**ISSN 2304—1579**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

# ВІСНИК ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

*Математика і механіка*

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

**Том 19. Випуск 2 (22). 2014**

Одеса
«Астропринт»
2014

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**



*«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» внесений до Переліку наукових фахових видань України постановою Президії ВАК України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.*

**ISSN 2304—1579**

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

# VISNYK
## ODESKOHO
## NATSIONALNOHO
## UNIVERSYTETU

**(Odesa National University Herald)**

*Matematyka i Mekhanika*
*(Mathematics and Mechanics)*

**Scientific journal**

**Published four times a year**

**Series founded in January, 1997**

**Volume 19. Issue 2 (22). 2014**

Odesa
«Astroprint»
2014

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

## ЗМІСТ

### М А Т Е М А Т И К А



### М Е Х А Н І К А



### Х Р О Н І К А

## CONTENTS

### M A T H E M A T I C S



### M E C H A N I C S



### C H R O N I C L E

*ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 7–18*

# М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 41A65, 41A17, 26A15, 26A16
УДК 517.5

**Т. А. Агошкова, С. А. Пичугов**
Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени ак. В. Лазаряна

## О ВЛОЖЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

**Агошкова Т. А., Пiчугов С. О. Про вкладення анiзотропних класiв у метричних просторах з iнтегральною метрикою.** Нехай $L_0\left(T^m\right)$ — множина перiодичних вимiрних дiйснозначних функцiй $m$ змiнних, $\psi : R^1_+ \to R^1_+$ — модуль неперервностi, $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$. Отриманi достатнi умови для вкладення класiв функцiй $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.

**Ключовi слова:** теореми вкладення, анiзотропний клас, модуль неперервностi, кусковостала функцiя.

**Агошкова Т. А., Пичугов С. А. О вложении анизотропных классов в метрических пространствах с интегральной метрикой.** Пусть $L_0\left(T^m\right)$ — множество периодических измеримых дествительнозначных функций $m$ переменных, $\psi : R^1_+ \to R^1_+$ — модуль непрерывности, $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$. Получены достаточные условия для вложений классов функций $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.

**Ключевые слова:** теорема вложения, анизотропный класс, модуль непрерывности, кусочно-постоянная функция.

**Agoshkova T. A., Pichugov S. A. About embedding anisotropic classes in metric spaces with integral metric.** Let $L_0\left(T^m\right)$ be a set of periodic measurable real-valued functions of $m$ variables, $\psi : R^1_+ \to R^1_+$ be the continuity modulus and $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(x)|\right) dx < \infty\}$. The sufficient conditions for embedding classes of functions $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$ in $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$ are obtained.

**Key words:** embedding theorem, anisotropic classes, modulus of continuity, piecewise-constant function.

**Введение.** Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^m$ точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $m \geqslant 1$. Пусть $f(\mathbf{x})$ — действительнозначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m = [0,1)^m$ — основной тор периодов; $L_0(T^m)$ — множество всех таких функций, которые почти всюду на $T^m$ конечны и измеримы; $\Omega$ — класс функций $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, являющихся модулями непрерывности, т. е. $\psi$ — непрерывная неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(x+y) \leqslant \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1_+$; $L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) :\ \|f\|_\psi := \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x} < \infty\}$ — линейное метрическое пространство с метрикой $\rho(f,g)_\psi = \|f-g\|_\psi$. Среди пространств $L_\psi(T^m)$ важнейшими являются пространства $L_p(T^m)$, $0 < p < 1$ (случай $\psi(t) = t^p$) и $L_0(T^m)$ с топологией сходимости по мере: $\|f\|_0 = \int\limits_{T^m} \psi\left(|f(\mathbf{x})|\right) d\mathbf{x}$, $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$.

**Определение 1.** *Под полным модулем непрерывности функции $f$ в пространстве $L_\psi$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать:*

$$\omega(f,h)_\psi = \sup_{\|\boldsymbol{t}\|_\infty \leqslant h} \| \vartriangle_{\boldsymbol{t}} f\|_\psi,$$

*где* $\vartriangle_{\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}),\ f_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) = f(x_1+t_1,\dots,x_m+t_m)$ *и* $\|\boldsymbol{t}\|_\infty := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |t_i|$.

**Определение 2.** *Для заданного модуля непрерывности $\omega(h)$ через $H^\omega_\psi(T^m)$ обозначим класс функций*

$$H^\omega_\psi(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m) : \exists A \geqslant 0 \ \ \omega(f,h)_\psi \leqslant A\omega(h) \ \ \forall h>0\},$$

*где $A$ — константа, не зависящая от $h$.*

В случае $\omega(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1]$ получаем изотропные классы Липшица $\Lambda^\alpha_\psi(T^m)$.

**Определение 3.** *Под частным модулем непрерывности функции $f$ по переменной $x_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать*

$$\omega_i(f,h)_\psi = \sup_{|t|\leqslant h} \| \vartriangle_{t\boldsymbol{e}_i} f\|_\psi,\ i=1,\dots,m,$$

*где* $\vartriangle_{t\boldsymbol{e}_i} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{e}_i$ *— вектор, $i$-я координата которого равна 1, а остальные координаты — нули.*

**Определение 4.** *Для заданных модулей непрерывности $\omega_1(h),...,\omega_m(h)$ через $\mathcal{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}_\psi(T^m)$ обозначим анизотропный класс функций*

$$\mathcal{H}^{\omega_1,\dots,\omega_m}_\psi(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m) : \ \exists A \geqslant 0 \ \ \omega_i(f,h)_\psi \leqslant A\omega_i(h) \ \ \forall h>0,\ i=1,...,m\},$$

*где $A$ — константа, не зависящая от $h$.*

В случае $\omega_i(h) = h^{\alpha_i},\ \alpha_i \in (0,1],\ i=1,...,m$ получаем анизотропные классы Липшица $\Lambda^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}_\psi \equiv \Lambda^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}_\psi(T^m)$.

Харди и Литтлвуд в [1] доказали, что при $1\leqslant p<q<\infty$, $\theta<\alpha\leqslant 1$, где $\theta = 1/p - 1/q$ имеет место вложение $\Lambda^\alpha_p(T^1) \hookrightarrow \Lambda^{\alpha-\theta}_q(T^1)$.

Необходимые и достаточные условия для вложения $H^\omega_p(T^1) \hookrightarrow L_q(T^1)$ при $1\leqslant p<q<\infty$ получены П. Л. Ульяновым в [2].

В [3] при $1\leqslant p<q<\infty$ и $f\in L_p(T^1)$ установлены соотношения между модулями непрерывности в разных метриках:

$$\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_q \leqslant C_{p,q}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2}\omega^q\left(f,\frac{1}{k}\right)_p\right)^{\frac{1}{q}},\ \ n=1,2,...$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}}$. С. М. Никольский (см. в [4, гл. 6]) доказал, что при $\widetilde{\alpha} > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ имеет место вложение

$$\Lambda^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_p(T^m) \hookrightarrow L_q(T^m), \tag{1}$$

где $1\leqslant p<q<\infty,\ \ 0<\alpha_i\leqslant 1, i=1,...,m$. Если же $\widetilde{\alpha} < \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, то вложение (1) не имеет места.

Вложения классов $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_m}(T^m)$ в $L_q(T^m)$ при $\omega_1 = \dots = \omega_m = \omega$ исследовались в [5–8].

В [9] В. И. Коляда получил необходимые и достаточные условия для вложения $\mathcal{H}_p^{\omega_1,\dots,\omega_m}(T^m) \hookrightarrow L_q(T^m)$. Для характеристики этого вложения большую роль сыграло введеное Колядой определение усредненного модуля непрерывности. Будем использовать его для метрических пространств $L_\psi$.

**Определение 5.** [10, 11] *Под усредненным модулем непрерывности функции $f$ в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}^1_+$ будем понимать*

$$\overline{\omega}(f,h)_\psi = \inf\{\max_{1\leqslant i\leqslant m} \omega_i(f,h_i)_\psi ; \prod_{i=1}^{m} h_i = h,\ h_i > 0,\ i = 1,...,m\}.$$

При $0 < p < 1,\ p < q < \infty$ и $f \in L_p(T^1)$ Э. А. Стороженко в [12] получила соотношение между модулями непрерывности в разных метриках:

$$\omega(f,h)_q \leqslant C_{p,q} \int\limits_0^h \left(\frac{\omega(f,x)_p}{x}\right)^{\frac{q}{p}} dx, \quad 0 < h < \frac{1}{3}.$$

В [13] Э. А. Стороженко получены необходимые и достаточные условия для вложения $H_p^\omega(T^1) \hookrightarrow L_q(T^1)$, где $0 < p < 1,\ p < q < \frac{p}{1-p}$. В частности при $0 < p < q \leqslant 1$ и $1 - \frac{p}{q} < \alpha \leqslant 1$ имеет место вложение классов $\Lambda_p^\alpha(T^1)$ в $L_q(T^1)$ и справедливо соотношение:

$$\omega(f,h)_q \leqslant C_{p,q} h^{\frac{q}{p}\left(\alpha - 1 + \frac{p}{q}\right)}, \quad 0 < h < \frac{1}{3}. \tag{2}$$

В шкале пространств $L_\psi(T^1)$ С. А. Пичугов в [14] исследовал задачу о вложении классов функций из $L_\psi(T^1)$ в $L_1(T^1)$. Для формулировки результатов введем следующие определения.

**Определение 6.** [15, с. 75] *Если $\varphi(t)$ — строго положительная всюду конечная на $(0,\infty)$ функция, то ее функцией растяжения называется функция $M_\varphi(s)$, которая определяется равенством*

$$M_\varphi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)},\ s \in (0,\infty).$$

**Определение 7.** [15, с. 76] *Нижним показателем растяжения функции $\varphi(t) \in \Omega$ называется число $\gamma_\varphi$ такое, что:*

*1)* $\gamma_\varphi \in [0;1]$;

*2)* $M_\varphi(s) \geqslant s^{\gamma_\varphi},\ \forall s \in (0;1)$;

*3)* $\forall \varepsilon > 0$ *при* $s \in (0,1)$ *с некоторой константой* $C_\varepsilon$*:*

$$M_\varphi(s) \leqslant C_\varepsilon s^{\gamma_\varphi - \varepsilon}. \tag{3}$$

**Теорема** [14]. *Пусть* $\gamma_\psi > 0$ *и* $f \in L_\psi(T^1)$ *такова, что конечен интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega(f,t)_\psi}{t} dt < \infty.$$

*Тогда* $f \in L_1(T^1)$ *и для всех* $0 < h \leqslant \frac{1}{2}$ *выполняется неравенство:*

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leqslant C \int_0^1 \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega(f,ht)_\psi}{ht} dt \tag{4}$$

*с некоторой постоянной* $C$ *не зависящей от* $h$.

Для классов $\Lambda_p^\alpha(T^1)$ неравенство (4) совпадает с соотношением (2) при $q = 1$.

В [16] получено достаточное условие вложения $\mathcal{H}_\psi^\omega(T^m) \hookrightarrow L_1(T^m)$ и соотношение для функций из $L_\psi(T^m)$, $\gamma_\psi > 0$:

$$\psi\left(\frac{\omega(f,h)_1}{h}\right) \leqslant C \int_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi(t)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,(ht)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{ht} dt, \quad 0 < h \leqslant \frac{1}{2},$$

которое совпадает с неравенством (4) при $m = 1$.

Также в [16] получена теорема вложения классов $\mathcal{H}_\psi^\omega(T^m)$ в $L_q(T^m), 0 < q \leqslant 1$. Для ее формулировки нам понадобится следующее определение.

**Определение 8.** [15, с. 70] *Функцию* $\varphi(t)$ *на полуоси* $[0,\infty)$ *называют квазивогнутой, если:*

1) $\varphi(0) = 0$;

2) $\varphi(t)$ *положительна и возрастает при* $t > 0$;

3) $\frac{\varphi(t)}{t}$ *убывает при* $t > 0$.

**Теорема** [16]. *Пусть* $\psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$ *— квазивогнутая функция,* $q \in (0;1]$, $\gamma_\psi > 0$ *и для* $f \in L_\psi(T^m)$ *конечен интеграл*

$$\int_0^1 \frac{M_\psi\left(t^{\frac{1}{q}}\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,\ t^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{t} dt < \infty.$$

*Тогда* $f \in L_q(T^m)$ *и для всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ *выполняется неравенство:*

$$\psi\left(\left(\frac{\omega(f,h)_q}{h}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C \int_0^{h^{m-1}} \frac{M_\psi\left(t^{\frac{1}{q}}\right)}{t} \cdot \frac{\omega\left(f,(ht)^{\frac{1}{m}}\right)_\psi}{ht} dt, \tag{5}$$

*где константа* $C$ *зависит от* $\psi,\ f,\ m,\ q$.

Для классов $\Lambda_p^\alpha(T^1)$ неравенство (5) совпадает с соотношением (2).

В настоящей работе в анизотропном случае проведено исследование вложения классов $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\ldots,\omega_m}(T^m)$ в $L_1(T^m)$ (теорема 1). Рассмотрен и более общий случай вложения классов $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\ldots,\omega_m}(T^m)$ в $L_q(T^m)$, $0 < q \leqslant 1$ (теорема 2). При доказательстве теорем 1, 2 мы используем приближение кусочно-постоянными функциями с плавающими узлами. Ранее эта идея была использована в [14, 16].

## Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, $f \in L_\psi(T^m)$, *и найдутся такие* $\nu_i \in R_+^1$ $(i = 1, ..., m)$, *что* $\sum\limits_{i=1}^m \nu_i = 1$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^\infty 2^k M_\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi < \infty. \tag{6}$$

*Тогда* $f \in L_1(T^m)$ *и при любом* $n \in N$ *выполняются неравенства*

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant C\sum_{k=n}^\infty 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi, \tag{7}$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $n$.

**Доказательство.** Для произвольного $t > 0$ и $i = 1, ..., m$

$$\omega_i\left(f, t\right)_1 \leqslant 2\|f\|_1.$$

Тогда

$$\omega_i\left(f, t\right)_1 \leqslant \omega_i\left(f - g, t\right)_1 + \omega_i\left(g, t\right)_1 \leqslant 2\|f - g\|_1 + \omega_i\left(g, t\right)_1. \tag{8}$$

Пусть $h_i > 0, i = 1, ..., m$, и такие, что $\prod\limits_{i=1}^m h_i = h$. Поскольку $\omega_i(f, h_i)_1 = \omega_i(f_{\mathbf{t}}, h_i)_1$, то получаем

$$\begin{gathered}\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f,h)_1}{h}\right) \leqslant \psi\left(\frac{\sum_{i=1}^m \omega_i(f,h_i)_1}{h}\right) \leqslant \sum_{i=1}^m \psi\left(\frac{\omega_i(f,h_i)_1}{h}\right) = \\ = \sum_{i=1}^m \int\limits_{T^m} \psi\left(\frac{\omega_i(f_{\mathbf{t}},h_i)_1}{h}\right) d\mathbf{t}.\end{gathered} \tag{9}$$

Пусть $f_{\mathbf{t}} = f_{1,\mathbf{t}} + f_{2,\mathbf{t}}$, тогда, учитывая (8), из (9) следует, что

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f,h)_1}{h}\right) \leqslant m\int\limits_{T^m} \psi\left(\tfrac{2}{h}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right) d\mathbf{t} + \sum_{i=1}^m \int\limits_{T^m} \psi\left(\tfrac{1}{h}\omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, h_i\right)_1\right) d\mathbf{t}. \tag{10}$$

Построим специальные сплайн-функции. Для каждой из $m$ координатных осей отрезок $[0, 1)$ разбиваем на отрезки равной длины с помощью $2^{[n\nu_k]}$, $n \in N$, равноотстоящих точек вида:

$$\frac{j_k}{2^{[n\nu_k]}},\ j_k = 0, 1, ..., 2^{[n\nu_k]} - 1,$$

где индекс $k$ $(k = 1, ..., m)$ указывает номер оси.

Таким образом, получаем разбиение основного тора $T^m$ на $2^{\sum_{k=1}^{m}[n\nu_k]}$ параллелепипедов вида:

$$\Pi_{j_1 \dots j_m;2^n} = \{\mathbf{x} \in T^m : \ \frac{j_k}{2^{[n\nu_k]}} \leqslant x_k < \frac{j_k + 1}{2^{[n\nu_k]}}, \ k = 1, ..., m\},$$

где $j_k = 0, 1, ..., 2^{[n\nu_k]} - 1, \ k = 1, ..., m.$

Снимем значения с функции $f$ в узловой точке $\left(\frac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \frac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)$ каждого $m$-мерного параллелепипеда $\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}$ и определим кусочно-постоянную функцию $S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x})$: для $j_i = 0, \dots, 2^{[n\nu_i]} - 1, \ i = 1, \dots, m,$

$$S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x}) := f_{\mathbf{t}} \left( \frac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \frac{j_m}{2^{[n\nu_m]}} \right) \chi_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}}(\mathbf{x}), \tag{11}$$

где $\chi_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Pi_{j_1,\dots,j_m;;2^n} \\ 0, & \mathbf{x} \overline{\in} \Pi_{j_1,\dots,j_m;2^n} \end{cases}.$

Будем использовать сплайны $S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x})$ для оценок сверху правой части (10).

Для эквивалентных в $L_1$ функций $f$ соответствующие сплайны (11) при фиксированном $\mathbf{t}$ могут различаться как элементы пространства $L_1$. Однако ниже мы покажем, что благодаря усреднению по сдвигам $\mathbf{t}$ их использование в (10) корректно.

Положим в (10)

$$h = \tfrac{1}{2^n}, \ n \in \mathbb{N}; \quad h_i = \tfrac{1}{2^{n\nu_i}}, \text{ где } \sum_{i=1}^{m} \nu_i = 1 \ \left(\nu_i \in R^1_+, \ i = 1, ..., m\right);$$
$$f_{1,\mathbf{t}} = \sum_{k>n} \left(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})\right), f_{2,\mathbf{t}} := S_{2^n}(f_{\mathbf{t}}).$$

Рассмотрим ряд

$$S_{2^0}(f_{\mathbf{t}}) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})\right).$$

Покажем, что он сходится в том смысле, что

$$\int_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - (S_{2^0}(f_{\mathbf{t}}) + \sum_{k=1}^{s} (S_{2^k}(f_{\mathbf{t}}) - S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf{t}})))\|_1 d\mathbf{t} \longrightarrow 0, \ s \longrightarrow \infty.$$

Учитывая, что

$$a - 1 < [a] \leqslant a, \tag{12}$$

получаем

$$\int\limits_{T^m}\|f_{\mathbf t}-(S_{2^0}(f_{\mathbf t})+\sum_{k=1}^{s}(S_{2^k}(f_{\mathbf t})-S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf t})))\|_1 d\mathbf t=\int\limits_{T^m}\|f_{\mathbf t}-S_{2^0}(f_{\mathbf t})-$$
$$-(S_{2^1}(f_{\mathbf t})-S_{2^0}(f_{\mathbf t}))-(S_{2^2}(f_{\mathbf t})-S_{2^1}(f_{\mathbf t}))-...-(S_{2^s}(f_{\mathbf t})-S_{2^{s-1}}(f_{\mathbf t}))\|_1 d\mathbf t=$$
$$=\int\limits_{T^m}\int\limits_{T^m}|f_{\mathbf t}(\mathbf x)-S_{2^s}(f_{\mathbf t},\mathbf x)|\,d\mathbf x d\mathbf t=$$
$$=\int\limits_{T^m}\sum_{j_1=0}^{2^{[s\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[s\nu_m]}-1}\int\limits_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^s}}\left|f_{\mathbf t}(\mathbf x)-f_{\mathbf t}\left(\tfrac{j_1}{2^{[s\nu_1]}},\dots,\tfrac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}\right)\right|d\mathbf x d\mathbf t=$$
$$=\sum_{j_1=0}^{2^{[s\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[s\nu_m]}-1}\int\limits_{\frac{j_1}{2^{[s\nu_1]}}}^{\frac{j_1+1}{2^{[s\nu_1]}}}\dots\int\limits_{\frac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}}^{\frac{j_m+1}{2^{[s\nu_m]}}}\int\limits_{T^m}\left|f_{\mathbf t}\left(x_1+\tfrac{j_1}{2^{[s\nu_1]}},\dots,x_m+\tfrac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}\right)-f(\mathbf t)\right|d\mathbf t d\mathbf x=$$
$$=\sum_{j_1=0}^{2^{[s\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[s\nu_m]}-1}\int\limits_0^{\frac{1}{2^{[s\nu_1]}}}\dots\int\limits_0^{\frac{1}{2^{[s\nu_m]}}}\int\limits_{T^m}|f(\mathbf t+\mathbf x)-f(\mathbf t)|\,d\mathbf t d\mathbf x=$$
$$=\prod_{i=1}^{m}2^{[s\nu_i]}\int\limits_0^{\frac{1}{2^{[s\nu_1]}}}\dots\int\limits_0^{\frac{1}{2^{[s\nu_m]}}}\|\triangle_{\mathbf x}f\|_1 d\mathbf x\leqslant$$
$$\leqslant\prod_{i=1}^{m}2^{[s\nu_i]}\int\limits_0^{\frac{1}{2^{[s\nu_1]}}}\dots\int\limits_0^{\frac{1}{2^{[s\nu_m]}}}\sum_{i=1}^{m}\|\triangle_{x_i\mathbf e_i}f\|_1 d\mathbf x\leqslant\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f,\tfrac{1}{2^{[s\nu_i]}})_1\longrightarrow 0,\ s\longrightarrow\infty.$$

Как видно из приведенного выше доказательства сходимости, благодаря усреднению по сдвигам значение $\int\limits_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^s}}\int\limits_{T^m}\left|f_{\mathbf t}(\mathbf x)-f_{\mathbf t}\left(\frac{j_1}{2^{[s\nu_1]}},\dots,\frac{j_m}{2^{[s\nu_m]}}\right)\right|d\mathbf x d\mathbf t$ не зависит от выбора представителя $f$ из класса эквивалентности, так как относительно переменной $\mathbf t$ этот интеграл будет давать одно и то же значение при любом представителе класса эквивалентности. Поэтому использование в неравенстве (10) сплайнов вида (11) корректно.

Учитывая неравенства (12), получаем, что

$$\int\limits_{T^m}\psi\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf t}\|_1\right)d\mathbf t=\int\limits_{T^m}\psi\left(2^{n+1}\left\|S_{2^k}(f_{\mathbf t})-S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf t})\right\|_1\right)d\mathbf t=$$
$$=\int\limits_{T^m}\psi\left(2^{n+1}\sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1}\int\limits_{\Pi_{j_1,\dots,j_m;2^k}}\left|S_{2^k}(f_{\mathbf t},\mathbf x)-S_{2^{k-1}}(f_{\mathbf t},\mathbf x)\right|d\mathbf x\right)d\mathbf t\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{T^m}\psi\left(2^{n+1}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{[k\nu_i]}}\sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1}\left|\triangle_{\frac{\mathbf 1}{\mathbf{2^k}}}f_{\mathbf t}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}},\dots,\tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)d\mathbf t<$$
$$<\int\limits_{T^m}\psi\left(2^{n+1}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{k\nu_i-1}}\sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1}\left|\triangle_{\frac{\mathbf 1}{\mathbf{2^k}}}f_{\mathbf t}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}},\dots,\tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)d\mathbf t=$$
$$=\int\limits_{T^m}\psi\left(2^{n+m+1-k}\sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1}...\sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1}\left|\triangle_{\frac{\mathbf 1}{\mathbf{2^k}}}f_{\mathbf t}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}},\dots,\tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)d\mathbf t,$$

где $\frac{\mathbf 1}{\mathbf{2^k}}=\left(\frac{1}{2^{[k\nu_1]}},\dots,\frac{1}{2^{[k\nu_m]}}\right)$.

Далее применим неравенства:

$$\psi(st)\leqslant M_\psi(s)\psi(t),\tag{13}$$
$$M_\psi(s_1s_2)\leqslant M_\psi(s_1)M_\psi(s_2),$$

вытекающие из определения 6 функции растяжения $M_\psi(s)$, и полуаддитивность функции $\psi$:

$$\int\limits_{T^m} \psi\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_1\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \sum_{k>n} \left( M_\psi\left(2^{n+m+1-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} M_\psi\left(2^{m+1}\right) \sum_{k>n} \left( M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right)\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left( M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \int\limits_{T^m} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t}\right) =$$
$$= C_1 \sum_{k>n} \left( M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f\right|\right|_\psi \right) =$$
$$= C_1 \sum_{k>n} \left( \prod_{i=1}^m 2^{[k\nu_i]} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f\right|\right|_\psi \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left( 2^{k\sum\limits_{i=1}^m \nu_i} M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{[k\nu_i]}}\mathbf{e_i}} f\right|\right|_\psi \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left( 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{[k\nu_i]}}\right)_\psi \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} \left( 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \tfrac{2}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \right) \leqslant \tag{14}$$
$$\leqslant C_2 \sum_{k>n} \left( 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right) \sum_{i=1}^m \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \right).$$

Оценим $\int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\right)_1\right) d\mathbf{t}$, $i = 1,..,m$. Применяя неравенства (12), (13) и учитывая полуаддитивность функции $\psi$, получаем

$$\int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \omega_i(f_{2,\mathbf{t}}; \tfrac{1}{2^{n\nu_i}})_1\right) d\mathbf{t} \leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \| \triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} S_{2^n}(f_{\mathbf{t}})\|_1\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \sum_{j_1=0}^{2^{[n\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[n\nu_m]}-1} \int\limits_{\frac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}}^{\frac{j_1+1}{2^{[n\nu_1]}}} \dots \int\limits_{\frac{j_i}{2^{[n\nu_i]}}}^{\frac{j_i+1}{2^{[n\nu_i]}}} \dots \int\limits_{\frac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}}^{\frac{j_m+1}{2^{[n\nu_m]}}} \left|\triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\right| d\mathbf{x}\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \psi\left(2^n \prod_{l=1}^m \frac{1}{2^{[n\nu_l]}} \sum_{j_1=0}^{2^{[n\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[n\nu_m]}-1} \left|\triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} M_\psi\left(2^n \prod_{l=1}^m \frac{1}{2^{[n\nu_l]}}\right) \sum_{j_1=0}^{2^{[n\nu_1]}-1} \dots \sum_{j_m=0}^{2^{[n\nu_m]}-1} \psi\left(\left|\triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f_{\mathbf{t}}\left(\tfrac{j_1}{2^{[n\nu_1]}}, \dots, \tfrac{j_m}{2^{[n\nu_m]}}\right)\right|\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{l=1}^m 2^{[n\nu_l]} M_\psi\left(2^{n+m-n\sum\limits_{l=1}^m \nu_l}\right) \left|\left| \triangle_{\frac{1}{2^{[n\nu_i]}}\mathbf{e}_i} f\right|\right|_\psi \leqslant$$
$$\leqslant 2^n M_\psi\left(2^m\right) \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{[n\nu_i]}}\right)_\psi \leqslant$$
$$\leqslant C_3 2^n M_\psi\left(2^m\right) \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi = C_4 2^n \omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi . \tag{15}$$

Таким образом, из (10) при $h = \frac{1}{2^n}$, $n \in N$, (14) и (15) следует, что

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant mC_2 \sum_{k>n}\left(2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi\right) +$$
$$+C_4 2^n \sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(f, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi \leqslant C_5 \sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi,$$

где полученный ряд сходится по условию (6).

Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема 1 позволяет получить теорему вложения анизотропных классов Липшица из $L_\psi(T^m)$ в $L_1(T^m)$.

**Следствие 1.** *Пусть* $\gamma_\psi > 0$, $f \in \Lambda_\psi^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,...,m)$ *и* $\widetilde{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_m}}$ *такое, что* $\gamma_\psi + \widetilde{\alpha} > 1$. *Тогда* $f \in L_1(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}-1},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $n$.

**Доказательство.** Пусть $\nu_i = \frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_i}$, $i = 1,..,m$. Проверим выполнение условия (6). Учитывая свойство (3) функции растяжения, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k M_\psi\left(\tfrac{1}{2^k}\right)\sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\left(\tfrac{1}{2^k}\right)^{\gamma_\psi-\varepsilon}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2^{k\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_i}}}\right)^{\alpha_i} \leqslant$$
$$\leqslant mC\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})} = Cm\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2^{\gamma_\psi-\varepsilon+\widetilde{\alpha}-1}}\right)^k.$$

Последний ряд сходится, когда $\gamma_\psi - \varepsilon + \widetilde{\alpha} > 1$, а это возможно при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Тогда, по теореме 1, $f \in L_1(T^m)$ и выполняется неравенство (7):

$$\psi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_1}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant C\sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{n-k}\right)\sum_{i=1}^{m}\omega_i\left(f, \tfrac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi \leqslant$$
$$\leqslant C_1\sum_{k=n}^{\infty} 2^k\left(2^{n-k}\right)^{\gamma_\psi-\varepsilon}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2^{k\frac{\widetilde{\alpha}}{\alpha_i}}}\right)^{\alpha_i} = C_1 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)}\sum_{k=n}^{\infty} 2^{k(1-\gamma_\psi+\varepsilon)}\sum_{i=1}^{m}\tfrac{1}{2^{\widetilde{\alpha}k}} =$$
$$= mC_1 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)}\sum_{k=n}^{\infty} 2^{k(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})} = C_2 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)} 2^{n(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})}\tfrac{2^{\gamma_\psi-\varepsilon+\widetilde{\alpha}}}{2^{\gamma_\psi-\varepsilon+\widetilde{\alpha}-1}-1} =$$
$$= C_3 2^{n(\gamma_\psi-\varepsilon)+n(1-\gamma_\psi+\varepsilon-\widetilde{\alpha})} = C_4 2^{n(1-\widetilde{\alpha})},$$

где константа $C_4$ не зависит от $n$.

Следствие 1 доказано.

Также из теоремы 1 для анизотропных классов Липшица из $L_p(T^m), 0 < p < 1$ вытекает теорема вложения в $L_1(T^m)$.

**Следствие 2.** *Пусть* $f \in \Lambda_p^{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$, $0 < p < 1$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,...,m)$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *такое, что* $\widetilde{\alpha} + p > 1$. *Тогда* $f \in L_1(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\overline{\omega}\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_1 \leqslant C\frac{1}{2^{\frac{n}{p}(\widetilde{\alpha}+p-1)}},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $n$.

Рассмотрим более общий случай вложения классов функций $\mathcal{H}_{\psi}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}(T^m)$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$ *– квазивогнутая функция,* $q \in (0;1]$, $\gamma_\psi > 0$, $f \in L_\psi(T^m)$ *и найдутся такие* $\nu_i \in R_+^1$ $(i = 1, ..., m)$, *что* $\sum\limits_{i=1}^{m} \nu_i = 1$ *и сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{-\frac{k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi < \infty. \tag{16}$$

*Тогда* $f \in L_q(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C \sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{\frac{n-k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi, \tag{17}$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $n$.

**Доказательство.** Пусть $\Phi(x) = \psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$, $x \in R_+^1$, тогда при любом натуральном $n$ получаем

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) = \Phi\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \Phi\left(\sum_{i=1}^{m} 2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q + \sum_{i=1}^{m} 2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_q\right) d\mathbf{t},$$

где $f_{1,\mathbf{t}} + f_{2,\mathbf{t}} = f_{\mathbf{t}}$.

В качестве $f_{1,\mathbf{t}}$ и $f_{2,\mathbf{t}}$ рассмотрим функции, используемые при доказательстве теоремы 1.

Пусть $\overline{\Phi}(x)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $\Phi(x)$. Тогда $\overline{\Phi}(x)$ — полуаддитивна (см., например, [17, с. 111].

Заметим, что ([15, с. 70]) для наименьшей вогнутой мажоранты $\overline{\varphi}(t)$ квазивогнутой функции $\varphi(t)$ справедливы неравенства:

$$\varphi(t) \leqslant \overline{\varphi}(t) \leqslant 2\varphi(t). \tag{18}$$

Как и в теореме 1, а также учитывая неравенства (18) и полуаддитивность функции $\overline{\Phi}(x)$, имеем

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f, \frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant m \int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q\right) d\mathbf{t} + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_q\right) d\mathbf{t},$$

$$\int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^{n+1}\|f_{1,\mathbf{t}}\|_q\right) d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{T^m} \sum_{k>n} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \overline{\Phi}\left[2^{n+1+m-k}\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|^q\right] d\mathbf{t} =$$
$$= 2\int\limits_{T^m} \sum_{k>n} \sum_{j_1=0}^{2^{[k\nu_1]}-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{2^{[k\nu_m]}-1} \psi\left[2^{\frac{n-k+m+1}{q}}\left|\triangle_{\frac{1}{2^{\mathbf{k}}}} f_{\mathbf{t}}\left(\frac{j_1}{2^{[k\nu_1]}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{[k\nu_m]}}\right)\right|\right] d\mathbf{t} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \sum_{k>n} 2^k M_\psi\left(2^{\frac{n-k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi,$$
$$\int\limits_{T^m} \overline{\Phi}\left(2^n \omega_i\left(f_{2,\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_q\right) d\mathbf{t} \leqslant C_2 \cdot 2^n \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{n\nu_i}}\right)_\psi.$$

Следовательно, при любом $n \in N$ получаем

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f,\frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C_3 \sum_{k=n}^{\infty} 2^k M_\psi\left(2^{\frac{n-k}{q}}\right) \sum_{i=1}^{m} \omega_i\left(f, \frac{1}{2^{k\nu_i}}\right)_\psi,$$

где полученный ряд сходится по условию (16).

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следуют теоремы вложения анизотропных классов Липшица из $L_\psi(T^m)$ в $L_q(T^m)$ и из $L_p(T^m)$ в $L_q(T^m)$ при $0 < p < q \leqslant 1$.

**Следствие 3.** *Пусть* $\psi\left(x^{\frac{1}{q}}\right)$ *– квазивогнутая функция,* $q \in (0;1]$, $\gamma_\psi > 0$, $f \in \Lambda_\psi^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,\dots,m)$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *такое, что* $\frac{\gamma_\psi}{q} + \widetilde{\alpha} > 1$. *Тогда* $f \in L_q(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\psi\left(\left(\frac{\overline{\omega}(f,\frac{1}{2^n})_q}{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \leqslant C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{\widetilde{\alpha}-1},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $n$.

**Следствие 4.** *Пусть* $f \in \Lambda_p^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$, $0 < p < q \leqslant 1$, $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,\dots,m)$ *и* $\widetilde{\alpha}$ *такое, что* $\frac{p}{q} + \widetilde{\alpha} > 1$. *Тогда* $f \in L_q(T^m)$ *и при всех* $n \in N$ *выполняются неравенства:*

$$\overline{\omega}\left(f, \frac{1}{2^n}\right)_q \leqslant C \frac{1}{2^{\frac{nq}{p}\left(\frac{p}{q}+\widetilde{\alpha}-1\right)}},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $n$.

Полученное неравенство в одномерном случае совпадает с (2).

**Заключение.** В представленной статье были получены достаточные условия для вложения классов $\mathcal{H}_\psi^{\omega_1,\dots,\omega_m}$ в $L_q(T^m)$, где $0 < q \leqslant 1$ и, как следствие, при $\alpha_i \in (0,1]$ $(i = 1,\dots,m)$ получена теорема вложения анизотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ в $L_q(T^m)$, $q \in (0;1]$.


1. **Hardy J. H.** A convergence criterion for Fourier series / J. H. Hardy, J. E. Littlewood // Math. Z. – 1928. – 28, № 4. – P. 612–634.
2. **Ульянов П. Л.** Вложение некоторых классов функций $H_p^\omega$ / П. Л. Ульянов // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 649–686.
3. **Ульянов П. Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках / П. Л. Ульянов // Мат. сб. – 1970. – Т. 81(123), № 1. – С. 104–131.
4. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский – М. : Наука, 1977. – 342 с.
5. **Головкин К. К.** Об одном обобщении интерполяционной теоремы Марцинкевича / К. К. Головкин // Тр. МИАН. – 1967. – Т. 102. – С. 5–28.

6. **Бесов О. В.** Теорема вложения для предельного показателя / О. В. Бесов, В. П. Ильин // Мат. заметки. – 1969. – Т. 6, № 2. – С. 129–138.

7. **Темиргалиев Н. Т.** Некоторые теоремы вложения классов функций $H^{\omega}_{p,m}$ многих переменных / Н. Т. Темиргалиев // Изв. АН КазССР. Сер. физ.–матем. – 1970. – № 5. – С. 90–92.

8. **Панджикидзе Л. К.** Теоремы вложения для функций многих переменных / Л. К. Панджикидзе // Сообщ. АН ГрузССР. – 1970. – Т. 60, № 1. – С. 29–31.

9. **Коляда В. И.** О вложении классов $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_\nu}$ / В. И. Коляда // Мат. сб. – 1985. – Т. 127(169), № 3(7). – С. 352–383.

10. **Коляда В. И.** О вложении некоторых классов функций многих переменных / В. И. Коляда // Сиб. мат. журн. – 1973. – Т. XIV, № 4. – С. 766–790.

11. **Коляда В. И.** О вложении в классы $\varphi(L)$ / В. И. Коляда // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т. 39, вып. 2. – С. 418–437.

12. **Стороженко Э. А.** Теоремы вложения и наилучшие приближения / Э. А. Стороженко // Мат. сб. – 1975. – Т. 97(139), № 2(6). – С. 230–241.

13. **Стороженко Э. А.** О некоторых теоремах вложения / Э. А. Стороженко // Мат. заметки. – 1976. – Т. 19, № 2. – С. 187–200.

14. **Пичугов С. А.** Гладкость функций в метрических пространствах $L_\psi$ / С. А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 2012. – Т. 64, – № 9. – С. 1214–1232.

15. **Крейн С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.

16. **Агошкова Т. А.** Теоремы вложения в метрических пространствах $L_\psi$ / Т. А. Агошкова // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 3. – С. 291–301.

17. **Тиман А. Ф.** Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.

Mathematical Subject Classification: 34B15, 30E25
УДК 517.9

**А. Н. Витюк, А. В. Михайленко**
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова,
Одесский национальный экономический университет

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

**Вітюк О. Н., Михайленко А. В. Крайова задача для диференціального рівняння дробового порядку.** В статті отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку крайової задачі для диференціального рівняння дробового порядку.
**Ключові слова:** крайова задача, існування та єдиність, дробова похідна Рімана—Ліувілля.

**Витюк А. Н., Михайленко А. В. Краевая задача для дифференциального уравнения дробного порядка.** В статье получены достаточные условия существования и единственности решения краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка.
**Ключевые слова:** краевая задача, существование и единственность, дробная производная Римана—Лиувилля.

**Vityuk A. N., Mykhailenko A. V. Boundary-value problem for differential equation of fractional order.** In this paper we received the sufficient conditions of existence and uniqueness of solution of boundary-value problem for fractional order differential equation.
**Key words:** boundary-value problem, existence and uniqueness, Riemann—Liouville fractional derivative.

**Введение.** Дробное интегродифференцирование находится в процессе интенсивного развития как в теоретическом плане, так и в плане приложений. Это обусловлено многочисленными приложениями при изучении многих физических, химических процессов, протекающих во фрактальных средах. Математической моделью таких процессов выступают дифференциальные уравнения нецелых порядков.

