Fractional boundary – value problem/Mykhailenko A.V. // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. – 2013. – 18, вип. 2(18). – С. 59–66.

Received 21.08.2014

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 80–87

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74B05, 42A38
УДК 539.3

А. Л. Рачинская
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

БЫСТРОЕ ВРАЩЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИ НЕСИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рачинська А. Л. Швидке обертання динамічно несиметричного супутника у гравітаційному полі. Вивчається швидкий обертальний рух відносно центру мас динамічно несиметричного супутника у гравітаційному полі. Рух відбувається по еліптичній орбіті. Проведено чисельне дослідження годографа вектора кінетичного моменту у тривимірному просторі.
Ключові слова: супутник, гравітаційний момент, вектор кінетичного моменту, годограф.

Рачинская А. Л. Быстрое вращение динамически несимметричного спутника в гравитационном поле. Изучается быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника в гравитационном поле. Движение происходит по эллиптической орбите. Проведено численное исследование годографа вектора кинетического момента в трехмерном пространстве.
Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, вектор кинетического момента, годограф.

Rachinskaya A. L. The rapid rotation of a dynamically asymmetric satellite in a gravitational field. We study the rapid rotary motion of the mass center of a dynamically asymmetric satellite in a gravitational field. The motion occurs in an elliptical orbit. A numerical study of the vector locus kinetic moment in three dimensions.
Key words: satellite, gravity moment, the angular momentum vector, hodograph.

Введение. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием момента сил гравитационного притяжения. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по эллиптической орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обощенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, электормагнитных и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1–6].

Основные результаты

1. Постановка задачи. Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1–3]. Система координат $Ox_i\,(i = 1, 2, 3)$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра

© Рачинская А. Л., 2014

масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oy_i\,(i=1,2,3)$ связана с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [1–3]. Оси системы координат $Oz_i\,(i=1,2,3)$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ.

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt}=L_3, \qquad \frac{d\delta}{dt}=\frac{L_1}{G}, \qquad \frac{d\lambda}{dt}=\frac{L_2}{G\sin\delta},\\
&\frac{d\theta}{dt}=G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)+\frac{L_2\cos\psi-L_1\sin\psi}{G},\\
&\frac{d\varphi}{dt}=G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3}-\frac{\sin^2\varphi}{A_1}-\frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right)+\frac{L_1\cos\psi+L_2\sin\psi}{G\sin\theta},\\
&\frac{d\psi}{dt}=G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1}+\frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right)-\frac{L_1\cos\psi+L_2\sin\psi}{G}ctg\theta-\frac{L_2}{G}ctg\delta.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $L_i\,(i=1,2,3)$ – моменты внешних сил относительно осей Oy_i, G – величина кинетического момента, $A_i\,(i=1,2,3)$ – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i.

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$
\frac{d\nu}{dt}=\frac{\omega_0(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \omega_0=\frac{2\pi}{Q}, \tag{2}
$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1>A_2>A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\omega_0/\omega\sim A_1\omega_0/G\ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил. Для такой модели возмущающего момента вводится малый параметр $\varepsilon\ll 1$ так, чтобы $\omega_0=\varepsilon\,\Omega_0$.

Проекции L_i момента внешних сил на оси Oy_i записываются в виде [2]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1, на другие оси проекции имеют аналогичный вид

$$
\begin{gathered}
L_1 = \frac{3\omega_0^2\,(1+e\cos\nu)^3}{(1-e^2)^3}\sum_{j=1}^{3}(\beta_2\beta_j S_{3j} - \beta_3\beta_j S_{2j}),\\
S_{mj} = \sum_{p=1}^{3} A_p\alpha_{jp}\alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos(\nu-\lambda)\cos\delta,\\
\beta_2 = \sin(\nu-\lambda), \quad \beta_3 = \cos(\nu-\lambda)\sin\delta.
\end{gathered} \tag{3}
$$

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику кинетическую энергию T, производная которой имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G}L_3 + G\sin\theta\Bigg[\cos\theta\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)(L_2\cos\psi - L_1\sin\psi) +\\
+\ \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)(L_1\cos\psi + L_2\sin\psi)\Bigg].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Ставится задача исследовать решение системы (1) — (4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [7].

2. Процедура метода усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера—Пуансо. Величины G, δ, λ, T, ν обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ – некоторые функции времени t. Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, T, ν, а быстрыми – углы Эйлера φ, ψ, θ.

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geqslant G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 [8]. Введем величину

$$
k^2 = \frac{(A_2 - A_3)\left(2TA_1 - G^2\right)}{(A_1 - A_2)\left(G^2 - 2TA_3\right)} \quad \left(0 \leqslant k^2 \leqslant 1\right), \tag{5}
$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянный модуль эллиптических функций [9], описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера—Пуансо [8] в правые части уравнений (1), (4) и проведем усреднение по переменной ψ, а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных δ, λ, T, G сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$
\begin{gathered}
\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2\,(1+e\cos\nu)^3}{2G\,(1-e^2)^3}\beta_2\beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2\,(1+e\cos\nu)^3}{2G\,(1-e^2)^3\sin\delta}\beta_1\beta_3 N^*,\\
\frac{dG}{dt} = 0, \qquad \frac{dT}{dt} = 0,\\
N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{gathered} \tag{6}
$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [9]. Из системы (6) видно, что величины кинетического момента и кинетической энергии остаются постоянными, следовательно, постоянным остается модуль эллиптических функций согласно (5).

3. Численный расчет годографа вектора кинетического момента. Для численного расчета было проведено обезразмеривание уравнений системы (6) и уравнения (2). Характерными параметрами задачи являются G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени без влияния малого параметра задачи. Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\widetilde{G} = \frac{G}{G_0}$, $\widetilde{A}_i = \frac{A_i\Omega_0}{G_0}$, $\tilde{N}^* = \frac{N^*\Omega_0}{G_0}$, $\widetilde{T} = \frac{T}{G_0\Omega_0}$. Система уравнений примет вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = -\frac{3\varepsilon^2\left(1+e\cos\nu\right)^3}{2\tilde{G}\left(1-e^2\right)^3}\beta_2\beta_3\tilde{N}^*, \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \frac{3\varepsilon^2\left(1+e\cos\nu\right)^3}{2\tilde{G}\left(1-e^2\right)^3\sin\delta}\beta_1\beta_3\tilde{N}^*, \\
\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = 0, \quad \frac{d\nu}{d\tilde{t}} = \frac{\varepsilon(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \\
\tilde{N}^* = \tilde{A}_2 + \tilde{A}_3 - 2\tilde{A}_1 + 3\left(\frac{2\tilde{A}_1\tilde{T}}{\tilde{G}^2} - 1\right)\left[\tilde{A}_3 + (\tilde{A}_2 - \tilde{A}_3)\frac{K(k)-E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Первоначально исследование годографа вектора кинетического момента будем проводить для спутника с геометрией масс $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_2 = 6$, $\tilde{A}_3 = 5$, который совершает движение по круговой орбите ($e = 0$). Расчет будет первоначально проводиться для параметра $\varepsilon = 0.3$. Задаются начальные условия $\tilde{G}(0) = 1$, $\delta(0) = \pi/4$, $k^2(0) = 0.9999$. Для угла отклонения вектора кинетического момента относительно плоскости x_1x_3 рассмотрим различные начальные значения $\lambda(0) = 0, \pi/4, \pi/2$, что соответствует кривым 1, 2, 3 рис. 1 и 2. На рис. 1 представлены графики изменения угла ориентации λ, на рис. 2 – угла δ. Из рисунка видно, что изменение начального условия для функции угла λ приводит к параллельному смещению графиков функции вдоль вертикали на величину $\lambda(0)$.

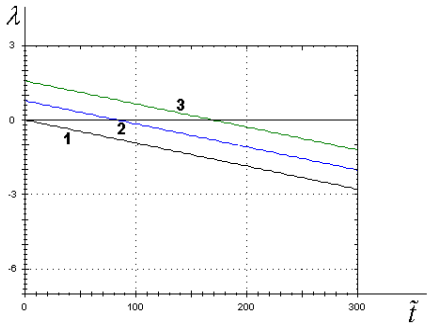

Рис. 1

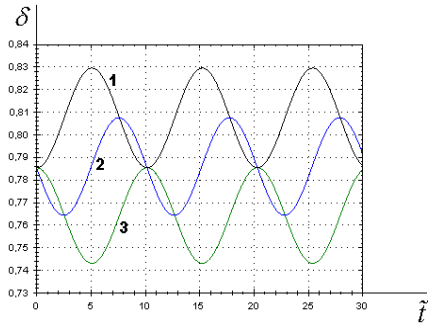

Рис. 2

Согласно исследованиям, представленным на рис. 2, можно сделать вывод, что характер изменения угла ориентации вектора кинетического момента отно-

сительно вертикали носит периодический характер. Изменение начального значения функции $\lambda(\tilde{t})$ приводит к смещению графика функции $\delta(\tilde{t})$ вдоль горизонтали вправо и вдоль вертикали вниз. Смещение графика функции $\delta(\tilde{t})$ зависит от величины $\lambda(0)$. Для $\lambda(0) = \pi/4$ смещение по вертикали равно половине амплитуды, а по горизонтали – $P/8$, где P – период функции $\delta(\tilde{t})$. Для $\lambda(0) = \pi/2$ смещение по вертикали равно амплитуде, а по горизонтали – $P/4$.

Внесем изменения в начальные условия интегрирования системы (7): $\tilde{G}(0) = 1$, $\lambda(0) = 0$, $k^2(0) = 0.9999$ для различных значений $\delta(0) = \pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$. Результат интегрирования представлен на рис. 3 и 4. Численное исследование показало, что функция $\lambda(\tilde{t})$ может как убывать, так и возрастать, т. е. вращение вектора кинетического момента около вертикали может происходить в разных направлениях. Направление поворота вектора $\mathbf{G}$ зависит от начального значения $\delta(0)$. Максимальная скорость увеличения угла λ наблюдается при начальном условии $\delta(0) = \pi/4$, при этом поворот осуществляется по ходу часовой стрелки. Минимальная скорость увеличения – для $\delta(0) = \pi/2$, вектор $\mathbf{G}$ в этом случае совершает поворот около вертикали по ходу часовой стрелки с постоянным отклонением от вертикали. На рис. 3 кривая 1 соответствует значению $\delta(0) = \pi/4$, кривая 2 и 3 – $\delta(0) = \pi/6$, $\pi/3$ соответственно, кривая 4 – $\delta(0) = 2\pi/3$.

