ISSN 2304—1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК
ОДЕСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Математика і механіка

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

Том 18. Випуск 4 (20). 2013

Одеса
«Астропринт»
2013

Засновник: **Одеський національний університет імені І.І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

І. М. Коваль (головний редактор)
О. В. Запорожченко (заступник головного редактора)
В. О. Іваниця (заступник головного редактора)
Є. Л. Стрельцов (заступник головного редактора)

С. М. Андрієвський	В. В. Заморов	В. І. Труба
Ю. Ф. Ваксман	В. Є. Круглов	О. В. Тюрін
В. В. Глєбов	В. Г. Кушнір	Є. А. Черкез
Л. М. Голубенко	В. В. Менчук	Є. М. Черноіваненко
Л. М. Дунаєва	О. В. Сминтина	

Редакційна колегія серії
Математика і механіка

В. Є. Круглов (науковий редактор)
В. М. Євтухов (заступник наукового редактора)

A. Ashyralyev	А. А. Дороговцев	Ю. В. Нестеренко
L. Fridman	В. Й. Жуковський	А. П. Петравчук
I. Kátai	М. І. Іванчов	В. В. Пічкур
A. Laurinčikas	А. Й. Калінін	А. В. Плотніков
С. К. Асланов	В. О. Капустян	В. Г. Самойленко
Р. Д. Банцурі	І. Т. Кігурадзе	О. М. Станжицький
В. І. Берник	П. І. Когут	Е. О. Стороженко
О. А. Бойчук	Ан. О. Кореновський	В. І. Сущанський
Н. Д. Вайсфельд	О. В. Костін	Ю. В. Теплінський
П. Д. Варбанець	О. Ф. Кривий	Р. С. Хапко
О. В. Вербицький	Д. Д. Лещенко	І. М. Черевко
О. Н. Вітюк	А. Д. Мілко	В. В. Шарко
Г. О. Воропаєв	С. М. Мхитарян	І. А. Шевчук
І. М. Гашененко	О. В. Онищук	Г. А. Шинкаренко
Д. В. Дмитришин	О. Г. Наконечний	С. А. Щоголєв

Відповідальний редактор — О. Д. Кічмаренко

«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» внесений до Переліку наукових фахових видань України постановою Президії ВАК України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.

© Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, 2013

ISSN 2304—1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK
ODESKOHO NATSIONALNOHO UNIVERSYTETU

(Odesa National University Herald)

Matematyka i Mekhanika
(Mathematics and Mechanics)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

Volume 18. Issue 4 (20). 2013

Odesa
«Astroprint»
2013

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

I. M. Koval (Editor-in-chief)
O. V. Zaporozhchenko (Deputy Editor-in-chief)
V. O. Ivanytsia (Deputy Editor-in-chief)
Ye. L. Streltsov (Deputy Editor-in-chief)

S. M. Andrievskyi
Yu. F. Vaksman
V. V. Glebov
L. M. Golubenko
L. M. Dunaeva
V. V. Zamorov
V. Ye. Kruglov
V. G. Kushnir
V. V. Menchuk
O. V. Smyntyna
V. I. Truba
O. V. Tiurin
Ye. A. Cherkez
Ye. M. Chernoivanenko

Editorial board of the series
Mathematics and mechanics

V. Ye. Kruglov (Scientific Editor)
V. M. Evtukhov (Deputy Scientific Editor)

A. Ashyralyev
L. Fridman
I. Kátai
A. Laurinčikas
S. K. Aslanov
R. D. Bantsuri
V. I. Bernik
O. A. Boichuk
N. D. Vaysfeld
P. D. Varbanets
O. V. Verbitsky
O. N. Vitjuk
G. O. Voropaev
I. M. Gashenenko
D. V. Dmitrishin
A. A. Dorogovtsev
V. I. Zhukodsky
M. I. Ivanchov
A. I. Kalinin
V. O. Kapustyan
I. T. Kiguradze
P. I. Kogut
An. O. Korenovskyi
O. V. Kostin
O. F. Kryvyy
D. D. Leshchenko
A. D. Milko
S. M. Mkhitaryan
O. V. Onishchuk
O. G. Nakonechny
Yu. V. Nesterenko
A. P. Petravchuk
V. V. Pichkur
A. V. Plotnikov
V. G. Samoilenko
O. M. Stanzhytskyi
E. O. Storozhenko
W. I. Sushchansky
Yu. V. Teplinskyi
R. S. Hapko
I. M. Cherevko
V. V. Sharko
I. A. Shevchuk
G. A. Shynkarenko
S. A. Schogolev

Executive Editor — O. D. Kichmarenko

© Odesa I. I. Mechnikov National University, 2013

ЗМІСТ

М А Т Е М А Т И К А

Брейде В. Є., Куліш В. С. Асимптотичні оцінки середнього значення функції Смарандча 7

Вербицкий В. В., Иванищева И. Н. Предобуславливание седловых матриц с использованием неполного обобщенного разложения Холесского 22

Лопотко О. В. Интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, связанных с оператором $\frac{d^3}{dx^3}$ 31

Музичук Ю. А. Метод граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах Робіна, отриманих у результаті перетворення Лагерра мішаних задач для еволюційних рівнянь 38

Lelechenko A. V. Exponential Carmichael function 49

Shchogolev S. A. On a reduction of nonlinear first-order differential equation with oscillating coefficients to a some special kind 60

Tran The Vinh, Varbanets P. Inversive congruential generator of the complex pseudo-random numbers 68

М Е Х А Н І К А

Асланов С. К., Трофименко М. Ю. Температурная неустойчивость процессов в газовом факеле и низкочастотный режим пульсационного горения 76

Дудик М. В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини 84

Кривий О. Ф. Взаємодія міжфазних тріщини та включення в кусково-однорідному анізотропному просторі 96

Николаев А. Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами 101

Рачинская А. Л. Быстрое вращение спутника в среде с сопротивлением по круговой орбите 112

CONTENTS

M A T H E M A T I C S

Breide V. E., Kulish V. S. The symptotic estimates of the Smarandache mean value 7

Verbitsky V., Ivanisheva I. An incomplete generalized Cholesky factorization preconditioner for a saddle-point matrix 22

Lopotko O. V. Integral representation is obtained for of positive definite function of one variable such that the kernel $K(x, y)$ is positively defined 31

Muzychuk Yu. On the boundary integral equations method for Robin boundary value problems received as a result of the Laguerre Transformation of mixed problems for evolution equations 38

Lelechenko A. V. Exponential Carmichael function 49

Shchogolev S. A. On a reduction of nonlinear first-order differential equation with oscillating coefficients to a some special kind 60

Tran The Vinh, Varbanets P. Inversive congruential generator of the complex pseudo-random numbers 68

M E C H A N I C S

Aslanov S. K., Trofimenko M. U. Process temperature instability in a gas torch and a low frequency pulsation mode of combustion . . . 76

Dudyk M. V. Analytical solution of the plane problem on the cohesive prefracture zone in conjunctive material near the tip of the interfacial crack 84

Kryvyy O. F. Interaction of interfacial cracks and inclusion in a piecewise-homogeneous anisotropic space 96

Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stress distribution in the cell of unidirectional composite material, formed by four cylindrical fibers . . . 101

Rachinskaya A. L. The rapid rotation of the satellite in an environment with drag in a circular orbit 112

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 7–21

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 11N37
УДК 511.19

В. Є. Брейде, В. С. Куліш
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ СМАРАНДЧА

Брейде В. Є., Куліш В. С. Асимптотичні оцінки середнього значення функції Смарандча. В статті розглянено розподіл значень функцій $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2$, які було введено Смарандчем в 1993 році. Побудовані асимптотичні формули для суматорної функції $S_k^{(1)}(n)$, які уточнюють результат Лю Юпина. Знайдено нетривіальну асимптотичну оцінку для $\tau(S_k^{(1)}(n))$. У припущенні справедливості гіпотези Римана покращено залишковий член в асимптотичній формулі для функції $S_2^{(2)}(n)$ та вивчено поведінку функції $\tau(S_2^{(2)}(n))$ в короткому інтервалі $x < n \leq x+h$, де $h > x^\theta, \theta = 0,2204$.
Ключові слова: функція Смарандча, асимптотичні оцінки, суматорна функція.

Брейде В. Е., Кулиш В. С. Асимптотические оценки среднего значения функции Смарандча. В статье рассмотрено распределение значений функций $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2$, которые были введениы Смарандчем в 1993 году. Построены асимптотические формулы для сумматорной функции $S_k^{(1)}(n)$, уточняющие результат Лю Юпина. Найдена нетривиальная асимптотическая оценка для $\tau(S_k^{(1)}(n))$. В предположении справедливости гипотезы Римана улучшен остаточный член в асимптотической формуле для функции $S_2^{(2)}(n)$ и изучено поведение функции $\tau(S_2^{(2)}(n))$ в коротком интервале $x < n \leq x + h$, где $h > x^\theta, \theta = 0,2204$.
Ключевые слова: функция Смарандча, асимптотические оценки, сумматорная функция.

Breide V. E., Kulish V. S. The symptotic estimates of the Smarandache mean value. In this paper we consider the distribution of value of the function $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2$, which were introduced by Smarandache in 1993. We obtained the asymptotic formulas for the summation function $S_k^{(1)}(n)$, that improve Lu Yiuping results. Here we found the nontrivial asymptotic estimate for $\tau(S_k^{(1)}(n))$. In assuming the Riemann hypothesis improved, the term in the asymptotic formula for the function $S_2^{(2)}(n)$ is reminded, and behavior of the function $\tau(S_2^{(2)}(n))$ was studied in the short interval $x < n \leq x + h$, where $h > x^\theta, \theta = 0,2204$.
Key words: Smarandache function, asymptotic estimates, summation function.

Вступ. Ф. Смарандч в 1993 р. ввів у розгляд дві арифметичні функції $S_k^{(j)}(n), j = 1, 2; k > 1$ — натуральні, визначені наступними рівняннями:

$$S_k^{(1)}(n) = \min(m \in \mathbb{N} : n \mid m^k),$$

$$S_k^{(2)}(n) = \max(m \in \mathbb{N} : m^k \mid n).$$

© Брейде В. Є., Куліш В. С., 2013

Ці функції називаються двоїстими або дуальними. Легко перевірити, що функції $S_k^{(j)}(n)$ — мультиплікативні, причому для простого p : $S_k^{(1)}(p^a) = p^{\lceil \frac{a}{k} \rceil}$, $S_k^{(2)}(p^a) = p^{\lfloor \frac{a}{k} \rfloor}$, де $\lceil x \rceil$ — найменше ціле $\geqslant x$, $\lfloor x \rfloor$ — найбільше ціле $\leqslant x$.

Смарандч [10] зазначив ряд застосувань цих функцій в теорії чисел і комбінаториці. Тому розподіл значень функції $S_k^{(j)}(n)$ в останній час активно досліджується. У цій роботі вивчаються функції $S_k^{(j)}(n)$ в середньому і коротких інтервалах. Ми використовуємо позначення:

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ — поле дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексних чисел;

$\mu(n)$ — функція Мьобіуса;

$\varphi(n)$ — функція Ойлера.

Для комплексного числа позначимо через $\sigma = Res, t = Ims$, так що $s = \sigma + it$, $exp(z) = e^z$ для $z \in R$, $\ln x$ завжди позначає натуральний логарифм $x, x > 0$. Символи "O" та " $\ll$ " еквівалентні, а запис $f(x) = O(g(x))$ означає, що при $x \to x_0$ маємо $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ з деякою додатною сталою C. Сталі символи "o" та " $\ll$ " можуть залежити від ε.

Запис $\Sigma_n(\Pi_p)$ завжди буде позначати сумування за всіма натуральними n (або, відповідно, добуток по всім простим p).

Попередні результати. Din Liping [3] отримав асимптотичну формулу

$$\sum_{n \leq x} S_k^{(1)}(n) = \frac{x^2}{2}\zeta(2k-1)\Pi_p \left[1 - \frac{1}{p(p+1)}\left(1 + \frac{1}{p^{2k-3}}\right)\right] + O(x^{\frac{2}{3}+\epsilon}). \qquad (1)$$

Роботу Liping ми не бачили, але в даній роботі ми покращимо залишковий член у формулі (1). S. Tabirca, T. Tabirca [13], Keng [7], а також Ibstedt [3], [4] знайшли асимптотичну щільність нерухомих точок відносно перетворення $n \to S_k^{(1)}(n)$. Легко побачити, що нерухомими точками є безквадратні числа. Так що, якщо $q(x)$ означає кількість нерухомих точок для $S_k^{(1)}(n)$, то маємо

$$\lim_{x \to \infty} \frac{q(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Крім того, використовуючи результати Filaseta, Trifonov [14], отримуємо, що число нерухомих точок для $S_k^{(1)}(n)$ на відрізку $[x, x+h]$ дорівнює $\frac{6}{\pi^2} + O(x^{\frac{1}{5}} \ln x)$ для всіх $h, x^{\frac{1}{5}} < h < x$. Lu Yaming [8] вивчав розподіл значень функції дільників $\tau(n)$ на послідовності $S_k^{(2)}(n)$ і побудував асимптотичну формулу

$$\sum_{n \leq x} \tau\left(S_k^{(2)}(n)\right) = \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right) + O\left(x^{\frac{1}{k+1}}\right). \qquad (2)$$

У статті Wan Yanxing [15] доведена тотожність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(S_k^{(2)}(n))^{\alpha}} = \frac{2^{\alpha} - k - 1}{2^{\alpha} + k - 1} \prod_r \left(1 + \frac{k}{r^{\alpha} - 1}\right),$$

яка справедлива для кожного дійсного $\alpha > 1$.

Нарешті, Xiayan Li [16] та П. Д. Варбанець, С. Кирбат [26] знайшли асимптотичну формулу для середнього значення $S_k^{(2)}(n)$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} S_k^{(2)}(n) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2}\left(\ln x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2}\zeta\,'(2)\right) + o(1), \text{ якщо } k=2, \\ \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} + \frac{\zeta\left(\frac{2}{3}\right)}{2\zeta(2)} x^{\frac{1}{3}}(1+o(1)), \text{ якщо } k=3, \\ \frac{\zeta(k-1)}{\zeta(k)}(1+o(1)), \text{ якщо } k\ge 4. \end{cases} \tag{3}$$

В даній роботі ми вивчаємо залишкові члени у формулах (1), (2) та вивчаємо розподіл значень $\tau(S_k^{(2)}(n))$ в коротких інтервалах.

В подальшому нам знадобляться деякі добре відомі результати про розподіл значень дзета-функції Римана $\zeta(s)$ (див. Є. Титчмарш [12]).

Лема 1. *Нехай $s = \sigma + it$. Тоді*

(i) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|s-1|)$ *в околі точки $s=1$, γ — стала;*

(ii) $\zeta(s) \ll |t|^{c(1-\sigma)^{\frac{3}{2}}}(ln(|t|+3))^{\frac{2}{3}}$, *якщо* $\frac{1}{2} \le \sigma \le 2$;

(iii) $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, *де* $\chi(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+s}\frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}$;

(iv) $|\frac{1}{\zeta(s)}| \ll \ln(|t|+3)$, *якщо* $1 \le \sigma \le 3$;

(v) $\zeta(s) \ll |t|^{\frac{1-\sigma}{3}} ln|t|$, *якщо* $|t| > 3, \frac{1}{2} \le \sigma \le 1$;

(vi) $\int\limits_1^T |\zeta(\sigma+\frac{1}{2})|^4 dt \ll T\min(\ln T, \frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}})$, *якщо* $\sigma \ge \frac{1}{2}$;

(vii) $\int\limits_1^T |\zeta(\frac{1}{2}+it)|^4 dt \ll T\ln^4 T$.

(Тут γ — стала Ойлера).

Лема 2. ***(область, вільна від нулів** $\zeta(s)$**)** *Існує абсолютна стала $C > 0$ така, що в області $Res \geqslant 1 - \dfrac{C}{(\ln(|t|+10))^{\frac{2}{3}}\ln\ln(|t|+10)}$ немає нулів $\zeta(s)$ (див. [6], гл.VI, теор.2)*

Лема 3. *В припущенні справедливості гіпотези Рімана моємо*

$$(\zeta(\sigma+it))^{\pm} = O(|t|), \quad \sigma \ge \frac{1}{2}, \quad |t_0| > t_0(\epsilon),$$

$$|\zeta(\frac{1}{2}+it)| = O\left(\exp(A\frac{\ln t}{\ln\ln t})\right),$$

$$\mu(n) := \sum_{n\le x}\mu(n) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\exp(A\frac{\ln x}{\ln\ln x})\right),$$

де $A > 0$ — стала, а сталі в символах "O" можуть залежити від $\epsilon, \epsilon > 0$ — довільна стала.

Лема 4. ***(безумовна оцінка)*** *При $x \to \infty$ маємо*

$$\mu(x) = O(x \exp(-C(\ln x)^{\frac{3}{5}-\epsilon})),$$

(див. [6], гл. VI, пар. 3).

Лема 5. ***(про часткові суми ряду Діріхле)*** *([9], Додаток, Теорема 3.1) Нехай ряд Діріхле*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

збігається абсолютно при $\sigma > 1$, причому $|a_n| < c\Phi(n), (c > 0)$, де $\Phi(n)$ — додатня монотонно зростаюча функція. Крім того, нехай при $\sigma \to +0$ справедлива оцінка

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O\left((\sigma - 1)^{-\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

Тоді для нецілого $x > 1, c > 1, T > 1$ має місце співвідношення

$$\sum_{n \le x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x\Phi(2x)\ln x}{T^{\alpha}(x)}\right), \tag{4}$$

де (x) значить відстань x до найближчого цілого числа.

Лема 6. *Нехай $f(n)$ та $\Phi(n)$ — мультиплікативні функції, причому*

$$f(n) = \sum_{d^2 | n} \Phi(d), \quad \text{де} \quad \Phi(n) = O(n^{\epsilon}).$$

Тоді рівномірно по $h, h < x$, справедлива оцінка

$$\sum_{x < n \le x+h} f(n) = h \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\Phi(d)}{d^2} + O\left(h^{\frac{1}{2}} x^{\epsilon}\right) + O(x^{\theta}),$$

де $\theta = 0,2204, \epsilon > 0$ — довільне мале число (див. доведення [2], theorem 1).

Тепер ми переходимо до побудови твірного ряду для функцій $S_k^{(j)}(n)$ та $\tau(S_k^{(j)}(n))$, де $\tau(m), m \in N$ означає число різних дільників натурального m.

Нехай p — просте число, s — комплексне, $Res > 2$. Тоді маємо

$$f_1(s,p) = 1 + \frac{S_k^{(1)}(p)}{p^s} + \frac{S_k^{(1)}(p^2)}{p^{2s}} + \cdots +$$

$$+ \frac{S_k^{(1)}(p^k)}{p^{ks}} + \frac{S_k^{(1)}(p^{k+1})}{p^{(k+1)s}} + \cdots + \frac{S_k^{(1)}(p^{2k})}{p^{2ks}} + \frac{S_k^{(1)}(p^{2k+1})}{p^{(2k+1)s}} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p}{p^{ks}} + \frac{p^2}{p^{(k+1)s}} + \cdots + \frac{p^2}{p^{2ks}} + \cdots$$

Помножуючи останнє рівняння на $\dfrac{1-\frac{1}{p^{s-1}}}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}$ і проводячи елементарні спрощення, отримаємо

$$f_1(s,p)=\frac{1}{1-\frac{1}{p^{s-1}}}\left(1-\frac{1}{p^{2(s-2)}}+O\left(p^{-(2(s-1)+1)}\right)\right)=$$
$$=\frac{1-p^{-2(s-1)}}{1-p^{-(s-1)}}\left(1+O\left(p^{-2(s-1)+1}\right)\right).$$

Тому, в силу тотожності Ойлера з мультиплікативною функцією $\frac{S_k^{(1)}(n)}{n^s}$, виводимо для $Res>2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^{(1)}(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1-p^{-2(s-1)}}{1-p^{-(s-1)}}\left(1+O\left(p^{-2(s-1)+1}\right)\right)=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(2(s-1))}G_0(s), \qquad (5)$$

де $G_0(s)$ регулярна при $Res>1$ та задається в напівплощині $Res>1$ абсолютно збіжним рядом Діріхле:

$$G_0=\sum\frac{g(n)}{n^s},\quad g(n)=O(1).$$

Аналогічні роздуми дають твірний ряд Діріхле для $S_k^{(2)}(n)$ при $Res>1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^{(2)}(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}.$$

Далі, використовуючи мультиплікативність функції $\tau(n), S_k^{(j)}(n), j=1,2$, ми побудуємо твірні ряди $\tau(S_k^{(j)}(n))$. Позначимо:

$$F_k^{(j)}(s)=\sum\frac{\tau(S_k^{(j)}(n))}{n^s},\quad Res>1.$$

Розглянемо спочатку випадок $j=1$. Тоді для $k=2$ маємо:

$$\begin{gathered}F_2^{(1)}(s)=\Pi_p(1+\tfrac{2}{p^s}+\tfrac{2}{p^{2s}}+\tfrac{3}{p^{3s}}+\tfrac{3}{p^{4s}}+\cdots)=\\=\Pi_p(1+\tfrac{2}{p^s}+\tfrac{2}{p^{2s}}+\tfrac{3}{p^{3s}}+\tfrac{3}{p^{4s}}+\cdots)\tfrac{(1-\frac{1}{p^s})^2}{(1-\frac{1}{p^s})^2}=\\=\zeta^2(s)\Pi_p(1+\tfrac{2}{p^s}+\tfrac{2}{p^{2s}}+\tfrac{3}{p^{3s}}+\tfrac{3}{p^{4s}}+\cdots)(1-2\tfrac{1}{p^s}+\tfrac{1}{p^{2s}})=\\=\zeta^2(s)\Pi_p(1-\tfrac{1}{p^{2s}}+\tfrac{1}{p^{3s}}-\tfrac{1}{p^{4s}}+\cdots)=\\=\zeta^2(s)\Pi_p(1-\tfrac{1}{p^{2s}}+\tfrac{1}{p^{3s}}-\tfrac{1}{p^{4s}}+\cdots)(1+\tfrac{1}{p^{2s}}\tfrac{1-\frac{1}{p^{2s}}}{1-\frac{1}{p^{4s}}})=\\=\tfrac{\zeta^2(s)\zeta(4s)}{\zeta(2s)}\prod_p(1+\tfrac{1}{p^{3s}}-\tfrac{2}{p^{4s}}+\cdots)\tfrac{1-\frac{1}{p^{3s}}}{1-\frac{1}{p^{3s}}}=\\=\tfrac{\zeta^2(s)\zeta(3s)\zeta(4s)}{\zeta(2s)}G(s)=\tfrac{\zeta^2(s)\zeta(3s)}{\zeta(2s)}G_4^2(s),\end{gathered} \qquad (6)$$

де $G_4^2(s)$ — регулярна функція для $Res>\frac{1}{4}$.

Якщо $k \geq 3$, то, як і вище, подібними перетвореннями отримуємо

$$F_2^{(1)}(s) = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} G_1^2(s),$$

де $G_1^2(s)$ — регулярна функція для $Res > \frac{1}{4}$.

У випадку $j = 2$ знаходимо

$$F_k^{(2)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(S_k^{(2)}(n))}{n^s} =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{2}{p^{(n-1)s}} + \frac{2}{p^{ks}} + \cdots + \frac{2}{p^{(2k-1)s}} + \frac{3}{p^{2ks}}\right) =$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right) \frac{1 - \frac{1}{p^s}}{1 - \frac{1}{p^s}} = \zeta(s)\zeta(ks).$$

Зауважимо, що несиметрична функція дільників $\tau_{1,k}(n) = \sum\limits_{n=md^2} 1$ також має твірний ряд $\zeta(s)\zeta(ks)$.

Тому, беручи до уваги теорему [9] про те, що твірна функція для коефіцієнтів ряду Діріхле однозначно визначає коефіцієнти цього ряду, знаходимо, що $\tau(S_k^{(2)}(n)) = \tau_{1,2}(n)$, а тому далі ми наведемо теорему про середнє значення функції $\tau(S_k^{(2)}(n))$.

Основні результати. Співвідношення (5) дозволяє отримати асимптотичну оцінку середнього значення $S_k^{(1)}(n)$. Позначимо $a_n = \frac{1}{n} S_k^{(1)}(n)$. Тоді з (5) випливає

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s), Res > 1, \tag{7}$$

де $G_0'(s)$ визначається абсолютно збіжним рядом Діріхле в напівплощині $Res > 0$: $G_0'(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{n^s}, |g_n| \ll n^{-k+\epsilon}, \epsilon > 0$ — будь-яке число.

Тому формула Перрона (див. лему 5) дає для $x = \frac{N}{2}, N$ — ціле непарне число,

$$\sum_{n \leqslant x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right) + O\left(\frac{x\Phi(2x)}{T}\right). \tag{8}$$

Тут $c > 1, T > 1$ (їхні значення будуть уточнені пізніше), $\Phi(y) = O(1)$ для всіх $y \geq y_0 > 0$.

Розглянемо прямокутник R з вершинами $A = (C, -T), B = (C, T), C = (\frac{1}{2}, T), D = (\frac{1}{2}, T)$, зображений на рисунку 1.

В силу мероморфності функції $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s}$ в прямокутнику ABCD, вклю-

чаючи його сторони, ми за теоремою про лишки отримуємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0'(s)\frac{x^s}{s}ds=\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0'(s)\frac{x^s}{s}\right)+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_C^B+\int\limits_D^C+\int\limits_D^A\right)\left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0'(s)\frac{x^s}{s}ds\right). \tag{9}$$

Ми врахували, що всередині прямокутника R є тільки одна особлива точка $s=1$, тому що на прямій $Res=\frac{1}{2}$ та правіше цієї прямої $\zeta(2s)\neq 0$.

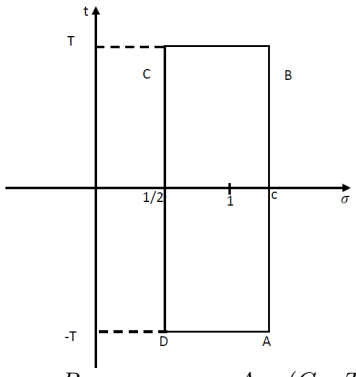

Рис. 1. Прямокутник R з вершинами $A=(C,-T), B=(C,T), C=\left(\frac{1}{2},T\right), D=\left(\frac{1}{2},T\right)$

Тепер інтеграли по горизонтальним ділянкам контуру інтегрування оцінюються за допомогою леми 1 (iv, v), а на вертикальній ділянці користуємось оцінкою другого моменту $\zeta(s)$ на половинній прямій $Res=\frac{1}{2}$ (див. лему 1 (vi)).

Таким чином маємо:

$$\left|\int\limits_C^B\right|,\quad\left|\int\limits_A^D\right|\ll\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}T^{\frac{1-\delta}{3}}\frac{x^\delta}{T}\ln T d\delta\ll\max\left(x^{\frac{1}{2}},\frac{x^c}{T}\ln T\right). \tag{10}$$

Далі, в силу нерівності Коши–Шварца маємо

$$\left|\int\limits_D^C\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}G_0(s)\frac{x^s}{s}ds\right|\leqslant\left(\int\limits_{-T}^{T}|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2\frac{dt}{|\frac{1}{2}+it|}\int\limits_{-T}^{T}\frac{|G_0(\frac{1}{2}+it)|^2}{|\zeta(\frac{1}{2}+it)|^2}\frac{|x^{1+2it}|}{|\frac{1}{2}+it|}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Оскільки на одиничній прямій (тобто $Res=1$) справедливі оцінки:

$$|G_0'(s)|=0,\quad\frac{1}{|\zeta(1+2it)|}\ll\ln(|t|+3),\quad|x^{1+2it}|=x,$$

то, в силу леми 1 (vi), виводимо

$$\left| \int_D^C \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll x \ln^2 T. \tag{12}$$

Нарешті,

$$\operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} G_0'(s) \frac{x^s}{s} \right) = \frac{G_0'(1)}{\zeta(2)} x. \tag{13}$$

Покладемо $c = 1 + \dfrac{1}{\ln x}, T = x^{\frac{1}{2}} (\ln x)^{\frac{1}{2}}$. Тоді з (9)–(13) отримуємо

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{S_k^1(n)}{n} = \frac{G_0'(1)}{\zeta(2)} x + O(x^{\frac{1}{2}} \ln^2 x).$$

Звідси, застосовуючи лему Абеля про часткове підсумовування, виводимо

$$\sum_{n \leqslant x} S_k^1(n) = \sum_{n \leqslant x} \frac{S_k^1(n)}{n} n = \frac{G_0'(1)}{\zeta(2)} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x), \tag{14}$$

з абсолютною сталою в символі "O".

Із виразу для $G_0'(1)$ виходить, що $G_0'(1)$ є обчислюваною додатною сталою, а тому доведена теорема

Теорема 1. *При $x \to \infty$ справедлива асимптотична формула*

$$\sum_{n \leqslant x} S_k^1(n) = C_k x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x \right),$$

де стала $C_k > 0$ може бути обчислена, а стала у символі "O" є абсолютною.

Беручи до уваги, що $ln^2 x = (x^\epsilon)$ для будь-якого фіксованого $\epsilon > 0$, ми маємо, що в отриманій теоремі 1 залишковий член менше, ніж у формулі (1), яка наведена в роботі Liping. Більш того, наш метод доведення теореми 1 дозволяє отримати оцінку залишкового члена

$$R(x) = O(x^{\frac{3}{2}} \exp(-c(\ln x)^{-\frac{2}{3}})),$$

враховуючи, що $\zeta(2s)$ не має нулів в області

$$Res \geqslant 1 - \frac{C}{(\ln(|t| + 10))^{\frac{2}{3}} \ln\ln(|t| + 10)}$$

(див. [6], гл. VI, теорема 2).

Тепер розглянемо аналог формули Lu Yaming (див. формулу (2)) для арифметичної функції $\tau(S_k^1(n))$, де $\tau(n)$ — функція дільників, тобто $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. У випадку $k = 2$ формула (7) дає (за лемою 5):

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(S_2^1(n)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} \zeta(3s) G_1^{(2)}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^s}{T(c-1)^2} \right), \tag{15}$$

де $c > 1, \quad T > 1, \quad G_1^{(2)}$ — регулярна в напівплощині $Res > \frac{1}{4}$.

Знову, враховуючи, що подінтегральна функція в напівплощині $Res > \frac{1}{2}$ має єдину особливу точку (це полюс другого порядку), ми після стандартних обчислень за допомогою леми 1 знаходимо

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(S_2^1(n)) =$$

$$= \operatorname*{res}_{s=1} \left(\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} \zeta(3s) G_1^{(2)}(s) \frac{x^s}{s} \right) + O\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{c} T^{\frac{2(1-\sigma)}{3}} \frac{x^\sigma}{T} \ln T d\sigma \right) + \tag{16}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-T}^{T} \zeta^2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \frac{\zeta\left(\frac{3}{2} + 3it\right)}{\zeta(3 + 2it)} G_1^{(2)} \left(\frac{1}{2} + it \right) \frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2} + it} dt.$$

Для останнього інтеграла в (16) маємо оцінку

$$\left| \int\limits_{-T}^{T} \zeta^2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \frac{\zeta\left(\frac{3}{2} + 3it\right)}{\zeta(3 + 2it)} G_1^{(2)} \left(\frac{1}{2} + it \right) \frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2} + it} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{1}^{T} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 \left| \frac{\zeta(\frac{3}{2} + 3it)}{\zeta(3 + 2it)} \right| \frac{x^{\frac{1}{2}}}{t} dt + O(x^{\frac{1}{2}}). \tag{17}$$

Тут ми прийняли до уваги, що на відрізку $[-1, 1]$ прямої $Res = \frac{1}{2}$ підінтегральна функція оцінюється як $O(x^{\frac{1}{2}})$ і, крім того,

$$G_1^{(2)} \left(\frac{1}{2} + it \right) = O(1),$$

$$\left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| = \left| \zeta \left(\frac{1}{2} - it \right) \right|,$$

$$\frac{1}{\zeta(3 + 2it)} = O(\ln(|t| + 10)),$$

$$\zeta \left(\frac{3}{2} + 3it \right) = O(1).$$

Тому з нерівності Коші–Шварца отримуємо

$$\left| \int\limits_{-T}^{T} \zeta^2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \frac{\zeta\left(\frac{3}{2} + 3it\right)}{\zeta(3 + 2it)} G_1^{(2)} \left(\frac{1}{2} + it \right) \frac{x^{\frac{1}{2}+it}}{\frac{1}{2} + it} dt \right| \ll \tag{18}$$

$$\ll x^{\frac{1}{2}} \int\limits_{1}^{T} \frac{|\zeta(\frac{1}{2} + it)|^2}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{\ln(|t| + 10)}{\frac{1}{2}} dt \ll x^{\frac{1}{2}} \ln^4 T.$$

(Ми оцінили перший інтеграл праворуч за лемою 1 (vii)). Крім того, оскільки $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + (s-1)g(s)$, де $g(s)$ — аналітична в околі точки $s = 1$, то маємо

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2\gamma}{s-1} + (\gamma^2 + 2g(s)) + (s-1)^2 g(s),$$

$$\frac{x^s}{s} = x + (x\ln x - x)(s-1) + O((s-1)^2 x\ln x),$$

$$\zeta(3s) = \zeta(3) + 3\zeta'(3)(s-1) + \cdots,$$

$$G_1^{(2)}(s) = G_1^{(2)}(1) + O(s-1).$$

Звідки випливає, що

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\tfrac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}\zeta(3s)G_1^{(2)}(s)\right) =$$

$$= \zeta(3)G_1^{(2)}(1)x\ln x + x(2\gamma\zeta(3)G_1^{(2)}(1) - \zeta(3)G_1^{(2)}(1) + \tag{19}$$

$$+3\zeta'(3)G_1^{(2)}(1) + \zeta(3)G_1^{(2)P_1}(1)) = xP_1(\ln x),$$

де $P_1(u) = Au + B, A = \zeta(3)G_1^{(2)}(1) > 0, B$ — обчислювальні сталі.

Випадок $k \geqslant 3$ дає подібний результат. Таким чином, із співвідношень (15)–(19), беручи $c = 1 + \frac{1}{\ln x}, T = x^{\frac{1}{2}}$, ми відразу отримуємо наступний результат.

Теорема 2. *Для кожного натурального $k \geqslant 2$ існують обчислювальні сталі $C_k^{(1)} > 0, C_k^{(2)}$ такі, що*

$$\tau(S_k^1(n)) = C_k^{(1)}x\ln x + C_k^{(2)}x + O(x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^4).$$

Для середнього значення функції $S_k^2(n)$ в роботі [26] отримані "O" і Ω-оцінки, і ми не маємо можливості їх покращити. Але з вигляду твірного ряд для $S_k^{(2)}(n)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_k^{(2)}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}, \qquad Res > 1,$$

ми можемо отримати "умовний"результат, вважаючи, що гіпотеза Римана справедлива.

Теорема 3. *В умовах справедливості гіпотези Римана має місце асимптотична формула*

$$\sum_{n\leqslant x} S_2^{(2)}(n) = \frac{3}{\pi}^2 x\left(\ln x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2}\zeta'(3)\right) + O\left(x^{\frac{1}{3}+\epsilon}\right),$$

зі сталою в символі "O", яка залежить від ϵ.

Доведення. Ми використовуємо формулу Перрона і переносимо контур інтегрування на пряму $Res = \frac{1}{4} + \epsilon, \epsilon > 0$.

Тепер завдяки співвідношенню (iii) леми 3 і формулі Стірлінга для $\Gamma(z)$ (див., наприклад, [6]):

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \sqrt{(\ln 2\pi)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad |\arg z| \leqslant \pi - \delta, \quad \delta > 0$$

виводимо

$$\begin{gathered} \left|\zeta\left(\tfrac{1}{4} + \epsilon + it\right)\right| \ll (|t| + 10)^{\frac{1}{4}}, \\ \left|\zeta\left(2\left(\tfrac{1}{4} + \epsilon\right)\right) - 1 + 2it)\right| \ll |t| + 10, \\ \frac{1}{|\zeta\left(2\left(\frac{1}{4} + \epsilon\right)\right) + 2it)|} \ll |t|^{\epsilon} \end{gathered} \tag{20}$$

(сталі в символах " $\ll$ " залежать від ϵ).

Таким чином, маємо

$$\begin{gathered} \sum_{n\leqslant x} S_2^{(2)}(n) = \\ = \operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}\right) + O\left(\left|\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{4}+\epsilon+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}ds\right|\right) + \\ + O\left(\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon}^{c} \frac{\zeta(\sigma \pm iT)\zeta(2\sigma - 1 \pm 2it)}{\zeta(2\sigma + 2it)}\frac{x^\sigma}{T}d\sigma\right) + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^2}\right). \end{gathered} \tag{21}$$

Ми врахували, що в точці $s = 1$ підінтегральна функція має полюс другого порядку.

Проводячи обчислення $\operatorname*{res}_{s=1}$ і інтегралів в (21) за допомогою оцінок (20), отримуємо для $c = 1 + \dfrac{1}{\ln x}$:

$$\operatorname*{res}_{s=1}\left(\frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}\right) = \frac{3}{\pi}^2 x\left(\ln x + 3\gamma - 1 - \frac{12}{\pi^2}\zeta'(2)\right),$$

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon-iT}^{\frac{1}{4}+\epsilon+iT} \frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\frac{x^s}{s}ds\right| \ll T^{\frac{5}{4}-\epsilon}x^{\frac{1}{4}+\epsilon}, \tag{22}$$

$$\int\limits_{\frac{1}{4}+\epsilon}^{c} \frac{\zeta(\sigma \pm iT)\zeta(2\sigma - 1 \pm 2it)}{\zeta(2\sigma + 2it)}\frac{x^\sigma}{T}d\sigma \ll T^{\frac{1}{4}-\epsilon}x^{\frac{1}{4}+\epsilon} + \frac{x}{T}\ln^2 x. \tag{23}$$

Візьмемо $T = x^{\frac{1}{3}}$. Тоді з (21)–(23) ми отримаємо твердження теореми 3.

Зауваження 1. *В [26] було отримано безумовний результат з залишковим членом* $O(x^{\frac{3}{4}}(\ln x)^{\frac{3}{2}})$ *та дана* Ω*–оцінка* $O(x^{\frac{1}{2}}(\ln x)^{\frac{1}{2}})$. *Наш результат покращує безумовну оцінку з [26], але показує, що можливо* Ω*–оцінка може бути підвищена.*

Зауваження 2. *Метод дослідження функції* $S_2^2(n)$ *в умовах справедливості гіпотези Римана, на жаль, не приводить до покращення залишкового члена для* $S_k^2(n), k \geq 3$, *який наведений в роботі [26].*

Тепер ми переходимо до побудови асимптотичної формули для середнього значення $\tau(S_k^2(n))$.

Вище ми довели, що

$$\tau(S_k^2(n)) = \tau_{l,k}(n).$$

Тому маємо (дивись [17])

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(S_k^2(n)) = x\zeta(k) + x^{\frac{1}{k}}\zeta\left(\frac{1}{k}\right) + O(\Delta(1,k;x)),$$

де $\Delta(1,k;x) = \sum_1 + \sum_2$; $\sum_1 = \max\limits_{1\leqslant N\leqslant x^{\frac{1}{k}}+1}\left|\sum\limits_{N\leqslant n\leqslant 2N}\psi(\frac{x}{n^k})\right|$, $\psi(u) := u - [u] - \frac{1}{2}$, $[u]$ — ціла частина u.

З роботи Richert[10] випливає, що $\Delta(1,k;x) \ll x^{\frac{2}{5+2k}}$, що краще, ніж результат, вказаний в роботі In Yaming [8] (див. формулу (2) нашої роботи).

На сьогоднішній день можна отримати таку оцінку

$$\Delta(1,k;x) \ll x^{\theta(k)}\ln x, \qquad \theta(k) = \max\left(\frac{l_0+l_1}{l_0+1}, \frac{1}{k+1}, \frac{l_0}{l_0k+q+l_0-l_1}\right),$$

де (l_0, l_1) — довільна експонентна пара (наприклад, експонентна пара Huxley-Watt $(\frac{9}{56}+\epsilon, \frac{37}{56}+\epsilon)$, $\epsilon > 0$ — довільно мале число). Таким чином, справедлива

Теорема 4. *Нехай* (l_0, l_1) *— одновимірна експонентна пара,* $0 < l_0 < \frac{1}{2} < l_1 < 1$. *Тоді справедлива асимптотична формула*

$$\sum_{n\leq x}\tau(S_k^2(n)) = \zeta(k)x + \zeta\left(\frac{1}{k}\right)x^{\frac{1}{k}} + O\left(x^{\theta(k)}\ln x\right),$$

де $\theta(k)$ *визначена вище.*

Нашою останньою метою буде доведення асимптотичної формули для середнього занчення $\tau(S_2^2(n))$ в короткому інтервалі, а саме

Теорема 5. *Для* $h \in [x^\theta, x)$ *справедлива асимптотична формула*

$$\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h}\tau(S_2^2(n)) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(h^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^\theta\right),$$

де $\theta = 0,2204$.