Различные приложения дробного интегродифференцирования можно найти в [1–3]. Работы многих авторов посвящены исследованию условий существования и единственности решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка [4–6]. В [8] рассмотрена краевая задача

$$\widetilde{D}_0^{\alpha}u(t) = f\left(t, u(t), \widetilde{D}_0^{\beta}u(t)\right), 0 < t < 1,$$

$$a_1u(0) - a_2u'(0) = A, u(1) + b_2u'(1) = B,$$

где $1 < \alpha \leqslant 2, 0 < \beta \leqslant 1; a_i, b_i \geqslant 0, i = 1,2; a_1b_2 + a_2b_1 > 0, \widetilde{D}_0^{\alpha}, \widetilde{D}_0^{\beta}$ есть дробные производные Капуто и $f : [0,1] \times R \times R \to R$ непрерывная функция. Получены условия существования и единственности решения этой задачи. В [8] исследованы условия существования положительных решений для краевой задачи

$$D_0^\alpha u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

где $1 < \alpha \leqslant 2, D_0^\alpha$ — производная Римана—Лиувилля и $f : [0,1] \times [0;\infty)$ — непрерывная функция. Условия разрешимости краевой задачи

$$D_0^{1+\alpha} u(t) = f\left(t, u(t), D_0^\alpha u(t)\right), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u(a) = 0,$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, получены в [9]. В настоящей работе получены условия существования и единственности решений уравнения (1.1), которые удовлетворяют краевым условиям

$$u(0) = u'(a) = 0. \tag{1.2}$$

**Предварительные результаты.** В этом разделе приведены некоторые определения и утверждения, которые будут использованы в этой работе. Через $C(J), J = [0, a]$ обозначим пространство Банаха непрерывных на $J$ функций $f : J \to R$ с нормой $\|f(x)\|_C = \{\max |f(x)| : 0 \leqslant x \leqslant a\}$. Как обычно, через $AC(J), L(J)$ обозначаем пространства, соответственно, абсолютно непрерывных и суммируемых функций $f : J \to R$.

**Определение 1** [10]**.** *Через $AC^n(J), n = 1, 2...$ обозначим класс функций $f(x)$ непрерывно дифференцируемых на $J$ до порядка $n - 1$, причем $f^{n-1}(x) \in AC(J)$.*

**Определение 2** [10, 11]**.** *Пусть $\alpha > 0$, и $f(x) \in L(J)$. Выражение*

$$f_\alpha(x) = I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

*где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, называем левосторонним интегралом Римана—Лиувилля порядка $\alpha$ от функции $f(x)$.*

**Определение 3** [10, 11]**.** *Для $f : J \to R$ выражение*

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

*где $n = [\alpha] + 1$ и $[\alpha]$ есть целая часть $\alpha$, называем левосторонней производной Римана—Лиувилля порядка $\alpha$ от функции $f(x)$.*

**Лемма 1** [13]**.** *Пусть $\gamma > 0$, $n = [\gamma] + 1$ и пусть $f_{n-\gamma}(x) \in AC^n(J)$. Тогда*

$$I_0^\gamma D_0^\gamma f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{\gamma-k-1}}{\Gamma(\gamma-k)} f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(0),$$

*где $f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(0) = \lim_{x \to 0_+} f_{n-\gamma}^{(n-k-1)}(x)$.*

**Лемма 2** [12]. *Пусть* $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ *и* $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. *Тогда* $|\sigma_1^\mu - \sigma_2^\mu| \leqslant |\sigma_1 - \sigma_2|^\mu$.

**Лемма 3.** *Пусть* $\gamma > 0, f(x) : J \to R$ *— измеримая функция и* $|f(x)| \leqslant M$. *Тогда* $\mu(x) = I_0^\gamma f(x) \in C(J)$ *и* $\mu(0) = 0$.

**Основные результаты.** Рассмотрим краевую задачу

$$D_0^{1+\alpha} y(x) = f(x), 0 < x < a, 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.1}$$

$$y(0) = y'a) = 0, \tag{2.2}$$

где $f : J \to R$ есть измеримая функция, причем $|f(x)| \leqslant M$.

Пусть $0 < \gamma \leqslant 2$. Тогда согласно определениям 2 и 3

$$D_0^\gamma y(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma)} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_0^x (x-t)^{1-\gamma} y(t)dt = y''_{2-\gamma}(x).$$

Если $\gamma = 1 + \alpha, 0 < \alpha \leqslant 1$, то $D_0^{1+\alpha} y(x) = y''_{1-\alpha}(x)$.

**Определение 4.** *Функцию* $y(x) \in C(J) \cap C^1((0, a])$ *называем решением краевой задачи (2.1), (2.2), если* $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J), y(x)$ *удовлетворяет условиям (2.2) и дифференциальному уравнению (2.1) для п.в.* $x \in J$.

**Теорема 1.** *Пусть* $f(x) : J \to R$ *есть измеримая функция и* $|f(x)| \leqslant M, x \in J$. *Тогда краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение*

$$y(x) = \int_0^a G(x,t) f(t) dt, \tag{2.3}$$

*где*

$$G(x,t) = \left[ \begin{array}{c} -\frac{x^\alpha (a-t)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}(x-t)^\alpha}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}, 0 \leqslant t \leqslant x \\ -\frac{x^\alpha (a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}, x \leqslant t < a. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

**Доказательство.** Пусть $y(x)$ — решение краевой задачи (2.1), (2.2). Тогда $I_0^{1+\alpha} D_0^{1+\alpha} y(x) = I_0^{1+\alpha} f(x)$. Согласно лемме 1 при $n = 2$

$$I_0^{1+\alpha} D_0^{1+\alpha} y(x) = y(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(0).$$

Так как $y(0) = 0$, то

$$y(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) = I_0^{1+\alpha} f(x). \tag{2.5}$$

Найдем $y'_{1-\alpha}(0)$. Согласно (2.5)

$$y'(x) - \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y'_{1-\alpha}(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, 0 < x \leqslant a. \tag{2.6}$$

В (2.6) полагаем $x = a$ и, принимая во внимание, что $y'(a) = 0$, получим

$$y'_{1-\alpha}(0) = -\frac{1}{a^{\alpha-1}} \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

Отсюда и из (2.5) следует, что

$$y(x)=-\frac{x^{\alpha}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha}f(t)dt, \tag{2.7}$$

где $\delta=\int_0^a (a-t)^{\alpha-1}f(t)dt$. Дифференцируя (2.7), получим

$$y'(x)=-\frac{x^{\alpha-1}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt. \tag{2.8}$$

Отметим, что согласно (2.7), (2.8) $y(x)\in C([0,a])\cap C^1((0,a])$ и $y(0)=y'(a)=0$. Для $0<x<a$ согласно (2.7) имеем

$$y(x)=-\frac{x^{\alpha}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}\left[\int_0^x (a-t)^{\alpha-1}f(t)dt+\int_x^a (a-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right]+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha}f(t)dt=\int_0^x\left[-\frac{x^{\alpha}(a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}+\frac{(x-t)^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right]f(t)dt+$$

$$+\int_x^a\left[-\frac{x^{\alpha}(a-t)^{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)}\right]f(t)dt=\int_0^a G(x,t)f(t)dt.$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим краевую задачу

$$D_0^{1+\alpha}y(x)=F\left[y(x)\right]\equiv F\left(x,y(x),D_0^{\alpha}y(x)\right), 0<x<a, 0<\alpha\leqslant 1; \tag{3.1}$$

$$y(0)=y'(a)=0. \tag{3.2}$$

Пусть $F:J\times R\times R\to R$ удовлетворяет условиям:

(i) $F(\cdot,y,z):J\to R$ есть функция измеримая для фиксированных $y,z\in R$;

(ii) $F(x,\cdot,\cdot):R\times R\to R$ есть функция непрерывная для каждого фиксированного $x\in J$;

(iii) $|F(x,y,z)|\leqslant M$.

**Определение 5.** *Под решением краевой задачи (3.1), (3.2) понимаем такую функцию $y(x)\in C(J)\cap C^1((0,a])$, что $y_{1-\alpha}(x)\in AC^2(J), D_0^{\alpha}y(x)\in AC(J)$, удовлетворяет краевым условиям (3.2) и дифференциальному уравнению (3.1) для п.в. $x\in J$.*

**Теорема 2.** *Пусть функция $F(x,y,z):J\times R\times R\to R$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii). Функция $y(x)\in C(J)\cap C^1((0,a])$ будет решением краевой задачи (3.1), (3.2), если и только если она есть решение интегрального уравнения*

$$y(x)=\int_0^a G(x,t)F(t,y(t),D_0^{\alpha}y(t))dt. \tag{3.3}$$

**Доказательство.** Пусть $y(x)$ — решение краевой задачи (3.1), (3.2). Так как согласно определению 5 $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$, то $D_0^\alpha y(x) = y'_{1-\alpha}(x) \in AC(J)$. Следовательно, в силу условий (i), (ii), (iii) $F(x, y(x), D_0^\alpha y(x)) : J \to R$ есть измеримая функция, причем $|F(x, y(x), D_0^\alpha y(x))| \leqslant M$. В силу теоремы 1 $y(x)$ представимо в виде (3.3). Пусть теперь $y(x)$ - решение интегрального уравнения (3.9). Учитывая (2.4), представим (3.3) в виде

$$y(x) = -\frac{x^\alpha \cdot \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^x (x-t)^\alpha F[y(t)]dt, \tag{3.4}$$

где

$$\delta = \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} F[y(t)]dt.$$

Из (3.4) и леммы 1 следует, что $y(x) \in C(J)$ и $y(0) = 0$. Очевидно, что

$$y'(x) = -\frac{x^{\alpha-1}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left[y(t)\right] dt.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $y' \in C((0, a])$ и $y'(a) = 0$. Осталось доказать, что $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$ и что $y(x)$ удовлетворяет уравнению 3.1 для п.в. $x \in J$.

В силу (3.4)

$$y_{1-\alpha} = I_0^{1-\alpha} y(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha} t^\alpha \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} dt + I_0^{1-\alpha} I_0^{1+\alpha} F\left[y(x)\right] =$$

$$= -\frac{\delta x}{a^{\alpha-1}} + I_0^2 F[y(x)], I_0^2 F[y(x)] = \int_0^x (x-t) F[y(t)]dt.$$

Отсюда следует, что $y_{1-\alpha}(x) \in AC(J)$, а также что $D_0^\alpha y(x) = y'_{1-\alpha}(x) = \int_0^x F[y(t)]dt - \frac{\delta}{a^{\alpha-1}}$ есть абсолютно непрерывная функция. Следовательно, $y_{1-\alpha}(x) \in AC^2(J)$. Наконец $D_0^{1+\alpha} y(x) = y''_{1-\alpha}(x) = F[y(x)]$ для п.в. $x \in J$.

Теорема 2 доказана.

**Теорема 3.** *Пусть функция $F(x, y, z) : J \times R \times R \to R$ удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii) и условию Липшица*

$$|F(x, y, z) - F(x, y_1, z_1)| \leqslant L_1|y - y_1| + L_2|z - z_1|,$$

*причем*

$$\rho = \frac{L_1 a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)} + L_2 a < \frac{\alpha}{\alpha+1}.$$

*Тогда существует единственное решение краевой задачи (3.1), (3.2).*

**Доказательство.** Через $C_\alpha(J)$ обозначим множество функций $u(x) : J \to R$ таких, что $u(x) \in C(J), D_0^\alpha u(x) \in C(J)$ с нормой

$$\|u(x)\|_\alpha = \max\left(\|u(x)\|_C, \frac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha+1)}\|D_0^\alpha u(x)\|_C\right).$$

$C_\alpha(J)$ с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ является [9] банаховым. Для $u(x) \in C_\alpha(J)$ определим оператор

$$Tu(x) = \int_0^a G(x,t)F\left(t, u(t), D_0^\alpha u(t)\right) dt.$$

Докажем, что $T$ действует из $C_\alpha(J)$ в $C_\alpha(J)$. Пусть для $u(x) \in C_\alpha(J)$

$$w(x) = Tu(x) = -\frac{x^\alpha \delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(1+\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^\alpha F[u(t)]dt,$$

$$\delta = \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} F[u(t)]dt.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $w(x) \in C(J), w(0) = 0$. Аналогично, как и выше, последовательно получим

$$w'(x) = -\frac{x^{\alpha-1}\delta}{a^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^a (x-t)^{\alpha-1} F[u(t)]dt, w'(a) = 0;$$

$$D_0^\alpha w(x) = w'_{1-\alpha}(x) = -\frac{\delta}{a^{\alpha-1}} + \int_0^x F[u(t)]dt \in AC(J). \tag{3.5}$$

Следовательно, неподвижная точка оператора $T$ будет решением краевой задачи (3.1), (3.2). Докажем, что оператор $T$ является сжимающим. Пусть $u_k(x) \in C_\alpha(J), w_k(x) = Tu_k(x), k = 1, 2$. Тогда

$$|w_1(x) - w_2(x)| \leqslant \int_0^a |G(x,t)| \left(L_1 \|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) dt. \tag{3.6}$$

Так как

$$\sup\{\int_0^a |G(x,t)|dt; x \in J\} \leqslant \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)},$$

то в силу (3.6) для $x \in J$ $|w_1(x) - w_2(x)| \leqslant \rho \|u_1(x) - u_2(x)\|_\alpha$. Следовательно,

$$\|w_1(x) - w_2(x)\|_C \leqslant \rho \|u_1(x) - u_2(x)\|_\alpha. \tag{3.7}$$

С учетом (3.5) получим, что для $x \in J$

$$|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)| \leqslant \frac{1}{a^{\alpha-1}} \int_0^a (a-t)^{\alpha-1} \left|F[u_1(t)] - F[u_2(t)]\right| dt +$$

$$+ \int_0^x \left|F[u_1(t)] - F[u_2(t)]\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a^{\alpha-1}} \left(L_1 \|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) \cdot \frac{a^\alpha}{\alpha} +$$

$$+ L_1 \left(\|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) a = S,$$

$$S = \left(L_1 \|u_1(x) - u_2(x)\|_C + L_2 \|v_1(x) - v_2(x)\|_C\right) \frac{(1+\alpha)a}{\alpha}.$$

Значит
$$\|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)\|_C \leqslant S. \tag{3.8}$$
Используя оценку (3.8), получим

$$\begin{gathered}\tfrac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)\|_C \leqslant \tfrac{1+\alpha}{\alpha}\left(\tfrac{L_1 a^{\alpha+1}}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|u_1(x)-u_2(x)\|_C + \right.\\ \left.+L_2 a\left(\tfrac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|v_1(x)-v_2(x)\|_C\right)\right) \leqslant \tfrac{(1+\alpha)\rho}{\alpha}\|u_1(x)-u_2(x)\|_\alpha.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) следует, что

$$\|w_1(x) - w_2(x)\|_\alpha = \max\left(\|w_1(x)-w_2(x)\|_C, \frac{a^\alpha}{\alpha\Gamma(1+\alpha)}\|D_0^\alpha w_1(x) - D_0^\alpha w_2(x)\|_C\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+\alpha)\rho}{\alpha}\|u_1(x)-u_2(x)\|_\alpha.$$

Следовательно, оператор $T : C_\alpha(J) \to C_\alpha(J)$ является сжимающим и его единственная неподвижная точка является единственным решением краевой задачи (3.1), (3.2). Теорема 3 доказана.

**Замечание 1.** *Пусть краевые условия (3.2) заданы в виде*
$$y(0) = 0, y'(a) = B. \tag{3.10}$$

*Найдем решение краевой задачи* $D_0^{1+\alpha}z(x) = 0, z(0) = 0, z'(a) = B$. *Используя лемму 1 и условие* $z(0) = 0$, *получим, что*

$$z(x) - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}z'_{1-\alpha}(0) = 0, z'(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z'_{1-\alpha}(0).$$

*Условие* $z'(a) = B$ *дает, что* $z'_{1-\alpha}(0) = \frac{B\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha-1}}$. *Тогда* $z(x) = \frac{x^\alpha \cdot B}{\alpha\cdot a^{\alpha-1}}, z_{1-\alpha}(x) = \frac{x\cdot B\cdot\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha-1}}$, *сводится к задаче*

$$D_0^{1+\alpha}u(x) = g\left(x, u(x), D_0^\alpha u(x)\right), u(0) = u'(a) = 0,$$
*где* $g\left(x, u(x), D_0^\alpha u(x)\right) = F\left(x, u(x) + \frac{x^\alpha\cdot B}{\alpha a^{\alpha-1}}, D_0^\alpha u(x) + \frac{B\cdot\Gamma(\alpha)}{a^{\alpha-1}}\right)$.

**Пример 1.** *Рассмотрим краевую задачу*

$$D_0^{1.6}y(x) = f(x), y(0) = y'(1) = 0,$$

*где* $f(x) = \frac{24}{\Gamma(3.4)}x^{2.4} - \frac{12}{\Gamma(2.4)}x^{1.4} + \frac{2}{\Gamma(1.4)}x^{0.4}$.

*Точное решение этой задачи* $y(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$,

$$G(x,t) = \left[\begin{array}{l} -\frac{x^{0.6}(1-t)^{-0.4} - (x-t)^{0.6}}{\Gamma(1.6)}, 0 \leqslant t \leqslant x \\ \quad -\frac{x^{0.6}(1-t)^{-0.4}}{\Gamma(1.6)}, x \leqslant t < 1. \end{array}\right.$$

*Тогда решение этой задачи* $y(x) = \displaystyle\int_0^1 G(x,t)f(t)dt = x^4 - 2x^3 + x^2$.

**Заключение.** В статье рассмотрен вопрос существования и единственности решения краевой задачи

$$D_0^{1+\alpha}y(x) = \left(F(x, y(x), D_0^{\alpha}y(x)\right), u(0) = u'(0) = 0,$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$ и $D_0^{\delta}$ — дробная производная Римана—Лиувилля.


1. **Нахушев А. М.** Уравнения математической биологии / А. М. Нахушев. – М. : Высш. шк., 1995. — 301 с.
2. **Нахушев А. М.** Элементы дробного исчисления и их применение / А. М. Нахушев. – М.: Физматлит., 2003. – 217 с.
3. **Васильев В. В.** Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев. – Киев: Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, 2008. – 256 с.
4. **Nahushev A. M.** The Sturm-Liouville problem for a second order differential equation with fractional derivatives in the lower terms / A. M. Nahushev // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1997. – V. 234, No. 2. – P. 308–311.
5. **Zhang S.** Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations / S. Zhang // Electronic Journal of differential equations. – 2006. – V. 36. – P. 1–12.
6. **Zhang S.** Existence of solution for a boundary-value problem of fractional order / S. Zhang // Acta Mathematica Scienta B. – 2006. – V. 26, No. 2. – P. 220–228.
7. **Su X.** Solutions to boundary-value problems for nonlinear differential equations of fractional order / X. Su // Electronic Journal of Differential Equations. – 2009. – No. 26. – P. 1–15.
8. **Zhanbing Bai.** Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation / Bai Zhang, Lu Haisen // J. Math Anal. Appl. – 2005. – V. 311. – P. 495–505.
9. **Mykhailenko A. V.** Fractional boundary-value problem / A. V. Mykhailenko // Вісник Одеського національного університету. Матем. і мех. – 2013. – V. 18, Is. 2. – P. 69–76.
10. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
11. **Вірченко Н. О.** Основи дробового інтегро-диференціювання / Н. О. Вірченко, В. Я. Рибак. – Київ: Задруга, 2007. – 361 с.
12. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения / Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
13. **Diethelm Kai.** The analysisis of fractional differential equation / Kai Diethelm. – Springerlang. Heidelberg, 2010. – 247 p.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 27–36

Mathematical Subject Classification: 41A28
УДК 517.938.5+519.514.17

**Є. С. Сілін**
Донбаський державний педагогічний університет

# ОДНОЧАСНА АПРОКСИМАЦІЯ ЛОКАЛЬНО ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ $\overline{\psi}$-ІНТЕГРАЛІВ. ВИПАДОК МАЛОЇ ГЛАДКОСТІ

**Сілін Є. С. Одночасна апроксимація локально інтегровних функцій та їх $\overline{\psi}$-інтегралів. Випадок малої гладкості.** Розглянуто питання одночасного наближення локально інтегровних на дійсній осі функцій малої гладкості та їх $\overline{\psi}$-інтегралів за допомогою операторів Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні закони поведінки верхніх граней функціоналів, які характеризують дану задачу.
**Ключові слова:** одночасна апроксимація, локально інтегрована функція, $\overline{\psi}$-інтеграл, оператор Валле Пуссена.

**Силин Е. С. Одновременная аппроксимация локально интегрируемых функций и их $\overline{\psi}$-интегралов. Случай малой гладкости.** Рассмотрены вопросы одновременного приближения локально интегрируемых на действительной оси функций малой гладкости и их $\overline{\psi}$-интегралов с помощью операторов Валле Пуссена. Найдены асимптотические законы поведения верхних граней функционалов, которые характеризуют данную задачу.
**Ключевые слова:** одновременная аппроксимация, локально интегрируемая функция, $\overline{\psi}$-интеграл, оператор Валле Пуссена.

**Silin E. S. Simultaneous approximation of locally integrable functions and their $\overline{\psi}$-integrals. Low smoothness case.** The article presents the problems of simultaneous approximation of locally integrable functions on the real axis of low smoothness and their integrals using Vallee Poussin operators. The asymptotic laws of behavior of the upper bounds of functionals are found that characterize this problem.
**Key words:** simultaneous approximation, locally integrable function, $\overline{\psi}$-integral, Vallee Poussin operator.

**Вступ.** В [1, 2] О. І. Степанець запропонував наступне означення класів $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$. Нехай $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара функцій $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ таких, що $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, де $\mathfrak{A}$ — множина неперервних при $t \geqslant 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови: 1) $\psi(t) \geqslant 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(t)$ зростає на $[0, 1)$; 2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1, \infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$; 3) похідна функції $\psi'(t) = \psi'(t + 0)$ має обмежену варіацію на $[0, \infty)$; $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A} : \int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\, dt < \infty\}$. Множину функцій $\psi(t)$, які задовольняють лише умову 2), позначають $\mathfrak{M}$.

Далі, співставимо кожній функції $\psi \in \mathfrak{M}$ за умови $t \geqslant 1$ пару функцій $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$ та $\mu(t) = t/(\eta(t) - t)$. Тоді покладемо: $\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(t) \leqslant K_1\}$, $\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < K_2 \leqslant \mu(t) \leqslant K_3 < \infty\}$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{M}_0 \bigcap \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \bigcap \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_C = \mathfrak{M}_C \bigcap \mathfrak{A}$, де $K_j$, $j = \overline{1, 3}$ — деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$. В роботі [3, с. 159–161] показано, що функції $\psi \in \mathfrak{A}_0$ не можуть спадати до нуля швидше деякої від'ємної степені $t$. Функції $\psi_\alpha(t) = \ln^\alpha(t+\varepsilon)$, $\psi_{\alpha,\beta}(t) = \ln^\alpha(t+\varepsilon)\ln^\beta\ln(t+\varepsilon)$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 1$, $t \geqslant 0$ є прикладами функцій з множини $\mathfrak{A}_0$.

Покладемо: $C$ — множина неперервних обмежених на дійсній осі функцій, $\mathfrak{N}$ — одинична куля $S_\infty = \{\varphi : \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \leqslant 1\}$ простору істотно обмежених функцій або клас $H_\omega = \{\varphi \in C : |\varphi(t) - \varphi(t')| \leqslant \omega(|t-t'|)\forall t, t' \in \mathbb{R}\}$, $\omega(t)$ — фіксований модуль неперервності. Тоді через $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ позначимо множину всіх неперервних функцій $f$, які $\forall x \in \mathbb{R}$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+t)\widehat{\overline{\psi}}(t)\, dt \overset{\text{df}}{=} A_0 + \varphi * \widehat{\overline{\psi}}(x), \tag{1}$$

де $A_0 = \text{const}$, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються, функція $\varphi \in \mathfrak{N}$,

$$\widehat{\overline{\psi}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} (\psi_{1+}(x) + i\psi_{2-}(x))e^{-ixt}\, dx, \tag{2}$$

а $\psi_{1+}$, $\psi_{2-}$ — парне і непарне продовження функцій $\psi_1$, $\psi_2$ відповідно. Якщо $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$, то перетворення $\widehat{\overline{\psi}}(t)$ сумовне на дійсній осі (див., наприклад, [2], твердження 9.5.1). Функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\overline{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Відповідно, функцію $f(\cdot)$ в (1) називають $\overline{\psi}$-інтегралом функції $\varphi(\cdot)$ і позначають $I^{\overline{\psi}}(\varphi;\cdot)$. Також зауважимо, що у випадку, коли $\psi_1 \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'_0$ множини $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ містять в собі функції, які не мають жодної дробової похідної за Вейлем.

Функції $f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ при кожних дійсних $\sigma > h \geqslant 1$ поставимо у відповідність оператор $V_{\sigma,h}(f;x)$, поклавши

$$V_{\sigma,h}(f;x) = A_0 + f^{\overline{\psi}} * \widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x),$$

де $\widehat{\lambda_{\sigma,h}\overline{\psi}}(x)$ перетворення вигляду (2) функції $\lambda_{\sigma,h}(t)\overline{\psi}(t)$, в якій

$$\lambda_{\sigma,h}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| \leqslant \sigma - h, \\ \frac{\sigma - |t|}{h}, & \sigma - h \leqslant |t| \leqslant \sigma, \\ 0, & \sigma \leq |t|. \end{cases}$$

Такі оператори розглядалися О. І. Степанцем у роботах [1, 2, 4, 5], де показано (наприклад, [2], твердження 9.3.4), що за умов $\psi_1 \in \mathfrak{A}$, $\psi_2 \in \mathfrak{A}'$ оператори $V_{\sigma,h}(f;x)$ належать до множини $\varepsilon_\sigma$ цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, а у періодичному випадку, при $\sigma = n \in \mathbb{N}$ і $h = p \in \mathbb{N}$, $p < n$, оператори $V_{\sigma,h}(f;x)$ співпадають зі сумами Валле Пуссена. Тому в подальшому називатимемо $V_{\sigma,h}(f;x)$ операторами Валле Пуссена.

Нам також знадобляться наступні означення.

Нехай $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}^{(1)}, \overline{\psi}^{(2)}, \ldots, \overline{\psi}^{(m)}\}$, де $\overline{\psi}^{(i)} = (\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)})$, $i = \overline{1,m}$ — довільні пари функцій, такі, що $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}'_0$. Далі, $b = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — довільний вектор з дійсними координатами і

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\overline{\psi};b)=\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\left(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi;x)-V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}^{(i)}}(\varphi;x))\right),\quad \varphi\in\mathfrak{N}. \qquad (3)$$

Для суми (3), яка визначена на множині $\mathfrak{N}$, має сенс величина

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\mathfrak{N};\overline{\psi};b)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}||\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\overline{\psi};b)||_C. \qquad (4)$$

Задача одночасного наближення функцій та їх $\overline{\psi}$-інтегралів операторами Валле Пуссена полягає в дослідженні величини (4). Раніше ця величина була досліджена нами в [6] за умов, що класи $\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ містять функції великої гладкості:

$$\psi_j^{(i)}\in\{\mathfrak{A}:\eta'(t)\leqslant \text{const і } \lim_{\sigma\to\infty}(\eta(\sigma)-\sigma)=c, 0<c\leq\infty\},\quad j=1,2,\quad i=\overline{1,m},$$

числа $h=h(\sigma)$ обрані таким чином, що $\sigma-h\in[\eta^{-1}(\psi_j^{(i)};\sigma);\sigma]$, $j=1,2$, $i=\overline{1,m}$ та існують константи $K_1^{(i)}$, $K_2^{(i)}$, для яких виконується умова

$$0<K_1^{(i)}\leq\frac{\eta(\psi_1^{(i)},\sigma)-\sigma}{\eta(\psi_2^{(i)},\sigma)-\sigma}\leq K_2^{(i)}<\infty,\quad \sigma\geqslant 1,\quad i=\overline{1,m}.$$

Задача одночасного наближення операторами Фур'є на класах $\widehat{C}_\beta^{\psi}\mathfrak{N}$, тобто, у випадку $\psi_1(\sigma)=\psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma)=\psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $h=1$ та

$$\lambda_{\sigma,1}^*(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t\leqslant\sigma-1,\\ 1-\frac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma-1\leqslant t\leqslant\sigma,\\ 0, & t\geqslant\sigma\end{cases}$$

була розв'язана в [7]. У випадку $2\pi$-періодичних функцій задача про одночасне наближення функцій та їх $(\psi,\beta)$-похідних сумами Фур'є на класах $C_\beta^\psi\mathfrak{N}$ розглядалася в [8]. У роботах [9] і [10] вивчалося одночасне наближення періодичних функцій та їх $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Фур'є й Валле Пуссена, відповідно, на класах $C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Якщо $m=1$, $b_1=1$ і $\overline{\psi}^{(1)}(\sigma)=\overline{\psi}(\sigma)$, то

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(1)}(\mathfrak{N};\overline{\psi};1)=\frac{1}{\overline{\psi}(\sigma)}\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}||I^{\overline{\psi}}(\varphi;x)-V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}}(\varphi;x))||_C.$$

Звідси випливає, що задача про одночасне наближення узагальнює задачу дослідження величин $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N};V_{\sigma,h})=\sup\limits_{\varphi\in\mathfrak{N}}||I^{\overline{\psi}}(\varphi;x)-V_{\sigma,h}(I^{\overline{\psi}}(\varphi;x))||_C$, в тому сенсі, що має місце рівність $\mathcal{E}(\widehat{C}^{\overline{\psi}}\mathfrak{N};V_{\sigma,h})=\overline{\psi}(\sigma)\Sigma_{\sigma,h}^{(1)}(\mathfrak{N};\overline{\psi};1)$.

**Основні результати.** Будемо вважати, що $h = h(\sigma)$ і $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \frac{h}{\sigma} \overset{df}{=} \Theta$, $0 \leqslant \Theta < 1$.

**Теорема.** *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_0'$, $i = \overline{1,m}$. *Тоді для дійсних чисел* $\sigma > h \geqslant 1$ *і довільного вектора* $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *з дійсними координатами при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi}\left|\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t}\,dt\right| + O(1),$$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) = \Theta_\omega\left(\frac{2}{\pi^2} R_m \ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_1^\infty \psi_2^{(i)}(\sigma s)\sin st\,ds\,dt\right) + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right),$$

*де* $R_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$, $A_k = \sum\limits_{i=1}^k b_i \cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k = \sum\limits_{i=1}^k b_i \sin\gamma_\sigma^{(i)}$, $\gamma_\sigma^{(i)} = \mathrm{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}$; $\theta_\omega \in [2/3; 1]$, *причому* $\theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ — *опуклий модуль неперервності,* $O(1)$ — *величина, яка рівномірно обмежена щодо* $\sigma$ *та* $h$.

**Доведення.** Надалі через $K$ будемо позначати постійне число, можливо, не одне і те саме в різних місцях тексту. В [11] показано, що в умовах теореми для дійсних $\sigma > h \geqslant 1$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(x) - V_{\sigma,h}(f;x) = \frac{-|\overline{\psi}(\sigma)|}{\pi}\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \delta(x+t)\frac{\sin(\sigma t - \gamma_\sigma)}{t}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t| \leqslant a/\sigma} \delta(x+t)\int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s)\sin st\,ds\,dt +$$

$$+ O(1)\left(\sum_{i=1}^2 (\psi_i(\sigma - h) - \psi_i(\sigma)) + |\overline{\psi}(\sigma)|\right)\zeta(\mathfrak{N}), \qquad (5)$$

де $a \in (0, \frac{\pi\sigma}{h})$, $\delta(x+t) = \begin{cases} f^{\overline{\psi}}(x) - f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо} f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega, \\ f^{\overline{\psi}}(x+t), & \text{якщо} f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; \end{cases}$

$\gamma_\sigma = \mathrm{arctg}\frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$; $\zeta(\mathfrak{N}) = \begin{cases} \omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right), & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}} H_\omega, \\ 1, & \text{якщо } f \in \widehat{C}^{\overline{\psi}}_\infty; \end{cases}$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо $\sigma, h$.

$\forall\psi \in \mathfrak{M}_0$ справедлива нерівність $\psi(\varepsilon\sigma) \leqslant K\psi(\sigma)$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Тому $\psi(\sigma - h) \leqslant K\psi(\sigma)$, за умови, що $0 \leq \Theta < 1$. Приймаючи до уваги цей факт, на підставі співвідношень (3) і (5) одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi; x; \overline{\psi}; b) = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leq \pi/h} \frac{\delta(x+t)}{t}\sum_{i=1}^m b_i \sin(\sigma t - \gamma_\sigma^{(i)})\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds\;dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}),\gamma_\sigma^{(i)}=\operatorname{arctg}\frac{\psi_2^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}. \qquad (6)$$

Нехай, далі $R_k=\sqrt{A_k^2+B_k^2}$, $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\cos\gamma_\sigma^{(i)}$, $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\sin\gamma_\sigma^{(i)}$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{m}b_i\sin(\sigma t-\gamma_\sigma^{(i)})=A_m\sin\sigma t-B_m\cos\sigma t=R_m\sin(\sigma t-\alpha_m), \qquad (7)$$

де

$$\alpha_m=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{B_m}{A_m}, & A_m\neq 0,\\ \frac{\pi}{2}, & A_m=0.\end{cases}$$

Згідно до рівностей (6)–(7)

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;x;\overline{\psi};b)=\frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\frac{\delta(x+t)}{t}\sin(\sigma t-\alpha_m)\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(x+t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds\;dt+O(1)\zeta(\mathfrak{N}). \qquad (8)$$

Відмітимо, що, оскільки множини $S_\infty$ і $H_\omega$ інваріантні щодо зсуву аргументу, то величина (4) не залежить від значення $x$. Таким чином

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\mathfrak{N};\overline{\psi};b)=\sup_{\varphi\in\mathfrak{N}}\|\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(\varphi;0;\overline{\psi};b)\|_C. \qquad (9)$$

Враховуючи рівності (4), (8)–(9), одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty;\overline{\psi};b)\leq\sup_{\varphi\in S_\infty}\left|\frac{-R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\frac{\delta(t)}{t}\sin(\sigma t-\alpha_m)\;dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\delta(t)\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds\;dt\right|+O(1)\leq$$

$$\leqslant\frac{R_m}{\pi}\int\limits_{a/\sigma\leqslant|t|\leq\pi/h}\left|\frac{\sin(\sigma t-\alpha_m)}{t}\right|\;dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leqslant a/\sigma}\left|\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds\right|\;dt+O(1). \qquad (10)$$

Далі спростимо вигляд правої частини нерівності (10). Функція

$$K_\sigma(t)=\int\limits_{\sigma}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{b_i\psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\sin st\;ds$$

неперервна і $K_\sigma(0) = 0$. Отже, в деякому околі $(0, a_0)$ вона зберігає знак (або дорівнює нулю). Тому, поклавши $a = a_0$ і враховуючи, що функція $K_\sigma(t)$ непарна, зі співвідношення (10) випливає

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(S_\infty; \overline{\psi}; b) \leqslant \frac{R_m}{\pi} \int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \left| \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{t} \right| \, dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \, dt + O(1). \quad (11)$$

Нехай [3, с. 232]

$$x_k = \tfrac{k\pi + \alpha_m}{\sigma}, \ t_k = x_k - \tfrac{\pi}{2\sigma}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \ \alpha_m \in \mathbb{R}, \ \sigma \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Через $k_0$ позначимо те значення $k$, для якого $t_{k_0}$ є найближча праворуч від точки $(a+\pi)/\sigma$ точка, в якій $\sin(\sigma t - \alpha_m) = 1$, а через $k_1$ — найбільше зі значень $k$ таких, що $t_k < \pi/h$. Далі, через $k_2$ позначимо таке число, що точка $t_{k_2}$ буде найближча ліворуч від точки $-(a+\pi)/\sigma$ серед тих, в яких $\sin(\sigma t - \alpha_m) = -1$, а через $k_3$ — найменше зі значень, що задовольняють умову $t_k > -\pi/h$, і покладемо

$$\begin{gathered} l_{\sigma,h}(t) = x_k, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = k_0, \dots, k_1 - 1, \\ k = k_3, k_3 + 1, \dots, k_2 - 1, \quad i_{3,1} = [t_{k_3}, t_{k_2}] \cup [t_{k_0}, t_{k_1}]. \end{gathered} \quad (13)$$

Користуючись схемою доведення леми 5.4.7 [3, с. 232–234], неважко переконатися, що має місце аналогічна

**Лема.** *Нехай $a$ — довільне число, $\alpha_m \in \mathbb{R}$ і $\sigma > h \geqslant 1$. Тоді, якщо $\varphi \in S_\infty$, то в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} \varphi(t) \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{t} \, dt = \int\limits_{i_{3,1}} \varphi(t) \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \, dt + O(1), \quad (14)$$

*якщо $\varphi \in H_\omega$, то для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність*

$$\int\limits_{a/\sigma \leqslant |t| \leqslant \pi/h} (\varphi(0) - \varphi(t)) \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{t} \, dt =$$

$$= \int\limits_{i_{3,1}} (\varphi(0) - \varphi(t)) \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \, dt + O(1) \omega \left( \frac{1}{\sigma} \right). \quad (15)$$

*В рівностях (14) – (15) проміжок $i_{3,1}$ та функція $l_{\sigma,h}(t)$ означені у (13), $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені щодо $\sigma$.*

Продовжимо доведення теореми. З рівностей (11) та (14) випливає, що

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(S_\infty; \overline{\psi}; b) \leqslant \frac{R_m}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \, dt + O(1). \quad (16)$$

Покладемо

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \, dt, & |t| \leqslant \frac{a}{\sigma}, \\ \operatorname{sign} \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)}, & t \in i_{3,1} \end{cases}$$

і через $\varphi^*(t)$ позначимо функцію з множини $S_\infty$, яка співпадає на множині $[-a/\sigma; a/\sigma] \cup i_{3,1}$ із функцією $\varphi_\sigma(t)$. Функція $\varphi^*(t)$ завжди буде існувати і для неї значення $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b)$ буде в точності збігатися з правою частиною (16). Тому

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{R_m}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} \left| \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \right| \, dt + \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{a/\sigma} |K_\sigma(t)| \, dt + O(1).$$

Скориставшись співвідношеннями (5.5.4) та (5.5.5) роботи [3, с. 236] переконуємося, що

$$\int\limits_{i_{3,1}} \left| \tfrac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \right| \, dt = \tfrac{4}{\pi} \ln \tfrac{\sigma}{h} + O(1),$$
$$\tfrac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant \frac{a}{\sigma}} \left| \int\limits_\sigma^\infty \psi_2(s) \sin st \, ds \right| \, dt = \tfrac{2}{\pi} \int\limits_\sigma^\infty \tfrac{|\psi_2(t)|}{t} \, dt + O(1).$$

Таким чином, остаточно одержуємо

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{4}{\pi^2} R_m \ln \frac{\sigma}{h} + \frac{2}{\pi} \left| \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \int\limits_\sigma^\infty \frac{\psi_2^{(i)}(t)}{t} \, dt \right| + O(1).$$

Розглянемо випадок $\varphi \in H_\omega$. Згідно з рівностями (8) і (15)

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) \leqslant \sup_{\varphi \in H_\omega} \left| \frac{-R_m}{\pi} \int\limits_{i_{3,1}} (\varphi(t) - \varphi(0)) \frac{\sin(\sigma t - \alpha_m)}{l_{\sigma,h}(t)} \, dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|t| \leqslant a/\sigma} (\varphi(t) - \varphi(0)) \int\limits_\sigma^\infty \sum_{i=1}^m \frac{b_i \psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \sin st \, ds \, dt \right| + O(1) \omega \left( \frac{1}{\sigma - h} \right).$$

У [3, с. 239, 240] були одержані нерівності (5.5.16) та (5.5.17), при цьому фактично не використовувався той факт, що $n \in \mathbb{N}$ і $\varphi$ — періодична функція. Тому

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b) \leqslant \frac{R_m}{\sigma \pi} \int\limits_0^{\pi/2} \omega \left( \frac{2t}{\sigma} \right) \sin t \, dt \left( \sum_{k=k_3}^{k_2 - 1} \frac{1}{|x_k|} + \sum_{k=k_1-1}^{k_0} \frac{1}{x_k} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{a/\sigma} \omega(2t) \int\limits_\sigma^\infty \sum_{i=1}^m \frac{b_i \psi_2^{(i)}(s)}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|} \sin st \, ds \, dt + O(1) \omega \left( \frac{1}{\sigma - h} \right). \qquad (17)$$

Далі, наслідуючи монографію [3, с. 240], означимо функцію $\widehat{\varphi} \in H_\omega$, для якої значення $\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b)$ співпадає з правою частиною (17). Нехай

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega(2(x_k - t)), & t \in [t_k; x_k], \\ -\frac{1}{2} \omega(2(t - x_k)), & t \in [x_k; t_{k+1}], \end{cases} \quad k = \overline{k_3, k_2 - 1}, \ k = \overline{k_0, k_1 - 1},$$

де числа $x_k$ і $t_k$ означені у співвідношенні (12). Покладемо

$$\varphi_+(t) = (-1)^{k-k_0}\varphi_k(t) - \tfrac{1}{2}\left(\omega\left(\pi/\sigma\right) - \omega\left(2a/\sigma\right)\right), \quad t \in [t_k; t_{k+1}],$$
$$k = \overline{k_0, k_1 - 1}.$$
$$\varphi_-(t) = (-1)^{k-k_2+1}\varphi_k(t) + \tfrac{1}{2}\left(\omega\left(\pi/\sigma\right) - \omega\left(2a/\sigma\right)\right), \quad t \in [t_k; t_{k+1}],$$
$$k = \overline{k_3, k_2 - 1}.$$

$$\widehat{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega(2|t|), & |t| \leqslant \frac{a}{\sigma}, \\ \frac{1}{2}\omega(2a/\sigma), & t \in [a/\sigma, t_{k_0}], \\ \varphi_+(t), & t \in [t_{k_0}; t_{k_1}], \\ -\frac{1}{2}\omega(2a/\sigma), & t \in [t_{k_2}; -a/\sigma], \\ \varphi_-(t), & t \in [t_{k_3}; t_{k_2}]. \end{cases}$$

Функція $\widehat{\varphi}(t)$ — шукана екстремальна функція, оскільки, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, то $\widehat{\varphi} \in H_\omega$ і, як показують безпосередні підрахунки, для функції $\widehat{\varphi}(t)$ співвідношення (17) буде рівністю. Якщо ж $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності, то співвідношення (17) буде рівністю з деяким множником $\Theta_\omega \in [2/3; 1]$.