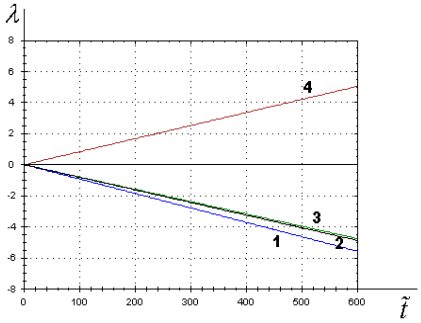

Рис. 3

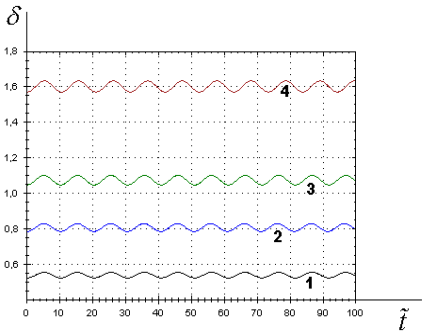

Рис. 4

На рис. 4 представлен результат численного исследования поведения функции $\delta(\tilde{t})$. Видно, что функция имеет одинаковый период колебаний, но разную амплитуду. Причем при возрастании начального значения угла $\delta(0)$ от 0 до $\pi/2$ амплитуда возрастает почти в два раза, а при дальнейшем увеличении $\delta(0)$ амплитуда функции $\delta(\tilde{t})$ убывает.

Годограф вектора кинетического момента построен на сфере единичного радиуса и имеет вид, представленный на рис. 5. Все кривые построены для начального значения $\lambda(0) = 0$. Кривые 1, 2, 3 построены для $\delta(0) = \pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ соответственно. Видно, что отклонение вектора от вертикали носит периодический характер. Во всех представленных расчетных случаях вектор $\mathbf{G}$ совершает вращение около вертикали по ходу часовой стрелки. Из рис. 5 видно, что за счет увеличения скорости изменения угла λ выпуклости годографа увеличивают свою ширину. Однако сам характер годографа сохраняется во всех расчетных случаях.

Исследуем движение спутника на эллиптической орбите. Расчет проводился для различных эксцентриситетов: $e = 0.04473$ — 1-й советский спутник, $e = 0.0487$ — 3-й советский спутник и для эллиптических орбит различных эксцен-

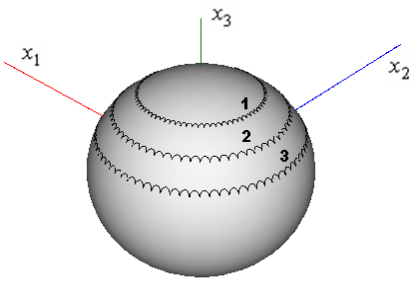

Рис. 5

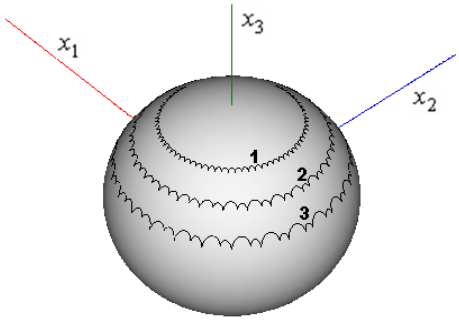

Рис. 6

триситетов. Для эллиптических орбит первого и второго советских спутников годограф вектора кинетического момента несущественно отличается от годографа круговой орбиты. На рис. 6 кривая 2 соответствует расчету эллиптической орбиты с эксцентриситетом $e = 0.1$ для $\delta(0) = \pi/3$. Расчет 2 показывает, что кривая годографа уже не имеет чистого синусоидального вида, в отличие от кривой 1 рис. 6, который построен для круговой орбиты ($\delta(0) = \pi/6$). Увеличение эксцентриситета до величины $e = 0.421$ — сильно эллиптическая орбита — дает результат, представленный кривой 3 рис. 6. На кривой 3 явно выражены гармоники годографа. Аналогичные результаты получены в [2].

Первые два уравнения системы (6) показывают, что характер изменения углов ориентации вектора кинетического момента λ и δ зависит от величины N^*:

$$N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + \frac{3\,(A_1 - A_3)\,(A_1 - A_2)\,k^2}{A_1\,(A_2 - A_3) + A_3\,(A_1 - A_2)\,k^2} \times \\ \times \left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right]. \tag{8}$$

Данная величина может иметь разный знак, что определяется геометрией масс спутника, величиной модуля эллиптических функций k^2 и полными эллиптическими интегралами этой же переменной. На рис. 7 показано, что для любого значения величины k^2 можно найти такую геометрию масс твердого тела, чтобы величина N^* была равна нулю. Для данного исследования было проведено обезразмеривание моментов инерции спутника $\tilde{A}_2 = \frac{A_2}{A_1}$, $\tilde{A}_3 = \frac{A_3}{A_1}$ по величине наибольшего момента инерции A_1. Тогда для расчетов $\tilde{A}_1 = 1$ и должно выполняться неравенство $1 > \tilde{A}_2 > \tilde{A}_3$.

Кривые, представленные на рис. 7, соответствуют разным значениям модуля эллиптических функций: кривая 1 — для $k^2 = 0.9999$, кривая 2 – $k^2 = 0.8$, 3 и 4 — для $k^2 = 0.5$ и 0.1 соответственно. Для геометрии масс, представленной кривыми на рис. 7, углы ориентации λ и δ остаются постоянными величинами. Таким образом, для любого значения величины k^2 можно смоделировать спутник с такой геометрии масс, что его вектор кинетического момента будет величиной постоянной в системе координат Oy_i. Если геометрия масс соответствует квадранту выше кривой рис. 7, то годограф вектора кинетического момента имеет вид, представленный на рис. 8 кривой 1, для квадранта ниже кривая 2 рис. 8. Из

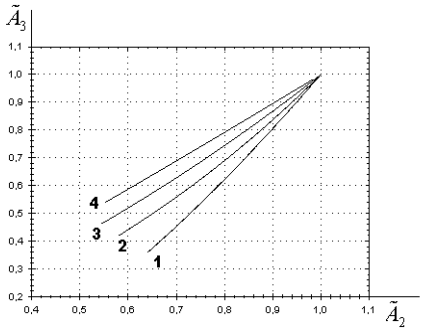

Рис. 7

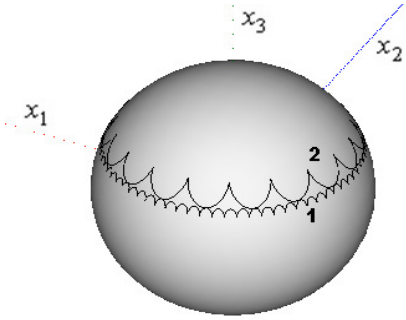

Рис. 8

рисунка видно, что меняется направление выпуклости синусоидальных кривых.

Численное исследование показало, что характер годографа существенным образом зависит от величины модуля эллиптических функций k^2.

На рис. 9 представлен результат численного исследования годографа вектора кинетического момента для различных значений модуля эллиптических функций. На рис. 9 кривая 1 соответствует значению $k^2 = 0.9$, кривая 2 – $k^2 = 0.8$,

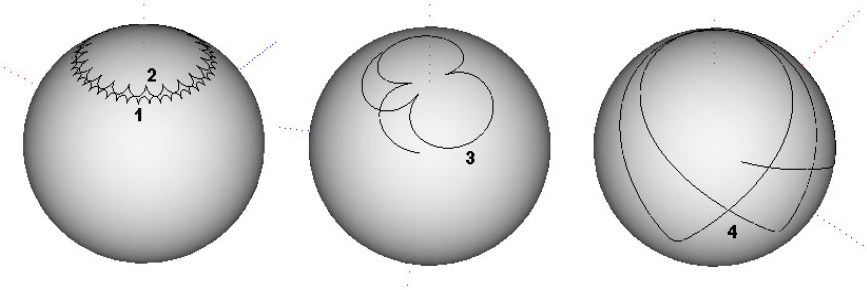

Рис. 9

кривые 3 и 4 – $k^2 = 0.5$ и $k^2 = 0.01$ соответственно. Расчет проводился на разных временных интервалах, так как с уменьшением k^2 существенно увеличивалась скорость поворота вектора $\mathbf{G}$ около вертикали.

Заключение. Таким образом, в случае возмущенного движения динамически несимметричного спутника в гравитационном поле по эллиптической орбите исследован годограф вектора кинетического момента в трехмерном пространстве $Ox_1x_2x_3$, связанный с плоскостью орбиты спутника. Получено, что вид годографа вектора кинетического момента зависит от эксцентриситета орбиты спутника, от величины модуля эллиптических функций и геометрии масс твердого тела. Показано, что можно смоделировать спутник с такой геометрией масс, для которого вектор кинетического момента будет величиной постоянной в выбранной системе координат.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и Д. Д. Лещенко за полезные обсуждения.

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / В. В. Белецкий. – М. : Наука, 1965. – 416 с.
2. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т. 27, №3. – С. 472–483.
3. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / В. В. Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
4. **Акуленко Л. Ф.** Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – №3. – С. 5–13.
5. **Акуленко Л. Ф.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 2. – С. 13–26.
6. **Рачинская А. Л.** Эволюция быстрых вращений спутника под действием возмущающих моментов [текст] / А. Л. Рачинская, А. Н. Дуца // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2012. – Т. 17, вип. 1-2 (13-14). – С. 175–184.
7. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
8. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика [текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
9. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Получена 15.09.2014

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 88–102

Mathematical Subject Classification: 74B05, 74K20, 82D20
УДК 539.3

В. Ф. Чекурин, Л. И. Постолаки
Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Работа докладывалась в Институте прикладных проблем механики и математики НАН Украины

Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. Варіаційний метод однорідних розв'язків для осесиметричних задачах теорії пружності. Розвинено варіаційний метод однорідних розв'язків для розв'язування осесиметричних задач теорії пружності для півбезмежного та скінченого циліндрів з ненавантаженою бічною поверхнею. Як приклад застосування цього методу розглянута задача згинання товстого круглого диску зосередженими силами, прикладеними до його торцевих поверхонь.
Ключові слова: пружний циліндр, системи однорідних розв'язків, варіаційний метод однорідних розв'язків, згинання круглого диску.