Доведення. Для $h > \frac{x}{2}$ маємо

$$\begin{gathered}\sum_{x<n\leqslant x+h}\tau_{1,2}(n)=\sum_{x<md^2\leqslant x+h}1=\\ =\sum_{d\leqslant(x+h)^{\frac{1}{2}}}\sum_{\frac{x}{d^2}<m\leqslant\frac{x+h}{d^2}}1=\sum_{d\leqslant(x+h)^{\frac{1}{2}}}\left(\left[\frac{x+h}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)=\\ =h\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^2}+O\left(h\sum_{d\leqslant(x+h)^{\frac{1}{2}}}\right)=\zeta(2)h+O\left(h^{\frac{1}{2}}\right).\end{gathered}\tag{24}$$

Далі для $x^{\frac{2}{3}}\leqslant h<\frac{x}{2}$

$$\begin{gathered}\sum_{x<n\leqslant x+h}\tau_{1,2}(n)=\sum_{d\leqslant h^{\frac{1}{2}}}\sum_{\frac{x}{d^2}<m\leqslant\frac{x+h}{d^2}}1+\sum_{\frac{x<md^2\leqslant x+h}{1}}d>h^{\frac{1}{2}}1=\\ =\zeta(2)h+O\left(h^{\frac{1}{2}}\right)+O\left(\sum_{m<\frac{x}{h}}\left(\sqrt{\frac{x+h}{m}}-\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\right)=\zeta(2)h+O\left(h^{\frac{1}{2}}\right).\end{gathered}\tag{25}$$

Нарешті, для $h<x^{\frac{2}{3}}$ маємо

$$\sum_{x<n\leqslant x+h}\tau_{1,2}(n)=\sum_{d\leqslant h^{\frac{1}{2}}}\left(\left[\frac{x+h}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)+O\left(\sum_{h^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{2}}}\left(\left[\frac{x+h}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)\right),$$

оскільки

$$\begin{gathered}\sum_{h^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{2}}}\left(\left[\frac{x+h}{d^2}\right]-\left[\frac{x}{d^2}\right]\right)=\\ =\sum_{h^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{3}}}\left(\psi\left(\frac{x}{d^2}\right)-\psi\left(\frac{x+h}{d^2}\right)\right)+O(h^{\frac{1}{2}})+\sum_{x^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{x<md^2\leqslant x+1}1.\end{gathered}\tag{26}$$

Але

$$\begin{gathered}\sum_{x^{\frac{1}{2}}<d<x^{\frac{1}{3}}}\sum_{x<md^2\leqslant x+1}1=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{(\frac{x}{m})^{\frac{1}{2}}<d\leqslant(\frac{x+h}{m})^{\frac{1}{2}}}1=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\left[\sqrt{\frac{x+h}{m}}\right]-\left[\sqrt{\frac{x}{m}}\right]\right)=\\ =\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\psi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)-\psi\left(\sqrt{\frac{x+h}{m}}\right)\right)+O\left(hx^{\frac{1}{3}}\right)=\\ =\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\psi\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)-\psi\left(\sqrt{\frac{x+h}{m}}\right)\right)+O\left(hx^{\frac{1}{2}}\right).\end{gathered}\tag{27}$$

Таким чином, ми отримали співвідношення

$$\sum_{x<n\leqslant x+h}\tau_{1,2}(n)=\zeta(2)h+O\left(\left|\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\psi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right|\right)+ \\ +O\left(\left|\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{2}}}\psi\left(\frac{x}{n^2}\right)\right|\right)+O\left(h^{\frac{1}{2}}\right). \tag{28}$$

Суми справа оцінювали багато авторів (див. [17]). Ми будемо користуватись оцінками

$$\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\psi\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\ll x^{\frac{9}{41}}=x^{0,2195\ldots}\quad(\text{див.}[10])\ , \tag{29}$$

$$\sum_{h\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\psi\left(\frac{x}{n^2}\right)=x^{0,2204}(\text{див.}[2])\ . \tag{30}$$

Тому з (28)–(30) випливає твердження теореми 5.

Висновки. В теоремах 1–5 нами покращені деякі результати Keng [7], Lu Yaming [8], Wang Yanxing [15], а також доведено нові оцінки відносно розподілу значень $\tau(S_k^1(n))$ на відрізках натурального ряду і $\tau(S_2^2(n))$ в короткому інтервалі.

1. **Варбанець П., Кирбат С.** О среднем значении функции $S'_k(n)$ / П. Варбанец, Кирбат С. // Укр. мат. журн. – 2011. – Т. 63. – С. 448–458.
2. **Varbanets P.** Multiplicative functions of special types in short intervals / P. Varbanets // New trends in probability and statistic, Ultrecht (The Netherlands), Tokyo (Japan). – 1992. – V. 2. – P. 181–190.
3. **Ding Liping** On the mean value Smarandache ceil functions / Ding Liping // Scientia Manga. – 2005. – V. 1, Is. 2. – P. 74–77.
4. **Ibstedt H.** Surfing on the Ocean of the Numbers — a few Smarandache Nottions and Similar Topics. – Erhun Univ Press, New Mexico, USA, 1997. – 321 p.
5. **Computational** Aspect of Numbers Sequences. – Amer. Research Press, Lipton, USA, 1999. – 400 p.
6. **Карацуба А. А.** Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. – М. : Мир, 1975. – 240 с.
7. **Keng H. L.** Introduction to Number Theory / H. L. Keng. – Springer Verlag, New York, USA, 1981.
8. **Lu Yaming** On the dual function of the Smarandache ceil function / Lu Yaming // Research of Smarandache problems in number theory, Hexis Phoenix AZ. – 2005. – P. 55–57.
9. **Прахар К.** Распределение простых чисел / К. Прахар. – М. : Мир, 1967.

10. **Richert H. E.** Uber die Anzahl Abelscher Gruppen gegeblener Ording / H. E. Richert // Math. Z. – 1593, V. 56. – P. 21–32 (I), Math. Z. – 1593. – V. 58. –P. 71–84 (II).
11. **Smarandache F.** Only Problems...not Solutions / F. Smarandache. – Xiquan Publ. House Phoenix-Chicago, USA, 1993.
12. **Титчмарш Е.** Теория дзета-функции Римана / Е. Титчмарш. – М. : "ИЛ", 1953.
13. **Tabirca S., Tabirca T.** Some new result concerning the Smarandache ceil function / S. Tabirca, T. Tabirca // Smarandache Notions Journal. – 2002. – V. 13. P. 30–36.
14. **Filaseta M., Trifonov O.** On gaps between squarefree numbers, I, II / M. Filaseta, O. Trifonov // Progress in Math Series. – 1991. – V. 85. P. 235–253.
15. **Wang Yanxing** Some identities involving the Smarandache ceil functionsi / Wang Yanxing // Scientia Manga. – 2006. – V. 2, Is. 1. – P. 44–49.
16. **Xiayan Li** The mean value of the k-th Smarandache dual functioni / Xiayan Li // Proc Fifth Int. Conf. Number Theory and Smarandache Notions, Hexis. – 2009. P. 128–132.
17. **Kratzel E.** Lattice points / E. Kratzel. – Kluwel, 1998.
18. **Nowak W., Menzel H.** On an asymmetric divisor problem with congruence conditions / W. Nowak, H. Menzel // Manuscripta mathematica, Berlin, Heiblelbergi. – 1986. – P. 107–120.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 22–30

Mathematical Subject Classification: 15A23, 65F08
УДК 519.635.4

В. В. Вербицкий, И. Н. Иванищева
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова
Одесский национальный политехнический университет

ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЕ СЕДЛОВЫХ МАТРИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕПОЛНОГО ОБОБЩЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ХОЛЕССКОГО

Вербіцький В. В., Іваніщева І. М. Передобумовлювання сідлових матриць з використанням неповнго узагальненого розкладання Холеського. Доведено існування неповного узагальненого розкладання Холеського сідлової матриці. Розкладання використано для побудови передобумовлювача системи з сідловою матрицею. Побудований передобумовлювач дозволяє використовувати метод спряжених градієнтів для роз'язування передобумовленої системи.
Ключові слова: неповне узагальнене розкладання Холеського, передобумовлювач, сідлова матриця.

Вербицкий В. В., Иванищева И. Н. Предобуславливание седловых матриц с использованием неполного обобщенного разложения Холесского. Доказано существование неполного обобщенного разложения Холесского седловой матрицы. Разложение использовано для построения предобуславливателя системы уравнений с седловой матрицей. Построенный предобуславливатель позволяет использовать метод сопряженных градиентов для решения предобусловленной системы.
Ключевые слова: неполное обобщенное разложение Холесского, предобуславливатель, седловая матрица.

Verbitsky V., Ivanisheva I. An incomplete generalized Cholesky factorization preconditioner for a saddle-point matrix. The existence of an incomplete generalized Cholesky factorization of a saddle matrix is proved. The factorization is applied to construct saddle point problem preconditioner. The preconditioner allows to use the conjugate gradient method for solving the preconditioned system.
Key words: an incomplete generalized Cholesky factorization, preconditioner, saddle point problems.

Введение. Большие разреженные системы с седловыми матрицами вида

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $A \in \mathrm{R}^{m\times m}$ — симметричная положительно определенная матрица, $B \in \mathrm{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$ — матрица полного столбцового ранга, возникают во многих научных приложениях, например, при аппроксимации смешанным методом конечных элементов различных задач механики жидкости и механики деформируемого твердого тела [1]. Эффективными методами решения систем с седловыми матрицами являются итерационные методы подпространства Крылова, такие как MINRES (the minimal residual method), GMRES (the generalized minimal residual method),

© Вербицкий В. В., Иванищева И. Н., 2013

CG (conjugate gradients) [2,3,4]. Методы подпространства Крылова требуют предобуславливания исходной системы [4]. Один из известных способов построения предобуславливателей для систем с седловыми матрицами состоит в использовании неполного разложения исходной матрицы [3]. В работе [5] показано, что для матрицы (1) существует обобщенное разложение Холесского.

Статья посвящена построению неполного обобщенного разложения Холесского для матрицы (1) с целью его использования в качестве предобуславливателя для итерационного метода подпространства Крылова.

Основные результаты.

1. Итерационные методы подпространства Крылова

Пусть x_0 — начальное приближение к решению системы

$$\mathcal{A}x = b \tag{2}$$

и $r_0 = b - \mathcal{A}x_0$ — невязка начального приближения. На k–ой итерации итерационные методы подпространства Крылова определяют приближение x_k к решению системы, удовлетворяющее условию

$$x_k \in x_0 + \mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0) \equiv \operatorname{span}\{r_0, \mathcal{A}r_0, \ldots, \mathcal{A}^{k-1}r_0\}$$

есть k–е подпространство Крылова, определяемое матрицей $\mathcal{A}$ и вектором r_0. Хорошо известно, что подпространства Крылова образуют вложенную последовательность подпространств, наибольшая размерность которых

$$d \equiv \dim \mathcal{K}_{m+n}(\mathcal{A}, r_0) \le m + n,$$

т. е.

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{A}, r_0) \subset \cdots \subset \mathcal{K}_d(\mathcal{A}, r_0) = \cdots = \mathcal{K}_{m+n}(\mathcal{A}, r_0).$$

В частности, для любого $k \le d$ размерность подпространства Крылова $\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0)$ равна k.

Поскольку число степеней свободы для определения приближения x_k равно k, то для его однозначного определения необходимо k условий. В методах подпространства Крылова эти условия определяются следующим образом

$$r_k = b - \mathcal{A}x_k \in r_0 + \mathcal{A}\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0), \quad r_k \perp \mathcal{C}_k, \tag{4}$$

где $\mathcal{C}_k$ подпространство размерности k.

Если подпространство Крылова $\mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0)$ имеет размерность k и

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^T > 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_k = \mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0) \tag{I}$$

или

$$\det \mathcal{A} \ne 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{A}\mathcal{C}_k = \mathcal{K}_k(\mathcal{A}, r_0), \tag{II}$$

то приближение x_k вида (3), невязка которого удовлетворяет условию (4), однозначно определяется.

Условия (I) лежат в основе известных реализаций методов подпространства Крылова MINRES и CG, а условия (II) — в основе метода GMRES.

Наиболее предпочтительным методом для систем с симметричными положительно определенными матрицами является алгоритм сопряженных градиентов CG. Он наименее подвержен численной неустойчивости и его реализация наименее трудоемкая, ибо на k-м шаге необходимо хранить лишь четыре вектора, а не k[4].

Отметим, что матрица (1) несимметрична и не является положительно определенной. Далее будет построен такой предобуславливатель, что матрица предобусловленной системы будет симметричной и положительно определенной.

2. Неполное обобщенное разложение Холесского

Известно, что методы подпространства Крылова требуют предобуславливания исходной системы. В противном случае методы сходятся очень медленно или вообще расходятся [4]. Предобуславливание состоит в следующем. Вместо системы (2) рассматривается предобусловленная система

$$M^{-1}\mathcal{A}x = M^{-1}b, \tag{5}$$

где предобуславливатель M выбирают так, чтобы:

1) система $My = g$ решалась легче исходной;

2) матрица M^{-1} была близка к исходной, в результате чего уменьшается число обусловленности задачи и, как следствие, увеличивается скорость сходимости метода.

Один из известных способов построения предобуславливателя состоит в использовании неполного разложения матрицы. Например, неполное LU–разложение имеет вид

$$\mathcal{A} = LU + R, \tag{6}$$

где L — нижняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали, U — верхняя треугольная матрица. При этом $l_{ij} \neq 0$, $u_{ij} \neq 0$, только если $a_{ij} \neq 0$ и если $a_{ij} \neq 0$, то $r_{ij} = 0$. Если построено разложение (6), то предобуславливатель выбирают следующим образом

$$M = LU.$$

К сожалению, неполное разложение вида (6) может не существовать для многих типов матриц. Например, хорошо известно, что неполное разложение Холесского может не существовать для симметричной положительно определенной матрицы [5].

Представим матрицу $\mathcal{A}$ в виде

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $L_1 \in R^{m\times m}$ — множитель Холесского матрицы A $(A = L_1L_1^T)$,

$$S = (L_1^{-1}B)^T(L_1^{-1}B) = B^TL_1^{-T}L_1^{-1}B = B^TA^{-1}B$$

— положительно определенная матрица. Построив разложение Холесского $S = LL^T$, из (7) получаем разложение

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & L^T \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Разложение (8) называется обобщенным разложением Холесского седловой матрицы $\mathcal{A}$ [6].

Пусть $\widetilde{S}$ — положительно определенная матрица, получаемая из матрицы S обнулением некоторых элементов. Например, если матрицу S представить в блочном виде с квадратными диагональными блоками

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{k1} & \cdots & S_{kk} \end{bmatrix},$$

то

$$\widetilde{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & S_{kk} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в этом случае $\widetilde{S}$ — блочный предобуславливатель Якоби для матрицы S. Самый простой способ выбора матрицы $\widetilde{S}$ — это положить $\widetilde{S} = \mathrm{diag}(S)$.

Построим разложение Холесского матрицы $\widetilde{S} = L_2 L_2^T$. Положив $S = L_2 L_2^T + R$, из (7) получаем разложение

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & L_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Разложение (9) назовем неполным обобщенным разложением Холесского седловой матрицы $\mathcal{A}$.

Построим предобуславливатель для системы (2), используя неполное обобщенное разложение Холесского. Системе (2) поставим в соответствие предобусловленную систему

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{L}}^{-T} y = \mathcal{L}^{-1} b, \tag{10}$$

где $y = \widetilde{\mathcal{L}}^T x$,

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ -(L_1^{-1}B)^T & L_2 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{\mathcal{L}}^T = \begin{bmatrix} L_1^T & L_1^{-1}B \\ 0 & L_2^T \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. *Матрица $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{L}}^{-T}$ предобусловленной системы (10) симметрична, а если все собственные значения матрицы $L_2^{-1}RL_2^{-T}$ больше -1, то и положительно определена, в частности матрица, $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{L}}^{-T}$ положительно определена, если*

$$||R||_1 < \lambda_{min}(\widetilde{S}). \tag{11}$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{L}}^{-T} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I + L_2^{-1}RL_2^{-T} \end{bmatrix}.$$

Отсюда сразу следуют первые два утверждения теоремы.

Пусть $\{\lambda, x\}$ — произвольная собственная пара матрицы $L_2^{-1}RL_2^{-T}$, тогда

$$L_2^{-1}RL_2^{-T}x = \lambda x, \quad x \neq 0,$$
$$Ry = \lambda L_2 L_2^T y, \quad y = L_2^{-T}x \neq 0,$$
$$R(L_2L_2^T)^{-1}z = \lambda z, \quad z = (L_2L_2^T)y \neq 0.$$

Из последнего равенства получаем

$$|\lambda|\,||z||_2 = ||R(L_2L_2^T)^{-1}z||_2 = ||R\widetilde{S}^{-1}z||_2 \leqslant ||R||_2||\widetilde{S}^{-1}||_2||z||_2 \leqslant \frac{||R||_1||z||_2}{\lambda_{min}(\widetilde{S})}.$$

Значит,

$$|\lambda| \leqslant \frac{||R||_1}{\lambda_{min}(\widetilde{S})}.$$

Поэтому, если условие (11) выполняется, все собственные значения матрицы $L_2^{-1}RL_2^{-T}$ по модулю меньше 1 и по второму утверждению теоремы матрица $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{A}\widetilde{\mathcal{L}}^{-T}$ положительно определена.

Таким образом, согласно теореме 1, для нахождения решения предобусловленной системы (10) можно применить метод сопряженных градиентов CG.

Известно, что эффективность предобуславливателя, построенного на неполном разложении, зависит от перенумерации неизвестных [7]. Очевидно, что чем ближе к нулевой матрице матрица R, тем лучше матрица $\mathcal{L}\widetilde{\mathcal{L}}^T$ аппроксимирует матрицу $\mathcal{A}$, а значит, тем эффективней будет предобуславливатель. С другой стороны, чем больше разреженность матрицы S, тем меньше ненулевых элементов содержит матрица R при фиксированном выборе матрицы $\widetilde{S}$. В рассматриваемом выше случае матрица S будет полностью заполненной. В работе [6] предложены алгоритмы перенумерации для уменьшения заполнений обобщенных множителей Холесского. Покажем, что эти алгоритмы перенумерации можно применить и для построения более эффективных предобуславливателей на основании неполного обобщенного разложения Холесского.

Седловую матрицу $\mathcal{A}$, элементы которой переупорядочены с целью уменьшения заполнения обобщенных множителей Холесского, представим в блочном виде следующим образом:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & A_{13} & B_{14} & \cdots & A_{1,2p-1} & B_{1,2p} \\ -B_{12}^T & O_{22} & B_{23} & O_{24} & \cdots & B_{2,2p-1} & O_{2,2p} \\ A_{13}^T & -B_{23}^T & A_{33} & B_{34} & \cdots & A_{3,2p-1} & B_{3,2p} \\ -B_{14} & O_{24}^T & -B_{34}^T & O_{44} & \cdots & B_{4,2p-1} & O_{4,2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{1,2p-1}^T & -B_{2,2p-1}^T & A_{3,2p-1}^T & -B_{4,2p-1}^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1} & B_{2p-1,2p} \\ -B_{1,2p}^T & 0_{2,2p}^T & -B_{3,2p}^T & O_{4,2p}^T & \cdots & -B_{2p-1,2p}^T & O_{2p,2p} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Столбцы блока*

$$\left[B_{1,2k}^T, O_{2,2k}^T, B_{3,2k}^T, O_{4,2k}^T, \cdots, B_{2k-1,2k}^T\right]^T,$$

который расположен над диагональным нулевым блоком $O_{2k,2k}$, $k = \overline{1,p}$, *линейно независимы.*

Доказательство. Поскольку для матрицы (12) можно построить обобщенное разложение Холесского, а значит, и LU-разложение, то по теореме об LU-разложении определители всех главных ведущих подматриц матрицы (12) отличны от нуля. Значит, столбцы указанного блока не могут быть линейно зависимы, ибо в этом случае определитель главной ведущей подматрицы, содержащий эти столбцы и часть нулевого блока $O_{2k,2k}$, равнялся бы нулю.

Теорема 2. *Если элементы седловой матрицы* $\mathcal{A}$ *переупорядочены так, что для нее существует обобщенное разложение Холесского, то для нее можно построить неполное обобщенное разложение Холесского.*

Доказательство. Для построения неполного обобщенного разложения Холесского матрицы (12) необходимо p шагов. Каждый шаг состоит из двух этапов. Рассмотрим первый шаг разложения. Обозначим $\mathcal{A}^{(0)} = \mathcal{A}$. Матрица

$$\mathcal{A}_A^{(0)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(0)} & A_{13}^{(0)} & \cdots & A_{1,2p-1}^{(0)} \\ (A_{13}^{(0)})^T & A_{33}^{(0)} & \cdots & A_{3,2p-1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{1,2p-1}^{(0)})^T & (A_{3,2p-1}^{(0)})^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1}^{(0)} \end{bmatrix}$$

положительно определена. Построим разложение Холесского матрицы $A_{11}^{(0)} = L_{11}L_{11}^T$. Тогда первая блочная строка множителя $\widetilde{\mathcal{L}}^T$ будет иметь вид

$$\left[L_{11}^T, B_{12}^{(1)}, A_{13}^{(1)}, B_{14}^{(1)}, \cdots, A_{1,2p-1}^{(1)}, B_{1,2p}^{(1)}\right],$$

где

$$B_{1,2j}^{(1)} = L_{11}^{-1}B_{1,2j}^{(0)}, \quad A_{1,2j-1}^{(1)} = L_{11}^{-1}A_{1,2j-1}^{(0)}, \quad j = \overline{2,p},$$

а первый блочный столбец множителя $\mathcal{L}$ будет таким

$$\left[L_{11}^T, -B_{12}^{(1)}, A_{13}^{(1)}, -B_{14}^{(1)}, \cdots, A_{1,2p}^{(1)}, -B_{1,2p-1}^{(1)}\right]^T.$$

Блоки активной подматрицы первого этапа первого шага разложения вычисляются следующим образом:

$$\mathcal{A}_A^{(0.5)} = \begin{bmatrix} A_{33}^{(0)} & \cdots & A_{3,2p-1}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{3,2p-1}^{(0)})^T & \cdots & A_{2p-1,2p-1}^{(0)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A_{13}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (A_{1,2p-1}^{(1)})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{13}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (A_{1,2p-1}^{(1)})^T \end{bmatrix}^T;$$

$$B_{2k,2j-1}^{(1)} = \lfloor B_{2k,2j-1}^{(0)} + (B_{1,2k}^{(1)})^T A_{1,,2j-1}^{(1)} \rfloor, \quad k = \overline{1,p}, j = \overline{k+1,p}; \tag{13}$$

$$B^{(1)}_{2k-1,2j} = B^{(0)}_{2k-1,2j} - (A^{(1)}_{1,2k-1})^T B^{(1)}_{1,,2j}, \quad k = \overline{2,p}, j = \overline{k,p}; \tag{14}$$

$$O^{(1)}_{2k,2k} = \mathrm{diag}((B^{(1)}_{1,2k})^T B^{(1)}_{1,2k}), \quad k = \overline{1,p};$$

блоки $O_{2k,2j}$, $k \neq j$, остаются нулевыми. Здесь скобки $\lfloor\rfloor$ означают, что элемент блока $B^{(1)}_{2k,2j-1}$ вычисляется лишь тогда, когда соответствующий элемент блока $B^{(0)}_{2k,2j-1}$ отличен от нуля. Поскольку фактически матрица $\mathcal{A}^{(0.5)}_A$ является активной подматрицей после первого шага разложения Холесского матрицы $\mathcal{A}^{(0)}_A$, то она положительно определена. В силу леммы 1 диагональные элементы матрицы $O^{(1)}_{2,2}$ положительны, поэтому можно вычислить разложение Холесского $O^{(1)}_{2,2} = L_{22}L^T_{22}$. Теперь на втором этапе первого шага вычислим вторую блочную строку множителя $\widetilde{\mathcal{L}}^T$,

$$\left[L^T_{22}, B^{(1)}_{23}, O_{24}, \cdots, B^{(1)}_{2,2p-1}, O_{2,2p}\right],$$

и второй блочный столбец множителя $\mathcal{L}$

$$\left[L^T_{22}, -B^{(1)}_{23}, O_{24}, \cdots, -B^{(1)}_{2,2p-1}, O_{2,2p}\right]^T,$$

где $B^{(1)}_{2,2k-1} = L^{-1}_{22}B^{(1)}_{2,2k-1}$, $k = \overline{2,p}$. Активная подматрица этого этапа вычисляется так:

$$\mathcal{A}^{(1)}_A = \mathcal{A}^{(0.5)}_A + \begin{bmatrix} (B^{(1)}_{23})^T \\ \vdots \\ (B^{(1)}_{2,2p-1})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B^{(1)}_{23})^T \\ \vdots \\ (B^{(1)}_{2,2p-1})^T \end{bmatrix}^T. \tag{15}$$

Поскольку матрица $\mathcal{A}^{(0.5)}_A$ положительно определена, то и матрица $\mathcal{A}^{(1)}_A$ тоже положительно определена.

Предположим, что выполнено k шагов разложения. Покажем, что можно выполнить $(k+1)$-й шаг. Матрица

$$\mathcal{A}^{(k)}_A = \begin{bmatrix} A^{(k)}_{2k+1,2k+1} & \cdots & A^{(k)}_{2k+1,2p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (A^{(k)}_{2p-1,2k+1})^T & \cdots & A^{(k)}_{2p-1,2p-1} \end{bmatrix}$$

положительно определена, поскольку преобразования активной подматрицы на обоих этапах каждого шага, определяемые формулами типа (13) и (15), сохраняют положительную определенность. Значит, можно выполнить первый этап $(k+1)$-го шага разложения. Второй этап $(k+1)$-го шага можно выполнить, если диагональные элементы матрицы

$$O^{(k+1)}_{2k+2,2k+2} = \mathrm{diag}\Big((B^{(1)}_{1,2k+2})^T B^{(1)}_{1,2k+2} + (B^{(2)}_{3,2k+2})^T B^{(2)}_{2,2k+2} + \cdots +$$

$$+ (B^{(k+1)}_{2k+1,2k+2})^T B^{(k+1)}_{2k+1,2k+2}\Big)$$

положительны. l-й диагональный элемент этой матрицы будет положительным, если l-й столбец матрицы

$$\left[(B^{(1)}_{1,2k+2})^T, O^T_{2,2k+2}, (B^{(2)}_{3,2k+2})^T, \cdots, (B^{(k+1)}_{2k+1,2k+2})^T\right]^T$$

отличен от нулевого. Поскольку по лемме 1 столбцы матрицы

$$\left[B^T_{1,2k+2}, O^T_{2,2k+2}, B^T_{3,2k+2}, \cdots, B^T_{2k+1,2k+2}\right]^T$$

линейно независимы, найдется такой индекс t, $1 \le t \le k+1$,что

$$(B_{2\widetilde{t}-1,2k+2})_{*,l} = 0, \quad 1 \le \widetilde{t} < t, \qquad (B_{2t-1,2k+2})_{*,l} \neq 0.$$

Тогда, учитывая формулы преобразования типа (14), находим, что

$$(B^{(t)}_{2t-1,2k+2})_{*,l} \neq 0.$$

3.Вычислительный эксперимент

Аппроксимируя задачу Дирихле для бигармонического оператора

$$\Delta^2 u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u = \partial_n u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

где $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$, смешанным методом конечных элементов по схеме Германа–Мийоси, получаем систему (2) с матрицей $\mathcal{A}$ вида (1), размерность которой зависит от триангуляции области Ω.

В вычислительном эксперименте правая часть f уравнения выбрана так, что точное решение краевой задачи имеет вид $u(x,y) = x^2y^2(1-x-y)^2$. Использовались равномерные триангуляции, определяемые разбиением катетов треугольника Ω на равные части. Узлы триангуляции нумеровались слева направо и снизу вверх. Матрица вида (1) получается, если вначале нумеровать неизвестные одного типа, а затем — другого типа. Матрица вида (12) получается, если в каждом узле вначале нумеровать неизвестные одного типа, а затем — другого типа.

Таблица 1.

Сетка	m	n	Без переном.	С переном.
10×10	198	66	26	16
20×20	693	231	123	59
30×30	1488	496	*	140
40×40	2583	861	*	259
50×50	3978	1346	*	393

Число итераций алгоритма CG, необходимое для выполнения оценки $||\mathcal{A}x_k - b||_2/||b||_2 \le 10^{-6}$

Известно, что такая нумерация позволяет построить обобщенное разложение Холесского [6], а значит, можно построить и неполное обобщенное разложение Холесского. Неполное обобщенное разложение Холесского строилось для

матриц обоих типов. В качестве матрицы $\widetilde{S}$ выбиралась диагональная матрица. Затем строились предобуславливатели. Решение предобусловленной системы находилось методом сопряженных градиентов CG. Использовалась функция $cgs()$ пакета MATLAB. В таблице 1 представлены результаты вычислительного эксперимента.

Отметим, что выбранная перенумерация далека от оптимальной (алгоритмы построения более эффективных перенумераций приведены в работе [6]). Тем не менее, предобуславливатель, построенный для перенумерованной матрицы, оказался значительно эффективнее предобуславливателя для исходной матрицы.

Заключение. Нами доказано существование неполного обобщенного разложения Холесского седловой матрицы. Показано, что неполное обобщенное разложение Холесского вместе с алгоритмами перенумерации элементов матрицы, уменьшающими заполнение обобщенных множителей Холесского, можно использовать для построения эффективных предобуславливателей. Причем предобусловленная система является симметричной и положительно определенной, что позволяет использовать метод сопряженных градиентов, который среди методов подпространств Крылова является одним из самых эффективных и наименее трудоемким. Проведенный вычислительный эксперимент, в котором седловые матрицы различной размерности получаются в результате аппроксимации задачи Дирихле для бигармонического оператора смешанным методом конечных элементов на последовательности равномерных сгущающихся сеток, подтверждает теоретические результаты. Отметим, что построение предобулавливателей на основании неполного обобщенного разложения Холесского требует разработки эффективных методов перенумерации элементов седловой матрицы.

1. **Brezzi F.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F. Brezzi, M. Fortin. – Springer–Verlag, 1991. – 350 p.
2. **Benzi M.** Numerical solution of saddle point problems / M. Benzi, G. H. Golub, J. Liesen // Acta Numerica. – 2005. – P. 1–137.
3. **Benzi M.** Some Preconditioning Techniques for Saddle Point Problems / M. Benzi, A. J. Wathen // Mathematics in Industry. – 2008. – V. 13. – P. 195–211.
4. **Saad Y.** Iterative Methods for Sparse Linear Systems, second edn / Y. Saad. – SIAM, Philadelphia, PA, 2003. – 547 p.
5. **Manteuffel T. A.** An incomplete factorization technique for positive difinite linear systems / T. A. Manteuffel // Mathematics of computation. – 1980. – V. 34(150). – P. 473–497.
6. **Масловская Л.В.** Обобщенный алгоритм Холесского для смешанных дискретных аналогов эллиптических краевых задач / Л. В. Масловская // ЖВМ и МФ. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 67–74.
7. **Botta E. F. F.** Matrix renumbering ILU: An effective algebraic multilevel ILU preconditioner for sparce matrices / E. F. F. Botta , F. W. Wubs // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1999. – V. 20, Is. 4. – P. 1007–1026.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 31–37

Mathematical Subject Classification: 31A10
УДК 517.9

О. В. Лопотко
Национальный лесотехнический университет Украины

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ $\frac{d^3}{dx^3}$

Лопотко О. В. Інтегральне представлення додатньо визначених функцій однієї змінної, пов'язаних з оператором $\frac{d^3}{dx^3}$. Отримано інтегральне представлення додатньо визначенних функцій однієї змінної, для яких ядро $K(x,y)$ додатньо визначене.
Ключові слова: інтегральне представлення, додатньо визначені функції.

Лопотко О. В. Интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, связанных с оператором $\frac{d^3}{dx^3}$. Получено интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, для которых ядро $K(x,y)$ положительно определено.
Ключевые слова: интегральное представление, положительно определенные функции.

Lopotko O. V. Integral representation is obtained for of positive definite function of one variable such that the kernel $K(x,y)$ is positively defined. Integral representation is obtained for of positive definite function of one variable such that the kernel $K(x,y)$ is positively defined.
Key words: integral representation, positive definite function.

Введение. В работе [1] предложен метод получения интегральных представлений для положительно определенных ядер $K(x,y)\,\big(x,y\in R^1\big)$ с использованием собственных функций дифференциальных операторов, как обычных, так и частных производных. С применением этого метода в монографии [2] доказана теорема об интегральном представлении таких ядер

$$K(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=0}^{r-1}\chi_j(x;\lambda)\overline{\chi_k(y;\lambda)}d\sigma_{jk}(\lambda)$$

через фундаментальную систему решений $\chi_0(x;\lambda),\chi_1(x;\lambda),\dots,\chi_{r-1}(x;\lambda)$ дифференциального уравнения $Lu=\lambda u$. Получены интегральные представления для ядер типа $K(y-x),\frac{1}{2}[K(x+y)\pm K(x-y)],K(x+y)$, связанных с дифференциальными операторами $\frac{d}{dx},-\frac{d^2}{dx^2},i\frac{d}{dx}$. В данной статье доказана теорема об интегральном представлении положительно определенных ядер, связанных с дифференциальным оператором $\frac{d^3}{dx^3}$.

© Лопотко О. В., 2013

Основные результаты.

Определение 1. *Целую функцию* $\mathbb{C} \ni s \mapsto k(s) \in C^\infty$ *будем называть положительно определенной, если*

$$\sum_{i,j=1}^{N} K(x_i, x_j)\xi_i\xi_j \geqslant 0, \quad \forall x_1, \ldots, x_N; \quad \xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbb{R}^1, \tag{1}$$

где

$$K(x,y)=\frac{1}{3}\left[k(x+y)+k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\right],$$

причем

$$\begin{gathered} K(0,0)=0; \quad \frac{\partial K}{\partial x}(0,0)=0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(0,0)=0; \quad \frac{\partial K}{\partial y}(0,0)=0; \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}(0,0)=0; \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}(0,0)=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема 1. *Каждая целая положительно определенная функция* $k(s)$ $(s \in \mathbb{C})$, *удовлетворяющая условиям*

$$k(s) + k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}s\right) + k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}s\right) = 0, \tag{3}$$

$$|k(s)| \leqslant Ce^{|s|} \quad (C>0), \tag{4}$$

допускает представление

$$\begin{aligned} k(x) = &\int_{-1}^{0}\left[\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x} - \frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda)+ \\ &+\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x} - \frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho\,(\lambda)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

где $d\rho(\lambda)$ *— некоторая мера, которая определяется неоднозначно, причем*

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda) < \infty. \tag{6}$$

Обратно, функция вида (5) является положительно определенной и для нее выполняются условия (2)–(4).

Доказательство. Поскольку для положительно определенного ядра (1) равенство

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}K(x,y)=\frac{\partial^3}{\partial y^3}K(x,y)$$

выполняется, то для ядра $K(x,y)$ можно применить теорему 3.7 [3, с. 659] и использовать представление (3.20).

Для этого необходимо найти фундаментальную систему решений $\chi_0(x;\lambda)$, $\chi_1(x;\lambda)$, $\chi_2(x;\lambda)$ уравнения

$$\frac{d^3u}{dx^3}=\lambda u, \tag{7}$$

которые удовлетворяют условиям

$$\frac{d^k}{dx^k}\chi_j(x;\lambda)\big|_{x=0}=\delta_{jk}\quad (j,k=0,1).$$

Так как корни характеристического уравнения $K^3-\lambda=0$ есть $K_1=\sqrt[3]{\lambda}$, если $\lambda\geqslant 0$, и $K_1=-\sqrt[3]{|\lambda|}$, если $\lambda<0$, $K_{2,3}=\dfrac{-\sqrt[3]{\lambda}\pm i\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}}{2}$, то общее решение (7) при $\lambda\geqslant 0$ будет иметь вид

$$y=C_1e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+C_3e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x.$$

Если $\lambda<0$ общее решение (7) будет иметь вид

$$y=C_1e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+C_2e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+C_3e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x.$$

Тогда фундаментальная система (7) будет иметь такой вид:

$$\chi_0(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}+\dfrac{2}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}\,x & (\lambda<0),\\ \dfrac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\dfrac{2}{3}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x & (\lambda\geqslant 0);\end{cases}$$

$$\chi_1(x;\lambda)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda<0),\\ \left(\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda\geqslant 0);\end{cases}$$

$$\chi_2(x;\lambda)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\dfrac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda<0),\\ \left(\dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right)\dfrac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} & (\lambda\geqslant 0).\end{cases}$$

А представление (3.20) из теоремы 3.7 [3, с. 659] будет иметь такой вид:

$$K(x,y)=\sum_{j,k=0}^{2}\chi_j(x;\lambda)\overline{\chi_k(y;\lambda)}, \tag{8}$$

где

$$\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{j,k=0}^{2}\left(\frac{\partial^{j+k}\Omega_\lambda}{\partial x^j\partial y^k}\right)(0,0)\,\chi_j(x;\lambda)\,\overline{\chi_k(y;\lambda)},$$

$$d\sigma_{jk}(\lambda)=\left(\frac{\partial^{j+k}\Omega_\lambda}{\partial x^j\partial y^k}\right)(0,0)\,d\rho(\lambda).$$

Так как $K(x,y)$ удовлетворяют условиям (2), то меры $d\sigma_{jk}(\lambda)=0$ $(j,k=\overline{0,2},$ кроме $j=k=2)$ и представление (8) будет иметь вид:

$$K(x;y)=\int\limits_{R^1}\chi_2(x;\lambda)\overline{\chi_2(y;\lambda)}d\sigma_{22}(\lambda)=\int\limits_{R^1}\chi_2(x;\lambda)\overline{\chi_2}(y;\lambda)d\rho(\lambda). \tag{9}$$

Если теперь положим в (9) $x=y$, получим

$$\frac{1}{3}[k(2x)+k(-x)+k(-x)]=\frac{1}{3}[k(2x)+2k(-x)]=\int\limits_{R^1}\chi_2^2(x;\lambda)d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{1}{3}\,e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right]^2\frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}+ \tag{10}$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]^2\frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}.$$

Правую часть (10) можно упростить следующим образом. Сначала проведем упрощение для $\lambda\geqslant 0$, получим

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}\,e^{\frac{-\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]^2\frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin^2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-2\frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\right.$$

$$\left.-2\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+2\frac{1}{3\sqrt{3}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\left(\frac{1+\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x}{2}\right)+\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\left(\frac{1-\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x}{2}\right)-\right.$$

$$-\frac{2}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{d\rho\,(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}}=$$

$$=\int\limits_0^\infty\Bigg[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{2}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}-$$

$$-\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Таким образом (10), если $\lambda\geqslant 0$, будет иметь вид:

$$\frac{1}{3}[k(2x)+2k(-x)]=\int\limits_0^\infty\Bigg[\frac{1}{9}e^{2\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\cos\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}\sin\sqrt{3}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{2}{9}e^{-\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x- \tag{11}$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\Bigg]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Из (11) следует, что

$$k(x)=\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right]\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda),$$

то есть (5) для $\lambda\geqslant 0$.

Аналогичным образом упрощая (10) для $\lambda<0$, получим (5) для $\lambda<0$. То, что $d\rho(\lambda)$ сосредоточена на отрезке $[-1,1]$, следует из (4). Поэтому функция $k(x)$ допускает аналитическое продолжение до целой функции $k(s)$ ($s\in\mathbb{C}$), так как мера $d\rho(\lambda)$ имеет компактный носитель.

Последнее утверждение теоремы доказывается следующим образом. Из представления (5) находим все слагаемые ядра $K(x;y)$. Найдем их для $\lambda\geqslant 0$:

$$\frac{1}{3}k(x+y)=\int\limits_0^1\Bigg\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}-\frac{1}{9}\left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2}\right]+$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}-e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}}{2i}\right]\Bigg\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda); \tag{12}$$

$$\frac{1}{3}k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_0^1\Bigg\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-$$

$$-\frac{1}{18}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}\right]+ \tag{13}$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}-e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}}{2i}\Bigg\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda);$$

$$\frac{1}{3}k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)=\int\limits_0^1\left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-\right.$$
$$-\frac{1}{18}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}\right]+ \tag{14}$$
$$\left.+\frac{1}{3\sqrt{3}}\left[\frac{e^{\sqrt[3]{\lambda}x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}-e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}y}}{2i}\right]\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho(\lambda).$$

Если теперь сложить равенства (12)–(14) и учесть, что

$$\frac{1}{9}\left[e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}+e^{\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\sqrt[3]{\lambda}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y}\right]=$$
$$=\frac{2}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\right),$$

получим

$$K(x,y)=\frac{1}{3}\left[k\,(x+y)+k\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)+k\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}x+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\right]=$$
$$=\int\limits_0^1\left\{\frac{1}{9}e^{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}+\frac{1}{9}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+\right.$$
$$+\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}(x+y)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y-\frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}-$$
$$-\frac{1}{9}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}y}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x}+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y+$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}(x+y)}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}y}-$$
$$\left.-\frac{1}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}y}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}y\cdot e^{\sqrt[3]{\lambda}x}\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}\,d\rho\,(\lambda)=\int\limits_0^1\chi_2(x)\chi_2(y)d\rho(\lambda). \tag{15}$$

Подставляя (15) в (1) проверяем положительную определенность ядра $K(x,y)$ ($\lambda\geqslant 0$). Аналогично проверяем положительную определенность ядра $K(x,y)$ для $\lambda<0$. Из (15) следует условие (2). Если в (15) положим $y=0$, получим условие (3). Учитывая условие (6), непосредственно проверяем условие (4),

$$|k(x)|\leqslant\int\limits_{-1}^0\left|\frac{1}{3}e^{-\sqrt[3]{|\lambda|}x}-\frac{1}{3}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{\sqrt[3]{|\lambda|}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{|\lambda|}x\right|\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)+$$
$$+\int\limits_0^1\left|\frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}x}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt[3]{\lambda}}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\lambda}x\right|\frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}}d\rho(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{3} e^{|x|} i + \frac{1}{3} e^{\frac{|x|}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{|x|}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) + \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1}{3} e^{|x|} + \frac{1}{3} e^{\frac{|x|}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{|x|}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda^2}} d\rho(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 e^{|x|} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\rho(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda^2}} = C e^{|x|}.$$

Теорема доказана.

Заключение. Нами получено интегральное представление положительно определенных функций одной переменной, для которых ядро $K(x, y)$ положительно определено. Условия, при которых справедливо данное представление, являются одновременно необходимыми и достаточными.