Оскільки $\sum\limits_{k=k_3}^{k_2-1} \frac{1}{|x_k|} + \sum\limits_{k=k_0}^{k_1-1} \frac{1}{x_k} = \sigma\left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{\sigma}{h} + O(1)\right)$, то неважко переконатися у справедливості рівності

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(H_\omega; \overline{\psi}; b) = \Theta_\omega\left(\frac{2}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\; dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_1^\infty \psi_2^{(i)}(\sigma s)\sin st\; ds\; dt\right) + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right).$$

Таким чином, теорема доведена.

Нехай $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$. Тоді, згідно до оцінки (5.3.4) [3, с. 214]

$$\left|\sum_{i=1}^m \frac{b_i}{|\overline{\psi}^{(i)}(\sigma)|}\int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2^{(i)}(t)|}{t}\; dt\right| = O(1). \tag{18}$$

В [3, с. 216] при $\sigma \in \mathbb{N}$ наведено співвідношення (5.3.11):

$$\frac{1}{\pi}\left|\int\limits_0^1 \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\int\limits_\sigma^\infty \psi_2(\sigma s)\sin st\; ds\; dt\right| = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)\int\limits_\sigma^\infty \frac{|\psi_2(s)|}{s}\; ds. \tag{19}$$

З оцінок (18)–(19) та доведеної теореми одержуємо

**Наслідок 1.** *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $i = \overline{1, m}$, $0 \leqslant \Theta < 1$. *Тоді для* $\sigma > h \geqslant 1$ *при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(S_\infty; \overline{\psi}; b) = \frac{4}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h} + O(1),$$

$$\Sigma^{(m)}_{\sigma,h}(H_\omega; \overline{\psi}; b) = \frac{2\Theta_\omega}{\pi^2}R_m \ln\frac{\sigma}{h}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{\sigma}\right)\sin t\; dt + O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma-h}\right),$$

*де* $\Theta_\omega \in [2/3;1]$, *причому* $\Theta_\omega = 1$, *якщо* $\omega(t)$ *— опуклий модуль неперервності і* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* $\sigma, h$.

Дослідимо можливість виконання рівності $R_m = 0$. Для цього скористаємося міркуваннями з [10, с. 261–264].

**Наслідок 2.** *Нехай* $\psi_1^{(i)} \in \mathfrak{A}_0$, $\psi_2^{(i)} \in \mathfrak{A}_C$, $0 \leqslant \Theta < 1$, $\sigma > h \geqslant 1$. *Якщо*

1. $m = 2$ *і* $b^* = (b_1, -b_1)$, $\frac{\psi_2^{(1)}(\sigma)}{\psi_1^{(1)}(\sigma)} = \frac{\psi_2^{(2)}(\sigma)}{\psi_1^{(2)}(\sigma)} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
2. $m \geqslant 3$ *і* $b^* = (b_1^*, b_2^*, \ldots, b_m^*)$ *— довільний вектор, координати якого задовольняють умову* $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^* = 0$, *якщо* $\gamma_\sigma^{(i)} = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,m}$, *або умову* $b_j^* = \frac{\sum\limits_{i\neq j,l} b_i^* \sin((\gamma_\sigma^{(i)}) - \gamma_\sigma^{(l)})}{\sin(\gamma_\sigma^{(i)} - \gamma_\sigma^{(j)})}$, $b_l^* = \frac{\sum\limits_{i\neq j,l} b_i^* \sin((\gamma_\sigma^{(i)}) - \gamma_\sigma^{(j)})}{\sin(\gamma_\sigma^{(i)} - \gamma_\sigma^{(l)})}$ *в іншому випадку,*

*то при* $\sigma \to \infty$

$$\Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(S_\infty; \overline{\psi}; b^*) = O(1), \quad \Sigma_{\sigma,h}^{(m)}(H_\omega; \overline{\psi}; b^*) = O(1)\omega\left(\frac{1}{\sigma - h}\right),$$

*де* $O(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо* $\sigma, h$.

**Висновки.** В статті розглянуто питання одночасного наближення локально інтегровних на дійсній осі функцій малої гладкості та їх $\overline{\psi}$-інтегралів за допомогою операторів Валле Пуссена. Знайдено асимптотичні закони поведінки верхніх граней функціоналів, які характеризують дану задачу.


1. **Stepanets A. I.** Approximation of locally integrable function on the real line / A. I. Stepanets, Wang Kunyang, Zhang Xirong // Укр. мат. журн. – 1999. – V. 51, № 11. – P. 1549–1561.
2. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 2. – 468 с.
3. **Степанец А. И.** Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 426 с.
4. **Степанец А. И.** Приближение операторами Фурье функций, заданных на действительной оси / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 2. – С. 198–209.
5. **Степанец А. И.** Приближение в пространствах локально интегрируемых функций / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46, № 5. – С. 597–625.
6. **Силин Е. С.** Одновременное приближение функций и их $\overline{\psi}$-интегралов в равномерной метрике // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2004. – Т. 1, № 1. – С. 337–348.
7. **Степанец А. И.** Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в равномерной метрике / А. И. Степанец, В. В. Дрозд // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье (препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.17). – Киев, 1989. – 59 с.

8. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.

9. **Рукасов В. И.** Приближение $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций в равномерной и интегральной метриках / В. И. Рукасов, С. О. Чайченко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – Т. 36. – С. 156–191.

10. **Соколенко І. В.** Одночасне наближення $\overline{\psi}$-інтегралів періодичних функцій сумами Фур'є / І. В. Соколенко // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – Т. 46. – С. 249–264.

11. **Рукасов В. И.** Приближение непрерывных функций небольшой гладкости операторами Валле Пуссена / В. И. Рукасов, Е. С. Силин // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 3. – С. 394–400.

Mathematical Subject Classification: 39A05
УДК 517.929.4

**Ю. А. Чернецкая**
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

# О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

**Чернецька Ю. О. Про розв'язнiсть системи звичайних диференцiальних рiвнянь щодо похiдних.** Дослiджуються питання про приведення системи звичайних диференцiальних рiвнянь, що не розв'язанi вiдносно похiдних, до систем, що розв'язанi вiдносно похiдних або частково розв'язанi вiдносно похiдних.
**Ключовi слова:** задача Кошi, неявнi функцiї.

**Чернецкая Ю. А. О разрешимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно производных.** Исследуются вопросы о приведении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, к системам, разрешенным относительно производных или частично разрешенным относительно производных.
**Ключевые слова:** задача Коши, неявные функции.

**Chernetska I. The ordinary differential equations systems solubility in respect to the derivatives.** Questions are investigated about bringing the system of ordinary differential equations not solved with respect to derivatives to the systems, solved with respect to derivatives, or partially solved with respect to derivatives.
**Key words:** Cauchy problem, implicit functions.

**Введение.** Рассматривается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, вида:

$$\left\{ \begin{array}{c} \Phi(t, x, \dot{x}) = 0, \\ x(t) \to 0, t \to 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

где вектор-функция $\Phi : D \to \Re^m$ — непрерывна в $D = \{(t, x, \dot{x}) : t \in (0; a]\,,$ $\|x\| \leqslant b, \|\dot{x}\| \leqslant b\}\,, a, b > 0,\ x = (x_1, ..., x_n)^T$; где $\|x\| = \max |x_i|\,, i = 1, ..., n.$

Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производных, называемые также неявными дифференциальными уравнениями, известны давно и возникают во многих прикладных задачах. Такие уравнения появляются в математической экономике (уравнение межотраслевого баланса), теории электрических цепей, теории Марковских процессов, в задачах оптимального управления, химической кинетики и т. д.

Современное развитие теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, включает в себя исследование сингулярных уравнений и систем уравнений в вещественных и комплексных областях. В работах Еременко А., Самойленко А. [3], Старуна И., Шкиля Н. [5], Яковца В. и других изучались вопросы существования и асимптотического поведения решений систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных с постоянными и переменными пучками матриц. Также исследование дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных, в вещественной области проводятся в работах Аширова О., Бабкина Б. Н., Витюка А. Н., Грабовской Р. Г., Диблика Й., Самковой Г. Е. [2, 4], Hanke M., Lando M., Campbell St., Marz R., Каплун Ю., Кравцова П. и многих других

В данной работе изучается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, вида (1), при дополнительном условии:

$$\dot{x}(t) \to 0 \ \text{при} \ t \to 0. \tag{2}$$

Данная работа является распространением метода Грабовской Р. Г. и Диблика Й. [1, 6] на более общие классы начальных задач.

Предлагается алгоритм разрешимости задачи (1)–(2) относительно производных, или относительно части компонент вектора производной.

**Основные результаты.** Рассмотрим пошагово алгоритм приведения задачи (1)–(2) к задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных или частично разрешенных относительно производных относительно новой неизвестной функции. Для этого проделываются следующие шаги:
1. Вводятся вспомогательные функции

$$\begin{cases} x = \pi_0(t, Y, S), \\ \dot{x} = \pi_1(t, Y, S), \end{cases} \tag{3}$$

где $\pi_i : G_1 \times G_2 \times G_3 \to \Re^n, i = 0, 1$, области $G_1 \subseteq \Re, G_2 \subseteq \Re^k, G_3 \subseteq \Re^l$, $0 \in G_1$, $0 \in G_2, 0 \in G_3$, $Y = (Y_1, ..., Y_k)^T, S = (S_1, ..., S_\ell)^T$. Полагается, что функция $\pi_0$ — непрерывно-дифференцируема, а функция $\pi_1$ — непрерывна при $(t, Y, S) \in G_1 \times G_2 \times G_3$ и

$$\pi_i(0, 0, 0) = 0, i = 0, 1. \tag{4}$$

2. Предполагается, что существует такая функция $T : G_1 \times G_2 \times G_3 \to \Re^p$, что в некоторой окрестности точки $(0; 0; 0)$ справедливо представление:

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, S), \pi_1(t, Y, S)) \equiv F(t, Y, S, T(t, Y, S)).$$

**Определение 1.** *Будем говорить, что для функции $T$ выполнено условие **A**, если:*

1) $(t, Y, S)$ *— непрерывна в области $G_1 \times G_2 \times G_3$;*
2) *либо $T(0, 0, 0) = 0$, либо функцию $T$ в чке $(0, 0, 0)$ можно доопределить: $(0, 0, 0) = 0$;*
3) *существуют и непрерывны в $G_1 \times 2 \times G_3$ все частные производные функций $T_j = T_j, Y, S), j \in \{1, ..., p\}$ по всем аргументам;*
4) *некоторый функциональный определитель в точке $(0, 0, 0)$ отличен от нуля.*

*Уточнение пункта 4) условия **A** в каждом конкретном случае будем проводить отдельно.*

Если функция $T$ удовлетворяет условию $A$, то система

$$T(t, Y_1, ..., T_k, S_1, ..., S_l) = 0 \tag{5}$$

или разрешима относительно вектор-функции $S$, или разрешима относительно части компонент вектор-функции $S$. Это позволит с учетом (3), т. е. с учетом того, что

$$(\pi_0)'_t = \pi_1, \tag{6}$$

перейти от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) к задаче Коши, разрешенной или частично разрешенной относительно производных. При этом могут возникнуть условия совместности.

Рассмотрим различные случаи разрешимости или частичной разрешимости системы (5) в окрестности точки $(0,0,0)$, относительно вектор-функции $S$, или относительно части компонент вектор-функции $S$ и получим в каждом из случаев соответствующую задаче Коши (1) с дополнительным условием (2), новую начальную задачу.

***Случай 1:***

Предположим, что $p = l$ и функция $T$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{A}$, где пункт 4) имеет вид: функциональный определитель $\frac{DT}{DS}\Big|_{(0,0,0)} \neq 0$.

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что система (5) однозначно разрешима в окрестности точки $(0;0;0)$ относительно вектор-функции $S$, причем вектор-функция $S = w(t,Y)$, где $w(t,Y) = col\,(\mathrm{w}_1(\mathrm{t},\mathrm{Y}),...,\mathrm{w}_\ell(\mathrm{t},\mathrm{Y}))$, непрерывна в области $J_1 \times J_2$, $J_1 \times J_2 \subseteq G_1 \times G_2$, $(0,0) \in J_1 \times J_2$, и функции $w_1,...,w_\ell$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и $w(0,0) = 0$.

***Случай 2:***

Предположим, что $1 \leqslant p < l$, функция $T$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{A}$, где пункт 4) имеет вид: функциональный определитель $\frac{D(T_1,...,T_p)}{D(S_1,...,S_p)}\Big|_{(0,0,...,0)} \neq 0$.

Тогда из теоремы о неявных функциях следует, что система

$$T_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_p, S_{p+1}, ..., S_l) = 0, j = 1, ..., p \tag{7}$$

однозначно разрешима в окрестности точки $(0,0,\ldots,0)$ относительно вектор-функций $S_j = w_j(t,Y,S_{p+1},\ldots,S_\ell)$, $j = 1,\ldots,p$, причем вектор-функции $w_j(t,Y,$ $S_{p+1},\ldots,S_\ell)$, $j = 1,\ldots,p$ непрерывны в области

$$J_1 \times J_2 \times J_3, J_1 \times J_2 \times J_3 \subseteq G_1 \times G_2 \times \tilde{G}_3, \tilde{G}_3 \subseteq \Re^{\ell - p}, (0,0,\ldots,0) \in J_1 \times J_2 \times J_3,$$

функции $w_1,...,w_p$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и $w_j(0,0,\ldots,0) = 0, j = 1,\ldots,p$.

***Случай 3:***

Предположим, что $l < p$, функция $T$ удовлетворяет условию $\boldsymbol{A}$, где пункт 4) имеет вид: $\frac{D(T_1,...,T_l)}{D(S)}\Big|_{(0,0,....,0)} \neq 0$.

Тогда система

$$T_i(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_l) = 0, i = 1, ..., l \tag{8}$$

однозначно разрешима в окрестности точки $(0,\ldots,0)$ относительно вектор-функций $S_i = w_i(t,Y)$, $i = 1,...,l$, причем они непрерывны в области $J_1 \times J_2$, точка $(0,0) \in J_1 \times J_2$, и функции $w_1,...,w_\ell$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и $w_i(0,0) = 0$, $i = 1,\ldots,l$.

На систему
$$T_q(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_l) = 0, q = \ell + 1, ..., p \tag{9}$$
будем смотреть, как на условие совместности.

***Случай 4:***

Предположим, что существует такое число $m : 1 \leqslant m < p, 1 \leqslant m < l$, что функция удовлетворяет условию ***A,*** где пункт 4) имеет вид: функциональный определитель $\left.\frac{D(T_1,\ldots,T_m)}{D(S_1,\ldots,S_m)}\right|_{(0,\ldots,0)} \neq 0$.

Тогда система (5) распадается на 2 системы:
$$T_i(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_m, S_{m+1}, ..., S_l) = 0, i = 1, ..., m, \tag{10}$$

$$T_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_m, S_{m+1}, ..., S_l) = 0, j = m + 1, ..., p. \tag{11}$$
Система (10) однозначно разрешима в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$ относительно вектор-функций $S_i = w_i\ (t, Y, S_{m+1}, \ldots, S_l)$, $i = 1, \ldots, m$, причем $w_i(t, Y, S_{m+1}, \ldots, S_l)$, $i = 1, \ldots, m$ непрерывны в области $J_1 \times J_2 \times J_4, J_1 \times J_2 \times J_4 \subseteq G_1 \times G_2 \times \tilde{G}_4, \tilde{G}_4 \subseteq \Re^{\ell-m}$, и точка $(0, 0, \ldots, 0) \in J_1 \times J_2 \times J_4$, функции $w_1, ..., w_m$ имеют в этой области непрерывные частные производные по всем переменным и выполнено условие $w_i(0, \ldots, 0) = 0, i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим случаи 1 и 2 более подробно.

***Случай 1:***

Функция $S = w(t, Y)$ — непрерывна и имеет непрерывные частные производные по всем переменным в окрестности точки $(0, 0) \in J_1 \times J_2$, $J_1 \times J_2 \subseteq G_1 \times G_2$, и удовлетворяет условиям $w_j(0, 0) = 0, j = 1, \ldots, l$.

Кроме того, если в $J_1 \times J_2$ — области непрерывности функции $w(t, Y)$, справедливо:
$$F(t, Y, w(t, Y), T(t, Y, w(T, Y)) \equiv 0,$$
тогда:
$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, w(t, Y)), \pi_1(t, Y, w(t, Y)) \equiv 0, \text{ при } (t, Y) \in J_1 \times J_2.$$
При $S_j = w_j(t, Y), j = 1, ..., \ell$, замена (3) принимает вид:
$$\begin{aligned} x &= \pi_0(t, Y, w_1(t, Y), ..., w_\ell(t, Y)), \\ \dot{x} &= \pi_1(t, Y, w_1(t, Y), ..., w_\ell(t, Y)), \end{aligned} \tag{12}$$
Дифференцируя по $t$ первое из соотношений (12) и приравнивая его второму, получим систему дифференциальных уравнений с неизвестной вектор-функцией $Y(t)$ вида:
$$\begin{aligned} &\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \pi_0}{\partial Y_j} Y_j' + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left( \sum_{m=1}^{k} \frac{\partial w_i}{\partial Y_m} Y_m' \right) = \\ &= \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k), ..., w_\ell(t, Y_1, ..., Y_k)). \end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим различные виды функций $\pi_i(t, Y, S), i = 0, 1$, которые с учетом условия связи (6) позволят разрешить задачу (1) с дополнительным условием (2) относительно производной новой неизвестной функции.

**1.1.** Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y), \end{cases} \tag{14}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \varphi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4): $\psi_1(0) = 0$ и $\psi_2(0, 0) = 0$. Система (13) имеет вид:

$$\varphi_1^{'}(t)Y + \varphi_1(t)Y^{'} + \psi_1^{'}(t) = \varphi_2(t, Y)w(t, Y) + \psi_2(t, Y).$$

Т. е. вид:

$$A_1(t)Y^{'} = B_1(t)Y + f_1(t, Y), \tag{15}$$

где $A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = -\varphi_1^{'}(t);\ f_1(t, Y) = \psi_2(t, Y) - \psi_1^{'}(t) + \varphi_2(t, Y)w(t, Y)$.

В итоге от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши

$$\begin{cases} A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{16}$$

Если матрица $\varphi_1(t) = A_1(t) = A_1$ постоянная при $t \in G_1,\ A_1 \in \Re^{n\times k}$, то матрица $B_1 = 0$ и задача (16) принимает вид:

$$\begin{cases} A_1Y' = f_1(t, Y) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases}$$

**1.2**. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi(t, Y). \end{cases} \tag{17}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\xi : G_1\times$ $\times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t, Y)$, $\xi(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4):

$$\psi_1(0) = 0, \quad \xi(0, 0) = 0.$$

Система (13) примет вид (15). Тогда от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче вида (16), где

$$A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t, Y) = \psi_2(t, Y)w(t, Y) - \psi_1^{'}(t) + \xi(t, Y).$$

Если матрицы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ постоянны при $t \in G_1$, то в системе (16) матрицы $A_1(t)$ и $B_1(t)$ будут постоянными.

**1.3.** Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t)S + \xi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi_2(t, Y). \end{cases} \tag{18}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\xi_1 : G_1 \to \Re^n, \xi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t), \xi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t), \psi_2(t,Y), \xi_2(t,Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4):

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0,0) = 0.$$

Используя систему (6) и заданные функции $\pi_i, i = 0,1$ в (18), получим ветвь для задачи Коши (1) с дополнительным условием (2):

$$\varphi_1'(t)Y + \varphi_1(t)Y' + \psi_1^{'}(t)w(t,Y) + \psi_1(t)w_t^{'}(t,Y) + \psi_1(t)w_Y^{'}(t,Y)Y' + \xi_1^{'}(t) =$$
$$= \varphi_2(t)Y + \psi_2(t,Y)w(t,Y) + \xi_2(t,Y).$$

Тогда получим систему:

$$A_1(t,Y)Y' = B_1(t)Y + f_1(t,Y),$$

где $A_1(t,Y) = \varphi_1(t) + \psi_1(t)w_Y'(t,Y); B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$

$$f_1(t,Y) = \psi_2(t,Y)w(t,Y) - \psi_1(t)w_t'(t,Y) - \xi_1'(t) + \xi_2(t,Y) - \psi_1'(t)w(t,Y).$$

В итоге от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши вида:

$$\begin{cases} A_1(t,Y)Y' = B_1(t)Y + f_1(t,Y), \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{19}$$

**1.4.** Пусть функции $\pi_i, i = 0,1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)S + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t,Y)S + \psi_2(t,Y). \end{cases} \tag{20}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t,Y), \psi_2(t,Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию (4):

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0,0) = 0.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (20) по $t$, получим:

$$(\pi_0)_t' = \varphi_1'(t)w(t,Y) + \varphi_1(t)w_t'(t,Y) + \varphi_1(t)w_Y'(t,Y)Y' + \psi_1'(t).$$

Тогда получим систему:

$$A_1(t,Y)Y' = B_1(t,Y),$$

где

$$A_1(t,Y) = \varphi_1(t)w_Y'(t,Y);$$

$$B_1(t,Y) = -\varphi_1'(t)w(t,Y) - \varphi_1(t)w_t'(t,Y) - \psi_1^{'}(t) + \varphi_2(t,Y)w(t,Y) + \psi_2(t,Y).$$

Тогда задача Коши (1) с дополнительным условием (2) свелась к задаче Коши вида:

$$\begin{cases} A_1(t,Y)Y' = B_1(t,Y) \\ Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{21}$$

В итоге справедлива:

**Теорема 1.** *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функция* $\Phi : D \longrightarrow \Re^m$ *— непрерывна в* $D$*;*

2) *существуют такие непрерывно-дифференцируемая функция* $\pi_0$*, непрерывная функция* $\pi_1$ *при* $(t, Y, S) \in G_1 \times G_2 \times G_3$*, удовлетворяющие условию (4), что функция* $T$ *удовлетворяет условию* $\boldsymbol{A}$*;*

3) *справедливо тождество:*

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, \omega(t, Y)), \pi_1(t, Y, \omega(t, Y))) \equiv 0,$$

*при* $(t, Y) \in J_1 \times J_2$.

*Тогда:*

a) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (14) или (17), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (16);*

b) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (18), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (19);*

c) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (20), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (21).*

Теперь рассмотрим ***случай 2***, здесь появляются две логические ситуации относительно переменных $S_j, j = 1, \ldots, p$.

Функции $w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell)$, $j = 1, \ldots, p$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные по всем переменным в окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0) \in J_1 \times J_2 \times J_3$, и удовлетворяет условию $w_j(0, 0, \ldots, 0) = 0$, где $j = 1, \ldots, p$.

Кроме того, если в области непрерывности функций $w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_l)$, $j = 1, \ldots, p$, справедливо:

$$\begin{gathered} F(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell)), \\[1em] T(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell)) \equiv 0, \end{gathered}$$

тогда:

$$\begin{gathered} \Phi(t, \pi_0(t, Y_1 ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell), \\ \pi_1(t, Y_1 ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell))) \equiv 0, \end{gathered}$$

при $(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell) \in J_1 \times J_2 \times J_3$.

При помощи функций $w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell)$, $j = 1, \ldots, p$, осуществляется переход от системы (1) к системе, разрешенной или частично разрешенной относительно производных.

При $S_j = w_j(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell)$, $j = 1, \ldots, p$, замена (3) принимает вид:

$$\begin{cases} x = \pi_0(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ \qquad w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell), \\ \dot{x} = \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ..., \\ \qquad w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell), \end{cases} \tag{22}$$

Дифференцируя первое из соотношений (22) по $t$ и приравнивая его второму, получим систему дифференциальных уравнений (6) с неизвестной функцией $Y(t)$. Здесь возможны две логические ситуации.

*Первая ситуация:*

Считаем $S_{p+1}, ..., S_l$ — параметрами, тогда система (6) имеет вид:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \pi_0}{\partial Y_j} Y_j' + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left( \sum_{m=1}^{k} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial Y_m} Y_m' \right) =$$

$$= \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), ...,$$
$$w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}, ..., S_\ell), S_{p+1}, ..., S_\ell).$$

*Вторая ситуация:*

Считаем, что $S_j = S_j(t)$, $j = p+1, \ldots, l$. Тогда система дифференциальных уравнений (6) примет вид:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \pi_0}{\partial Y_j} Y_j' + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left( \sum_{m=1}^{k} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial Y_m} Y_m' \right) +$$

$$+ \sum_{j=p+1}^{l} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} S_j' + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \pi_0}{\partial S_j} \cdot \left( \sum_{m=p+1}^{l} \cdot \frac{\partial w_j}{\partial S_m} S_m' \right) =$$
$$= \pi_1(t, Y_1, ..., Y_k, w_1(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}(t), ..., S_\ell(t)), ...,$$
$$w_p(t, Y_1, ..., Y_k, S_{p+1}(t), ..., S_\ell(t)), S_{p+1}(t), ..., S_\ell(t)).$$

Рассмотрим различные виды функций $\pi_i(t, Y_1, ..., Y_k, S_1, ..., S_l), i = 0, 1,$ которые с учетом (22) позволят разрешить задачу Коши (1) с дополнительным условием (2) относительно производной новой неизвестной функции.

Рассмотрим некоторые виды функций $\pi_i, i = 0, 1$.

**2.1.** Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y), \end{cases} \tag{23}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n$, $\varphi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times \ell}$, $\psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0, 0) = 0.$$

Используя систему (6) и функции $\pi_i, i = 0, 1$ в (23), получим:

$$\varphi_1'(t)Y + \varphi_1(t)Y' + \psi_1'(t) = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y),$$

где $S = col(S_1, \ldots, S_p, S_{p+1}, \ldots, S_\ell)$, причем $S_j = w_j(t, Y, S_{p+1}, \ldots, S_\ell), j = 1, \ldots, p$. Получим систему вида:

$$A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), \tag{24}$$

где $A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = -\varphi_1^{'}(t);$

$$f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) = \psi_2(t, Y) - \psi_1^{'}(t) + \varphi_2(t, Y)col(w_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), ...,$$

$$w_p(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), S_{p+1}, ..., S_\ell).$$

Таким образом, от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши

$$\begin{cases} A_1(t)Y' = B_1(t)Y + f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ \qquad Y(t) \to 0, t \to 0. \end{cases} \tag{25}$$

**2.2**. Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi(t, Y), \end{cases} \tag{26}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^n, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}, \xi : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t), \psi_2(t, Y)$, $\xi(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \xi(0, 0) = 0.$$

Тогда от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче вида (25), где

$$A_1(t) = \varphi_1(t); B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell) = \psi_2(t, Y)col(w_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), ...,$$

$$w_p(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l), S_{p+1}, ..., S_l) - \psi_1^{'}(t) + \xi(t, Y).$$

**2.3.** Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)Y + \psi_1(t)S + \xi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t)Y + \psi_2(t, Y)S + \xi_2(t, Y), \end{cases} \tag{27}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times k}$, $\psi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1 \to \Re^{n\times k}, \psi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^{n\times l}$, $\xi_1 : G_1 \to \Re^n, \xi_2 : G_1 \times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t), \xi_1(t)$ — непрерывно-дифференцируемы, $\varphi_2(t), \psi_2(t, Y), \xi_2(t, Y)$ — непрерывны в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0, 0) = 0.$$

Используя систему (6) и заданные функции $\pi_i, i = 0, 1$ в (27), получим ветвь для задачи Коши (1) с дополнительным условием (2).

*Первая ситуация:* считаем $S_{p+1}, ..., S_l$ — параметрами. Пусть:

$$\Phi_i(t) = \begin{pmatrix} \varphi'_{i_{11}}(t) & \dots & \varphi'_{i_{1k}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{i_{n1}}(t) & \dots & \varphi'_{i_{nk}}(t) \end{pmatrix}, i = 1, 2$$

$$\Psi_1(t) = \begin{pmatrix} \psi_{1_{11}}(t) & \dots & \psi_{1_{1l}}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{1_{n1}}(t) & \dots & \psi_{1_{nl}}(t) \end{pmatrix}, \Psi_2(t, Y) = \begin{pmatrix} \psi_{2_{11}}(t, Y) & \dots & \psi_{2_{1l}}(t, Y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{2_{n1}}(t, Y) & \dots & \psi_{2_{nl}}(t, Y) \end{pmatrix},$$

$$W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) = \begin{pmatrix} w_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ \vdots \\ w_p(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial W_i(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)}{\partial Y_j}\right]_{\substack{i=1,...,p, \\ j=1,...,k}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial \omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_1} & \dots & \frac{\partial \omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_k} \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial W_i(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)}{\partial S_g}\right]_{\substack{i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_{p+1}} & \dots & \frac{\partial \omega_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_{p+1}} & \dots & \frac{\partial \omega_p(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_l} \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем:

$$\Phi'_1(t) \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} + \Phi_1(t) \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} + \Psi'_1(t) \begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} +$$

$$+\Psi_1(t) \begin{pmatrix} \left(W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)\right)'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \Psi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right]_{\substack{i=1,...,p, \\ j=1,...,k}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t) \end{pmatrix} = \Phi_2(t) \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} + \Psi_2(t,Y) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y) \end{pmatrix}.$$

Тогда получим систему:

$$A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)Y' = B_1(t)Y + f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell), \tag{28}$$

где

$$A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell) = \Phi_1(t) + \Psi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell) = \Psi_2(t,Y) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y) \end{pmatrix} -$$

$$-\Psi_1^{'}(t) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} - \Psi_1(t) \begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t) \end{pmatrix}.$$

*Вторая ситуация:*
Считаем, что $S_j = S_j(t)$, $j = p+1,\ldots,l$. Тогда система дифференциальных уравнений (6) примет вид:

$$\Phi_1^{'}(t) \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix} + \Phi_1(t) \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} + \Psi_1^{'}(t) \begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t) \end{pmatrix} +$$

$$+\Psi_1(t) \begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ S'_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S'_l(t) \end{pmatrix} + \Psi_1(t) \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y'_1 \\ \vdots \\ Y'_k \end{pmatrix} +$$

$$+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] & \begin{matrix} i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S'_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S'_l(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t) \end{pmatrix}=$$

$$=\Phi_2(t)\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix}+\Psi_2(t,Y)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y) \end{pmatrix}.$$

Тогда получим систему (28),

где $A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)=\Phi_1(t)+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$B_1(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1^{'}(t);$$

$$f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)=\Psi_2(t,Y)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \xi'_{2_1}(t,Y) \\ \vdots \\ \xi'_{2_n}(t,Y) \end{pmatrix}-$$

$$-\Psi_1^{'}(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S_l(t) \end{pmatrix}-\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] & \begin{matrix} i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S'_{p+1}(t) \\ \vdots \\ S'_l(t) \end{pmatrix}-$$

$$-\Psi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t^{'} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \xi'_{1_1}(t) \\ \vdots \\ \xi'_{1_n}(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью преобразований от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) перешли к задаче Коши вида:

$$\begin{cases} A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell)Y'=B_1(t)Y+f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell), \\ Y(t)\to 0, t\to 0, \end{cases} \tag{29}$$

где $S_{p+1},...,S_\ell$ — либо функции, зависящие от $t$, либо параметры.

**2.4.** Пусть функции $\pi_i, i = 0, 1$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \pi_0 = \varphi_1(t)S + \psi_1(t) \\ \pi_1 = \varphi_2(t, Y)S + \psi_2(t, Y), \end{cases} \tag{30}$$

где $\varphi_1 : G_1 \to \Re^{n\times l}, \varphi_2 : G_1\times G_2 \to \Re^{n\times l}, \psi_1 : G_1 \to \Re^n, \psi_2 : G_1\times G_2 \to \Re^n$, причем $\varphi_1(t), \psi_1(t)$ — непрерывны, $\varphi_2(t, Y), \psi_2(t, Y)$ — непрерывны и дифференцируемы в соответствующих областях.

Согласно условию 4:

$$\psi_1(0) = 0, \quad \psi_2(0, 0) = 0.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (30) по $t$, и при условии, что $S_{p+1}, ..., S_l$ — параметры, получим:

$$(\pi_0)'_t = \varphi_1'(t)\begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \varphi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l))'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i = 1, ..., p, \\ j = 1, ..., k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1' \\ \vdots \\ Y_k' \end{pmatrix} + \psi_1'(t).$$

Тогда задача Коши (1) с дополнительным условием (2) примет вид:

$$\begin{cases} A_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l)Y' = f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ Y(t) \to 0, t \to 0, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$A_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell) = \varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] \begin{matrix} i = 1, ..., p, \\ j = 1, ..., k \end{matrix} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$f_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) = -\varphi_1'(t)\begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} -$$

$$-\varphi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l))'_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \psi_1'(t) + \varphi_2(t, Y)\begin{pmatrix} W(t, Y, S_{p+1}, ..., S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \psi_2(t, Y).$$

Далее будем рассматривать $S_j = S_j(t)$, $j = p+1, \ldots, l$. Тогда, продифференцировав первое уравнение системы (30) по $t$, получим:

$$\varphi_1'(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \varphi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] & \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1' \\ \vdots \\ Y_k' \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_1(t)+\Psi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] & \begin{matrix} i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{p+1}'(t) \\ \vdots \\ S_l'(t) \end{pmatrix} + \psi_1'(t).$$

Тогда задача Коши (1) с дополнительным условием (2) примет вид (31), где

$$A_1(t,Y,S_{p+1},...,S_\ell) = \varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial Y_j}\right] & \begin{matrix} i=1,...,p, \\ j=1,...,k \end{matrix} \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix};$$

$$f_1(t,Y,S_{p+1},...,S_l) = -\varphi_1'(t)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} -$$

$$-\varphi_1(t)\begin{pmatrix} (W(t,Y,S_{p+1},...,S_l))_t' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \varphi_1(t)\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial W_i(t,Y,S_{p+1},...,S_l)}{\partial S_g}\right] & \begin{matrix} i=1,...,p, \\ g=p+1,...,\ell \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{p+1}'(t) \\ \vdots \\ S_l'(t) \end{pmatrix} -$$

$$-\psi_1'(t) + \varphi_2(t,Y)\begin{pmatrix} W(t,Y,S_{p+1},...,S_l) \\ S_{p+1} \\ \vdots \\ S_l \end{pmatrix} + \psi_2(t,Y).$$

В итоге справедлива следующая теорема:

**Теорема 2.** *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *вектор-функция* $\Phi : D \longrightarrow \Re^m$ *— непрерывна в* $D$*;*
2) *существуют такие непрерывно-дифференцируемая функция* $\pi_0$*, непрерывная функция* $\pi_1$ *при* $(t, Y, S) \in G_1 \times G_2 \times G_3$*, удовлетворяющие условию (4), что функция* $T$ *удовлетворяет условию* ***A****;*
3) *справедливо тождество:*

$$\Phi(t, \pi_0(t, Y, \omega(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell), \pi_1(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell)) \equiv 0,$$

*при* $(t, Y, S_{p+1}, ..., S_\ell) \in J_1 \times J_2 \times J_3$.

*Тогда:*

a) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (23) или (26), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (25);*
b) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (27), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (29);*
c) *если функции* $\pi_i, i = 0, 1$ *имеют вид (30), то задача (1)–(2) приводится к задаче Коши вида (31).*

**Заключение.** В данной работе изучена задача Коши (1)–(2), предложен алгоритм или разрешимости системы в задаче (1) относительно производной, или разрешимости системы в задаче (1) относительно части компонент вектора производной. Рассмотрены два случая, в каждом из которых предложены виды функций $\pi_i, i = 0, 1$, при помощи которых можно осуществить переход от задачи Коши (1) с дополнительным условием (2) для ***случая 1*** к задачам Коши видов (16), (20), (22), и для ***случая 2*** к задачам Коши видов (25), (29), (31).


1. **Грабовская Р. Г.** Асимптотика систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных / Р. Г. Грабовская, Й. Диблик. – Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1786. – С. 78.
2. **Самкова Г. Е.** О разрешимости и асимптотическом поведении решений некоторых полуявных систем / Г. Е. Самкова // Reports of enlarge session of the seminar of L. N. Vekua Institute of applied mathematics. – Tbilisi, 1992. – V. 7, № 3.
3. **Самойленко А. М.** Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных / А. М. Самойленко // Укр. мат. журнал. – 2002. – Вип. 54, №11. – С. 1505–1517.
4. **Шарай Н. В.** Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь / Н. В. Шарай, Г. Є. Самкова // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – 2006. – Вип. 314–315. – С. 181–188.
5. **Шкиль Н. И.** Асимптотическое интегрирование систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – Киев: Вища школа, 1991. – 207 с.
6. **Diblic J.** On the an asymptotic behavior of solutions of a certain system of quasilinear differential equations not solved wich respect to derivatives / J. Diblic // Rici Math. Univ. Parma. – 1987. – № 13. – P. 413–419.