Чекурин В. Ф., Постолаки Л. И. Вариационный метод однородных решений для осесимметричных задач теории упругости. Развит вариационный метод однородных решений для решения осесимметричных задач теории упругости для полубесконечного и конечного цилиндров с ненагруженной боковой поверхностью. В качестве примера применения этого метода рассмотрена задача изгиба толстого круглого диска сосредоточенными силами, приложенными к его торцевым поверхностям.
Ключевые слова: упругий цилиндр, системы однородных решений, вариационный метод однородных решений, изгиб круглого диска.

Chekurin V. F., Postolaki L. I. Variational method of homogeneous solutions for axisymmetric elasticity problems. A variational method of homogeneous solutions for solving of axisymmetric elasticity problems for semiinfinite and finite cylinders with free lateral surface has been developed. As an example of application of the method the problem for bending of the thick disk by concentrated forces applied to its end surfaces has been considered.
Key words: elastic cylinder, the system of homogeneous solutions, the variational method of homogeneous solutions, bending of the round disk.

Введение. Несмотря на значительные успехи методов численного анализа задач механики и широкий выбор сертифицированных высокоэффективных программных сред, предназначенных для решения этих задач с использованием метода конечных элементов [1], интерес к аналитическим методам все еще остается достаточно высоким. Об этом свидетельствуют, в частности, публикации [2–4].

Метод однородных решений применялся для решения плоских задач теории упругости для прямоугольных областей [5,6]. Согласно этому методу решение задачи представляется в виде разложения по полным системам собственных функций некоторых однородных задач плоской теории упругости (так называемыми однородными решениями П.Ф. Папковича [6]). Поскольку эти задачи не являются самосопряженными, то их собственные функции образуют неортогональные

© Чекурин В.Ф., Постолаки Л. И., 2014

функциональные базисы, что затрудняет числовую реализацию задач. Только для смешанных задач, когда на границе заданы нормальные перемещения и касательные напряжения или нормальные напряжения и касательные перемещения, удается получить аналитические соотношения, выражающие коэффициенты разложения решения через функции краевых условий.

В работах [7, 8] был развит вариационный метод однородных решений для плоских задач. По этому методу подчинение решения краевым условиям осуществляется за квадратичной нормой. Это приводит к бесконечным системам алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых решений, которую решали методом редукции. В работах [7,8] на конкретных примерах исследована сходимость метода редукции и доказана эффективность вариационного метода однородных решений для решения всех четырех типов краевых задач плоской теории упругости для прямоугольной области – когда на противоположных сторонах заданные условия в напряжениях, перемещениях и смешанного типа, а также для контактно-краевых задач для кусочно-однородного тела прямоугольного сечения [9]. К тому же этот метод оказался весьма эффективным для обратных задач [9, 10].

Для решения осесимметричных задач широкое применение получил метод перекрестной суперпозиции [2,11]. В монографии [12] предложен метод однородных решений этих задач. Тут приведена система однородных решений осесимметричной задачи для цилиндра, на боковой поверхности которого заданы однородные условия в напряжениях. Система получена исходя из представления Папковича – Нейбера. Здесь для определения коэффициентов разложения искомого решения по системе однородных решений использовано условие минимума функционала, который определяет среднеквадратичное отклонение искомого решения от функций краевых условий в напряжениях, заданных на торце. В работе выполнены некоторые вычисления для случая $N = 2$, однако численный анализ решений для конкретных условий нагрузки не проведен. В статье [13] система однородных решений, полученная в [12], использована для реализации вариационного метода решения осесимметричных задач теории упругости для полубесконечного цилиндра и численного анализа сходимости этого метода.

В этой статье система однородных решений получена исходя из представления решения через функцию Лява. Проведено численное исследование эффективности применения этого метода для решения основных краевых задач теории упругости для полубесконечного и конечного цилиндра с ненагруженной боковой поверхностью, а также численное исследование сходимости метода редукции в зависимости от условий нагружения.

Основные результаты

1. Системы однородных решений бигармонического уравнения в цилиндрической системе координат. Рассмотрим класс осесимметричных задач теории упругости для полубесконечного цилиндра: $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant \infty$ (r, θ, z — цилиндрические координаты), боковая поверхность которого $a = 1$ свободна от нагрузок:

$$\sigma_{rr}|_{\xi=1} = 0, \qquad \sigma_{rz}|_{\xi=1} = 0, \tag{1}$$

а на торцевой поверхности $z = 0$ задана одна из четырех систем условий (задачи

I – IV):

$$\sigma_{zz}|_{\zeta=0} = \sigma(\xi), \qquad \sigma_{rz}|_{\zeta=0} = \tau(\xi), \tag{2}$$

$$u_z|_{\zeta=0} = u(\xi), \qquad u_r|_{\zeta=0} = v(\xi), \tag{3}$$

$$\sigma_{zz}|_{\zeta=0} = \sigma(\xi), \qquad u_r|_{\zeta=0} = v(\xi), \tag{4}$$

$$u_z|_{\zeta=0} = u(\xi), \qquad \sigma_{rz}|_{\zeta=0} = \tau(\xi). \tag{5}$$

Здесь $\xi \equiv r/a$, $\zeta \equiv z/a$ – безразмерные координаты, $\sigma(\xi)$, $\tau(\xi)$, $u(\xi)$, $v(\xi)$ – заданные функции. Функция $\sigma(\xi)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^1 \sigma(\xi)\xi d\xi = 0$.

Для решения этих задач используем функцию Лява χ, которая удовлетворяет однородному уравнению [12]:

$$\nabla^2\nabla^2\chi = 0, \tag{6}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ – осесимметричный оператор Лапласа.

Компоненты тензора напряжений σ_{zz}, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz} и вектора перемещений u_r, u_z определяются через функцию χ следующим образом:

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left((2-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2}\right), \qquad \frac{1}{2\mu}\sigma_{rr} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}\right),$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\nu\nabla^2\chi - \frac{1}{\xi}\frac{\partial\chi}{\partial\xi}\right), \qquad \frac{1}{2\mu}\sigma_{rz} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\zeta^2}\right),$$

$$u_r = -\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}, \qquad u_z = \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2(1-\nu)\nabla^2\chi.$$

Здесь μ и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\chi = \exp(-\gamma\zeta)f(\xi). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получим уравнение на неизвестную функцию $f(\xi)$

$$f^{IV}(\xi) + \frac{2}{\xi}f'''(\xi) + \left(2\gamma^2 - \frac{1}{\xi^2}\right)f''(\xi) + \left(2\gamma^2 + \frac{1}{\xi^2}\right)\frac{1}{\xi}f'(\xi) + \gamma^4 f(\xi) = 0, \tag{8}$$

решение которого имеет вид

$$f(\xi) = \xi(AJ_1(\gamma\xi) + BY_1(\gamma\xi) + CY_0(\gamma\xi)\left(J_0(\gamma\xi)Y_1(\gamma\xi) - J_1(\gamma\xi)Y_0(\gamma\xi)\right))+$$

$$+D\xi\left(Y_1(\gamma\xi)(J_0^2(\gamma\xi) - 1) - J_0(\gamma\xi)J_1(\gamma\xi)Y_0(\gamma\xi)\right). \tag{9}$$

Здесь A, B, C, D – неопределенные коэффициенты; $J_0(\gamma\xi)$, $J_1(\gamma\xi)$, $Y_0(\gamma\xi)$, $Y_1(\gamma\xi)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков соответственно.

Для обеспечения ограниченности функции $f(\xi)$ в точке $\xi = 0$ положим в формуле (9) $C = 0$, $D = B$. Тогда формула (9) приобретает вид

$$f(\xi) = \xi J_1(\gamma\xi)A - \frac{2}{\pi\gamma}J_0(\gamma\xi)B. \tag{10}$$

Такое представление решения, в отличие от используемого в литературе [14], позволяет подчинить его двум краевым условиям на торцевой поверхности цилиндра.

Подставляя решение (10) в граничные условия (1), получаем однородную систему уравнений относительно коэффициентов A и B

$$\begin{gathered}((1-2\nu)J_0(\gamma)-\gamma J_1(\gamma))A+\tfrac{2}{\pi\gamma}(\gamma J_0(\gamma)-J_1(\gamma))B=0,\\ ((2\nu-2)J_1(\gamma)-\gamma J_0(\gamma))A-\tfrac{2}{\pi}J_1(\gamma)B=0.\end{gathered}\tag{11}$$

Условие совместности системы (11) приводит к трансцендентному уравнению относительно γ:

$$\gamma^2\left(J_0^2(\gamma)+J_1^2(\gamma)\right)+2(\nu-1)J_1^2(\gamma)=0,\tag{12}$$

полученному также в монографии [12], исходя из представления решения в форме Папковича—Нейбера.

Единственным действительным корнем уравнения (12) является $\gamma=0$, который не представляет интереса для дальнейшего рассмотрения. Поэтому рассмотрим бесконечную последовательность комплексных корней $\gamma_k=\alpha_k+\beta_k$, $k=1,...,\infty$. Легко убедиться, что $-\gamma_k$, $\overline{\gamma}_k$ и $-\overline{\gamma}_k$ (черта над буквой означает комплексное сопряжение) также являются корнями этого уравнения. В дальнейшем будем использовать две последовательности комплексно сопряженных корней с положительной действительной частью, которые обеспечивают затухание решения с ростом ζ.

Уравнение (12) решали численно путем минимизации невязки. Получено 25 первых корней с точностью до пятого знака. Известны асимптотические представления для действительной α_k^a и мнимой β_k^a частей корней γ_k [12]:

$$\alpha_k^a=\pi k-\frac{\ln(4\pi k)}{4\pi k}+\frac{1}{2\pi k}\left(\frac{1}{4}-2(1-\nu)\right),\qquad \beta_k^a=\frac{1}{2}\ln(4\pi k).\tag{13}$$

Относительная погрешность $\delta\alpha_k=\frac{|\alpha_k^a-\alpha_k|}{\alpha_k}$, $\delta\beta_k=\frac{|\beta_k^a-\beta_k|}{\beta_k}$ определения корней по формулам (13) уже при $k\geq 10$ не превышает 10^{-7} и 10^{-4} соответственно.

На рис. 1 приведены графики зависимости действительной α_k (кривая 1) и мнимой β_k (кривая 2) частей корней γ_k от их номера N и их асимптотические значения α_k^a (треугольники), β_k^a (точки), вычисленные по формулам (13)($\nu=0.25$).