1. **Крейн М. Г.** Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения / М. Г. Крейн // ДАН СССР. – 1946. – Т. 53, №1. – С. 3–6.

2. **Березанский Ю. М.** Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функиям дифференциальных операторов / Ю. М. Березанский // ДАН СССР. – 1956. – Т. 108, №3. – С. 893–896.

3. **Березанский Ю. М.** Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 38–48

Mathematical Subject Classification: 35J25, 31B10
УДК 519.6

Ю. А. Музичук
Львівський національний університет імені І. Франка

МЕТОД ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ РОБІНА, ОТРИМАНИХ У РЕЗУЛЬТАТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАГЕРРА МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Музичук Ю. А. Метод граничних інтегральних рівнянь в крайових задачах Робіна, отриманих у результаті перетворення Лагерра мішаних задач для еволюційних рівнянь. У тривимірних областях з ліпшицевою межею розглянуто зовнішню граничну задачу Робіна для нескінченної системи еліптичних рівнянь, отриманої в результаті застосування перетворення Лагера до змішаних задач для еволюційних рівнянь. За допомогою введеного поняття q-згортки для розглянутої задачі побудовано інтегральне зображення розв'язку. Досліджено існування і єдиність розв'язку отриманої системи граничних інтегральних рівнянь.
Ключові слова: метод граничних інтегральних рівнянь, перетворення Лагерра, еволюційне рівняння, крайова умова Робіна.

Музычук Ю. А. Метод граничных интегральных уравнений в краевых задачах Робина, полученных в результате преобразования Лагерра смешанных задач для эволюционных уравнений. В трехмерных областях с липшицевой границей рассмотрена внешняя краевая задача Робина для бесконечной системы эллиптических уравнений, полученной в результате применения преобразования Лагерра к смешанным задачам для эволюционных уравнений. С помощью введенного понятия q-свертки для рассматриваемой задачи построено интегральное представление решения. Исследовано существование и единственность решения полученной системы граничных интегральных уравнений.
Ключевые слова: метод граничных интегральных уравнений, преобразования Лагерра, эволюционное уравнение, краевое условие Робина.

Muzychuk Yu. On the boundary integral equations method for Robin boundary value problems received as a result of the Laguerre Transformation of mixed problems for evolution equations. We consider exterior boundary value problems for an infinite triangular system of elliptic equations obtained as a result of the application of the Laguerre transformation to mixed problems for evolution equations in 3d Lipschitz domains. With the help of introduced q-convolution the integral representation of the generalized solution of the formulated problem is built. We investigate the existence and uniqueness of the solution of the received system of boundary integral equations.
Key words: boundary integral equation method, Laguerre transformation, evolution equation, Robin condition.

Вступ. Універсальність методу граничних інтегральних рівнянь (ГІР) полягає в тому, що він використовується для теоретичного дослідження і чисельного розв'язування як крайових задач для еліптичних рівнянь, так і мішаних задач

© Музичук Ю. А., 2013

для параболічних та гіперболічних рівнянь. Характерною особливістю його застосування є пониження розмірності задачі на одиницю за рахунок переходу до даних Коші шуканого розв'язку, які розглядаються лише на межі області. Ця властивість методу є особливо важливою для чисельного розв'язування зовнішніх крайових задач, коли область, в якій шукають розв'язок задачі, є необмеженою.

У випадку еліптичних рівнянь теоретичні аспекти методу ГІР є добре дослідженими і висвітленими в літературі, див., наприклад, монографії [1, 2], де також подано широку бібліографію по ключових історичних віхах розвитку цього методу. Численні інженерні застосування методу в різних галузях науки та техніки підтверджують його ефективність [3].

У випадку мішаних (початково-крайових) задач для еволюційних рівнянь метод ГІР також використовується як для теоретичного дослідження, так і для чисельного моделювання, див., наприклад, [4, 5, 6, 7]. Але специфічна залежність ядер відповідних інтегральних операторів від просторових та часової координат ускладнює знаходження чисельного розв'язку інтегральних рівнянь. Тому поряд з безпосереднім застосуванням методів типу Гальоркіна та колокації, які добре зарекомендували себе у стаціонарних випадках, для розв'язування мішаних задач розвиваються спеціалізовані підходи, огляд яких можна знайти у згаданих вище працях і наведених там посиланнях. Зазвичай це комбіновані підходи, серед яких поширеними є інтегральні перетворення за часовою змінною, наприклад, Лапласа [4, 5, 6] чи Лагерра (ПЛ) [8, 9]. У першому випадку в просторі зображень отримують еліптичні крайові задачі, чисельне розв'язування яких комбінують зі складними алгоритмами оберненого перетворення.

Другий підхід приводить до нескінченної трикутної системи еліптичних крайових задач, а обернене перетворення полягає у підсумовуванні розвинення за простим ортогональним базисом. Основна ідея цього підходу полягає в поширенні на нескінченні послідовності функцій поняття поверхневих потенціалів із використанням згортки послідовностей. Компонентами згорток є дані Коші розв'язків (слід і нормальна похідна) нескінченної системи, з одного боку, з іншого — фундаментальний розв'язок оператора цієї системи та його нормальна похідна.

Використання таких потенціалів дає змогу побудувати інтегральне зображення розв'язку крайової задачі для нескінченної трикутної системи і перейти до послідовності інтегральних рівнянь. Вони відрізняються між собою лише правими частинами, до яких входять розв'язки рівнянь з попередніми номерами, а інтегральний оператор лівої частини не змінюється. Ця обставина створює передумову для розробки ефективних алгоритмів чисельного розв'язування інтегральних рівнянь.

Обґрунтування коректності внутрішніх крайових задач у просторі зображень і відповідних ГІР виконано у праці [10], а у [11] цей підхід поширено на зовнішні задачі і розглянуто ГІР першого та другого роду, які відповідають крайовій задачі Діріхле. Метою цієї роботи є отримання і дослідження системи ГІР для зовнішньої задачі Робіна з ліпшицевою межею. У першому розділі подано операторне формулювання крайової задачі і означення узагальненого розв'язку. У другому розділі за допомогою спеціальної згортки нескінченних послідовностей побудовано інтегральне зображення узагальненого розв'язку задачі Робіна, введено відповідні граничні оператори і подано граничні співвідношення для сліду і нормальної похідної узагальненого розв'язку. В третьому розділі виведено систе-

му ГІР, для якої встановлено еквівалентність вихідній крайовій задачі і доведено існування та єдиність її розв'язку.

Основні результати.

1. Формулювання крайової задачі

Нехай Ω і $\Omega^+ := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ — відповідно обмежена однозв'язна область і доповнення її замикання до повного простору $\mathbb{R}^3$, Γ — їх спільна межа, яка є ліпшицевою поверхнею. Розглядатимемо нескінченну систему рівнянь в Ω^+:

$$\begin{cases} Pu_0 = f_0 \,, \\ c_{1,0}u_0 + Pu_1 = f_1 \,, \\ c_{2,0}u_0 + c_{2,1}u_1 + Pu_2 = f_2 \,, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{k,0}u_0 + c_{k,1}u_1 + ... + c_{k,k-1}u_{k-1} + Pu_k = f_k \,, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases} \tag{1}$$

де $u_i \, (i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$ — невідомі функції, $f_i \ (i \in \mathbb{N}_0)$ — задані в Ω^+ функції. У формальному диференціальному операторі другого порядку

$$P := -\Delta + \kappa^2$$

Δ позначає оператор Лапласа, а коефіцієнт κ залежить від параметра $\sigma > 0$ перетворення Лагерра, за допомогою якого система (1) була отримана з деякого еволюційного рівняння [9]. Зокрема, $\kappa = \sqrt{\sigma}$, якщо це було рівняння теплопровідності, і $\kappa = \sigma$ – хвильове рівняння. Задані сталі $c_{i,j} \ (i, j \in \mathbb{N}_0)$ є елементами нескінченної трикутної матриці, $c_{i,j} = 0$ при $j \geqslant i$.

Нехай одиничний вектор нормалі $\bar{\nu}(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ до Γ напрямлений назовні з області Ω. Розглядатимемо крайову задачу для системи (1), яка полягає у відшуканні її розв'язків, що задовольняють на межі Γ таку умову:

$$\left(\partial_{\bar{\nu}} u_k - (b_{k,0}u_0 + b_{k,1}u_1 + ... + b_{k,k-1}u_{k-1} + b_{k,k}u_k)\right)|_\Gamma = \tilde{g}_k, \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Тут $\tilde{g}_i \ (i \in \mathbb{N}_0)$ – задані функції (функціонали)на Γ, $b_{i,j} \in L^\infty(\Gamma) \ (i, j \in \mathbb{N}_0)$ – задані функції на Γ, причому $b_{i,j} = 0$ при $j > i \geqslant 0$ та $b_{i,i} \geqslant \tilde{b}_i > 0$, де $\tilde{b}_i$ – деякі сталі. При $k = 0$ це співвідношення має вигляд $\left(\partial_{\bar{\nu}} u_0 - b_{0,0}u_0\right)|_\Gamma = \tilde{g}_0$ і відоме як крайова умова Робіна [16]. За аналогією (2) також називатимемо умовою Робіна і, відповідно, задачу (1), (2) – крайовою задачею Робіна.

Зауважимо, що трикутний характер системи (1) дає змогу покроково знаходити невідомі функції $u_k, \ k \in \mathbb{N}_0$. А саме, розв'язуючи k-те рівняння $(k \geqslant 1)$, можна вважати, що усі розв'язки $u_i, \ 0 \leqslant i \leqslant k-1$, вже знайдені на попередніх кроках і перенести їх у праву частину рівняння. Однак такий підхід нівелює переваги методу ГІР, оскільки вимагатиме додаткового обрахунку об'ємних потенціалів від комбінації функцій $u_i, \ 0 \leqslant i \leqslant k-1$, знайдених на попередніх кроках. Метод, запропонований у [10] для розв'язування внутрішніх задач для системи (1), дає змогу уникнути цього недоліку та побудувати ефективний алгоритм знаходження чисельного розв'язку. У праці [11] цей метод поширено також на зовнішню задачу Діріхле.

Ми використовуватимемо простір Лебега $L_2(\Omega^+)$ та простори Соболєва $H^1(\Omega^+)$ і $H^1_0(\Omega^+)$ скалярних дійснозначних функцій та спряжені з ними, відповідно,

$\widetilde{H}^{-1}(\Omega^+) := \left(H^1(\Omega^+)\right)'$ та $H^{-1}(\Omega^+) := \left(H_0^1(\Omega^+)\right)'$. Під $\mathcal{D}(\Omega^+)$ та $\mathcal{D}'(\Omega^+)$ розумітимемо простори тестових функцій та розподілів над ними.

Наступна білінійна форма

$$a_{\Omega^+}(u,v) := \int_{\Omega^+} \left[\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) + \kappa^2 u(x)v(x)\right] dx \tag{3}$$

є визначеною для довільних функцій $u, v \in H^1(\Omega^+)$. Відомо (див., наприклад, [15] та [4, 7]), що її можна розглядати як скалярний добуток у $H^1(\Omega^+)$, через який можна ввести нову норму $|||u||| := (a_{\Omega^+}(u,u))^{1/2}$, яка буде еквівалентною звичайній нормі. Очевидно, що ця форма є $H^1(\Omega^+)$-еліптичною.

Також будемо розглядати у $H^1(\Omega^+)$ такий підпростір

$$H^1(\Omega^+, P) := \left\{\ u \in H^1(\Omega^+)\ \middle|\ Pu \in L_2(\Omega^+)\ \right\},$$

наділений нормою

$$||u||_{H^1(\Omega^+,P)} := \Big(\ ||u||^2_{H^1(\Omega^+)} + ||Pu||^2_{L_2(\Omega^+)}\ \Big)^{1/2}.$$

Нехай $\gamma_0^+ : H^1(\Omega^+) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор сліду та $\gamma_1^+ : H^1(\Omega^+, P) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор нормальної похідної, який у випадку функцій з $H^2(\Omega^+)$ і достатньо гладкої межі Γ співпадає з нормальною похідною

$$\partial_{\bar{\nu}} u(x) := \nabla u(x)\cdot\nu(x),\ x \in \Gamma.$$

Відомо ([1], Теорема 4.4), що для функцій $u \in H^1(\Omega^+, P)$ та $v \in H^1(\Omega^+)$ справедлива перша формула Гріна

$$(Pu, v)_{\Omega^+} = a_{\Omega^+}(u,v) + \langle \gamma_1^+ u, \gamma_0^+ v\rangle_\Gamma, \tag{4}$$

де $(\cdot,\cdot)_{\Omega^+}$ та $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ позначають, відповідно, скалярний добуток у $L_2(\Omega^+)$ та відношення двоїстості між $H^{-1/2}(\Gamma)$ та $H^{1/2}(\Gamma)$.

Нехай X — довільний лінійний простір над полем дійсних чисел, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Під X^∞ позначатимемо лінійний простір відображень $\mathbf{u} : \mathbb{Z} \to X$, де $u(k) = 0$ при $k < 0$. Для довільного елемента $\mathbf{u} \in X^\infty$ матимемо $u_k \equiv (\mathbf{u})_k := \mathbf{u}(k), k \in \mathbb{Z}$, та позначатимемо його як $\mathbf{u} := (u_0, u_1, ..., u_k, ...)^\top$. Надалі називатимемо елементи X^∞ послідовностями.

Будемо використовувати трикутні матричні оператори $\mathbf{C} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ та $\mathbf{B} : (L_2(\Gamma))^\infty \to (L_2(\Gamma))^\infty$, які діють таким чином: $(\mathbf{Cu})_k = \sum\limits_{l=0}^{k} c_{k,l}\cdot(\mathbf{u})_l$, $(\mathbf{Bu})_k = \sum\limits_{l=0}^{k} b_{k,l}\cdot(\mathbf{u})_l,\ k \in \mathbb{N}_0$, де $c_{k,l}$ і $b_{k,l}$ коефіцієнти системи (1) та крайової умови (2).

Позначимо послідовності

$$\mathbf{a}_{\Omega^+}(\mathbf{u},\mathbf{v}) := (a_{\Omega^+}(u_0,v_0),\ a_{\Omega^+}(u_1,v_1),\ ...)^\top,\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in (H^1(\Omega^+))^\infty,$$

та

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_X := ((u_0,v_0)_X,\ (u_1,v_1)_X,\ ...)^\top,\ \ \mathbf{u},\mathbf{v} \in (X)^\infty,$$

де X — деякий Гільбертів простір. Подібним чином позначатимемо послідовності на основі відношення двоїстості. Наприклад, якщо $\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ та $\mathbf{v} \in H^{1/2}(\Gamma)$, то писатимемо $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma := (\langle u_0, v_0 \rangle_\Gamma, \langle u_1, v_1 \rangle_\Gamma, ...)^\top$. Аналогічно покомпонентно будемо трактувати дію деяких лінійних операторів (функціоналів) на нескінченні послідовності. Зокрема, для послідовності $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+))^\infty$ введемо поняття сліду як послідовності слідів її компонентів, тобто послідовність $\gamma_0^+ \mathbf{u} := (\gamma_0^+ u_0, \gamma_0^+ u_1, ...)^\top$ вважаємо слідом послідовності $\mathbf{u}$ на поверхні Γ. Якщо $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+, P))^\infty$, то послідовність $\gamma_1^+ \mathbf{u} := (\gamma_1^+ u_0, \gamma_1^+ u_1, ...)^\top$ будемо називати зовнішньою нормальною похідною послідовності $\mathbf{u}$ на межі області.

Враховуючи попередні означення, узагальнений розв'язок задачі Робіна для системи (1) можна визначити так.

Означення 1. *Нехай* $\mathbf{f} \in (\widetilde{H}^{-1}(\Omega))^\infty$ *і* $\tilde{\mathbf{g}} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$. *Послідовність* $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+))^\infty$ *називатимемо узагальненим розв'язком задачі Робіна* (1), (2), *якщо вона задовольняє варіаційну рівність*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\Omega^+}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\Omega^+} + \langle \boldsymbol{B}\gamma_0^+ \boldsymbol{u}, \gamma_0^+ \boldsymbol{v} \rangle_\Gamma = \\ = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} \rangle_{\Omega^+,1} - \langle \tilde{\mathbf{g}}, \gamma_0^+ \boldsymbol{v} \rangle_\Gamma, \ \ \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega^+))^\infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут і далі $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^+,1}$ позначає відношення двоїстості між просторами $\tilde{H}^{-1}(\Omega^+)$ та $H^1(\Omega^+)$.

Відомо [11], що задача Робіна (1), (2) має єдиний узагальнений розв'язок. На основі оператора P задамо матричний (діагональний) оператор $\mathbf{P}$, який діє на послідовність $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+))^\infty$ за правилом: $(\mathbf{P}\mathbf{u})_k = Pu_k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Тоді за умови $\mathbf{f} \in (L_2(\Omega^+))^\infty$ можна подати таке еквівалентне операторне формулювання задачі Робіна [11]: для заданих послідовностей $\mathbf{f} \in (L_2(\Omega^+))^\infty$ і $\tilde{\mathbf{g}} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ знайти розв'язок $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega^+, P))^\infty$, який задовольняє операторне рівняння

$$\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ в } (L_2(\Omega^+))^\infty, \ \mathbf{G} := \mathbf{P} + \mathbf{C}, \tag{6}$$

і крайову умову Робіна

$$\gamma_1^+ \mathbf{u} - \mathbf{B}\gamma_0^+ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{g}} \ \text{ в } \ (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty. \tag{7}$$

2. Основні співвідношення для узагальненого розв'язку задачі

Зазначимо, що фундаментальний розв'язок оператора $\mathbf{G}$ є необхідною складовою частиною для побудови методу ГІР. Називатимемо послідовність $\widetilde{\mathbf{E}}(x, y) = \left(\widetilde{E}_0(x, y), \ \widetilde{E}_1(x, y), \ ...\right)^\top$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, фундаментальним розв'язком оператора $\mathbf{G}$, якщо вона задовольняє рівняння

$$\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\delta}_y \text{ in } \left(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)\right)^\infty,$$

де $\boldsymbol{\delta}_y(x) = (\, \delta_y(x), \ \delta_y(x), \ ...\,)^\top$ та $\delta_y(\cdot) := \delta(\cdot - y)$ — дельта-функція Дірака. Перший компонент цієї послідовності є фундаментальним розв'язком оператора P:

$$\widetilde{E}_0(x, y) := \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \ x, y \in \mathbb{R}^3. \tag{8}$$

У статті [12] розглядаються такі розв'язки за умови виконання співвідношення

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}\xi_i\eta_{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i}\eta_i\xi_{n-k}, \quad \forall n\in\mathbb{N},\ \forall \boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^\infty, \tag{9}$$

що є характерним для систем (1), отриманих у результаті застосування перетворення Лагерра до рівняння теплопровідності або до хвильового рівняння [9]. Наприклад, якщо система (1) відповідає хвильовому рівнянню, то компоненти фундаментального розв'язку оператора $\mathbf{G}$ є такими:

$$\widetilde{E}_i(x,y) := \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}\mathcal{L}_i(\kappa|x-y|), \quad \forall i\in\mathbb{N}_0, \quad x,y\in\mathbb{R}^3, \tag{10}$$

де $\mathcal{L}_i$ позначає многочлен Лагерра [14].

Далі для зображення розв'язків вихідної нескінченної системи будемо використовувати спеціальну операцію згортки послідовностей. Нехай X, Y та Z — довільні лінійні простори і $q : X\times Y\to Z$ — деяке відображення.

Означення 2. *q-згорткою послідовностей $\boldsymbol{u}\in X^\infty$ та $\boldsymbol{v}\in Y^\infty$ називатимемо послідовність $\boldsymbol{w}\in Z^\infty$, яка визначається за правилом*

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\underset{q}{\circ}\boldsymbol{v}, \tag{11}$$

де $w_n \equiv (\boldsymbol{u}\underset{q}{\circ}\boldsymbol{v})_n := \sum_{i=0}^{n} q\,(u_{n-i}, v_i)$, якщо $n\geq 0$, та $w_n = 0$ при $n<0$.

Для деяких відображень спрощуватимемо позначення q-згортки. Наприклад, у випадку $q(u,v) := \langle u,v\rangle_\Gamma$ будемо записувати $\mathbf{u}\underset{\Gamma}{\circ}\mathbf{v} := \mathbf{u}\underset{q}{\circ}\mathbf{v}$.

За допомогою q-згортки побудуємо послідовності, які за аналогією з теорією еліптичних рівнянь також називатимемо потенціалами. Для цього використаємо послідовність $\mathbf{E}(x,y) = (E_0(x,y),\ E_1(x,y),\ ...)^\top$, де

$$E_i(x,y) := \widetilde{E}_i(x,y) - \widetilde{E}_{i-1}(x,y),\ i\in\mathbb{N},\ \ E_0(x,y) = \widetilde{E}_0(x,y),\ x,y\in\mathbb{R}^3. \tag{12}$$

Означення 3. *Нехай $\boldsymbol{\lambda}\in\left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ та $\boldsymbol{\mu}\in\left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$. Послідовності*

$$\boldsymbol{V\mu}(x) := (\boldsymbol{V\mu})(x) \equiv \boldsymbol{\mu}(\cdot)\underset{\Gamma}{\circ}\boldsymbol{E}(x-\cdot),\ x\in\Omega^+, \tag{13}$$

та

$$\boldsymbol{W\lambda}(x) := (\boldsymbol{W\lambda})(x) \equiv \partial_{\bar\nu(\cdot)}\boldsymbol{E}(x-\cdot)\underset{\Gamma}{\circ}\boldsymbol{\lambda}(\cdot),\ x\in\Omega^+, \tag{14}$$

називатимемо відповідно потенціалами простого і подвійного шару стосовно поверхні Γ для оператора $\boldsymbol{G}$.

Відомо ([11], лема 1), що для довільних $\boldsymbol{\lambda}\in\left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ та $\boldsymbol{\mu}\in\left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ поверхневі потенціали $\mathbf{u}=\mathbf{V\mu}$ і $\mathbf{u}=\mathbf{W\lambda}$ є узагальненими розв'язками однорідного рівняння

$$\mathbf{Gu} = \mathbf{0} \ \text{ в } \mathbb{R}^3\setminus\Gamma. \tag{15}$$

Подібно до поверхневих потенціалів, за допомогою q-згортки можна також визначити об'ємний потенціал в $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ та використати його для отримання часткового розв'язку системи (1). Оскільки його основні властивості досліджені в [10], то далі будемо розглядати лише однорідну систему (15).

Нехай $\gamma_0^- : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор сліду, а $\gamma_1^- : H^1(\Omega, P) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор нормальної похідної і $[\gamma_0 u] := \gamma_0^+ u - \gamma_0^- u$, $[\gamma_1 u] := \gamma_1^+ u - \gamma_1^- u$ — їхні стрибки при переході через межу Γ. Тоді розв'язок рівняння (15) можна виразити через його дані Коші [11]:

Теорема 1. *Послідовність* $\boldsymbol{u} \in \left(H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, P)\right)^\infty$, *яка задовольняє рівняння* (15) *в* $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, *можна подати у вигляді*

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\lambda}(x) - \boldsymbol{V}\boldsymbol{\mu}(x), \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \tag{16}$$

де $\boldsymbol{\lambda} := [\gamma_0 \boldsymbol{u}]$ *та* $\boldsymbol{\mu} := [\gamma_1 \boldsymbol{u}]$.

Нагадаємо основні властивості поверхневих потенціалів. Розглянемо граничні оператори

$$\mathbf{V} : (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{1/2}(\Gamma))^\infty, \quad \mathbf{K}' : (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty,$$
$$\mathbf{K} : (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{1/2}(\Gamma))^\infty, \qquad \mathbf{D} : (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \to (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty,$$

визначені для довільних послідовностей $\boldsymbol{\lambda} \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ та $\boldsymbol{\mu} \in \left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ за допомогою q-згортки таким чином:

$$\left(\mathbf{V}\boldsymbol{\mu}\right)_i := \sum_{j=0}^{i} V_j \mu_{i-j}, \quad \left(\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda}\right)_i := \sum_{j=0}^{i} K_j \lambda_{i-j},$$
$$\left(\mathbf{K}'\boldsymbol{\mu}\right)_i := \sum_{j=0}^{i} K'_j \mu_{i-j}, \quad \left(\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda}\right)_i := \sum_{j=0}^{i} D_j \lambda_{i-j}, \ i \in \mathbb{N}_0.$$

Компоненти цих послідовностей визначені так:

$$V_j\mu := \gamma_0^+ V_j \mu, \ D_j\lambda := -\gamma_1^+ W_j \lambda, \ \ j \in \mathbb{N}_0,$$
$$K'_0\mu := \gamma_1^+ V_0 \mu - \frac{1}{2}\mu, \ \ K'_j\mu := \gamma_1^+ V_j \mu, \ \ j \in \mathbb{N},$$
$$K_0\lambda := \gamma_0^+ W_0 \lambda + \frac{1}{2}\lambda, \ \ K_j\lambda := \gamma_0^+ W_j \lambda, \ \ j \in \mathbb{N}.$$

Наступна теорема [11] стосується даних Коші узагальненого розв'язку однорідного рівняння (15):

Теорема 2. ***(i)*** *Якщо пара послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^\infty \times \left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^\infty$ *є даними Коші деякого узагальненого розв'язку рівняння* (15), *то вона задовольняє рівняння*

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{\mu} = 0 \quad y \ \ (H^{1/2}(\Gamma))^\infty \tag{17}$$

та

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{\lambda} + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}'\right)\boldsymbol{\mu} = 0 \quad y \ \ (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty. \tag{18}$$

(ii) *Якщо пара послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)^{\infty} \times \left(H^{-1/2}(\Gamma)\right)^{\infty}$ *задовольняє одне з двох рівнянь* (17) *чи* (18)*, то вона задовольняє і друге та є даними Коші деякого узагальненого розв'язку рівняння* (15)*.*

3. Граничні інтегральні рівняння

Теорема 2 обґрунтовує перехід від крайових задач в області Ω^+ до ГІР на межі Γ стосовно невідомих даних Коші узагальненого розв'язку. Оскільки у крайових умовах Діріхле і Неймана в явному вигляді присутні слід або нормальна похідна розв'язку відповідних задач, то для знаходження невідомих даних можна отримати ГІР першого або другого роду, використавши одне із співвідношень (17) чи (18). Такі рівняння досліджені в [10, 11]. У випадку задачі Робіна (1), (2) жодна з частин даних Коші розв'язку не є заданою окремо, а натомість вони взаємопов'язані крайовою умовою (2). Визначимо з неї нормальну похідну $\boldsymbol{\mu}$ і підставимо її у (18). Тоді від рівностей (17) і (18) прийдемо до такої системи ГІР

$$\begin{cases} \mathbf{V}\boldsymbol{\mu} + \left(\dfrac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}\right)\boldsymbol{\lambda} = 0 \quad \text{в} \quad (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}, \\ \left(-\dfrac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}'\right)\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{B} + \mathbf{D})\,\boldsymbol{\lambda} = -\tilde{\mathbf{g}} \quad \text{в} \quad (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}. \end{cases} \tag{19}$$

Теорема 3. *Слід і нормальна похідна узагальненого розв'язку* $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega, P))^{\infty}$ *задачі Робіна* (1)*,* (2) *задовольняють систему граничних рівнянь* (19)*. Навпаки, якщо пара послідовностей* $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *є розв'язком системи граничних рівнянь* (19)*, то функція, побудована за формулою* (16)*, є узагальненим розв'язком задачі Робіна* (1)*,* (2)*.*

Доведення. Нехай послідовність $\mathbf{u}$ є узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2). Оскільки $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega, P))^{\infty}$, то за теоремою про сліди і лемою 3.2 [13] існують слід і нормальна похідна кожного компонента цієї послідовності, тобто існує пара послідовностей $\gamma_0\mathbf{u} =: \boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}$ і $\gamma_1\mathbf{u} =: \boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}$. Згідно з теоремою 2 ця пара послідовностей задовольняє рівність (17) (яка також є першим рівнянням системи (19)), а також рівність (18). Як дані Коші узагальненого розв'язку, ця пара також задовольняє крайову умову (2). Якщо з (2) визначити нормальну похідну розв'язку через його слід і підставити її в рівність (18), то отримаємо друге рівняння системи (19).

Нехай тепер пара послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \in (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty} \times (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}$ є розв'язком системи граничних рівнянь (19). Оскільки ці послідовності задовольняють рівність (17), то згідно з теоремою 2 вони задовольняють і (18), а також є даними Коші узагальненого розв'язку рівняння (15) (тобто системи (1)). Легко бачити, що якщо з рівності (18) визначити

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{K}'\boldsymbol{\mu}$$

і підставити цей вираз у друге рівняння системи (19), то отримаємо рівність

$$-\boldsymbol{\mu} + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} = -\tilde{\mathbf{g}} \quad \text{в} \quad (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty},$$

яка є записом крайової умови (2) через пару послідовностей $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$.

Введемо гільбертів простір $\mathcal{H}(\Gamma) := H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$, елементами якого є пари $\phi := (\mu, \lambda)^\top, \mu \in H^{-1/2}(\Gamma), \lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$, зі скалярним добутком $(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{H}(\Gamma)} := (\mu_1, \mu_2)_{H^{-1/2}(\Gamma)} + (\lambda_1, \lambda_2)_{H^{1/2}(\Gamma)}$ та нормою $||\phi||_{\mathcal{H}(\Gamma)} := (\phi, \phi)^{1/2}_{\mathcal{H}(\Gamma)}$, а також простір $\mathcal{H}^*(\Gamma) := H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Розглядатимемо такі матричні оператори

$$A_0 = \begin{pmatrix} V_0 & (\frac{1}{2}I - K_0) \\ (-\frac{1}{2}I + K_0') & (b_{0,0}I + D_0) \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} V_j & -K_j \\ K_j' & (B_j + D_j) \end{pmatrix}, \; j \in \mathbb{N}_0. \tag{20}$$

Тоді ліву частину системи (19) можна трактувати як дію оператора $\mathbf{A} : (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty \to (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ на довільну послідовність $\boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty$ за правилом

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{\phi})_k := \sum_{i=0}^{k} A_{k-i}\phi_i, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{21}$$

Лема 1. *Оператор $\boldsymbol{A} : (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty \to (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ є бієктивним.*

Доведення. Спочатку покажемо ін'єктивність оператора $\mathbf{A}$, що еквівалентно існуванню лише тривіального розв'язку для однорідного рівняння

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = 0, \quad \boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty. \tag{22}$$

Якщо перейти до покомпонентного запису, то стосовно компонента ϕ_0 матимемо рівняння

$$A_0\phi_0 = 0, \quad \phi_0 \in \mathcal{H}(\Gamma). \tag{23}$$

Дослідимо оператор $A_0 : \mathcal{H}(\Gamma) \to \mathcal{H}^*(\Gamma)$. Якщо взяти до уваги еліптичність операторів V_0 і D_0, а також спряженість K_0' і K_0, то $\forall \phi = (\mu, \lambda)^\top \in \mathcal{H}(\Gamma)$ матимемо таку оцінку

$$\begin{aligned}
&\langle A_0\phi, \phi\rangle_{\mathcal{H}^*(\Gamma)\times\mathcal{H}(\Gamma)} = \left\langle A_0 \begin{pmatrix}\mu\\ \lambda\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu\\ \lambda\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}^*(\Gamma)\times\mathcal{H}(\Gamma)} = \\
&= \langle V_0\mu, \mu\rangle_\Gamma + \left\langle \left(\frac{1}{2}I - K_0\right)\lambda, \mu \right\rangle_\Gamma + \left\langle \left(-\frac{1}{2}I + K_0'\right)\mu, \lambda \right\rangle_\Gamma + \langle (b_{0,0}I + D_0)\lambda, \lambda\rangle_\Gamma \geqslant \\
&\geqslant \; c_V||\mu||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + c_D||\lambda||^2_{H^{1/2}(\Gamma)} + b_{0,0}\langle\lambda, \lambda\rangle_\Gamma \geqslant \\
&\geqslant \; c\left(||\mu||^2_{H^{-1/2}(\Gamma)} + ||\lambda||^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\right) = c||\phi||^2_{\mathcal{H}(\Gamma)},
\end{aligned} \tag{24}$$

де $c_V, c_D, c > 0$ — деякі сталі. Отже, цей оператор є $\mathcal{H}(\Gamma)$-еліптичним, тому рівняння (23) має лише нульовий розв'язок $\phi_0 = 0$. Тоді для компонента ϕ_1 з (22) отримаємо те ж саме рівняння $A_0\phi_1 = 0, \quad \phi_1 \in \mathcal{H}(\Gamma)$, звідки $\phi_1 = 0$. Якщо повторювати такі кроки далі, то кожного разу матимемо те ж саме граничне рівняння з тривіальним розв'язком. Отже, рівняння (22) має лише тривіальний розв'язок $\boldsymbol{\phi} = 0$, тобто оператор $\mathbf{A}$ — ін'єктивний.

Доведемо тепер сюр'єктивність оператора $\mathbf{A}$. Нехай $\boldsymbol{\psi} \in (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ — задана послідовність. Розглянемо граничне рівняння

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\psi} \quad \text{в} \quad (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty. \tag{25}$$

Зокрема, для компонента ϕ_0 маємо таке матричне рівняння

$$A_0\phi_0 = \psi_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^*(\Gamma). \tag{26}$$

Оскільки оператор A_0 є $\mathcal{H}(\Gamma)$-еліптичним і неперервним (всі його елементи-оператори обмежені), то з леми Лакса–Мільграма випливає існування та єдиність розв'язку $\phi_0 \in \mathcal{H}(\Gamma)$ рівняння (26).

Після знаходження ϕ_0 його можна перенести у праву частину граничного рівняння, яке отримаємо з (25) відносно вектора ϕ_1. Тоді в лівій частині цього рівняння з невідомих залишиться лише один компонент ϕ_1. Якщо вважати, що для довільного значення $k \in \mathbb{N}$ вже розв'язані рівняння з індексами $0 \leqslant i \leqslant k-1$, то у рівнянні з індексом k завжди можна виокремити і залишити у лівій частині вираз, до якого входить лише невідомий компонент ϕ_k, а решту перенести у праву частину:

$$A_0\phi_k = \psi_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}\phi_i \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^*(\Gamma). \tag{27}$$

Отримане рівняння відрізняється від (26) лише правою частиною

$$\tilde{\psi}_k := \psi_k - \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}\phi_i, \tag{28}$$

до якої входять також компоненти ϕ_i, $0 \leqslant i \leqslant k-1$, – розв'язки попередніх рівнянь. Легко бачити, що $\tilde{\psi}_k \in \mathcal{H}^*(\Gamma)$. Тоді, за аналогією до рівняння (26), на кожному кроці існуватиме єдиний розв'язок $\phi_k \in \mathcal{H}(\Gamma)$ рівняння (27). Отже, для довільної послідовності $\boldsymbol{\psi} \in (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty$ існує розв'язок $\boldsymbol{\phi} \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty$ рівняння (25), тобто оператор $\mathbf{A}$ — сюр'єктивний.

Теорема 4. *Для довільної послідовності* $\tilde{\boldsymbol{g}} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ *система граничних рівнянь* (19) *має єдиний розв'язок* $(\mu_0, \lambda_0, \mu_1, \lambda_1, ...)^\top \in (\mathcal{H}(\Gamma))^\infty$.

Доведення. Твердження теореми справджується на підставі попередньої леми, якщо в рівнянні (25) покласти

$$\boldsymbol{\psi} := (0, -\tilde{g}_0, 0, -\tilde{g}_1, ...)^\top \in (\mathcal{H}^*(\Gamma))^\infty. \tag{29}$$

Висновки. Як виявилося при доведенні попередньої леми, систему граничних рівнянь (19) можна подати у вигляді послідовності матричних рівнянь (27). Подібно до послідовностей ГІР, еквівалентних задачам Діріхле та Неймана, в отриманій послідовності оператор у лівій частині залишається незмінним для довільного значення індексу $k \in \mathbb{N}_0$, а права частина рекурентно залежить від розв'язків зі значеннями індексу $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Зазначимо, що ця обставина є наслідком використання q-згортки для інтегрального зображення розв'язку. Вона створює передумови для ефективної чисельної реалізації запропонованого підходу.

Отож, розв'язуючи систему ГІР (25), можна за формулою (16) послідовно знаходити компоненти узагальненого розв'язку задачі (1), (2). Використовуючи їх як коефіцієнти розвинення по ортогональних функціях Лагерра, можна знаходити чисельний розв'язок відповідних мішаних задач для еволюційних рівнянь [9].

1. **McLean W.** Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations / W. McLean – Cambridge University Press, 2000. – 357 p.
2. **Hsiao G.C.** Boundary Integral Equations / G. C. Hsiao, W. L. Wendland – Springer-Verlag, Berlin, 2008. – 640 p.
3. **Steinbah O.** Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems / O. Steinbah – Springer Science, 2008. – 396 p.
4. **Bamberger A.** Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retarde de la diffraction d'une onde acoustique (I) / A. Bamberger, T. Ha-Duong // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – V. 8(3). – P. 405–435.
5. **Bamberger A.** Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide / A. Bamberger, T. Ha-Duong // Math. Methods Appl. Sci. – 1986. – V. 8(4). – P. 598–608.
6. **Lubich C.** On the multistep time discretization of linear initial-boundary value problems and their boundary integral equations / C. Lubich // Numer. Math. – 1994. – V. 67. – P. 365–389.
7. **Laliena A.R.** A distributional version of Kirchhoff's formula / A. R. Laliena, F. J. Sayas // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V. 359. – P. 197–208.
8. **Літинський С.** Про слабкі розв'язки крайових задач для нескінченної трикутної системи еліптичних рівнянь / С. Літинський, Ю. Музичук, А. Музичук // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип. 15. – С. 52–70.
9. **Chapko R.** On the numerical solution of initial boundary value problems by the Laguerre transformation and boundary integral equations / R. Chapko, R. Kress // Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications. Series in Mathematical Analysis and Applications. – 2000. – V. 2. – P. 55–69.
10. **Muzychuk Yu. A.** On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. A. Muzychuk, R. S. Chapko // Matematychni Studii. – 2012. – V. 38(1). – P. 12–34.
11. **Muzychuk Yu. A.** On the boundary integral equation method for exterior boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind / Yu. A. Muzychuk // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2014. (в друці)
12. **Музичук Ю.** Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального виду у частково–необмежених областях / Ю. Музичук, Р. Хапко // Доповіді НАН України. – 2012. – Т. 11. – С. 20–27.
13. **Costabel M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – V. 19. – P. 613–626.
14. **Funaro D.** Polynomial Approximations of Differential Equations / D. Funaro – Springer-Verlag, 1992.
15. **Sybil Yu.** Three-dimensional elliptic boundary value problems for an open Lipschitz surface / Yu. Sybil // Matematychni Studii. – 1997. – V. 8. – P. 79–96.
16. **Dautray R.** Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, vol. 2. Functional and Variational Methods / R. Dautray, J.-L. Lions – Springer-Berlin, 2000.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V.18,Is.4(20).–P.49–59

Mathematical Subject Classification: 11N37
UDC 511

A. V. Lelechenko
Odesa I. I. Mechnikov National University

EXPONENTIAL CARMICHAEL FUNCTION

Лелеченко А. В. Експоненціальна функція Кармайкла. Розглянемо експоненціальну функцію Кармайкла $\lambda^{(e)}$, таку, що $\lambda^{(e)}$ мультиплікативна та $\lambda^{(e)}(p^a) = \lambda(a)$, де λ "— звичайна функція Кармайкла. У статті обговорюється значення $\sum \lambda^{(e)}(n)$, де n пробігає деякі підмножини $[1, x]$, та наведені оцінки залишкового члену, побудовані за допомогою аналітичних методів, а надто оцінок $\int_1^T \left|\zeta(\sigma + it)\right|^m dt$.

Ключові слова: експоненціальні дільники, функція Кармайкла, моменти дзета-функції Рімана.

Лелеченко А. В. Экспоненциальная функция Кармайкла. Рассмотрим экспоненциальную функцию Кармайкла $\lambda^{(e)}$, такую, что $\lambda^{(e)}$ мультипликативна и $\lambda^{(e)}(p^a) = \lambda(a)$, где λ — обычная функция Кармайкла. В работе обсуждается величина $\sum \lambda^{(e)}(n)$, где n пробегает некоторые подмножества $[1, x]$, и даны оценки остаточного члена, построенные с помощью аналитических методов и в особенности оценок $\int_1^T \left|\zeta(\sigma+it)\right|^m dt$.

Ключевые слова: экспоненциальные делители, функция Кармайкла, моменты дзета-функции Римана.

Lelechenko A. V. Exponential Carmichael function. Consider exponential Carmichael function $\lambda^{(e)}$ such that $\lambda^{(e)}$ is multiplicative and $\lambda^{(e)}(p^a) = \lambda(a)$, where λ is usual Carmichael function. We discuss the value of $\sum \lambda^{(e)}(n)$, where n runs over certain subsets of $[1, x]$, and provide bounds on the error term, using analytic methods and especially estimates of $\int_1^T \left|\zeta(\sigma + it)\right|^m dt$.

Key words: exponential divisors, Carmichael function, moments of Riemann zeta-function.

Introduction. Consider an operator E over arithmetic functions such that for every f the function Ef is multiplicative and

$$(Ef)(p^a) = f(a), \qquad p \text{ is prime.}$$

For various functions f (such as the divisor function, the sum-of-divisor function, Möbius function, the totient function and so on) the behaviour of Ef was studied by many authors, starting from Subbarao [12]. The bibliography can be found in [10].

The notation for Ef, established by previous authors, is $f^{(e)}$.