Mathematical Subject Classification: 11N37
UDC 511

**A. V. Lelechenko**
Odesa I. I. Mechnikov National University

# AVERAGE NUMBER OF SQUARES DIVIDING $mn$

**Лелеченко А. В. Середня кількість квадратів, що ділять $mn$.** Вивчається асимптотична поведінка двовимірної суматорної функції $\sum_{m,n\leqslant x} \tau_{1,2}(mn)$, де $\tau_{1,2}(n) = \sum_{ab^2=n} 1$, з використанням недавнього результату Балазарда, Наими та Петермана й методу комплексного інтегрування. Отримано асимптотичну формулу з залишковим членом $O(x^{10/7})$, який за умови гіпотези Рімана покращується до $O(x^{7/5})$.
**Ключові слова:** асиметрична функція дільників, багатовимірна суматорна функція.

**Лелеченко А. В. Среднее количество квадратов, делящих $mn$.** Исследуется асимптотическое поведение двумерной сумматорной функции $\sum_{m,n\leqslant x} \tau_{1,2}(mn)$, где $\tau_{1,2}(n) = \sum_{ab^2=n} 1$, с использованием недавнего результата Балазарда, Наими, Петермана и метода комплексного интегрирования. Получена асимптотическая формула с остаточным членом $O(x^{10/7})$, который при условии гипотезы Римана улучшается до $O(x^{7/5})$.
**Ключевые слова:** асимметрическая функция делителей, многомерная сумматорная функция.

**Lelechenko A. V. Average number of squares dividing $mn$.** We study the asymptotic behaviour of the two-dimensional summatory function $\sum_{m,n\leqslant x} \tau_{1,2}(mn)$, where $\tau_{1,2}(n) = \sum_{ab^2=n} 1$, using recent result of Balazard, Naimi, Pétermann and the complex integration method. An asymptotic formula with an error term $O(x^{10/7})$ is obtained. Under the Riemann hypothesis the error term can be improved up to $O(x^{7/5})$.
**Key words:** asymmetric divisor function, multidimensional summatory function.

## Introduction.

Let $f$ be a multiplicative arithmetic function of one variable. The asymptotic behaviour of $\sum_{n\leqslant x} f(n)$ is a classic problem of analytic number theory, deeply studied for various specific functions and classes. Let us consider the problem of estimating of $\sum_{m,n\leqslant x} f(mn)$.

The divisor function $\tau$ is a simple, but non-trivial case. Applying Busche—Ramanujan identity

$$\tau(mn) = \sum_{d\mid \gcd(m,n)} \tau(m/d)\tau(n/d)\mu(d) \tag{1}$$

we split variables and obtain

$$\sum_{m,n\leqslant x} \tau(mn) = \sum_{\substack{j,k,l \\ j,k\leqslant x/l}} \tau(j)\tau(k)\mu(l) = \sum_{l\leqslant x} \mu(l) \biggl( \sum_{j\leqslant x/l} \tau(j) \biggr)^2 .$$

Using Huxley's estimate [4] $\sum_{j\leqslant y} \tau(j) = y\log y + (2\gamma - 1)y + O(y^{\theta+\varepsilon})$, where $\theta = 131/416$, we regroup terms and get

$$\sum_{m,n\leqslant x} \tau(mn) = x^2 \Biggl( \Biggl( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l^2} \Biggr) \Bigl( \log^2 x + 2(2\gamma-1)\log x + (2\gamma-1)^2 \Bigr) - \\ - \Biggl( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)\log l}{l^2} \Biggr) \Bigl( 2\log x + 2(2\gamma-1) \Bigr) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)\log^2 l}{l^2} \Biggr) + O(x^{1+\theta+\varepsilon}). \quad (2)$$

It is natural to ask whether the main term can be derived analytically, by complex integration method. We will not go into details, but note that

$$\sum_{a,b=0}^{\infty} \tau(p^{a+b}) x^a y^b = \sum_{a,b=0}^{\infty} (a+b+1) x^a y^b = \frac{1-xy}{(1-x)^2(1-y)^2}, \quad |x|,|y|<1.$$

The series $\sum_{m,n=1}^{\infty} \tau(mn) m^{-z} n^{-w}$ converges absolutely for $\Re z, \Re w > 1$, so by multiplicativity in this region we have

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\tau(mn)}{m^z n^w} = \prod_p \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\tau(p^{a+b})}{p^{az+bw}} = \prod_p \frac{1-p^{-z-w}}{(1-p^{-z})^2(1-p^{-w})^2} = \frac{\zeta^2(z)\zeta^2(w)}{\zeta(z+w)}. \quad (3)$$

Achieved representation allows to compute the coefficient of multiple Laurent series for $x^{z+w} z^{-1} w^{-1} \sum_{m,n=1}^{\infty} \tau(mn) m^{-z} n^{-w}$ at $1/(z-1)(w-1)$, which appears coinciding with the main term of (2).

**Notation.** Letter $p$ with or without indexes denotes a prime number. We write $f \star g$ for the Dirichlet convolution

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d).$$

In asymptotic relations we use $\sim$, $\asymp$, Landau symbols $O$ and $o$, Vinogradov symbols $\ll$ and $\gg$ in their usual meanings. All asymptotic relations are given as an argument (usually $x$) tends to the infinity.

Letter $\gamma$ denotes Euler—Mascheroni constant. Everywhere $\varepsilon > 0$ is an arbitrarily small number (not always the same even in one equation).

As usual $\zeta(s)$ is the Riemann zeta-function. Real and imaginary components of the complex $s$ are denoted as $\sigma := \Re s$ and $t := \Im s$, so $s = \sigma + it$.

For a fixed $\sigma \in [1/2, 1]$ define

$$\mu(\sigma) := \limsup_{t\to\infty} \frac{\log\bigl|\zeta(\sigma+it)\bigr|}{\log t}.$$

**Auxiliary arguments.** We say that a function is symmetric if any permutation of arguments does not change its value.

Let $f$ be an arithmetic function of $r$ variables. The associated Dirichlet series are defined as

$$F(s_1,\ldots,s_r) = \sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty} f(n_1,\ldots,n_r) n_1^{-s_1}\cdots n_r^{-s_r}$$

and $(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ is called abscissas of absolute convergence if $F(s_1,\ldots,s_r)$ converges absolutely in the region $\Re s_1 > \sigma_1, \ldots, \Re s_r > \sigma_r$.

**Lemma 1.** *Let $f$ be a symmetric arithmetic function of $r$ variables and $(\sigma_a,\ldots,\sigma_a)$ are abscissas of absolute convergence of the associated Dirichlet series $F(s_1,\ldots,s_r)$. Define*

$$F_r^{\heartsuit}(\sigma,x,T) := \sum_{n_1,\ldots,n_r=1}^{\infty} \frac{|f(n_1,\ldots,n_r)|(n_1\cdots n_r)^{-\sigma}}{\min_{j=1,\ldots,r}(T|\log(x/n_j)|+1)}, \tag{4}$$

*and let*

$$\sum\nolimits^{*}_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} f(n_1,\ldots,n_r) := \sum_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} f(n_1,\ldots,n_r) h(x/n_1)\cdots h(x/n_r), \tag{5}$$

*where $h(y)=0$ for $0<y<1$, $h(1)=1/2$ and $h(y)=1$ otherwise.*

*For $x \geqslant 2$, $T\geqslant 2$, $\sigma\leqslant\sigma_a$, $\delta>0$, $\kappa=\sigma_a-\sigma+\delta/\log x$, $1=N_1\leqslant\cdots\leqslant N_r$, $1=M_1\leqslant\cdots\leqslant M_r$ and $N_0 := N_1+\cdots+N_r$ we have*

$$\begin{aligned}\Bigg| \sum\nolimits^{*}_{n_1,\ldots,n_r\leqslant x} \frac{f(n_1,\ldots,n_r)}{(n_1\cdots n_r)^s} - &\\ - \frac{1}{(2\pi i)^r} \int\limits_{N_1\kappa-iM_1T}^{N_1\kappa+iM_1T} \cdots \int\limits_{N_r\kappa-iM_rT}^{N_r\kappa+iM_rT} F(s+w_1,\ldots,s+w_r) x^{w_1+\cdots+w_r} \frac{dw_1\cdots dw_r}{w_1\cdots w_r} \Bigg| &\ll \\ \ll x^{N_0(\sigma_a-\sigma)} F_r^{\heartsuit}(\sigma_a+\delta/\log x, x, T).&\end{aligned} \tag{6}$$

**Proof.** This is a result of Balazard, Naimi and Pétermann [1, Prop. 6].

**Lemma 2.** *Let $f(t)\geqslant 0$. If*

$$\int_1^T f(t)\,dt \ll g(T),$$

*where $g(T)=T^\alpha \log^\beta T$, $\alpha\geqslant 1$, then*

$$I(T) := \int_1^T \frac{f(t)}{t} dt \ll \begin{cases} \log^{\beta+1} T & \text{if } \alpha=1, \\ T^{\alpha-1}\log^\beta T & \text{if } \alpha>1. \end{cases}$$

**Proof.** Let us divide the interval of integration into parts:

$$\begin{aligned} I(T) \leqslant \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 T\rfloor -1} \int_{T/2^{k+1}}^{T/2^k} \frac{f(t)}{t} dt + g(2) < &\\ < \sum_{k=0}^{\log_2 T} \frac{1}{T/2^{k+1}} \int_1^{T/2^k} f(t)\,dt + g(2) \ll \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 T\rfloor -1} \frac{g(T/2^k)}{T/2^{k+1}}.&\end{aligned}$$

Now the lemma's statement follows from elementary estimates.

**Lemma 3.** *Let $\eta > 0$ be arbitrarily small. Then for growing $|t| \geqslant 3$*

$$\zeta(s) \ll \begin{cases} |t|^{1/2-(1-2\mu(1/2))\sigma}, & \sigma \in [0, 1/2], \\ |t|^{2\mu(1/2)(1-\sigma)}, & \sigma \in [1/2, 1-\eta], \\ |t|^{2\mu(1/2)(1-\sigma)} \log^{2/3} |t|, & \sigma \in [1-\eta, 1], \\ \log^{2/3} |t|, & \sigma \in [1, 1+\eta], \\ 1, & \sigma \geqslant 1+\eta. \end{cases} \tag{7}$$

**Proof.** Estimates follow from Phragmén—Lindelöf principle and estimates of $\zeta(s)$ at $\sigma = 0, 1/2, 1$. See Titchmarsh [7, Ch. 5] or Ivić [5, Ch. 7.5] for details.

**Lemma 4.**

$$\int_1^T \left|\zeta(\sigma+it)\right|^2 dt \ll T, \qquad 1/2 < \sigma < 1.$$

**Proof.** See Ivić [5, (1.76)].

## Main Results

Out paper is devoted to

$$\sum_{m,n \leqslant x} \tau_{1,2}(mn),$$

where $\tau_{1,2}(n) = \sum_{ab^2=n} 1$. This function is not as lucky as $\tau$ and does not posses representation like (1), so there is no easy way to split $m$ and $n$.

The main result is

**Theorem 1.**

$$\sum_{m,n \leqslant x} \tau_{1,2}(mn) = C_1 x^2 + C_2 x^{3/2} + O(x^{10/7+\varepsilon}),$$

*where $C_1 = 2.995\ldots$, $C_2 = -5.404\ldots$ are computable constants.*

This theorem is analogous to the estimate by Graham and Kolesnik [2]

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_{1,2}(n) = \zeta(2)x + \zeta(1/2)x^{1/2} + O(x^{\beta+\varepsilon}), \quad \beta = 1057/4785 \approx 0.2209.$$

### 1. Reduction to complex integration

Applying Lemma 1 with $r = 2$, $f(n_1, n_2) = \tau_{1,2}(n_1 n_2)$, $\sigma = s = 0$, $\sigma_a = 1$, $N_1 = N_2 = M_1 = M_2 = 1$, $\delta = 1$, $\log T \asymp \log x$ and writing $(m, n, z, w, c)$ instead of $(n_1, n_2, w_1, w_2, \kappa)$ for convenience we deduce from (6) that

$$\sum_{m,n \leqslant x}{}^{*} \tau_{1,2}(mn) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{[c-iT, c+iT]^2} F(z, w) \frac{x^{z+w}}{zw} dz\, dw + O\left(x^2 F_2^{\heartsuit}(c, x, T)\right), \tag{8}$$

where $c = 1 + 1/\log x$ and

$$F(z, w) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\tau_{1,2}(mn)}{m^z n^w}, \qquad \Re z, \Re w > 1. \tag{9}$$

By (4) for non-integer $x$

$$TF_2^{\heartsuit}(c,x,T) \ll \sum_{m,n} \frac{\tau_{1,2}(mn)}{(mn)^c \min\bigl(|\log\frac{x}{n}|, |\log\frac{x}{m}|\bigr)} \ll \sum_{\substack{|\log\frac{x}{n}|\geqslant 1\\ |\log\frac{x}{m}|\geqslant 1}} \frac{\tau_{1,2}(mn)}{(mn)^c} +$$

$$+ \sum_{\substack{|\log\frac{x}{n}|\leqslant 1\\ |\log\frac{x}{m}|\geqslant 1}} \frac{\tau_{1,2}(mn)}{(mn)^c |\log\frac{x}{n}|} + \sum_{\substack{|\log\frac{x}{n}|\leqslant 1\\ |\log\frac{x}{m}|\leqslant 1}} \frac{\tau_{1,2}(mn)}{(mn)^c \min\bigl(|\log\frac{x}{n}|, |\log\frac{x}{m}|\bigr)} :=$$

$$:= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad (10)$$

We have $\Sigma_1 \ll \sum_{m,n=1}^{\infty} \tau_{1,2}(mn)/(mn)^c = F(c,c)$ and we will show below in (19) that

$$F(c,c) \ll \frac{1}{(c-1)^2} = \log^2 x. \quad (11)$$

Further, for $x$ such that $|\log\frac{x}{n}| \leqslant 1$ we have $|\log\frac{x}{n}| \geqslant c|x-n|/x$ for $c = 1/(e-1)$. Then

$$\Sigma_2 \ll \sum_{x/e\leqslant n\leqslant xe} \sum_{m} \frac{\tau_{1,2}(mn)x}{(mn)^c|x-n|}.$$

Note that $\tau_{1,2}(mn) \leqslant \tau(mn) \leqslant \tau(m)\tau(n)$, because $\tau$ is completely submultiplicative. Thus

$$\Sigma_2 \ll x \sum_{x/e\leqslant n\leqslant xe} \frac{\tau(n)}{n^c|x-n|} \sum_{m} \frac{\tau(m)}{m^c}.$$

Here

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) m^{-c} = \zeta^2(c) \ll (c-1)^{-2} = \log^2 x.$$

Let $M(y) = \max_{n\leqslant y} \tau(n)$. We have

$$\Sigma_2 \ll xM(xe)\log^2 x \sum_{x/e\leqslant n\leqslant xe} \frac{1}{n^c|x-n|},$$

where the last sum is $\ll x^{-c}\log x \ll x^{-1}\log x$, so finally

$$\Sigma_2 \ll M(xe)\log^3 x. \quad (12)$$

Now consider $\Sigma_3$. Defining $M_{1,2}(y) = \max_{n\leqslant y} \tau_{1,2}(n)$ we obtain

$$\Sigma_3 \ll \sum_{x/e\leqslant n\leqslant m\leqslant xe} \frac{\tau_{1,2}(mn)x}{(mn)^c \min\bigl(|x-n|, |x-m|\bigr)} \ll$$

$$\ll \frac{xM_{1,2}(x^2e^2)}{x^{2c}} \sum_{x/e\leqslant n\leqslant m\leqslant xe} \max\left(|x-n|^{-1}, |x-m|^{-1}\right) \ll M_{1,2}(x^2e^2)\log x. \quad (13)$$

Standard estimates [3, Th. 315] give $M_{1,2}(y) \leqslant M(y) \ll y^{\varepsilon}$, so substituting (11), (12) and (13) into (10) we obtain

$$F_2^{\heartsuit}(c,x,T) \ll T^{-1}\bigl(M(xe)\log^3 x + M_{1,2}(x^2e^2)\log x\bigr) \ll T^{-1}x^{\varepsilon}. \tag{14}$$

Note also that by definition (5)

$$\Biggl| \sum_{m,n\leqslant x} \tau_{1,2}(mn) - \sum_{m,n\leqslant x}{}^{*} \tau_{1,2}(mn) \Biggr| \ll \sum_{n\leqslant x} \tau_{1,2}(\lfloor x \rfloor n) \ll M(x^2)x. \tag{15}$$

Combining (8), (14) and (15) we get

$$\sum_{m,n\leqslant x} \tau_{1,2}(mn) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{[c-iT,c+iT]^2} F(z,w)\frac{x^{z+w}}{zw} dz\, dw + \\ + O\bigl(x^{1+\varepsilon} + T^{-1}x^{2+\varepsilon}\bigr). \tag{16}$$

**2. Double Dirichlet series for $\tau_{1,2}$**

Let us return to (9) and extract a product of zeta-functions from $F(z,w)$. Define

$$f(x,y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} \tau_{1,2}(p^{a+b})x^a y^b, \qquad |x|,|y|<1. \tag{17}$$

Using identity

$$\tau_{1,2}(p^a) - \tau_{1,2}(p^{a-1}) - \tau_{1,2}(p^{a-2}) + \tau_{1,2}(p^{a-3}) = 0$$

multiply both sides of (17) by $(1-x)(1-x^2)$:

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1-x^2)f(x,y) = \\
&\quad = \sum_{a=3}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\bigl(\tau_{1,2}(p^{a+b}) - \tau_{1,2}(p^{a+b-1}) - \tau_{1,2}(p^{a+b-2}) + \tau_{1,2}(p^{a+b-3})\bigr)x^a y^b + \\
&\qquad + \sum_{b=0}^{\infty} y^b \left((1-x-x^2)\tau_{1,2}(p^b) + (1-x)\tau_{1,2}(p^{b+1})x + \tau_{1,2}(p^{b+2})x^2\right) = \\
&\qquad\qquad = \sum_{b=0}^{\infty} y^b \left((1-x-x^2)\tau_{1,2}(p^b) + (x-x^2)\tau_{1,2}(p^{b+1})x + x^2\tau_{1,2}(p^{b+2})\right)
\end{aligned}$$

and further

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1-x^2)(1-y)(1-y^2)f(x,y) = \\
&\qquad = (1-x-x^2)\bigl((1-y-y^2) + (1-y)y + 2y^2\bigr) + \\
&\qquad + (x-x^2)\bigl((1-y-y^2) + 2(1-y)y + 2y^2\bigr) + \\
&\qquad + x^2\bigl(2(1-y-y^2) + 2(1-y)y + 3y^2\bigr) = \\
&\qquad\qquad = 1 + xy - x^2y - xy^2,
\end{aligned}$$

which induces

$$f(x,y) = \frac{1+xy-x^2y-xy^2}{(1-x)(1-x^2)(1-y)(1-y^2)} = \\ = \frac{1-x^2y-xy^2-x^2y^2+x^3y^2+x^2y^3}{(1-x)(1-x^2)(1-y)(1-y^2)(1-xy)}. \quad (18)$$

Representation (18) immediately implies that

$$F(z,w) = \prod_p f(p^{-z}, p^{-w}) = \zeta(z)\zeta(2z)\zeta(w)\zeta(2w)\zeta(z+w)G(z,w) = \\ = \frac{\zeta(z)\zeta(2z)\zeta(w)\zeta(2w)\zeta(z+w)}{\zeta(2z+w)\zeta(2w+z)} H(z,w), \quad (19)$$

where series $H(z,w)$ converges absolutely in the region $\Re(2z+2w) > 1$. Definitely $G(z,w)$ converges absolutely for $(z,w) \in Q := \{\Re z \geqslant 1/3, \Re w \geqslant 1/3\}$.

Product of zeta-functions (19) shows that inside of the region $Q$ function $F(z,w)$ has poles along lines $z=1$, $z=1/2$, $w=1$, $w=1/2$ and $z+w=1$. All of them are of the first order, except poles at $(1,1)$, $(1,1/2)$, $(1/2,1)$, which are of the second order, and a pole at $(1/2,1/2)$, which is of the third order.

Both (3) and (19) are partial cases of a general rule, which will be stated as a lemma.

**Lemma 5.** *Let $\tau_{1,k}(n) = \sum_{ab^k=n} 1$. Then for $\Re z, \Re w > 1$ we have*

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\tau_{1,k}(mn)}{m^z n^w} = \zeta(z)\zeta(w) \frac{\prod_{l=0}^{k} \zeta\big(lz+(k-l)w\big)}{\prod_{l=1}^{k} \zeta\big(lz+(k+1-l)w\big)} H_k(z,w), \quad (20)$$

*where the series $H_k$ converges absolutely for $\Re z, \Re w > 1/(k+2)$.*

**Proof.** Cases $k=1$ and $k=2$ has been proven above, so we consider $k>2$ only. Let

$$f(x,y) = \sum_{a,b=0}^{\infty} \tau_{1,k}(p^{a+b}) x^a y^b, \qquad |x|, |y| < 1.$$

For a monomial $M$ let $[M]f(x,y)$ be a coefficient at $M$ in the series $f$. Here

$$[x]f(x,y) = [y]f(x,y) = \tau_{1,k}(p) = 1,$$

so let us define

$$g(x,y) = (1-x)(1-y)f(x,y) = \\ = \sum_{a,b=1}^{\infty} \big(\tau_{1,k}(p^{a+b}) - 2\tau_{1,k}(p^{a+b-1}) + \tau_{1,k}(p^{a+b-2})\big) x^a y^b + \\ + \sum_{a=1}^{\infty} \big(\tau_{1,k}(p^a) - \tau_{1,k}(p^{a-1})\big)(x^a + y^a) + 1.$$

We have

$$\tau_{1,k}(p^a) = \begin{cases} 1, & a < k, \\ 2, & k \leqslant a < 2k, \end{cases}$$

so one can verify that

$$[x^a y^b] g(x,y) = \begin{cases} 0, & a+b < k, \\ 1, & a+b = k, \\ 0, & a+b = k+1, \ ab = 0 \\ -1, & a+b = k+1, \ ab > 0. \end{cases}$$

Thus

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \frac{\prod_{l=1}^{k} (1 - x^l y^{k+1-l})}{\prod_{l=0}^{k} (1 - x^l y^{k-l})} h(x,y),$$

where all monomials of the series $h(x,y)$ has degree at least $k+2$.

**3. Path of integration and the main term**

Our aim is to translate the domain of integration in (16) from $[c-iT, c+iT]^2$ till $[b-iT, b+iT]^2$, where $b = 1/3$. This is trickier than translating in the one-dimensional case, because a hyperrectangle $R$ with opposite vertices $(b-iT, b-iT)$ and $(c+iT, c+iT)$ has 24 two-dimensional faces. Figure 1 contains a schematic plain projection of $R$ with 16 vertices and 32 edges marked.

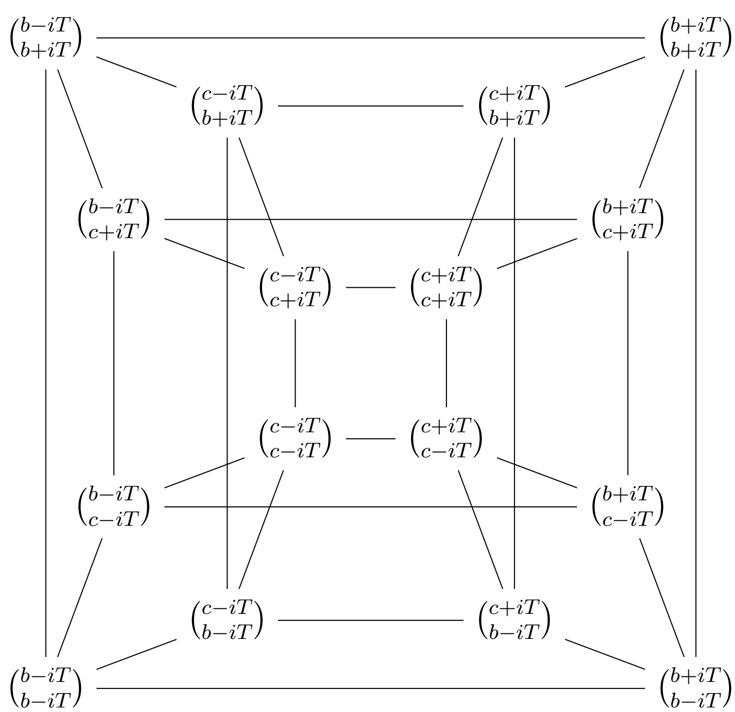


Fig 1. The hyperrectangle $R$ with opposite vertices $(b-iT, b-iT)$ and $(c+iT, c+iT)$

Denote $L(z,w) = G(z,w)x^{z+w}z^{-1}w^{-1}$. This function has the same poles in $R$ as $G(z,w)$ has. Note that (on contrary with integration by one-dimensional contour) poles of the first order do not induce divergence of integrals by plane domains: e. g., $\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\pi < \infty$, however $\int_{x^2\leqslant 1} \frac{dx}{x} = \infty$. Only poles of the second and higher orders are worth to pay attention.

Let $E(x)$ be the integral of $L(z,w)$ over all faces of $R$ except $[c-iT, c+iT]^2$. By residue theorem [6]

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{[c-iT,c+iT]^2} L(z,w)\,dz\,dw =$$
$$= \Big( \operatorname*{res}_{z=w=1} + \operatorname*{res}_{\substack{z=1\\ w=1/2}} + \operatorname*{res}_{\substack{z=1/2\\ w=1}} + \operatorname*{res}_{z=w=1/2} \Big) L(z,w) + O(E(x)). \quad (21)$$

Expanding $L(z,w)$ into Laurent series in two variables we get

$$\operatorname*{res}_{z=w=1} L(z,w) = \zeta^3(2)G(1,1)x^2, \quad (22)$$

$$\operatorname*{res}_{\substack{z=1\\ w=1/2}} L(z,w) = \operatorname*{res}_{\substack{z=1/2\\ w=1}} L(z,w) = \zeta(2)\zeta(\tfrac12)\zeta(\tfrac32)G(1,\tfrac12)x^{3/2}, \quad (23)$$

$$\operatorname*{res}_{z=w=1/2} L(z,w) \ll x\log x. \quad (24)$$

After substitution into (16) the residue at $(1/2, 1/2)$ will be absorbed by error term, so it is enough to have only upper bound. Inserting (22), (23) and (24) into (21) we get

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{[c-iT,c+iT]^2} L(z,w)\,dz\,dw = C_1x^2 + C_2x^{3/2} + O(x\log x + E(x)), \quad (25)$$

where

$$C_1 = \frac{\pi^6}{216}G(1,1), \qquad C_2 = \frac{\pi^2}{3}\zeta(\tfrac12)\zeta(\tfrac32)G(1,\tfrac12).$$

Let us calculate numerical values of $C_1$ and $C_2$. Applying formal identity

$$\frac{F(z,w)}{\zeta(z)\zeta(w)} = \prod_p (1-p^{-z})(1-p^{-w}) \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\tau_{1,2}(p^{a+b})}{p^{a+b}}$$

at $z=w=1$ we get

$$C_1 = \operatorname*{res}_{z=w=1} L(z,w) = \prod_p (1-p^{-1})^2 \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\tau_{1,2}(p^{a+b})}{p^{a+b}} = 2.995\ldots$$

The product converges absolutely because

$$(1-p^{-1})^2 \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\tau_{1,2}(p^{a+b})}{p^{a+b}} = \big(1 - 2p^{-1} + O(p^{-2})\big)\big(1 + 2p^{-1} + O(p^{-2})\big) =$$
$$= 1 + O(p^{-2}).$$

Similarly

$$\frac{F(z,w)}{\zeta(z)\zeta(w)\zeta(2z)} = \prod_p (1-p^{-z})(1-p^{-w})(1-p^{-2z}) \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\tau_{1,2}(p^{a+b})}{p^{a+b}}$$

implies

$$C_2 = 2 \operatorname*{res}_{\substack{z=1\\ w=1/2}} L(z,w) =$$

$$= 2\zeta(1/2) \prod_p (1-p^{-1})^2(1-p^{-1/2}) \sum_{a,b=0}^{\infty} \frac{\tau_{1,2}(p^{a+b})}{p^{a+b/2}} = -5.404\ldots$$

**4. The error term**

Let us estimate $E(x)$. It was defined above to consist of integrals over 23 of 24 faces of the hyperectangle $R$, but due to the symmetry many of these integrals can be estimated in the same way.

In computations below we assume $x^{1/2} \ll T \ll x$, the exact value of $T$ will be specified later in (28).

There are 2 faces of form $[b-iT, b+iT] \times [c-iT, c+iT]$. We have

$$I_1 := \int_{b-iT}^{b+iT} \int_{c-iT}^{c+iT} L(z,w)\,dz\,dw \ll \iint\limits_{[1,T]^2} \zeta(b+it_1)\zeta(2b+2it_1) \times$$

$$\times \zeta(c+it_2)\zeta(2c+2it_2)\zeta\big(b+c+i(t_1+t_2)\big) x^{b+c} t_1^{-1} t_2^{-1} dt_1 dt_2.$$

By (7) we can estimate

$$\zeta(c+it_2)\zeta(2c+2it_2)\zeta\big(b+c+i(t_1+t_2)\big) \ll \log^{2/3} T \cdot 1 \cdot 1.$$

As soon as $x^{1/\log x} \ll 1$ we have $x^{b+c} \ll x^{4/3}$. Also $\int_1^T t_2^{-1} dt_2 \ll \log T$. Thus $I_1$ can be estimated as

$$I_1 \ll x^{4/3} \log^{5/3} T \int_1^T \zeta(b+it)\zeta(2b+2it) t^{-1} dt.$$

By functional equation for $\zeta$, Lemma 4 and Lemma 2

$$J := \int_1^T \zeta(b+it)\zeta(2b+2it)t^{-1}dt \ll \int_1^T t^{1/6}\zeta^2(2/3)t^{-1}dt \ll T^{1/6}\log T. \quad (26)$$

Then

$$I_1 \ll x^{4/3} T^{1/6} \log^{8/3} T. \quad (27)$$

We will show below in (40) that integrals over other faces (and so $E(x)$ as a whole) are less than either $I_1$ or $x^{2+\varepsilon}T^{-1}$, so $T$ should be chosen to equalize this two magnitudes:

$$T = x^{4/7}. \quad (28)$$

Substitute it into (16) and (25) to obtain the final error term $x^{10/7+\varepsilon}$, which approves the statement of the Theorem 1.

From here and till the end of the section we will omit factors $\ll x^\varepsilon$ in asymptotic estimates for the brevity: they do not influence the resulting error term.

There are 4 faces of form $[b-iT, b+iT] \times [b \pm iT, c \pm iT]$. We have

$$\begin{gathered}
I_2 := \int_{b-iT}^{b+iT} \int_{b+iT}^{c+iT} L(z,w)\, dz\, dw \ll \int_1^T \int_b^c \zeta(b+it)\zeta(2b+2it) \times \\
\times \zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+2iT)\zeta\bigl(b+\sigma+i(t+T)\bigr) x^{b+\sigma} t^{-1} T^{-1} d\sigma\, dt \ll \\
\ll x^{1/3} J T^{-1} \max_{\substack{\sigma\in[b,c]\\ t\in[1,T]}} \zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+2iT)\zeta\bigl(b+\sigma+i(t+T)\bigr) x^\sigma \ll \\
\ll x^{1/3} T^{-5/6} \max_{\sigma\in[b,c]} \zeta(\sigma+iT)\zeta(\sigma+1/3+iT)\zeta(2\sigma+iT) x^\sigma.
\end{gathered}$$

Splitting $[b,c]$ into intervals $[1/3,1/2]$, $[1/2,2/3]$, $[2/3,c]$ and estimating $\zeta(\sigma+iT) \times \zeta(\sigma+1/3+iT)\zeta(2\sigma+iT)x^\sigma$ on each of them separately, we get

$$I_2 \ll x^{1/3} T^{-5/6} (T^{\mu(1/3)+2\mu(2/3)} x^{1/2} + T^{\mu(1/2)+\mu(5/6)} x^{2/3} + T^{\mu(2/3)} x).$$

Utilizing rough estimate $\mu(1/2) \leqslant 1/6$ from [7, Th. 5.5] we get by (7) that

$$\mu(\sigma) \leqslant \begin{cases} 1/2 - 2\sigma/3, & \sigma \in [0,1/2], \\ (1-\sigma)/3, & \sigma \in [1/2,1] \end{cases} \tag{29}$$

and

$$\mu(1/3) \leqslant 5/18, \quad \mu(2/3) \leqslant 1/9, \quad \mu(5/6) \leqslant 1/18, \tag{30}$$

so

$$I_2 \ll x^{1/3} T^{-5/6} (T^{1/2} x^{1/2} + T^{2/9} x^{2/3} + T^{1/9} x) \ll x^{4/3}. \tag{31}$$

There is 1 face of form $[b-iT, b+iT]^2$. Applying (30) we have

$$\begin{gathered}
I_3 := \iint\limits_{[b-iT,b+iT]^2} L(z,w)\, dz\, dw \ll \iint\limits_{[1,T]^2} \zeta(b+it_1)\zeta(2b+2it_1) \times \\
\times \zeta(b+it_2)\zeta(2b+2it_2)\zeta\bigl(2b+i(t_1+t_2)\bigr) x^{2b} t_1^{-1} t_2^{-1} dt_1 dt_2 \ll \\
\ll x^{2/3} \iint\limits_{[1,T]^2} t_1^{5/18+1/9-1} t_2^{5/18+1/9-1} (t_1+t_2)^{1/9} dt_1 dt_2,
\end{gathered}$$

which implies

$$I_3 \ll x^{2/3} T^{8/9}, \tag{32}$$

which is less than $x^{4/3}$ by our choice of $T$ in (28).

There are 4 faces of form $[c-iT, c+iT]\times[b\pm iT, c\pm iT]$. We have

$$\begin{gathered}
I_4 := \int_{c-iT}^{c+iT}\int_{b+iT}^{c+iT} L(z,w)\,dz\,dw \ll \\
\ll \int_1^T \int_b^c \zeta(c+it)\zeta(2c+2it)\zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+2iT)\zeta\bigl(c+\sigma+i(t+T)\bigr)\times \\
\times x^{c+\sigma}t^{-1}T^{-1}d\sigma\,dt \ll xT^{-1}\int_b^c \zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+2iT)x^\sigma d\sigma. \quad (33)
\end{gathered}$$

Here

$$\int_b^c \zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+2iT)x^\sigma d\sigma \ll \max_{\sigma\in[b,c]} \zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+iT)x^\sigma.$$

For $\sigma\in[b,1/2]$ we have

$$\zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+iT)x^\sigma \ll T^{\mu(1/3)+\mu(2/3)}x^{1/2} \ll Tx^{1/3}. \quad (34)$$

Taking into account (29) for $\sigma\in[1/2,1]$ we get

$$\zeta(\sigma+iT)\zeta(2\sigma+iT)x^\sigma \ll T^{\mu(\sigma)}x^\sigma \ll x^{\mu(\sigma)+\sigma} \ll x^{(1+2\sigma)/3} \ll x. \quad (35)$$

Returning to (33) we get

$$I_4 \ll x^2T^{-1} + x^{4/3}. \quad (36)$$

There are 4 faces of form $[b\pm iT, c\pm iT]^2$. We have

$$\begin{gathered}
I_5 := \iint\limits_{[b+iT,c+iT]^2} L(z,w)\,dz\,dw \ll \max_{(z,w)\in[b+iT,c+iT]^2} L(z,w) \ll \\
\ll \max_{\sigma_1,\sigma_2\in[b,c]} \zeta(\sigma_1+iT)\zeta(2\sigma_1+2iT)\zeta(\sigma_2+iT)\zeta(2\sigma_2+iT)\zeta(\sigma_1+\sigma_2+2iT)\times \\
\times x^{\sigma_1+\sigma_2}T^{-2} \ll T^{2\mu(1/3)+3\mu(2/3)-2}x^2 \ll x^2T^{-1}. \quad (37)
\end{gathered}$$

Finally, there are 8 faces, which are parallel either to $z$- or $w$-plane, of form $[b-iT, c+iT]\times w$, where $w\in W := \{b\pm iT, c\pm iT\}$. We have

$$\begin{gathered}
I_6 := \iint\limits_{b-iT}^{c+iT} L(z,b+iT)\,dz \ll \int_1^T\int_b^c \zeta(\sigma+it)\zeta(2\sigma+2it)\zeta\bigl(\sigma+b+i(t+T)\bigr)\times \\
\times\zeta(b+iT)\zeta(2b+2iT)x^{\sigma+b}t^{-1}T^{-1}d\sigma\,dt \ll T^{\mu(1/3)+\mu(2/3)-1}x^{1/3}\times \\
\times \int_1^T\int_b^c \zeta(\sigma+it)\zeta(2\sigma+2it)\zeta(\sigma+1/3+iT)x^\sigma t^{-1}d\sigma\,dt.
\end{gathered}$$

Here

$$\zeta(\sigma+it)\zeta(2\sigma+2it)\zeta(\sigma+1/3+iT)x^\sigma t^{-1} \ll T^{\mu(1/3)+2\mu(2/3)-1}x,$$

so

$$I_6 \ll T^{\mu(1/3)+\mu(2/3)-1}x^{1/3}\int_1^T T^{\mu(1/3)+2\mu(2/3)-1}x\,dt \ll x^{4/3}. \quad (38)$$

Also

$$I_7 := \iint\limits_{b-iT}^{c+iT} L(z, c+iT)\, dz \ll \int_1^T \int_b^c \zeta(\sigma+it)\zeta(2\sigma+2it) \times$$
$$\times\, \zeta\big(\sigma+c+i(t+T)\big)\zeta(c+iT)\zeta(2c+2iT)x^{\sigma+c}t^{-1}T^{-1} d\sigma\, dt \ll$$
$$\ll xT^{-1} \int_1^T \int_b^c \zeta(\sigma+it)\zeta(2\sigma+2it)x^{\sigma}t^{-1} d\sigma\, dt$$

We derive from (34) and (35) that

$$\int_b^c \zeta(\sigma+it)\zeta(2\sigma+2it)x^{\sigma} d\sigma \ll tx^{1/3} + x,$$

so

$$I_7 \ll xT^{-1} \int_1^T (x^{1/3} + xt^{-1})dt \ll x^2T^{-1} + x^{4/3}. \tag{39}$$

Now summing up (27), (31), (32), (36), (37), (38), (39) we get

$$E(x) \ll x^{4/3}T^{1/6} + x^{2+\varepsilon}T^{-1}. \tag{40}$$

**Conclusion.**

Our result can be slightly improved under the Riemann hypothesis. In such case we have $\zeta^{\pm 1}(s) \ll x^{\varepsilon}$ for $\sigma > 1/2$ and $\mu(1/2) = 0$ due to [7, (14.2.5)–(14.2.6)]. Then (19) immediately induces $F(z,w) \ll x^{\varepsilon}\zeta(z)\zeta(w)$ for $\Re z, \Re w > 1/4$ and all double integrals, incorporated in $E(x)$, can be split and estimated by a product of two one-dimensional integrals. For $b = 1/4 + 1/\log x$ we obtain

$$\int_{b-iT}^{b+iT} \zeta(z)\frac{x^z}{z} dz \ll x^{1/4+\varepsilon}T^{1/4},$$
$$\int_{c-iT}^{c+iT} \zeta(z)\frac{x^z}{z} dz \ll x^{1+\varepsilon},$$
$$\int_{b\pm iT}^{c\pm iT} \zeta(z)\frac{x^z}{z} dz \ll (x^{1/2+\varepsilon}T^{1/4} + x^{1+\varepsilon})/T.$$

Then $E(x) \ll x^{5/4+\varepsilon}T^{1/4}$ and choice $T = x^{3/5}$ provides us with $\alpha = 7/5 = 1.4$ in the statement of Theorem 1.

