

ISSN 2304—1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК
ОДЕСЬКОГО
НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Математика і механіка

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

Том 18. Випуск 3 (19). 2013

Одеса
«Астропринт»
2013

Засновник: **Одеський національний університет імені І. І. Мечникова**

Редакційна колегія журналу

І. М. Коваль (головний редактор)
О. В. Запорожченко (заступник головного редактора)
В. О. Іваниця (заступник головного редактора)
Є. Л. Стрельцов (заступник головного редактора)

С. М. Андрієвський	В. В. Заморев	В. І. Труба
Ю. Ф. Ваксман	В. Є. Круглов	О. В. Тюрін
В. В. Глебов	В. Г. Кушнір	Є. А. Черкез
Л. М. Голубенко	В. В. Менчук	Є. М. Черноіваненко
Л. М. Дунаєва	О. В. Сминтина	

Редакційна колегія серії

Математика і механіка

В. Є. Круглов (науковий редактор)
В. М. Євтухов (заступник наукового редактора)

A. Ashyralyev	A. A. Дороговцев	Ю. В. Нестеренко
L. Fridman	В. Й. Жуковський	A. П. Петравчук
I. Kátaı	M. I. Іванчов	В. В. Пічкур
A. Laurinćikas	A. Й. Калінін	A. В. Плотніков
C. K. Асланов	В. О. Капустян	В. Г. Самойленко
P. D. Банцурі	I. T. Кігурадзе	O. M. Станжицький
V. I. Берник	P. I. Когут	E. O. Стороженко
O. A. Бойчук	Ан. O. Кореновський	V. I. Суцанський
H. D. Вайсфельд	O. B. Костін	Ю. B. Теплінський
P. D. Варбанець	O. Ф. Кривий	P. C. Хапко
O. B. Вербицький	D. D. Лещенко	I. M. Черевко
O. H. Вітюк	A. D. Мілко	V. B. Шарко
G. O. Воропаєв	C. M. Мхитарян	I. A. Шевчук
I. M. Гашененко	O. B. Оніщук	G. A. Шинкаренко
D. B. Дмитришин	O. G. Наконечний	C. A. Щоголев

Відповідальний редактор — O. D. Кічмаренко

*«Вісник Одеського національного
університету. Математика і механіка»
внесений до Переліку наукових фахових
видань України постановою Президії ВАК
України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.*

© Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2013

ISSN 2304—1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK
ODESKOHO
NATSIONALNOHO
UNIVERSYTETU
(Odesa National University Herald)

Matematyka i Mekhanika
(*Mathematics and Mechanics*)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

Volume 18. Issue 3 (19). 2013

Odesa
«Astroprint»
2013

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

Editorial board of the journal

I. M. Koval (Editor-in-chief)
O. V. Zaporozhchenko (Deputy Editor-in-chief)
V. O. Ivanytsia (Deputy Editor-in-chief)
Ye. L. Streltsov (Deputy Editor-in-chief)

S. M. Andrievskiy	V. V. Zamorov	V. I. Truba
Yu. F. Vaksman	V. Ye. Kruglov	O. V. Tiurin
V. V. Glebov	V. G. Kushnir	Ye. A. Cherkez
L. M. Golubenko	V. V. Menchuk	Ye. M. Chernoiivanenko
L. M. Dunaeva	O. V. Smyntyna	

Editorial board of the series

Mathematics and mechanics

V. Ye. Kruglov (Scientific Editor)
V. M. Evtukhov (Deputy Scientific Editor)

A. Ashyralyev	A. A. Dorogovtsev	Yu. V. Nesterenko
L. Fridman	V. I. Zhukodsky	A. P. Petravchuk
I. Kátaí	M. I. Ivanchov	V. V. Pichkur
A. Laurinčikas	A. I. Kalinin	A. V. Plotnikov
S. K. Aslanov	V. O. Kapustyan	V. G. Samoilenko
R. D. Bantsuri	I. T. Kiguradze	O. M. Stanzhytskyi
V. I. Bernik	P. I. Kogut	E. O. Storozhenko
O. A. Boichuk	An. O. Korenovskiy	W. I. Sushchansky
N. D. Vaysfeld	O. V. Kostin	Yu. V. Teplinskyi
P. D. Varbanets	O. F. Kryvyy	R. S. Hapko
O. V. Verbitsky	D. D. Leshchenko	I. M. Cherevko
O. N. Vitjuk	A. D. Milko	V. V. Sharko
G. O. Voropaev	S. M. Mkhitaryan	I. A. Shevchuk
I. M. Gashenko	O. V. Onishchuk	G. A. Shynkarenko
D. V. Dmitrishin	O. G. Nakonechny	S. A. Schogolev