Carmichael function λ is an arithmetic function such that

$$\lambda(p^a) = \begin{cases} \phi(p^a), & p > 2 \text{ or } a = 1, 2, \\ \phi(p^a)/2, & p = 2 \text{ and } a > 2, \end{cases}$$

© Lelechenko A. V., 2013

and if $n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ is a canonical representation, then

$$\lambda(n) = \operatorname{lcm}\bigl(\lambda(p_1^{a_1}), \ldots, \lambda(p_m^{a_m})\bigr).$$

This function was introduced at the beginning of the XX century in [1], but intense studies started only in 1990-th, e. g. [2]. Carmichael function finds applications in cryptography, e. g. [3].

Consider also the family of multiplicative functions

$$\delta_r(p^a) = \begin{cases} 0, & a < r, \\ 1, & a \geqslant r, \end{cases} \qquad r \text{ is integer.}$$

Function δ_2 is a characteristic function of the set of square-full numbers, δ_3 — of cube-full numbers and so on. Of course, $\delta_1 \equiv 1$.

Denote $\lambda_r^{(e)}$ for the product of δ_r and $\lambda^{(e)}$:

$$\lambda_r^{(e)}(n) = \delta_r(n)\lambda^{(e)}(n).$$

The aim of our paper is to study asymptotic properties of $\lambda^{(e)} \equiv \lambda_1^{(e)}$, $\lambda_2^{(e)}$, $\lambda_3^{(e)}$ and $\lambda_4^{(e)}$.

Notations.

Letter p with or without indexes denotes a prime number.

We write $f \star g$ for Dirichlet convolution

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d).$$

Denote

$$\tau(a_1, \ldots, a_k; n) := \sum_{d_1^{a_1} \cdots d_k^{a_k} = n} 1.$$

In asymptotic relations we use $\sim$, $\asymp$, Landau symbols O and o, Vinogradov symbols $\ll$ and $\gg$ in their usual meanings. All asymptotic relations are given as an argument (usually x) tends to the infinity.

Everywhere $\varepsilon > 0$ is an arbitrarily small number (not always the same even in one equation).

As usual $\zeta(s)$ is Riemann zeta-function. Real and imaginary components of the complex s are denoted as $\sigma := \Re s$ and $t := \Im s$, so $s = \sigma + it$.

For a fixed $\sigma \in [1/2, 1]$ define

$$m(\sigma) := \sup\left\{ m \;\middle|\; \int_1^T \bigl|\zeta(\sigma + it)\bigr|^m dt \ll T^{1+\varepsilon} \right\}.$$

and

$$\mu(\sigma) := \limsup_{t \to \infty} \frac{\log\bigl|\zeta(\sigma + it)\bigr|}{\log t}.$$

Below $H_{2005} = (32/205 + \varepsilon, 269/410 + \varepsilon)$ stands for Huxley's exponent pair from [5].

Preliminary lemmas.

Lemma 1. *Let $F\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ be a multiplicative function such that $F(p^a) = f(a)$, where $f(n) \ll n^\beta$ for some $\beta > 0$. Then*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log F(n) \operatorname{llog} n}{\log n} = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\log f(n)}{n}.$$

Proof. See [13].

Lemma 2. *Let $f(t) \geqslant 0$. If*

$$\int_1^T f(t)\,dt \ll g(T),$$

where $g(T) = T^\alpha \log^\beta T$, $\alpha \geqslant 1$, then

$$I(T) := \int_1^T \frac{f(t)}{t} dt \ll \begin{cases} \log^{\beta+1} T & \text{if } \alpha = 1, \\ T^{\alpha-1} \log^\beta T & \text{if } \alpha > 1. \end{cases}$$

Proof. Let us divide the interval of integration into parts:

$$I(T) \leqslant \sum_{k=0}^{\log_2 T} \int_{T/2^{k+1}}^{T/2^k} \frac{f(t)}{t} dt < \sum_{k=0}^{\log_2 T} \frac{1}{T/2^{k+1}} \int_1^{T/2^k} f(t)dt \ll \sum_{k=0}^{\log_2 T} \frac{g(T/2^k)}{T/2^{k+1}}.$$

Now the lemma's statement follows from elementary estimates.

Lemma 3. *For $\sigma \geqslant 1/2$ and for any exponent pair (k, l) such that $l - k \geqslant \sigma$ we have*

$$\mu(\sigma) \leqslant \frac{k + l - \sigma}{2} + \varepsilon.$$

Proof. See [6, (7.57)].

A well-known application of Lemma 3 is

$$\mu(1/2) \leqslant 32/205, \tag{1}$$

following from the choice $(k, l) = H_{2005}$. Another (maybe new) application is

$$\mu(3/5) \leqslant 1409/12170, \tag{2}$$

following from

$$(k, l) = \left(\frac{269}{2434}, \frac{1755}{2434}\right) = ABAH_{2005},$$

where A and B stands for usual A- and B-processes [7, Ch. 2].

Lemma 4. *Let $\eta > 0$ be arbitrarily small. Then for growing $|t| \geqslant 3$*

$$\zeta(s) \ll \begin{cases} |t|^{1/2-(1-2\mu(1/2))\sigma}, & \sigma \in [0, 1/2], \\ |t|^{2\mu(1/2)(1-\sigma)}, & \sigma \in [1/2, 1-\eta], \\ |t|^{2\mu(1/2)(1-\sigma)} \log^{2/3} |t|, & \sigma \in [1-\eta, 1], \\ \log^{2/3} |t|, & \sigma \geqslant 1. \end{cases} \tag{3}$$

More exact estimates for $\sigma \in [1/2, 1-\eta]$ are also available, e. g.

$$\mu(\sigma) \ll \begin{cases} 10\big(\mu(3/5) - \mu(1/2)\big)\sigma + \big(6\mu(1/2) - 5\mu(3/5)\big), & \sigma \in [1/2, 3/5], \\ 5\mu(3/5)(1-\sigma)/2, & \sigma \in [3/5, 1-\eta], \end{cases} \tag{4}$$

Proof. Estimates follow from Phragmén—Lindelöf principle, exact and approximate functional equations for $\zeta(s)$ and convexity properties. See [14, Ch. 5] and [6, Ch. 7.5] for details.

Lemma 5. *For any integer r*

$$\max_{n \leqslant x} \lambda_r^{(e)}(n) \ll x^{\varepsilon}.$$

Proof. Surely $\lambda_r^{(e)}(n) \leqslant \lambda^{(e)}(n)$. By Lemma 1 we have

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \lambda^{(e)}(n) \log\log n}{\log n} = \sup_m \frac{\log \lambda(m)}{m} = \frac{\log 4}{5} =: c,$$

because $\lambda(m) \leqslant m - 1$. It implies

$$\max_{n \leqslant x} \lambda^{(e)}(n) \ll x^{c/\log\log n} \ll x^{\varepsilon}.$$

Lemma 6. *Let $L_r(s)$ be the Dirichlet series for $\lambda_r^{(e)}$:*

$$L_r(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_r^{(e)}(n) n^{-s}.$$

Then for $r = 1, 2, 3, 4$ we have $L_r(s) = Z_r(s) G_r(s)$, where

$$Z_1(s) = \zeta(s)\zeta(3s)\zeta^2(5s), \tag{5}$$

$$Z_2(s) = \zeta(2s)\zeta^2(3s)\zeta(4s)\zeta^2(5s), \tag{6}$$

$$Z_3(s) = \zeta^2(3s)\zeta^2(4s)\zeta^4(5s), \tag{7}$$

$$Z_4(s) = \zeta^2(4s)\zeta^4(5s)\zeta^2(6s)\zeta^6(7s), \tag{8}$$

Dirichlet series $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ converge absolutely for $\sigma > 1/6$ and $G_4(s)$ converges absolutely for $\sigma > 1/8$.

Proof. Follows from the identities

$$1 + \sum_{a \geqslant 1} \lambda^{(e)}(p^a) x^a = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 4x^5 + 2x^6 + 6x^7 + O(x^8)$$

$$= \frac{1 + O(x^8)}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)^2},$$

$$1 + \sum_{a \geqslant 2} \lambda^{(e)}(p^a) x^a = \frac{1 + O(x^6)}{(1-x^2)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2},$$

$$1 + \sum_{a \geqslant 3} \lambda^{(e)}(p^a) x^a = \frac{1 + O(x^6)}{(1-x^3)^2(1-x^4)^2(1-x^5)^4},$$

$$1 + \sum_{a \geqslant 4} \lambda^{(e)}(p^a) x^a = \frac{1 + O(x^8)}{(1-x^4)^2(1-x^5)^4(1-x^6)^2(1-x^7)^6}.$$

Lemma 7. *Let $\Delta(x)$ be the error term in the well-known asymptotic formula for $\sum_{n\leqslant x}\tau(a_1,a_2,a_3,a_4;n)$, let $A_4=a_1+a_2+a_3+a_4$ and let (k,l) be any exponent pair. Suppose that the following conditions are satisfied:*

1. $(k+l+2)a_4<(k+l)a_1+A_4$.
2. $2(k+l+1)a_1\leqslant(2k+1)(a_2+a_3)$.

(3.1) $la_1\leqslant ka_2$ *and* $(k+l+1)a_1\geqslant k(a_2+a_3)$

or

(3.2) $la_1\geqslant ka_2$ *and* $(l-k)(2k+1)a_3\leqslant(2l-2l-1)(k+l+1)a_1+\big(2k(k-l+1)+1\big)a_2$.

Proof. This is [8, Th. 3] with $p=4$.

Lemma 8.

$$m(\sigma)\geqslant\begin{cases}4/(3-4\sigma), & 1/2\ \leqslant\sigma\leqslant\ 5/8,\\ 10/(5-6\sigma), & 5/8\ \leqslant\sigma\leqslant 35/54,\\ 19/(6-6\sigma), & 35/54\leqslant\sigma\leqslant 41/60,\\ 2112/(859-948\sigma), & 41/60\leqslant\sigma\leqslant\ 3/4,\\ 12408/(4537-4890\sigma), & 3/4\ \leqslant\sigma\leqslant\ 5/6,\\ 4324/(1031-1044\sigma), & 5/6\ \leqslant\sigma\leqslant\ 7/8,\\ 98/(31-32\sigma), & 7/8\ \leqslant\sigma\leqslant 0.91591\ldots,\\ (24\sigma-9)/(4\sigma-1)(1-\sigma), & 0.91591\ldots\leqslant\sigma\leqslant 1-\varepsilon.\end{cases}$$

Proof. See [6, Th. 8.4].

Main Results.

Theorem 1.

$$\sum_{n\leqslant x}\lambda^{(e)}(n)=c_{11}x+c_{13}x^{1/3}+(c'_{15}\log x+c_{15})x^{1/5}+O(x^{1153/6073+\varepsilon}),$$

where c_{11}, c_{13}, c_{15} and c'_{15} are computable constants.

Proof. Lemma 6 and equation (5) implies that $\lambda^{(e)}=\tau(1,3,5,5;\cdot)\star g_1$, where $\sum\limits_{n\leqslant x}g_1(n)\ll x^{1/6+\varepsilon}$. Due to [7]

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(1,3,5,5;n)=x\zeta(3)\zeta^2(5)\operatorname*{res}_{s=1}\zeta(s)+3x^{1/3}\zeta(1/3)\zeta^2(5/3)\operatorname*{res}_{s=1/3}\zeta(3s)+$$
$$+5x^{1/5}\zeta(1/5)\zeta(3/5)\operatorname*{res}_{s=1/5}\zeta^2(5s)+R(x).$$

To estimate $R(x)$ we use Lemma 7 with $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=a_4=5$. Exponent pair $(k,l)=H_{2005}$ satisfies conditions 1, 2 and 3.2 and thus

$$R(x)\ll x^{(k+l+2)/(k+l+14)}=x^{1153/6073+\varepsilon},\qquad 1/6<1153/6073<1/5.$$

Now the convolution argument completes the proof.

Exponential totient function $\phi^{(e)}$ has similar to $\lambda^{(e)}$ Dirichlet series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{(e)}(n) = \zeta(s)\zeta(3s)\zeta^2(5s)H(s),$$

where $H(s)$ converges absolutely for $\sigma > 1/6$. Theorem 1 can be extended to this case without any changes, so

$$\sum_{n \leqslant x} \phi^{(e)}(n) = c_{11}x + c_{13}x^{1/3} + (c'_{15}\log x + c_{15})x^{1/5} + O(x^{1153/6073+\varepsilon}).$$

This improves the result of Pétermann [11], who obtained $\sum\limits_{n \leqslant x} \phi^{(e)}(n) = c_{11}x + c_{13}x^{1/3} + O(x^{1/5}\log x)$.

Theorem 2.

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda_2^{(e)}(n) = c_{22}x^{1/2} + (c'_{23}\log x + c_{23})x^{1/3} + c_{24}x^{1/4} + O(x^{1153/5586+\varepsilon}),$$

where c_{22}, c_{23}, c'_{23} and c_{24} are computable constants.

Proof. Similar to Theorem 1 with following changes: now by (6)

$$\lambda_2^{(e)} = \tau(2,3,3,4;\cdot) \star g_2,$$

where $\sum\limits_{n \leqslant x} g_2(n) \ll x^{1/6+\varepsilon}$. But

$$\sum_{n \leqslant x} \tau(2,3,3,4;n) = 2x^{1/2}\zeta^2(3/2)\zeta(2) \operatorname*{res}_{s=1/2} \zeta(2s) + \\ + 3x^{1/3}\zeta(2/3)\zeta(4/3) \operatorname*{res}_{s=1/3} \zeta^2(3s) + 4x^{1/4}\zeta(1/2)\zeta^2(3/4) \operatorname*{res}_{s=1/4} \zeta(4s) + R(s).$$

Again by Lemma 7 with $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 3$, $a_4 = 4$, $(k,l) = H_{2005}$ we get

$$R(x) \ll x^{(k+l+2)/(k+l+12)} = x^{1153/5586+\varepsilon}, \qquad 1/5 < 1153/5586 < 1/4.$$

Theorem 3.

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda_3^{(e)}(n) = (c'_{33}\log x + c_{33})x^{1/3} + (c'_{34}\log x + c_{34})x^{1/4} + \\ + P_{35}(\log x)x^{1/5} + O(x^{1/6+\varepsilon}), \quad (9)$$

where c_{33}, c'_{33}, c_{34} and c'_{34} are computable constants, P_{35} is a polynomial of degree 3 with computable coefficients.

Proof. Lemma 6 and equation (7) implies that $\lambda_3^{(e)} = z_3 \star g_3$, where z_3 is defined implicitly by

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_3(n)n^{-s} = Z_3(s) = \zeta^2(3s)\zeta^2(4s)\zeta^4(5s),$$

and g_3 is a multiplicative function such that $\sum\limits_{n\leqslant x} g_3(n) \ll x^{1/6+\varepsilon}$.

The main term at the right side of (9) equals to

$$M_3(x) := \left(\operatorname*{res}_{s=1/3} + \operatorname*{res}_{s=1/4} + \operatorname*{res}_{s=1/5}\right)\left(\zeta^2(3s)\zeta^2(4s)\zeta^4(5s)x^s s^{-1}\right).$$

To obtain the desirable error term it is enough to prove that

$$\sum_{n\leqslant x} z_3(n) = M_3(x) + O(x^{1/6+\varepsilon}).$$

By Perron formula for $c := 1/3 + 1/\log x$ we have

$$\sum_{n\leqslant x} z_3(n) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT} Z_3(s)x^s s^{-1}ds + O(x^{1+\varepsilon}T^{-1}).$$

Substituting $T = x$ and moving the contour of the integration till $[1/6 - ix, 1/6 + ix]$ we get

$$\sum_{n\leqslant x} f_3(n) = M_3(x) + O(I_0 + I_- + I_+ + x^{\varepsilon}),$$

where

$$I_0 := \int\limits_{1/6-ix}^{1/6+ix} Z_3(s)x^s s^{-1}ds, \qquad I_{\pm} := \int\limits_{1/6\pm ix}^{c\pm ix} Z_3(s)x^s s^{-1}ds.$$

Firstly,

$$I_+ \ll x^{-1}\int\limits_{1/6}^{c} Z_3(\sigma + ix)x^{\sigma}d\sigma.$$

Let $\alpha(\sigma)$ be a function such that $Z_3(\sigma + ix) \ll x^{\alpha(\sigma)+\varepsilon}$. By (3) we have

$$\alpha(\sigma) \leqslant \begin{cases} (16 - 68\sigma)\mu(1/2) < 4/5, & \sigma \in [1/6, 1/5), \\ (8 - 28\sigma)\mu(1/2) < 3/4, & \sigma \in [1/5, 1/4), \\ (4 - 12\sigma)\mu(1/2) < 2/3, & \sigma \in [1/4, 1/3), \\ 0, & \sigma \in [1/3, c]. \end{cases}$$

This means that $I_+ \ll x^{\varepsilon}$. Plainly, the same estimate holds for I_-.

Secondly, it remains to prove that $I_0 \ll x^{1/6+\varepsilon}$. Here

$$I_0 \ll x^{1/6}\int\limits_{1}^{x} Z_3(1/6 + it)t^{-1}dt$$

and taking into account Lemma 2 it is enough to show $\int\limits_1^x Z_3(1/6+it)dt \ll x^{1+\varepsilon}$. Applying Cauchy inequality twice we obtain

$$\int\limits_1^x Z_3(1/6+it)dt \ll \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^4(1/2+it)\right|dt\right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^8(2/3+it)\right|dt\right)^{1/4} \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^{16}(5/6+it)\right|dt\right)^{1/4} \ll \\ \ll x^{(1+\varepsilon)\cdot 1/2} x^{(1+\varepsilon)\cdot 1/4} x^{(1+\varepsilon)\cdot 1/4} \ll x^{1+\varepsilon}$$

since by Lemma 8 $m(1/2) \geqslant 4$, $m(2/3) \geqslant 8$ and $m(5/6) \geqslant 16$.

Theorem 4.

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda_4^{(e)}(n) = (c'_{44}\log x + c_{44})x^{1/4} + P_{45}(\log x)x^{1/5} + (c'_{46}\log x + c_{46})x^{1/6} + \\ + P_{47}(\log x)x^{1/7} + O(x^{C_4+\varepsilon}),$$

where c_{44}, c'_{44}, c_{46} and c'_{46} are computable constants, P_{45} and P_{47} are computable polynomials, $\deg P_{45} = 3$, $\deg P_{47} = 5$,

$$C_4 = \frac{7863059 - \sqrt{13780693090921}}{85962240} = 0.134656\ldots, \qquad 1/8 < C_4 < 1/7. \qquad (10)$$

Proof. We shall follow the outline of Theorem 3. Let us prove that for $c := 1/4 + 1/\log x$ we can estimate

$$I_+ := \int\limits_{C_4+ix}^{c+ix} Z_4(s)x^s s^{-1} ds \ll x^{C_4+\varepsilon}$$

and

$$I_0 := \int\limits_{C_4-ix}^{C_4+ix} Z_4(s)x^s s^{-1} ds \ll x^{C_4+\varepsilon}.$$

We start with $I_+ \ll x^{-1}\int\limits_{C_4}^{c} Z_4(\sigma+ix)x^\sigma d\sigma$. Now let $\alpha(\sigma)$ be a function such that $Z_4(\sigma+ix) \ll x^{\alpha(\sigma)+\varepsilon}$. By (3) and (8) we have

$$\alpha(\sigma) \leqslant \begin{cases} (16-80\sigma)\mu(1/2) < 5/6, & \sigma \in [1/7, 1/6), \\ (12-56\sigma)\mu(1/2) < 4/5, & \sigma \in [1/6, 1/5), \\ (4-16\sigma)\mu(1/2) < 3/4, & \sigma \in [1/5, 1/4), \\ 0, & \sigma \in [1/4, c]. \end{cases}$$

So $\int\limits_{1/7}^{c} Z_4(\sigma+ix)x^{\sigma-1}d\sigma \ll x^{\varepsilon}$ and the only case that requires further investigations is $\sigma \in [C_4, 1/7)$. Instead of (3) we apply (4) together with (1) and (2) to obtain

$$\alpha(\sigma) \leqslant \frac{1045018}{249485} - \frac{2459357}{99794}\sigma, \qquad \sigma \in [1/8, 1/7],$$

which implies $\int\limits_{C_4}^{1/7} x^{\alpha(\sigma)+\sigma-1}d\sigma \ll x^{C_4+\varepsilon}$ as soon as

$$C_4 \geqslant 1591066/12296785 = 0.129388\ldots$$

Our choice of C_4 in (10) is certainly the case.

Let us move on I_0 and prove that $\int\limits_1^x Z_4(C_4+it)\,dt \ll x^{1+\varepsilon}$. For q_1, q_2, q_3, q_4 such that

$$1/q_1 + 1/q_2 + 1/q_3 + 1/q_4 = 1 \qquad \text{and} \qquad q_1, q_2, q_3, q_4 \geqslant 1 \tag{11}$$

by Hölder inequality we have

$$\int\limits_1^x Z_4(C_4+it)\,dt \ll \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^{2q_1}(4s+it)\right|dt\right)^{1/q_1} \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^{4q_2}(5s+it)\right|dt\right)^{1/q_2} \times$$
$$\times \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^{2q_3}(6s+it)\right|dt\right)^{1/q_3} \left(\int\limits_1^x \left|\zeta^{6q_4}(7s+it)\right|dt\right)^{1/q_4}.$$

Choose

$$q_1 = m(4C_4)/2, \quad q_2 = m(5C_4)/4, \quad q_3 = m(6C_4)/2, \quad q_4 = m(7C_4)/6 \tag{12}$$

One can make sure by substituting the value of C_4 from (10) into Lemma 8 that such choice of q_k satisfies (11). Thus we obtain

$$\int\limits_1^x Z_4(C_4+it)\,dt \ll x^{(1+\varepsilon)/q1}x^{(1+\varepsilon)/q2}x^{(1+\varepsilon)/q3}x^{(1+\varepsilon)/q4} \ll x^{1+\varepsilon},$$

which finishes the proof.

Now we obtain lower value of C_4 by improving lower bounds of $m(\sigma)$ from Lemma 8. Estimates below depend on values of

$$\inf_{(k,l)} \frac{ak+bl+c}{dk+el+f}, \tag{13}$$

where (k, l) runs over the set of exponent pairs and satisfies certain linear inequalities. A method to estimate (13) without linear constrains was given by Graham [4]. In the

recent paper [9] we have presented an effective algorithm to deal with (13) under a nonempty set of linear constrains.

Let c be an arbitrary function such that $c(\sigma) \geqslant \mu(\sigma)$. Define θ by an implicit equation

$$2c\big(\theta(\sigma)\big) + 1 + \theta(\sigma) - 2\big(1 + c\big(\theta(\sigma)\big)\big)\sigma = 0.$$

Finally, define

$$f(\sigma) = 2\frac{1 + c\big(\theta(\sigma)\big)}{c\big(\theta(\sigma)\big)}.$$

Due to Lemma 3 one can take $c(\sigma) = \inf\limits_{l-k\geqslant\sigma}(k + l - \sigma)/2$, where (k, l) runs over the set of exponent pairs. However even rougher choice of c leads to satisfiable values of f such as in [6, (8.71)].

Lemma 9. *Let $\sigma \geqslant 5/8$. Compute*

$$\alpha_1 = \frac{4 - 4\sigma}{1 + 2\sigma}, \qquad \beta_1 = -\frac{12}{1 + 2\sigma}, \qquad m_1 = \frac{1 - \alpha_1}{\mu(\sigma)} - \beta_1,$$

$$\alpha_2(k, l) = \frac{4(1 - \sigma)(k + l)}{(2 + 4l)\sigma - 1 + 2k - 2l}, \qquad \beta_2(k, l) = -\frac{4(1 + 2k + 2l)}{(2 + 4l)\sigma - 1 + 2k - 2l},$$

$$m_2(k, l) = \frac{1 - \alpha_2(k, l)}{\mu(\sigma)} - \beta_2(k, l), \qquad m_2 = \inf_{\alpha_2(k,l)\leqslant 1} m_2(k, l),$$

where (k, l) runs over the set of exponent pairs. Then

$$m(\sigma) \geqslant \min\big(m_1, m_2, 2f(\sigma)\big).$$

Note that for $\sigma \geqslant 2/3$ the condition $\alpha_2(k, l) \leqslant 1$ is always satisfied.

Proof. Follows from [6, (8.97)] and from $T^\alpha V^\beta \ll TV^{\beta+(\alpha-1)/\mu(\sigma)}$ for $\alpha < 1$ and $V \ll T^{\mu(\sigma)}$.

Substituting pointwise estimates of $m(\sigma)$ from Lemma 9 instead of segmentwise from Lemma 8 into (12) we obtain following result.

Theorem 5. *The statement of Theorem 4 remains valid for*

$$C_4 = 0.133437785\ldots$$

Conclusion. We have obtained nontrivial error terms in asymptotic estimates of

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda_r^{(e)}(n)$$

for $r = 1, 2, 3, 4$. Cases of $r = 1$ and $r = 2$ depend on the method of exponent pairs. Cases of $r = 3$ and $r = 4$ depend on lower bounds of $m(\sigma)$. Note that case of $r = 4$ may be improved under Riemann hypothesis up to $C_4 = 1/8$, because Riemann hypothesis implies $\mu(\sigma) = 0$ and $m(\sigma) = \infty$ for $\sigma \in [1/2, 1]$.

1. **Carmichael R. D.** Note on a new number theory function / R. D. Carmichael // Bull. Amer. Math. Soc. – 1910. – feb. – Vol. 16, no. 5. – P. 232–238.
2. **Erdős P.** Carmichael's lambda function / P. Erdős, C. Pomerance, E. Schmutz // Acta Arith. – 1991. – Vol. 58, no. 4. – P. 363–385.
3. **Friedlander J. B.** Small values of the Carmichael function and cryptographic applications / J. B. Friedlander, C. Pomerance, I. E. Shparlinski // Cryptography and Computational Number Theory. – Basel : Birkhauser Verlag, 2001. – Vol. 20 of Progress in Computer Science and Applied Logic. – P. 25–32.
4. **Graham S. W.** An algorithm for computing optimal exponent pair / S. W. Graham // J. Lond. Math. Soc. – 1986. – Vol. 33, no. 2. – P. 203–218.
5. **Huxley M. N.** Exponential sums and the Riemann zeta function V / M. N. Huxley // Proc. Lond. Math. Soc. – 2005. – Vol. 90, no. 1. – P. 1–41.
6. **Ivić A.** The Riemann zeta-function: Theory and applications / A. Ivić. – Mineola, New York : Dover Publications, 2003. – 562 p.
7. **Krätzel E.** Lattice points / E. Krätzel. – Dordrecht : Kluwer, 1988. – 436 p.
8. **Krätzel E.** Estimates in the general divisor problem / E. Krätzel // Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. – 1992. – dec. – Vol. 62, no. 1. – P. 191–206.
9. **Lelechenko A. V.** Linear programming over exponent pairs / A. V. Lelechenko // Acta Univ. Sapientiae, Inform. – 2013. – Vol. 5, no. 2. – (in press).
10. **Lelechenko A. V.** Functions involving exponential divisors: bibliography. – 2014. – URL: https://github.com/Bodigrim/expdiv-bibliography.
11. **Pétermann Y.-F. S.** Arithmetical functions involving exponential divisors: Note on two papers by L. Tóth / Y.-F. S. Pétermann // Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eőtvős, Sect. Comput. – 2010. – Vol. 32. – P. 143–149.
12. **Subbarao M. V.** On some arithmetic convolutions / M. V. Subbarao // The theory of arithmetical functions: Proceedings of the Conference at Western Michigan University, April 29 – May 1, 1971. – Vol. 251 of Lecture Notes in Mathematics. – Berlin : Springer Verlag, 1972. – P. 247–271.
13. **Suryanarayana D.** On the true maximum order of a class of arithmetic functions / D. Suryanarayana, R. Sita Rama Chandra Rao // Math. J. Okayama Univ. – 1975. – Vol. 17. – P. 95–101.
14. **Titchmarsh E. C.** The theory of the Riemann zeta-function / E. C. Titchmarsh ; Ed. by D. R. Heath-Brown. – 2nd, rev. edition. – New-York : Oxford University Press, 1986. – 418 p.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V.18,Is.4(20).–P.60–67

Mathematical Subject Classification: 34A34, 34A25
UDC 517.926

S. A. Shchogolev
Odesa I. I. Mechnikov National University

ON A REDUCTION OF NONLINEAR FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH OSCILLATING COEFFICIENTS TO A SOME SPECIAL KIND

Щоголев С. А. Про зведення нелінійного диференціального рівняння першого порядку з коливними коефіцієнтами до одного спеціального вигляду. Для нелінійного диференціального рівняння першого порядку з коефіцієнтами коливного типу побудовано перетворення, яке зводить це рівняння до рівняння з повільно змінними коефіцієнтами.
Ключові слова: диференціальний, повільно змінний, ряди Фур'є.

Щёголев С. А. О приведении нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с осциллирующими коэффициентами к одному специальному виду. Для нелинейной колебательной системы второго порядка построено преобразование, приводящее эту систему к близкой системе с медленно меняющимися коэффициентами.
Ключевые слова: дифференциальный, медленно меняющийся, ряды Фурье.

Shchogolev S. A. On a reduction of nonlinear first-order differential equation with oscillating coefficients to a some special kind. For nonlinear oscillating second-order differential system construct the transformation which reducing this system close to a system with slowly varying coefficients.
Key words: differential, slowly varying, Fourier series.

Introduction. In the theory of nonlinear oscillations is an important problem of reducing a system defined on a s-dimensional torus, to so-called pure rotation, allowing you to explore the behavior of the system trajectories on this torus. In the case $s > 1$ we obtain multi-frequency system. Theory of quasi-periodic solutions of such systems is the subject of numerous studies [1 – 4]. In the case $s = 1$ torus degenerates into a circle, the system is a single frequency, and becomes an one first-order equation, which greatly simplifies the study. At the same time, if this equation is nonautonomous, in general, it is not integrated in quadratures, and then the task of bringing this equation to a simpler form is relevant. In this paper we consider the first-order differential equation, right part of which are represented by an absolutely and uniformly convergent Fourier series with slowly varying coefficients. The purpose of this paper is to obtain conditions for the existence of a similar structure transformation, this equation leads to an equation with a slowly varying right-hand side.

Auxiliary arguments. Let $G = \{t, \varepsilon :\ t \in \mathbf{R},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ \varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+\}$.

Definition 1. *We say, that a function $f(t, \varepsilon)$, in general a complex-valued, belongs to the class $S_m(\varepsilon_0)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, if $t, \varepsilon \in G$ and*

© Shchogolev S. A., 2013

1) $f(t,\varepsilon)\in C^m(G)$ *with respect* t,
2) $d^kf(t,\varepsilon)/dt^k=\varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon)$ $(0\leqslant k\leqslant m)$,

$$\|f\|_m\stackrel{def}{=}\sum_{k=0}^{m}\sup_G|f_k^*(t,\varepsilon)|.$$

Under the slowly varying function we mean a function of class $S_m(\varepsilon_0)$.

Definition 2. *We say, that a function* $f(t,\varepsilon,\theta)$ *belongs to the class* $F^\theta_{m,l}(\varepsilon_0)$ $(m,l\in\mathbf{N}\cup\{0\})$, *if this function can be represented as:*

$$f(t,\varepsilon,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta),$$

and:
1) $f_n(t,\varepsilon)\in S_m(\varepsilon_0)$, $\theta\in\mathbf{R}$;
2)

$$\|f\|_{m,l}\stackrel{def}{=}\|f_0\|_m+\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|^l\|f_n\|_m<+\infty,$$

particular

$$\|f\|_{m,0}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|f_n\|_m;$$

If the function $f(t,\varepsilon,\theta)$ are real, then $f_{-n}(t,\varepsilon)\equiv\overline{f_n(t,\varepsilon)}$.
Obviously, the functions of class $F^\theta_{m,l}(\varepsilon_0)$ are 2π-periodic with respect θ.
If

$$u=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u_n\mathrm{e}^{in\theta},\ v=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_n\mathrm{e}^{in\theta}\in F^\theta_{m,l}(\varepsilon_0),$$

then $ku, u\pm v, uv\in F^\theta_{m,l}(\varepsilon_0)$, and
1) $\|ku\|_{m,l}=|k|\cdot\|u\|_{m,l}$;
2) $\|u\pm v\|_{m,l}\leqslant\|u\|_{m,l}+\|v\|_{m,l}$;
3) $\|uv\|_{m,l}\leqslant 2^m(2^l+1)\|u\|_{m,l}\cdot\|v\|_{m,l}$.

We prove the last property. From the definition of the norm $\|\cdot\|_{m,l}$ should be

$$\|u\|_{m,l}=\|u_0\|_m+\left\|\frac{\partial^l u}{\partial\theta^l}\right\|_{m,0}.$$

In [5] it was shown that $\forall p,q\in S_m(\varepsilon_0)$: $\|pq\|_m\leqslant 2^m\|p\|_m\|q\|_m$. Using Leibniz's formula, we can write:

$$\frac{\partial^l(uv)}{\partial\theta^l}=\sum_{\nu=0}^{l}C_l^\nu\frac{\partial^\nu u}{\partial\theta^\nu}\cdot\frac{\partial^{l-\nu}v}{\partial\theta^{l-\nu}}.$$

We denote: $(uv)_0=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}u_kv_{-k}$. Hense $\|uv\|_{m,0}\leqslant 2^m\|u\|_{m,0}\cdot\|v\|_{m,0}$. Now we have:

$$\|uv\|_{m,l}=\|(uv)_0\|_m+\left\|\frac{\partial^l(uv)}{\partial\theta^l}\right\|_{m,0}\leqslant\|(uv)_0\|_m+\sum_{\nu=0}^{l}C_l^\nu 2^m\left\|\frac{\partial^\nu u}{\partial\theta^\nu}\right\|_{m,0}\cdot\left\|\frac{\partial^{l-\nu}v}{\partial\theta^{l-\nu}}\right\|_{m,0}\leqslant$$

$$\leqslant 2^m\|u\|_{m,l}\cdot\|v\|_{m,l}+2^m\|u\|_{m,l}\cdot\|v\|_{m,l}\cdot 2^l=2^m(2^l+1)\|u\|_{m,l}\cdot\|v\|_{m,l},$$

quod erat demonstrandum.

Main Results.

1. Statement of the Problem.

Consider the first-order differential equation:

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega(t,\varepsilon)+\mu\Theta(t,\varepsilon,\theta)+\varepsilon b(t,\varepsilon,\theta), \tag{1}$$

where real functions $\omega(t,\varepsilon)\in S_m(\varepsilon_0)$, $\inf\limits_G \omega(t,\varepsilon)=\omega_0>0$, $\Theta\in F^{\theta}_{m,l}(\varepsilon_0)$, $b\in F^{\theta}_{m-1,l}(\varepsilon_0)$, $\mu\in(0,1)$.

We study the question of the existence of the transformation of kind

$$\theta=\Psi(t,\varepsilon,\varphi,\mu),$$

where $\Psi\in F^{\varphi}_{m_1,l_1}(\varepsilon_1)$ ($m_1\leqslant m$, $l_1\leqslant l$, $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$), which reducing the equation (1) to the form:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\widetilde{\omega}(t,\varepsilon,\mu)+\varepsilon\beta(t,\varepsilon,\varphi,\mu),$$

where $\widetilde{\omega}\in S_{m_2}(\varepsilon_1)$ ($m_2\leqslant m$), $\beta\in F_{m_1,l_1}$.

The peculiarity of this problem is that there appear two small parameters – μ and ε, that perform different functions. Parameter μ characterizes the smallness of the nonlinearity $\Theta(t,\varepsilon,\theta)$ in right part of equation, and parameter ε characterizes the slow variability of function ω and coefficients of Fourier-series, which represents functions Ω and b. Therefore, restrictions on one of these parameters, in general, do not involve restrictions on another parameter. At the same time, most of the known results the smallness of the nonlinearity and the slow rate variability coefficients of the system are characterized by the same parameter.

Note that analogous problem has been considered by author in [6], but there equation (1) reduced to form:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega^*(t,\varepsilon)+\mu^{r+1}\omega_r(t,\varepsilon,\varphi,\mu)+\varepsilon b_r(t,\varepsilon,\varphi,\mu),$$

where $r\in\mathbf{N}$, and thus oscillating terms, proportional to the small parameter μ in right part did not disappear completely, but only increases the order of their smallness relative μ. In this paper we prove the existence of a transformation that completely destroys these oscillating terms, and retains only oscillating terms proportional parameters ε.

2. Principal Results.

Theorem. *Let the function $\Theta(t,\varepsilon,\theta)$ in right part of equation (1) belongs to class $F^{\theta}_{m,l+2}(\varepsilon_0)$. Then exists $\mu_0\in(0,1)$ such that for all $\mu\in(0,\mu_0)$ exists the transformation*

$$\theta=\varphi+v(t,\varepsilon,\varphi,\mu), \tag{2}$$

where $v(t,\varepsilon,\varphi,\mu)\in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$, reducing the equation (1) to kind:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega(t,\varepsilon)+\Phi(t,\varepsilon,\mu)+\varepsilon\beta(t,\varepsilon,\varphi,\mu), \tag{3}$$

where $\Phi(t,\varepsilon,\mu) \in S_m(\varepsilon_0)$, $\beta(t,\varepsilon,\varphi,\mu) \in F^{\varphi}_{m-1,l-1}(\varepsilon_0)$.

Proof. We define the function v from equation:

$$(\omega(t,\varepsilon)+\Phi(t,\varepsilon,\mu))\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \mu\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v)-\Phi(t,\varepsilon,\mu). \tag{4}$$

We introduce the operators:

$$\Gamma_n[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta(t,\varepsilon,\varphi)\ e^{-in\varphi}d\varphi,\ \ n\in\mathbf{Z},$$

in particular

$$\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta(t,\varepsilon,\varphi)d\varphi;$$

$$I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] = \sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq 0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)]}{in}\ e^{in\varphi}.$$

Obviously $\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] \in S_m(\varepsilon_0)$, $I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] \in F^{\varphi}_{m,l+1}(\varepsilon_0)$, and

$$I\left[\frac{\partial\Theta(t,\varepsilon,\varphi)}{\partial\varphi}\right] = \Theta(t,\varepsilon,\varphi)-\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0).$$

If in particular $\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)] \equiv 0$, then

$$I\left[\frac{\partial\Theta(t,\varepsilon,\varphi)}{\partial\varphi}\right] = \Theta(t,\varepsilon,\varphi).$$

The operators $\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)]$, $I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)]$, obviously, are linear.

Consider equation (4). We seek a solution $v \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$ of this equation and function $\Phi \in S_m(\varepsilon_0)$ by the method of successive approximations, defining the initial approximation v_0, Φ_0 from the equation:

$$\omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_0}{\partial\varphi} = \mu\Theta(t,\varepsilon,\varphi)-\Phi_0(t,\varepsilon,\mu), \tag{5}$$

and the subsequent approximations $v_k,\ \Phi_k$ $(k=1,2,...)$ defining from the equations:

$$\omega(t,\varepsilon)\frac{\partial v_k}{\partial\varphi} = \mu\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_{k-1})-\Phi_{k-1}\frac{\partial v_{k-1}}{\partial\varphi}-\Phi_k(t,\varepsilon,\mu),\ \ k=1,2,\dots\ . \tag{6}$$

We denote:

$$\Phi_0(t,\varepsilon,\mu) = \mu\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)], \tag{7}$$

$$v_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu) = \frac{\mu}{\omega(t,\varepsilon)}I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)], \tag{8}$$

$$\Phi_{k+1}(t,\varepsilon,\mu) = \mu\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k)], \tag{9}$$

$$v_{k+1}(t,\varepsilon,\varphi,\mu) = \frac{\mu}{\omega(t,\varepsilon)}I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k)]-\frac{\Phi_k(t,\varepsilon,\mu)}{\omega(t,\varepsilon)}\ v_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu). \tag{10}$$

We show that all the approximations $\Phi_k(t,\varepsilon,\mu)$ $(k=0,1,2,...)$, defined by the formulas (7), (9), belongs to class $S_m(\varepsilon_0)$, and all the approximations $v_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu)$ $(k=0,1,2,...)$ belongs to class $F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$.

Obviously $\Phi_0 \in S_m(\varepsilon_0)$, $v_0 \in F^{\varphi}_{m,l+1}(\varepsilon_0) \subset F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$, $v_0 \in \mathbf{R}$ and $\Gamma_0[v_0] \equiv 0$. We show that function $\Theta_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu) = \Theta(t,\varepsilon,\varphi + v_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu))$ belongs to class $F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$. Since by hypothesis holds $\Theta(t,\varepsilon,\varphi) \in F^{\varphi}_{m,l+2}(\varepsilon_0)$, then

$$\sup_{t,\varepsilon\in G}\sup_{\varphi\in\mathbf{R}}\left|\frac{\partial^{s+r}\Theta(t,\varepsilon,\varphi)}{\partial t^s\partial\varphi^r}\right| < +\infty, \quad s=\overline{0,m},\ r=\overline{0,l+2}. \tag{11}$$

Converting expression

$$\Gamma_n[\Theta_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta_0(t,\varepsilon,\varphi)\ e^{-in\varphi}d\varphi,\ n\neq 0$$

by the formula $(l+2)$-fold integration by parts, and noting that

$$\frac{\partial v_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu)}{\partial\varphi} = \mu(\Theta(t,\varepsilon,\varphi) - \Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi)]),$$

we obtain:

$$\Gamma_n[\Theta_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu)] = \frac{1}{2\pi(in)^{l+2}}\int\limits_0^{2\pi}P(t,\varepsilon,\varphi,\mu)\ e^{-in\varphi}d\varphi,\ n\neq 0,$$

where $P(t,\varepsilon,\varphi,\mu)$ is polynom of degree $l+3$ with coefficients are belongs to class $S_m(\varepsilon_0)$ relatively derivatives $\frac{\partial^r\Theta(t,\varepsilon,\varphi)}{\partial\varphi^r}$ $(r=\overline{0,l+2})$, which are calculated by values of argument φ is equal φ or $\varphi+v_0$, where $v_0\in\mathbf{R}$. Given (11) we obtain, that $\Theta_0(t,\varepsilon,\varphi,\mu)\in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$. Thus taking into account (9), (10), we obtain, that $\Phi_1\in S_m(\varepsilon_0)$, $v_1\in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$.