Из системы (11) получаем связь между постоянными A_k и B_k:

$$A_k=\kappa_k B_k,\qquad \kappa_k=\frac{2J_1(\gamma_k)}{\pi\left((2\nu-2)J_1(\gamma_k)-\gamma_k J_0(\gamma_k)\right)}.\tag{14}$$

В результате приходим к бесконечной системе однородных комплекснозначных решений осесимметричной задачи теории упругости:

$$\begin{aligned}\sigma_{kzz}(\xi,\zeta)&\equiv\sigma_{kzz}(\xi)\exp(-\gamma_k\zeta), & \sigma_{krr}(\xi,\zeta)&\equiv\sigma_{krr}(\xi)\exp(-\gamma_k\zeta),\\ \sigma_{k\theta\theta}(\xi,\zeta)&\equiv\sigma_{k\theta\theta}(\xi)\exp(-\gamma_k\zeta), & \sigma_{krz}(\xi,\zeta)&\equiv\sigma_{krz}(\xi)\exp(-\gamma_k\zeta),\\ u_{kr}(\xi,\zeta)&\equiv u_{kr}(\xi)\exp(-\gamma_k\zeta), & u_{kz}(\xi,\zeta)&\equiv u_{kz}(\xi)\exp(-\gamma_k\zeta),\end{aligned}$$

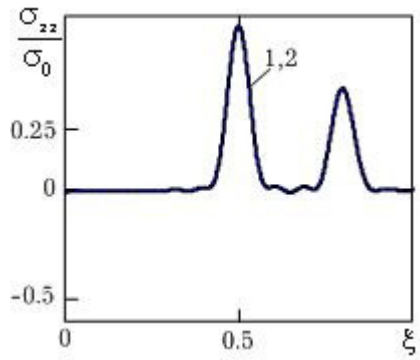

Рис.1

каждое из которых удовлетворяет граничные условия (1) и затухает при $\zeta \to \infty$. Здесь использованы обозначения

$$\sigma_{kzz}(\xi) = 2\mu\gamma_k^2 \left(\kappa_k \left(2(\nu-2)J_0(\gamma_k\xi) + \gamma_k\xi J_1(\gamma_k\xi)\right) - \frac{2}{\pi} J_0(\gamma_k\xi) \right),$$

$$\sigma_{krr}(\xi) = 2\mu\gamma_k^2 \left(\kappa_k \left((1-2\nu)J_0(\gamma_k\xi) - \gamma_k\xi J_1(\gamma_k\xi)\right) + 2\frac{\gamma_k\xi J_0(\gamma_k\xi) - J_1(\gamma_k\xi))}{\pi\gamma_k\xi} \right),$$

$$\sigma_{k\theta\theta}(\xi) = 2\mu\gamma_k \left((1-2\nu)\gamma_k\kappa_k J_0(\gamma_k\xi) + \frac{2}{\pi\xi} J_1(\gamma_k\xi) \right),$$

$$\sigma_{krz}(\xi) = 2\mu\gamma_k^2 \left(\kappa_k((2\nu-2)J_1(\gamma_k\xi) - \gamma_k\xi J_0(\gamma_k\xi)) - \frac{2}{\pi} J_1(\gamma_k\xi) \right),$$

$$u_{kr}(\xi) = \gamma_k \left(\kappa_k\gamma_k\xi J_0(\gamma_k\xi) + \frac{2}{\pi} J_1(\gamma_k\xi) \right),$$

$$u_{kz}(\xi) = \kappa_k\gamma_k \left(\gamma_k\xi J_1(\gamma_k\xi) + 4(1-\nu)J_0(\gamma_k\xi)\right) - \frac{2}{\pi}\gamma_k J_0(\gamma_k\xi).$$

Эта система соответствует последовательности $\{\gamma_k\}$ корней уравнения (12). Последовательности корней $\{\overline{\gamma}_k\}$ соответствует бесконечная система однородных комплекснозначных решений

$$\overline{\sigma}_{kzz}(\xi,\zeta) \equiv \overline{\sigma}_{kzz}(\xi)\exp(-\overline{\gamma}_k\zeta), \qquad \overline{\sigma}_{krr}(\xi,\zeta) \equiv \overline{\sigma}_{krr}(\xi)\exp(-\overline{\gamma}_k\zeta),$$

$$\overline{\sigma}_{k\theta\theta}(\xi,\zeta) \equiv \overline{\sigma}_{k\theta\theta}(\xi)\exp(-\overline{\gamma}_k\zeta), \qquad \overline{\sigma}_{krz}(\xi,\zeta) \equiv \overline{\sigma}_{krz}(\xi)\exp(-\overline{\gamma}_k\zeta),$$

$$\overline{u}_{kr}(\xi,\zeta) \equiv \overline{u}_{kr}(\xi)\exp(-\overline{\gamma}_k\zeta), \qquad \overline{u}_{kz}(\xi,\zeta) \equiv \overline{u}_{kz}(\xi)\exp(-\overline{\gamma}_k\zeta),$$

которые также удовлетворяют условия (1) и затухают на бесконечности.

Обе последовательности однородных решений образуют независимые полные системы функций. Используя их, представим общее решение задач (2) – (5) в виде

$$\sigma_{zz}(\xi,\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \left(B_k\sigma_{kzz}(\xi,\zeta) + \overline{B}_k\overline{\sigma}_{kzz}(\xi,\zeta) \right), \tag{15}$$

$$\sigma_{rr}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\sigma_{krr}(\xi,\zeta)+\overline{B}_k\overline{\sigma}_{krr}(\xi,\zeta)\right), \tag{16}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\sigma_{k\theta\theta}(\xi,\zeta)+\overline{B}_k\overline{\sigma}_{k\theta\theta}(\xi,\zeta)\right), \tag{17}$$

$$\sigma_{rz}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k\sigma_{krz}(\xi,\zeta)+\overline{B}_k\overline{\sigma}_{krz}(\xi,\zeta)\right), \tag{18}$$

$$u_r(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k u_{kr}(\xi,\zeta)+\overline{B}_k\overline{u}_{kr}(\xi,\zeta)\right)+C, \tag{19}$$

$$u_z(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_k u_{kz}(\xi,\zeta)+\overline{B}_k\overline{u}_{kz}(\xi,\zeta)\right). \tag{20}$$

Здесь постоянная C введена для учета перемещения цилиндра как абсолютно жесткого тела.

Подчиняя полученное общее решение (15) – (20), путем надлежащего выбора неопределенных коэффициентов B_k, $\overline{B}_k$, любому из граничных условий (2) – (5) получим решение соответствующей задачи I – IV.

2. Вариационный метод однородных решений для полубесконечного цилиндра. В соответствии с подходом, предложенным в [7, 8], поставим в соответствие каждой паре условий (2) – (5) квадратический функционал:

$$F_I=\int_0^1\left[\left(\sigma_{zz}|_{\zeta=0}-\sigma(\xi)\right)^2-\left(\sigma_{rz}|_{\zeta=0}-\tau(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi, \tag{21}$$

$$F_{II}=\int_0^1\left[\left(u_z|_{\zeta=0}-u(\xi)\right)^2-\left(u_r|_{\zeta=0}-v(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi, \tag{22}$$

$$F_{III}=\int_0^1\left[\left(\sigma_{zz}|_{\zeta=0}-\sigma(\xi)\right)^2-\left(u_r|_{\zeta=0}-v(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi, \tag{23}$$

$$F_{IV}=\int_0^1\left[\left(u_z|_{\zeta=0}-u(\xi)\right)^2-\left(\sigma_{rz}|_{\zeta=0}-\tau(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi. \tag{24}$$

С использованием функционалов (21) – (24) граничные условия (2) – (5) можно записать в слабой форме:

$$F_I\left(\sigma_{zz}\,|_{\zeta=0},\sigma_{rz}\,|_{\zeta=0}\right)\to min,\qquad F_{II}\left(u_z\,|_{\zeta=0},u_r\,|_{\zeta=0}\right)\to min,$$

$$F_{III}\left(\sigma_{zz}\,|_{\zeta=0},u_r\,|_{\zeta=0}\right)\to min,\qquad F_{IV}\left(u_z\,|_{\zeta=0},\sigma_{rz}\,|_{\zeta=0}\right)\to min.$$

Подставляя представления (15) – (20) в функционалы (21) – (24), получим квадратичные формы относительно коэффициентов разложения B_1, B_2,..., $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, ..., необходимые условия минимума которых

$$\frac{\partial F_j}{\partial B_m}=0,\quad \frac{\partial F_j}{\partial \overline{B}_m}=0,\quad \frac{\partial F_{II}}{\partial C}=0,\quad j=I,II,III,IV,\quad m=1,2,...$$

приводят к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{2} C_{mk}^{sp} B_k^p = K_m^s. \tag{25}$$

Комплексные коэффициенты системы (25) C_{mk}^{sp}, K_m^s $(s, p = 1, 2; m = 1, 2, ...)$ зависят от заданных граничных условий (2) – (5) и выражаются формулами (26) – (33) соответственно:

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sigma_{mzz}^s \sigma_{kzz}^p + \sigma_{mrz}^s \sigma_{krz}^p\right) \xi d\xi, \tag{26}$$

$$K_m^s = \int_0^1 \left(\sigma(\xi)\sigma_{mzz}^s + \tau(\xi)\sigma_{mrz}^s\right) \xi d\xi, \tag{27}$$

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u_{mz}^s u_{kz}^p + u_{mr}^s u_{kr}^p\right) \xi d\xi - \int_0^1 u_{mz}^s \xi d\xi \int_0^1 u_{kz}^p \xi d\xi, \tag{28}$$

$$K_m^s = \int_0^1 \left(u(\xi) u_{mz}^s + v(\xi) u_{mr}^s\right) \xi d\xi - 2\int_0^1 u(\xi)\xi d\xi \int_0^1 u_{mz}^s \xi d\xi, \tag{29}$$

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sigma_{mzz}^s \sigma_{kzz}^p + u_{mr}^s u_{kr}^p\right) \xi d\xi, \tag{30}$$

$$K_m^s = \int_0^1 \left(\sigma(\xi)\sigma_{mzz}^s + v(\xi) u_{mr}^s\right) \xi d\xi, \tag{31}$$

$$C_{mk}^{sp} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(u_{mz}^s u_{kz}^p + \sigma_{mrz}^s \sigma_{krz}^p\right) \xi d\xi - \int_0^1 u_{mz}^s \xi d\xi \int_0^1 u_{kz}^p \xi d\xi, \tag{32}$$

$$K_m^s = \int_0^1 \left(u(\xi) u_{mz}^s + \tau(\xi)\sigma_{mrz}^s\right) \xi d\xi - 2\int_0^1 u(\xi)\xi d\xi \int_0^1 u_{mz}^s \xi d\xi, \tag{33}$$

$$C = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty}(-B_k u_{kz}(\xi, 0) - \overline{B}_k \overline{u}_{kz}(\xi, 0)) + 2u(\xi)\right) \xi d\xi. \tag{34}$$