One should expect in the view of (20) that

$$\sum_{m,n \leqslant x} \tau_{1,k}(mn) = D_1x^2 + D_2x^{1+1/k} + O(x^{\alpha_k+\varepsilon}). \tag{41}$$

Translating the domain of integration till $[b-iT, b+iT]^2$, where $b = 1/(k+1)$, leads to the error term at least $x^{\frac{k+2}{k+1}+\varepsilon}T^{\frac12-\frac{1}{k+1}} + x^{2+\varepsilon}T^{-1}$, which corresponds to $\alpha_k = (4k+2)/(3k+1)$ for the best possible choice of $T$. Under the Riemann hypothesis for $b = 1/2k + 1/\log x$ we obtain $\alpha_k = (4k-1)/(3k-1)$. However, for $k > 2$ both of these estimates are bigger than $x^{4/3}$ and absorbs the term $D_2 x^{1+1/k}$ in (41). Such result can hardly be reckoned satisfactory.

One can consider the exponential divisor function $\tau^{(e)}$, which is multiplicative and defined by $\tau^{(e)}(p^a) = \tau(a)$. As far as $\tau^{(e)}(p^k) = \tau_{1,2}(p^k)$ for $k = 1, 2, 3, 4$, the Dirichlet series for $\tau^{(e)}$ also posesses the representation (19), so Theorem 1 remains valid for $\tau^{(e)}$ instead of $\tau_{1,2}$.

1. **Balazard M.** Étude d'une somme arithmétique multiple liée à la fonction de Möbius / M. Balazard, M. Naimi, Y.-F. S. Pétermann // Acta Arith. – 2008. – Vol. 132, no. 2. – P. 245–298.
2. **Graham S. W.** On the difference between consecutive squarefree integers / S. W. Graham, G. Kolesnik // Acta Arith. – 1988. – Vol. 49, no. 5. – P. 435–447.
3. **Hardy G. H.** An introduction to the theory of numbers / G. H. Hardy, E. M. Wright; Ed. by D. R. Heath-Brown, J. H. Silverman. – $6^{\text{th}}$, rev. edition. – New York: Oxford University Press, 2008. – XXI+635 p.
4. **Huxley M. N.** Exponential sums and the Riemann zeta function V / M. N. Huxley // Proc. Lond. Math. Soc. – 2005. – Vol. 90, no. 1. – P. 1–41.
5. **Ivić A.** The Riemann zeta-function: Theory and applications / A. Ivić. – Mineola, New York: Dover Publications, 2003. – 562 p.
6. **Shabat B. V.** Introduction to complex analysis II: Functions of several variables / B. V. Shabat; Ed. by S. Ivanov. Vol. 110 of Translations of mathematical monographs. – Providence, Rhode Island: American Mathematical Soc., 1992. – X+371 p.
7. **Titchmarsh E. C.** The theory of the Riemann zeta-function / E. C. Titchmarsh; Ed. by D. R. Heath-Brown. – $2^{\text{nd}}$, rev. edition. – New-York: Oxford University Press, 1986. – 418 p.

Mathematical Subject Classification: 11L05, 11L07, 11L40
UDC 511.321

**S. S. Sergeev**
Odesa I. I. Mechnikov National University

# CHARACTER SUMS ANALOGUE OF KLOOSTERMAN SUMS ON NORM GROUP

**Сергєєв С. С. Суми характерів, аналог сум Клостермана на нормових групах.** Розглядаются суми характерів, котрі є аналогами сум Клостермана на нормових групах у кільці цілих гаусових чисел. Отримані нетривіальні оцінки експоненціальних сум та сум характерів по модулю $p^m$, где p — просте рациональне число, $p \equiv 3 \pmod 4$.
**Ключові слова:** суми характерів, суми Клостермана, нормові групи.

**Сергеев С. С. Суммы характеров, аналог сумм Клостермана на норменных группах.** Рассматриваются суммы характеров, являющиеся аналогами сумм Клостермана на норменных группах в кольце целых гауссовых чисел. Получены нетривиальные оценки экспоненциальных сумм и сумм характеров по модулю $p^m$, где p — простое рациональное число, $p \equiv 3 \pmod 4$.
**Ключевые слова:** суммы характеров, сумма Клостермана, норменные группы.

**Sergeev S. S. Character sums analogue of Kloosterman sums on norm group.** We consider character sums, analogue of Kloosterman sums over norm group in the ring of Guassian integers. We obtain non-trivial estimation of exponential sums and character sums modulo $p^m$, where p — prime number, $p \equiv 3 \pmod 4$.
**Key words:** character sums, Kloosterman sums, norm group.

**Introduction.** Let $\chi$ and $\varphi$ be multiplicative and additive characters of finite field $k_q$ with $q = p^n$ elements. Usually consider three type sums

$$\sum_{x\in V\subset k_q} \chi(f(x)), \quad \sum_{x\in V\subset k_q^*} \chi(f(x)), \quad \sum_{x\in V\subset k_q^*} \chi(f(x))\varphi(g(x)),$$

where $f(x), g(x)$ are polynomials or rational functions, which respectively call exponential sum, character sum and mixed sum. When $V = k_q$ (resp. $k_q^*$), that sums call complete exponential sum, complete character sum and complete mixed sum (resp.). Otherwise, such sums call incomplete sums. Sometimes as $V$ consider a subgroup $k_q$ (or $k_q^*$, resp.). Prove by A. Weil [7] the Riemann Hypothesis for algebraic curves over finite field give leave to arrive at non-trivial bounds for mentioned above complete sums. In particular, for $f(x) = ax + bx^{-1}, x \in k_q^*$, A. Weil [7] proved uniprovable bound for Kloosterman sum

$$K(a, b; q) := \sum_{x\in k_q^*} \chi\left(ax + bx^{-1}\right) << q^{1/2}. \tag{1}$$

Similar results may be obtain for mentioned above sums over the ring of residue classes $\pmod q$ in $\mathbb{Z}$ ( [2, 5, 6]). Our goal is construction of non-trivial estimates for character sums analogue of Kloosterman sums on norm group in the ring of residue classed (mod $q$) of the Gaussian integers.

**Notation.** We standardize some notation to be used throughout this paper. Lower case Roman (or Greek, respectively) letters usually denote rational (or Gaussian, respectively) integers; in particular, m, n, k are positive integers and p is always a rational prime $\mathrm{p} \equiv 3 \pmod 4$. We also define a norm on $\mathbb{Q}(i)$ into $\mathbb{Q}$ by $N(\alpha) = |\alpha^2|$. For the sake of convenience, we denote by $G$ the set of the Gaussian integers. Let $\mathbb{Z}_q$ ( or $G_q$ respectively) denote the ring of residue classes modulo $q$ and $\mathbb{Z}_q^*$ (or $G_q^*$ respectively) denote the multiplicative group in $\mathbb{Z}_q$ (or $G_q$). If $x \in G_q^*$ we write $x^{-1}$ for the multiplicative inverse of $x \pmod q$, i.e. $x^{-1}$ is Gaussian integer satisfying $xx^{-1} \equiv 1 \pmod q$. We denote by $k_q$ a finite field with $q$ elements, $q = \mathrm{p}^r$, p a prime. For a finite set $X$, $|X|$ denotes its cardinality. By $f << g$, or $f = O(g)$ for $x \in X$, where $X$ is an arbitrary set on which $f, g$ are defined, we mean synonymously that there exists a constant $C > 0$ such that $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ for all $x \in X$. The "implied constant"may depend on the some parameters which are always specified or clear in context. As usual, $gcd(a, b)$ or $(a, b)$ stand for the greatest common divisor of $a$ and $b$, where $a, b \in \mathbb{Z}$ (or $G$). Though $\mathbb{Z}[x]$ (or $G[x]$) we denote the polynomial ring over $\mathbb{Z}$ (or $G$). For $a \in \mathbb{Z}$ (or $\alpha \in G$) it stands $\nu_{\mathrm{p}}(a)$ (or $\nu_{\mathrm{p}}(\alpha)$) if $\mathrm{p}^{\nu_{\mathrm{p}}}(a) \mid a, \mathrm{p}^{\nu_{\mathrm{p}}}(a+1) \nmid a$. Moreover, $\sum\limits_{S(C)}$ means the summation under the condition C is defined additionally, and $e_q(x) := e^{2\pi i \frac{x}{q}}$.

**Auxiliary arguments.** Before starting out study of character sums several lemmas will be used in the sequal.

Let us denote by $E_m$ the following subgroup in $G_{\mathrm{p}}^m$.

$$E_m := \left\{ x \in G_{\mathrm{p}^m}^* : N(x) \equiv 1 \pmod{\mathrm{p}^m} \right\}. \tag{2}$$

The subgroup $E_m$ we will call the norm group in $G_{\mathrm{p}^m}^*$.

**Lemma 1.** *The norm group $E_m$ is a cyclic group of order* $(\mathrm{p}+1)\mathrm{p}^{m-1}$.

Let $u + iv$ be a generating element of $E_m$. Then

$$\begin{aligned}
&(u+iv)^{\mathrm{p}+1} = 1 + \mathrm{p}^2 x_0 + i\mathrm{p} y_0, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{Z},\\
&x_0 + 2y_0^2 \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}}, \quad (x_0, \mathrm{p}) = (y_0, \mathrm{p})) = 1,
\end{aligned}$$

and also for any $t = 4, 5, \dots, \mathrm{p}^{m-1} - 1$, we have modulo $\mathrm{p}^m$

$$\begin{aligned}
Re(u+iv)^{(\mathrm{p}+1)t} &\equiv A_0 + A_1 t + \cdots + A_{m-1} t^{m-1},\\
Im(u+iv)^{(\mathrm{p}+1)t} &\equiv B_0 + B_1 t + \cdots + B_{m-1} t^{m-1},
\end{aligned}$$

where

$$\begin{array}{ll}
A_0 \equiv 1 \pmod{\mathrm{p}^4}, & B_0 \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^4},\\
A_1 \equiv \mathrm{p}^2(x + \frac{1}{2}y_0^2 \pmod{\mathrm{p}^3}), & B_1 \equiv \mathrm{p}y_0 \pmod{\mathrm{p}^3},\\
A_2 \equiv -\frac{1}{2}\mathrm{p}^2 y_0^2 \pmod{\mathrm{p}^3}, & B_2 \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^3},\\
A_j \equiv B_j \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^3}, & j = 3, 4, \dots, m-1.
\end{array}$$

Denote

$$(u+iv)^k = u(k) + iv(k), 0 \leqslant k \leqslant \mathrm{p}.$$

An arbitrary element from $E_m$ has unique representation $w = (u+iv)^{(\mathrm{p}+1)t+k}$. Thus

$$w = (u+iv)^{(\mathrm{p}+1)t+k} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} (A_j(k) + iB_j(k))\, t^j \pmod{\mathrm{p}^m}. \tag{3}$$

It is clear

$$\begin{aligned} A_j(k) &= A_j u(k) - B_j v(k), \\ B_j(k) &= A_j v(k) + B_j u(k). \end{aligned}$$

**Corollary 1.** *For $k = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}$, we have*

$$\begin{array}{ll} (u(k), \mathrm{p}) = (v(k), \mathrm{p}) = 1, & \text{if } k \neq \frac{\mathrm{p}+1}{2}, \\ u(0) = 1, v(0) = 0, & u\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}}, \left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}, \mathrm{p}\right) = 1, \end{array}$$

*moreover, for $k \neq \frac{\mathrm{p}+1}{2}$*

$$\begin{array}{l} A_0(k) \equiv u(k), \quad B_0(k) \equiv v(k) \pmod{\mathrm{p}}, \\ \mathrm{p} \,||\, A_1(k), \quad \mathrm{p} \,||\, B_1(k), \quad \mathrm{p}^2 \,||\, A_2(k), \quad \mathrm{p}^2 \,||\, B_2(k); \end{array}$$

*and*

$$\begin{array}{l} A_1(0) \equiv 0, \quad B_1(v) \equiv \mathrm{p}y_0 \pmod{\mathrm{p}^4}, \quad \mathrm{p}^2 \,||\, A_2(0), \quad B_2(0) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^3}, \\ A_0\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}}, \quad \left(B_0\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right), \mathrm{p}\right) = 1, \\ \mathrm{p} \,||\, A_1\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right), \quad \mathrm{p}^2 \,||\, B_1\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right), \quad \mathrm{p}^2 \,||\, A_2\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right), \quad B_2\left(\frac{\mathrm{p}+1}{2}\right) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^3}; \end{array}$$

$$A_j(k) = B_j(k) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^3}, \quad k = 0, 1, \ldots, \mathrm{p}, j \geqslant 3.$$

For the proof of Lemma 1 and its Corollary see [6] (Lemma 2).

**Lemma 2.** *Let $f(x), g(x)$ be polynomials over $G$,*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{r} A_j x^j, G(x) = \sum_{j=1}^{s} B_j x^j, r, s \geqslant 3,$$

*and, moreover, let*

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant \nu_{\mathrm{p}}(A_2) < \nu_{\mathrm{p}}(A_j), j \geqslant 3; \\ (B_1, \mathrm{p}) = 1, \nu_{\mathrm{p}}(B_j) \geqslant 1, j = 2, 3, \ldots \end{array}$$

*Then*

$$\begin{array}{l} \left| \sum\limits_{x \in G_{\mathrm{p}^m}} e_{\mathrm{p}^m}\left(Re\left(f(x)\right)\right) \right| \leqslant \\ \leqslant \begin{cases} 0 & \text{if } \nu_{\mathrm{p}}(A_1) < \nu_{\mathrm{p}}(A_2); \\ 2^{\frac{m}{2}} \mathrm{p}^{m + \frac{1}{2}\nu_{\mathrm{p}}(A_2)} & \text{if } \nu_{\mathrm{p}}(A_2) < m, \nu_{\mathrm{p}}(A_1) \geqslant \nu_{\mathrm{p}}(A_2); \\ \mathrm{p}^{2m} & \text{if } \nu_{\mathrm{p}}(A_2) \geqslant m; \end{cases} \end{array} \tag{4}$$

$$\left| \sum_{x \in G^*_{\mathrm{p}^m}} e_{\mathrm{p}^m}\left(Re(f(x) + \alpha x^{-1})\right) \right| \leqslant 2 I_0^{\frac{m}{2}} \mathrm{p}^m, \tag{5}$$

*where $I_0$ is the number of solutions of the congruence over $G^*_{\mathrm{p}}$*

$$A_1 u^2 - B_1 \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}}.$$

The assertion of this Lemma it is well-known (see, for example, [6], Lemma 3).

**Lemma 3.** *Let $k_q$ be a finite field and let $\chi$ be a non-trivial multiplicative character of $k_q^*$ of order $d > 1$. Suppose $f \in k_q[x]$ has $m$ distinct roots and $f$ is not a perfect $d$-th power* (mod p)*. Then we have*

$$\left|\sum_{x\in k_q} \chi(f(x))\right| \leqslant (m-1)q^{1/2} \tag{6}$$

*(See [4], Ch. 2C', p. 43).*

**Lemma 4.** *( [6], Lemma 1) Let* $\mathrm{p} \equiv 3 \pmod 4$ *be a prime,* $n \geqslant 3$ *be a positive integer,* $U_n = \left\{1 + \mathrm{p}u : u \in G_{\mathrm{p}^{n-1}}\right\}$ *be the subgroup of* $G^*_{\mathrm{p}^n}$*. Then for any character chi of the group* $G^*_{\mathrm{p}^n}$ *there exists a polynomial f(n) with coefficients from G*

$$f(u) = u + a_2u^2 + \cdots + a_{N-1}\mathrm{p}^{N-1}, N = n + \left[\frac{n}{\mathrm{p}+1}\right] + 1,$$

*such that we have*

$$\chi(1 + \mathrm{p}u) = e_{\mathrm{p}^{n-1}}, (Re(\Lambda f(u))),$$

*where* $\Lambda \in G^*_{\mathrm{p}^{n-1}}$ *depends only on chi, and the coefficients satisfy the inequalities*

$$\nu_{\mathrm{p}}(a_k) \geqslant k - \nu_{\mathrm{p}}(k) - 1, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1.$$

**Proof.** It is well-known that the multiplicative group $G^*_{\mathrm{p}}$ is a cyclic group. We may select a generator $g$ of $G^*_{\mathrm{p}}$ in such a way that $g^{\mathrm{p}^2-1} = 1 + \mathrm{p}u_1, u_1 \in G^*_{\mathrm{p}}$. Then, using the continuation of $p$-adic valuation for $Q$ to $Q(i)$, and stating one-to-one correspondence between $(1 + \mathrm{p}u_1)^k$ and

$$1 + k\mathrm{p}u_1 + \mathrm{p}^2u_1^2\frac{k(k-1)}{2} + \mathrm{p}^{n+n_0}u_1^{n+n_0}\frac{k(k-1)\ldots(k-n_0-1)}{n_0!} := 1 + \mathrm{p}u_k$$

for any $k \in G_{\mathrm{p}^{n-1}}$, where $n_0 = \left[\frac{n}{\mathrm{p}-1}\right] + 1$, we conclude that the multiplicative group $U_n$ and additive group $G_{\mathrm{p}^{n-1}}$ are isomorphic (see [1] Ch. IV, 3.2, p. 375-376). Let $k_0$ be such that $(1 + \mathrm{p}u)^{k_0} \equiv 1 + \mathrm{p} \pmod{\mathrm{p}^n}$. Then $g_0 = g^{k_0}$ is also a generatic element of $G^*_{\mathrm{p}}$.

Denote

$$f(u) = u - \mathrm{p}\frac{u^2}{2} + \mathrm{p}^2\frac{u^3}{3} - \cdots \pmod{\mathrm{p}^{n-1}}.$$

Consequently

$$f(u) \equiv u + a_2u^2 + \cdots + a_{N-1}u^{N-1} \pmod{\mathrm{p}^{n-1}},$$

where $N = n + \left[\frac{n}{\mathrm{p}-1}\right] + 1, a_k \equiv (-1)^{k+1}\frac{\mathrm{p}^{k-1}}{k} \pmod{\mathrm{p}^{n-1}}, \quad k = 2, 3, \ldots, N-1.$

Define $\Lambda$ from the congruence

$$\Lambda f(1) \equiv k_0 \pmod{\mathrm{p}^{n-1}}.$$

It is clear that $\Lambda \in G^*_{\mathrm{p}^{n-1}}$.

Therefore we deduce that the transformation $G_{\mathrm{p}^{n-1}} \to \mathbb{C}$ given by

$$1 + \mathrm{p}u \to e_{\mathrm{p}^{n-1}}(Re(\Lambda u)), \Lambda \in G^*_{\mathrm{p}^{n-1}}$$

defines a character of the group $U_n$.

**Remark.** *Lemma 4 was proved in [6] but here we give more detailed proof.*

**Corollary 2.** *Let* $q = \mathrm{p}^m, \mathrm{p} \equiv 3 \pmod 4$ *and* $\chi$ *by a non-trivial character of* $G^*_{\mathrm{p}^m}$ *of order* $d > 1$. *Suppose* $F(x) \in G_{\mathrm{p}^m}[x]$ *of a degree* $n$. *Then we have*

$$\left| \sum_{x \in G_{\mathrm{p}^m}} \chi(F(x)) \right| \leqslant 2^{\frac{m}{2}} (n-1) \mathrm{p}^m. \tag{7}$$

**Proof.** For $m = 1$ the assertion of Corollary follows from Lemma 3.

Let $m > 1$. Using the representation $x = x_0(1 + \mathrm{p}x_1), x_0 \in G^*_{\mathrm{p}}, x_1 \in G_{\mathrm{p}^{m-1}}$ for $x \in G_{\mathrm{p}^m}$ and also Lemmas 2 and 4 we successively go into a case $m = 1, q = \mathrm{p}$ so that Lemma 3 gives the assertion of Corollary 2.

**Main Results.** Description of elements $E_m$ (see L. 1 for $m \geqslant 2$) and Lemmas 2 and 3 allow us to obtain Lemma 3 results and Corollary 2 for the character sums on nor subgroup $E_m$ for the linear-inverse functions $\alpha x + \beta x^{-1}, \alpha, \beta$ are fixed from $G_{\mathrm{p}^m}$.

Let $\chi$ be a non-trivial character of $G^*_{\mathrm{p}^m}$. Consider the sum

$$S_\chi(\alpha; \beta; E_m) = \sum_{x \in E_m} \chi(\alpha x + \beta x^{-1}), \quad \alpha, \beta \in G_{\mathrm{p}^m}. \tag{8}$$

This sum we will call character sum analogue of Kloosterman sum over a norm group.

**Theorem 1.** *Under conditions above we have next estimation*

$$|S_\chi(\alpha;\beta;E_m)| = \left| \sum_k \chi(\omega_0(k)) \sum_{t=0}^{\mathrm{p}^{m-1}-1} e_{\mathrm{p}^{m-1}}(C_0(k) + C_1(k)t + C_2(k)t^2 + \dots) \right| \leqslant c \cdot \mathrm{p}^{\frac{m}{2}}$$

*with the absolute constant* $c$.

**Proof.** The case $m = 1$ was studied by Li [2].

Let $m > 1$. By the representation (3) we can write

$$\chi(\omega) = \chi(\omega_0)\chi(1 + \mathrm{p}\omega_1)$$

where

$$\begin{aligned} &\omega_0 = A_0(k) + iB_0(k), (\omega_0, \mathrm{p}) = 1, \\ &\omega_1 = \omega_0^{-1} \left( \left(A'_1(k) + iB'_1(k)\right) t + \mathrm{p} \sum_{j=2}^{m-1} \left(A'_j(k) + iB'_j(k)\right) t^j \right), \end{aligned} \tag{9}$$

moreover,

$$\begin{aligned} &(A'_1(k)B'_1(k), \mathrm{p}) = 1, \quad (B'_2(k), \mathrm{p}) = 1, \\ &A'_j(k) = \tfrac{1}{\mathrm{p}} A_j(k), \quad B'_j(k) = \tfrac{1}{\mathrm{p}} B_j(k) \end{aligned}$$

if $k \neq 0, \mathrm{p}+1$, and

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{1}{\mathrm{p}} A'_1(k), \mathrm{p}\right) = (B'_1(k), \mathrm{p}) = 1, \\ &A'_j(k) \equiv B'_j(k) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^2} \end{aligned}$$

if $k = 0$ or $\mathrm{p}+1$.

Without restricting the generality we will suppose that $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\mathrm{p}^m}$, i.e. $\alpha = a, \beta = b$. Then a straightforward computation gives

$$\chi(1+\mathrm{p}\omega_1) = e_{\mathrm{p}^{m-1}}\left(C_0(k) + C_1(k)t + C_2(k)t^2 + C_3(k)t^3 + \dots\right),$$

where $C_2(k) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}}, C_j(k) \equiv 0 \pmod{\mathrm{p}^3}, j \geqslant 3,$ and $\nu_{\mathrm{p}}(C_2(k)) > \nu_{\mathrm{p}}(C_1(k))$ for all $k = 0, 1, \dots, \mathrm{p}$ unless $O(1)$ values of $k$ when $\nu_{\mathrm{p}}(C_1(k)) \geqslant \nu_{\mathrm{p}}(C_2(k)) = 1$.

Thus by application of Lemma 2 we obtain

$$\begin{aligned} &|S_\chi(\alpha;\beta;E_m)| = \\ &= \left|\sum_k \chi(\omega_0(k)) \sum_{t=0}^{\mathrm{p}^{m-1}-1} e_{\mathrm{p}^{m-1}}(C_0(k) + C_1(k)t + C_2(k)t^2 + \dots)\right| \leqslant c\mathrm{p}^{\frac{m}{2}} \end{aligned} \tag{10}$$

with the absolute constant c. This completes our proof of Theorem 1.

In 2001 Ping Xi [3] studied the sum

$$K(\chi, q) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_q} |S_\chi(m,n;q)|^2$$

and proved the following statement:

Let $q$ be a positive integer, $q = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{p}_j^{a_j}$ and $\chi$ be character $mod q$, $\chi = \prod_{j=1}^{l} \chi_j$, $\chi$ is character $mod \mathrm{p}_j^{a_j}$, and also $\chi_j(-1) = 1, j = 1, \dots, l$. Then for $8 \nmid q$ the inequality

$$q\varphi^2(q) \leqslant K(\chi, q) \leqslant 2^l q\varphi^2(q)$$

holds.

We will consider an analogue of $K(\chi, q)$ for character sum over $E(q)$ with a non-trivial character $\chi$, where

$$E(q) := \{\omega \in G_q : N(\omega) \equiv 1 \pmod{q}\}.$$

More exactly, we will consider only case $q = \mathrm{p}^m, \mathrm{p} \equiv 3 \pmod 4$, since a general case may be study by analogy.

**Theorem 2.** *Let $\chi$ be an even non-trivial multiplicative character of $G^*_{\mathrm{p}^m}$ (i. e. $\chi(-1) = 1$). Then the following equality*

$$K(\chi, \mathrm{p}^m) = 2(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}^2-1)\mathrm{p}^{4m-2}$$

*holds*

**Proof.** We have

$$S_\chi(\alpha,\beta;E_m) = \sum_{x \in E_m} \chi(\alpha x + \beta x^{-1}) = \sum_{\gamma \in G^*_{\mathrm{p}^m}} \chi(\gamma) \sum_{\substack{x \in E_m \\ \alpha x + \beta x^{-1} \equiv \gamma \pmod{\mathrm{p}^m}}} 1$$

Hence,

$$K(\chi, E_m) = \sum_{\alpha,\beta \in G_{\mathrm{p}^m}} |S_\chi(\alpha,\beta;E_m)|^2 = \sum_{\gamma_1,\gamma_2 \in G^*_{\mathrm{p}^m}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2) \sum_{S(C)} 1, \tag{11}$$

where

$$C : \left\{x, y \in E_m, \alpha, \beta \in G^*_{\mathrm{p}^m} : \alpha x + \beta x^{-1} \equiv \gamma_1, \alpha y + \beta y^{-1} \equiv \gamma_2 \pmod{\mathrm{p}^m}\right\}.$$

First, let $m = 1$. The system of the congruences (in $\alpha, \beta$) modulo $\mathrm{p}^m$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta x^{-1} \equiv \gamma_1 \\ \alpha y + \beta y^{-1} \equiv \gamma_2 \end{cases}$$

is a solvable system if $(x^2 - y^2) \mid (x\gamma_1 - y\gamma_2)$. With this provision system under consideration has exactly

$$N(gcd(x^2 - y^2, \mathrm{p})) = \begin{cases} 1 & \text{if } x^2 \not\equiv y^2 \pmod{\mathrm{p}}, \\ N(\mathrm{p}) & \text{if } x^2 \equiv y^2 \pmod{\mathrm{p}}, \end{cases}$$

solutions.

Thus we infer

$$K(\chi, E_1) = \sum_{\delta|\mathrm{p}} N(\delta) \sum_{\gamma_1,\gamma_2 \in G^*_{\mathrm{p}}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2) \sum_{S(C)} 1, \tag{12}$$

where

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x, y \in E_1 : x^2 \equiv y^2 \pmod{\delta}, x\gamma_1 \equiv y\gamma_2 \pmod{\delta}, \\ gcd\left(\frac{x^2-y^2}{\delta}, \frac{\hat{\mathrm{p}}}{\delta}\right) = 1 \end{array} \right\}.$$

Now, if $\delta = 1$ then $\sum\limits_{S(C)} 1 = |E_1|^2$. Consequently, the contribution of a summand with $\delta = 1$ is equal

$$|E_1|^2 \sum_{\gamma_1,\gamma_2 \in G^*_{\mathrm{p}}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2) = 0.$$

Further, for $\delta = \mathrm{p}$ we obtain the contribution

$$N(\mathrm{p}) \sum_{\gamma_1,\gamma_2 \in G^*_{\mathrm{p}}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2) \sum_{S(C)} 1 = 2\,|E_1|\, N(\mathrm{p})\tilde{\varphi}(\mathrm{p}) = 2(\mathrm{p}+1)\mathrm{p}^2(\mathrm{p}^2 - 1)$$

where

$$C : \left\{ \begin{array}{l} x, y, \in E_1 : x\gamma_1 \equiv y\gamma_2, x^2 \equiv y^2 \pmod{\mathrm{p}}, \\ gcd\left(\frac{x^2-y^2}{\mathrm{p}}, \frac{\bar{\mathrm{p}}}{\mathrm{p}}\right) = 1 \end{array} \right. ,$$

$\tilde{\varphi}(\gamma)$ denote the Euler's totient function in $G$.

So,

$$K(\chi, E_1) = 2(\mathrm{p}+1)\mathrm{p}^2(\mathrm{p}^2 - 1). \tag{13}$$

Let $m > 1$. By an analogue with relation (12) we have

$$K(\chi, E_m) = \sum_{\nu=0}^{m} N(\mathrm{p}^\nu) \sum_{\gamma_1,\gamma_2 \in G^*_{\mathrm{p}^m}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2) \sum_{S(C)} 1$$

where

$$C : \left\{ x, y \in E_m, \alpha, \beta \in G_m : \begin{array}{l} \alpha x + \beta x^{-1} \equiv \gamma_1 \\ \alpha y + \beta y^{-1} \equiv \gamma_2 \end{array} \pmod{\mathrm{p}^m} \right\}.$$

So we have

$$K(\chi,E_m)=\sum_{\nu=0}+\sum_{\nu=1}^{m-1}+\sum_{\nu=m}:=\sum_0+\sum_1+\sum_2.$$

Now,

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_0 &= \sum_{\gamma_1,\gamma_2\in G^*_{\mathrm{p}^m}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2)(\mathrm{p}^2-1)^2\left|E_m\right|^2=0;\\
\sum\nolimits_1 &= \sum_{\nu=1}^{m-1} N(\mathrm{p}^\nu) \sum_{\gamma_1,\gamma_2\in G^*_{\mathrm{p}^m}} \chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2)\left(\sum_{S(C_1')}1+\sum_{S(C_2')}1\right),
\end{aligned}\tag{14}$$

where

$$\begin{aligned}
&C_1':\left\{x,y\in E_m, x\equiv\gamma_2, y\equiv\gamma_1, x\equiv y \pmod{\mathrm{p}^\nu}\right\},\\
&C_2':\left\{x,y\in E_m, x\equiv\gamma_2, y\equiv-\gamma_1, x\equiv -y \pmod{\mathrm{p}^\nu}\right\}.
\end{aligned}$$

Hence,

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\nu=1}^{m-1} N(\mathrm{p}^\nu)\left\{\sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in G^*_{\mathrm{p}^m}\\ \gamma_1\equiv\gamma_2(\mathrm{p}^m)}}\chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2)N(\mathrm{p}^{m-\nu})+\sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in G^*_{\mathrm{p}^m}\\ \gamma_1\equiv-\gamma_2(\mathrm{p}^m)}}\chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2)N(\mathrm{p}^{m-\nu})\right\}=$$

$$\begin{aligned}
&= 2N(\mathrm{p}^m)\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{\gamma_1\in G^*_{\mathrm{p}^\nu}}\chi(\gamma_1)\sum_{\delta\in G_{\mathrm{p}^{m-\nu}}}\chi(1+\mathrm{p}^\nu\delta)=\\
&= 2N(\mathrm{p}^m)\sum_{\nu=1}^{m-1}\sum_{\delta\in G_{\mathrm{p}^{m-\nu}}}\chi(1+\mathrm{p}^\nu\delta)\sum_{\gamma_1\in G_{\mathrm{p}^\nu}}\chi(\gamma_1)=0,
\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &= N(\mathrm{p}^m)\sum_{\substack{\gamma_1,\gamma_2\in G^*_{\mathrm{p}^m}\\ \gamma_1\equiv\gamma_i 2(\mathrm{p}^m)}}\chi(\gamma_1)\bar{\chi}(\gamma_2)\sum_{\substack{\alpha\equiv\pm\beta(\mathrm{p}^m)\\ \alpha,\beta\in E_m}}1=N(\mathrm{p}^m)\tilde{\varphi}(\mathrm{p}^m)\left|E_m\right|=\\
&= 2\mathrm{p}^{4m-2}(\mathrm{p}^2-1)(\mathrm{p}+1).
\end{aligned}\tag{16}$$

As a consequently (14)-(16) we have

$$K(\chi,\mathrm{p}^m)=2(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}^2-1)\mathrm{p}^{4m-2}.\tag{17}$$

The result of Theorem 2 shows that the upper bound for individual sum $S(\alpha,\beta;\chi)$ is optimal bound in certain sense.

By the similar method may be investigated close sum

$$K_E(\alpha,\beta;\chi):=\sum_{\alpha,\beta\in E_m}\left|S(\alpha,\beta;\chi)\right|^2.$$

**Conclusion.** We obtain a non-trivial estimation of exponential sums and character sums which are analogue of Kloosterman sums over norm group in the ring of Guassian integers. Described proof method can be used for estimation of sums in close forms.

1. **Borevich Z.** Number Theory / Z. Borevich, I. Shafarevic. – London: Academic Press., Inc., 1966. – 436 p.
2. **Li W.-C. W.** Character sums over norm group / W.-C. W. Li // Finite fields and their Application. – 2006. – Vol. 12. – P. 1–15.
3. **Ping Xi** Mean values of character sums analogue of Kloosterman sums / Ping Xi, Yuan Yi // Proc. Amer. Math. Soc. – 2013. – Vol. 141. – P. 1233–1240.
4. **Schmidt W. M.** Equations over finite fields. An elementary approach / W. M. Schmidt // Lecture Notes in Math, Springer Verlag. – 1976. – Vol. 536. – 272 p.
5. **Sergeev S.** Twisted Kloosterman sum over norm group / Sergeev S. // International Journal of Applied Mathematics. – 2014. – Vol. 27, to appear.
6. **Varbanets P.** Generalized twisted exponential sum / P. Varbanets, S. Varbanets // Siauliai Math. Semin. – 2013. – Vol. 8(16). – P. 267–279.
7. **Weil A.** On some exponential sums / A. Weil // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1948. – Vol. 34. – P. 204–207.

Mathematical Subject Classification: 34A34, 34A25
UDC 517.926

**S. A. Shchogolev**
Odesa I. I. Mechnikov National University

# ON THE OSCILLATIONS IN THE QUASI-LINEAR SECOND ORDER DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH SLOWLY-VARYING PARAMETERS

**Щоголев С. А. Про коливання в квазілінійних диференціальних системах другого порядку з повільно змінними параметрами.** Для квазілінійної диференціальної системи другого порядку з суто уявними власними значеннями матриці лініної частини отримано умови існування частинного розв'язку, зображуваного у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою на асимптотично великому проміжку зміни незалежної змінної.
**Ключові слова:** диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

**Щёголев С. А. О колебаних в квазилинейных дифференциальных системах второго порядка с медленно меняющимися параметрами.** Для квазилинейной дифференциальной системы второго порядка с чисто мнимыми собственными значениями матрицы линейной части получены условия существования частного решения, представимого в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой на асимптотически большом промежутке изменения нзависимой переменной.
**Ключевые слова:** дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье.

**Shchogolev S. A. On the oscillations in the quasi-linear second order differential systems with slowly-varying parameters.** For the quasi-linear second order differential system with pure imaginary eigenvalues of the matrix of the linear part, the conditions of the existence of the particular solution, representable as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, are obtained at the asymptotic long interval of the independent variable.
**Key words:** differential, slowly-varying, Fourier series.

**Introduction.** In the theory of the differential equations well known the problem of the periodic solutions od the differential equations and its systems [1–3]. However, the strict periodicity of the coefficients of the system and its decisions is some idealization. In real physical systems, the amplitude and frequency of oscillations, generally speaking, are not constant, and represent yourself in a certain sense, slowly varying function of time. An important tool in the study of periodic solutions is a representation of the desired solution in the form of trigonometric Fourier series:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{in\nu t} \tag{1}$$

($\nu$ – frequency). Sometimes it takes an additional condition

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < +\infty, \tag{2}$$

which guaranteed by $\nu \in \mathbf{R}$ the absolutely and uniformly convergence of series (1). As noted in the [4], there is good reason to replace the study of periodic solutions of the general form by research solutions that can be represented in the form (1) with the additional condition (2). Narrowing of the space of considered solutions a constructive way to their analytical representation, in particular, facilitates the construction of approximate analytical expressions for the solutions in the form of finite trigonometric sums. Similar problems are considered, for example, in [5–7]. In this regard, the following problem arises: to research the similar type solutions of the differential systems with slowly varying parameters, that is to obtain the conditions of the existence of the solutions, which represented as an absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency. In this formulation, the problem is substantially different from the problem of periodic solutions of the general form. In some papers of A. V. Kostin and author [8–11] the conditions of existence of solutions of this type are obtained for a quasi-linear differential systems, and researched a systems with different properties of the matrix of the linear part. Considered in these papers systems contained two small parameters $\mu$ and $\varepsilon$, first of which characterizes the smallness of nonlinearities, and the second - slow variability coefficients of the systems. The role of these parameters in the study of oscillations differ significantly, and, generally speaking, they do not depend on each other. At the same time in a number of well-known works on the theory of oscillations of quasi-linear systems, these parameters are the same.

**Notation.** Let $G(\varepsilon_0) = \{t, \varepsilon : \ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, \ -L\varepsilon^{-1} \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}, \ 0 < L < +\infty\}$.

**Definition 1.** We say, that a function $f(t,\varepsilon)$ belong to class $S(m,\varepsilon_0)$ ($m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), if

1) $f : G(\varepsilon_0) \to \mathbf{C}$, 2) $f(t,\varepsilon) \in C^m(G(\varepsilon_0))$ with respect $t$;

3) $d^k f(t,\varepsilon)/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon)$ ($0 \leqslant k \leqslant m$),

$$\|f\|_{S(m,\varepsilon_0)} \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sup_{G(\varepsilon_0)} |f_k^*(t,\varepsilon)| < +\infty.$$

Under the slowly varying function we mean a function of class $S(m,\varepsilon_0)$.

**Definition 2.** We say, that a function $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ belong to class $F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ ($m, l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$), if this function can be represented as:

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) \exp\left(in\theta(t,\varepsilon)\right),$$

and:

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m,\varepsilon_0)$;

2) $\|f\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \overset{def}{=} \|f_0\|_{S(m,\varepsilon_0)} + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |n|^l \|f_n\|_{S(m,\varepsilon_0)} < +\infty$, in particular

$$\|f\|_{F(m,0,\varepsilon_0,\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f_n\|_{S(m,\varepsilon_0)};$$

3) $\theta(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau,\ \varphi\in\mathbf{R}^+,\ \varphi\in S(m,\varepsilon_0),\ \inf\limits_{G(\varepsilon_0)}\varphi(t,\varepsilon)=\varphi_0>0.$

Let $f(t,\varepsilon,\theta)\in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$. We denote $\forall\ n\in\mathbf{Z}$:

$$\Gamma_n[f]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)d\theta,$$

particular

$$\Gamma_0[f]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)d\theta.$$

Some basic properties of functions of the classes $S(m,\varepsilon_0)$ and $F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ properties are stated and proved in [12].