Suppose by induction, that $\Phi_s\in S_m(\varepsilon_0)$, $v_s\in F_{m,l}(\varepsilon_0)$ $(s=\overline{2,k})$, and show, that then $\Phi_{k+1}\in S_m(\varepsilon_0)$, $v_{k+1}\in F_{m,l}(\varepsilon_0)$. For that we must to show, that function $\Theta_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu) = \Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu))$ belong to class $F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$. Same as above, we transform the expression

$$\Gamma_n[\Theta_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta_k(t,\varepsilon,\varphi)\ e^{-in\varphi}d\varphi,\ n\neq 0$$

by the formula $(l+2)$-fold integration by parts, and using the equality (6), we obtain

$$\Gamma_n[\Theta_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu)] = \frac{1}{2\pi(in)^{l+2}}\int\limits_0^{2\pi}Q(t,\varepsilon,\varphi,\mu)\ e^{-in\varphi}d\varphi,\ n\neq 0,$$

where $Q(t,\varepsilon,\varphi,\mu)$ is polynom of degree $l+3$ with coefficients are belongs to class $S_m(\varepsilon_0)$ relatively derivatives $\frac{\partial^r\Theta(t,\varepsilon,\varphi)}{\partial\varphi^r}$ $(r=\overline{0,l+2})$, which are calculated by values

of argument φ is equal φ or $\varphi + v_s$, where $v_s \in \mathbf{R}$ $(s = \overline{1,k})$. Given (11) we obtain, that $\Theta_k(t,\varepsilon,\varphi,\mu) \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$. Thus taking into account (9), (10), we obtain, that $\Phi_{k+1} \in S_m(\varepsilon_0)$, $v_{k+1} \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$.

We introduce the sets:

$$\Omega_1 = \{\ \Phi \in S_m(\varepsilon_0) :\ \|\Phi\|_m \leqslant d\ \},$$

$$\Omega_2 = \left\{\ v \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0) :\ \|v\|_{m,l} \leqslant d\ \right\},\ d > 0.$$

We denote: $\sup\limits_{v\in\Omega_2} \|\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v)\|_{m,l}$. We show that for sufficiently small values of parameter μ all the approximations Φ_k belongs to set Ω_1, and all the approximations v_k belongs to set Ω_2. On the basis of (7), (8) $\exists\ K \in (0,+\infty)$ such that $\|\Phi_0\|_m \leqslant \mu KM(d)$, $\|v_0\|_{m,l} \leqslant \mu KM(d)$. Suppose by induction, that

$$\|\Phi_k\|_m \leqslant \mu KM(d),\ \|v_k\|_{m,l} \leqslant m, l \leqslant \mu KM(d) \sum_{s=0}^{k} (2^m \mu KM(d))^s.$$

Then for sufficiently small μ: $\Phi_k \in \Omega_1$, $v_k \in \Omega_2$. Now:

$$\|\Phi_{k+1}\|_m \leqslant \mu KM(d),$$

$$\|v_{k+1}\|_{m,l} \leqslant \mu KM(d) + \mu KM(d) \sum_{s=0}^{k} (2^m \mu KM(d))^{s+1} = \mu KM(d) \sum_{s=0}^{k+1} (2^m \mu KM(d))^s.$$

We require that

$$\mu 2^m KM(d) < 1, \tag{12}$$

$$\frac{\mu KM(d)}{1 - \mu 2^m KM(d)} \leqslant d_0 < d. \tag{13}$$

Then all the he approximations Φ_k belongs to set Ω_1, and all the approximations v_k belongs to set Ω_2 $(k = 0, 1, 2, ...)$.

Now we prove the convergence of the process (9), (10). We have:

$$\Phi_{k+1} - \Phi_k = \mu\Gamma_0[\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k) - \Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_{k-1})], \tag{14}$$

$$v_{k+1} - v_k = \frac{\mu}{\omega(t,\varepsilon)}\ I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k) - \Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_{k-1})] -$$

$$-\frac{\Phi_k}{\omega(t,\varepsilon)}\ v_k + \frac{\Phi_{k-1}}{\omega(t,\varepsilon)}\ v_{k-1} = \frac{\mu}{\omega(t,\varepsilon)}\ I[\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k) - \Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_{k-1})] -$$

$$-\frac{\Phi_k}{\omega(t,\varepsilon)}\ (v_k - v_{k-1}) - \frac{1}{\omega(t,\varepsilon)}\ (\Phi_k - \Phi_{k-1})v_{k-1}. \tag{15}$$

As performed $\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k) \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$ $(k = 0, 1, 2, ...)$, then

$$\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_k) - \Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_{k-1}) = \frac{\partial\Theta(t,\varepsilon,\varphi+v_{k-1}+\nu(v_k-v_{k-1}))}{\partial\varphi}\ (v_k - v_{k-1}),$$

$(0 < \nu < 1)$, and $\partial\Theta(t, \varepsilon, \varphi + v_{k-1} + \nu(v_k - v_{k-1}))/\partial\varphi \in F^{\varphi}_{m,l-1}(\varepsilon_0)$. We denote:

$$L(d) = \sup_{v \in \Omega_2} \left\| \frac{\partial\Theta(t, \varepsilon, \varphi + v)}{\partial\varphi} \right\|_{m,l-1}.$$

Then from (14), (15) we obtain:

$$\|\Phi_{k+1} - \Phi_k\|_m \leqslant \mu KL(d)\|v_k - v_{k-1}\|_{m,l},$$

$$\|v_{k+1} - v_k\|_{m,l} \leqslant \mu KL(d)\|v_k - v_{k-1}\|_{m,l} + \frac{\mu KM(d)}{\omega_0}\ 2^m\|v_k - v_{k-1}\|_{m,l} +$$

$$+\frac{1}{\omega_0}\mu KL(d)\|v_k - v_{k-1}\|_{m,l} \cdot 2^m(2^l + 1)d.$$

It follows that for the convergence of process (9), (10) is sufficient that the inequalities (12), (13) and also

$$\mu KL(d) + \frac{\mu KM(d)}{\omega_0}\ 2^m + \frac{\mu KL(d)2^m(2^l + 1)d}{\omega_0}\ < 1.$$

Thus equation (4) have a solution $v(t, \varepsilon, \varphi, \mu) \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$, and this solution belong to set Ω_2, therefore

$$\|v\|_{m,l} \leqslant \frac{\mu KM(d)}{1 - \mu 2^m KM(d)},$$

As performed $v \in F^{\varphi}_{m,l}(\varepsilon_0)$, then $\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon\widetilde{v}(t, \varepsilon, \varphi, \mu)$, where $\widetilde{v} \in\ F^{\varphi}_{m-1,l}(\varepsilon_0)$, and $\frac{\partial v}{\partial\varphi} \in F^{\varphi}_{m,l-1}(\varepsilon_0)$. Now we define the function $\beta(t, \varepsilon, \varphi, \mu)$ in (3) from the equation:

$$\left(1 + \frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)\ \beta(t, \varepsilon, \varphi, \mu) = b(t, \varepsilon, \varphi + v) - \widetilde{v}(t, \varepsilon, \varphi, \mu).$$

For the sufficiently small μ this equation has a unique solution $\beta \in F^{\varphi}_{m-1,l-1}(\varepsilon_0)$.

Theorem are proved.

Remark 1. *For the conditions of the above theorem is only necessary smallness of the parameter μ, but not parameter ε. Therefore the solution $v(t, \varepsilon, \varphi, \mu)$ of equation (4) and function $\Phi(t, \varepsilon, \mu)$ are defined in the same area G, that coefficients of this equation.*

Remark 2. *Using the chain of transformations analogous to the construction in [7], we can increase the order of smallness of the parameter ε of the oscillating term $\varepsilon\beta(t, \varepsilon, \varphi, \mu)$ in equation (3) and to transform this equation to the kind:*

$$\frac{d\psi}{dt} = \sigma(t, \varepsilon, \mu),$$

where $\sigma(t, \varepsilon, \mu) \in S_{m_1}(\varepsilon_1)$ $(m_1 < \min(m - 1, l - 1)$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0)$.

Conclusion. Thus, for the equation (1) the sufficient conditions of the existence of the transformation, which reducing this equation close to a equation with slowly varying coefficients and the algorithm for constructing this transformation are obtained.

1. **Arnold V. I.** Small denominators. 1. Mapping the circle onto itself [in Russian] / V. I. Arnold // Proceedings of the Academy of Sciences. Math. – 1961. – V. 25(1). – P. 21–86.
2. **Moser J.** KAM-theory and problems of stability [in Russian] / J. Moser – Moscow–Izhevsk, 2001. – 448 p.
3. **Bogolubov N. N.** The method of accelerated convergence in nonlinear mechanics [in Russian] / N. N. Bogolubov, Yu. A. Mitropol'skii, A. M. Samoilenko. – Kiev, Naukova dumka, 1969. – 247 p.
4. **Samoylenko A. M.** Quasiperiodic Solutions of Differential-Difference Equations on a Torus / A. M. Samoylenko, E. P. Belan // Journal of Dynamics and Differential Equations. – 2003. – V. 15, No. 2/3.
5. **Shchogolev S. A.** The some problems of the theory os oscillations for the differential systems, containing slowly vyrying parameters [in Ukrainian]. – Manuscript. – The thesis for obtaining the scientific degree of Doctor of physical and mathematical sciencies. – Odessa. – 2012. - 290 p.
6. **Shchogolev S. A.** On a reduction of nonlinear second-order differential system to a some special kind / S. A. Shchogolev // Odessa National University Herald. Math. and Mechan. – 2012. – V. 17, Is. 4(16). – P. 97–103.
7. **Shchogolev S. A.** On existence of a special kind's integral manifold of the nonlinear differential system with slowly varying parameters / S. A. Shchogolev // Odessa National University Herald. Math. and Mechan. – 2013. – V. 18, Is. 2(18). – P. 80–96.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V.18,Is.4(20).–P.68–75

Mathematical Subject Classification: 11K45, 11T23, 11T71
UDC 511

Tran The Vinh, P. Varbanets
Odesa I. I. Mechnikov National University

INVERSIVE CONGRUENTIAL GENERATOR OF THE COMPLEX PSEUDO-RANDOM NUMBERS

Тран Тхе Вінь, Варбанець П. Д. Інверсний конгруенційний генератор комплексних псевдовипадкових чисел. Розглядається розподілення елементів послідовності псевдовипадкових комплексних чисел, породжених лінійно-інверсним генератором за модулем степені простого числа p, $p \equiv 3 \pmod 4$, в секторіальних областях одиничного кола комплексної площини. Побудовано аналог нерівності Турана–Ердьоша–Коксми, що дозволяє отримати нетривіальні оцінки дискріпантної функції $D_N^{(s)}(X_0, \dots, X_{N-1})$. Показано, що послідовність $\{\omega_n\}$, $\omega_n = \frac{z_n}{p^m}$, породжена рекурсією $z_{n+1} \equiv \alpha z_n^{-1} + \beta + \gamma z_n \pmod{p^m}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ за відповідних умов на коефіцієнти α, β, γ і ініціальне значення z_0, має максимальний період $\tau = 2p^{m-\nu}$, $\nu = \nu_p(\beta)$ і проходить s-мірний тест на рівнорозподіленість та непередбачуваність.
Ключові слова: псевдовипадкові числа, дискріпансія, експоненційні суми.

Тран Тхе Винь, Варбанец П. Д. Инверсный конгруентный генератор комплексных псевдослучайных чисел. Рассматривается распределение элементов последовательности псевдослучайных комплексных чисел, порожденных линейно-инверсным генератором по модулю степени простого числа p, $p \equiv 3 \pmod 4$, в секториальных областях единичного круга комплексной плоскости. Построен аналог неравенства Турана–Эрдёша–Коксмы, позволяющий получить нетривиальные оценки дескрипантной функции $D_N^{(s)}(X_0, \dots, X_{N-1})$. Показано, что последовательность $\{\omega_n\}$, $\omega_n = \frac{z_n}{p^m}$, порожденная рекурсией $z_{n+1} \equiv \alpha z_n^{-1} + \beta + \gamma z_n \pmod{p^m}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ при определенных условиях на коэфициенты α, β, γ и инициальное значение z_0, имеет максимальный период $\tau = 2p^{m-\nu}$, $\nu = \nu_p(\beta)$ и проходит s-мерный тест на равнораспределенность и непредсказуемость.
Ключевые слова: псевдослучайные числа, дескрипансия, экспоненциальные суммы.

Tran The Vinh, Varbanets P. Inversive congruential generator of the complex pseudo-random numbers. Consider the distribution of elements of the sequence on pseudo-random complex numbers generated by linear-inversive generator modulo prime power number p, $p \equiv 3 \pmod 4$, in sectorial regions from unit ball of complex plane. We constructed an analogue of Turan-Erdos-Koksma inequality that make it possible to derive non-trivial bounds for discrepancy $D_N^{(s)}(X_0, \dots, X_{N-1})$. It is shown that the sequence $\{\omega_n\}$, $\omega_n = \frac{z_n}{p^m}$, produced by the recursion $z_{n+1} \equiv \alpha z_n^{-1} + \beta + \gamma z_n \pmod{p^m}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ under certain conditions to coefficients α, β, γ and initial value z_0, has maximal period $\tau = 2p^{m-\nu}$, $\nu = \nu_p(\beta)$, and it passes the s-dimensional test on equidistribution and unpredictability.
Key words: pseudo-random numbers, discrepancy, exponential sum.

Introduction. Let p be a prime number, $m > 1$ be a positive integer. Consider the following recursion

$$y_{n+1} \equiv a y_n^{-1} + b \pmod{p^m}, (a, b \in \mathbb{Z}), \tag{1}$$

© Tran The Vinh, Varbanets P., 2013

where $\overline{y}_n$ is a multiplicative inversive modulo p^m for y_n if $(y_n, p) = 1$. The parameters a, b, y_0 we called the multiplier, shift and initial value, respectively.

In [4] there was constructed the linear-inversive congruential generator

$$y_{n+1} \equiv ay_n^{-1} + b + cy_n \pmod{p^n} \tag{2}$$

with $(a, p) = 1$, $b \equiv c \equiv 0 \pmod{p}$, such that the sequence $\{\frac{y_n}{p^m}\}$ passes serial test on equidistribution and statistical independence (unpredictability as well).

Our purpose in this work is to show a passing the tests on equidistribution and unpredictability for sequence $\{\omega_n\}$, $\omega_n = \frac{z_n}{p^m}$, where z_n produced by the recursion

$$z_{n+1} \equiv \alpha z_n^{-1} + \beta + \gamma z_n \pmod{p^m}, \tag{3}$$

α, β, γ are the Gaussian integers, p is a prime rational integer, $p > 2$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 3$.

Hence, the main point to be shown is the possibility for such sequences of complex numbers to be used in the problem of modeling the real processes and in cryptography.

We consider the sequence of complex numbers $\{z_n\}$, $|z_n| \leqslant 1$. Let $0 \leqslant \xi_1 < \xi_2 \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 \leqslant 2\pi$ and let $P(\xi, \varphi)$ denotes the sectorial region of unit ball $|z| \leqslant 1$

$$P(\xi, \varphi) := \{z \in \mathbb{C} : \ \xi_1 < N(z) \leqslant \xi_2, \ \varphi_1 < \arg z \leqslant \varphi_2\}. \tag{4}$$

Denote by $\mathfrak{F}$ the collection of sectorial region $P(\xi, \varphi)$ for all ξ and φ.

The sequence $\{z_n\}$ calls the pseudo-random in unit circle if it induces by a determinative algorithm, and its statistic properties are "similar" on property of sequence of the random numbers. The "similarity" means that this sequence closely adjacent to uniformly distributed in the disk $|z| \leqslant 1$, and its elements are uncorrelated. On these properties of the sequence of pseudo-random numbers (abbreviation: PRN's) can destine by value of discrepancy D_N of the points $z_1, z_2, \ldots, z_N$:

$$D_N(z_1, z_2, \ldots, z_N) := \sup_{P \subset \mathbb{C}} \left| \frac{A_N(P)}{N} - |P| \right|, \tag{5}$$

where $A_N(P)$ is the number of points among $z_1, \ldots, z_N$ falling into P, $|P|$ denotes the volume P; supremum is extended over all sectorial region P of unit circle $|z| \leqslant 1$.

The similar definition of discrepancy D_N has for the s-dimensional sequence of complex points $Z_n^{(s)} = \left(z_1^{(s)}, \ldots, z_n^{(s)}\right)$, $z_j \in \mathbb{C}$.

We say that the sequence $\{z_n\}$ passes s-dimensional test on uncorrelatedness if it passes ℓ-dimensional test on equidistribution, i.e.

$$D_N^{(\ell)}\left(z_1^{(\ell)}, \ldots, z_N^{(\ell)}\right) \to 0 \ at \ N \to \infty,$$

for $\ell = 1, 2, \ldots, s$.

Notation. Let G denotes the ring of the Gaussian integers, $G := \{a + bi : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$; $N(z) = |z|^2$ calls the norm of $z \in G$. For $\gamma \in G$ denote G_γ (respectively, G_γ^*) the complete system of residues (respectively, reduced residue system) in G modulo γ; p is a prime number in $\mathbb{Z}$; $\mathfrak{p}$ is a Gaussian prime number. If q is a positive integer, $q > 1$, then we write $e_q(x) = e^{2\pi i \frac{x}{q}}$ for $x \in \mathbb{R}$. Symbols "O" and "$\ll$" are equivalent;

$\nu_p(\alpha) = k$ if $p^k|\alpha$, $p^{k+1} \not| \alpha$.

Let $M > 1$ be a positive integer and let $y_1, y_2, \dots, y_N$ be some sequence of points form G_M and let $Y_M = \{\frac{y_n}{M}\}$, $n = 0, \dots, N-1$. For $P \in \mathfrak{F}$ denote $A(P, Y_M)$ the number of points from Y_M contained in P.

We will adapt the proof from [2] for a construction of an analogue of the Turan-Erdös-Koksma inequality.

We define the adequate approximation of sectorial region $P \in \mathfrak{F}$,

$$P := \left\{ \frac{z}{q} : \ N_1 \leqslant N(z) \leqslant N_2, \ 0 \leqslant \varphi_1 < \arg z \leqslant \varphi_2 < 2\pi \right\}, \ q \in \mathbb{N}.$$

The set $S(P)$ calls the adequate approximation of P if

(i) $A(P, Y_N(M)) = A(S(P), Y_N(M)) + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right)$,

(ii) volumes $|P|$ and $|S(P)|$ are "similar",

(iii) $A(S(P), Y_N(M))$ has a representation by an exponential sum.

Let N_1, N_2, φ_1, φ_2 are the parameters in the definition of P. For $r, s \in \mathbb{Z}_M$ we set $\overline{r} = \frac{r}{M}$, $\overline{s} = \frac{s}{M}$.

Determine

$$S_{\overline{r},\overline{s}} : \left\{ \beta = \frac{\alpha}{M} : \ \alpha \in G_M, \overline{r} < N(\beta) \leqslant \overline{r} + \frac{1}{M}, \ 2\pi\overline{s} < \arg\alpha \leqslant 2\pi\left(\overline{s} + \frac{1}{M}\right) \right\}. \quad (6)$$

Put

$$S(P) := \bigcup_{\substack{\overline{r},\overline{s}, \\ S_{\overline{r},\overline{s}} \subset P}} S_{\overline{r},\overline{s}}.$$

It is obvious that $S(P) = P(\overline{N}_1, \overline{N}_2, \psi_1, \psi_2)$, where

$$\begin{aligned}
\overline{N}_1 &= \min\{\frac{a}{M}, \ a \in \mathbb{Z}_M : \ N_1 \leqslant \frac{a}{M}\}, \\
\overline{N}_2 &= \min\{\frac{b}{M}, \ b \in \mathbb{Z}_M : \ N_2 \leqslant \frac{b}{M}\}, \\
\psi_1 &= \min\{\frac{2\pi a}{M}, \ a \in \mathbb{Z}_M : \ \psi_1 \leqslant \frac{2\pi a}{M}\}, \\
\psi_2 &= \min\{\frac{2\pi b}{M}, \ b \in \mathbb{Z}_M : \ \psi_2 \leqslant \frac{2\pi b}{M}\}.
\end{aligned}$$

We proved the following analogue of the Turan-Erdös-Koksma inequality (see,[3])

Auxiliary arguments.

Theorem 1. *Let $M > 1$ be integer. Then for any sequence $\{y_n\}$, $y_n \in G_M$, the discrepancy D_N of points $\{\frac{y_n}{M}\}$ satisfies to inequality*

$$\begin{aligned}
D_N \leqslant 2 &\left(1 - \left(1 - \frac{2\pi}{M}\right)^2\right) + \\
&+ \frac{1}{M} \sum_{\substack{h \in G_M \\ h \neq 0}} \min\left(\frac{1}{|\sin \pi\Re h|}, \frac{1}{|\sim \pi\Im h|}\right) \frac{1}{N} \left(|S_N| + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right)\right),
\end{aligned}$$

where $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N-1} e_M(\Re(hy_n))$.

Proof. By an analogue with the work[2] we infer

$$R_N(S(P)) := \frac{A(S(P))}{N} - |S(P)| = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \chi_{S(P)}(x_n) - |S(P)|, \tag{7}$$

where $x_n = \frac{y_n}{M}$, χ_Δ is the characteristic function of the set Δ.

By the equality

$$\chi_{S_{\overline{r},\overline{s}}}(x) = \sum_{\alpha \in S_{\overline{r},\overline{s}}} \frac{1}{M^2} \sum_{h \in G_M} e_M(h(\alpha - x))$$

we get

$$|R_N(S(P))| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{0 \neq h \in G_M} \frac{1}{M^2} \left| \sum_{z(r,s) \in S_{\overline{r},\overline{s}}} e_M(-\Re(hz(r,s))) \right| \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e_M(\Re(hy_n)) \right|, \tag{8}$$

where $z(r,s)$ is the complex number such that

$$N(z(r,s)) = \frac{r}{M},\ \arg z(r,s) = \frac{2\pi s}{M}.$$

In order to calculate the first inner sum over $S_{\overline{r},\overline{s}}$ one needs an estimate of the sum

$$\sum_M = \sum_{\substack{N_1 < N(\omega) < N_2, \\ \varphi_1 < \arg\omega \leqslant \varphi_2}} e_M(\Re(h\omega)), \quad (0 \neq h \in G_M). \tag{9}$$

The sum $\sum_M$ can be considered as asum of coeficients of Dirichlet series for the Hecke Z-function over the Gaussian field $\mathbb{Q}(i)$:

$$Z_m(s, \delta_0, \delta_1) = \sum_{0 \neq \omega \in G} \frac{e^{2\pi i \Re(\omega\delta_1)}}{N(\omega + \delta_0)^s} e^{4mi \arg\omega}, (\Re s > 1).$$

Putting $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = \frac{h}{M}$, we obtain for any $T > 1$ by a standard way the following estimates:

$$\begin{aligned} \sum_{N(\omega) \leqslant x} e_M(h\omega) = (\varphi_2 - \varphi_1) \sum N(\omega) \leqslant x e_M(h\omega) + O\left(\frac{1}{T} \sum_{N(\omega) \leqslant x} 1 \right) + \\ + O\left((\varphi_2 - \varphi_1) \sum_{m=1}^{T} \left| \sum_{N(\omega) \leqslant x} e_M(h\omega) e^{4mi \arg\omega} \right| \right). \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{N(\omega) \leqslant x} e_M(h\omega) e^{4mi \arg\omega} \ll_\varepsilon \frac{x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}{M^{\frac{1}{4}}} + M^{\frac{1}{2}} (|m| + 3)^{1+\varepsilon} \tag{11}$$

(for the details, see Chapter 2 of [1], for example).

Next, we have a simple analogue of the estimate of linear exponential sum over G

$$\begin{gathered}\left|\sum_{N_1<N(\omega)<N_2} 2^{2\pi i\Re(\alpha\omega)}\right| \leqslant \\ \leqslant (N_2-N_1)^{\frac{1}{2}} \min\left((N_2-N_1)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{|\sin\pi\Re\alpha|}, \frac{1}{|\sin\pi\Im\alpha|}\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Now by (6)-(11), putting $T = x^{\frac{2}{3}}$ and taking into account that $|P| = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}(N_2-N_1)$, we obtain our assertion. ■

Theorem 1 shows that the estimates of discrepancy are essentially depended on estimate of the special exponential sum on the sequence of pseudo-random numbers $\{\omega_n\}$.

To construct such estimate we need the following lemmas.

Lemma 1. *Let $f(x) = A_1x + A_2x^2 + p(A_3x^3 + \cdots)$ be a polynomial over G, and let $(A_2, p) = 1$. Then, for any $A \in G$, we have*

$$|S(f;p^n)| := \left|\sum_{x\in R_n^*} e^{2\pi i\frac{Ax+f(x^{-1})}{p^n}}\right| \leqslant 2p^{\frac{n}{2}},$$

where x^{-1} denotes the multiplicative inverse of x in R_n^*.

Lemma 2. *Let $\{y_n\}$ is the sequence of PRN's generated by the recursion (3) with conditions $(y_0, p) = (\alpha, p) = 1$, $0 < \nu_p(\beta) < \nu_p(\gamma)$. There exist the polynomials $F_0(u,v,w)$, $G_0(u,v,w)$ over $\mathbb{Z}$ such that for any $k \geqslant 2m+1$ the relations*

$$\begin{aligned}y_{2k} = {} & k\beta + k\alpha\gamma y_0^{-1} + (1-k(k-1)\alpha^{-1}\beta^2)y_0 + (-k\alpha^{-1}\beta)y_0^2 + \\ & + (-k\alpha^{-2}\gamma + k^2\alpha^{-2}\beta^2)y_0^3 + p^\alpha F_0(k, y_0, y_0^{-1}),\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}y_{2k+1} = {} & (k+1)\beta + (\alpha - k(k+1)\beta^2)y_0^{-1} + (-k\alpha\beta)y_0^{-2} + \\ & + (-k\alpha^2\gamma + k^2\alpha\beta^2)y_0^{-3} + (k+1)\gamma y_0 + p^\alpha G_0(k, y_0, y_0^{-1}),\end{aligned} \tag{14}$$

where $\alpha := \min(\nu_p(\beta^3), \nu_p(\beta\gamma))$; $F_0(u,v,w)$, $G_0(u,v,w) \in \mathbb{Z}[u,v,w]$, and furthermore, the coefficients of the polynomials F_0, G_0 depend only on α^i, β^i, γ^i, $(\alpha^{-1})^i$, $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$, hold.

Corollary 1. *For the sequence $\{y_n\}$ generated by (3) we have*

$$\begin{aligned}y_{2k} = {} & y_0 + k\left[\beta(1-\alpha^{-1}y_0^2) + \alpha^{-1}\beta^2 y_0 + \alpha\gamma y_0^{-1}(1-\alpha^{-2}y_0^4)\right] + \\ & + k^2\left[-\alpha^{-1}\beta^2 y_0(1-\alpha^{-1}y_0^2)\right] + p^\alpha F_0(k, y_0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{2k+1} = {} & (\beta + \gamma y_0 - \alpha y_0) + k\left[\beta + \gamma y_0 - \beta^2 y^{-1} - \alpha\beta y_0^{-2} - \alpha^2\gamma y_0^3\right] + \\ & + k^2\left[-\beta^2 y_0^{-1} + \alpha^2\beta^2 y_0^3\right] + p^\alpha G_0(k, y_0, y_0^{-1})\end{aligned}$$

where $k \geqslant 2m+1$, $\alpha := \min(\nu_p(\beta^3), \nu_p(\beta\gamma))$, and the coefficients of polynomials F_0, G_0 depend only on α^i, β^i, γ^i, $(\alpha^{-1})^i$, $i = 1, \ldots, 2m+1$.

Corollary 2. *The maximal period of the sequence of PRN's $\{y_n\}$ produced by (3) is equal to $\tau = 2p^{m-\nu}$ if and only if $y_0^2 \not\equiv \alpha \pmod p$.*

Main Results. Having prepared the necessary background presented above, we can obtain the main result of our paper.

Let $\{z_n\}$ be the sequence produced by the recursion 3. For $h \in \mathbb{Z}$, we denote

$$S_N(h, z_0) := \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{hz_n}{p^m}}$$

Theorem 2. *Let the linear-inversive congruential sequence generated by the recursion 3 has the period τ, and let $\nu_p(\beta) = \nu$, $\nu_p(\alpha - z_0^2) = \nu_0$, $\nu_p(h) = s$ $2\nu \leqslant m$. Then we have the following bounds*

$$|S_\tau(h, z_0)| \leqslant \begin{cases} O(m) & if \quad p > 2 \text{ and } \nu_0 < \nu,\ s < m - \nu - \nu_0 \\ & or \quad p = 2,\ \nu_0 < \nu,\ \nu_2(h) < m - 2\nu; \\ 4 \cdot p^{\frac{m+s}{2}} & if \quad \nu_0 \geqslant \nu,\ s < m - 2\nu; \\ \tau & else. \end{cases}$$

Proof. Lemma 2 and its corollaries show that the behavior of the exponential sums on the sequences of PRN's are identical. Thus we consider the sequence generated by 3. And without loss of generality we can assume that $\tau = 2p^{m-\nu}$. By the Corollary 1 we have

$$|S_\tau(h, z_0)| = \left|\sum_{n=0}^{\tau-1} e\left(\frac{hz_n}{p^m}\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{p^\ell-1} e\left(\frac{hz_n}{p^m}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{\substack{k_1=0 \\ k=2k_1}}^{p^\ell-1} e\left(\frac{hz_{2k_1}}{p^m}\right)\right| + \left|\sum_{\substack{k_1=0 \\ k=2k_1+1}}^{p^\ell-1} e\left(\frac{hz_{2k_1+1}}{p^m}\right)\right| = \tag{15}$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{p^\ell-1} e\left(\frac{hF(k)}{p^m}\right)\right| + \left|\sum_{k=0}^{p^\ell-1} e\left(\frac{hG(k)}{p^m}\right)\right| + O(m).$$

where

$$z_{2k} = F(k) := A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + A_3 k^3,$$

$$z_{2k+1} = G(k) := B_0 + B_1 k + B_2 k^2 + B_3 k^3,$$

with

$$A_0 = A_0(z_0) \equiv z_0 \pmod{p^a}$$

$$A_1 = A_1(z_0) \equiv \beta(1-\alpha^{-1}z_0^2) + \alpha^{-1}\beta^2 z_0 + \alpha\gamma {z_0}^{-1}(1-\alpha^{-2}z_0^4) \pmod{p^a}$$

$$A_2 = A_2(z_0) \equiv -\alpha^{-1}\beta^2 z_0 + \alpha^{-2}\beta^2 z_0^3 \pmod{p^a} = -\alpha^{-1}\beta^2 z_0(1-\alpha^{-1}z_0^2)$$

$$B_0 = B_0(z_0) \equiv \beta + \alpha {z_0}^{-1} + \gamma z_0 \pmod{p^a}$$

$$B_1 = B_1(z_0) \equiv \beta(1-\alpha {z_0}^{-2}) - \beta^2 {z_0}^{-1} - z_0\gamma(1-\alpha^2 {z_0}^{-4}) \pmod{p^a}$$

$$B_2 = B_2(z_0) \equiv -\beta^2 {z_0}^{-1} + \alpha\beta^2 {z_0}^{-3} \pmod{p^a} = -\beta^2 {z_0}^{-1}(1-\alpha {z_0}^{-2})$$

$$A_3 = A_3(z_0,k) \equiv B_3(z_0,k) = B_3 \equiv 0 \pmod{p^a},$$

where $a := \min\{\nu_p(\beta^3), \nu_p(\beta,\gamma)\}$.

In the last part of the formula (15) we take into account that the representation z_n as a polynomial on k holds only for $k \geqslant 2m+1$.

Thus by Lemma 2 from[4] we easy obtain

$$|S_\tau(h,z_0)| \leqslant \begin{cases} O(m) & if \quad p>2,\ \nu_0<\nu,\ s<m-\nu-\nu_0, \\ O(m) & if \quad p=2,\ \nu_0<\nu,\ \nu_2(h)<m-2\nu, \\ 4p^{\frac{m+s}{2}} & if \quad \nu_0 \geqslant \nu,\ s<m-2\nu, \\ \tau & else. \end{cases}$$

The constants implied by the O-symbol are absolute. ■

As we said in above, the equidistribution and statistical independency properties of pseudo-random numbers can be analyzed based on the discrepancy of certain point sets in the unit s-dimensional ball.

Theorem 3. *Let $p \equiv 3 \pmod 4$ be a prime number, $z_0, \alpha, \beta, \gamma \in G$, $0 \leqslant \arg z_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \arg\alpha, \arg\beta, \arg\gamma < \frac{\pi}{4}$, and let $0 = \nu_p(\alpha) < \nu_p(\beta) < \nu_p(\gamma)$, $\alpha \not\equiv z_0^2 \pmod p$. Then for the sequence W_k, $W_k = \frac{Z_k}{p}$, $Z_k = (z_k, z_{k+1}, \dots, z_{k+s})$, $k = 0,1,2,\dots$, where are given by recursion (3) whith period $\tau = 2p^{m-\nu}$, $\nu = \nu_p(\beta)$, the discrepancy $D_N^{(s)} = (W_0, W_1, \dots, W_{N-1})$ satisfies inequality*

$$D_\tau^{(s)} \leqslant 2p^{-m+2\nu}\left(\frac{1}{\pi}\log p^{2(m-\nu)} + \frac{3}{5}\right)^3 + 2p^{-2(m+\nu)}.$$

Proof. For $s = 1$ we apply the analogical reasoning as in the proof of Theorem 4 [4] and take into account the result from Theorem 2. Then we derive at once our assertion.

If $s \geqslant 2$ we simply get the inequality (see, the proof of Theorem 1 with $M = p^m$ in above)

$$D_N^{(s)}(X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{p^m} + \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{\overline{h} \in G_{p^m}^s \\ \overline{h} \neq (0,\ldots,0)}} \prod_{i=1}^{s} \min\left(\frac{1}{|\sin \pi \Re h_0|}, \frac{1}{|\sin \pi \Im h_i|}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{p^m} + \frac{1}{p^m} \sum_{\substack{\overline{h} \in G_{p^m}^s \\ \overline{h} \neq (0,\ldots,0)}} \min\left(\frac{1}{|\sin \pi \Re h_i|}, \frac{1}{|\sin \pi \Im h_i|}\right) \frac{1}{N} \left(|S_N^{(s)}| + O\left(N^{\frac{1}{2}}\right)\right),$$

where $S_N^{(s)} = \sum\limits_{n=0}^{N-1} e_{p^m}(\Re \sum\limits_{i=1}^{s} h_i z_{n+i-1})$.

Next, following to argument from Theorem 5[4], we derive the assertion of our theorem for $s = 2, 3, 4$. ■

Conclusion. Theorems proved above show that some methods of construction of nonlinear congruential generators of the pseudo-random real numbers can be used in problems generating of the complex pseudo-random numbers.

1. **Baker R. C.** Diophantine Inequalities / R. C. Baker. – LMS Monographs New Series, Book 1, Oxford University Press, 1986. – 250 p.
2. **Drmota M.** Sequences, discrepancies and applications / M. Drmota, R. F. Tichy. – Berlin : Springer-Verlag, 1997. – 506 p.
3. **Hellekalen P.** General discrepancy estimates the Walsh function system / P. Hellekalen // Acta Arithm. – 1994. – V. 67. – P. 209–218.
4. **Varbanets P.** Generalizations of Inversive Congruential Generator / P. Varbanets, S. Varbanets // Analytic and probabilistic methods in number theory. Proceedings of the 5^{th} international conference in honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, September 4–10, 2011, Vilnius: TEV. – 2012. – P. 265–282.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 76–83

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 80A20, 80A25
УДК 536.46, 534.222

С. К. Асланов, М. Ю. Трофименко
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ТЕМПЕРАТУРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОВОМ ФАКЕЛЕ И НИЗКОЧАСТОТНЫЙ РЕЖИМ ПУЛЬСАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

Асланов С. К., Трофіменко М. Ю. Температурна нестійкість процесів у газовому факелі і низькочастотний режим пульсаційного горіння. Вивчається горіння газового факелу. Знайдені умови, за яких у полум'ї наступає пульсаційний режим. Математично вирішена задача температурної стійкості факелу. Встановлена абсолютна нестійкість, що кількісно пояснює отримані експериментальні результати по низькочастотному режиму пульсаційного горіння.
Ключові слова: газовий факел, низькочастотні пульсації, температурна нестійкість.

Асланов С. К., Трофименко М. Ю. Температурная неустойчивость процессов в газовом факеле и низкочастотный режим пульсационного горения. Изучается горение газового факела. Определены условия, при которых в пламени наступает пульсационный режим. Математически решена задача температурной неустойчивости Установлена абсолютная неустойчивость, количественно объясняющая полученные экспериментальные результаты по низкочастотному режиму пульсационного горения.
Ключевые слова: газовый факел, низкочастотные пульсации, температурная неустойчивость.

Aslanov S. K., Trofimenko M. U. Process temperature instability in a gas torch and a low frequency pulsation mode of combustion. Combustion of a gas torch is studied. Conditions are found under which a pulsation regime in the flame is realized. The problem of temperature stability of the torch is solved mathematically. An effect of absolute instability is revealed that qualitatively explains experimental results relating the low-frequency regime of pulsation combustion.
Key words: gas flare, low-frequency pulsations, temperature instability.

Введение. Неуправляемое развитие процессов горения опасно механическими нагрузками для конструкций камер сгорания либо приводит к прекращению горения (потуханию пламени) [1]. Однако контролируемый в заданных пределах, такой пульсационный режим интенсифицирует процесс горения [2-4], повышая эффективность и полноту сгорания и улучшая экологическую обстановку.

Подавление возникающих пульсаций или поддержание их в заданном интервале параметров требует знания механизма факельного горения газа. Целью данной работы является экспериментальное выяснение условий возбуждения низко-

© Асланов С. К., Трофименко М. Ю., 2013

частотного режима пульсационного горения и создание теории развития температурной неустойчивости в пульсационный режим.

Основные результаты. Нами изучалось горение открытого факела пропан-бутановой смеси (пропан 40%, бутан 60%) вертикально установленной горелки с принудительной подачей реагирующих компонентов (окислитель–воздух) в воздушной атмосфере при нормальных условиях (температура окружающей среды – 20 ^{0}C, давление 768 мм рт.ст.). Измерения проводились на экспериментальной установке, аналогичной описанной в [5]. Смешение осуществлялось в трубке горелки, и в сопле горела предварительно приготовленная однородная смесь.

Полученный факел состоит из двух конусов, внешнего и внутреннего, структура его зависит от соотношения окислитель — горючее в исходной смеси. Условие возникновения регулярного режима пульсационного горения — формирование вершины замкнутого внутреннего конуса [6]. С относительным уменьшением содержания горючего в исходной смеси фронт горения расширяется в зону. Экспериментально найденные [7] распределения температур вдоль оси симметрии указывают на существование в факеле зоны, близкой к линейным размерам внутреннего конуса.

Распределения температур в поперечных сечениях на разных расстояниях от сопла вдоль линии, проходящей через ось симметрии факела, представлены на рисунке 1. Из них видно, что в зоне горения изменения температуры незначительны. Аналогичные результаты получены и для электрических измерений [6,8].

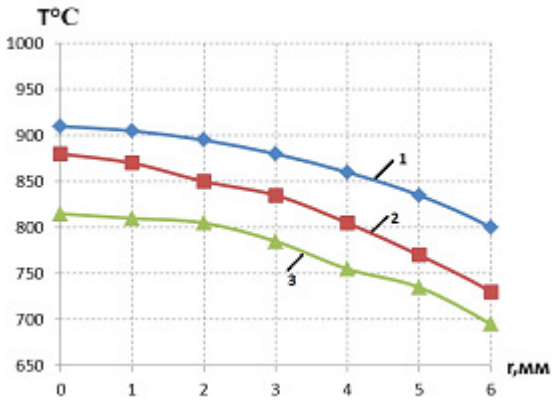

Рис. 1. Распределение температур $T(^0C)$ в горизонтальных сечениях пламени состава V_a(воздух)=5,7 л/мин , V_g(газ)=1 л/мин от расстояния от центра факела r (мм) при удалении от сопла 1 — 8,4 мм, 2 — 13,2 мм, 3 — 21,6 мм

Таким образом, исследуемый факел состоит из двух областей со своей средней температурой в каждой из них, расположенных одна над другой.

Основой теоретического объяснения возбуждения пульсационного горения служит анализ устойчивости происходящих процессов. В случае таковых для газовых факелов первостепенное значение в теоретическом обосновании низко-

частотных режимов, обнаруженных экспериментально, приобретает доказательство существования температурной неустойчивости. В силу относительно большой величины характерного масштаба времени давление в потоке успевает выравниваться. Учитывая слабую искривленность траекторий движения горящих в факеле частиц газа, можно использовать однородную модель течения в факеле, что связано с осреднением всех параметров в поперечном сечении.