В формулах (26) – (34) для упрощения записи использованы обозначения

$$\sigma_{kzz}^1 = \sigma_{kzz}(\xi), \quad \sigma_{kzz}^2 = \overline{\sigma}_{kzz}(\xi), \quad \sigma_{krz}^1 = \sigma_{krz}(\xi), \quad \sigma_{krz}^2 = \overline{\sigma}_{krz}(\xi),$$

$$\sigma_{mzz}^1 = \sigma_{mzz}(\xi), \quad \sigma_{mzz}^2 = \overline{\sigma}_{mzz}(\xi), \quad \sigma_{mrz}^1 = \sigma_{mrz}(\xi), \quad \sigma_{mrz}^2 = \overline{\sigma}_{mrz}(\xi),$$

$$u_{kr}^1 = u_{kr}(\xi), \quad u_{kr}^2 = \overline{u}_{kr}(\xi), \quad u_{kz}^1 = u_{kz}(\xi), \quad u_{kz}^2 = \overline{u}_{kz}(\xi),$$
$$u_{mr}^1 = u_{mr}(\xi), \quad u_{mr}^2 = \overline{u}_{mr}(\xi), \quad u_{mz}^1 = u_{mz}(\xi), \quad u_{mz}^2 = \overline{u}_{mz}(\xi).$$

3. Исследование сходимости метода редукции. Ограничимся здесь исследованием практической сходимости для нескольких характерных видов нагрузки, приложенной к торцевой поверхности полубесконечного цилиндра. Остановимся на следующих функциях правых частей для краевых условий (2) – (5):

$$\sigma(\xi) = \sigma_0 \arctan(d(\xi - \xi_0)), \quad \tau(\xi) = 0, \quad \xi_0 = 0.5, \quad d = 40,$$
$$u(\xi) = 0, \quad v(\xi) = v_0\xi,$$
$$\sigma(\xi) = \sigma_0 \arctan(d(\xi - \xi_0)), \quad v(\xi) = 0, \quad \xi_0 = 0.5, \quad d = 40,$$
$$u(\xi) = 0, \quad \tau(\xi) = \tau_0.$$

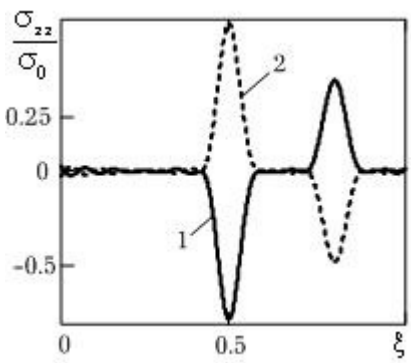

Рис.2

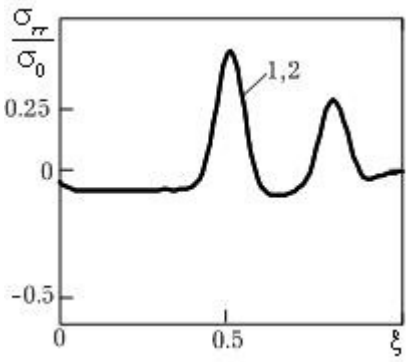

Рис.3

Погрешности решения задач I–IV в зависимости от числа N слагаемых, сохраняемых в разложениях (15) – (20), будем оценивать по значениям соответствующих функционалов, вычисленных на решении, полученном для выбранного N:

$$\varepsilon_I = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{F_I^N}{2}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_{II} = \frac{1}{v_0}\left(\frac{F_{II}^N}{2}\right)^{1/2},$$
$$\varepsilon_{III} = \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{F_{III}^N}{2}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_{IV} = \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{F_{IV}^N}{2}\right)^{1/2}.$$

Для иллюстрации сходимости метода редукции на рис. 2, 3 и 4, 5 для примера показаны зависимости нормированных значений напряжений σ_{zz}/σ_0, σ_{rz}/σ_0 и перемещений u_z/v_0, u_r/v_0 от координаты ξ для задач I, II, полученных при различных $N = 3, 5, 8$ (кривые 1–3 соответственно). Кривые 4 на этих рисунках, рассчитанные для $N = 20$, совпадают с графиками заданных функций $\sigma(\xi)$, $\tau(\xi)$ и $u(\xi)$, $v(\xi)$ краевых условий (2) – (5).

Графики рис. 6 демонстрируют зависимости погрешностей ε_I, ε_{II}, ε_{III} и ε_{IV} решения задач I–IV от числа N (кривые 1, 2, 3 и 4 соответственно). Отметим,

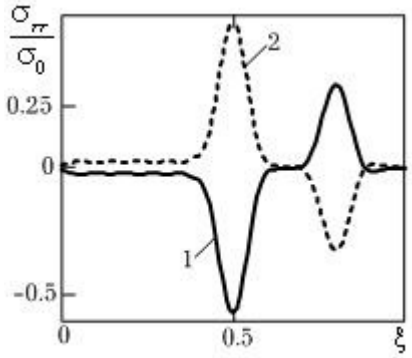

Рис.4

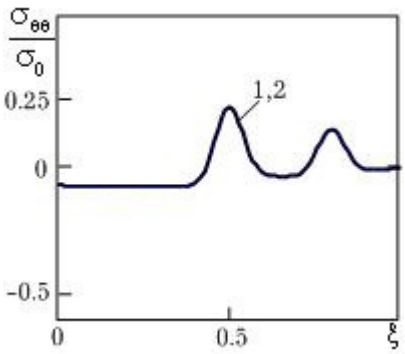

Рис.5

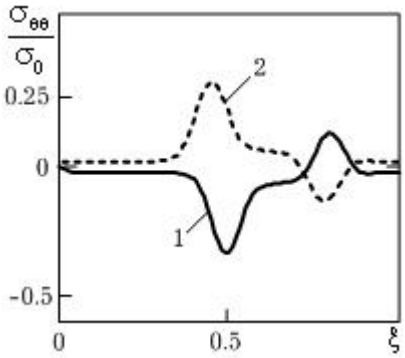

Рис.6

что уже при $N = 10$ имеем достаточно высокую точность решения задач методом редукции.

Поскольку приложенная нагрузка является самоуравновешенной, то напряжения быстро затухают с удалением от торцевой поверхности, что согласуется с принципом Сен-Венана. На рис. 7 для примера приведены зависимости нормированных напряжений $\sigma_{rr}(0,\zeta)/\sigma_0$ (кривая 1) и $\sigma_{rr}(0,\zeta)/\sigma_0$ (кривая 2), а на рис. 8 – $\sigma_{\theta\theta}(1,\zeta)/\sigma_0$, вычисленные для задачи I при $N = 15$.

Из данных, приведенных на рис. 7, 8, следует, что полученные решения с достаточной точностью можно использовать для конечных цилиндрических тел, длина которых сравнима с их диаметром или больше.

4. Вариационный метод однородных решений для конечного цилиндра. Рассмотрим класс осесимметричных задач теории упругости для конечного цилиндра: $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $-b \leqslant z \leqslant b$, боковая поверхность которого свободная от нагрузок, а на торцах цилиндра $\zeta = \pm b$ выполняются условия вида (задачи V–VIII):

$$\sigma_{zz}\,|_{\zeta=\pm b} = \sigma^{\pm}(\xi), \qquad \sigma_{rz}\,|_{\zeta=\pm b} = \tau^{\pm}(\xi), \tag{35}$$

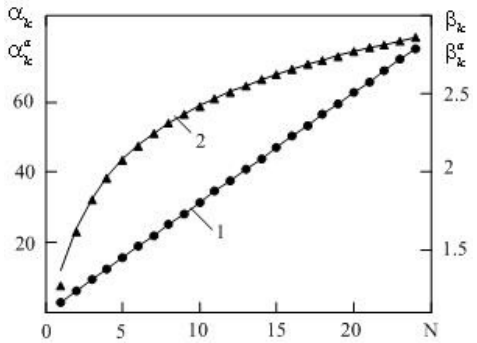

Рис. 7

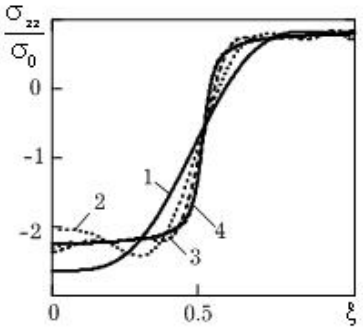

Рис. 8

$$u_z\,|_{\zeta=\pm b}= u^{\pm}(\xi), \qquad u_r\,|_{\zeta=\pm b}= v^{\pm}(\xi), \tag{36}$$

$$\sigma_{zz}\,|_{\zeta=\pm b}= \sigma^{\pm}(\xi), \qquad u_r\,|_{\zeta=\pm b}= v^{\pm}(\xi), \tag{37}$$

$$u_z\,|_{\zeta=\pm b}= u^{\pm}(\xi), \qquad \sigma_{rz}\,|_{\zeta=\pm b}= \tau^{\pm}(\xi). \tag{38}$$

Поскольку на торцах цилиндра $\zeta = \pm b$ заданы условия одного типа, то для упрощения исходных задач удобно разложить каждую из них на две независимые – симметрическую и антисимметрическую относительно срединной линии $\zeta = 0$.

Для решения этих задач используем функцию Лява χ, которую примем в виде:

— для симметрии:

$$\chi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} L_k \cosh(-\gamma_k\zeta)\left(\kappa_k\xi J_1(\gamma_k\xi) - \frac{2}{\pi\gamma_k}J_0(\gamma_k\xi)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \overline{L}_k \cosh(-\overline{\gamma}_k\zeta)\left(\overline{\kappa}_k\xi J_1(\overline{\gamma}_k\xi) - \frac{2}{\pi\overline{\gamma}_k}J_0(\overline{\gamma}_k\xi)\right), \tag{39}$$

— для антисимметрии:

$$\chi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} L_k \sinh(-\gamma_k\zeta)\left(\kappa_k\xi J_1(\gamma_k\xi) - \frac{2}{\pi\gamma_k}J_0(\gamma_k\xi)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \overline{L}_k \sinh(-\overline{\gamma}_k\zeta)\left(\overline{\kappa}_k\xi J_1(\overline{\gamma}_k\xi) - \frac{2}{\pi\overline{\gamma}_k}J_0(\overline{\gamma}_k\xi)\right). \tag{40}$$

Здесь L_k – неизвестные постоянные.