Executive Editor — O. D. Kichmarenko

© Odesa I. I. Mechnikov National University, 2013

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

<i>Агошкова Т. А., Пичугов С. А.</i> Аппроксимация анизотропных классов Липшица в метрических пространствах L_ψ	7
<i>Клопот А. М.</i> Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями	16
<i>Молчанюк И. В.</i> Нечеткие управляемые линейные дифференциальные включения с терминальным критерием качества	35
<i>Sergeev S. S.</i> Smarandache ceil function over $\mathbb{Z}[i]$	42

МЕХАНІКА

<i>Гребенюк С. М., Юречко В. З., Бова А. А.</i> Визначення напружено-деформованого стану гумового буфера на основі моментної схеми скінченного елемента	49
<i>Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В., Хазин Г. А.</i> Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред	59
<i>Процеров Ю. С.</i> Осесимметричные задачи теории упругости для цилиндра конечной длины со свободной цилиндрической поверхностью и учетом собственного веса	69
<i>Фесенко А. А.</i> Смешанная задача для бесконечной упругой плиты с учетом воздействия произвольно ориентированной внутренней силы	82
<i>Moysyeyenok A. P.</i> The study of the inertial properties of the exfoliated hard inclusion is in the conditions of smooth contact with a non-stationary waves	93
<i>Reut A. V.</i> The axisymmetrical problem on the stress state of the truncated hollow cone under the external loading	102

CONTENTS

M A T H E M A T I C S

<i>Agoshkova T. A., Pichugov S. A.</i> Approximation of anisotropic Lipschitz classes in metric spaces L_ψ	7
<i>Klopot A.</i> Asymptotic behavior of solutions of n -th order nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities	16
<i>Molchanyuk I. V.</i> Linear fuzzy control differential inclusions with the terminal quality criterion	35
<i>Sergeev S. S.</i> Smarandache ceil function over $\mathbb{Z}[i]$	42

M E C H A N I C S

<i>Grebenyuk S. N., Iurichko V. Z., Bova A. A.</i> Determination of stress-strain state of rubber buffer on the basis of finite element moment scheme	49
<i>Dudyk M. V., Dikhtiarenko Yu. V., Khazin G. A.</i> Stress-strain state near the tips of a mode I crack going out from angular point of an interface of media	59
<i>Protserov Yu. S.</i> Axisymmetric problems of elasticity theory for a cylinder of finite length with free cylindrical surface and with taking into account its own weight	69
<i>Fesenco A. A.</i> The space elasticity problem for the infinite layer with the presence of an arbitrary concentrated force inside the layer	82
<i>Moysyeyenok A. P.</i> The study of the inertial properties of the exfoliated hard inclusion is in the conditions of smooth contact with a non-stationary waves	93
<i>Reut A. V.</i> The axisymmetrical problem on the stress state of the truncated hollow cone under the external loading	102

МАТЕМАТИКА

Mathematical Subject Classification: 41A65, 41A17, 26A15, 26A16
УДК 517.5

Т. А. Агошкова, С. А. Пичугов

Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта
имени ак. В. Лазаряна

АППРОКСИМАЦИЯ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ ЛИПШИЦА
В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ L_ψ

Агошкова Т. А., Пичугов С. О. Аппроксимация анизотропных классов Липшица в метрических пространствах L_ψ . Для пространств, определенных функцией ψ – типа модуля непрерывности, доведены в багатомірному випадку пряма та обернена теорема типу Джексона та Бернштейна для усредненных приближений кусково-сталими функціями та отримана конструктивна характеристика анизотропных классов Липшица при підходящому розбитті тору періоду.

Ключові слова: модуль непрерывности, кусково-стала функція, пряма та обернена теорема типу Джексона та Бернштейна, анизотропний клас Липшица.