Сосредоточив главное внимание на математическом анализе поведения нестационарных температурных возмущений, в интересах аналитического решения задачи об устойчивости придется отказаться от учета возмущений плотности и скорости. В пользу данного приближенного подхода может свидетельствовать противоположная направленность влияния возмущений плотности и скорости на возмущение температуры, что следует из уравнений состояния совершенного газа и неразрывности. В таком случае описание процессов в каждой из областей факела ($j = 1, 2$) будет базироваться на общем уравнении теплопроводности:

$$\rho_j A_{pj} \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} + \mathrm{v}_j \frac{\partial T_j}{\partial x} \right) = \lambda_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + Q_j, \tag{1}$$

где Q — теплопроводность от химреакций, λ — коэффициент теплопроводности, T_j — температура, ρ, v — плотность и скорость течения, осредненные поперек факела, c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Система координат x отождествляется с осью симметрии факела и началом на границе ($x = 0$) между малой областью ($j = 1$) главного тепловыделения $-l_1 \leqslant x \leqslant 0$ и большой областью ($j = 2$) вторичного теплоподвода $0 \leqslant x \leqslant l_2$, так что l_j есть продольная протяженность участком факела.

Возмущения $T'(x, t)$ накладываются на основное стационарное состояние факела $\rho_0(x)$, $\mathrm{v}_0(x)$, $\mathrm{T}_0(x)$, которое подчиняется уравнению

$$\mathrm{v}_0 \frac{dT_0}{dx} = \chi_0 \frac{d^2 T_0}{dx^2} + Q,$$

где $\chi_0 = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p}$, если предположить, что соответствующие химические реакции идут до конца как в невозмущенном, так и в возмущенном состоянии. В результате для температурных возмущений получается уравнение

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathrm{v}_0 \frac{\partial T'}{\partial x} = \chi_0 \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} \tag{2}$$

в рамках сделанных выше замечаний относительно возмущений ρ' и v'.

Учитывая плавную экспериментальную зависимость от x стационарных функций ρ_0, v_0, в интересах аналитического упрощения задачи об устойчивости, можно воспользоваться в (2) средними значениями ρ_0 и v_0 вдоль каждой из областей факела $(-l_1, 0)$ и $(0, l_2)$: $\langle \rho_0 \rangle = \rho_j$, $\langle \mathrm{v}_0 \rangle = \mathrm{v}_j$. Окончательно уравнения теплопереноса запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial T'_j}{\partial t} + \mathrm{v}_j \frac{\partial T'_j}{\partial x} = \chi_j \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где $\chi_j = \dfrac{\lambda_j}{\rho_j c_{pj}}$ — коэффициент температуропроводности. Это позволяет представить возмущения в виде

$$T'_j = A_j^{(+)} \exp\left[a_j^{(+)} x + \omega t \right] + A_j^{(-)} \exp\left[a_j^{(-)} x + \omega t \right], \tag{4}$$

$$a_j^{(\pm)} = \frac{\mathrm{v}_j}{2\chi_j}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\omega}{\mathrm{v}_j^2}\chi_j}\right)$$

с подлежащим определению собственным значением задачи ω. Удерживая в разложении квадратного корня по малому параметру $\left(\omega\chi/\mathrm{v}^2\right)$ два члена, будем иметь

$$a_j^{(+)} = \frac{\mathrm{v}_j}{\chi_j} + \frac{\omega}{\mathrm{v}_j}, a_j^{(-)} = -\frac{\omega}{\mathrm{v}_j}, \tag{5}$$

поскольку $\omega \sim 10^2$Гц, $\mathrm{v}_j \sim 10^2$ см/с, $\chi_j \approx 0,15$ см^2/с.

Для возникающей краевой задачи с сопряженными областями факела необходимы четыре граничных условия. Температурные возмущения среды, возникающие из-за случайных причин внутри процессов сгорания в каждой из двух областей факела, будут взаимодействовать с их внутренней тепловой структурой, соответствующим образом определяя возмущенный характер последней. Это, в конечном итоге, вызывает приращение глобального перепада температур вдоль каждого из участков факела в целом (внутреннего и наружного). С другой стороны, такое суммарное изменение перепада температур всего факела как целого приводит к локальной перестройке его тепловой структуры, образованной возмущениями. Это порождает для каждой зоны факела свою обратную связь, количественное описание механизма которой можно осуществить следующим простым интегральным способом подобно тому, как было сделано для изменения скорости горения при исследовании устойчивости нормального пламени [9].

Указанное приращение глобального перепада температур происходит в результате суммирования по протяженности факела местных температурных приращений $dT_j = \frac{\partial T_j}{\partial x}dx$. Накапливаясь вдоль всей области факела в течение промежутка времени τ_j пока движущаяся по своей траектории частица горящей смеси преодолевает эту область, данные локальные приращения температуры порождают изменение глобального перепада температур во всем факеле. Возникающее приращение глобального перепада, в свою очередь, влияет на развитие указанного накапливания возмущений температуры, формируя положительную обратную связь. Таким образом, указанные перепады температур могут быть выражены следующими интегралами вдоль траектории элементарных частиц: $x = \mathrm{v}_j\,(t' - t)$ для каждой области факела соответственно:

$$\begin{aligned} T_1'\Big|_{x=0} - T_1'\Big|_{x=-l_1} &= \mathrm{v}_1 \int\limits_{t-\tau_1}^{t} \left.\frac{\partial T_1'}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{v}_1(t'-t)} dt', \\ T_2'\Big|_{x=l_2} - T_2'\Big|_{x=0} &= \mathrm{v}_1 \int\limits_{t}^{t+\tau_2} \left.\frac{\partial T_2'}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{v}_2(t'-t)} dt'. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $l_j = \mathrm{v}_j\tau_j$, τ_j — характерное время пребывания горящей частицы в данной зоне факела ($j = 1, 2$).

На границе между областями факела $x = 0$ должна соблюдаться непрерывность потока энергии. Возмущением кинетической энергии $\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right)' = \mathrm{v}\mathrm{v}' = \mathrm{v}^2\left(\frac{\mathrm{v}'}{\mathrm{v}}\right)$ можно пренебречь по сравнению с тепловыми возмущениями, так как в случае факела $\mathrm{v}^2 \ll c_pT$ — теплосодержание газа $\sim$ квадрату скорости звука. Поэтому

остается непрерывность теплового потока на границе области факела $x = 0$ в виде

$$T_1' - \frac{\chi_1}{\mathrm{v}_1}\frac{\partial T_1'}{\partial x} = C\left(T_2' - \frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2}\frac{\partial T_2'}{\partial x}\right), \quad C = \frac{c_{p2}}{c_{p1}}. \tag{7}$$

Поскольку решается задача о внутренней температурной устойчивости процессов в факеле, должны быть исключены возмущения, приходящие извне, т. е. на входе в основание факела следует потребовать

$$T_1' = 0, \tag{8}$$

при $x = -l_1$, что замыкает поставленную краевую задачу (6)–(8) для уравнения (3).

Подставляя решения (4), (5) в эти условия, приходим к следующей системе четырех однородных линейных уравнений для $A_j^{(\pm)}$:

$$D_1 A_1^{(+)} + \exp\left(\omega\frac{l_1}{\mathrm{v}_1}\right) A_1^{(-)} = 0,$$

$$-\frac{\chi_1}{\mathrm{v}_1^2}\omega A_1^{(+)} + \left(1 + \frac{\chi_1}{\mathrm{v}_1^2}\omega\right) A_1^{(-)} + \frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega A_2^{(+)} - \left(1 + \frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega\right) A_2^{(-)} = 0,$$

$$(B_1 - 1)\, A_1^{(+)} - \left(1 + \frac{l_1}{\mathrm{v}_1}\omega\right) A_1^{(-)} = 0,$$

$$(1 - B_2 - D_2)\, A_2^{(+)} + \left\{1 - \left[\frac{l_2}{\mathrm{v}_2}\omega + \exp\left(-\frac{l_2}{\mathrm{v}_2}\omega\right)\right]\right\} A_2^{(-)} = 0,$$

$$B_j = \frac{1 + \frac{\chi_j}{\mathrm{v}_j^2}\omega}{1 + 2\frac{\chi_j}{\mathrm{v}_j^2}\omega}\left\{1 - \exp\left[(-1)^j\left(\frac{\mathrm{v}_j^2}{\chi_j} + 2\omega\right)\frac{l_j}{\mathrm{v}_j}\right]\right\},$$

$$D_j = \exp\left[(-1)^j\left(\frac{\mathrm{v}_j}{\chi_j} + \omega\right)\frac{l_j}{\mathrm{v}_j}\right],$$

с определителем 4-го порядка, который после раскрытия выражается в виде:

$$\Delta = C\omega\left(1 + \frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega\right)\Delta_1\Delta_2. \tag{9}$$

Приравнивая его к нулю, получаем характеристическое уравнение для определения собственного значения ω с устойчивыми корнями: $\omega = 0$ и $\omega = -\frac{\mathrm{v}_2^2}{\chi_2}$, не представляющими интереса. Остальные корни содержаться в $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, которые представляют собой квазимногочлены [10] и окончательно представляются соответственно

$$2 + \left(\frac{l_1}{\mathrm{v}_1} + 3\frac{\chi_1}{\mathrm{v}_1^2}\right)\omega + 2\frac{l_1\chi_1}{\mathrm{v}_1^3}\omega^2 + \frac{\chi_1}{\mathrm{v}_1^2}\omega\exp\left(3\frac{l_1}{\mathrm{v}_1}\omega\right) = 0, \tag{10}$$

$$\left(1+\frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega\right)^2\exp\left[\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{\chi_2}+3\omega\right)\frac{l_2}{\mathrm{v}_2}\right]-\left(1+3\frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega+2\frac{\chi_2 l_2}{\mathrm{v}_2^3}\omega^2\right)\times$$
$$\times\exp\left[\left(\frac{\mathrm{v}_2^2}{\chi_2}+2\omega\right)\frac{l_2}{\mathrm{v}_2}\right]+\left(2\frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega+2\frac{\chi_2^2}{\mathrm{v}_2^4}\omega^2-\right. \tag{11}$$
$$\left.-\,2\frac{\chi_2^2 l_2}{\mathrm{v}_2^5}\omega^3\right)\exp\left(\frac{l_2}{\mathrm{v}_2}\omega\right)-\frac{\chi_2}{\mathrm{v}_2^2}\omega-2\frac{\chi_2^2}{\mathrm{v}_2^4}\omega^{\,2}=0.$$

Введя безразмерное собственное значение $z_1=3\left(\frac{l_1}{\mathrm{v}_1}\right)\omega$, запишем (10) в виде

$$b_0 z_1\exp z_1+b_1 z_1^2+b_2 z_1+b_3=0, \tag{12}$$

что непосредственно позволяет сделать вывод об отсутствии главного члена в квазимногочлене (12), каковым является такой член $z^s\exp(rz)$, у которого r и s одновременно принимают наибольшие значения по сравнению со всеми остальными [10].

Введя другое собственное значение $z_2=\left(\frac{l_2}{\mathrm{v}_2}\right)\omega$, приводим (11) к аналогичному виду

$$\left(d_0 z_2^2+d_1 z_2+d_2\right)\exp(3z_2)+$$
$$+\left(d_4 z_2^3+d_5 z_2^2+d_6 z_2\right)\exp z_2+d_7 z_2^2+d_8 z_2=0, \tag{13}$$

что также позволяет убедиться в отсутствии главного члена. В таком случае по теореме Л. С. Понтрягина [10] оба квазимногочлена (12), (13) будут неустойчивыми, т. е. среди их корней всегда есть корни с положительной действительной частью $\mathrm{Re}z>0$, что будет свидетельствовать о нарастании амплитуды температурных возмущений в факеле со временем. Мнимая часть этих корней дает представление о частоте развивающихся температурных колебаний в газовом факеле. Как следует из z_1 и z_2, имеют место два частотных диапазона в соответствии с оценками $\omega_1\sim\left(\frac{\mathrm{v}_1}{l_1}\right)$ и $\omega_2\sim\left(\frac{\mathrm{v}_2}{l_2}\right)$, которые определяются характерными временами τ_1 и τ_2пребывания горящей смеси в соответствующей области факела.

Экспериментально оптические пульсации пламени наблюдались в работе [5] и регистрируются фотодиодом с выводом потом сигнала на экран осциллографа. Сам факел фотографируется. Анализируя осциллограммы, можно найти частоты пульсации, а по фотографиям сделать заключения о структуре факела (размеры, соотношения между областями и их форма). Учитывая, что в горючей смеси основное содержание составляет воздух (96%), значительная часть которого не подвергается химическим превращениям, можно сказать, что изменение плотности смеси определяется ее нагревом. Из закона сохранения массы можно определить скорость потока в факеле:

$$\mathrm{v}_1=\frac{\rho_0\mathrm{v}_0\sigma_0}{\rho_1\sigma_1},$$

где v_1 — скорость потока в нижней области факела, v_0 — скорость потока в сопле горелки (110 см/с), определенная по показателям ротаметров, ρ_0 — средняя плотность воздуха при 20°C и атмосферном давлении, $\rho_1=\dfrac{0,001293}{(1+0,000367)\,T}$ — средняя плотность воздуха при температуре T в нижней области факела, σ_0 —

площадь сечения сопла горелки (0,95 см^2), σ_1 — площадь сечения нижней области конуса, определенная по фотографии (2,83 см^2):

$$v_1 = 135 \text{ см/с}.$$

Находя из фотографии протяженность вдоль оси симметрии нижней области факела $l = 1,7$ см, мы можем определить частоту пульсации в нижней области факела, равную 79 Гц. Аналогичные расчеты для верхней области факела дают 26 Гц.

Полученные после обработки осциллограмм значения частот составляют 75 Гц и 24 Гц в нижней и верхней областях факела соответственно. Таким образом, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими оценками.

Заключение. При определенном соотношении окислитель—горючее в исходной смеси происходит формирование замкнутого внутреннего конуса (и, в частности, его вершины), что является условием для возникновения низкочастотных пульсаций в пламени. Дальнейшее уменьшение относительного содержания горючего в смеси приводит к образованию двух областей, расположенных одна над другой, с уплощенной границей между ними в факеле. Математически доказано, что температурные возмущения в областях с характерной для каждой области частотой ($\mathrm{Im}\ \omega$) имеют абсолютно неустойчивый характер. Полученные теоретические выводы хорошо подтверждаются результатами эксперимента.

1. **Ларионов А. М.** Автоколебания газа в установках с горением / А. М. Ларионов, Р. Г. Зарипов. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003. – 227 с.

2. **Палиев И. И.** Теплообмен и массообмен частиц в потоке при пульсациях / И. И. Палиев, Б. Д. Кацнельсон, А. А. Тракановский // Труды II Всесоюзной научно-технич. конф. по вибрационному и пульсационному горению. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1963. – С. 150–162.

3. **Накоряков В. Е.** Тепло- и массообмен в звуковом поле / В. Е. Накоряков, А. Т. Бурдуков, А. М. Болдарев, П. В. Терлеев. – Новосибирск: Наука, 1970. – 253 с.

4. **Подымов В. Н.** Прикладные исследования вибрационного горения / В. Н. Подымов, В. С. Северянин, Я. М. Щелоков. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – 219 с.

5. **Трофименко М. Ю.** Об условиях самовозбуждения пульсационного режима горения открытого факела пропан-бутановой смеси / М. Ю. Трофименко, С. К. Асланов, В. В. Калинчак // Химическая и радиационная физика. Том 4 (под ред. И. Г. Ассовского, А. А. Берлипа, Г. Б. Манелиса, А. Г. Мержанова). – М.: ТОРУС ПРЕСС, 2011. – С. 236–241.

6. **Трофименко М. Ю.** Изменения электрической структуры факела пропан-бутановой смеси, отображающие наступление режима пульсационного горения / М. Ю. Трофименко, С. К. Асланов, В. В. Калинчак, В. П. Смоляр // Материалы IX Международной конференции, 1-4 июня 2011. Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Долгоживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере. – 2011. – С. 216–218.

7. **Трофименко М. Ю.** Изменение структуры газового факела при переходе его горения в пульсационный режим / М. Ю. Трофименко, С. К. Асланов, В. П. Смоляр // Материалы IX Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. (NPNJ'2012) 25-31 мая 2012. Алушта. – С. 152–153.

8. **Trofimenko M. Yu.** The electrical structure of propane-butane mixture torch and it's changing at the beginning of pulse burning mode / M. Yu. Trofimenko, S. K. Aslanov, V. V. Kalinchak, V. P. Smolyar // Proceedings of 3^{rd}International Conference on The Physics of Dusty and Burning Plasmas, Odessa, Ukraine, August 25-29, 2010. – P. 135–136.

9. **Асланов С. К.** Исследование устойчивости медленного горения в вязкой газовой смеси / С. К. Асланов // ФГВ (Физика горения и взрыва). – 1966. – Вып. №2. – С. 72–76.

10. **Постников М. М.** Устойчивые многочлены / М. М. Постников. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 84–95

Mathematical Subject Classification: 74R99
УДК 539.375

М. В. Дудик
Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ПРО КОГЕЗІЙНУ ЗОНУ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ У З'ЄДНУВАЛЬНОМУ МАТЕРІАЛІ БІЛЯ ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ

Дудик М. В. Аналітичний розв'язок плоскої задачі про когезійну зону передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини. Дано аналітичний розв'язок задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації когезійної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Зона моделюється лінією розриву переміщення, на якій напруження задовольняють квадратичній умові пластичності. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задача зведена до матричного рівняння Вінера–Хопфа, яке розв'язане за формулами Храпкова. Отримані рівняння для визначення довжини когезійної зони і фазового кута змішування мод навантаження в зоні та вирази для розкриття тріщини в її вершині. Виконано числове дослідження параметрів зони передруйнування.
Ключові слова: міжфазна тріщина, зона передруйнування, когезійна модель.

Дудик М. В. Аналитическое решение плоской задачи о когезионной зоне предразрушения в связующем материале вблизи вершины межфазной трещины. Дано аналитическое решение задачи о расчете в условиях плоской деформации когезионной зоны предразрушения в связующем материале в конце трещины, расположенной на плоской границе раздела двух различных однородных изотропных материалов. Зона моделируется линией разрыва смещения, на которой напряжения удовлетворяют квадратичному условию пластичности. С помощью интегрального преобразования Меллина задача сведена к матричному уравнению Винера–Хопфа, которое решено по формулам Храпкова. Получены уравнения для определения длины когезионной зоны и фазового угла смешивания мод нагрузки в зоне, а также выражения для вычисления раскрытия трещины в ее вершине. Выполнен числовой анализ параметров зоны предразрушения.
Ключевые слова: межфазная трещина, зона предразрушения, когезионная модель.

Dudyk M. V. Analytical solution of the plane problem on the cohesive prefracture zone in conjunctive material near the tip of the interfacial crack. The analytical solution of the problem of calculation under the plain strain conditions of a cohesive prefracture zone in the conjunctive material at the end of the crack on the interface of two different homogeneous isotropic materials is presented. The zone is modeled by the discontinuity line of displacement, on which the tensions meet the quadratic condition of plasticity. By the Mellin integral transformation the problem is taken to the Wiener-Hopf matrix equation, which is solved by the Khrapkov formulas. The equations for the determination of a cohesive zone length and the phase angle of mode mixity in the zone, and some expressions for the calculation of crack opening in its tip are obtained. The numerical

© М. В. Дудик, 2013

analysis of the prefracture zone parameters is executed.
Key words: interfacial crack, prefracture zone, cohesive model.

Вступ. Поширення тріщини по межі поділу з'єднаних матеріалів є однією з найімовірніших причин руйнування композитів. Цьому процесу передує утворення біля вершини міжфазної тріщини зони передруйнування, в якій матеріал внаслідок підвищеного рівня напружень виходить за межу пружності.

На початковому етапі розвитку зона передруйнування може бути ефективно описана в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла [1], що подає зону лінією розриву переміщення, на якій задана деяка умова переходу матеріалу в передруйнівний стан. Зокрема, у випадку крихкого матеріалу в зоні передруйнування переважають відривні деформації, тому вона моделюється лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору відриву матеріалу [2]. Для пластичного матеріалу зону передруйнування моделюють лінією, на якій зазнає стрибка дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює межі текучості матеріалу. Такі моделі більш прийнятні для опису бічних зон у одному із з'єднаних матеріалів [3-7], оскільки їх орієнтація при використанні різних критеріїв вибору напрямку поширення виявляється близькою до напрямків максимуму відривних нормальних або дотичних напружень, в яких переважають відповідні деформації (в залежності від властивостей матеріалу). Проте у випадку міжфазної зони передруйнування немає притаманної бічним зонам варіативності орієнтації, і оскільки через відсутність симетрії в полі напружень біля вершини тріщини зазвичай наявні I і II моди, це вимагає брати до уваги у побудові її моделі стрибки як відривних, так і зсувних деформацій. Такі ефекти враховані в когезійній моделі міжфазної тріщини, що стрімко розвивалась впродовж останніх двох десятиліть [8-14], і в деяких інших моделях [15, 16].

В когезійній моделі вводиться певна потенціальна функція, яка визначає зв'язок напружень зі стрибками переміщення. Складність визначальних рівнянь у когезійній зоні призвела до того, що їх розв'язання здійснюється головним чином числовими методами.

В даній роботі виконано аналітичний розрахунок міжфазної зони передруйнування в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла з використанням для напружень притаманної когезійній моделі квадратичної умови передруйнування. Задача зведена до матричного рівняння Вінера–Хопфа, яке розв'язано за допомогою формул Храпкова. Знайдено рівняння для визначення довжини зони передруйнування, фазового кута навантаження в ній та розкриття тріщини в її вершині.

Основні результати.

1. Постановка задачі

В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про визначення початкової зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі біля вершини міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох пружних однорідних ізотропних матеріалів з модулями Юнґа E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2. Нехтуючи товщиною з'єднувального прошарку, моделюватимемо зону лінією розриву переміщення, на якій у відповідності з когезійною моделлю нормальне і дотичне

напруження задовольняють умову [14]

$$\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{\tau_0}\right)^2 = 1, \tag{1}$$

де σ_0, τ_0 – опори відриву та зсуву з'єднувального матеріалу, що експериментально визначаються як середні значення нормального і дотичного напружень у зоні при відповідній моді навантаження однорідного матеріалу.

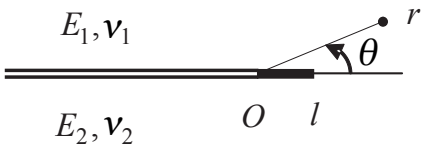

Рис. 1.

На початку розвитку довжина зони передруйнування l значно менша від довжини тріщини L та всіх інших розмірів тіла, і оскільки напружено-деформований стан досліджується в околі зони, то вихідна задача зводиться до задачі про лінію розриву скінченної довжини, що поширюється з вершини півнескінченної міжфазної тріщини по межі поділу двох пружних півплощин (рис. 1). На нескінченості формулюється умова можливості зшивання на відстанях $l \ll r \ll L$ шуканого розв'язку з розв'язком аналогічної задачі теорії пружності без лінії розриву, який відомий з робіт [17-20] і характеризується просторовими осциляціями переміщень і напружень при наближенні до вершини тріщини. Враховуючи умову (1) та вважаючи береги тріщини вільними від напружень, проходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з граничними умовами

$$\theta = -\pi \bigcup \pi: \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \tag{2}$$

$$\theta = 0: \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \tag{3}$$

$$\theta = 0,\ r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0 \cos\psi(r),\ \tau_{r\theta} = \tau_0 \sin\psi(r);$$

$$\theta = 0,\ r > l: \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0; \tag{4}$$

$$\theta = 0,\ \ r \to \infty: \quad \sigma_\theta \sim C_1 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} + \bar{C}_1 r^{-\frac{1}{2}-i\omega},\ \tau_{r\theta} \sim C_2 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} + \bar{C}_2 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \tag{5}$$

де $\langle f \rangle$ позначає стрибок величини f; $\psi(r)$ — фазовий кут напруження в зоні передруйнування, який в подальшому через малість її розмірів і для спрощення розв'язання задачі вважатимемо сталим і рівним його середньому значенню ψ;

$$C_1 = e' K L^{-i\omega},\ \ C_2 = -iC_1,\ \ K = K_I + iK_{II};$$

риска над C_1 і C_2 означає комплексне спряження; K — комплексний коефіцієнт напружень [20];

$$e' = \frac{1}{\sqrt{8\pi \cdot (1-\beta^2)}},\ \ \omega = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1-\beta}{1+\beta},\ \ \beta = \frac{(1+e\kappa_2) - (e+\kappa_1)}{(1+e\kappa_2) + (e+\kappa_1)};$$

$$e = \frac{E_1}{E_2}\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}, \quad \kappa_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Передбачається виконання умови $\cos\psi \geqslant 0$, необхідної для відривного характеру нормального напруження в зоні передруйнування.

Розв'язок сформульованої крайової задачі будемо шукати у вигляді суми наступних двох задач. Перша відрізняється від неї тим, що замість першої пари умов в (4) використовуємо умови

$$\theta = 0, \quad r < l: \quad \sigma_\theta = \sigma_0\cos\psi - C_1 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} - \bar{C}_1 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_0\sin\psi - C_2 r^{-\frac{1}{2}+i\omega} - \bar{C}_2 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}, \tag{6}$$

а на нескінченості напруження спадають як $o(1/r)$. Друга задача — аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий [17-20], тому завдання полягає у розв'язанні першої задачі.

2. Розв'язання задачі

Для побудови розв'язку застосуємо інтегральне перетворення Мелліна

$$f^*(p,\theta) = \int_0^\infty f(r,\theta) r^p dr$$

до рівнянь рівноваги, умови сумісності деформацій, закону Гука і граничних умов (2-3). Врахувавши умови (6) і другу пару умов (4), прийдемо до матричного рівняння Вінера–Хопфа першої задачі у смузі $-\varepsilon_1 < \mathrm{Re}p < \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — достатньо малі додатні числа), що містить уявну вісь:

$$\mathbf{\Phi}^+(p) + \mathbf{F}(p) = -Atgp\pi G(p)\mathbf{Q}(p)\mathbf{\Phi}^-(p), \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^+(p) \\ \Phi_2^+(p) \end{pmatrix} = \int_1^\infty \begin{pmatrix} \sigma_\theta(\rho l, 0) \\ \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \end{pmatrix} \rho^p d\rho,$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1^-(p) \\ \Phi_2^-(p) \end{pmatrix} = \frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_\theta \\ u_r \end{pmatrix}_{r=\rho l} \rho^p d\rho,$$

$$\mathbf{F}(p) = \begin{pmatrix} F_1(p) \\ F_2(p) \end{pmatrix},$$

$$F_1(p) = \frac{\sigma_0\cos\psi}{p+1} - \frac{C_1 r^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega} - \frac{\bar{C}_1 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega}, \quad F_2(p) = \frac{\tau_0\sin\psi}{p+1} - \frac{C_2 r^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega} - \frac{\bar{C}_2 r^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega},$$

$$G(p) = \frac{4(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos^2 p\pi}{(e+\kappa_1)^2 + (1+e\kappa_2)^2 + 2(e+\kappa_1)(1+e\kappa_2)\cos 2p\pi},$$

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{I} + g(p)\mathbf{J}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

де $\mathbf{I}$ — одинична матриця, $g(p) = i\beta tgp\pi$, а матриця $\mathbf{J}$ володіє необхідною для факторизації властивістю $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$.

Матричний коефіцієнт рівняння (7) відноситься до типу, розглянутого Храпковим [21, 22], і може бути факторизований за формулами:

$$\mathbf{Q}(p)=\mathbf{Q}^{+}(p)\mathbf{Q}^{-}(p)\ \ (\mathrm{Re}p=0),\ \ \mathrm{Q}^{\pm}(p)=r^{\pm}(p)\left[ch\theta^{\pm}(p)\mathbf{I}+sh\theta^{\pm}(p)\mathbf{J}\right],$$

де елементи матриць $\mathbf{Q}^{+}(p)$ і $\mathbf{Q}^{-}(p)$ аналітичні у півплощинах $\mathrm{Re}p<0$ і $\mathrm{Re}p>0$ відповідно. Функції $r^{\pm}(p)$ і $\theta^{\pm}(p)$ задовольняють скалярним функціональним рівнянням

$$r^{+}(p)r^{-}(p)=\sqrt{1-g^{2}(p)},\ \ \theta^{+}(p)+\theta^{-}(p)=arthg(p)\ \ (Rep=0),$$

які мають розв'язки [23]:

$$r^{\pm}(p)=\left(1-\beta^{2}\right)^{1/4}\exp\left[\mp\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln H_{1}(t)}{it-p}dt\right],\ \ H_{1}(t)=\frac{1-\beta^{2}th^{2}\pi t}{1-\beta^{2}},$$

$$\theta^{\pm}(p)=\frac{\pm p}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln H_{2}(t)}{t+ip}dt,\ \ H_{2}(t)=\frac{arth(\beta\cdot th\pi t)}{t}.$$

Скалярні коефіцієнти рівняння (7) факторизуються за формулами [23, 24]:

$$G(p)=\frac{G^{+}(p)}{G^{-}(p)}\ \ (Rep=0)\,,\ \ \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases}G^{+}(p),\ Rep<0,\\ G^{-}(p),\ Rep>0;\end{cases}$$

$$tgp\pi=\frac{p}{K^{+}(p)K^{-}(p)},\ K^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(\frac{1}{2}\mp p)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера). Це дозволяє переписати рівняння Вінера–Хопфа (7) у вигляді:

$$\frac{K^{+}(p)}{pG^{+}(p)}\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)(\mathbf{\Phi}^{+}(p)+\mathbf{F}(p))=-\frac{A}{K^{-}(p)G^{-}(p)}\mathbf{Q}^{-}(p)\mathbf{\Phi}^{-}(p)\ \ (Rep=0),\qquad(8)$$

де $\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)$ — обернена до $\mathbf{Q}^{+}(p)$ матриця:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)=[\mathbf{Q}^{+}(p)]^{-1}=\left[r^{+}(p)\right]^{-1}\left[ch\theta^{+}(p)\mathbf{I}-sh\theta^{+}(p)\mathbf{J}\right].$$

Розщепивши другий доданок в (8) за формулою

$$\frac{K^{+}(p)}{pG^{+}(p)}\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)\mathbf{F}(p)=\tilde{\mathbf{F}}^{+}(p)-\tilde{\mathbf{F}}^{-}(p),$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{+}(p)=\frac{1}{p+1}\left[\frac{K^{+}(p)\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)}{pG^{+}(p)}+\frac{K^{+}(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(-1)}{G^{+}(-1)}\right]\begin{pmatrix}\sigma_{0}\cos\psi\\ \tau_{0}\sin\psi\end{pmatrix}-$$

$$-\frac{l^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega}\left[\frac{K^{+}(p)\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)}{pG^{+}(p)}+\frac{K^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}+i\omega)G^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)}\right]\begin{pmatrix}C_{1}\\ C_{2}\end{pmatrix}-$$

$$-\frac{l^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega}\left[\frac{K^{+}(p)\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(p)}{pG^{+}(p)}+\frac{K^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}-i\omega)G^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)}\right]\begin{pmatrix}\bar{C}_{1}\\ \bar{C}_{2}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^-(p)=\frac{1}{p+1}\frac{K^+(-1)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-1)}{G^+(-1)}\begin{pmatrix}\sigma_0\cos\psi\\ \tau_0\sin\psi\end{pmatrix}-\frac{l^{-\frac{1}{2}+i\omega}}{p+\frac{1}{2}+i\omega}\times$$
$$\times\frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}+i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}-$$
$$-\frac{l^{-\frac{1}{2}-i\omega}}{p+\frac{1}{2}-i\omega}\frac{K^+(-\frac{1}{2}-i\omega)\tilde{\mathbf{Q}}^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}-i\omega)G^+(-\frac{1}{2}-i\omega)}\begin{pmatrix}\bar{C}_1\\ \bar{C}_2\end{pmatrix},$$

отримаємо замість (8) рівняння

$$\frac{K^+(p)}{pG^+(p)}\tilde{\mathbf{Q}}^+(p)\mathbf{\Phi}^+(p)+\tilde{\mathbf{F}}^+(p)=-\frac{A}{K^-(p)G^-(p)}\mathbf{Q}^-(p)\mathbf{\Phi}^-(p)+\tilde{\mathbf{F}}^-(p),(\mathrm{Re}p=0).\quad(9)$$

Ліва частина рівняння (9) аналітична у півплощині $Rep<0$, а права — у півплощині $Rep>0$. Тоді, у відповідності з принципом аналітичного продовження, повинна існувати єдина функція, аналітична у всій комплексній площині, яка дорівнює лівій і правій частині цього рівняння у відповідних півплощинах.

Враховуючи особливості поведінки напружень і переміщень біля вершини міжфазної зони передруйнування, за теоремою абелевого типу знаходимо асимптотики:

$$\Phi_1^+(p)\sim\frac{(\kappa_1+e)+(1+e\kappa_2)}{2(e+\kappa_1)}\cdot\frac{k_1}{\sqrt{-2pl}},\ \ \Phi_2^+(p)\sim\frac{(\kappa_1+e)+(1+e\kappa_2)}{2(1+\kappa_1)}\cdot\frac{k_2}{\sqrt{-2pl}},$$

$$\Phi_1^-(p)\sim-\frac{1+e\kappa_2}{1+\kappa_1}\cdot\frac{k_1}{\sqrt{2pl}},\ \ \Phi_2^-(p)\sim-\frac{(\kappa_1+e)(1+e\kappa_2)}{(1+\kappa_1)^2}\cdot\frac{k_2}{\sqrt{2pl}}(p\to\infty),\qquad(10)$$

де k_1, k_2 — коефіцієнти інтенсивності напружень в кінці зони. Взявши також до уваги обмеженість на нескінченості функцій $G^{\pm}(p)$і $\mathbf{Q}^{\pm}(p)$ та асимптотики $K^+(p)\sim\sqrt{-p}\,(p\to\infty,\ Rep<1/2)$ і $K^-(p)\sim\sqrt{p}\,(p\to\infty,\ Rep>-1/2)$, доходимо висновку, що ліва і права частини рівняння (9) прямують до нуля при $p\to\infty$. Тому за теоремою Ліувілля єдина аналітична функція тотожно дорівнює нулю у всій комплексній площині, що дозволяє знайти точний розв'язок рівняння (9):

$$\mathbf{\Phi}^+(p)=-\frac{pG^+(p)}{K^+(p)}\mathbf{Q}^+(p)\tilde{\mathbf{F}}^+(p),\mathbf{\Phi}^-(p)=\frac{K^-(p)G^-(p)}{A}\tilde{\mathbf{Q}}^-(p)\tilde{\mathbf{F}}^-(p),\qquad(11)$$

де $\tilde{\mathbf{Q}}^-(p)=[\mathbf{Q}^-(p)]^{-1}$.

3. Визначення параметрів зони передруйнування

Порівнюючи асимптотики розв'язків (11) при $p\to\infty$ з (10), знаходимо коефіцієнти інтенсивності напружень в кінці лінії розриву:

$$k_1=-\frac{(1+\kappa_1)\sqrt{2l}}{A\,(1+e\kappa_2)}\cdot\left\{\tilde{Q}_{11}^-(\infty)\cdot X+\tilde{Q}_{12}^-(\infty)\cdot Y\right\},$$
$$k_2=-\frac{(1+\kappa_1)^2\sqrt{2l}}{A(\kappa_1+e)(1+e\kappa_2)}\cdot\left\{\tilde{Q}_{21}^-(\infty)\cdot X+\tilde{Q}_{22}^-(\infty)\cdot Y\right\},$$

де

$$X=\frac{K^+(-1)}{G^+(-1)}\left[\tilde{Q}_{11}^+(-1)\sigma_0\cos\psi+\tilde{Q}_{12}^+(-1)\tau_0\sin\psi\right]-$$

$$-2Re\left(Nl^{-\frac{1}{2}+i\omega}\left[\tilde{Q}^{+}_{11}(-\frac{1}{2}-i\omega)C_1+\tilde{Q}^{+}_{12}(-\frac{1}{2}-i\omega)C_2\right]\right),$$

$$Y=\frac{K^{+}(-1)}{G^{+}(-1)}\left[\tilde{Q}^{+}_{21}(-1)\sigma_0\cos\psi+\tilde{Q}^{+}_{22}(-1)\tau_0\sin\psi\right]-$$

$$-2Re\left(Nl^{-\frac{1}{2}+i\omega}\left[\tilde{Q}^{+}_{21}(-\frac{1}{2}-i\omega)C_1+\tilde{Q}^{+}_{22}(-\frac{1}{2}-i\omega)C_2\right]\right),$$

$$N=\frac{K^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)}{(\frac{1}{2}+i\omega)G^{+}(-\frac{1}{2}-i\omega)}.$$

Прирівнюючи k_1, k_2 до нуля через вимогу обмеженості напружень в кінці зони передруйнування, приходимо до системи лінійних однорідних рівнянь відносно X та Y:

$$\tilde{Q}^{-}_{11}(\infty)\cdot X+\tilde{Q}^{-}_{12}(\infty)\cdot Y=0,\tilde{Q}^{-}_{21}(\infty)\cdot X+\tilde{Q}^{-}_{22}(\infty)\cdot Y=0.$$

Оскільки визначник цієї системи $\det\tilde{\mathbf{Q}}^{-}(\infty)=[r^{-}(\infty)]^{-2}=(1-\beta^2)^{-1/2}$ відмінний від нуля, то вона має лише тривіальний розв'язок $X=Y=0$, який приводить до трансцендентних рівнянь для визначення відносної довжини $x=l/L$ і фазового кута когезійного напруження ψ, що після перетворень можуть бути записані у вигляді, зручному для числового розв'язання:

$$x=C\sigma^2\left\{\frac{\cos^2(\omega\ln x+\varphi+\xi+\zeta)}{n^2}+\sin^2(\omega\ln x+\varphi+\xi+\zeta)\right\},$$

$$tg\psi=n\cdot tg(\omega\ln x+\varphi+\xi+\zeta),$$

де

$$C=\pi\left[\frac{2e'\,|N|\cdot|q'|\,G^{+}(-1)}{q}\right]^2,$$

$$q=q_0^2+q_1^2,\quad q'=(q_0\tilde{q}_0+q_1\tilde{q}_1)+i(q_1\tilde{q}_0+q_0\tilde{q}_1),$$

$$q_0=\tilde{Q}^{+}_{11}(-1),\ \ q_1=\tilde{Q}^{+}_{12}(-1),\tilde{q}_0=\tilde{Q}^{+}_{11}(-\frac{1}{2}-i\omega),\ \ \tilde{q}_1=\tilde{Q}^{+}_{12}(-\frac{1}{2}-i\omega);$$

$\sigma=\frac{|K_I+iK_{II}|}{\tau_0\sqrt{L}}$ — безрозмірний параметр зовнішнього навантаження, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{K_{II}}{K_I}$ — його фазовий кут; $n=\sigma_0/\tau_0$, $\xi=\arg N$, $\zeta=\arg q'$. Випадкам крихкого або пластичного з'єднувального матеріалу відповідають граничні переходи $n\to 0$, $\psi\to 0$ і $n\to\infty$, $\psi\to\pm\pi/2$, які приводять до моделей, розглянутих в [25, 26].

Отриманий вище розв'язок дозволяє визначити розкриття тріщини у її вершині як результат стрибків компонент переміщення в зоні передруйнування, що виражаються через трансформанту $\mathbf{\Phi}^{-}(0)$:

$$\delta u_\theta(0,0)=-\left\langle\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^{*}\right\rangle\Bigg|_{\ p=0,\theta=0}=-\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}l\Phi_1^{-}(0),$$

$$\delta u_r(0,0)=-\left\langle\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^{*}\right\rangle\Bigg|_{\ p=0,\theta=0}=-\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}l\Phi_2^{-}(0).$$

Використовуючи (11), після перетворень знайдемо остаточно

$$\delta u_\theta(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1}\frac{2e'\,|N|\cdot|\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}}\sigma\sqrt{x}\cos(\omega\ln x+\varphi+\xi+\zeta_1-2\eta),$$

$$\delta u_r(0,0) = -\frac{4(1-\nu_1^2)L}{E_1}\frac{2e'\,|N|\cdot|\tilde{q}|}{A\sqrt{\pi(1-\beta^2)}}\sigma\sqrt{x}\sin(\omega\ln x+\varphi+\xi+\tilde{\zeta}-2\eta),$$

де $\tilde{q}=\tilde{q}_0+i\tilde{q}_1$, $\tilde{\zeta}=\arg\tilde{q}$, $\eta=arctg2\omega$. Визначення стрибків нормального і дотичного переміщень в зоні передруйнування може бути використано для пошуку граничного навантаження за прийнятою в моделі когезійної зони умовою [8-10]

$$\left(\frac{\delta u_\theta}{\delta_n}\right)^2+\left(\frac{\delta u_r}{\delta_\tau}\right)^2=1,$$

де δ_n, δ_τ — їх критичні значення, досягнення яких приводить до зрушення тріщини при суто відривному або зсувному характері деформацій у зоні.

Зазначимо, що відривний характер нормального напруження у зоні передруйнування передбачає виконання умови $\delta u_\theta(0,0)\geqslant 0$. У випадку ж, коли нормальне напруження в зоні має стискальний характер, більш прийнятним може бути моделювання зони передруйнування лінією ковзання зі зчепленням [26].

4. Аналіз отриманих результатів

Результати числових розрахунків параметрів зони передруйнування наведено на рис. 2-4 (на всіх рисунках, позначених як *a*, показана відносна довжина x; *b* — фазовий кут ψ навантаження у зоні; *c*, *d* — приведені нормальне $\delta u'_\theta=\frac{\delta u_\theta(0,0)}{L}\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$ і дотичне $\delta u'_r=\frac{\delta u_r(0,0)}{L}\frac{E_1}{4(1-\nu_1^2)}$розкриття). Всі обчислення виконано при $E_1/E_2=0,25$, $\nu_1=\nu_2=0,3$.

Згідно з розрахунками, довжина зони передруйнування та її розкриття у вершині тріщини нелінійно зростають за величиною зі збільшенням зовнішнього навантаження, заданого безрозмірним параметром σ (рис. 2, *a*, *c*, *d*). Залежність фазового кута навантаження у зоні від σ менш виражена, проте також спостерігається його повільне зростання зі збільшенням абсолютного значення навантаження (рис. 2, *b*).