Тогда компоненты напряжений и перемещений для симметричных и антисимметричных задач (35) – (38) представляются формулами (41) – (46) и (47) – (52) соответственно:

$$\sigma_{zz}(\xi,\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{kzz}(\xi)\cosh(\gamma_k\zeta) + \overline{L}_k\overline{\sigma}_{kzz}(\xi)\cosh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{41}$$

$$\sigma_{rr}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{krr}(\xi)\cosh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{krr}(\xi)\cosh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{42}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{k\theta\theta}(\xi)\cosh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{k\theta\theta}(\xi)\cosh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{43}$$

$$\sigma_{rz}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{krz}(\xi)\cosh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{krz}(\xi)\cosh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{44}$$

$$u_r(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k u_{kr}(\xi)\cosh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{u}_{kr}(\xi)\cosh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{45}$$

$$u_z(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k u_{kz}(\xi)\cosh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{u}_{kz}(\xi)\cosh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{46}$$

$$\sigma_{zz}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{kzz}(\xi)\sinh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{kzz}(\xi)\sinh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{47}$$

$$\sigma_{rr}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{krr}(\xi)\sinh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{krr}(\xi)\sinh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{48}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{k\theta\theta}(\xi)\sinh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{k\theta\theta}(\xi)\sinh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{49}$$

$$\sigma_{rz}(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k\sigma_{krz}(\xi)\sinh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{\sigma}_{krz}(\xi)\sinh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right), \tag{50}$$

$$u_r(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k u_{kr}(\xi)\sinh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{u}_{kr}(\xi)\sinh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right)+C, \tag{51}$$

$$u_z(\xi,\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(L_k u_{kz}(\xi)\sinh(\gamma_k\zeta)+\overline{L}_k\overline{u}_{kz}(\xi)\sinh(\overline{\gamma}_k\zeta)\right). \tag{52}$$

В соответствии с подходом, предложенным в [7, 8], поставим в соответствие каждой паре условий (35) – (38) квадратический функционал:

$$F_V=\int_0^1\left[\left(\sigma_{zz}|_{\zeta=b}-\sigma^+(\xi)\right)^2-\left(\sigma_{rz}|_{\zeta=b}-\tau^+(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi, \tag{53}$$

$$F_{VI}=\int_0^1\left[\left(u_z|_{\zeta=b}-u^+(\xi)\right)^2-\left(u_r|_{\zeta=b}-v^+(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi, \tag{54}$$

$$F_{VII}=\int_0^1\left[\left(\sigma_{zz}|_{\zeta=b}-\sigma^+(\xi)\right)^2-\left(u_r|_{\zeta=b}-v^+(\xi)\right)^2\right]\xi d\xi, \tag{55}$$

$$F_{VIII} = \int\limits_0^1 \left[\left(u_z|_{\zeta=b} - u^+(\xi) \right)^2 - \left(\sigma_{rz}|_{\zeta=b} - \tau^+(\xi) \right)^2 \right] \xi d\xi. \qquad (56)$$

Из условий минимума квадратичных функционалов (53) – (56)

$$\frac{\partial F_j}{\partial L_m} = 0, \quad \frac{\partial F_j}{\partial \overline{L}_m} = 0, \quad \frac{\partial F_{VI}}{\partial C} = 0, \quad j = V, VI, VII, VIII, \quad m = 1, 2, ...$$

приходим к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{2} C_{mk}^{sp} L_k^p = K_m^s,$$

коэффициенты которой имеют вид (26) – (33) при следующих обозначениях для случая симметрии:

$$\sigma_{kzz}^1 = \sigma_{kzz}(\xi) \cosh(\gamma_k \zeta), \qquad \sigma_{krz}^1 = \sigma_{krz}(\xi) \cosh(\gamma_k \zeta),$$

$$u_{kr}^1 = u_{kr}(\xi) \cosh(\gamma_k \zeta), \qquad u_{kz}^1 = u_{kz}(\xi) \cosh(\gamma_k \zeta),$$

$$\sigma_{kzz}^2 = \overline{\sigma}_{kzz}(\xi) \cosh(\overline{\gamma}_k \zeta), \qquad \sigma_{krz}^2 = \overline{\sigma}_{krz}(\xi) \cosh(\overline{\gamma}_k \zeta),$$

$$u_{kr}^2 = \overline{u}_{kr}(\xi) \cosh(\overline{\gamma}_k \zeta), \qquad u_{kz}^2 = \overline{u}_{kz}(\xi) \cosh(\overline{\gamma}_k \zeta)$$

и для случая антисимметрии:

$$\sigma_{kzz}^1 = \sigma_{kzz}(\xi) \sinh(\gamma_k \zeta), \qquad \sigma_{krz}^1 = \sigma_{krz}(\xi) \sinh(\gamma_k \zeta),$$

$$u_{kr}^1 = u_{kr}(\xi) \sinh(\gamma_k \zeta), \qquad u_{kz}^1 = u_{kz}(\xi) \sinh(\gamma_k \zeta),$$

$$\sigma_{kzz}^2 = \overline{\sigma}_{kzz}(\xi) \sinh(\overline{\gamma}_k \zeta), \qquad \sigma_{krz}^2 = \overline{\sigma}_{krz}(\xi) \sinh(\overline{\gamma}_k \zeta),$$

$$u_{kr}^2 = \overline{u}_{kr}(\xi) \sinh(\overline{\gamma}_k \zeta), \qquad u_{kz}^2 = \overline{u}_{kz}(\xi) \sinh(\overline{\gamma}_k \zeta).$$

Постоянная C определяется через коэффициенты L_k и $\overline{L}_k$ как

$$C = \int\limits_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-L_k u_{kz}(\xi, b) - \overline{L}_k \overline{u}_{kz}(\xi, b)) + 2u(\xi) \right) \xi d\xi.$$

Пример.

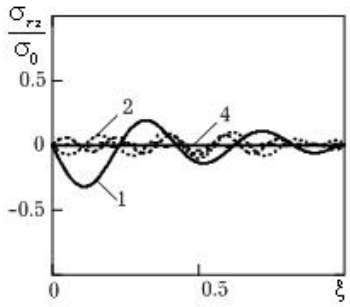

Рис. 9

В качестве примера применения разработанного вариационного подхода рассмотрим задачу изгиба круглого диска с помощью цилиндрических пуансона и опоры (рис. 9). Нагрузка создается одинаковыми по величине, но противоположно направленными силами, приложенными к пуансону и опоре. При этом граничные условия на торцевых поверхностях диска для симметричной и антисимметричной задач имеют вид

$$\sigma_{zz}|_{\zeta=\pm b} = \frac{1}{2}\left(F_1(\xi) + F_2(\xi)\right), \qquad \sigma_{rz}|_{\zeta=\pm b} = 0,$$

$$\sigma_{zz}|_{\zeta=\pm b} = \frac{1}{2}\left(F_1(\xi) - F_2(\xi)\right), \qquad \sigma_{rz}|_{\zeta=\pm b} = 0.$$

Здесь $F_1(\xi)$ и $F_2(\xi)$ поверхностные распределенние в узких окрестностях окружностей $r = r_1$ и $r = r_2$ силы, которые учитывают действие пуансона и опоры, принимаемые в виде:

$$F_1(\xi) = \sigma_0 \exp\left(\frac{-\sin(\xi - r_1)^2}{\delta}\right), \quad F_2(\xi) = \psi\sigma_0 \exp\left(\frac{-\sin(\xi - r_2)^2}{\delta}\right),$$

где $\psi = \int\limits_0^1 \exp\left(\frac{-\sin(\xi-r_1)^2}{\delta}\right)\xi d\xi / \int\limits_0^1 \exp\left(\frac{-\sin(\xi-r_2)^2}{\delta}\right)\xi d\xi$, σ_0 и δ – параметры, определяющие величину приложенной нагрузки и ширину области ее действия.

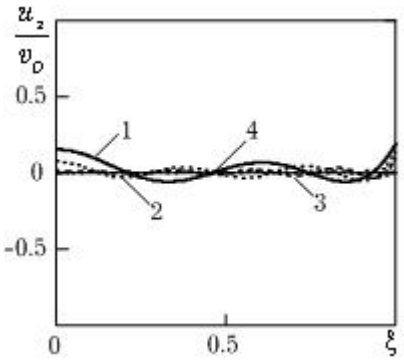

Рис.10

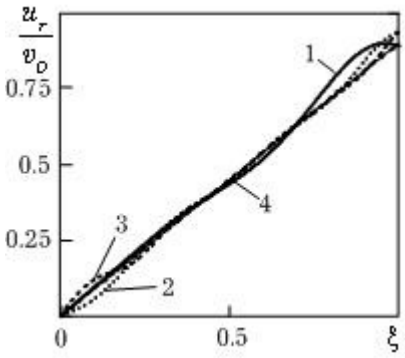

Рис.11

Задачу решали методом редукции, принимая $N = 25$. Для иллюстрации сходимости метода на рис. 10 и 11 показаны графики нормированных компонент осевых напряжений σ_{zz}/σ_0 на поверхностях $\zeta = \pm b$ для симметричной и антисимметричной задач, которые, как видно из рисунков, практически совпадают при выбранном N с приложенной нагрузкой.

На рис. 12 и 13, 14 и 15 для примера приведены графики распределений нормированных компонент напряжений σ_{rr}/σ_0, $\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$ для симметричной и антисимметричной задач. Кривые 1 и 2 на рис. 10–15 представляют значения напряжений на поверхностях $\zeta = b$ и $\zeta = -b$ соответственно. Расчет произведен для диска с отношением толщины $2b$ к радиусу a равным 0.4 при действии нормальных поверхностных сил, распределения которых определяются следующими значениями параметров $r_1/a = 0.5$, $r_2/a = 0.8$, $\delta/a = 0.04$ (рис. 9).

Сравнивая результаты, представленные на рис. 12–15, можно сделать вывод о существенном влиянии обжатия на напряженное состояние толстого диска, подвергаемого изгибу с помощью цилиндрических пуансона и опоры.