## Main Results

**1. Statement of the Problem.** Consider the following differential system:

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{2}a_{jk}(t,\varepsilon)x_k+f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))+\mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,x_2),\ j=1,2, \tag{3}$$

where $\operatorname{colon}(x_1,x_2)\in D\subset\mathbf{R}^2$, $a_{jk}\in S(m,\varepsilon_0)$, $f_j\in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, $X_1,X_2$ belongs to class $F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ with respect $t,\varepsilon,\theta$ and analytic with respect $x_1,x_2\in D$; $\mu\in(0,\mu_0)\in\mathbf{R}^+$. Functions $a_{jk},\ f_j,\ X_j\ (j,k=1,2)$ are real, and eigenvalues of matrix $(a_{jk}(t,\varepsilon))$ have a form $\pm i\omega(t,\varepsilon)$, where $\omega\in\mathbf{R}^+$.

We study a problem of existence of the particular solutions of the classes $F(m^*,l^*,\varepsilon^*,\theta)$ of the system (3).

The system (3) are considered under the following assumptions:

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}|a_{12}(t,\varepsilon)|>0; \tag{4}$$

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}|k\omega(t,\varepsilon)-n\varphi(t,\varepsilon)|\geqslant\gamma>0,\ k=1,2;\ n\in\mathbf{Z} \tag{5}$$

(means we study the case of absent of the resonance between frequencies $\omega$ and $\varphi$ in system (3)).

We note, that similar problem are considered by author in paper [13], but in this paper sifficiently using the assumption, that parameters $\mu$ and $\varepsilon$ are related by $\mu^r\leqslant\varepsilon^2$, where $r\in\mathbf{N}$. This condition, though in some cases performed, yet is sufficiently tough. Therefore in this paper we seek to obtain conditions of the existence of solutions of these classes, which are not supposed to such a relationship between the parameters $\mu$ and $\varepsilon$.

**2. Auxiliary results.** Consider the following system of the differential equations:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_j}{d\theta}=\sum_{k=1}^{2}a_{jk}(t,\varepsilon)\xi_k+f_j(t,\varepsilon,\theta)+\mu X_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\xi_2),\ j=1,2, \tag{6}$$

where $(\xi_1,\xi_2)\in D_1\subset\mathbf{R}^2$, $a_{jk},\ f_j,\ X_j$ are the same as in the system (3), but $(t,\varepsilon)$ considered as constants.

**Lemma.** *If condition (5), then* $\exists\ \mu_1 \in (0, \mu_0)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0, \mu_1)$ *the system (6) has a particular solution* $\xi_j(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j = 1, 2)$, *which belong to class* $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$.

**Proof.** Consider generating system corresponding to system (6):

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j0}}{d\theta} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)\xi_{k0} + f_j(t,\varepsilon,\theta),\ \ j = 1,2. \tag{7}$$

Easy to show that

$$\Delta_n(t,\varepsilon) = \begin{vmatrix} a_{11}(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon) & a_{12}(t,\varepsilon) \\ a_{21}(t,\varepsilon) & a_{22}(t,\varepsilon) - in\varphi(t,\varepsilon) \end{vmatrix} =$$
$$= (\omega(t,\varepsilon) - n\varphi(t,\varepsilon))(\omega(t,\varepsilon) + n\varphi(t,\varepsilon)),$$

however, based on the assumption (5):

$$\inf_{G(\varepsilon_0)} |\Delta_n(t,\varepsilon)| \geqslant \gamma^2 > 0\ \forall\ n \in \mathbf{Z}.$$

Consider the following solution of system (7):

$$\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta) = L_j[f_1,f_2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jn}(t,\varepsilon)}{\Delta_n(t,\varepsilon)}\ \exp(in\theta),\ \ j = 1,2,$$

where $\Delta_{jn}(t,\varepsilon)$ are determinants, which obtained from $\Delta_n(t,\varepsilon)$ by replacing in it the $j$-th column by the $\mathrm{col}(-\Gamma_n[f_1(t,\varepsilon,\theta)],\ -\Gamma_n[f_2(t,\varepsilon,\theta)])$.

Operators $L_1, L_2$ has a properties:
1) if $f_1, f_2, g_1, g_2 \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, then $L_j[f_1,f_2], L_j[g_1,g_2] \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$, and $L_j[f_1+g_1, f_2+g_2] = L_j[f_1,f_2] + L_j[g_1,g_2]$, $L_j[cf_1,cf_2] = cL_j[f_1,f_2]$ $(j = 1,2)$;
2) $\exists\ K_1 \in (0,+\infty)$ such that

$$\sum_{j=1}^{2} \|L_j[f_1,f_2]\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \leqslant K_1 \sum_{j=1}^{2} \|f_j\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}.$$

Based on these properties we can state, that $\xi_{10}, \xi_{20} \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$.

We make in the system (6) the substitution:

$$\xi_j = \xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta) + \mu\eta_j,\ \ j = 1,2, \tag{8}$$

where $\eta_1, \eta_2$ – new unknown functions. We obtain:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\eta_j}{d\theta} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)\eta_k + g_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu\sum_{k=1}^{2} u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\eta_k +$$
$$+\mu^2 H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1,\eta_2,\mu),\ \ j = 1,2, \tag{9}$$

where $g_j(t,\varepsilon,\theta) = X_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20})$, $u_{jk}(t,\varepsilon,\theta) = \frac{\partial X_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20})}{\partial x_k}$,

$$H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1,\eta_2,\mu) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 X_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10}+\nu\mu\eta_1,\xi_{20}+\nu\mu\eta_2)}{\partial x_1^2}\eta_1^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 X_j(\cdots)}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1\eta_2 + \frac{\partial^2 X_j(\cdots)}{\partial x_2^2}\eta_2^2\right), 0 < \nu < 1.$$

By analyticity of functions $X_1, X_2$ the functions $g_j, u_{jk} \in F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$, the functions $H_1, H_2$ belongs to class $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ with respect $t, \varepsilon, \theta$ and analytic with respect $\eta_1, \eta_2$ in some area of these variables, and $g_j$, $u_{jk}$, $H_j$ are real.

Along with the system (9) we consider the linear nonhomogeneous system:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\eta_{j0}}{d\theta} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)\eta_{k0} + g_j(t,\varepsilon,\theta),\ j = 1, 2. \tag{10}$$

This system has a particular solution $\eta_{j0} = L_j[g_1, g_2] \in F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ $(j = 1, 2)$. We seek the solution from class $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ of system (9) by the method of successive approximations, defining the initial approximation $\eta_{j0}(t, \varepsilon, \theta)$ $(j = 1, 2)$, and the subsequent approximations defining by formulas:

$$\eta_{js} = L_j \Bigg[ g_1(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{k=1}^{2} u_{1k}(t,\varepsilon,\theta)\eta_{k,s-1} + \mu^2 H_1(t,\varepsilon,\theta,\eta_{1,s-1},\eta_{2,s-1},\mu),$$

$$g_2(t,\varepsilon,\theta) + \mu \sum_{k=1}^{2} u_{2k}(t,\varepsilon,\theta)\eta_{k,s-1} + \mu^2 H_2(t,\varepsilon,\theta,\eta_{1,s-1},\eta_{2,s-1},\mu)\Bigg],$$

$$j = 1, 2;\ s = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

We denote:

$$\Omega = \left\{ \eta_1, \eta_2 \in F(m, l, \varepsilon_0, \theta) :\ \sum_{j=1}^{2} \|\eta_j - \eta_{j0}\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \leqslant d;\ d > 0 \right\}.$$

By analyticity of functions $H_1, H_2$ $\exists M(d), K_2(d) \in (0, +\infty)$ such that $\forall \eta_1^*, \eta_2^*, \eta_1^{**}, \eta_2^{**} \in \Omega$:

$$\sum_{j=1}^{2} \|H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1^*,\eta_2^*,\mu)\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \leqslant M(d),$$

$$\sum_{j=1}^{2} \|H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1^*,\eta_2^*,\mu) - H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1^{**},\eta_2^{**},\mu)\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} \leqslant$$

$$\leqslant K_2(d) \sum_{j=1}^{2} \|\eta_j^* - \eta_j^{**}\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}.$$

We denote: $u^* = \max\limits_{j,k} \|u_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)}$.

Using techniques contraction mapping principle, it is easy to show, that by condidtion

$$\mu K_1(d)\left(2^{m+1}(2^l+1)u^*\left(K_1(d)\sum_{k=1}^{2}\|g_k\|_{F(m,l,\varepsilon_0,\theta)} + d\right) + \mu M(d)\right) \leqslant d_0 < d$$

all approximations $\eta_{js}$ $(j = 1, 2;\ s = 0, 1, 2, \ldots)$ remain inside $\Omega$. And by condition

$$\mu K_1(d)(2^{m+1}(2^l+1)u^* + \mu K_2(d)) < 1$$

the process of successive approximations (11) converges to the solution $\eta_1, \eta_2$ from class $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ of the system (9), and this solution are real.

Lemma are proved.

**3. Method of solving the problem.** We make in the system (3) the substitution:

$$x_j = \xi_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) + y_j, \ j = 1, 2, \qquad (12)$$

where $\xi_(t, \varepsilon, \theta, \mu)$ $(j = 1, 2)$ – solution from class $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$ of system (6), and $y_1, y_2$ – new unknown functions. We obtain:

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t, \varepsilon) y_k + \varepsilon h_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu \sum_{k=1}^{2} u_{jk}(t, \varepsilon, \theta) y_k +$$

$$+\mu^2 \sum_{k=1}^{2} v_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu) y_k + \mu Y_j(t, \varepsilon, \theta, y_1, y_2, \mu), \ j = 1, 2, \qquad (13)$$

where real functions $h_j$ from class $F(m-1, l, \varepsilon_0, \theta)$, real functions

$$v_{jk} = \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial^2 X_j(t, \varepsilon, \theta, \xi_{10} + \nu_1 \mu \eta_1, \xi_{20} + \nu_1 \mu \eta_2)}{\partial x_k \partial x_s} \ \eta_s$$

from class $F(m, l, \varepsilon_0, \theta)$, real functions $Y_1, Y_2$ from class $F(m, l, \varepsilon, \theta)$ with respect $t, \varepsilon, \theta$, analytic with respect $y_1, y_2$ in some area of these variables and contain terms not lower than second order with respect $y_1, y_2$.

We make in the system (13) the substitution:

$$y_j = \varepsilon y_j^{(0)} + y_j^{(1)}, \ j = 1, 2,$$

where $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$ – new unknown functions, and $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}$ are defined by formulas:

$$y_j^{(0)}(t, \varepsilon, \theta, \mu) = L_j[h_1(t, \varepsilon, \theta, \mu), h_2(t, \varepsilon, \theta, \mu)], \ j = 1, 2.$$

As result we obtained:

$$\frac{dy_j^{(1)}}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t, \varepsilon) y_k^{(1)} + \varepsilon^2 h_j(t, \varepsilon, \theta, \mu) + \mu\varepsilon \sigma_j^{(1)}(t, \varepsilon, \theta, \mu) + +\mu \sum_{k=1}^{2} u_{jk}(t, \varepsilon, \theta) y_k^{(1)} +$$

$$+\mu^2 \sum_{k=1}^{2} v_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu) y_k^{(1)} + \mu\varepsilon \sum_{k=1}^{2} w_{jk}(t, \varepsilon, \theta, \mu) y_k^{(1)} + \mu Y_j^{(1)}(t, \varepsilon, \theta, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \mu), \ j = 1, 2, \qquad (14)$$

where $h_j^{(1)} \in F(m-2, l, \varepsilon_0, \theta)$, $\sigma_j^{(1)}, w_{jk} \in F(m-1, l, \varepsilon_0, \theta)$, $Y_j^{(1)}$ belongs to class $F(m-1, l, \varepsilon_0, \theta)$ with respect $t, \varepsilon, \theta$, analytic with respect $y_1^{(1)}, y_2^{(2)}$ in some area of these variables and contains terms not lower than second order with respect $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$.

To system (14) we apply the transformation, which reducing its to almost diagonal kind:

$$y_1^{(1)} = a_{12}(t, \varepsilon) y_1^{(2)} + a_{12}(t, \varepsilon) y_2^{(2)},$$

$$y_2^{(1)} = (-i\omega(t,\varepsilon) - a_{11}(t,\varepsilon))y_1^{(2)} + (i\omega(t,\varepsilon) - a_{11}(t,\varepsilon))y_2^{(2)}. \tag{15}$$

Determinant of transformation (15) is equal $2i\omega(t,\varepsilon)a_{12}(t,\varepsilon)$, therefore his non-degeneracy are provided by condidtions (4), (5). As result we obtain:

$$\frac{dy_j^{(2)}}{dt} = (-1)^j i\omega(t,\varepsilon)y_j^{(2)} + \varepsilon\sum_{k=1}^{2}\beta_{jk}(t,\varepsilon)y_k^{(2)} + \varepsilon^2 h_j^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\mu\varepsilon\sigma_j^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu\sum_{k=1}^{2}u_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)y_k^{(2)} + \mu^2\sum_{k=1}^{2}v_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(2)}+$$

$$+\mu\varepsilon\sum_{k=1}^{2}w_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(2)} + \mu Y_j^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,y_1^{(2)},y_2^{(2)},\mu),\ j=1,2, \tag{16}$$

where $\beta_{jk} \in S(m-1,\varepsilon_0)$, $h_j^{(2)} \in F(m-2,l,\varepsilon_0,\theta)$, $\sigma_{jk}^{(2)} \in F(m-1,l,\varepsilon_0,\theta)$, functions $u_{jk}^{(2)}$, $v_{jk}^{(2)}$ are defined by formulas:

$$u_{jj}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{11}+u_2) + \frac{ia_{11}}{2\omega}(u_{11}-u_2) + (-1)^j\frac{i(\omega^2+a_{11}^2)}{2\omega a_{12}}u_{12} + (-1)^{j-1}\frac{ia_{12}}{2\omega}u_{21},$$

$$u_{jk}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{11}-u_{22}) + (-1)^{j-1}\frac{ia_{11}}{2\omega}(u_{11}-u_{22}) + (-1)^j\frac{i(a_{11}-i\omega)^2}{2\omega a_{12}}u_{12} + (-1)^{j-1}\frac{ia_{12}}{2\omega}u_{21}$$

$(j \neq k)$,

$$v_{jj}^{(2)} = \frac{1}{2}(v_{11}+v_2) + \frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11}-v_2) + (-1)^j\frac{i(\omega^2+a_{11}^2)}{2\omega a_{12}}v_{12} + (-1)^{j-1}\frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21},$$

$$v_{jk}^{(2)} = \frac{1}{2}(v_{11}-v_{22}) + (-1)^{j-1}\frac{ia_{11}}{2\omega}(v_{11}-v_{22}) + (-1)^j\frac{i(a_{11}-i\omega)^2}{2\omega a_{12}}v_{12} + (-1)^{j-1}\frac{ia_{12}}{2\omega}v_{21}$$

$(j \neq k)$.

Obviously, that $u_{jk}^{(2)}, v_{jk}^{(2)} \in F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$ $(j,k=1,2)$.

Now we increase the order of smallness with respect parameter $\varepsilon$ of the off-diagonal elements in matrix of system (16). For this purpose in system (16) we make the substitution:

$$y_1^{(2)} = y_1^{(3)} - \varepsilon\frac{i\beta_{12}(t,\varepsilon)}{2\omega(t,\varepsilon)}\ y_2^{(3)},\ y_2^{(2)} = \varepsilon\frac{i\beta_{21}(t,\varepsilon)}{2\omega(t,\varepsilon)}\ y_1^{(3)} + y_2^{(3)}. \tag{17}$$

Choose $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0)$ from condition:

$$\varepsilon_1^2 \sup_{G(\varepsilon_0)}\left|\frac{\beta_{12}(t,\varepsilon)\beta_{21}(t,\varepsilon)}{\omega^2(t,\varepsilon)}\right| < 4.$$

This condition guaranteed the non-degeneracy of transformation (17), and as result its use has been:

$$\frac{dy_j^{(3)}}{dt} = ((-1)^j i\omega(t,\varepsilon) + \varepsilon\beta_{jj}(t,\varepsilon))y_j^{(3)} + \varepsilon^2\sum_{k=1}^{2}\alpha_{jk}(t,\varepsilon)y_k^{(3)} + \varepsilon^2 h_j^{(3)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+$$

$$+\mu\varepsilon\sigma_j^{(3)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu\sum_{k=1}^{2}u_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)y_k^{(3)}+\mu^2\sum_{k=1}^{2}v_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(3)}+$$

$$+\mu\varepsilon\sum_{k=1}^{2}w_{jk}^{(3)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(3)}+\mu Y_j^{(3)}(t,\varepsilon,\theta,y_1^{3)},y_2^{(3)},\mu),\ j=1,2, \tag{18}$$

where $\alpha_{jk}\in S(m-2,\varepsilon_1)$, $h_j^{(3)}\in F(m-2,l,\varepsilon_1,\theta)$, $\sigma_j^{(3)},w_{jk}^{(3)}\in F(m-1,l\varepsilon_1,\theta)$, $Y_j^{(3)}$ belongs to class $F(m-1,l,\varepsilon_1,\theta)$ with respect $t,\varepsilon,\theta$ and contains the terms not lower than second order with respect $y_1^{(3)},y_2^{(3)}$.

With system (18) we consider the linear homogeneous system:

$$\frac{d\widetilde{y}_j}{dt}=((-1)^j i\omega(t,\varepsilon)+\varepsilon\beta_{jj}(t,\varepsilon))\widetilde{y}_j+\mu\sum_{k=1}^{2}u_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\widetilde{y}_k+$$

$$+\mu^2\sum_{k=1}^{2}v_{jk}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_k,\ j=1,2. \tag{19}$$

In paper [12] shawn that by condition (5) $\exists\ \varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$, $\mu_2\in(0,\mu_1)$ such that $\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$, $\forall\ \mu\in(0,\mu_2)$ exists non-degenerating transformation of kind:

$$\widetilde{y}_j=\widetilde{\widetilde{y}}_j+\sum_{k=1}^{2}\psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{\widetilde{y}}_k,\ j=1,2, \tag{20}$$

where $\psi_{jk}\in F(m-1,l,\varepsilon_2,\theta)$, which reducing the system (19) to kind:

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{y}}_j}{dt}=((-1)^j i\omega(t,\varepsilon)+\varepsilon\beta_{jj}(t,\varepsilon)+\mu\lambda_{j0}(t,\varepsilon)+\mu^2\lambda_{j1}(t,\varepsilon,\mu))\widetilde{\widetilde{y}}_j+$$

$$+\mu\varepsilon\sum_{k=1}^{2}d_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{\widetilde{y}}_k,\ j=1,2, \tag{21}$$

where $\lambda_{j0}(t,\varepsilon)=\Gamma_0\left[u_{jj}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta)\right]$, $\lambda_{j1}(t,\varepsilon,\mu)=\Gamma_0\left[v_{jj}^{(2)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right]\in S(m,\varepsilon_2)$, $d_{jk}\in F(m-1,l,\varepsilon_2,\theta)$. By using this result through substitution

$$y_j^{(3)}=y_j^{(4)}+\sum_{k=1}^{2}\psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(4)},\ j=1,2, \tag{22}$$

where $\psi_{jk}$ – the same as that in formula (20), we reduce by $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2)$, $\mu\in(0,\mu_2)$ the system (18) to kind:

$$\frac{dy_j^{(4)}}{dt}=((-1)^j i\omega(t,\varepsilon)+\varepsilon\beta_{jj}(t,\varepsilon)+\mu\lambda_{j0}(t,\varepsilon)+\mu^2\lambda_{j1}(t,\varepsilon,\mu))y_j^{(4)}+$$

$$+\varepsilon^2 h_j^{(4)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu\varepsilon\sigma_j^{(4)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\varepsilon^2\sum_{k=1}^{2}\alpha_{jk}^{(4)}(t,\varepsilon,\mu)y_k^{(4)}+$$

$$+\mu\varepsilon\sum_{k=1}^{2}w_{jk}^{(4)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(4)}+\mu Y_j^{(4)}(t,\varepsilon,\theta,y_1^{(4)},y_2^{(4)},\mu),\ j=1,2, \tag{23}$$

where $h_j^{(4)}\in F(m-2,l,\varepsilon_2,\theta)$, $\sigma_j^{(4)},w_{jk}^{(4)}\in F(m-1,l,\varepsilon_2,\theta)$, $\alpha_{jk}^{(4)}\in S(m-2,\varepsilon_2)$, $Y_j^{(4)}\in F(m-1,l,\varepsilon_2,\theta)$ with respect $t,\varepsilon,\theta$ and and contains the terms not lower than second order with respect $y_1^{(4)},y_2^{(4)}$.

We denote:

$$\lambda_{j2}(t,\varepsilon,\mu)=(-1)^j i\omega(t,\varepsilon)+\varepsilon\beta(t,\varepsilon)+\mu\lambda_{j0}(t,\varepsilon)+\mu^2\lambda_{j1}(t,\varepsilon,\mu)\ (j=1,2).$$

By condition (5) $\exists\ \varepsilon_3\in(0,\varepsilon_2)$, $\mu_3\in(0,\mu_2)$ such that $\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_3)$, $\mu\in(0,\mu_3)$ the following inequality is true:

$$\inf_{G(\varepsilon_3)}|\lambda_{j2}(t,\varepsilon,\mu)-in\varphi(t,\varepsilon)|\geqslant\gamma_1>0,\ j=1,2,\ n\in\mathbf{Z}. \tag{24}$$

Due to inequality (24) the functions

$$y_j^{(40)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_n[\sigma_j^{(4)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)]}{\lambda_{j2}(t,\varepsilon,\mu)-in\varphi(t,\varepsilon)}\exp(in\theta),\ j=1,2$$

belongs to class $F(m-1,l,\varepsilon_3,\theta)$. We make in system (3) the substitution:

$$y_j^{(4)}=\mu\varepsilon y_j^{(40)}(t,\varepsilon,\mu)+\varepsilon y_j^{(5)},\ j=1,2, \tag{25}$$

where $y_1^{(5)}$, $y_2^{(5)}$ – new unknown functions. We obtain:

$$\frac{dy_j^{(5)}}{dt}=\lambda_{j2}(t,\varepsilon,\mu)y_j^{(5)}+\varepsilon h_j^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\varepsilon^2\sum_{k=1}^{2}\alpha_{jk}^{(5)}(t,\varepsilon,\mu)y_k^{(5)}+$$

$$+\mu\varepsilon\sum_{k=1}^{2}w_{jk}^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_k^{(5)}+\mu\varepsilon Y_j^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,y_1^{(5},y_2^{(5)},\mu),\ j=1,2. \tag{26}$$

All coefficients of this system belongs to class $F(m-2,l,\varepsilon_3,\theta)$, nonlinearities $Y_1^{(5)}$, $Y_2^{(5)}$ analytic with respect $y_1^{(5)},y_2^{(5)}$ in some area of these variables.

With system (26) we consider the linear nonhomogeneous and diagonal system:

$$\frac{dy_{j0}^{(5)}}{dt}=\lambda_{j2}(t,\varepsilon,\mu)y_{j0}^{(5)}+\varepsilon h_j^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu),\ j=1,2. \tag{27}$$

Suppose one of the following two conditions:

$$\mathrm{Re}\lambda_{j0}(t,\varepsilon)\equiv\mathrm{Re}\lambda_{j1}(t,\varepsilon,\mu)\equiv0,\ j=1,2. \tag{28}$$

$$\inf_{G(\varepsilon_0)}|\mathrm{Re}\lambda_{j0}(t,\varepsilon)|\geqslant\gamma_2>0,\ j=1,2. \tag{29}$$

Then from results of paper [13] follows, that $\exists\ \varepsilon_4\in(0,\varepsilon_3)$, $\mu_4\in(0,\mu_3)$ such that $\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_4)$, $\forall\ \mu\in(0,\mu_4)$ the system (27) has particular solution $y_{j0}^{(5)}$ $(j=1,2)$ which belong to class $F(m-2,l,\varepsilon_4,\theta)$.

We construct now the process of successive approximations, defining the initial approximation $y_{j0}^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$, and and the subsequent approximations defining as solutions of class $F(m-2,l,\varepsilon_4,\theta)$ of the linear nonhomogeneous systems:

$$\frac{dy_{js}^{(5)}}{dt} = \lambda_{j2}(t,\varepsilon,\mu)y_{js}^{(5)} + \varepsilon h_j^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{2} \alpha_{jk}^{(5)}(t,\varepsilon,\mu)y_{k,s-1}^{(5)} +$$

$$+\mu\varepsilon \sum_{k=1}^{2} w_{jk}^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)y_{k,s-1}^{(5)} + \mu\varepsilon Y_j^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,y_{1,s-1}^{(5},y_{2,s-1}^{(5)},\mu),\ j=1,2;\ s=1,2,\ldots. \tag{30}$$

Using techniques contraction mapping principle, it is easy to show, that $\exists\ \varepsilon_5,\mu_5 \in (0,+\infty)$ such that $\forall\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_5)$, $\mu\in(0,\mu_5)$ the process (30) converges to the solution $y_j^{(5)}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$ from class $F(m-2,l,\varepsilon_5,\theta)$ of system (26).

**4. Principal Result.** Thus the following theorem.

**Theorem.** *Let the system (3) satisfy the conditions (4), (5) and one of the conditions (28), (29). Then* $\exists\ \varepsilon^*\in(0,\varepsilon_0)$, $\mu^*\in(0,\mu_0)$ *such that* $\forall\ \mu\in(0,\mu^*)$ *the system (3) has a particular solution* $x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$ *from class* $F(m-2,l,\varepsilon^*,\theta)$.

Consider now the linear nonhomogeneous system:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)x_k + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)),\ j=1,2, \tag{31}$$

where $a_{jk}$, $f_j$ the same as in system (3).

**Consequence 1.** *Let the system (31) satisfy the conditions (4), (5). Then* $\exists\ \varepsilon_6\in(0,\varepsilon_0)$ *such that system (31) has a particular solution* $x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$ *from class* $F(m-2,l,\varepsilon_6,\theta)$.

**5. Examples.**

As examples of the application of our results establish the conditions for the existence of solutions from class $F(m-2,l,\varepsilon^*,\theta)$ for systems corresponding to the known in nonlinear mechanics equations of Duffing and Van der Pol.

1. Consider the system of Duffing:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = -\omega^2(t,\varepsilon)x_1 + b(t,\varepsilon)\sin\theta(t,\varepsilon) + \mu x_1^3, \tag{32}$$

$\theta(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)d\tau$, $\omega,b,\varphi\in S(m,\varepsilon_0)$; $\omega,b,\varphi\in\mathbf{R}^+$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}\varphi>0$, $\inf\limits_{G(\varepsilon_0)}\omega>0$.

Obviously the system (32) has a kind (3), where $a_{11}\equiv0$, $a_{22}\equiv0$, $a_{12}\equiv1$, $a_{21}=-\omega^2$, $f_1\equiv0$, $f_2=b\sin\theta$, $X_1\equiv0$, $X_2=x_1^3$.

Assume that the condition (5). Condition (4) holds obviously. Then

$$\xi_{10}=\frac{b}{\omega^2-\varphi^2}\ \sin\theta,\ \xi_{20}=\frac{\varphi b}{\omega^2-\varphi^2}\ \cos\theta,\ u_{11}\equiv0,\ u_{12}\equiv0,$$

$$u_{21}=\frac{3b^2}{(\omega^2-\varphi^2)^2}\ \sin^2\theta,\ u_{22}\equiv0, u_{11}^{(2)}=-u_{22}^{(2)}=\frac{3ib^2}{2\omega(\omega^2-\varphi^2)^2}\ \sin^2\theta,$$

$$\lambda_{10} = -\lambda_{20} = \frac{3ib^2}{4\omega(\omega^2-\varphi^2)^2}, \ \mathrm{Re}\lambda_{j0} \equiv 0 \ (j=1,2),$$

$$v_{11} \equiv 0, \ v_{12} \equiv 0, \ v_{22} \equiv 0, \ v_{21} = 6\left(\frac{b}{\omega^2-\varphi^2} \ \sin\theta + \nu_1\mu\eta_1\right)\eta_1,$$

$$v_{11}^{(2)} = -v_{22}^{(2)} = \frac{3ia_{12}}{\omega}\left(\frac{b}{\omega^2-\varphi^2} \ \sin\theta + \nu_1\mu\eta_1\right)\eta_1,$$

where $0<\nu_1<1$, $\eta_1$ – the real function from class $F(m,l,\varepsilon_0,\theta)$.

Hence the functions $v_{11}^{(2)}$, $v_{22}^{(2)}$ - are purely imaginary, therefore $\mathrm{Re}\lambda_{11} \equiv \mathrm{Re}\lambda_{22} \equiv 0$. So true conditions (28). Hence

**Consequence 2.** *Let system (32) satisfy condition (5). Then* $\exists\ \varepsilon_7 \in (0,\varepsilon_0)$, $\mu_7 \in (0,\mu_0)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0,\mu_7)$ *the system (32) has a particular solution* $x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$ *from class* $F(m-2,l,\varepsilon_7,\theta)$.

2. Consder the system of Van der Pol:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = -\omega^2(t,\varepsilon)x_1 + b(t,\varepsilon)\mathrm{sin}\theta(t,\varepsilon) + \mu(1-x_1^2)x_2, \tag{33}$$

functions $\theta$, $b$, $\omega$, $a_{jk}$, $f_j$ – the same as in system (32), $X_1 \equiv 0$, $X_2 = (1-x_1^2)x_2$.

Assume that the condition (5). Condition (4) holds obviously. Functions $\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j=1,2)$ – the same as in system (32). Then:

$$u_{11} \equiv 0, \ u_{12} \equiv 0, \ u_{21} = -\frac{\varphi b^2}{(\omega^2-\varphi^2)^2} \ \sin 2\theta, \ u_{22} = 1 - \frac{b^2}{(\omega^2-\varphi^2)^2} \ \sin^2\theta,$$

$$u_{11}^{(2)} = 1 - \frac{b^2}{(\omega^2-\varphi^2)^2} \ \sin^2\theta - \frac{i\varphi b^2}{2\omega(\omega^2-\varphi^2)^2} \ \sin 2\theta,$$

$$u_{22}^{(2)} = 1 - \frac{b^2}{(\omega^2-\varphi^2)^2} \ \sin^2\theta + \frac{i\varphi b^2}{2\omega(\omega^2-\varphi^2)^2} \ \sin 2\theta,$$

$$\lambda_{j0} = 1 - \frac{b^2}{2(\omega^2-\varphi^2)^2} \quad (j=1,2).$$

Thus, when the unequality

$$\delta = \sup_{G(\varepsilon_0)}\left|\frac{b(t,\varepsilon)}{\omega^2(t,\varepsilon)-\varphi^2(t,\varepsilon)}\right| < \sqrt{2}, \tag{34}$$

is true, then condidtions (29) with constant $\gamma_2 = 1-\delta^2/2$. Hence

**Consequence 3.** *Let system (33) satisfy condidtions (5) and (34). Then* $\exists\ \varepsilon_8 \in (0,\varepsilon_0)$, $\mu_8 \in (0,\mu_0)$ *such that* $\forall\ \mu \in (0,\mu_8)$ *the system (33) has a particular solution* $x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$ *from class* $F(m-2,l,\varepsilon_8,\theta)$.

**Conclusion.** Thus, for the system (3) the sufficient conditions of the existence of the particular solution from class $F(m-2,l,\varepsilon^*,\theta)$ $(0<\varepsilon^*<\varepsilon_0)$ are obtained.

1. **Malkin I. G.** Some problems of the theory of nonlinear oscillations. – Moscow, 1956. – 491 p.
2. **Grebenikov E. A., Ryabov J. A.** The constructive methods of analysis of nonlinear systems. – Moscow, 1979. – 431 p.
3. **Samoylenko A. M., Ronto N. I.** Numerical-analytic methods of the researching of periodic solutions. – Kyiv, 1976. – 180 p.
4. **Strizhak T. G.** The asymptotic method of normalization. – Kyev, 1984. – 280 p.
5. **Demenchuk A. K.** On quasi-periodic solutions of linear $n$-order differential equations with non-homogeneously in form of trigonometric polynom // Vesci AN Belarusi. Phys.-math. – 2000. – No. 2. – P. 136–138.
6. **Kolomina M. V.** The some conditions of existence of solution in Fourie series kind for nonlinear system of the differential equations // Tambov University Herald. Natural and technical sciencies. – 2000. – V. 5, No. 4. – P. 463–464.
7. **Terekhin M. T., Kolomina M. V.** Periodic solutions of the linear homogeneous systems of the differential equations with periodic coefficients // Izvestya RAEN. Differential equations. – 2001. – No. 4. – P. 120–130.
8. **Kostin A. V., Shchogolev S. A.** On the Stability of Oscillations Representable by Fourier series with Slowly Varying parameters // Differential equations. – 2008. – V. 44, No. 1. – P. 45–51.
9. **Kostin A. V., Shchogolev S. A.** On the solutions of the Quasi-linear Differential system, representable by Fourier series containing Slowly Varying parameters // Ukr. Math. Journ. – 1998. – V. 50, No. 5. – P. 654–664.
10. **Shchogolev S. A.** On the solutions of the quasi-linear differential systems with oscillating matrix of coefficients of linear part // Mathem. studies. – 2007. – V. 21, No. 1. – P. 77–84.
11. **Shchogolev S. A.** On solutions of a quasilinear differential second-order system represented by Fourier series with slowly varying parameters in some critical cases // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 175, No. 2. – P. 173–185.
12. **Shchogolev S. A.** On a reduction of a linear homogeneous differential system with oscillating coefficients to a system with slowly-varying coefficients // Odessa National University Herald. Math. and Mechan. – 2014. – V. 19, Is. 1(21). – P. 81–91.
13. **Shchogolev S.A.** On a solutions, represented by a Fourier series with slowly varying parameters, of the quasilinear second-order differential systems // Odessa National University Herald. Math. and Mechan. – 2007. – V. 12, Is. 7. – P. 156–176.

*ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2014 .–V.19,Is.2(22).–P.87–*??

Mathematical Subject Classification: 11L07, 11K45, 11T23, 11T71, 45B67
UDC 511

**Tran The Vinh**
Odesa I. I. Mechnikov National University

## LINEAR-INVERSIVE CONGRUENTIAL GENERATOR OF PRN'S

**Чан Тхе Вінь. Лінійно-інверсний конгруентний генератор ПВЧ.** Інверсний конгруентний метод генерування рівномірно розподілених псевдовипадкових чисел є особливо привабливою альтернативою лінійним конгруентним генераторам, які володіють низкою небажаних закономірностей. В даній статті розглядається новий лінійно-інверсний конгруентний генератор за модулем степеню простого числа. Даються оцінки тригонометричних сум для лінійно-інверсних конгруентних псевдовипадкових чисел. Результати показують, що ці інверсні конгруентні псевдовипадкові числа проходять $s$-мірний серіальний тест на статистичну незалежність.
**Ключові слова:** інверсні конгруентні псевдо-випадкові числа, експоненційні суми, дискріпансія.

**Чан Тхе Винь. Линейно-инверсный конгруэнтный генератор ПСЧ.** Инверсный конгруэнтный метод генерирования равномерно распределённых псевдослучайных чисел является особенно привлекательной альтернативой линейным конгруэнтным генераторам, которые обладают рядом нежелательных закономерностей. В настоящей статье рассматривается новый линейно-инверсный конгруэнтный генератор по модулю степени простого числа. Даются оценки тригонометрических сумм для линейно-инверсных конгруэнтных псевдослучайных чисел. Результаты показывают, что эти инверсные конгруэнтные псевдослучайные числа проходят $s$-мерный сериальный тест на статистическую независимость.
**Ключевые слова:** инверсные конгруэнтные псевдо-случайные числа, экспоненциальные суммы, дескрипансия.

**Tran The Vinh. Linear-inversive congruential generator of PRN's.** The inversive congruential method for generating uniform pseudorandom numbers is a particulary attractive alternative to inversive congruential generators, which show many undesirable regularities. In the present paper a new linear-inversive congruential generator with prime-power modulus is introduced. Exponential sums on linear-inversive congruential pseudorandom numbers are estimates. The results show that these inversive congruential pseudorandom numbers pass $s$-dimensional serial tests on the statistical independence.
**Key words:** inversive congruential pseudorandom numbers, exponential sum, discrepancy.

**Introduction.** Let $p$ be a prime number, $m > 1$ be a positive integer. Consider the following recursion

$$y_{n+1} \equiv a y_n^{-1} + b \pmod{p^m}, (a, b \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

where $y_n^{-1}$ is a multiplicative inversive modulo $p^m$ for $y_n$ if $(y_n, p) = 1$. The parameters $a$, $b$, $y_0$ we called the multiplier, shift and initial value, respectively.

In the works of Eichenauer, Lehn, Topuzoğlu [5], Niederreiter, Shparlinski [9], Eichenauer, Grothe [4] ets. were proved that the inversive congruential generator (1) produces the sequence $\{x_n\}$, $x_n = \frac{y_n}{p^m}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, which passes s-dimensional serial tests on equidistribution and statistical independence for $s = 1, 2, 3, 4$ if the defined conditions on relative parameters $a$, $b$, $y_0$ are accomplishable.

It was proved that this generator is extremely useful for Quasi-Monte Carlo type application (see, [7–9]). The sequences of PRN's can be used for the cryptographic applications. Now the initial value $y_0$ and the constants $a$ and $b$ are assumed to be secret key, and then we use the output of the generator (1) as a stream cipher. By the works [1], [2] it follows that we must be careful in the time of using the generator (1).

In the current paper we give generalization of the generator (1). This generalization is based on the recurrence relation

$$y_{n+1} \equiv a y_n^{-1} + b + c_n y_n \pmod{p^m} \tag{2}$$

under conditions

$$(c_n, p) = (y_0, p) = 1, \;\; b \equiv a \equiv 0 \pmod{p}.$$

We call the generator (2) the linear-inversive congruential generator. The computational complexity of generator (2) is the same as that for the generator (1), but the reconstruction of parameters $a$, $b$, $c$, $y_0$ is a tricky problem even if several consecutive values $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+N}$ are revealed. Thus the generator (2) can be used in cryptographical applications. Notice that the conditions $(c_n, p) = (y_0, p) = 1$, $b \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$ guarantee that the recursion (2) produces an infinite sequence $\{y_n\}$.

T. Kato, L.-M. Wu and N. Yanagihara [6] studied a nonlinear congruential pseudorandom numbers generator with modulus $2^m$ of the form

$$y_{n+1} \equiv a y_n^{-1} + b + c y_n \,(mod\; 2^m), \;\; (y_n, 2) = 1, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

They have obtained a condition at which sequences of the maximal length of the period are generated.

P. Varbanets and S. Varbanets [12] considered the generator (2) with conditions $(a, p) = (y_0, p) = 1$, $b \equiv c \equiv 0 \pmod{p}$ and showed that the sequence $\{x_n\}$, $x_n = \frac{y_n}{p^m}$ passes tests on equidistribution and statistical independence.

In present paper we investigate generator (2) under conditions $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$, $(c_n, p) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ and show that for the sequence $\{c_n\}$ of special type according sequence $\{x_n\}$ passes tests on equidistribution and statistical independence (say, unpredictability).

It will be observed that W.-S. Chou [3] showed that for generator (1) the conditions $a \equiv 0 \pmod{p}$, $(b, p) = 1$ produce according sequence $\{y_n\}$ with a period $\tau = 1$. It is not alright for applications. Thus in our paper we introduced additional summand in order extend the period of PRN's. We will prove that the sequence $\{y_n\}$produced by (2) has reasonably large period. As well, we give the description of $y_n$, as the polynomial on $n$ and initial value $y_0$. It makes possible to obtain an acceptable estimate for the discrepancy function $D_N$.