На рис. 3 подано залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута зовнішнього навантаження φ. Згідно з рис. 3, *a*, довжина зони у цій залежності має мінімум у випадку більш пластичного ($n>1$) і максимум - у випадку більш крихкого ($n<1$) з'єднувального матеріалу. Фазовий кут напружень ψ у зоні передруйнування зростає синхронно з ростом фазового кута зовнішнього навантаження, залишаючись, проте, меншим від нього (рис. 3.*b*). Дотичне і нормальне розкриття мають різну поведінку при зміні фазового кута навантаження: дотичне розкриття зростає з ростом φ, тоді як нормальне розкриття при $n\leq 1$ має максимум, а при $n>1$ його залежність від φ є менш вираженою і немонотонною (рис. 3, *c*).

На параметри зони передруйнування суттєво впливає відношення опорів відриву і зсуву з'єднувального матеріалу $n=\sigma_0/\tau_0$. Як видно з рис. 4, *a* і 4, *c*, зі збільшенням опору відриву при сталому параметрі навантаження довжина зони передруйнування і розкриття тріщини у вершині зменшуються. Фазовий кут навантаження при $\varphi\leq 0$ є від'ємним і швидко спадає з ростом n, тоді як при $\varphi>0$ він додатний і слабо залежить від n (рис. 4, *b*).

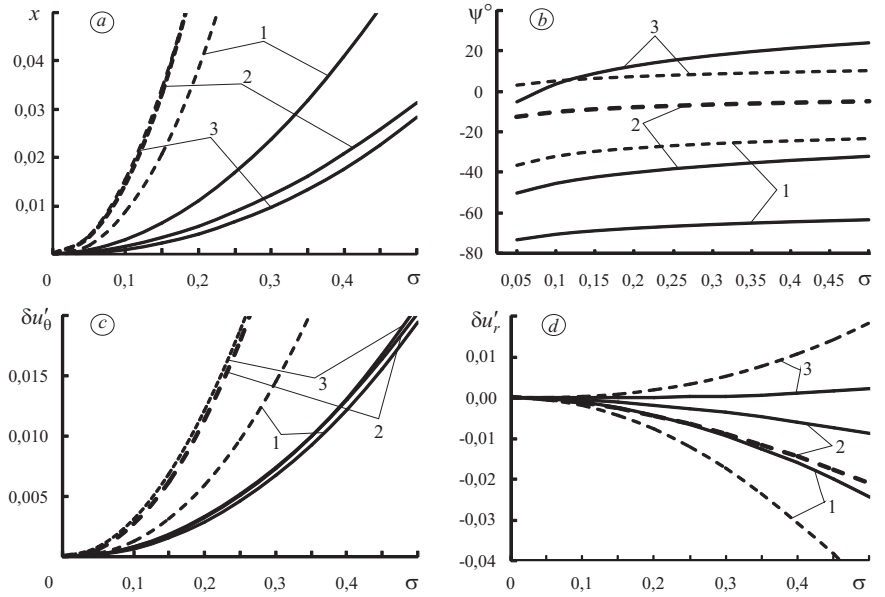

Рис. 2. Залежність параметрів зони передруйнування від безрозмірного параметра навантаження σ. Штрихові лінії — $n = 0,5$; суцільні лінії — $n = 2$. Фазовий кут зовнішнього навантаження: 1) $\varphi = -30°$; 2) $\varphi = 0°$; 3) $\varphi = 30°$

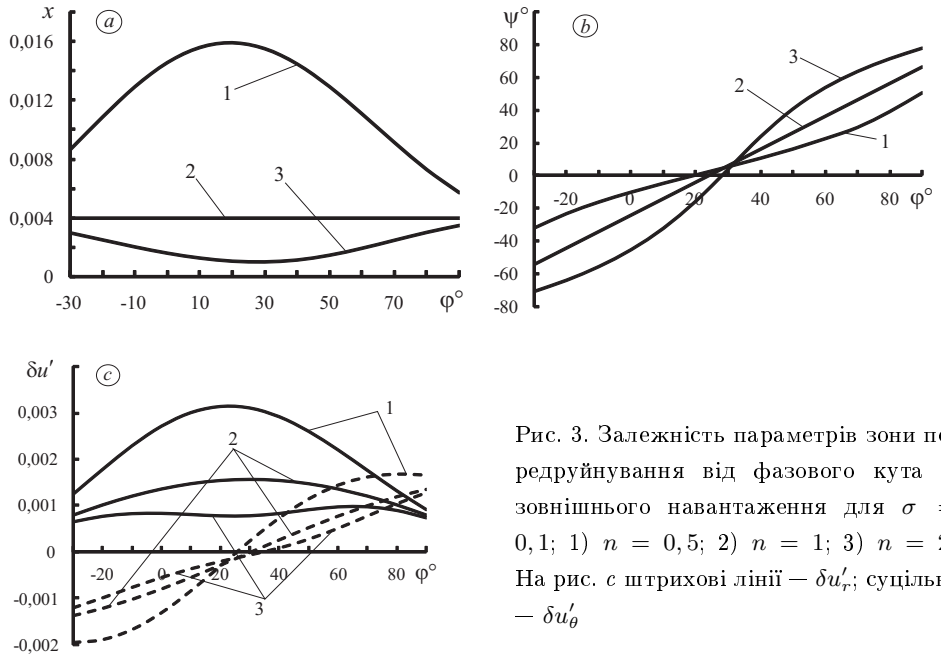

Рис. 3. Залежність параметрів зони передруйнування від фазового кута φ зовнішнього навантаження для $\sigma = 0,1$; 1) $n = 0,5$; 2) $n = 1$; 3) $n = 2$. На рис. *c* штрихові лінії — $\delta u'_r$; суцільні — $\delta u'_\theta$

Виконавши зворотне перетворення Мелліна знайдених у ході розв'язання задачі трансформант напружень, із залученням теореми про лишки можна визначити члени розвинень напружень у асимптотичні ряди в околі вершини тріщини після утворення зони передруйнування. Головний член розвинень визначатиметься нулем функції $G(p)$ в інтервалі $-1 < Rep < 0$, що дає дійсний показник сингулярності напружень, рівний $-1/2$. Таким чином, поява зони передруйнування усуває фізично некоректний осцилюючий характер сингулярності у вершині тріщини, зберігаючи, проте, кореневу особливість.

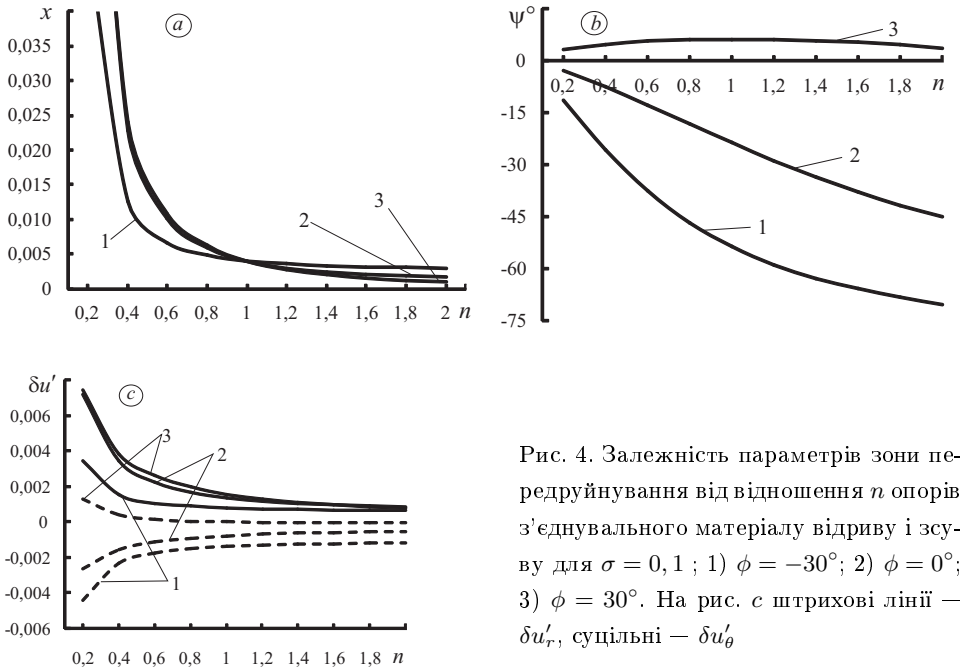

Рис. 4. Залежність параметрів зони передруйнування від відношення n опорів з'єднувального матеріалу відриву і зсуву для $\sigma = 0,1$; 1) $\phi = -30^\circ$; 2) $\phi = 0^\circ$; 3) $\phi = 30^\circ$. На рис. *c* штрихові лінії — $\delta u'_r$, суцільні — $\delta u'_\theta$

Висновки. Методом Вінера–Хопфа знайдено аналітичний розв'язок задачі про розрахунок в умовах плоскої деформації в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла з використанням елементів когезійної моделі параметрів маломасштабної зони передруйнування у з'єднувальному матеріалі в кінці міжфазної тріщини, розташованої на плоскій межі поділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів. Отримані рівняння для визначення довжини зони і параметра змішування мод напружень в ній та формули для обчислення розкриття тріщини в її вершині. Показана можливість їх застосування для визначення граничного навантаження для змішаних мод. Здійснено числовий розрахунок параметрів зони та якісний аналіз їх залежності від зовнішнього навантаження і характеристик з'єднувального матеріалу.

1. **Панасюк В. В.** Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування [текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – №1. – С.49-68.

2. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с трещинами [текст] / В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1980. – 246 с.

3. **Каминский А. А.** О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред [текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2006. – Т.42, №2. – С.14-23.

4. **Каминский А. А.** О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред [текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Кипнис Л.А. // Прикл. механика. – 2007. – Т.43, №10. – С.28-41.

5. **Каминский А. А.** Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге [текст] / А.А. Каминский, М.В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2009. – Т.45, №6. – С.71-79.

6. **Дудик М. В.** Дослідження початкового етапу повороту міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу середовищ [текст] / М.В. Дудик, Ю.В. Діхтяренко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – Т.47, № 5. – С. 53-59.

7. **Діхтяренко Ю. В.** Моделювання початкової пластичної смуги у кутовій точці межі розділу середовищ з міжфазною тріщиною [текст] / Ю.В. Діхтяренко // Вісник Одес. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 76-86.

8. **Tvergaard V.** On the toughness of ductile adhesive joints [text] / V. Tvergaard, J.H. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – V. 44, No. 5. – P.789-800.

9. **Kishimoto K.** Fracture mechanics of bonding interface: a cohesive zone model [text] / K. Kishimoto, M. Omiya, W. Yang // Sensors and Actuations. – 2002. – V. A 99. – P. 198-206.

10. **Tvergaard V.** Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses // Int. Journal of Solids and Structures. – 2003. – V. 40. – P. 5769-5779.

11. **Tvergaard V.** Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids [text] / V. Tvergaard // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – V. 70. – P. 1859-1868.

12. **Jin Z.-H.** Cohesive zone modeling of interface fracture in elastic bi-materials [text] / Z.-H. Jin , C.T. Sun // Engineering Fracture Mechanics. – 2005. – V. 72. – P. 1805-1817.

13. **Sun C. T.** Modeling of composite fracture using cohesive zone and bringing models [text] / C.T. Sun, Z.-H. Jin // Composites Science and Technology. – 2006. – V. 66. – P. 1297-1302.

14. **Lee M. Y.** Determination of cohesive parameters for a mixed-mode cohesive zone model [text] / M.J. Lee, T.M. Cho, W.S. Kim, B.C. Lee, J.J. Lee // Int. Journal of Adhesion & Adhesives. – 2010. – V. 30. – P. 322–328.

15. **Гольдштейн Р.В.** Моделирование трещиностойкости композиционных материалов [текст] / Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2, № 2. – С. 22-39.

16. **Волошко О.І.** Числове дослідження зон передруйнування тріщини в адгезійному прошарку між двома ізотропними матеріалами [текст] / О.І. Волошко, В.В. Лобода // Машинознавство. – 2009. – №12. – С. 9-16.

17. **Erdogan F.** Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks [text] / F. Erdogan // Journal of Applied Mechanics. – 1963. – V. 30. – P. 232-237,).

18. **Rice J. R.** Plane problems of crack in dissimilar media [text] / J.R. Rice, G.C. Sih // Journal of Applied Mechanics. - 1965. – V. 32. - P. 418-423.

19. **England A. H.** A crack between dissimilar media [text] / A.H. England // Journal of Applied Mechanics. - 1965. – V. 32. - P. 400-402.

20. **Rice J. R.** Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks [text] / J.R. Rice // Journal of Applied Mechanics. – l988. – V. 55. – P.98-103.

21. **Храпков А. А.** Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил [текст] / А.А. Храпков // Прикл. математика и механика. – 1971. – Т. 35, вып. 4. – С. 677-689.

22. **Khrapkov A. A.** Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems [text] / A.A. Khrapkov. - SPb.: B.E. Vedeneev VNIIG Publishing House, 2001. – 144 p.

23. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи [текст] / Ф.Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

24. **Нобл Б.** Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных [текст] /Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279с.

25. **Каминский А. А.** О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред [текст] / А.А. Каминский, Л. А. Кипнис, В.О. Колмакова // Прикл. механика. – 1999. – Т. 35, №1. – С. 63-68.

26. **Каминский А. А.** Линия скольжения в конце разреза на границе раздела сред [текст] / А.А. Каминский, Л. А. Кипнис, В.О. Колмакова // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, №6. – С. 86-91.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 96–100

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.3.01

О. Ф. Кривий
Одеська національна морська академія

ВЗАЄМОДІЯ МІЖФАЗНИХ ТУНЕЛЬНИХ ТРІЩИНИ ТА ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО–ОДНОРІДНОМУ АНІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРІ

Кривий О. Ф. Взаємодія міжфазних тріщини та включення в кусково-однорідному анізотропному просторі. Досліджено взаємодію міжфазних тріщини та включення, яке повністю зчеплене із кусково-однорідним анізотропним простором. Розглянуто випадок узагальненої плоскої деформації, коли задача не розпадається на плоску і антиплоску складову. Проблема визначення контактних напружень на включенні і зміщень берегів тріщини зведена до системи шести сингулярних інтегральних рівнянь. Встановлені асимптотики поведінки напружень у вершинах тріщини та включення, що дозволило застосувати до розв'язання вказаних систем метод ортогональних многочленів і обґрунтувати його збіжність. В результаті отримані залежності узагальнених коефіцієнтів напружень у вершинах тріщини і включення від відносної відстані між ними.

Ключові слова: анізотропний простір, кусково-однорідний, тріщина, включення, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнт інтенсивностей.

Кривой А. Ф. Взаимодействие межфазных трещины и включения в кусочно-однородном анизотропном пространстве. Исследовано взаимодействие межфазных трещины и включения, полностью сцепленного с кусочно-однородным анизотропным пространством. Рассмотрен случай обобщенной плоской деформации, когда задача не распадается на плоскую и антиплоскою составляющую. Проблема определения контактных напряжений на включении сведена к системе шести сингулярных интегральных уравнений. Установлены асимптотики напряжений в вершинах трещины и включения, что позволило применить для решения указанной системы метод ортогональных многочленов и обосновать его сходимость. В результате получены зависимости обобщенных коэффициентов интенсивностей напряжений и включений от относительного расстояния между ними.

Ключевые слова: анизотропное пространство, кусочно-однородное, трещина, включение, сингулярные интегральные уравнения, коэффициент интенсивностей.

Kryvyy O. F. Interaction of interfacial cracks and inclusion in a piecewise-homogeneous anisotropic space. The interaction of interfacial cracks and inclusions, fully adhesion with piecewise homogeneous anisotropic space. Consider the case of generalized plane strain, when the task does not split on a plane and antiplane component. The problem of determining of contact stresses on the inclusion is reduced to a system of six singular integral equations. The asymptotic behavior of stresses at the crack tip and inclusion, which allowed apply for a solving this system the orthogonal polynomials method and substantiate its convergence. As a result, the dependences of the generalized stress intensity factor at the crack and the inclusion of the relative distance between them.

Key words: anisotropic space, piecewise-homogeneous space, cracks, inclusions, singular integral equations, stress intensity factor.

© Кривий О. Ф., 2013

Вступ. Задачі про дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядались багатьма авторами. При цьому дослідження, в основному, обмежувались плоскими випадками [1-3]. В роботах [4-6] за допомогою побудованих сингулярних інтегральних співвідношень отримані розв'язки задач відповідно про міжфазні тунельні тріщини або міжфазні тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі, який знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація [7]). В цій роботі вказані результати узагальнені на випадок двох різних міжфазних тунельних дефектів: тріщини і абсолютно жорсткого включення, зчепленого із півпросторами.

Основні результати.

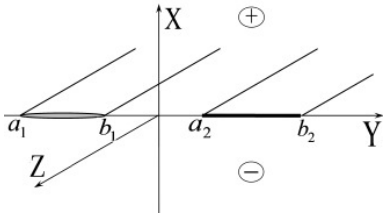

Рис. 1

1. Постановка і зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь (CIP)

Нехай простір, який складається із двох різних анізотропних півпросторів, не повністю зчеплених в плоскості $x = 0$, знаходиться в двовимірному напружено–деформованому стані (без наявності площин пружної симетрії [7]). В площині $x = 0$ містяться наскрізні тунельні тріщина і жорстке включення, які займають відповідно смуги (рис. 1)

$$\Pi_j = \{(y,z) \mid y \in \ell_j = (a_j, b_j),\ z \in (-\infty, \infty)\}, a_1 < b_1 < a_2 < b_2.$$

Нехай включення зчеплене з півпросторами. На нескінченності прикладене навантаження, яке викликає навантаження на тріщині $\{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\}|_{x=\pm 0} = \{\sigma_k^{\pm}(y)\}^3$, $y \in \ell_1$, і на включенні із рівнодійною $P = (\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2, 0)$, а також забезпечує двовимірний стан. Положення граней включення після деформації при $x = \pm 0$ описується функціями $\xi^{\pm}(y) = \varepsilon + y\delta + \xi_*^{\pm},\ y \in \ell_2$, де функції $\xi_*^{\pm}(y)$ задають форму включення відповідно при $x = \pm 0$, $\varepsilon, \delta-$ відповідно поступальні і кругові переміщення включення

Нехай $\{\chi_k^{\pm}(y)\}^6 = \{\langle\sigma_x\rangle^{\pm}, \langle\tau_{xz}\rangle^{\pm}, \langle\tau_{xz}\rangle^{\pm}, \langle u'\rangle^{\pm}, \langle v'\rangle^{\pm}, \langle w'\rangle^{\pm}\}$ стрибки і суми напружень і похідних переміщень в площині $x = 0$, тоді, враховуючи умови неперервності напружень і переміщень поза дефектами: $\chi_k^-(y) = 0,\ y \notin \ell_1 \cup \ell_2\ , k = \overline{1,6}$, і скориставшись сингулярними інтегральними співвідношеннями [5], відносно невідомих стрибків переміщень $\eta_1 = \{\eta_{1k}\}^3 = \{\chi_k^-\}_{k=4}^6$, на тріщині і невідомих стрибків напружень на включенні $\eta_2 = \{\eta_{2k}\}^3 = \{\chi_k^-\}^3, y \in \ell_2$ отримаємо таку систему CIP

$$C_*^{(j)}\eta_j(y) + S_*^{(j)}\Gamma_{\ell_j}[\eta_j] + S_0^{(j)}\Gamma_{\ell_{3-j}}[\eta_{3-j}] = q^{(j)}(y),\ \ y \in \ell_j,\ j = 1,2, \qquad (1)$$

де

$$C_*^{(1)} = \{c_{kj}\}_{j=4,5,6}^{k=1,23}, \;\; S_*^{(1)} = \{s_{kj}\}_{j=4,5,6}^{k=1,2,3}, \;\; S_0^{(1)} = \{s_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=1,23}, C_*^{(2)} = \{c_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=4,5,6},$$

$$S_*^{(2)} = \{s_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=4,5,6}, S_0^{(2)} = \{s_{kj}\}_{j=4,5,6}^{k=4,5,6}, C_0 = \{c_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=1,2,3}, S_0 = \{s_{kj}\}_{j=1,2,3}^{k=1,2,3},$$

$$q^{(1)} = \{q_{1k}\}^3 = \chi_*^+ - C_0\chi_*^- - S_0\Gamma_{l_1}[\chi_*^-], \; \chi_*^\pm = \{\chi_k^\pm(y)\}^3, \Gamma_\ell[f] \equiv \frac{1}{\pi}\int_\ell \frac{f(t)}{t-y}dt,$$

$$q^{(2)} = \{q_{2k}\}^3, q_{2k} = \delta_{1,k}\chi_4^+(y) - c_{3+k,4}\chi_4^-(y) - s_{3+k,4}\Gamma_{\ell_2}[\chi_4^-],$$

$$\chi_4^\pm(y) = (\xi_*^+ \pm \xi_*^+)' + (\delta \pm \delta), \quad y \in \ell_2.$$

Елементи матриць $\{c_{kj}\}^6, \{s_{kj}\}^6$ подані через пружні сталі півпросторів [5]. Систему (1) слід доповнити умовами замкнутості тріщини, а також умовами рівноваги і моментної рівноваги включення

$$\int_{\ell_1}\eta_1(y)dy = 0, \int_{\ell_2}\eta_2(y)dy = P, \int_{\ell_2} y\eta_{21}(y)dy = \mathrm{M}. \tag{2}$$

2. Розв'язання системи СІР

Перше матричне рівняння системи (1) приведемо до діагонального вигляду відносно вектора η_1, а друге — відносно вектора η_2 і відобразимо за допомогою лінійного перетворення: $y = \frac{1}{2}(b_j - a_j)\rho + \frac{1}{2}(b_j + a_j), y \in \ell_j$, на проміжок $\mathrm{I} = [-1;1]$. Нові невідомі функції введемо так:

$$t_j(\rho) = \{t_{jk}(\rho)\}^3 = S_j^{-1}\eta_j(0,5((b_j - a_j)\rho + (b_j + a_j)), \; \rho \in \mathrm{I},$$

де матриці $S_j = \{s_{km}^{(j)}\}^3$– перетворювальні матриці, які визначимо із рівнянь $\left(S_*^{(j)}\right)^{-1} C_*^{(j)} = S_j J_j S_j^{-1}$,$J_j = \mathrm{diag}\{\lambda_{jk}\}^3$–жорданова матриця. Власні числа $\lambda_{jk}, (k = \overline{1,3})$ при $j = 1$ співпадають із власними числами задачі про тріщини [4], при $j = 2$ задачі о жорстких включеннях [5]. Після таких перетворень систему (1) подамо так:

$$J_j t_j(\rho) + \Gamma_{\mathrm{I}}[t_j] + B^{(j)}R_j[t_{3-j}] = F^{(j)}(\rho), \; \rho \in \mathrm{I}, \mathrm{j} = 1,2, \tag{3}$$

де

$$R_j[t_j] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathrm{I}} \frac{t_j(\tau)d\tau}{\tau - \kappa_{1j}\rho + \kappa_{2j}}, \; \kappa_{1j} = (b_1 - a_1)^{(-1)^{j+1}}(b_2 - a_2)^{(-1)^j},$$

$$\kappa_{2j} = \frac{b_2 + a_2 - b_1 - a_1}{(-1)^j(b_j - a_j)}, \; B^{(j)} = \{b_{km}^{(j)}\}^3 = S_{(3-j)}^{-1}\left(C_*^{(j)}\right)^{-1} S_0^{(j)} S_{(3-j)},$$

$$F^{(j)}(\rho) = \{f_k^{(j)}(\rho)\}^3 = S_{(3-j)}^{-1}(C_*^{(j)})^{-1}q^{(j)}\left(\frac{1}{2}\left((b_j - a_j)\,\rho + (b_j + a_j)\right)\right).$$

Поведінка розв'язків системи (3) визначається сингулярними частинами рівнянь, що дає можливість розв'язки систем подати по многочленах Якобі ($j = 1,2, k = \overline{1,3}$.):

$$t_{jk}(\rho) = \frac{1}{\omega_{jk}(\rho)}\sum_{n=0}^{\infty} h_{jk}^{(n)}\mathrm{P}_n^{-\bar{\mu}_{jk},-\mu_{jk}}(\rho), \;\; \omega_{jk} = (1-\rho)^{\bar{\mu}_{jk}}(1+\rho)^{\mu_{jk}}. \tag{4}$$

Показники особливостей визначаються формулами

$$\mu_{j1}=\frac{1}{2},\ \ \mu_{jk}=\frac{1}{2}+(-1)^k i\alpha_{j1},\alpha_{j1}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\alpha_{j0}}{1-\alpha_{j0}},\alpha_{j0}=\operatorname{Im}\lambda_{j2},\ 0<\alpha_{j0}<1.$$

Ортогональність многочленів Якобі і умови (2) дають вирази

$$h_{jk}^{(0)}=0,j=1,k=\overline{1,3},h_{jk}^{(0)}=2\mathrm{P}_k(b_2-a_2)^{-1}(1+\lambda_{jk}^2)^{-0,5},j=2,k=\overline{1,3}.$$

Для визначення інших коефіцієнтів, підставивши розвинення (4) в систему (3), скориставшись спектральним співвідношенням [8] і властивістю ортогональності многочленів Якобі, отримаємо нескінчену систему алгебраїчних рівнянь:

$$\aleph_{km}^{(j)}h_{jk}^{(m+1)}+\sum_{p=1}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}b_{kp}^{(j)}h_{jp}^{(n)}\Upsilon_{mn}^{k,j}=g_{km}^{(j)},\ \ k=\overline{1,3},\ j=1,2,\ m=\overline{0,\infty},\qquad(5)$$

де

$$\aleph_{km}^{(j)}=\Gamma\left(m+2-\mu_{jk}\right)\Gamma\left(m+2-\bar{\mu}_{jk}\right)\left((m+1)!\right)^{-2},$$

$$g_{km}^{(j)}=\int_{\mathrm{I}}\omega_{jk}^{-1}(\tau)\mathrm{P}_m^{1-\bar{\mu}_{jk},1-\mu_{jk}}(\tau)(f_k^{(j)}(\tau)-\sum_{k=1}^{3}h_{jk}^{(0)}(1-\kappa_{12}\tau+\kappa_{22})^{-1})d\tau,$$

$$\Xi_n^{jk}=(\kappa_{1j}\tau-\kappa_{2j}-1)^{-\bar{\mu}_{jk}}(\kappa_{1j}\tau-\kappa_{2j}+1)^{-\mu_{jk}}\mathrm{P}_n^{-\bar{\mu}_{jk},-\mu_{jk}}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{P}_{n-1}^{1-\bar{\mu}_{jk},1-\mu_{jk}},$$

$$\Upsilon_{mn}^{kj}=\int_{\mathrm{I}}\omega_{jk}^{-1}(\tau)\mathrm{P}_m^{1-\bar{\mu}_{jk},1-\mu_{jk}}(\tau)\Xi_n^{jk}(\tau)d\tau,\ k=\overline{1,3},\ j=1,2.$$

Регулярні ядра системи (3) обмежені разом зі своїми частинними похідними до будь-якого при $|\rho|\le 1,\ |\tau|\le 1$, це дає можливість до системи (5) застосувати метод редукції [8] і отримати коефіцієнти розвинення (4), а також подання для векторів η_j. Останнє дало можливість отримати вирази для узагальнених КІН [4,5] у вершинах тріщини і включення, а також, використавши умови моментної рівноваги, кут повороту включення δ.

3. Аналіз чисельних результатів

На рисунках 2 и 3 наведені залежності узагальнених КІН нормального відриву відповідно у вершинах тріщини K_{I}^t і у вершинах включення K_{I}^v від відносної віддалі між тріщиною і включенням $d_0=(a_2-b_1)(b_1-a_1)^{-1}$, при нормальному симетричному навантаженні на берега тріщини: $\sigma_1^{\pm}(y)=-1,\ \sigma_{2,3}^{\pm}(y)=0$, і відсутності навантаження на включенні: $P=0,\ \mathrm{M}=0$. Неперервні лінії на рисунках отримані для внутрішніх вершин (b_1 и a_2), штриховані лінії — для зовнішніх вершин (a_1 и b_2). Для розрахунків використані матеріали [7]: стеклопластик однонаправлений (нижній півпростір) і стеклопластик ортогонально–армований (верхній простір).

Наведені графіки показують, що при зближенні тріщини і включення узагальнені КІН для тріщини спадають, при цьому більше спадає КІН для ближньої до включення вершини. Для узагальнених КІН у вершинах включення виявлена протилежна закономірність: узагальнені КІН зростають, при цьому для ближньої вершини КІН зростає швидше.

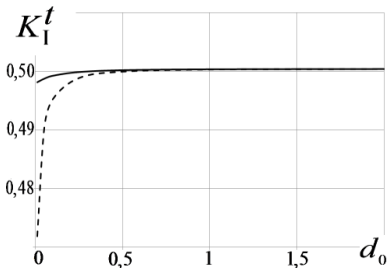

Рис. 2

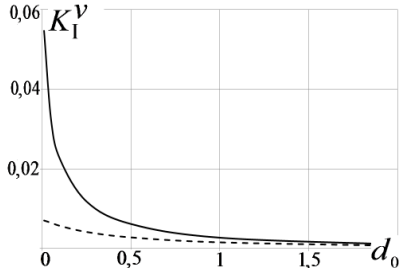

Рис. 3

Також встановлено, що якщо навантажено тільки включення, то описані закономірності змінюються на протилежні: у вершинах тріщини узагальнені КІН зростають, у вершинах включення спадають. В обох випадках взаємний вплив тріщини і включення буде суттєвим при виконанні умови: $d_0 \leq 0,25$.

Висновки. Отже, запропоновано метод розв'язання задач про тунельні міжфазні дефекти довільної природи в кусково-однорідному анізотропному просторі, що дало можливість отримати розв'язки нових задач про міжфазні дефекти. Зокрема, досліджено вплив на концентрацію напружень в околі міжфазної тріщини та включення відносної віддалі між ними. Аналогічно можуть бути розв'язанні задачі про взаємодію інших типів міжфазних тунельних дефектів.

1. **Кривой А.Ф.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов, М. В. Радиолло // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т.50, № 4. – С. 622–632.
2. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости / А. Ф. Кривой, М. В. Радиолло // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
3. **Herrmann K. P.** On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – V. 69. – P. 317–335.
4. **Krivoi A. F.** Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space / A. F. Krivoi, G. Ya. Popov // J. Appl. Math. Mech. – 2008. – V. 72, No. 4. – P. 499–507.
5. **Кривий О. Ф.** Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі / О. Ф. Кривий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – V. 50, № 2. – С. 55–66.
6. **Krivoi A. F.** Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space / A. F. Krivoi, G. Ya. Popov // Int. Appl. Mech. – 2008. – V. 44, №. 6. – P. 626–634.
7. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
8. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 101–111

Mathematical Subject Classification: 74C05
УДК 539.3

А. Г. Николаев, Е. А. Танчик
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского "ХАИ"

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ЯЧЕЙКЕ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА, ОБРАЗОВАННОГО ЧЕТЫРЬМЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВОЛОКНАМИ

Работа докладывалась на Международной научной конференции "Современные прблемы механики деформированного твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений" памяти Г. Я. Попова, 2013, Одесса, Украина

Ніколаєв О. Г., Танчік Є. А. Розподіл напружень у ланці односпрямованого композиційного матеріалу, утвореного чотирма циліндричними волокнами. Запропоновано локальну модель напружено-деформованого стану односпрямованого волокнистого композиту, що ґрунтується на узагальненому методі Фур'є. Розглядається циліндричний зразок матеріалу з чотирма паралельними волокнами. Передбачається, що волокна знаходяться в умовах ідеального контакту з матрицею.
Ключові слова: локальна модель, граничні умови, напружено-деформований стан, узагальнений метод Фур'є, метод редукції, односпрямований волокнистий композит.

Николаев А. Г., Танчик Е. А. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами. Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на обобщенном методе Фурье. Рассматривается цилиндрический образец материала с четырьмя параллельными волокнами. Предполагается, что волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей.
Ключевые слова: локальная модель, граничные условия, напряженно-деформированное состояние, обобщенный метод Фурье, метод редукции, однонаправленный волокнистый композит.

Nikolaev A. G., Tanchik E. A. Stress distribution in the cell of unidirectional composite material, formed by four cylindrical fibers. Proposed a local model of the stress-strain state of a unidirectional fiber composite, based on the generalized Fourier method. We consider a cylindrical sample of material with four parallel fibers. It is assumed that the fibers are under perfect contact with the matrix.
Key words: local model, boundary conditions, stress-strain state, generalized Fourier's method, method of reduction, unidirectional fiber composite.

Введение. В настоящее время предлагаются разные модели напряженно-деформированного состояния пористых и композиционных материалов. В монографии [1] разработаны методы микромеханики композиционных сред с дискретной структурой и трещинами и некоторые их приложения к конкретным материалам. Рассмотрено влияние свойств компонентов и вида структуры неоднородных сред на их эффективные (интегральные) параметры и распределение

© Николаев А. Г., Танчик Е. А., 2013

внутренних полей. Напряженно-деформированное состояние композита моделируется распределением напряжений в окрестности нескольких включений (плоская задача) или одного включения в случае зернистого композита.

В статье [2] предложена структурная модель зернистого эластомерного композита, позволившая связать его деформационное и прочностное поведение с размерами частиц дисперсной фазы, т.е. учесть масштабный фактор прочности. На основе теоретических исследований напряженно-деформированного состояния вокруг двух жестких сферических включений в упругой несжимаемой матрице установлены зависимости математического ожидания разрывного усилия от физико-механических характеристик связующего, размеров частиц и расстояния между ними. В результате предложен новый вероятностный критерий появления микроразрушения в композитной структуре в виде отслоений матрицы от частиц. С его помощью проведены модельные исследования процессов развития внутренней поврежденности в композитной системе в зависимости от степени наполнения и величины включений. Построены соответствующие кривые растяжения, определены предельные разрывные макронапряжения и макродеформации.

В статье [3] представлены исследования по моделированию структуры пористых материалов с малой объемной долей содержания твердой фазы. В качестве моделей рассматриваются главным образом стержневые и оболочечные конструкции. Предложена классификация моделей по степени упорядоченности структурных единиц. Представляется, что наиболее адекватной с точки зрения морфологии и деформационных свойств является модель, состоящая из хаотически ориентированных 14-гранных ячеек. Для анализа представленной модели предлагается метод выделения структурного элемента.

В работе [4] предлагается алгоритм оценки свойств волокнистого композита при растяжении, основанный на процедуре В. З. Власова; дается оценка эффективных свойств эквивалентного гомогенного материала; приводится сравнение результатов расчета эффективного модуля Юнга с результатами других авторов.

В работе [5] обобщены базовые подходы, применяемые в математических моделях, и общие методы решения уравнений механики стохастических композитов. Они могут быть сведены к стохастическим уравнениям теории упругости структурно неоднородного тела, к уравнениям теории эффективных упругих модулей, к уравнениям теории упругих смесей или к более общим уравнениям четвертого порядка. Решение стохастических уравнений теории упругости для произвольной области вызывает значительные математические трудности и может быть реализовано только приближенно. Построение уравнений теории эффективных упругих модулей связано с задачей определения интегральных модулей стохастически неоднородной среды, которая может быть решена методом возмущений, методом моментов или методом условных моментов. Однако, т.к. уравнения состояния не были строго обоснованы, эта теория не может использоваться для систематического моделирования композитных структур.

В работах [6, 7] предложен метод определения напряженного состояния конечного цилиндра, основанный на принципе суперпозиции и разложении тензора напряжений в ряды Фурье и Бесселя – Дини. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В работе [8] исследован трансверсально изотропный стержень с цилиндриче-

ским включением с осесимметричными собственными деформациями. Получено аналитическое упругое решение для перемещений, напряжений и энергии упругой деформации стержня.

В статье [9] для прогнозирования прочностных свойств композитов рассматривается постановка нелинейных связанных краевых задач микромеханики композитов, учитывающих стадию структурного накопления микроповреждений, когда поля структурных микроповреждений являются локально эргодическими. В целях описания структурного разрушения и прогнозирования прочностных свойств композитов существенно расширяется база определяющих соотношений: вводится новый материальный носитель — тензор повреждаемости четвертого ранга. Построены новые функционалы связанной стохастической краевой задачи, позволяющие наряду с прогнозированием упругих свойств строить расчетные поверхности прочности реальных композитов.

В работах [10, 11] введены локальные осесимметричные модели напряженного состояния пористого и зернистого композиционного материалов с порами или зернами в форме вытянутых сфероидов. В работе [12] разработана локальная неосесимметричная математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала. В этих моделях напряжения в композитах описываются при помощи обобщенного метода Фурье. Аппарат обобщенного метода Фурье разработан в [13], а его приложения приведены в [14].

Основные результаты.

1. Постановка задачи. Рассматривается цилиндрический образец Ω_0 однонаправленного волокнистого композиционного материала, волокна в котором моделируются четырьмя цилиндрическими включениями Ω_j $(j = 1 \div 4)$. Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические системы координат (ρ_j, φ_j, z_j), начала которых отнесены к центрам включений O_j $(j = 0 \div 4)$, расположенным в одной плоскости $z = 0$. Радиусы цилиндров Ω_j равны R_j, границы цилиндров Γ_j описываются уравнениями $\rho_j = R_j$. Предполагается, что упругие постоянные матрицы и включений соответственно равны (G_0, σ_0) и (G_j, σ_j).

Вектор упругих перемещений удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \mathrm{div} \mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

с граничными условиями на внешней границе

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_0} = T\mathbf{e}_\rho = \begin{cases} T, & |z| \le h \\ 0, & |z| > h \end{cases} \tag{2}$$

и условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$\mathbf{FU}|_{\Gamma_j} = \mathbf{FU}_j|_{\Gamma_j}, \tag{3}$$

$$\mathbf{U}|_{\Gamma_j} = \mathbf{U}_j|_{\Gamma_j}, \tag{4}$$

где $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_j$ — векторы перемещений в матрице и в j-ом включении, $\mathbf{FU}$, $\mathbf{FU}_j$ — соответствующие им векторы напряжений на поверхностях Γ_j, σ — коэффициент Пуассона. Условия (3), (4) отражают идеальный контакт между матрицей и волокном.

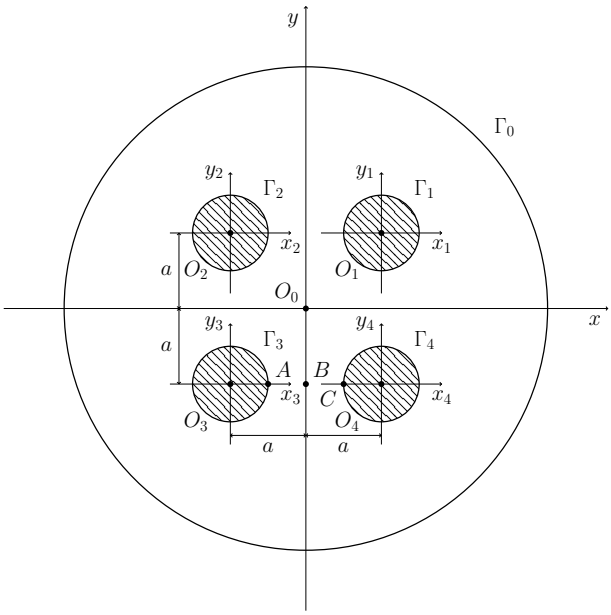

Рис. 1. Схематическое представление задачи

2. Решение задачи. Общее решение краевой задачи (1) — (4) в областях Ω_0 и Ω_j ищется в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений

$$\mathbf{U} = \sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda)\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j,\varphi_j,z_j)d\lambda +$$

$$+\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda)\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0,\varphi_0,z_0)d\lambda \quad \text{в} \quad \Omega_0; \tag{5}$$

$$\mathbf{U} = \sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B_{s,m}^{(j)}(\lambda)\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_j,\varphi_j,z_j)d\lambda \quad \text{в} \quad \Omega_j. \tag{6}$$

Указанные выше базисные решения представим в виде [13]:

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho,\varphi,z) = \lambda^{-1}\mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho,\varphi,z); \quad s = 1,3; \tag{7}$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho,\varphi,z) = \lambda^{-1}\mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho,\varphi,z), \tag{8}$$

$$\mathbf{B}_2 = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\nabla - \chi\Big[\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]\Big];$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho,\varphi,z) = e^{i\lambda z + im\varphi}\tilde{K}_m(\lambda\rho),$$

$$u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho,\varphi,z) = e^{i\lambda z + im\varphi}I_m(\lambda\rho),$$

где $\mathbf{D}_1 = \nabla$, $\mathbf{D}_2 = z\nabla - \chi\mathbf{e}_z$, $\mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z]$ (здесь i — мнимая единица); $I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя, $\tilde{K}_m(x) = (\operatorname{sign} x)^m K_m(|x|)$, $K_m(x)$ — функция Макдональда; $\chi = 3-4\sigma$, $u^{\pm(3)}_{\lambda,m}$ — полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах.

В развернутой координатной форме базисные решения (7), (8) имеют вид:

$$\mathbf{U}^{\pm(3)}_{1,\lambda,m}(\rho,\varphi,z) = \mp u^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}\mathbf{e}_{-1} \mp u^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}\mathbf{e}_1 + iu^{\pm(3)}_{\lambda,m}\mathbf{e}_0, \tag{9}$$

$$\mathbf{U}^{\pm(3)}_{2,\lambda,m}(\rho,\varphi,z) = \mp(D-\chi)\left[u^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}\mathbf{e}_{-1} + u^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}\mathbf{e}_1\right] + iDu^{\pm(3)}_{\lambda,m}\mathbf{e}_0, \tag{10}$$

$$\mathbf{U}^{\pm(3)}_{3,\lambda,m}(\rho,\varphi,z) = \pm u^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}\mathbf{e}_{-1} \mp u^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}\mathbf{e}_1, \tag{11}$$

где $D = \rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}$, $\mathbf{e}_{-1} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho + i\mathbf{e}_\varphi)e^{i\varphi}$, $\mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho - i\mathbf{e}_\varphi)e^{-i\varphi}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$, $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ — орты цилиндрической системы координат.