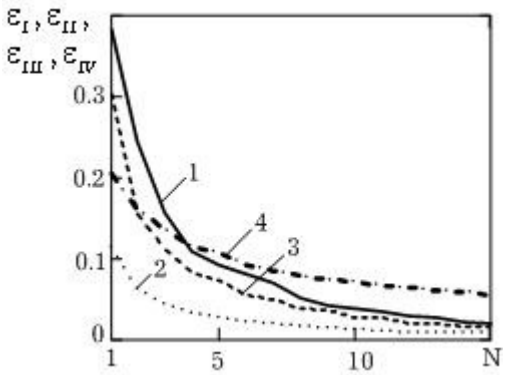

Рис.12

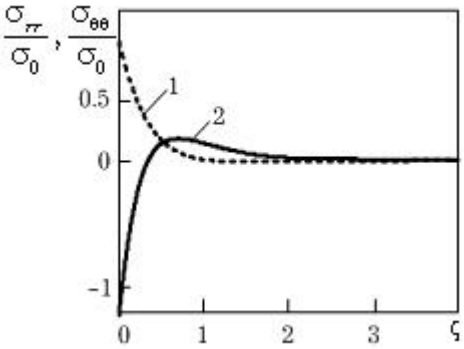

Рис.13

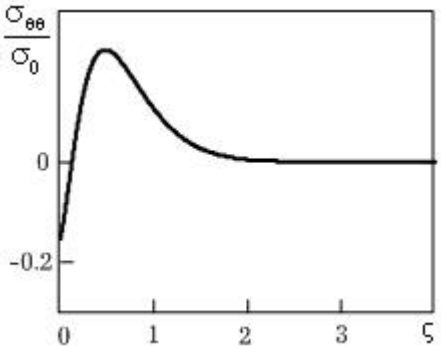

Рис.14

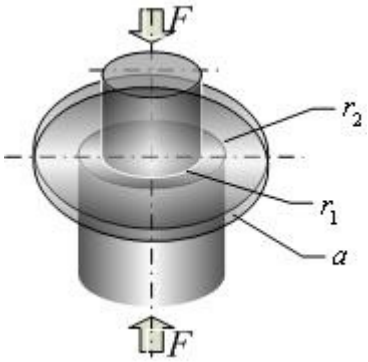

Рис.15

Заключение. Разработан вариационный метод решения осесимметричных задач теории упругости для полубесконечного и конечного цилиндров. Метод базируется на разложении искомого решения бигармонического уравнения, которому удовлетворяет функция Лява, по системам собственных функций задачи для цилиндра с ненагруженной боковой поверхностью. Подход приводит к решению бесконечных систем алгебраических уравнений. Путем проведения численных экспериментов показано, что применение метода редукции к этим системам позволяет получать достаточно точные решения четырех основных типов задач для полубесконечного цилиндра, на торце которого заданы самоуравновешивающиеся поверхностные силы, нормальные и тангенциальные перемещения либо смешанные условия.

Применение разработанного метода к задаче изгиба толстого диска с помощью цилиндрических пуансона и опоры позволило получить аналитическое решение, которое отражает объемный характер напряженного состояния в зонах

приложения сосредоточенной нагрузки и учитывает эффекты обжатия. Полученные результаты можно применять, в частности, для оптимизации геометрических параметров образцов и условий их нагружения при проведении статистических испытаний хрупких листовых материалов на длительную прочность [15].

1. **Moaveni S.** Finite element analysis theory and application with ANSYS (3rd edition) / Moaveni S. – 2008. – 868 p.
2. **Grinchenko V. T.** The biharmonic problem and progress in the development of analytical methods for the solution of boundary-value problems / Grinchenko V.T. //J. Eng. Math. – 2003. – 46. – С. 281–297.
3. **Sburlati R.** Three-dimensional analytical solution for an axisymmetric biharmonic problem / Sburlati R. // J. Elast. – 2009. – 95. – С. 79–97.
4. **Tokovyy Y. V.** Analisys of residual stresses in a long hollow cylinder / Tokovyy Y.V. // Int. J. Press. Vess. Piping. – 2011. – 88, №5 – 7. – P. 248–255.
5. **Прокопов В. К.** Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области / Прокопов В. К. // ПММ. – 1952. – 16. Вып. 1 – С. 45–57.
6. **Папкович П. Ф.** Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы / Папкович П. Ф. // Докл. АН СССР. – 1940. – 27. – С. 335–339.
7. **Чекурин В. Ф.** Вариационный метод решения прямых и обратных задач теории упругости для полубесконечной полосы / Чекурин В.Ф. // Изв. РАН: Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 58–70.
8. **Чекурін В. Ф.** Варіаційний метод розв'язування бігармонічних задач для прямокутної області / Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 1. – С. 88–98.
9. **Чекурін В. Ф.** Обернена задача визначення залишкових напружень в околі з'єднання різнорідних матеріалів / Чекурін В.Ф., Постолакі Л.І. // Машинознавство. – 2010. – № 6. – С. 3–7.
10. **Чекурін В. Ф.** Варіаційний метод розв'язування оберненої бігармонічної задачі в прямокутнику / Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 145–159.
11. **Гринченко В. Т.** Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / Гринченко В. Т. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
12. **Лурье А. И.** Теория упругости / Лурье А. И. – М: Наука, 1970. – 940 с.
13. **Чекурін В. Ф.** Варіаційний метод однорідних розв'язків в осесиметричних задачах теорії пружності для півбезмежного циліндра / Чекурін В. Ф., Постолакі Л. І. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 145–155.
14. **Новацкий В.** Теория упругости / Новацкий В. – М.: Мир, 1975. – 875 с.
15. **К статистической** теории длительной прочности стекла / Марголин А. М., Мартынова В. П., Осадчук В. А., Чекурин В. Ф. // Проблемы прочности. – 2005. – № 3. – С. 75–85.

Получена 18.09.2014

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 4(24).–С. 103–107

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.375

І. П. Шацький
Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

ЗАКРИТТЯ ТРІЩИНИ, СПОЛУЧЕНОЇ ЗІ ЩІЛИНОЮ, В ПЛАСТИНІ ЗА ЗГИНУ З РОЗТЯГОМ – СТИСКОМ

Шацький І. П. Закриття тріщини, сполученої зі щілиною, в пластині за згину з розтягом – стиском. У двовимірній постановці розглядається мішана задача про контактну взаємодію берегів наскрізної тріщини, сполученої з вузькою щілиною на одній прямій, за сукупної дії на пластину мембранного та згинального навантажень. Береги щілини не контактують. Явище закриття тріщини, зумовлене деформацією згину, враховується з використанням моделі контакту вздовж лінії. На підставі аналітичного розв'язку задачі досліджено розподіли стрибків переміщення, кута повороту і контактних реакцій на розрізі для довільних співвідношень величин мембранного та згинального навантажень.
Ключові слова: пластина, щілина, закриття тріщини, згин, розтяг, стиск.

Шацкий И. П. Закрытие трещины, соединенной со щелью, в пластине при изгибе с растяжением – сжатием. В двумерной постановке рассмотрена смешанная задача контактного взаимодействия берегов сквозной трещины, соединенной с узкой щелью, при совокупном воздействии на пластину мембранной и изгибающей нагрузок. Берега щели не контактируют. Явление закрытия трещины, вызванное деформацией изгиба, учитывается с использованием модели контакта вдоль линии. На основании аналитического решения исследованы распределения скачков перемещения, угла поворота и контактных реакций на разрезе для произвольных соотношений величин мембранной и изгибающей нагрузок.
Ключевые слова: пластина, щель, закрытие трещины, изгиб, растяжение, сжатие.

Shatskyi I. P. Closure of crack connected with a slit in a plate under bending and tension – compression loads. The mixed problem of contact interaction of edges of through crack connected with narrow slit in a plate under membrane and bending loadings is considered in two-dimensional statement. The edges of slit are in no contact with each other. The crack closure phenomenon caused by bending deformation is taken into account using the model of contact along the line. The distributions of displacement and rotation angle jumps as well as contact reactions on the cut have been studied on the basis of the analytical solution for arbitrary correlation of values of membrane and bending loads.
Key words: plate, slit, crack closure, bending, tension, compression.

Вступ. Проблема контактної взаємодії берегів тріщин в тонких пластинах успішно вирішується в рамках класичних теорій плоского напруженого стану та згину пластин на підставі моделі контакту вздовж лінії [1–7]. Зокрема, в працях [2, 4] побудовано аналітичні розв'язки задач комбінованого розтягу–згину безмежної пластини з прямолінійною контактною тріщиною. Складнішу конфігурацію тріщиноподібного дефекту, який складається із системи контактних трі-

© Шацький І. П., 2014

щин, сполучених зі співвісними щілинами, в умовах рівномірного згину пластини розглянуто в статті [8].

Метою цієї роботи є дослідження напружено-деформованого стану пластини, послабленої тріщиною, вирощеною зі щілини, за сукупної дії мембранного та згинального навантажень.

Основні результати

1. Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластину, яка в декартових координатах займає область $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times [-h, h]$, послаблену наскрізним тріщиноподібним дефектом, розташованим на відрізку $L = (-l,\, l)$ осі абсцис. Структурно дефект складається із вузької щілини $(-l,\, b)$, яка за припущенням не закривається за жодних умов, та вирощеної із неї тріщини $(b,\, l)$ з нульовою віддалю між берегами, які можуть контактувати. На нескінченності перпендикулярно до лінії розрізу пластина зазнає сукупної дії рівномірно розподілених нормальних зусиль n і згинальних моментів m; береги розрізу та лицьові поверхні пластини вільні від зовнішнього навантаження. Досліджуємо вплив розрізу і можливого контакту його берегів на напружений стан пластини.

Аналіз закриття тріщини проводили у двовимірній постановці в рамках гіпотез прямої нормалі на підставі моделі контакту вздовж лінії [1–7]. Враховуючи симетрію об'єкта та навантаження відносно осі абсцис, сформулювали мішану крайову задачу для пари бігармонічних операторів на площині з розрізом:

$$\Delta\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash L; \tag{1}$$

$$N_y = 0, \quad M_y = 0, \quad x \in (-l,\, b); \tag{2}$$

$$N_y = 0, \quad M_y = 0, \quad [u_y] \geqslant h|[\vartheta_y]|, \quad x \in L_1; \tag{3}$$

$$[u_y] = h|[\vartheta_y]| > 0, \quad M_y = hN_y \mathrm{sgn}[\vartheta_y], \quad N_y \leqslant 0, \quad x \in L_2; \tag{4}$$

$$[u_y] = 0, \quad [\vartheta_y] = 0, \quad N_y \pm M_y/h \leqslant 0, \quad x \in L_3; \tag{5}$$

$$N_x = 0,\ N_{xy} = 0,\ N_y = n,\ M_x = 0,\ M_{xy} = 0,\ M_y = m,\ (x,\, y) \to \infty. \tag{6}$$

Тут φ – функція Ері, w – прогин пластини, Δ – оператор Лапласа; $[u_y]$, $[\vartheta_y]$ – стрибки переміщення та кута повороту нормалі на розрізі; N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля; M_x, M_{xy}, M_y – моменти; $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (b,\, l)$.