**Notation.** The letter $p$ denotes a prime number, $p \geqslant 3$. For an integer $q > 1$ we denote by $\mathbb{Z}_q$ the residue ring of integers modulo q. Also, we denote $\mathbb{Z}_q^*$ the set of invertible elements of $\mathbb{Z}_q$. We write $gcd(a,b) = (a,b)$ for notation a great common divisor of $a$ and $b$. For $z \in \mathbb{Z}$, $gcd(z,p) = 1$ let $z^{-1}$ be the multiplicative inverse of a modulo $p^m$. We write $\nu_p(A)$ if $p^{\nu_p(A)}|A$, $p^{\nu_p(A)+1} \nmid A$. For any $t \in \mathbb{R}$ and $q \in \mathbb{N}$ we write $exp(t) = e^t$, $e(t) = e^{2\pi i t}$, $e_q(t) = e\left(\frac{t}{q}\right)$. We denote an integer part of $x$ by symbol $[x]$.

**Auxiliary arguments.** In this section we shall gather some auxiliary results which we use during the course of proof the main theorems.

**Lemma 1.** *Let $p$ be a prime number and let $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ be a polynomial of degree $n$, $n \geqslant 2$,*

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n,$$

*where $\nu_p(a_j) \geqslant \nu_p(a_2) > 0$, $j \geqslant 3$.*

*Then the following estimates*

$$\left|\sum_{x \in \mathbb{Z}_{p^m}} e_{p^m}(f(x))\right| = \begin{cases} 0 & if \quad \nu_p(a_1) < \nu_p(a_2), \\ 2p^{\frac{m+\nu_p(a_2)}{2}} & if \quad \nu_p(a_1) \geqslant \nu_p(a_2) \end{cases}$$

*hold.*

This assertion is a corollary of the estimate of Gauss sum.

We will study the statistical properties of the sequences of PRN's by the discrepancy of the sequence of points $X_n^{(s)} = \left(\frac{y_n}{p^m}, \frac{y_{n+1}}{p^m}, \ldots, \frac{y_{n+s-1}}{p^m}\right)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $s = 1, 2, \ldots$.

For the sequence of $N$ points $P_s = \{(\gamma_{1,n}, \ldots, \gamma_{s,n})\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$ on the half-opened interval $[0,1)^s$ we denote the discrepancy $D^{(s)}(P_s)$ as

$$D^{(s)}(P_s) = \sup_{\Delta \subseteq [0,1)^s} \left| \frac{A_N(\Delta)}{N} - |\Delta| \right|,$$

where $A_N(\Delta)$ is the number of points of the sequence $P_s$ that hits the box

$$\Delta = [\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times [\alpha_s, \beta_s) \subseteq [0,1)^s,$$

$|\Delta|$ is the volume of $\Delta$ and the supremum is taken over all boxes $\Delta$.

Let $\{x_n\}$ is a sequence of numbers from $[0,1)$. Form the sequence of $s$-dimensional points $X_n^{(s)} = (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1})$, $n = 1, 2, \ldots, N$. We say that $\{x_n\}$ passes $s$-dimensional discrepancy test if for every $j = 1, 2, \ldots, s$ the sequence $\{X_n^j\}$ has a discrepancy which tends to zero for $N \to \infty$.

Consider a point set $P_s$ from $[0,1)^s$ for which all coordinates of all points are rational numbers of the form $\frac{a}{q}$, $0 \leqslant a < q$. Let us denote $C(q) = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \cap \mathbb{Z}$, $C^*(q) = \{a \in C(q) | (a,q) = 1\}$. Let $C_s(q)$ (respectively, $C_s^*(q)$) be the inner product of $s$ copies of $C(q)$ (respectively, $C^*(q)$).

**Lemma 2.** *(Niederreiter, [8]). For an integer $M \geqslant 2$ and $y_0, \ldots, y_{N-1} \in \mathbb{Z}^s$, let $P$ be the point set consisting of the fractional parts $\left\{M^{-1} y_0\right\}, \ldots, \left\{M^{-1} y_{N-1}\right\}$.*

*Then*

$$D_N(P) \leqslant 1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right)^s + \sum_{h \in C_s^*(M)} \frac{1}{r(h,M)} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{1}{M} h \cdot y_n\right) \right|.$$

From this lemma it is seen the the non-trivial estimates of exponential sums over the sequence $\left\{X_n^{(s)}\right\}$ are important for the further investigation we presented.

Next assertion has the paramount importance for estimation of such exponential sums.

**Proposition 1.** *Let $\{y_n\}$ be the sequence produced by the recursion (2) with the parameters $a \equiv b \equiv 0 \mod p$, $(c,p) = (y_0, p) = 1$. Denote $m_0 = 2\nu_p(a) + \nu_p(b)$, $m_1 = \left[\frac{m}{\nu_p(a \cdot b)}\right]$. There are exist the polynomial $F_n(u,v) \in \mathbb{Z}[u,v]$ such that for $n \geqslant m+1$ we have*

$$\begin{aligned} y_n &\equiv F_n(y_0, y_0^{-1}) := A_{0n} + A_{1n} y_0 + B_{1n} y_0^{-1} + \\ &+ B_{2n} y_0^{-2} + B_{3n} y_0^3 + \cdots + B_{m_1 n} y_0^{-m_1} \pmod{p^m}, \\ B_{jn} &\equiv 0 \pmod{p^{m_0}}, \ j \geqslant 4, \end{aligned} \tag{4}$$

*where the coefficients $A_{jn}$, $B_{jn}$ defined by the following relations*

$$\begin{cases} A_{0,n+1} = b + c_{n+1}(b + c_n A_{0,n-1}) = \\ \qquad = b(1 + c_{n+1}) + c_{n+1} c_n (b + c_{n-1} A_{0,n-2}) = \\ \qquad = b(1 + c_{n+1} + c_{n+1} c_n + c_{n+1} c_n c_{n-1} A_{0,n-1}) = \\ \qquad = b(1 + c_{n+1} + c_{n+1} c_n + c_{n+1} c_n c_{n-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + c_{n+1} c_n \cdots c_2 A_{0,1}) = b A_0'(n) \\ A_{1,n+1} = c_{n+1} c_n \cdots c_2 c_1. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} B_{1,n+1} &= a A_{1n}^{-1} + c_{n+1} B_n = a A_{1n}^{-1}(1 + c_{n+1} c_n + c_{n+1} c_n^2 c_{n-1} + \cdots + \\ &\quad + c_{n+1} c_n^2 \cdots c_2^2 c_1) = a B'_{1,n+1}, \\ B_{2,n+1} &= ab \sum_{j=1}^{n+1} \frac{A'_{0,j}}{A_{1j}^2}, \\ B_{3,n+1} &= a^2 B_3'(n) + a b^2 B_3''(n), \\ B_{j,n+1} &\equiv 0 \pmod{p^{m_0}}, \ j \geqslant 4, \end{aligned} \tag{6}$$

*where $B_3'(n)$, $B_3''(n)$ have the simple description in terms of coefficients $c_1, c_2, \ldots$.*

**Proof.** By (2) we infer consequently

$$\begin{aligned} y_1 &\equiv a y_0^{-1} + b + c y_0 \pmod{p^m}, \\ y_2 &= \frac{a}{a y_0^{-1} + b + y_0 c_1} + b_2 + c_2(a y_0^{-1} + b_1 + c_1 y_0) = \\ &= a c_1^{-1} y_0^{-1}(1 - a c_1^{-1} y_0^{-2} - b c_1^{-1} y_0^{-1} + a^2 c_1^{-2} y_0^{-4} + 2ab c_1^{-2} y_0^{-3} + b^2 c_1^{-2} y_0^{-2} + \cdots) + \\ &+ b_2 + c_2(a y_0^{-1} + b_1 + c_1 y_0) = A_{02} + A_{12} y_0 + B_{12} y_0^{-1} B_{22} y_0^{-2} + B_{32} y_0^{-3} + \cdots, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
A_{02} &= b(1+c_2),\\
A_{12} &= c_1c_2,\\
B_{12} &= ac_1^{-1} + ac_2 = a(c_1^{-1}+c_2),\\
B_{22} &= -abc_1^{-2},\\
B_{32} &= -a^2c_1^{-2} + ab^2c_1^{-3},\\
B_{42} &= 2a^2bc_1^{-3} - ab^3c_1^{-4},\\
B_{j2} &\equiv 0 \pmod{p^{\min(2a+b,a+3b)}}.
\end{aligned}$$

In general case

$$y_n = A_{0n} + A_{1n}y_0 + B_{1n}y_0^{-1} + B_{2n}y_0^{-2} + \cdots, \ \ (A_{1n}, p) = 1.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_{n+1} &= aA_{1n}^{-1}y_0^{-1}\left[1 - A_{0n}A_{1n}^{-1}y_0^{-1} - B_{1n}A_{1n}^{-1}y_0^{-2} - \right.\\
&\left. - B_{2n}A_{1n}^{-1}y_0^{-3} - A_{0n}^2A_{1n}^{-2}y_0^{-2} + B_{1n}^2A_{1n}^{-2}y_0^{-4} + \cdots\right] +\\
&+ b + c_{n+1}(A_{0n} + A_{1n}y_0 + B_{1n}y_0^{-1} + B_{2n}y_0^{-2} + B_{3n}y_0^{-3} + B_{4n}y_0^{-4} + \cdots) =\\
&= A_{0,n+1} + A_{1,n+1}y_0 + B_{1,n+1}y_0^{-1} + B_{2,n+1}y_0^{-2} + B_{3,n+1}y_0^{-3+\cdots},
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
A_{0,n+1} &= b + c_{n+1}A_{0n};\\
A_{1,n+1} &= c_{n+1}A_{1n};\\
B_{1,n+1} &= aA_{1n}^{-1} + c_{n+1}B_{1n};\\
B_{2,n+1} &= aA_{0n}A_{1n}^{-2} + B_{2n};\\
B_{3,n+1} &= -aB_{1n}A_{1n}^{-2} - aA_{2n}^2A_{1n}^{-3} + c_{n+1}B_{3n};\\
B_{jn} &\equiv 0 \pmod{p^{m_0}}, \ \ j \geqslant 4.
\end{aligned}$$

Hence, we have

$$\begin{cases}
A_{0,n+1} = b + c_{n+1}(b + c_nA_{0,n-1}) = b(1+c_{n+1}) + c_{n+1}c_n(b + c_{n-1}A_{0,n-2}) =\\
\qquad = b(1 + c_{n+1} + c_{n+1}c_n + c_{n+1}c_nc_{n-1}A_{0,n-1}) =\\
\qquad = b(1 + c_{n+1} + c_{n+1}c_n + c_{n+1}c_nc_{n-1} + \cdots + c_{n+1}c_n\cdots c_2A_{0,1}) = bA_0'(n)\\
A_{1,n+1} = c_{n+1}c_n\cdots c_2c_1.
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
B_{1,n+1} &= aA_{1n}^{-1} + c_{n+1}B_n = aA_{1n}^{-1}(1 + c_{n+1}c_n + c_{n+1}c_n^2c_{n-1} + \cdots +\\
&\quad + c_{n+1}c_n^2\cdots c_2^2c_1) = aB_{1,n+1}',\\
B_{2,n+1} &= ab\sum_{j=1}^{n+1}\frac{A_{0,j}'}{A_{1j}^2},\\
B_{3,n+1} &= a^2B_3'(n) + ab^2B_3''(n),\\
B_{j,n+1} &\equiv 0 \pmod{p^{m_0}}, \ j \geqslant 4.
\end{aligned}$$

■

**Corollary 3.** *Let $\{y_n\}$ be the sequence produced by the recursion (2) with $\nu_p(b) = \beta < \nu_p(a) = \alpha$ and let $c_j = c$, $i = 1, 2, \ldots$. Then we have modulo $p^m$*

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_0 + n(b + p^{\alpha} H_1(y_0^{-1})) - n^2 ab(1 + p^{\alpha-\beta} H_2(y_0^{-1}))+ \\ & + n^3 p^{\min(2\alpha+\beta, \alpha+3\beta)} H_3(y_0^{-1}, n), \quad if \quad c \equiv 1 \pmod{p^m}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_0 + n(b + p^{\alpha} G_1(\delta, z, y_0^{-1})) - n^2 ab(1 + p^{\alpha-\beta} G_2(\delta, z, y_0^{-1}))+ \\ & + n^3 p^{\min(2\alpha+\beta, \alpha+3\beta)} G_3(\delta, z, y_0^{-1}, n), \quad if \quad c \not\equiv 1 \pmod{p^m}, \end{aligned} \tag{8}$$

*where $H_i$, $G_j$ are polynomials on its own variables with integer coefficients.*

**Proof.** For $c \equiv 1 \pmod{p^m}$ we obtain

$$\begin{cases} A_{0,n} \equiv nb, \; A_{1,n} \equiv 1 \pmod{p^m}, \\ B_{1,n} \equiv na, \; B_{2n} \equiv -ab\frac{n(n+1)}{2} \pmod{p^m} \\ B_{3,n} \equiv -ab\frac{n(n+1)}{2} - a^2(n-1) \pmod{p^m} \\ B_{jn} \equiv a^2 b \cdot g_1(n) + ab^3 \cdot g_2(n), \quad g_1(n), g_2(n) \in \mathbb{Z}[n]. \end{cases} \tag{9}$$

From this follows that there are polynomials $H_i$, $i = 1, 2, 3$, such that the relation (7) holds.

If $c \not\equiv 1 \pmod{p^m}$ we denote throughout $\delta$ an index $c \pmod p$. Let us assume that $n = \delta\ell + z$, $0 \leqslant z \leqslant \delta - 1$, $\ell \equiv n\delta^{-1} + z\delta^{-1} \pmod p$.

Mindful that

$$\begin{aligned} c^n &\equiv (1 + pu)^{\ell} c^z \equiv (1 + pu\ell + p^2 u^2 \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \cdots) c^z, \\ c^{-n} &\equiv (1 - pu\ell + p^2 u^2 \frac{\ell(\ell-1)}{2} + \cdots) c^{-z}, \end{aligned}$$

we also obtain

$$\begin{aligned} y_n \equiv {} & y_0 + n(b + p^{\alpha} G_1(\delta, z, y_0^{-1})) - n^2 ab(1 + G_2(\delta, z, y_0^{-1}) p^{\alpha})+ \\ & + n^3 p^{\gamma} G_3(\delta, z, y_0^{-1}), \end{aligned} \tag{10}$$

where $\gamma = \min(2\alpha + \beta, \alpha + 3\beta)$.

The corollary is established. ■

**Corollary 4.** *In notation above with $c_n = c + np$, $n = 1, 2, \ldots$, we have modulo $p^m$*

$$\begin{aligned} y_n = {} & b(n + pf_0(n)) + y_0(1 + pnf_1(n))+ \\ & + y_0^{-1}\left(n + p\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + 2n^2 - n\right) + p^2 f_{21}(n)\right) + \\ & + y_0^{-2}(abf_{22}(n)) + y_0^{-3}(-ab^2 f_3(n)) + p^{\gamma} f_4(n), \end{aligned} \tag{11}$$

*where $f_0, f_1, f_{21}, f_{22}, f_3, f_4 \in \mathbb{Z}[n]$.*

**Proof.** In virtue of Proposition 1 we can write

$$\begin{aligned} A_{0n} &= b[1 + (c+np) + (c+np)(c+(n-1)p) + \cdots \\ &\cdots + (c+np)(c+(n-1)p)\cdots(c+p)c] = \\ &= b\left(1 + c^n + pc^{n-1}\frac{n(n-1)}{2} + p^2c^{n-2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} ij + \cdots\right) = \\ &= b(1 + c^n p^n F_1(n)) = bA'_{0n}, \end{aligned} \tag{12}$$

where $F_1(n) = 1 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots$, $a_i \equiv 0 \pmod{p^i}$, $i = 1, 2, \ldots$.

$$\begin{aligned} A_{1n} &= (1+p)(1+2p+\cdots+1+np) = \\ &= 1 + p\frac{n(n+1)}{2} + p^2\frac{n(n+1)(6n^2-n-2)}{6} + p^3F_2(n),\ F_2(n)\in\mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{13}$$

The similar reasoning shows that

$$B_{1n} = aA_{1n}^{-1}(1 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots),\quad (d1, p) = 1,\ \nu_p(d_j) \geqslant 1,\ j = 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

Further we have

$$B_{2n} = \begin{cases} ab\left(\frac{c-c^n}{1-c} + pF_3(n)\right) & if \quad c \not\equiv 1 \pmod{p^m} \\ ab(n + nF_4(n)) & if \quad c \equiv 1 \pmod{p^m}, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} B_{3n} = -a^2 &\left[\frac{c_n^2}{A_{1n}^4}(1 + (c+np)(c+(n-1)p)) + \right. \\ &\left. + \frac{c_{n-1}^2}{A_{1,n-1}^4}(1 + (c + (n-1)p + \cdots)) + \cdots\right] - \\ &- ab^2\frac{{A_{0n}}'^2}{A_{1n}^3}(n + pg(n)) + \cdots = \\ &= -a^2(2c^2 + c^3pn + c^4p^2n^2(1 + pg_1(n))) - \\ &- ab^2(n + 2c^n + c^{2n})(1 + png_2(n)), \end{aligned} \tag{16}$$

$$B_{jn} \equiv p^\gamma g_j(n) \pmod{p^m},\ j \geqslant 4, \tag{17}$$

where $g_1(n)$, $g_2(n)$, $g_j(n)$, $j \geqslant 4$, are polynomials with integer coefficients.

Hence, by Proposition 1 we obtain Corollary 2. ■

From Proposition 1, Corollaries 1 and 2 we deduce

**Corollary 5.** *Let $\tau$ be the least of periods for the sequence $\{y_n\}$ generated by the congruential recursion (2) with $\nu_p(b) = \beta < \nu_p(a) = \alpha$. Then $\tau = p^{m-\beta}$, if $c_n = c$ or $c_n = c + np$, $(c, p) = 1$.*

**Proof.** Indeed, from formulas for $A_{0n}$, $A_{1n}$, $B_{jn}$, $j = 1, 2, \ldots$, we can conclude that

$$A_{i,n+3} \equiv A_{i,3},\quad B_{j,n+3} \equiv B_{j,3} \pmod{p^m},\ i = 0, 1;\ j = 1, 2, \ldots,$$

if and only if $n \equiv 0 \pmod{p^{m-\beta}}$. ■

Let $\{y_n\}$ be the sequence produced by (2). For $h, h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ and $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, we denote

$$S_N(h, y_0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{h y_n}{p^m}},$$

$$\sigma_{k,\ell}(h_1, h_2; p^m) = \sum_{y_0 \in \mathbb{Z}^*_{p^m}} e\left(\frac{h_1 y_k + h_2 y_\ell}{p^m}\right).$$

**Proposition 2.** *Let we have the linear-inversive congruential generator produced by relation (2) with $\beta = \nu_p(b) < \nu_p(a) = \alpha$, $2\beta \leqslant m$, and let $(h, p^m) = s$. The we have the following estimates*

$$|S_N(h, y_0)| \leqslant \begin{cases} 0 & if \quad N = \tau,\ m > \beta + s, \\ N & if \quad m \leqslant \beta + s, \\ 2p^{\frac{m+s+\beta}{2}}(1 + \log p^{m-\beta}) & if \quad m > \beta + s. \end{cases}$$

**Proof.** First we assume that $N = \tau = p^{m-\beta}$, i.e. $N$ is a period of the sequence $\{y_n\}$. The Corollaries 1 and 2 from Proposition 1 show that the behavior of the exponential sum $S_\tau(h, y_0)$ on the sequences of PRN's for the cases $c_n = c$ and $c_n = c + np$ are identical. Thus, we consider the sequence generated by (2) with $c_n = c$.

By Corollary 1 we have

$$|S_\tau(h, y_0)| = \left|\sum_{n=0}^{p^{m-\beta}-1} e\left(\frac{h y_n}{p^{m-\beta}}\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{p^{m-\beta}-1} e\left(\frac{h_0 F(n)}{p^{m-s-\beta}}\right)\right|,$$

where $h = h_0 p^s$, $F(n) = C_0 + C_1 n + \cdots + C_m n^m$,

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv b \pmod{p^{\beta+1}}, \\ C_2 &\equiv -ab \pmod{p^{\alpha+\beta+1}}, \\ C_j &\equiv 0 \pmod{p^\gamma}, \end{aligned}$$

moreover,

$$\alpha = \nu_p(a), \quad \beta = \nu_p(b), \quad \gamma = \min(2\alpha + \beta, \alpha + 3\beta) > \alpha.$$

Now, applying Lemma 1 we obtain

$$|S_\tau(h, y_0)| = \begin{cases} \tau & if \quad m \leqslant \beta + s, \\ 0 & if \quad m > \beta + s. \end{cases}$$

In the case $N < \tau$ we use the well-known estimate of uncomplete exponential sum by means of the complete exponential sum (see, [7], Ch. 1, Th. 2)

$$|S_N(h, y_0)| \leqslant \max_{1 \leqslant t \leqslant \tau} \left|\sum_{n=0}^{\tau-1} e^{2\pi i \left(\frac{hF(n)}{\tau} + \frac{tn}{\tau}\right)}\right| (1 + \log \tau).$$

By virtue of the fact that the congruence

$$hb + t \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+\beta}}$$

have only one solution under condition $1 \leqslant t \leqslant \tau$, we deduce (by Lemma 1), that

$$|S_N(h, y_0)| \leqslant p^s \cdot 2p^{\frac{m+\beta-s}{2}}(1 + \log p^{m-\beta}) = 2p^{\frac{m+\beta+s}{2}}(1 + \log p^{m-\beta}).$$

■

**Remark.** *Similar bound for $S_N(h, y_0)$ is valid for case $c_n = c + np$.*

**Proposition 3.** *Let $(h_1, h_2, p) = 1$, $\nu_p(h_1 + h_2) = s_1$, $\nu_p(h_1k + h_2\ell) = s_2$ and let $\{y_n\}$ be the sequence produced by (2) with $c_n = c$ or $c_n = c + np$. The following estimates*

$$\left| \sum_{y_0 \in \mathbb{Z}^*_{p^m}} e\left(\frac{h_1 y_k + h_2 y_\ell}{p^m}\right) \right| \leqslant \begin{cases} 0 & if \quad s_1 < s_2 + \beta,\ m - s_1 - s_2 > 0, \\ 2p^{\frac{m+\beta+s_2}{2}} & if \quad s_1 \geqslant s_2 + \beta,\ m - s_1 - s_2 > 0, \\ p^{m-1}(p-1) & otherwise, \end{cases}$$

*hold.*

**Proof.** Let $c = 1 + pu$, $u \not\equiv 0 \pmod{p^{m-1}}$. By Corollary 2 we have modulo $p^m$

$$h_1 y_k + h_2 y_\ell = B_0 + B_1 y_0 + B_{-1} y_0^{-1} + B_{-2} y_0^{-2} + \cdots,$$

where

$$\begin{aligned}
B_0 &= b\left[(h_1 + h_2) + (h_1 c^k p^k F_1(k) + h_2 c^\ell p^\ell F_1(\ell))\right] = bB'_0,\ \ (B'_0, p) = 1; \\
B_1 &= (h_1 + h_2) + p\left(h_1 \frac{k(k+1)}{2} + h_2 \frac{\ell(\ell+1)}{2} + \cdots\right); \\
B_{-1} &= a[(h_1 + h_2) + d_1(h_1 k + h_2 \ell) + d_2(h_1 k^2 + h_2 \ell^2) + \cdots]; \\
B_{-2} &= ab\left[\frac{c(h_1 + h_2) - (h_1 c^k + h_2 c^\ell)}{c-1} + p(h_1 F_3(k) + h_2 F_3(\ell))\right]; \\
B_{-3} &\equiv -a^2\left(2c^2(h_1 + h_2) + c^3 p(h_1 k + h_2 \ell) + \right. \\
&\quad \left. + c^4 p^2(h_1(k^2 + pg(k)) + h_2(\ell^2 + pg(\ell)))\right) - \\
&\quad - ab^2\left[h_1 k + h_2 \ell + 2(h_1 c^k + h_2 c^\ell) + (h_1 c_1^{2k} + h_2 c^{2\ell})(h_1 + h_2) + \right. \\
&\quad \left. + p(h_1 k g(k) + h_2 \ell g(\ell))\right]; \\
B_{-j} &\equiv 0 \pmod{p^\gamma},\ j = 4, 5, \ldots.
\end{aligned}$$

Substituting $c^k$ and $c^\ell$ by the polynomials on $k$ and $\ell$ and applying Lemma 1 we obtain requisite statement. ■

This conclusion of Proposition 3 stays behind also for $c_n = c + pn$, $c \not\equiv 1 \pmod{p^m}$.

**Main Results.** The properties of equidistribution and statistical independency of sequences of PRN's $\{y_n\}$ generated by (2) we will study using bounds for the discrepancy of certain points produced by the sequence $\{x_n\}$, $x_n = \frac{y_n}{p^m}$. We say that the sequence $\{x_n\}$ passes the $s$-dimensional test on equidistribution and statistical independency if every sequence $\{X_n^{(j)}\}$, $X_n = (x_n, \ldots, x_{n+j-1})$, $j = 1, \ldots, s$ has the discrepancy $D_N(X_n^{(j)})$ such that $D_N(X_n^{(j)}) \to 0$ for $N \to \infty$. From Lemma 2 it follows that we should have non-trivial estimates for sum

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{h_1 y_n + \cdots + h_j y_{n+j-1}}{p^m}\right),\ \ j = 1, 2, \ldots, s.$$

**Theorem 1.** *Let* $\{X_n^{(j)}\}$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $X_n^{(j)} = (x_n, \ldots, x_{n+j-1})$ *be the sequence of points* $X_n^{(j)} \in [0,1)^j$ *produced by (2). Then for every* $j$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, *the following estimate*

$$D_N^{(j)} := D_N^{(j)}(X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}) \leqslant \frac{j}{p^m} + \frac{1}{p^{\frac{m}{2}-\beta}} \left(1 + \frac{1}{p^\beta}\left(\frac{2}{\pi}\log p^m + \frac{7}{5}\right)^j\right)$$

*holds.*

**Proof.** Let $h \cdot X_n^{(j)}$ denote the inner dot of $h$ and $X_n^{(j)}$, i.e.

$$h \cdot X_n^{(j)} = h_1 x_n + h_2 x_{n+1} + \cdots + h_j x_{n+j-1}.$$

In order to apply Lemma 2, we should have an estimate for the sum

$$\sum_{n=0}^{\tau-1} e\left(\frac{h_1 y_n + h_2 y_{n+1} + \cdots + h_j y_{n+j-1}}{p^m}\right).$$

Without loss of generality, we can suppose that $(h_1, h_2, \ldots, h_j, p) = 1$. From the representation $y_n$ as a polynomial on $n$ (by Corollaries 1 and 2) we have

$$h_1 y_n + \cdots + h_j y_{n+j-1} = (h_1 y_0 + \cdots h_j y_0) +$$

$$+ (h_1 n + h_2(n+1) + \cdots + h_j(n+j-1))b + np^{\alpha+\beta} G^{(1)}(y_0^{-1}) -$$

$$- ab(1 + p^{\alpha-\beta} G^{(2)}(y_0^{-1})) \sum_{i=1}^{j} h_i (n+i-1)^2 +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{j} h_i (n+i-1)^3\right) p^\gamma G^{(3)}(y_0, h_i).$$

Hence, the sum $h_1 y_n + \cdots + h_j y_{n+j-1}$ represents a polynomial of special type $f(n)$ such that the exponential sum $\sum\limits_{n=1}^{p^m} e\left(\frac{f(n)}{p^m}\right)$ is appreciable by Lemma 1:

$$\left|\sum_{n=0}^{\tau-1} e\left(\frac{h_1 y_n + \cdots + h_j y_{n+j-1}}{p^m}\right)\right| \leqslant 2p^{\frac{m+\beta+\ell}{2}},$$

if $(h_1 + h_2 + \ldots + h_j, p^m) = p^\ell$.

Now, using the connection between complete and uncomplete exponential sums and Lemma 2, we deduce the assertion of theorem. ∎

**Corollary 6.** *The sequence of PRN's produced by (2) passes* $s$*-dimensional test on equidistibution and statistical independency for* $s = 1, 2, \ldots, p-1$.

**Theorem 2.** *Let the sequence* $\{y_n\}$ *be produced by (2) with* $(c, p) = (y_0, p) = 1$, $0 < \beta = \nu_p(b < \alpha = \nu_p(a))$. *Then for* $h \in \mathbb{Z}$, $\nu_p(h) = s$, *we have*

$$\overline{S}_N(h) = \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{y \in \mathbb{Z}_{p^m}^*} |S_N(h, y_0)| \leqslant N^{\frac{1}{2}} + Np^{-\frac{m+s}{4}}(2 + \sqrt{5} p^{\frac{\beta}{4}}).$$

**Proof.** Without loss of generality we will assume that $s = 0$. By the Cauchy-Schwarz inequality we obtain

$$|\overline{S}_N(h)|^2 \leqslant \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{y_0 \in \mathbb{Z}^*_{p^m}} |S_N(h, y_0)|^2 = \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \sum_{y_0 \in \mathbb{Z}^*_{p^m}} e\left(\frac{h(y_k - y_\ell)}{p^m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{k,\ell=0} |\sigma_{k,\ell}(h, -h; p^m)| = \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ \nu_p(k-\ell)=r}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}(h - h; p^m)| =$$

$$= \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ \nu_p(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}(h, -h; p^m)| + \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{\substack{k=0 \\ k=\ell}}^{N-1} |\sigma_{k,k}(h, -h; p^m)| =$$

$$= N + \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ \nu_p(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}(h, -h; p^m)|.$$

Using Proposition 3 we infer

$$|\overline{S}_N(h)|^2 \leqslant N + \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \left( \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ k \not\equiv \ell (mod\ 2) \\ \nu_p(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell(h,-h;p^m)}| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ k \equiv \ell (mod\ 2) \\ \nu_p(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}(h, -h; p^m)| \right) \leqslant N + \frac{1}{\varphi(m)} \left[ 2p^{\frac{m}{2}} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \frac{N}{p^\gamma} + \right.$$

$$\left. + \left( \sum_{\gamma < m-\beta} + \sum_{m-\beta \leqslant \gamma \leqslant m-1} \right) \sum_{k,\ell=0}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}(h, -h; p^m)| \right] \leqslant$$

$$\leqslant N + \frac{1}{\varphi(m)} \left\{ 2p^{\frac{m}{2}} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \frac{N}{p^\gamma} + \right.$$

$$\left. + \left( \sum_{\gamma < m-\beta} + \sum_{m-\beta \leqslant \gamma \leqslant m-1} \right) \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ \nu_p(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}(h, -h; p^m)| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant N + \frac{1}{\varphi(m)} \left\{ 2Np^{\frac{m}{2}} + 2 \sum_{\gamma < m-\beta} p^{\frac{m+\beta+\gamma}{2}} \frac{N}{p^\gamma} + p^m \sum_{\gamma \geqslant m-\beta} \frac{N}{p^\gamma} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant N + \frac{1}{\varphi(m)}\left(2Np^{\frac{m}{2}} + 2Np^{\frac{m+\beta}{2}} + Np^{m}p^{-m+\beta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant Np^{-\frac{m}{2}}\left(4 + 5p^{\frac{\beta}{2}}\right).$$

Thus, for $(h, p) = 1$:

$$|\overline{S}_N(h)| \leqslant N^{\frac{1}{2}} + Np^{-\frac{m}{4}}\left(2 + \sqrt{5}p^{\frac{\beta}{4}}\right).$$

If $(h, p^m) = p^s$, $s < m$, then similarly to the previous, we have

$$|\overline{S}_N(h)| \leqslant N^{\frac{1}{2}} + Np^{-\frac{m+s}{4}}\left(2 + \sqrt{5}p^{\frac{\beta}{4}}\right).$$

■

**Theorem 3.** *Let $D_N(y_0)$ denotes the mean of discrepancy of the sequence points $\left\{\frac{y_n}{p^m}\right\}$ produced by the recursion (2) with initial value $y_0$. Then the following bound for value averaged over all $y_0 \in \mathbb{Z}^*_{p^m}$*

$$\overline{D}_N = \frac{1}{\varphi(p^m)} \sum_{y_0 \in \mathbb{Z}^*_{p^m}} D_N(y_0) \leqslant \frac{1}{p^m} + 3p^{-\frac{m-\beta}{4}} \log p^m$$

*holds.*

This assertion follows immediately from Theorem 2 and Lemma 2.

The last theorem shows that for $\beta > \frac{2}{3}m$ upon the average an estimate of $D_N(y_0)$ it is preferable than individual estimate $D_N(y_0)$ given by Theorem 1.

**Conclusion.** In the presented paper a new linear-inversive congruential generator with prime-power modulus was introduced. Exponential sums on linear-inversive congruential pseudorandom numbers were estimated. The obtained results show these inversive congruential pseudorandom numbers pass $s$-dimensional serial tests on the statistical independence.

1. **Blackburn S. R.** Predicting nonlinear pseudorandom number generators / S. R. Blackburn, D. Gomez-Peres, I. Gutierrez, I. Shparlinski // Math. Comp. – 2004. – V. 74(251). – P. 1471–1494.
2. **Blackburn S. R.** Reconstructing noisy polynomial evaluation in residue rings / S. R. Blackburn, D. Gomez-Peres, I. Gutierrez, I. Shparlinski // J. of Algorithm. – 2006. – V. 61(2). – P. 47–59.
3. **Chou W.-S.** The period lengths of inversive congruential recursions / W.-S. Chou // Acta Arith. – 1995. – V. 73(4). – P. 325–341.
4. **Eichenauer-Herrmann J.** A New Inversive Congruential Pseudorandom Number Generator with Power of Two Modulus / J. Eichenauer-Herrmann, H. Grothe // ACM Transactions of Modelling and Computer Simulation. – 1992. – V. 2(1). – P. 1–11.
5. **Eichenauer J.** A nonlinear congruential pseudorandom number generator with power of two modulus / J. Eichenauer, J. Lehn, A. Topuzoğlu // Math. Comp. – 1988. – V. 51. – P. 757–759.

6. **Kato T.** On a nonlinear congruential pseudorandom number generator / T. Kato, L.-M. Wu, N. Yanagihara // Math. of Comp. – 1996. – V. 65(213). – P. 227–233.
7. **Korobov N. M.** Trigonometric Sums and Their Applications. – Moscow, Nauka, 1989.
8. **Niederreiter H.** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods. – SIAM, Philadelphia, 1992.
9. **Niederreiter H.** Exponential sums and the distribution of inversive congruential pseudorandom numbers with prime-power modulus / H. Niederreiter, I. Shparlinski // Acta Arith. – 2000. – V. 90(1). – P. 89–98.
10. **Niederreiter H.** On the Distribution of Compound Inversive Congruential Pseudorandom Numbers / H. Niederreiter, A. Winterhof // Monatsh. Math. – 2001. – V. 132. – P. 35-–48.
11. **Varbanets P.** Exponential sums on the sequences of inversive congruential pseudorandom numbers with prime-power modulus / P. Varbanets, S. Varbanets // Voronoi's Impact on modern science, Proceedings of the 4th International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, Ukraine, September 22–28, 2008. – Book 4, Volume 1. – P. 112–130.
12. **Varbanets P.** Generalizations of Inversive Congruential Generator, Analytic and probabilistic methods in number theory / P. Varbanets, S. Varbanets // Proceedings of the $5^{th}$ international conference in honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, September 4–10, 2011. – Vilnius: TEV, 2012. – P. 265–282.

*ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 100–105*

**М Е Х А Н І К А**

Mathematical Subject Classification: 34H05, 74F10
УДК 531.39

**Я. С. Зинкевич**
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

# КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Автор благодарит Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко и А. Л. Рачинскую за полезные обсуждения. Работа частично поддержана проектом № 953.1/010 третьего совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований 2013 года.

**Зінкевич Я. С. Квазиоптимальне гальмування обертального руху динамічно симетричного твердого тіла з порожниною, заповненою в'язкою рідиною, в середовищі з опором.** Досліджена задача про квазиоптимальне за швидкодією гальмування обертань вільного динамічно симетричного твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою в'язкою рідиною. На тіло діє малий гальмовний момент сил лінійного опору середовища. Отримана та досліджена система нелінійних дифференційних рівнянь, що описують еволюцію обертання твердого тіла зі сферичною порожниною, заповненою в'язкою рідиною.

**Ключові слова:** квазиоптимальне гальмування, тверде тіло, обертання, порожнина з в'язкою рідиною, середовище з опором.

**Зинкевич Я. С. Квазиоптимальное торможение вращательного движения динамически симметричного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в среде с сопротивлением.** Исследована задача о квазиоптимальном по быстродействию торможении вращений свободного динамически симметричного твердого тела, которое содержит сферическую полость, заполненную вязкой жидкостью. На тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Получена и исследована система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию вращения твердого тела со сферической полостью, заполненной вязкой жидкостью.

**Ключевые слова:** квазиоптимальное торможение, твердое тело, вращение, полость с вязкой жидкостью, среда с сопротивлением.

**Zinkevych Y. S. Quasi-optimal rotation deceleration of a dynamically symmetric rigid body with a cavity filled with viscous fluid in a resistive medium.** The problem of quasi-optimal deceleration of rotations of a dynamically symmetric rigid body is investigated. It is assumed that the body contains a spherical cavity filled with highly viscous fluid. The rigid body is subjected to a retarding torque generated by linear medium resistance forces. A system of nonlinear differential equations describing the evolution of rotation of a rigid body with a spherical cavity filled with highly viscous fluid was obtained and investigated.

**Key words:** quasi-optimal deceleration, rigid body, rotation, cavity filled with viscous fluid, resistive medium.

**Введение.** Анализ гибридных систем, т. е. объектов, содержащих элементы с распределенными и сосредоточенными параметрами, представляет значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Разработаны подходы и получены значительные результаты для систем, содержащих «квазитвердые» тела. Модели последних предполагают, что в определенном смысле их движение близко к движению абсолютно твердых тел. Оно сводится к наличию дополнительных слагаемых в уравнениях движения Эйлера для некоторого фиктивного твердого тела. Исследованию движения и оптимального торможения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью большой вязкости, посвящен ряд работ (см., например, [1, 2]). Анализу пассивных движений твердого тела в сопротивляющейся среде уделялось большое внимание [2–4]. Проблема управления вращениями «квазитвердых» тел посредством сосредоточенных моментов сил, имеющая значение для приложений, менее исследована. В работах [2, 5] удалось выделить класс систем, приводящих к гладким управляющим воздействиям и дающих возможность применения метода сингулярных возмущений без накопления погрешностей типа «временных погранслоев».

Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Необходимость анализа влияний различных неидеальностей обусловлена ростом требований к точности решения практических задач космонавтики, гироскопии и др. Влияние неидеальностей может быть выявлено на основе асимптотических методов нелинейной механики (сингулярных возмущений, усреднения и др.).

Ниже рассматривается задача квазиоптимального торможения вращений динамически симметричного тела, содержащего сферическую полость, заполненную вязкой жидкостью. На твердое тело действует тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Управление вращениями производится с помощью момента сил, ограниченного по модулю. Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений $\varepsilon b_i u_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где выражения $b_{1,2,3}$ имеют размерность момента сил, $\varepsilon$ – малый параметр, $u_{1,2,3} \sim 1$ – безразмерные управляющие функции, подлежащие определению.