Вектор напряжений на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ имеет вид:

$$\mathbf{FU} = 2G\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{U} + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathbf{n}} + \frac{1}{2}(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{U})\right], \tag{13}$$

где G — модуль сдвига.

Применив к формулам (9) — (11) оператор (13) на площадке с нормалью $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$ получим:

$$\mathbf{FU}^{\pm(3)}_{1,\lambda,m} = \frac{2G}{\rho}\left\{\mp Du^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}\mathbf{e}_{-1} \mp Du^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}\mathbf{e}_1 + iDu^{\pm(3)}_{\lambda,m}\mathbf{e}_0\right\}; \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{FU}^{\pm(3)}_{2,\lambda,m} = \frac{2G}{\rho}\Big\{&\mp[(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2\rho^2 + (2\sigma-3)D]u^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}\mathbf{e}_{-1}\mp\\ &\mp[(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2\rho^2 + (2\sigma-3)D]u^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}\mathbf{e}_1+\\ &+i[m^2 + \lambda^2\rho^2(2\sigma-2)D]u^{\pm(3)}_{\lambda,m}\mathbf{e}_0\Big\},\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{FU}^{\pm(3)}_{3,\lambda,m} = \frac{G}{\rho}\Big\{&\pm(D+m-1)u^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}\mathbf{e}_{-1}\mp\\ &\mp(D-m-1)u^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}\mathbf{e}_1 - imu^{\pm(3)}_{\lambda,m}\mathbf{e}_0\Big\}.\end{aligned} \tag{16}$$

3. Теоремы сложения. Теоремы сложения связывают базисные решения уравнения Ламе в системах координат, совмещенных с центрами пары цилиндров. Справедливы следующие теоремы сложения [13]:

$$\mathbf{U}^{+(3)}_{s,\lambda,m}(\rho_1,\varphi_1,z_1) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(12)}_{s,t}f^{(33)l}_{1,\lambda,m}\mathbf{U}^{-(3)}_{t,\lambda,l}(\rho_2,\varphi_2,z_2); \tag{17}$$

$$\mathbf{U}^{+(3)}_{s,\lambda,m}(\rho_2,\varphi_2,z_2) = \sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(12)}_{s,t}f^{+(33)l}_{1,\lambda,m}\mathbf{U}^{+(3)}_{t,\lambda,l}(\rho_1,\varphi_1,z_1); \tag{18}$$

$$\mathbf{U}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(\rho_1,\varphi_1,z_1)=\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(12)}_{s,t}f^{-(33)l}_{1,\lambda,m}\mathbf{U}^{-(3)}_{t,\lambda,l}(\rho_2,\varphi_2,z_2), \tag{19}$$

где $f^{(33)l}_{1,\lambda,m}=(-1)^l u^{+(3)}_{\lambda,m-l}(\rho_{12},\varphi_{12},z_{12})$, $f^{\pm(33)l}_{\lambda,m}=u^{-(3)}_{\lambda,m-l}(\rho_{12},\varphi_{12},z_{12})$, $\tilde{D}^{(ij)}_{s,t}=[\delta_{st}+$ $+\delta_{t1}\delta_{s2}\rho_{ij}\dfrac{\partial}{\partial\rho_{ij}}\Big]$.

4. Разрешающая система уравнений. Используя теоремы сложения (17) — (19), представим вектор перемещения $\mathbf{U}$ в системе координат с началом в точке O_0:

$$\mathbf{U}=\sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A^{(j)}_{s,m}(\lambda)\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(0j)}_{s,t}u^{-(3)}_{\lambda,m-l}(\rho_{0j},\varphi_{0j},z_{0j})\times$$

$$\times\mathbf{U}^{+(3)}_{t,\lambda,l}(\rho_0,\varphi_0,z_0)d\lambda+$$

$$+\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A^{(0)}_{s,m}(\lambda)\mathbf{U}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(\rho_0,\varphi_0,z_0)d\lambda \tag{20}$$

и с началом в точке O_j:

$$\mathbf{U}=\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A^{(j)}_{s,m}(\lambda)\mathbf{U}^{+(3)}_{s,\lambda,m}(\rho_j,\varphi_j,z_j)d\lambda+$$

$$+\sum_{\alpha\neq j}\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A^{(\alpha)}_{s,m}(\lambda)\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(-1)^l\tilde{D}^{(j,\alpha)}_{s,t}u^{+(3)}_{\lambda,m-l}(\rho_{j\alpha},\varphi_{j\alpha},z_{j\alpha})\times$$

$$\times\mathbf{U}^{-(3)}_{t,\lambda,l}(\rho_j,\varphi_j,z_j)d\lambda+\sum_{s=1}^{3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A^{(0)}_{s,m}(\lambda)\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(0j)}_{s,t}u^{-(3)}_{\lambda,m-l}(\rho_{0j},\varphi_{0j},z_{0j})\mathbf{U}^{-(3)}_{t,\lambda,l}(\rho_j,\varphi_j,z_j)d\lambda. \tag{21}$$

После удовлетворения граничных условий задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A^{(j)}_{s,m}(\lambda)$, $B^{(j)}_{s,m}(\lambda)$:

$$\sum_{s=1}^{3}\Big\{A^{(0)}_{s,m}(\lambda)\mathbf{G}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_0)+\mathbf{G}^{+(3)}_{s,\lambda,m}(R_0)\sum_{j=1}^{4}\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}A^{(j)}_{t,l}(\lambda)\times$$

$$\times\tilde{D}^{(0j)}_{s,t}u^{-(3)}_{\lambda,l-m}(\rho_{0j},\varphi_{0j},z_{0j})\Big\}=\frac{T}{\pi}\frac{\sin\lambda h}{\lambda}\delta_{m0}(1,1,0), \tag{22}$$

$$\sum_{s=1}^{3}\Big\{A^{(j)}_{s,m}(\lambda)\mathbf{G}^{+(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,G_0,\sigma_0)+\mathbf{G}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,G_0,\sigma_0)\sum_{\alpha\neq j}\sum_{t=1}^{3}\sum_{-\infty}^{\infty}A^{(\alpha)}_{t,l}(\lambda)\times$$

$$\times(-1)^l\tilde{D}^{(j\alpha)}_{s,t}u^{+(3)}_{\lambda,l-m}(\rho_{j\alpha},\varphi_{j\alpha},z_{j\alpha})+\mathbf{G}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,G_0,\sigma_0)\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(0j)}_{s,t}u^{-(3)}_{\lambda,l-m}(\rho_{0j},\varphi_{0j},z_{0j})\Bigg\}=\sum_{s=1}^{3}B^{(j)}_{s,\lambda,m}\mathbf{G}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,G_j,\sigma_j),\qquad(23)$$

$$\sum_{s=1}^{3}\Bigg\{A^{(j)}_{s,m}(\lambda)\mathbf{H}^{+(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,\sigma_0)+\mathbf{H}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,\sigma_0)\sum_{\alpha\neq j}\sum_{t=1}^{3}\sum_{-\infty}^{\infty}A^{(\alpha)}_{t,l}(\lambda)\times$$

$$\times(-1)^l\tilde{D}^{(j\alpha)}_{s,t}u^{+(3)}_{\lambda,l-m}(\rho_{j\alpha},\varphi_{j\alpha},z_{j\alpha})+\mathbf{H}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,\sigma_0)\times$$

$$\times\sum_{t=1}^{3}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\tilde{D}^{(0j)}_{s,t}u^{-(3)}_{\lambda,l-m}(\rho_{0j},\varphi_{0j},z_{0j})\Bigg\}=\sum_{s=1}^{3}B^{(j)}_{s,\lambda,m}\mathbf{H}^{-(3)}_{s,\lambda,m}(R_j,\sigma_j),\qquad(24)$$

$$j=1\div4;\quad m\in\mathbb{Z};\quad\lambda\in\mathbb{R},\quad\lambda\neq0,$$

где $\mathbf{G}^{\pm(3)}_{s,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\left(G^{\pm(-1)}_{s,\lambda,m},G^{\pm(1)}_{s,\lambda,m},G^{\pm(0)}_{s,\lambda,m}\right)$;

$$G^{\pm(-1)}_{1,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\mp\frac{2G}{R}D\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}(R),\quad G^{\pm(1)}_{1,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\pm\frac{2G}{R}D\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}(R),$$

$$G^{\pm(0)}_{1,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\frac{2G}{R}iD\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m}(R),\quad G^{\pm(0)}_{3,\lambda,m}(R,G,\sigma)=-\frac{G}{R}im\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m}(R),$$

$$G^{\pm(1)}_{3,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\mp\frac{G}{R}(D-m-1)\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}(R),$$

$$G^{\pm(-1)}_{3,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\pm\frac{G}{R}(D+m-1)\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}(R),$$

$$G^{\pm(0)}_{2,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\frac{2G}{R}i\Big[m^2+\lambda^2R^2+(2\sigma-2)D\Big]\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m}(R),$$

$$G^{\pm(-1)}_{2,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\mp\frac{2G}{R}\Big[(m-1)(m-1+2\sigma)+\lambda^2R^2+(2\sigma-3)D\Big]\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}(R),$$

$$G^{\pm(1)}_{2,\lambda,m}(R,G,\sigma)=\mp\frac{2G}{R}\Big[(m+1)(m+1-2\sigma)+\lambda^2R^2+(2\sigma-3)D\Big]\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}(R),$$

$$\mathbf{H}^{\pm(3)}_{s,\lambda,m}(R,\sigma)=\left(H^{\pm(-1)}_{s,\lambda,m},H^{\pm(1)}_{s,\lambda,m},H^{\pm(0)}_{s,\lambda,m}\right),$$

$$H^{\pm(-1)}_{1,\lambda,m}(R,\sigma)=\mp\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}(R),\quad H^{\pm(1)}_{1,\lambda,m}(R,\sigma)=\mp\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}(R),$$

$$H^{\pm(0)}_{1,\lambda,m}(R,\sigma)=i\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m}(R),\quad H^{\pm(0)}_{2,\lambda,m}(R,\sigma)=iD\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m}(R),$$

$$H^{\pm(-1)}_{2,\lambda,m}(R,\sigma)=\mp(D-\chi)\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}(R),$$

$$H^{\pm(1)}_{2,\lambda,m}(R,\sigma)=\mp(D-\chi)\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}(R),\quad H^{\pm(0)}_{3,\lambda,m}(R,\sigma)=0,$$

$$H^{\pm(-1)}_{3,\lambda,m}(R,\sigma)=\pm\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m-1}(R),\quad H^{\pm(1)}_{3,\lambda,m}(R,\sigma)=\mp\tilde{u}^{\pm(3)}_{\lambda,m+1}(R),$$

$$\tilde{u}^{+(3)}_{\lambda,m}(R)=\tilde{K}_m(\lambda R),\quad\tilde{u}^{-(3)}_{\lambda,m}(R)=I_m(\lambda R).$$

5. Анализ результатов. При численной реализации задачи предполагалось, что $R_j = R$ $(j = 1 \div 4)$, $R_0 = 10R$. Коэффициенты Пуассона материалов матрицы и волокон приняты равными соответственно $\sigma_0 = 0.38$ и $\sigma_j = 0.21$, что соответствует волокнам из алюмоборосиликатного стекла с эпоксидно-малеиновым связующим. Система уравнений решена методом редукции по индексу m при фиксированном λ, то есть бесконечная система уравнений заменяется конечной системой, в которой индексы меняеются в диапазоне $-m_{max} \le m, l \le m_{max}$. Рассматривались случаи $m_{max} = 5, 10, 20$. Метод показал хорошую сходимость уже при $m_{max} = 5$, если $R/a < 0.8$.

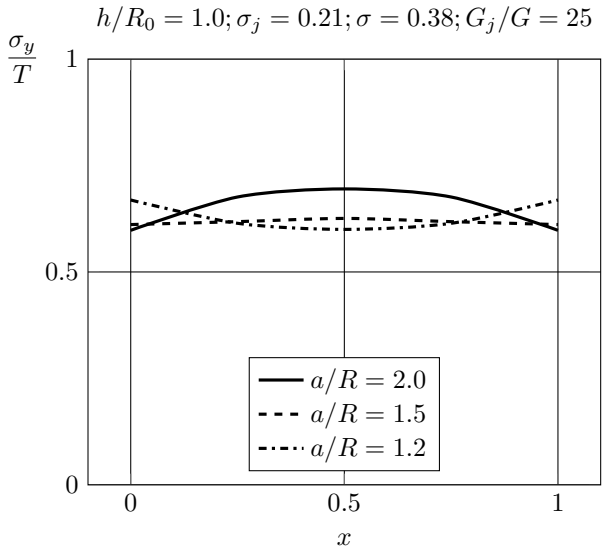

Рис. 2. Напряжения σ_y/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от относительного расстояния между ними

На рис. 2 приведены распределения напряжений σ_y/T на линии, соединяющей центры волокон в зависимости от относительного расстояния между ними a/R для низкомодульных волокон $G_j/G = 25$. При уменьшении расстояния между волокнами наблюдается изменение характера распределения напряжений: зона концентрации напряжений смещается из середины линии на ее границы.

На рис. 3 представлены графики напряжений σ_x/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от ширины области, по которой прикладывается к образцу нормальная внешняя нагрузка.

Численный анализ показал, что распределение напряжений σ_x/T и σ_y/T существенно не зависит от отношения G_j/G. Иначе обстоит дело с напряжением σ_z/T. На рис. 4 представлены графики напряжений σ_z/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения жесткостей материалов включений и матрицы (для низкомодульных и высокомодульных волокон). Из анализа графиков видно, что наблюдается характерный рост напряжений при переходе от низкомодульных волокон к высокомодульным.

На рис. 5 приведено сравнение главных компонент тензора напряжений для

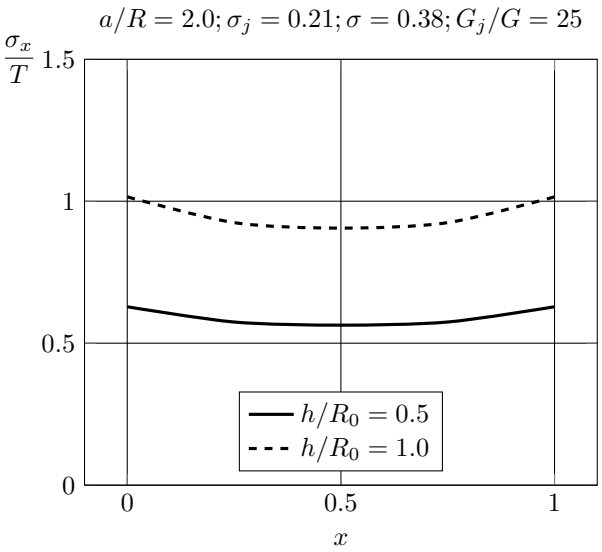

Рис. 3. Напряжения σ_x/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от величины h/R_0

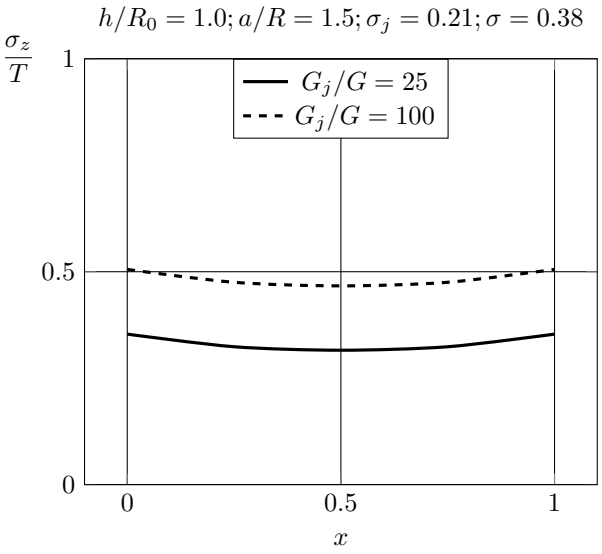

Рис. 4. Напряжения σ_z/T на линии, соединяющей центры включений в зависимости от соотношения жесткостей материалов включений и матрицы

двух и четырех волокон в цилиндрическом образце композиционного материала. Характер распределения напряжений практически не меняется, однако для величин напряжений σ_x/T наблюдается некоторое различие значений в одних и

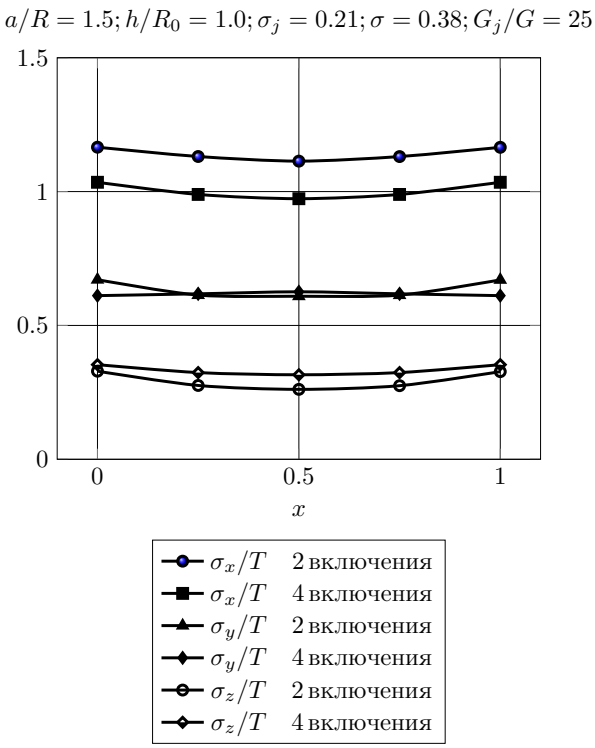

Рис. 5. Сравнение главных компонент тензора напряжений для двух и четырех волокон в цилиндрическом образце

тех же точках образца для случаев двух и четырех волокон.

Заключение. Предложена локальная модель напряженно-деформированного состояния однонаправленного волокнистого композита, основанная на представлении образца материала упругим цилиндром с четырьмя упругими цилиндрическими включениями, образующими тетрагональную упаковку композиционной среды. В аналитическом виде строятся векторы перемещения и тензор напряжений отдельно в области матрицы и включений. Предполагается, что образец композита подвержен действию кусочно-постоянной нормальной нагрузки, а волокна находятся в условиях идеального контакта с матрицей. Граничные условия и условия сопряжения удовлетворяются точно при помощи обобщенного метода Фурье. Параметры модели находятся из разрешающей системы, которая допускает эффективное численное решение. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации, выявлен ряд механических эффектов. Достоверность результатов подтверждается сравнением их со случаем цилиндрического образца с двумя волокнами. Анализ сходимости численного решения к точному показал высокую эффективность методики, позволяющей, удерживая лишь небольшое число уравнений и неизвестных в разрешающей системе, получать результаты с высокой точностью в широком диапазоне изменения геометрических параметров.

1. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г. А. Ванин. — К.: Наук. думка, 1985. — 304 с.
2. **Гаришин О. К.** Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя [Текст] / О. К. Гаришин, Л. А. Комар // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2003. — Т. 9, №3. — С. 278–286.
3. **Методы** расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) [Текст] / Д. А. Черноус, Е. М. Петроковец, Д. А. Конек, С. В. Шилько // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2001. — Т. 7, №4. — С. 533–545.
4. **Гордеев А. В.** Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами [Текст] / А. В. Гордеев // Механика композиционных материалов и конструкций. — М.: ИПМ РАН. — 2010. — Т. 16, №1. — С. 106–116.
5. **Khoroshun L. P.** Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites [Text] / L. P. Khoroshun // International Applied Mechanics. — 2000. — V. 36, No 10. — P. 1284–1316.
6. **Meleshko V. V.** Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings [Text] / V. V. Meleshko, Yu. V. Tokovyy // J. Eng. Math. — 2013. — V. 78. — P. 143–166.
7. **Токовий Ю. В.** Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні [Текст] / Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми мех. і мат. — 2010. — Вип. 8. — С. 144–151.
8. **Zhong Z.** Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains [Text] / Z. Zhong, Q. P. Sun // Int. Journal of Solids and Structures. — 2002. — V. 39, Issue 23. — P. 5753–5765.
9. **Макарова Е. Ю.** Нелинейные многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов [Текст] / Е. Ю. Макарова, Ю. В. Соколкин // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2013. — Т. 19, №3. — С. 395–405.
10. **Николаев А. Г.** Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”. — 2009. — Т. 2(58). — С. 48–58.
11. **Николаев А. Г.** Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Авиационно-космическая техника и технология. — 2013. — 1(98). — С. 14–18.
12. **Николаев А. Г.** Локальная математическая модель зернистого композиционного материала [Текст] / А. Г. Николаев, Е. А. Танчик // Вестн. Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. — 2010. — Т. 922. — С. 4–19.
13. **Николаев А. Г.** Теоремы сложения решений уравнения Ламе / А. Г. Николаев. — Х.: Харьк. авиац. ин-т, 1993. — 109 с. — Деп. в ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 — Ук 93.
14. **Николаев А. Г.** Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости: монография [Текст] / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. — Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского “Харьк. авиац. ин-т”, 2011. — 344 с.

ISSN 2304-1579. Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т.18, вип. 4(20).–С. 112–119

Mathematical Subject Classification: 70F15
УДК 521.1

А. Л. Рачинская
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

БЫСТРОЕ ВРАЩЕНИЕ СПУТНИКА В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ ПО КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Работа частично поддержана проектом №953.1/010 третьего совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины и Российского фонда фундаментальных исследований 2013 года

Рачинська А. Л. Швидке обертання супутника в середовищі з опором по круговій орбіті. Досліджується швидкий обертальний рух відносно центру мас динамічно несиметричного супутника під дією гравітаційного моменту і моменту сил опору. Рух відбувається по круговій орбіті. Проведено чисельний аналіз зміни вектора кінетичного моменту твердого тіла і побудований годограф цього вектора.
Ключові слова: супутник, гравітаційний момент, опір, вектор кінетичного моменту, годограф.

Рачинская А. Л. Быстрое вращение спутника в среде с сопротивлением по круговой орбите. Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника под действием гравитационного момента и момента сил сопротивления. Движение происходит по круговой орбите. Проведен численный анализ изменения вектора кинетического момента твердого тела и построен годограф этого вектора.
Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, сопротивление, вектор кинетического момента, годограф.

Rachinskaya A. L. The rapid rotation of the satellite in an environment with drag in a circular orbit. We study the rapid rotation of the center of mass dynamically asymmetric satellite by the gravitational moment and moment of forces resistance. Motion occurs in a circular orbit. The numerical analysis of change of the angular momentum solid body and built this hodograph vector.
Key words: satellite, gravity moment, resistance, the angular momentum vector, hodograph.

Введение. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием совместного влияния моментов сил гравитационного притяжения и сопротивления. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики твердого тела, центр масс которого движется по круговой орбите вокруг Земли. Задачи динамики, обощенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованию вращательных движений тел относительно неподвижной точки под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, аэродинамических, электормагнитных и др.), близкому к приводимому ниже, посвящены работы [1-8].

© Рачинская А. Л., 2013

Основные результаты.

1. Постановка задачи. Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [1-2]. Система координат $Ox_i\,(i=1,2,3)$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиус-вектору перигея орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигее, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oy_i\,(i=1,2,3)$ связана с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ образуют правую тройку. Оси системы координат $Oz_i\,(i=1,2,3)$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей z_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [1]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ относительно его центра масс в системе координат Ox_i определяются углами λ и δ.

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt}=L_3,\qquad \frac{d\delta}{dt}=\frac{L_1}{G},\qquad \frac{d\lambda}{dt}=\frac{L_2}{G\sin\delta},\\
&\frac{d\theta}{dt}=G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)+\frac{L_2\cos\psi-L_1\sin\psi}{G},\\
&\frac{d\varphi}{dt}=G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3}-\frac{\sin^2\varphi}{A_1}-\frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right)+\frac{L_1\cos\psi+L_2\sin\psi}{G\sin\theta},\\
&\frac{d\psi}{dt}=G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1}+\frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right)-\frac{L_1\cos\psi+L_2\sin\psi}{G}ctg\theta-\frac{L_2}{G}ctg\delta.
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $L_i\,(i=1,2,3)$ — моменты внешних сил относительно осей Oy_i, G – величина кинетического момента, $A_i\,(i=1,2,3)$ – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i.

Центр масс спутника движется по круговой орбите с периодом обращения Q. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$\nu=\frac{2\pi}{Q}t+\nu_0,\tag{2}$$

где ν_0 – начальное значение истиной аномалии.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1>A_2>A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\varepsilon=\omega_0/\omega\sim A_1\omega_0/G\ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

Проекции L_i момента внешних сил, складывающихся из гравитационного момента L_i^g и момента сил внешнего сопротивления L_i^r на оси Oy_i, записываются в виде [2, 4]. Здесь приведена проекция на ось Oy_1, на другие оси проекции имеют аналогичный вид:

$$L_1 = L_1^g + L_1^r \equiv \frac{3\omega_0^2 \left(1 + e\cos\nu\right)^3}{\left(1-e^2\right)^3} \sum_{j=1}^{3} \left(\beta_2\beta_j S_{3j} - \beta_3\beta_j S_{2j}\right) -$$
$$-G\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{I_{i1}\alpha_{1i}\alpha_{31}}{A_1} + \frac{I_{i2}\alpha_{1i}\alpha_{32}}{A_2} + \frac{I_{i3}\alpha_{1i}\alpha_{33}}{A_3}\right) \tag{3}$$
$$S_{mj} = \sum_{p=1}^{3} A_p\alpha_{jp}\alpha_{mp}, \quad \beta_1 = \cos\left(\nu-\lambda\right)\cos\delta$$
$$\beta_2 = \sin\left(\nu-\lambda\right), \quad \beta_3 = \cos\left(\nu-\lambda\right)\sin\delta.$$

В работе предполагается, что момент сил сопротивления $\mathbf{L}^r$ может быть представлен в виде $\mathbf{L}^r = I\omega$, где тензор I имеет постоянные компоненты I_{ij} в системе Oz_i, связанной с телом [1, 4]. Сопротивление среды предполагаем слабым порядка малости $\varepsilon^2 : \|I\|/G_0 \sim \varepsilon^2 \ll 1$, где $\|I\|$ норма матрицы коэффициентов сопротивления, G_0 – кинетический момент спутника в начальный момент времени.

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику — кинетическую энергию T, производная которой имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G}L_3 + G\sin\theta\left[\cos\theta\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1} + \frac{\cos^2\varphi}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)\left(L_2\cos\psi - L_1\sin\psi\right) + \right.$$
$$\left. + \ \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\left(L_1\cos\psi + L_2\sin\psi\right)\right]. \tag{4}$$

Ставится задача исследовать решение системы (1)-(4) при малом ε на большом промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$. Для решения задачи будем применять метод усреднения [9].

2. Процедура метода усреднения. Рассмотрим невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$), когда моменты внешних сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины G, δ, λ, T, ν обращаются в постоянные, а φ, ψ, θ — некоторые функции времени t. Медленными переменными в возмущенном движении будут G, δ, λ, T, ν, а быстрыми — углы Эйлера φ, ψ, θ. Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geqslant G^2 > 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1 [10]. Введем величину

$$k^2 = \frac{\left(A_2 - A_3\right)\left(2TA_1 - G^2\right)}{\left(A_1 - A_2\right)\left(G^2 - 2TA_3\right)} \quad \left(0 \leqslant k^2 \leqslant 1\right), \tag{5}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянный модуль эллиптических функций [11], описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правые части уравнений (1), (4) и проведем усреднение по переменной ψ, а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t [2]. При этом для медленных переменных δ, λ, T, G сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{dt} = -\frac{3\omega_0^2}{2G}\beta_2\beta_3 N^*, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{3\omega_0^2}{2G\sin\delta}\beta_1\beta_3 N^*,\\
&\frac{dG}{dt} = -\frac{G}{R(k)}\left\{I_{22}\left(A_1 - A_3\right)W(k) + \right.\\
&\quad \left. + I_{11}(A_2 - A_3)\left[1 - W(k)\right] + I_{33}\left(A_1 - A_2\right)\left[k^2 - W(k)\right]\right.,\\
&\frac{dT}{dt} = -\frac{2T}{R(k)}\left\{I_{22}\left(A_1 - A_3\right)W(k) + I_{33}\left(A_1 - A_2\right)\left[k^2 - W(k)\right] + \right.\\
&\qquad + \frac{A}{S(k)}\left\{\frac{I_{33}}{A_3}\left[k^2 - W(k)\right] + \frac{I_{22}}{A_2}\left(1 - k^2\right)W(k)\right\} + \\
&\qquad \left. + \frac{I_{11}}{A_1}\frac{(A_2 - A_3)R(k)}{S(k)}\left[1 - W(k)\right]\right\},\\
&W(k) = 1 - \frac{E(k)}{K(k)}, \quad A = (A_1 - A_2)(A_1 - A_3)(A_2 - A_3),\\
&R(k) = A_1\left(A_2 - A_3\right) + A_3\left(A_1 - A_2\right)k^2, \quad S(k) = A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2,\\
&N^* = A_2 + A_3 - 2A_1 + 3\left(\frac{2A_1T}{G^2} - 1\right)\left[A_3 + (A_2 - A_3)\frac{K(k) - E(k)}{K(k)k^2}\right].
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [11]. Дифференцируя выражение (5) для k^2 и используя два последних уравнения (6), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных

$$
\begin{aligned}
\frac{dk^2}{d\xi} &= (1-\chi)(1-k^2) - [(1-\chi) + (1+\chi)k^2]\frac{E(k)}{K(k)},\\
\chi &= (2I_{22}A_1A_3 - I_{11}A_2A_3 - I_{33}A_1A_2)/[(I_{33}A_1 - I_{11}A_3)A_2],\\
\xi &= (t - t_*)/N, \quad N = A_1A_3/(I_{33}A_1 - I_{11}A_3) \sim \varepsilon^{-2}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь t_* — постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо.

Из уравнений (6) следует, что под влиянием сопротивления среды происходит эволюция как кинетической энергии тела T, так и величины кинетического момента G. Непосредственно видно, что в первом приближении на их изменение оказывает влияние только сила сопротивления, причем в уравнения входят лишь диагональные коэффициенты I_{ii} матрицы момента трения. Члены, содержащие недиагональные компоненты $I_{ij} (i \neq j)$, выпадают при усреднении. Изменения углов λ, δ зависят как от действия силы сопротивления, так и гравитационного притяжения.

Уравнение (7) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на сфере радиуса G. Третье уравнение (6) описывает изменение радиуса сферы с течением времени.

Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (6) для G положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1–k^2)K \leqslant E \leqslant K$ [11]. Каждый коэффициент при I_{ii} является неотрицательной функцией k^2, причем одновременно они все в нуль обратиться не могут. Поэтому $dG/dt < 0$,

поскольку $G > 0$, т.е. переменная G строго убывает для любых $k^2 \in [0,1]$. Аналогично показывается, что кинетическая энергия также строго убывает [8].

3. Численный расчет изменения кинетического момента, кинетической энергии и углов ориентации вектора кинетического момента. Полученную систему уравнений (6) с учетом (2) и уравнение (7) в виде

$$\frac{dk^2}{dt} = \frac{I_{33}A_1 - I_{11}A_3}{A_1A_3}\left\{(1-\chi)\left(1-k^2\right) - \left[(1-\chi)+(1+\chi)\,k^2\right]\frac{E(k)}{K(k)}\right\} \tag{8}$$

можно численно проинтегрировать. Интегрирование проводилось при начальных условиях $G(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$ $\delta = \pi/4$ рад; $\lambda = \pi/4$ рад; и значениях главных центральных моментов инерции тела $A_1 = 3.2$; $A_2 = 2.6$; $A_3 = 1.67$. Для коэффициентов сопротивления рассматривались два возможных варианта: $I_{11} = 2.322$; $I_{22} = 1.31$; $I_{33} = 1.425$ и $I_{11} = 0.919$; $I_{22} = 5.228$; $I_{33} = 1.666$. В первом случае величина χ в уравнении (9) была отрицательной -4.477, а во втором положительной и равной 3.853.

Для численного расчета было проведено обезразмеривание уравнений системы (6) и уравнение (8). Характерными параметрами задачи являются G_0 кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определяются формулами $\tilde{t} = \Omega_0 t$, $\tilde{G} = \frac{G}{G_0}$, $\tilde{A}_i = \frac{A_i\Omega_0}{G_0}$, $\tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0\Omega_0}$, $\tilde{T} = \frac{T}{G_0\Omega_0}$, $\varepsilon^2\tilde{I}_{ii} = \frac{I_{ii}}{G_0}$. Система уравнений примет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2\frac{3}{2\tilde{G}}\beta_2\beta_3\tilde{N}^*, \quad \frac{d\lambda}{d\tilde{t}} = \varepsilon^2\frac{3}{2\tilde{G}\sin\delta}\beta_1\beta_3\tilde{N}^*,\\
&\frac{d\tilde{G}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2\frac{\tilde{G}}{\tilde{R}(k)}\left\{\tilde{I}_{22}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_3\right)W(k) + \tilde{I}_{33}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)\left[k^2-W(k)\right] + \right.\\
&\qquad \left. +\tilde{I}_{11}(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3)\left[1-W(k)\right]\right\},\\
&\frac{d\tilde{T}}{d\tilde{t}} = -\varepsilon^2\frac{2\tilde{T}}{\tilde{R}(k)}\left\{\tilde{I}_{22}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_3\right)W(k) + \tilde{I}_{33}\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)\left[k^2-W(k)\right] + \right.\\
&\qquad + \frac{\tilde{A}}{\tilde{S}(k)}\left\{\frac{\tilde{I}_{33}}{\tilde{A}_3}\left[k^2-W(k)\right] + \frac{\tilde{I}_{22}}{\tilde{A}_2}\left(1-k^2\right)W(k)\right\} + \\
&\qquad \left. +\frac{\tilde{I}_{11}}{\tilde{A}_1}\frac{(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3)\tilde{R}(k)}{\tilde{S}(k)}\left[1-W(k)\right]\right\},\\
&\tilde{A} = (\tilde{A}_1-\tilde{A}_2)(\tilde{A}_1-\tilde{A}_3)(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3),\\
&W(k) = 1-\frac{E(k)}{K(k)}, \quad \tilde{R}(k) = \tilde{A}_1\left(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3\right) + \tilde{A}_3\left(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2\right)k^2,\\
&\tilde{S}(k) = \tilde{A}_2-\tilde{A}_3+(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2)k^2,\\
&\tilde{N}^* = \tilde{A}_2+\tilde{A}_3-2\tilde{A}_1+3\left(\frac{2\tilde{A}_1\tilde{T}}{\tilde{G}^2}-1\right)\left[\tilde{A}_3+(\tilde{A}_2-\tilde{A}_3)\frac{K(k)-E(k)}{K(k)k^2}\right],\\
&\frac{dk^2}{dt} = \varepsilon^2\frac{\tilde{I}_{33}\tilde{A}_1-\tilde{I}_{11}\tilde{A}_3}{\tilde{A}_1\tilde{A}_3}\left\{(1-\chi)\left(1-k^2\right) - \left[(1-\chi)+(1+\chi)\,k^2\right]\frac{E(k)}{K(k)}\right\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2 \tilde{t}$. Для численного интегрирования системы применялись неявные схемы Адамса, что позволяет интегрировать систему в представленном виде, с учетом закона изменения угла нутации. Численный анализ показывает, что функции $\tilde{G}(\tau)$ и $\tilde{T}(\tau)$ являются монотонно убывающими, как было получено ранее [8].

Применение неявной схемы численного интегрирования позволяет построить годограф вектора кинетического момента в системе координат $Ox_i\,(i = 1, 2, 3)$ по найденным углам ориентации λ и δ.

Для проведения численного исследования вектор кинетического момента в начальный момент времени отклонен от оси x_3 на угол $\pi/4$ рад и повернут около оси x_3 так же на угол $\pi/4$ рад.

В первом расчетном случае (для отрицательного χ) получен годограф вектора кинетического момента, представленный на рис. 1. Из рис. 1 видно, что вектор кинетического момента, убывая, стремится занять предельное положение в плоскости орбиты спутника Ox_1x_2. На рис. 2 и 3 годограф вектора кинетического момента изображен в большем масштабе. Рисунок 2 показывает проекцию кривой годографа на плоскость Ox_1x_2, а на рис. 3 годограф показан вдоль оси спирали.

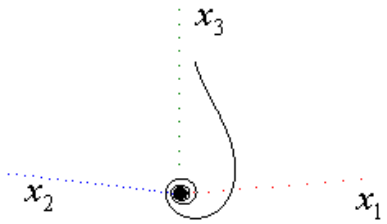

Рис. 1

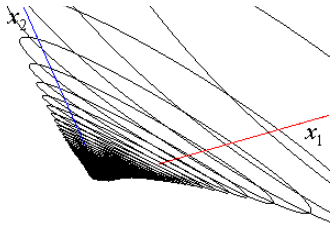

Рис. 2

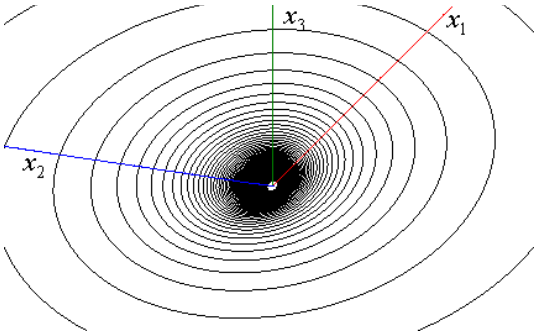

Рис. 3

Во втором расчетном случае (для положительного χ) результат построения годографа вектора кинетического момента представлен на рис. 4. Рисунки 5 и 6 отображают ту же кривую в большем масштабе в проекциях на другие плоскости.

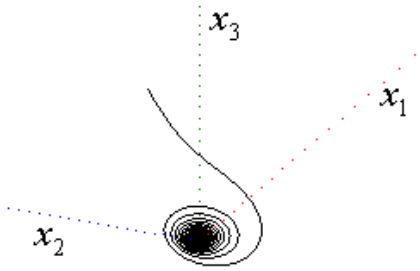

Рис. 4

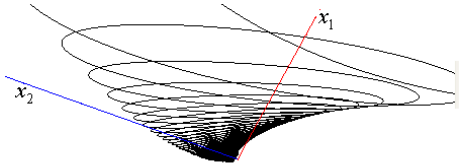

Рис. 5

Видно, что во втором расчетом случае характер поведения сохраняется, но вектор кинетического момента стремится к другому предельному положению в плоскости орбиты. Ось предельного положения располагается ближе к оси Ox_1. В обоих расчетных случаях ось спирали не является постоянной. Согласно численному исследованию наблюдается искривленние оси спирали, при этом во втором расчетном случае искривление становится более существенным.

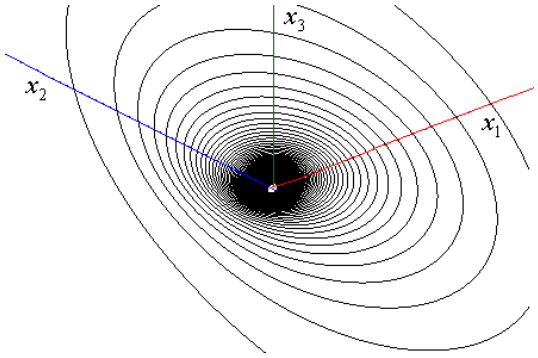

Рис. 6

Заключение. Таким образом, в случае возмущенного движения спутника с учетом гравитационного момента и момента сил сопротивления построен годограф вектора кинетического момента в трехмерном пространстве $Ox_1x_2x_3$, связанный с плоскостью круговой орбиты спутника. Получено, что вектор кинетического момента, убывая вследствие диссипативного момента сопротивления среды, стремится занять предельное положение в плоскости орбиты.

Автор благодарит Л. Д. Акуленко и Д. Д. Лещенко за полезные обсуждения.

1. **Белецкий В. В.** Движение искусственного спутника относительно центра масс [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М. : Наука, 1965. – 416 с.

2. **Черноусько Ф. Л.** О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов [текст] / Ф. Л. Черноусько // Прикл. математика и механика. – 1963. – Т.27, №3. – С. 472–483.

3. **Белецкий В. В.** Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [текст] / Владимир Васильевич Белецкий. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.

4. **Акуленко Л. Ф.** Быстрое движение вокруг неподвижной точки тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, Ф. Л. Черноусько // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – №3. – С. 5 – 13.

5. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения динамически симметричного спутника под действием гравитационного момента в сопротивляющейся среде [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2006. – **36**. – С. 58 – 63.

6. **Лещенко Д. Д.** Движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления в сопротивляющейся среде [текст] / Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2007. – Т.12, вип.7. – С. 85 – 98.

7. **Акуленко Л. Д.** Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием гравитационного и светового моментов [текст] / Л. Д. Акуленко, Я. С. Зинкевич, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2008. – Т.13, вип.11. – С. 117 – 131.

8. **Акуленко Л. Д.** Эволюция быстрого вращения спутника под действием гравитационного момента в среде с сопротивлением [текст] / Л. Д. Акуленко, Д. Д. Лещенко, А. Л. Рачинская // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2008. – №2. – С. 13 – 26.

9. **Волосов В. М.** Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем [текст] / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.

10. **Ландау Л. Д.** Теоретическая физика. Т. 1. Механика [текст] /Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 208 с.

11. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямами:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка". Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— Mathematical Subject Classification (2010)

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження

і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка" на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

.