Під значеннями функцій N_y, M_y на $(-l,\ l)$ розуміємо півсуми їхніх граничних значень на берегах розрізу. Самі ж функції при переході через розріз змінюються неперервно: $[N_y] = 0$, $[M_y] = 0$, $x \in (-l,\ l)$.

Рівності (2) – це умови вільного краю для щілини; рівності та нерівності (3)–(5) відображають умови можливого контакту берегів тріщини в рамках гіпотези прямої нормалі.

2. Аналітичний розв'язок Для побудови розв'язку крайової задачі (1)–(6) використали метод сингулярних інтегральних рівнянь, зокрема, подання нормальних зусиль і моментів на лінії розрізу через похідні від функцій стрибка [9–11]:

$$N_y(x,\ 0) = n + \frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l} [u_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x},\ M_y(x,\ 0) = m - \frac{Da}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l} [\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x}, \tag{7}$$

де $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, $a = (3+\nu)(1-\nu)$; E і ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини.

Структура розв'язку залежить від співвідношення величин мембранного та згинального навантажень.

Нехай $n > 0$, а абсолютна величина m незначна. За відсутності контакту берегів тріщини ($L_1 = (b,\, l),\ L_2 = \varnothing,\ L_3 = \varnothing$) із крайових умов (2), (3) приходимо до двох сингулярних інтегральних рівнянь на всьому розрізі:

$$\frac{B}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}[u_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = -n, \quad \frac{Da}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}[\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi - x} = m, \quad x \in (-l,\ l). \tag{8}$$

Їх розв'язки, що задовольняють умовам

$$[u_y](\pm l) = 0, \quad [\vartheta_y](\pm l) = 0, \tag{9}$$

відомі [9–12]:

$$[u_y](x) = \frac{4n}{B}\sqrt{l^2 - x^2}, \quad [\vartheta_y](x) = -\frac{4m}{Da}\sqrt{l^2 - x^2}. \tag{10}$$

Із нерівності в (3) встановлюємо діапазон зовнішнього навантаження, коли контакт берегів тріщини відсутній: $\Omega_1 = \{(n,\ m) : n \geqslant \kappa|m|/h\}$, де $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$.

Якщо $n = \kappa|m|/h$, то береги тріщини $y = \pm 0,\ z = -h\mathrm{sgn}m$ дотикаються одночасно по всій довжині ділянки $(b,\, l)$.

Нехай $n < \kappa|m|/h$. Припустимо, що умови контакту вздовж лінії (4) виконуються тепер на усій тріщині: $L_1 = \varnothing,\ L_2 = (b,\, l),\ L_3 = \varnothing$. Враховуючи, що $\mathrm{sgn}[\vartheta_y] = -\mathrm{sgn}M_y$, перепишемо їх інакше:

$$hN_y = -|M_y|, \quad [u_y]' = -h[\vartheta_y]'\mathrm{sgn}M_y, \quad x \in L_2. \tag{11}$$

Обернувши інтегральні оператори (7) за додаткових умов (9) та врахувавши рівності (2), маємо:

$$\frac{B}{4}[u_y]'(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left\{nx + \int\limits_{b}^{l}\frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}N_y(\xi)}{\xi - x}d\xi\right\},$$

$$\frac{Da}{4}[\vartheta_y]'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{l^2 - x^2}}\left\{mx + \int\limits_{b}^{l}\frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}M_y(\xi)}{\xi - x}d\xi\right\}. \tag{12}$$

Підставляючи отриманий результат у новий варіант умов контакту (11), приходимо до інтегрального рівняння щодо реактивного моменту:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{b}^{l}\frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}M_y(\xi)}{\xi - x}d\xi = -\frac{\kappa m - hn\mathrm{sgn}m}{1+\kappa}\,x, \quad x \in (b,\, l). \tag{13}$$

Розв'язуючи рівняння (13), знайшли M_y, а потім з умови (11) визначили контактну силу. Підставляючи отриманий результат у співвідношення (12) та інтегруючи їх за умов (9), остаточно дістали:

$$M_y(x) = \frac{\kappa m - hn\mathrm{sgn}m}{1+\kappa}\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b),$$

$$N_y(x) = -\frac{\kappa|m|/h - n}{1+\kappa}\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b);$$

$$[u_y](x) = \frac{4}{B(1+\kappa)}\Big(\kappa(|m|/h+n)\sqrt{l^2-x^2}-$$

$$-(\kappa|m|/h-n)\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x)\Big),$$

$$[\vartheta_y](x) = -\frac{4}{Da(1+\kappa)}\Big((m+hn\mathrm{sgn}m)\sqrt{l^2-x^2}+$$

$$+(\kappa m - hn\mathrm{sgn}m)\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x)\Big). \qquad (14)$$

Тут $H(...)$ – одинична функція Гевісайда.

Друга (силова) нерівність у (4) задовольняється. Вимагаючи виконання першої (кінематичної) нерівності у виразі (4), отримуємо $n+|m|/h \geq 0$. Таким чином, крайові умови контакту берегів тріщини по лінії реалізуються в області навантажень $\Omega_2 = \{(n,\ m) : -|m|/h \leqslant n \leqslant \kappa|m|/h\}$.

При $n = -|m|/h$ береги тріщини дотикаються на усій висоті. Отож, в області $\Omega_3 = \{(n,\ m) : n \leqslant -|m|/h\}$ є сенс розглядати варіант крайових умов (5) на усій тріщині, припустивши при цьому, що $L_1 = \varnothing,\ L_2 = \varnothing,\ L_3 = (b,\, l)$. Задовольнивши за допомогою подань (7) умови (2), (5), дістанемо систему інтегральних рівнянь, подібну до (8), на укороченому розрізі (щілині) завдовжки $b+l$:

$$\frac{B}{4\pi}\int_{-l}^{b}[u_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi-x} = -n, \quad \frac{Da}{4\pi}\int_{-l}^{b}[\vartheta_y]'(\xi)\frac{d\xi}{\xi-x} = m, \quad x \in (-l,\ b). \qquad (15)$$

За розв'язком рівнянь (15) знайшли стрибки переміщення і кута повороту нормалі на розрізі, а відтак за виразами (7) контактні зусилля та момент:

$$[u_y](x) = \frac{4n}{B}\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x),\ [\vartheta_y](x) = -\frac{4m}{Da}\sqrt{(b-x)(l+x)}H(b-x);$$

$$N_y(x) = n\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b),\ M_y(x) = m\frac{x+(l-b)/2}{\sqrt{(x-b)(l+x)}}H(x-b). \qquad (16)$$

Силова нерівність в умовах (5) підтверджується.

Таким чином, формули (10), (14), (16) дають розв'язок поставленої задачі відповідно в діапазонах $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$ комбінованого навантаження.

3. Аналіз результатів Граничні переходи $b \to l$ та $b \to -l$ призводять до відомих результатів відповідно для щілини [9–12] та контактної тріщини [2, 4] в

пластині під комбінованим навантаженням. При $n = 0$ дістаємо картину закриття тріщини, вирощеної з колінеарної щілини, в зігнутій пластині [8].

Із зміною співвідношення величин однорідних навантажень тип крайових умов змінюється одночасно на всій тріщині.

За переважного розтягу увесь тріщиноподібний дефект є відкритим, а розв'язок поставленої задачі є суперпозицією розв'язків від розтягу та згину. Якщо переважає згин, то на контактній тріщині, що виходить із щілини, розкриття зберігається таким же, як і для контактної тріщини, що займає весь відрізок $(-l,\ l)$. Вплив щілини виявляється лише в зміні контактної реакції (у посиленні контактної взаємодії берегів). У разі переважного стиску тріщина повністю закрита, а на щілині – класична концентрація напружень від згину зі стиском.

Висновки. Модель контакту вздовж лінії усуває кінематичну суперечність, пов'язану із взаємним прониканням поверхонь тріщини під час згину пластини, і тим самим дозволяє істотно розширити діапазон комбінованих навантажень, в якому отримуються коректні аналітичні результати для тріщиноподібних дефектів зі складною структурою.

1. **Шацький І. П.** Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І. П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
2. **Шацкий И. П.** О контакте берегов разреза в пластине при комбинированном растяжении и изгибе / И. П. Шацкий // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – Т. 25, № 2. – С. 46–50.
3. **Young M. J.** Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution / M. J. Young, C. T. Sun // Intern. J. Fract. – 1992. – V. 55. – P. 81–93.
4. **Shatsky I. P.** A cracks closure in combined tension and bending of plates / I. P. Shatsky // Fracture from defects. Proc. 12th Bien. Conf. of Fract. – ECF-12. (Sheffield, 14-18 Sept. 1998) / Ed. M. W. Brown e. a. – V. 2. – P. 733–738.
5. **Шацкий И. П.** Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И. П. Шацкий // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 91–97.
6. **Khludnev A. M.** Analysis of cracks in solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. – Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. – 408 p.
7. **Хлуднев А. М**. Теория трещин с возможным контактом берегов / А. М. Хлуднев // Успехи механики. – 2005. – Т. 3, № 4. – С. 41–82.
8. **Шацький І. П.** Про закриття тріщин, з'єднаних зі щілинами, в зігнутій пластині / І. П. Шацький, Т. М. Даляк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – Т. 38, № 1. – С. 24–30.
9. **Хижняк В. К.** Смешанные задачи теории пластин и оболочек / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1980. – 126 с.
10. **Саврук М. П.** Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М. П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
12. **Бережницкий Л. Т.** Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.

Надійшла 07.07.2014

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал «Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямами:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeXу відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

в розділі «Наука» → «Наукові видання» → «Вісник ОНУ» → «Математика і механіка». Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— Mathematical Subject Classification (2010);

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України «Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України» від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ

7.1:2006 «Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання» та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка»
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі «Наука» → «Наукові видання» → «Вісник ОНУ» → «Математика і механіка» на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

.