## Основные результаты

**1. Постановка задачи.** Рассматривается динамически симметричное твердое тело со сферической полостью, заполненной жидкостью большой вязкости (при малых числах Рейнольдса) [1]. На основе подхода [5] уравнения управляемых вращений (уравнения Эйлера) записываются в виде:

$$\dot{\mathbf{G}} + \omega \times \mathbf{G} = \mathbf{M}^u + \mathbf{M}^p + \mathbf{M}^r. \tag{1}$$

Здесь $\omega = (p, q, r)$ — вектор абсолютной угловой скорости, $\mathbf{J} = diag\,(A, A, C)$ — тензор инерции невозмущенного тела, $\mathbf{M}^u$ — вектор управляющего момента сил, $\mathbf{M}^p$ — вектор возмущающего момента сил, обусловленный наличием вязкой жидкости в сферической полости, $\mathbf{M}^r$ — вектор момента сил диссипации, кинетический момент тела $\mathbf{G} = J\omega$, его модуль $G = |\mathbf{G}| = \left[A^2\left(p^2 + q^2\right) + C^2 r^2\right]^{1/2}$.

Величина управляющего момента сил $\mathbf{M}^u$ предполагается малой порядка $\varepsilon$. Компоненты управляющих моментов представлены в виде произведений постоянных $b_i$, имеющих размерность момента сил на малый параметр $\varepsilon$ и безразмерные управляющие функции $u_i$, подлежащие определению,

$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i, |\mathbf{u}| \leqslant 1.$$

Выражения $\varepsilon b_{1,2,3}$ характеризуют эффективность системы управления по каждой из связанной осей.

Известно [5], что при $b_i = b(b > 0)$, где параметр $b$ может быть функцией времени, оптимальный по быстродействию закон торможения имеет вид: $M_i = -G_i G^{-1}$. Движение в этом частном случае системы управления было изучено в [5, 6]. Оно характеризуется тем, что величина квадрата модуля эллиптических функций $k^2 = const$, а модуль кинетического момента $G$ и скорость изменения фазы $\psi$ убывают по известным законам, как функции времени.

Если величины $b_i$ близки, то указанный закон торможения будет квазиоптимальным [5, 7]. Для прикладных задач поэтому представляет интерес исследование движения твердого тела с заданным законом управления достаточно простого вида [5, 7]:

$$M_i^u = \varepsilon b_i u_i, u_i = -G_i G^{-1}, i = 1, 2, 3.$$

Для упрощения задачи в систему (1) внесено структурное ограничение. Считается, что диагональный тензор момента сил вязкого сопротивления пропорционален тензору момента сил инерции, т. е. момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту

$$\mathbf{M}^r = -\varepsilon\lambda\mathbf{J}\omega,$$

где $\lambda$ — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Сопротивление, действующее на тело, можно представить парой приложенных сил. При этом проекции момента этой пары на главные оси инерции тела являются величинами $\varepsilon\lambda Ap$, $\varepsilon\lambda Aq$ , $\varepsilon\lambda Cr$. Такое предположение не является противоречивым.

Уравнения управляемого движения (1) в проекциях на главные центральные оси инерции в данной постановке задачи имеют вид

$$\begin{gathered} A\dot{p} + (C - A)\,qr = \varepsilon b_1 u_1 + Lpr^2 - \varepsilon\lambda Ap, \\ A\dot{q} + (A - C)\,pr = \varepsilon b_2 u_2 + Lqr^2 - \varepsilon\lambda Aq, \\ C\dot{r} = \varepsilon b_3 u_3 + H\left(p^2 + q^2\right) - \varepsilon\lambda Cr. \end{gathered} \tag{2}$$

Введенные в (2) обозначения $L, H$, выражаются следующим образом согласно [1]

$$L = \beta P \nu^{-1} A^{-2} C\,(A - C)\,, H = \beta\nu^{-1} A^{-1}\,(C - A)\,. \tag{3}$$

Коэффициенты $L, H$ (3) характеризуют момент сил, обусловленный движениями сильно вязкой жидкости, $\beta$ — объемная плотность, $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости, $P$ — коэффициент, определяемый формой полости; для сферической полости радиуса $a_0$ он равен $P = 8\pi a_0^7/525$ [1]. Основным допущением является предположение о малости числа Рейнольдса $Re$:

$$Re = lV\nu^{-1} \sim l^2 T_*^{-1}\nu^{-1} \sim l^2\omega\nu^{-1} \ll 1. \tag{4}$$

Здесь $l$ – характерный линейный размер полости ($l \sim a_0$ ), $V$ – характерная скорость, а $T_*$ – некоторый временной масштаб ($T_* \sim \omega^{-1}$ ). Если взять за единицу длины и времени $l$ и $T_*$ соответственно, то согласно (4) кинематический коэффициент вязкости является большим параметром, $\nu \ll 1$ [1]. Заметим также, что масса жидкости может быть значительной, сравнимой с массой системы.

Ставится задача квазиоптимального по быстродействию торможения вращений

$$\omega(T) = 0, T \to min_u, |\mathbf{u}| \leqslant 1. \tag{5}$$

**2. Решение задачи квазиоптимального торможения.** Домножим первое уравнение (2) на $Ap$, второе – на $Aq$, третье – на $Cr$ и сложим. Получим дифференциальное уравнение для кинетического момента тела вида

$$\dot{G} = -\varepsilon G^{-2}\left(b_1 A^2 p^2 + b_2 A^2 q^2 + b_3 C^2 r^2\right) - \varepsilon\lambda G.$$

Используем общее порождающее решение системы (2)

$$r = C_1, p = a\cos\psi, q = a\sin\psi\, (a > 0, a = const, C_1 \neq 0, C_1 = const) \tag{6}$$

в качестве преобразования к переменным $a$, $C_1 = r$ .

Подставим (6) в третье уравнение (2), а для первых двух уравнений учитываем, что $a^2 = p^2 + q^2$ и $\dot{a} = \dot{p}\cos\psi + \dot{q}\sin\psi$. Усредним полученную систему уравнений для $a$ и $r$ по фазе $\psi$.

После усреднения система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon r\left(-HC^{-1}a^2 + b_3 G^{-1} + \lambda\right), \\ \dot{a} &= -\varepsilon a\left(-LA^{-1}r^2 + \tfrac{b_1+b_2}{2}G^{-1} + \lambda\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя (6) в уравнение для $G$ , получим $G = \left(A_2 a^2 + C_2 r^2\right)^{1/2}$. Тогда система (7) примет вид:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= -2\varepsilon x\left(-HC^{-1}y + b_3\left(A^2 y + C^2 x\right)^{-1/2} + \lambda\right), \\ \tfrac{dy}{dt} &= -2\varepsilon y\left(-LA^{-1}x + \tfrac{b_1+b_2}{2}\left(A^2 y + C^2 x\right)^{-1/2} + \lambda\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $x = r^2$, $y = a^2$.

**3. Численный расчет.** В общем случае решение системы (8) можно построить численно. Для этого приведем систему к безразмерному виду, выбрав за характерные параметры задачи время торможения $T$, коэффициент проекции управляющего момента $b_3$ и значения кинетического момента в начальный момент времени $G_0$. Безразмерные величины имеют вид

$$\tilde{t} = \frac{t}{T}, \tilde{\lambda} = \lambda T, \tilde{A} = \tfrac{Ay_0}{b_3}, \tilde{C} = \tfrac{Cx_0}{b_3}, \tilde{G} = \tfrac{G}{G_0},$$
$$k_1 = \frac{C}{A}, k_2 = \frac{x_0}{y_0}, k = k_1^2 k_2, \chi_1 = \tfrac{b_1}{b_3}, \chi_2 = \tfrac{b_2}{b_3}.$$

Введем характерное число

$$\sigma = \frac{b_3 T}{A\sqrt{y_0}},$$

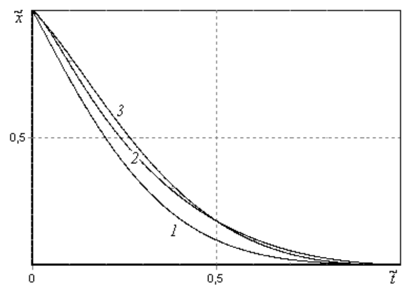


Рис. 1. График изменения функции $\tilde{x}$

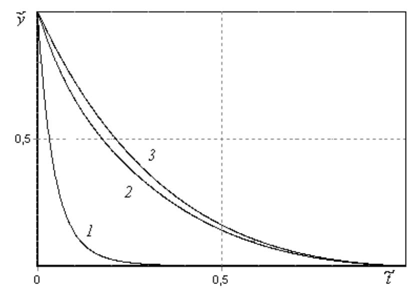


Рис. 2. График изменения функции $\tilde{y}$

которое определяет основной процесс задачи — процесс торможения твердого тела под действием управляющего момента за минимальный промежуток времени $T$.

Система уравнений движения в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} &= -2\varepsilon\tilde{x}\left(-\eta\tilde{y} + \frac{\sigma}{\sqrt{\tilde{y}+k\tilde{x}}} + \lambda\right), \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} &= -2\varepsilon\tilde{y}\left(\eta k\tilde{x} + \frac{\chi_1+\chi_2}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{\tilde{y}+k\tilde{x}}} + \lambda\right), \end{aligned}$$

где $\eta = HC^{-1}y_0T$.

Кинетический момент тела определяется из соотношения

$$\tilde{G} = \frac{\sqrt{\tilde{y}+k\tilde{x}}}{\sqrt{1+k}}.$$

Интегрирование проводилось для начальных условий $\tilde{x}_0 = 1$, $\tilde{y}_0 = 1$, $\tilde{\lambda} = 1$, $\tilde{G}_0 = 1$.

Проводилось численое решение при различных значениях величин $\chi_1$, $\chi_2$, $k$ и $\sigma$. Для разных значений характерного числа существуют значения безразмерных коэффициентов управляющего момента $\chi_1$ и $\chi_2$, при которых происходит квазиоптимальное торможение твердого тела. Характер самого торможения имеет различный вид.

На рис. 1 представлен график изменения функции $\tilde{x} = \tilde{r}^2$. Кривые 1–3 соответствуют разным значениям параметра $k = 1, 0.1, 10$ соответственно. Численное исследование проводилось для характерного числа $\sigma = 1$ при коэффициентах управляющего момента $\chi_1 = 0.1$, $\chi_2 = 1$ (кривая 1) и при $\chi_1 = \chi_2 = 0.1$ (кривая 2). Из рисунка видно, что чем меньше $k$, тем меньше изогнутость кривой. Кривая 3 строилась при значениях характерного числа, безразмерных коэффициентов управляющего момента и параметра $k$ равных 0.1.

На рис. 2 приведен результат численного интегрирования функции $\tilde{y} = \tilde{a}^2$ для твердого тела с той же геометрией масс, в такой же среде с сопротивлением при коэффициентах управляющего момента $\chi_1 = \chi_2 = 0.1$ и значении характерного числа $\sigma = 1$. Кривые 1–3 рис. 2 соответствуют различным значениям параметра $k = 10, 1, 0.1$.

Характер поведения функции кинетического момента в случае квазиоптимального торможения твердого тела представлен на рис. 3. Численное исследование проводилось для твердого тела с той же геометрией масс и в такой же сопротивляющейся среде.

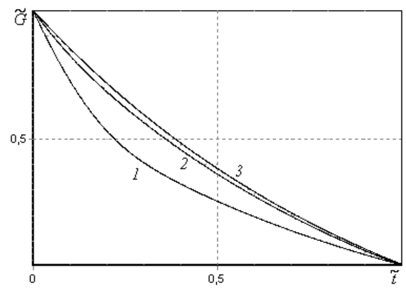


Рис. 3. График изменения кинетического момента $\tilde{G}$

Кривые 1–3 на рис. 3 соответствуют различным значениям параметра $k = 100, 1, 0.1$ при значении характерного числа $\sigma = 1$, соответственно. Исследования проведены при $\chi_1 = \chi_2 = 0.1$.

**Заключение.** Аналитически и численно исследована задача синтеза квазиоптимального по быстродействию торможения вращений динамически симметричного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в среде с сопротивлением. В рамках асимптотического подхода определены управление, время быстродействия, эволюции безразмерных переменных задачи $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ и кинетического момента $\tilde{G}$.

1. **Черноусько Ф. Л.** О движении твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса / Ф. Л. Черноусько // Жур. выч. матем. и матем. физ. – 1965. – № 5, вып. 6. – С. 1049–1070.
2. **Акуленко Л. Д.** Оптимальное торможение вращений динамически симметричного твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Изв. РАН. ТиСУ. – 2010. – № 2. – С. 56–60.
3. **Акуленко Л. Д.** Быстрое вращение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Изв. АН. СССР. МТТ. – 1982. – № 3. – С. 5–13.
4. **Кошляков В. Н.** Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы / В. Н. Кошляков. – Москва: Наука, 1985. – 288 с.
5. **Акуленко Л. Д.** Асимптотические методы оптимального управления / Л. Д. Акуленко. – Москва: Наука, 1987. – 368 с.
6. **Смольников Б. А.** Обобщение Эйлерова случая движения твердого тела / Б. А. Смольников // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31, вып. 2. – С. 735–736.
7. **Черноусько Ф. Л.** Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н. Соколов. – Москва: Наука, 1980. – 368 с.

ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 106–110

## ХРОНIКА

# К ЮБИЛЕЮ С. К. АСЛАНОВА

Сергей Константинович Асланов родился 18 августа 1929 года в Астрахани в семье врача. С 1933 года проживал с матерью в Саратове, где в 1937–1947 гг. обучался в средней школе, которую окончил с золотой медалью. В 1947–1952 годах он обучался на механико-математическом факультете Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского (СГУ), который окончил с отличием в 1952 году по специальности «Механика».

Дипломная работа С. К. Асланова «Обтекание тонкого клина слабо сверхзвуковым потоком» была удостоена премии Министерства высшего образования СССР, а ее результаты легли в основу двух научных публикаций в академическом журнале «Прикладная математика и механика» (1954 и 1955 гг.).

В 1952–55 гг. С. К. Асланов — аспирант СГУ по специальности «Гидроаэромеханика и газовая динамика». Его научным руководителем являлся проф. С. В. Фалькович — один из широко известных создателей околозвуковой газодинамики, получивший фундаментальные теоретические результаты в этой исключительно трудной математически области исследований, необходимой для скоростной авиационной техники.

В 1955 году С. К. Асланов представляет диссертацию «Обтекание клиновидных тел потоком околокритической скорости», в которой получены фундаментальные результаты как математического, так и газодинамического характера, и становится кандидатом физико-математических наук по специальности «Гидроаэромеханика и газовая динамика».

Оппонентами по диссертации выступили выдающиеся ученые, получившие мировое признание: проф. Ф. И. Франкль — основоположник газодинамики околозвуковых течений и проф. Н. Г. Чудаков — специалист по дзета-функции Римана.

Свою учебу в аспирантуре С. К. Асланов сочетает с преподавательской работой на кафедре математического анализа (0,5 ставки ассистента, 1953–54 годы).

В 1956 году С. К. Асланов избирается на должность доцента кафедры теоретической механики и гидроаэродинамики СГУ, а в 1958 году утверждается в ученом звании доцента. Он читает общий курс теоретической механики на механико-математическом и двух физических факультетах; ведет занятия по уравнениям математической физики, по черчению и начертательной геометрии; подготавливает два новых спецкурса «Нелинейные волны» и «Гидродинамика горения и детонации», руководит дипломными работами.

Область научных исследований С. К. Асланова расширяется: наряду с околозвуковой проблемой начинается разработка нового направления — динамика жидкости с температурной зависимостью вязкости. Ему удается построить точные решения нелинейных сопряженных краевых задач о продольном течении в трубе и о течении в коаксиальном зазоре с учетом теплообмена с внешней средой. Эти результаты могут считаться классическими, имея прямое отношение к нефтепроводной технике и проблеме эффективной смазки.

Высокий математический уровень и прикладное значение исследований, докладываемых С. К. Аслановым на конференциях, привлекли к нему внимание известных ученых.

В 1960 году состоялось знакомство с выдающимся физиком, членом-корреспондентом АН СССР К. И. Щелкиным — основоположником нового направления в науке о горении, а именно: «газодинамика горения». Трижды Герой Социалистического труда К. И. Щелкин являлся одним из пионеров и организаторов создания атомной техники в СССР.

Завязавшееся научное сотрудничество по комплексному теоретическому исследованию проблемы неустойчивости газодинамических процессов с химическими реакциями оказывается для С. К. Асланова приоритетным на многие годы, а К. И. Щелкин становится его вторым научным наставником.

Полученные С. К. Аслановым в этот период фундаментальные теоретические результаты позволили количественно объяснить целый ряд экспериментально наблюдаемых явлений по структуре процессов горения и детонации.

Научный успех развитой теории неустойчивости базировался на предложенном С. К. Аслановым эффективном методе интегрального построения уравнений обратной связи, позволяющих замыкать математические постановки краевых задач для возмущений.

Теоретические исследования Асланова по горению привлекли внимание физиков Одесского университета во главе с проф. В. А. Федосеевым (проректором по научной работе).

Необходимость научной школы В. А. Федосеева в сотрудничестве с квалифицированным теоретиком по горению послужила основой для приглашения С. К. Асланова на работу в ОГУ имени И. И. Мечникова.

В итоге 6 января 1965 года доцент С. К. Асланов был принят на должность заведующего кафедрой теоретической механики ОГУ, в которой неизменно остается в течение 50 лет.

Докторская диссертация на тему «Исследование устойчивости ударно-детонационных процессов и горения» представлена С. К. Аслановым (1968 г.) по специальности «Теоретическая и математическая физика». Полученные в ней фундаментальные результаты относятся к математической теории ударных волн, процессов горения и детонации.

В частности, строгий последовательный анализ устойчивости ударных волн показал, что для идеального газа имеет место сомнительный случай (по А. М. Ляпунову), а это уже свидетельствует о принципиальной необходимости перехода от экспоненциального к другому типу временной зависимости возмущений (а именно к степенному).

В результате сложного математического анализа удалось получить необходимый и достаточный критерий неустойчивости детонационной волны для самоподдерживающего режима ее распространения, который как раз и реализуется на практике.

Это позволило математически обосновать известный критерий неустойчивости детонации, полученный К.И. Щелкиным из физических соображений.

В теории устойчивости процесса нормального горения газовой смеси на базе реальной модели удалось получить аналитически критическое число Рейнольдса, обеспечивающее переход к неустойчивому состоянию. Найденный теоретический результат очень хорошо количественно объяснял данные экспериментов.

В 1970 году С. К. Асланов был утвержден в ученом звании профессора.

По представлению академика АН СССР А. Ю. Ишлинского и члена-корреспондента АН УССР М. Г. Крейна он был избран (1982 г.) в Национальный комитет СССР по теоретической и прикладной механике (позже Российский комитет), а с 1992 г. он является членом аналогичного Национального комитета Украины.

Профессор С. К. Асланов имеет около 500 научных публикаций в различных областях математики, механики, физики, а также синергетики и методологии науки; им подготовлено 17 кандидатов и 2 доктора наук.

В Одесском госуниверситете имени И. И. Мечникова С. К. Асланов сразу начал работу по организации создания на базе кафедры теоретической механики новой специальности «Механика», что было связано с решением следующих проблем: подготовки соответствующих квалифицированных кадров, получением дополнительного помещения для кафедры, удовлетворения потребности в необходимом материально-техническом обеспечении учебного процесса и его реорганизации для предстоящего перехода на новую специальность.

Многое делалось собственными силами коллектива кафедры, а необходимые финансовые средства обеспечивались за счет выполнения крупных хоздоговоров с ведущими отраслевыми НИИ «Химии и механики», «Астрофизика» — Москва и «Химической технологии» — Бийск.

На кафедре теоретической механики были построены: аэродинамическая труба, гидродинамический лоток, установлена сопроматская машина, приобретен современный практикум по теоретической механике. Для текущего обслуживания учебного процесса и лабораторных практикумов была оборудована станками собственная механическая мастерская.

Создание специальности «Механика» в ОГУ было осуществлено в два этапа. В 1972 году профессору С. К. Асланову удалось добиться передачи в Одесский госуниверситет из Киевского университета 15 мест по специальности «Механика». Затем, уже в 1975 году, была окончательно открыта в ОГУ специальность «Механика» со специализацией «Гидроаэромеханика и газовая динамика» в виде набора студентов на дневную форму обучения в объеме полноценной академической группы (25 мест).

Достигнутые С. К. Аслановым оригинальные теоретические результаты охватывают широкий спектр научных направлений. Им построены асимптотические представления для функций С. А. Чаплыгина и их производных единообразной формы во всем возможном диапазоне скоростей. Последнее имеет в стационарной газовой динамике фундаментальное математическое значение.

В области околозвуковой газодинамики он предложил метод суммирования расходящихся рядов, который совместно с интегральным преобразованием Меллина позволял осуществлять перевал через особые точки и существенным образом использовать теорию дзета-функций Римана для строгого решения сингулярных краевых задач в смешанной эллиптико-гиперболической области как для симметричного, так и несимметричного околозвукового обтекания профилей.

В теории взрывных ударных волн С. К. Асланов впервые успешно применил аналогичный метод сращивания асимптотических разложений в ближней и дальней зонах взрыва для задачи гиперболического типа.

В модели точечного взрыва удалось связать четырехчленные разложения, математически замкнув задачу с помощью интеграла энтропийных потерь по всей области существования ударной волны. Для реального случая взрыва заряда конечного объема сращивания удалось достичь лишь по главным членам асимптотик, но при этом количественно хорошо подтвердились данные экспериментов как для газообразных, так и для твердых взрывчатых веществ.

Теоретическое объяснение (с количественным подтверждением) было дано эффекту Бриджмена, открытому в 1935 г., и заключающемуся в образовании взрывных волн в инертных материалах под действием больших механических нагрузок (давление и сдвиг), в результате которых происходит нетермическое освобождение внутримолекулярной энергии.

Предложенная С. К. Аслановым математическая модель чрезвычайно сложной структуры спинового режима распространения детонации базировалась на принципиальном обобщении классической трехволновой ударной конфигурации Маха. Оно состояло в добавлении четвертого элемента — автомодельной волны разрежения и в использовании нормального фронта самоподдерживающей детонации, что позволило удовлетворить закону сохранения кинетического момента.

Чрезвычайно широкий спектр теоретических результатов по самоорганизации пространственно-временной структуры процессов и явлений различной природы получен С. К. Аслановым на основе математического исследования их внутренней неустойчивости относительно случайных возмущений. Сюда, прежде всего, следует отнести процессы горения и детонации в различных горючих и взрывчатых веществах, в том числе в трубах и камерах реактивных двигателей; сварку взрывом (холодная сварка металлов).

Отдельное направление, в котором С. К. Аслановым получен целый класс фундаментальных результатов, представляет собой теория разбрызгивания жидкой поверхности, обдуваемой скоростным потоком газа, а также теория распада на капли струй жидкости. Цикл исследований по аналогичному диспергированию был выполнен для теоретического объяснения распада метеорных тел, вторгающихся в плотные слои атмосферы, когда на их поверхности образуются пленки расплава.

На основе математического анализа вторичного диспергирования капель исходной аэровзвеси жидкого горючего вещества была построена последовательная теория детонации аэрозолей.

Математическое исследование течений ньютоновской жидкости с учетом экспоненциальной зависимости ее вязкости от температуры и учетом условий теплообмена с внешней средой позволили С. К. Асланову обнаружить ряд их принципиальных отличий от модели с постоянной вязкостью. Строго аналитически и из численного эксперимента были получены пределы существования стационарных режимов течения для задач о напорном течении в круглой трубе и плоском сдвиговом течении типа Куэтта. В частности, были определены условия появления в потоке жидкости точки перегиба на профиле скорости, которая может привести к неустойчивости течения.

Методологические разработки, выполненные С. К. Аслановым, касались основополагающих научных принципов механики — принципа относительности Галилея и принципа Даламбера. Рассматривался их общефилософский смысл и эволюция принципов. Отдельное направление было посвящено силам инерции и их связи с развитием пространственно-временного моделирования.

В течение 45 лет профессор С. К. Асланов возглавляет регулярную работу Общегородского научно-методического семинара для преподавателей механических кафедр вузов Одессы. Первоначально этот семинар подчинялся непосредственно научно-методическому Совету Министерства образования СССР.

Организованный С. К. Аслановым городской научный семинар по синергетике на базе Южного научного центра АН Украины более 10 лет собирал широкий круг представителей учебных и исследовательских учреждений Одессы.

Профессор С. К. Асланов является одним из трех основателей межотраслевого научного сборника Одесского университета «Физика аэродисперсных систем», в котором он бессменно возглавляет раздел «Газовая динамика».

В течение 50 лет С. К. Асланов неизменно участвует в организации широко известных научных конференций «Дисперсные системы».

Ученики и коллеги Сергея Константиновича Асланова желают ему крепкого здоровья, благополучия и новых достижений в его активной научной и педагогической деятельности.

Директор института механики, автоматизации
и компьютерных систем ОНАПТ,
доктор т. н., профессор Волков В. Э.

Заместитель директора ИМЭМ ОНУ,
кандидат ф.-м. н., доцент Рачинская А. Л.

ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 111–114

# СКВОЗЬ ПРИЗМУ ВРЕМЕНИ...
# ОДЕССКОМУ МЕЖВУЗОВСКОМУ СЕМИНАРУ ПО МЕХАНИКЕ — 50 ЛЕТ

В Одесском вузовском регионе в течение многих лет функционирует городской семинар по механике, охватывающий самые сущностные вопросы в этой сфере высшего образования. Год 2013 стал для него юбилейным. История семинара насчитывает теперь уже более пятидесяти лет.

Значимость и самого факта организации, и многолетней деятельности такого семинара для нашего развитого и многофункционального вузовского региона трудно переоценить, если принять во внимание два основных фактора, определяющих его целесообразность.

Первый — это общий философско-апологетический смысл механики в целом как основы всего накопленного человечеством естественнонаучного опыта познания мира. Второй — более утилитарный смысл механики как основы любой техники, в каком бы конкретном виде она ни воплощалась, т. е. любого механизма, машины, сооружения и проч., где имеет место движение — перемещение в пространстве и во времени материальных элементов.

Если рассматривать семинар в исторической развертке, то у него за прошедшие 50 лет сложилась непростая судьба, во многом отразившая все трудности сложного периода времени, в котором мы жили и живем сейчас.

В разные периоды деятельности его организационные формы видоизменялись, сообразуясь с обстоятельствами и текущими задачами высшего образования.

Первоначально городской семинар по теоретической механике был организован в Одессе в 1963 г. по инициативе Научно-методического Совета по теоретической и прикладной механике при Министерстве образования СССР и лично его председателя — академика А. Ю. Ишлинского.

Руководил семинаром заведующий кафедрой теоретической механики Высшего морского училища профессор Л. К. Кудряшов, который, как и ведущие профессора — члены президиума Совета, относился к «старой» школе профессионалов-механиков.

Роль этих специалистов была значительна. Один-два раза в год организовывались выездные заседания Президиума по разным вузовским регионам от Москвы до Владивостока. В 1967 г. такое заседание состоялось в Одессе на базе Одесского государственного университета имени И. И. Мечникова (ОГУ). Деятельность семинара была признана достаточно эффективной и получила хорошую оценку.

Заседания семинара происходили один-два раза в месяц — как правило, в тех вузах, откуда был докладчик. Заслушивались и обсуждались доклады и сообщения по механике самого разного характера и направления поисков: как методикопрофессиональные, так и научно-исследовательские, включая представления материалов подготовленных кандидатских и докторских диссертаций. В обязанности руководителя семинара входил периодический отчет о его деятельности в Москве на сессии Научно-методического совета Минвуза СССР, причем вся эта работа засчитывалась преподавателю как повышение его квалификации, обязательное в вузовской практике.

В 1968 г. Л. К. Кудряшов предложил возглавить городской семинар по теоретической механике профессору С. К. Асланову, который в то время уже заведовал кафедрой теоретической механики в ОГУ (ныне Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова — ОНУ).

Предложение было принято, и с тех пор уже много лет Сергей Константинович выполняет функции руководителя семинара. Несколько слов о профессоре С. К. Асланове. Он бессменно руководит кафедрой теоретической механики ОНУ вот уже 49 лет. В советское время входил как руководитель семинара в состав упомянутого выше Научно-методического совета союзного значения. Является ведущим специалистом по нелинейным процессам и фазовым переходам в гидродинамических системах. Научно-педагогическая деятельность С. К. Асланова как ранее, так и теперь тесно связана с историей семинара. В значительной мере именно его трудом и энтузиазмом городской семинар по механике в Одессе не только сохранился в трудные годы государственного переустройства, но и продолжает успешно функционировать в настоящее время.

Вернемся к истории семинара. В годы перестройки и последующего изменения общественного уклада, когда в сфере высшего образования возник институт опорных кафедр, функции городского семинара частично взяла на себя опорная кафедра теоретической механики по Одесскому вузовскому региону при политехническом институте (ныне Одесский национальный политехнический университет — ОНПУ). Однако на совместных заседаниях предпочтение отдавалось обсуждению вопросов научно-методического и практического характера, связанных в основном с преподаванием дисциплины.

Параллельно для возможности обсуждения вопросов более широкого естественнонаучного плана профессором С. К. Аслановым был организован городской семинар по синергетике при Южном центре Академии наук Украины. Этот семинар успешно проработал в течение 10 лет, собирая большую аудиторию слушателей.

Интерес, кроме всего прочего, подогревался новизной этой современной науки, возникшей в 70-х годах двадцатого века, предлагавшей специфический подход к анализу многокомпонентных неравновесных динамических систем различной природы, в том числе и механических.

Поразительные эффекты коллективного согласованного поведения их элементов могут проявляться двояко: как в упорядочении пространственной структуры системы, т. е. ее самоорганизации (при наличии, например, внешних вынуждающих источников), так и наоборот — в приведении системы к хаотическому состоянию вследствие деструктуризации (характерно для диссипативных систем открытого типа).

Идет работа семинара

В начале 2000-х годов возникла идея возродить городской семинар по механике в единой форме. На новом, можно сказать, современном этапе развития высшей школы Украины этому объективно способствовало сразу три фактора:

- прекращение деятельности института опорных кафедр;
- прекращение деятельности семинара по синергетике вследствие исчезновения базы семинара в Южном центре АН Украины (впрочем, к тому времени семинар уже выполнил свою основную образовательную функцию);
- происшедшие в ОНПУ структурные изменения машиностроительного факультета, в результате которых произошло слияние двух базовых механических кафедр с образованием более мощной и более функциональной единой кафедры теоретической механики и машиноведения.

Возглавивший новую кафедру профессор Б. В. Мотулько выступил главным энтузиастом возрождения городского семинара по механике на новой основе. Семинар стал функционировать на базе ОНПУ, получив расширенный статус и новое название Одесского городского межвузовского семинара по проблемам механики. В качестве главного научного руководителя в сфере классической механики был приглашен и дал согласие профессор С. К. Асланов. Соруководителем семинара по вопросам прикладной и технической механики стал профессор Б. В. Мотулько.

Появилась возможность значительно расширить тематический спектр семинара. К рассмотрению принимались доклады по любым направлениям специализации механических исследований, а также выступления, касающиеся различных аспектов преподавания механических дисциплин в вузах. Практика последующих лет подтвердила целесообразность такого подхода. На заседаниях семинара рассматриваются и обсуждаются самые разнообразные вопросы механики, начиная с философско-исторических толкований механических явлений и кончая результатами конкретных научных и методических разработок, выполненных преподавателями и сотрудниками различных вузов города Одессы.

Соруководители семинара проф. И. И. Сидоренко и проф. Б. В. Мотулько

В 2013 г. в ОНПУ было принято решение восстановить кафедру теоретической механики в качестве самостоятельной, усилив тем самым фундаментальную составляющую высшего технического образования, по крайней мере, для механических специальностей. Для семинара по механике это означает рост «теоретической компоненты» как в перечне обсуждаемых на семинаре тем, так и в самом содержании рассматриваемых материалов.

Реальность такой перспективы поддерживает и новый заведующий кафедрой теоретической механики ОНПУ профессор И. И. Сидоренко, прилагающий много усилий и внимания к поддержанию семинара на должном современном научном и техническом уровне.

Теперь уже две кафедры ОНПУ взяли на себя ответственность за организацию и проведение заседаний городского семинара по проблемам механики — кафедра теоретической механики и кафедра машиноведения и деталей машин.

Соответственно, кроме профессора С. К. Асланова, соруководителями семинара выступают заведующие двух указанных кафедр — профессор И. И. Сидоренко и профессор Б. В. Мотулько. Именно такая совместная, «синергетическая» деятельность этих трех ученых в настоящее непростое время не только сообщает семинару «новое дыхание», давая современный импульс развития, но и рождает уверенность в дальнейшей преемственности этого старого, 50-летнего бескорыстного служения науке и высшему образованию.

Т. В. Макарова, секретарь семинара, к. т. н.,
доцент кафедры теоретической механики ОНПУ

ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2014 .–Т.19, вип. 2(22).–С. 115–117

# 20 ЛЕТ ИМЭМ

В этом году Институт математики, экономики и механики Одесского национального университета имени И. И. Мечникова отметил своё 20-летие.

История его создания берёт начало в XIX веке с единственного в то время университета на юге Украины, с Новороссийского Императорского университета, который готовил специалистов по естественным наукам. В составе физико-математического факультета было математическое и физическое отделение.

В 1961 г., после разделения специальностей образовался механико-математический факультет. Набор студентов происходил по трем специальностям: «математика», «прикладная математика» и «механика». Подготовка производилась девятью кафедрами: кафедрой теоретической механики, кафедрой математического анализа, кафедрой дифференциальных уравнений, кафедрой алгебры и теории чисел, кафедрой геометрии, кафедрой вычислительной математики, кафедрой методов математической физики, кафедрой оптимального управления и кафедрой высшей математики.

В соответствии с требованиями времени программа подготовки специалистов на мехмате сочетала в себе классические математические дисциплины и дисциплины прикладного назначения, связанные с математическим моделированием и вычислительными методами для решения задач на ЭВМ. Обязательной частью подготовки выпускников было чтение специальных курсов по кафедрам, благодаря чему студенты получали знания по новым научным направлениям, принимали участие в научно-исследовательской работе.

Начиная с середины 80-х в числе прикладных выделилась группа дисциплин, связанных с применением математических методов в экономике. Позже, в начале 90-х, студенты специальности «прикладная математика» получили возможность слушать курсы по защите информации.

В 1992 г. к составу кафедр мехмата присоединилась созданная кафедра «Теоретической экономии», которая вела подготовку студентов по двум специальностям: «экономическая теория» и «международные экономические отношения», и кафедра психологии, которая впервые за всю историю Одесского университета стала готовить студентов по специальности «психология». Научно-практические исследования по психологии немыслимы без применения математических методов анализа и обработки данных, именно поэтому в учебный план психологов был включен полноценный курс высшей математики, а их дипломные работы обязательно должны были содержать математическую обработку экспериментальных данных.

Такое расширение набора специальностей привело к тому, что в марте 1994 года на базе механико-математического факультета приказом ректора Одесского университета имени И. И. Мечникова был создан Институт математики, экономики и механики (ИМЭМ).

В 1996 г. в состав Института была переведена кафедра менеджмента. Для студентов специальности «менеджмент» были включены дисциплины, связанные с информационными технологиями в менеджменте и математической обработкой информации. Поэтому кафедра окончательно получила название кафедра менеджмента и математического моделирования рыночных процессов.

Сегодня Институт математики, экономики и механики Одесского национального университета имени И. И. Мечникова — это учебное подразделение, в состав которого входит 16 кафедр, и которое проводит подготовку студентов по восьми специальностям: «математика», «прикладная математика», «механика», «компьютерные системы и сети», «экономическая теория», «международные экономические отношения», «менеджмент организаций и администрирование», «психология». ИМЭМ сохраняет лучшие традиции классического университета и дополняет их современными подходами обучения самого высокого уровня, как теоретического, так и практического направления.

На сегодняшний день в ИМЭМ работают 23 доктора наук — 16 докторов физико-математических наук, 3 доктора экономических наук, 4 доктора психологических наук, и 108 кандидатов наук, доцентов. Кроме того, каждый преподаватель активно занимается научно-исследовательской работой, принимает участие в украинских и зарубежных конференциях, семинарах и различного рода «круглых» столах.

В рамках университета издаются учебники, методические разработки, монографии, подготовленные профессорско-преподавательским составом ИМЭМ и которые используются в учебном процессе.

Много внимания в Институте уделяется молодым ученым, которые учатся в аспирантуре Института по следующим специальностям: 01.01.01 — математический анализ, 01.01.02 — дифференциальные уравнения, 01.01.04 — геометрия и топология, 01.01.06 — алгебра и теория чисел, 01.01.07 — вычислительная математика, 01.01.08 — математическая логика, теория алгоритмов и дискретная математика, 01.01.09 — вариационное исчисление и теория оптимального управления, 01.02.04 — механика деформируемого твердого тела, 01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы, 01.05.02 — математическое моделирование и вычислительные методы, 01.05.03 — математическое и программное обеспечение вычислительных машин и систем, 01.05.04 — системный анализ и теория оптимальных решений, 05.13.13 — вычислительные машины, системы и сети, 05.13.21 — системы защиты информации, 08.00.01 — экономическая теория и история экономической мысли, 08.00.02 — мировое хозяйство и международные экономические отношения, 08.00.04 — экономика и управление предприятиями (по видам экономической деятельности), 08.00.10 — статистика, 08.00.11 — математические методы, модели и информационные технологии в экономике, 05.01.04 — эргономика (психологические науки), 19.00.01 — общая психология, история психологии, 19.00.03 — психология труда, инженерная психология, 19.00.04 — медицинская психология, 19.00.08 — специальная психология (психологические науки). Также в Институте математики, экономики и механики открыта докторантура по следующим специальностям: 01.01.01 — математический анализ, 01.01.02 — дифференциальные уравнения, 01.05.02 — математическое моделирование и вычислительные методы, 01.05.03 — математическое и программное обеспечение вычислительных машин и систем, 01.05.04 — системный анализ и теория оптимальных решений, 05.01.04 —

эргономика (психологические науки), 08.00.01 — экономическая теория и история экономической мысли, 08.00.04 — экономика и управление предприятиями (по видам экономической деятельности), 08.00.11 — математические методы, модели и информационные технологии в экономике, 19.00.01 — общая психология, история психологии, 19.00.03 — психология труда, инженерная психология.

В ИМЭМ работает специализированный ученый совет К 41.051.05 по защите кандидатских диссертаций по математике (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и теория управления, математический анализ, механика деформируемого тела), а также специализированный ученый совет К 41.051.07 05 по защите кандидатских диссертаций по специальности 19.00.01 — общая психология, история психологии

Сегодня ИМЭМ насчитывает более 1200 студентов, среди них 63 иностранных студента из 15 стран мира.

Высокий уровень подготовки позволяет студентам ИМЭМ занимать призовые места на украинских и международных олимпиадах по математике, в чемпионате мира по спортивному программированию. Студенты ИМЭМ ежегодно получают стипендии Президента Украины, Верховной Рады Украины и Кабинета Министров Украины, именные стипендии в различных областях знаний: математики — стипендия имени А. М. Ляпунова, экономики — стипендия имени С. Ю. Витте, психологии — стипендия имени Н. Н. Ланге, принимают активное участие в научных студенческих конференциях и семинарах.

Сложно указать сферы деятельности человека, где не работают выпускники ИМЭМ. Многие из них продолжают славные традиции своих преподавателей, передавая новым поколениям свой опыт. Другие — реализуют свои знания в государственных учреждениях, крупных отечественных и зарубежных компьютерных компаниях, финансовых учреждениях и консалтинговых фирмах, в собственном бизнесе.

Директор ИМЭМ, профессор В. Е. Круглов

## ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
## (скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямами:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка". Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— Mathematical Subject Classification (2010);

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:


*Редакційна колегія журналу*

*"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"*

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

вул. Дворянська, 2,

м. Одеса, 65082


Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка" на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

.