Агошкова Т. А., Пичугов С. А. Аппроксимация анизотропных классов Липшица в метрических пространствах L_ψ . Для пространств, определенных функцией ψ – типа модуля непрерывности, доказаны в многомерном случае прямая и обратная теоремы типа Джексона и Бернштейна для усредненных приближений кусочно-постоянными функциями и получена конструктивная характеристика анизотропных классов Липшица при подходящем разбиении тора периода.

Ключевые слова: модуль непрерывности, кусочно-постоянная функция, прямая и обратная теоремы типа Джексона и Бернштейна, анизотропный класс Липшица.

Agoshkova T. A., Pichugov S. A. Approximation of anisotropic Lipschitz classes in metric spaces L_ψ . For spaces defined by the function ψ of the type of modulus of continuity, we prove the direct and converse Jackson- and Bernstein-type theorems for the mean approximations by piecewise constant functions and we obtain a constructive characterization of anisotropic Lipschitz classes for a suitable partition of the period torus.

Key words: modulus of continuity, piecewise constant function, direct and converse Jackson- and Bernstein- type theorems, anisotropic Lipschitz class.

ВВЕДЕНИЕ. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^m точек $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$, $m \geq 1$. Пусть $f(\mathbf{x})$ – действительнзначные функции, имеющие период 1 по каждой переменной; $T^m = [0, 1]^m$ – основной тор периодов; $L_0(T^m)$ – множество всех таких функций, которые почти всюду на T^m конечны и измеримы; Ω – класс функций $\psi : \mathbb{R}_+^1 \rightarrow \mathbb{R}_+^1$, являющихся модулями непрерывности, то есть ψ – непрерывная неубывающая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(x + y) \leq \psi(x) + \psi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}_+^1$.

$L_\psi(T^m) = \{f \in L_0(T^m) : \|f\|_\psi := \int_{T^m} \psi(|f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x} < \infty\}$ – линейное метрическое пространство с метрикой $\rho(f, g)_\psi = \|f - g\|_\psi$. Среди пространств L_ψ важнейшими являются пространства $L_p(T^m)$, $0 < p \leq 1$ (случай $\psi(t) = t^p$) и $L_0(T^m)$ с топологией сходимости по мере: $\|f\|_0 = \int_{T^m} \psi(|f(\mathbf{x})|) d\mathbf{x}$, $\psi(t) = \frac{t}{1+t}$.

Определение 1. Под модулем непрерывности функции f в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}_+^1$ будем понимать

$$\omega(f, h)_\psi = \sup_{\|t\|_\infty \leq h} \|\Delta_t f\|_\psi,$$

где $\|t\|_\infty = \max_{i=1 \dots m} |t_i|$, $\Delta_t f(\mathbf{x}) = f_t(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$, $f_t(\mathbf{x}) = f(x_1 + t_1, \dots, x_m + t_m)$.

Определение 2. Для $\alpha \in (0, 1]$ определим классы Липшица

$$\Lambda_\psi^\alpha(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m) : \omega(f, h)_\psi \leq C_f h^\alpha, h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\}.$$

Для каждой из m координатных осей отрезок $[0, 1]$ разбиваем на отрезки равной длины с помощью 2^{j_k} равноотстоящих точек вида:

$$\frac{i_k}{2^{j_k}}, \quad i_k = 0, 1, \dots, 2^{j_k} - 1,$$

где индекс k ($k = 1, \dots, m$) указывает номер оси.

Таким образом получаем разбиение основного тора T^m на $2^{\sum_{k=1}^m j_k}$ параллелепипедов вида:

$$\Pi_{i_1 \dots i_m} = \{\mathbf{x} \in T^m : \frac{i_k}{2^{j_k}} \leq x_k < \frac{i_k + 1}{2^{j_k}}, k = 1, \dots, m\}, \quad (1)$$

где $i_k = 0, 1, \dots, 2^{j_k} - 1$, $k = 1, \dots, m$.

Определение 3. Определим через $L_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}$ пространство 1-периодических кусочно-постоянных функций $l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}$, заданных следующим образом:

$$l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} b_{i_1 \dots i_m} \chi_{\Pi_{i_1 \dots i_m}}(\mathbf{x}),$$

где $b_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{R}^1$ и $\chi_{\Pi_{i_1 \dots i_m}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Pi_{i_1 \dots i_m} \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Pi_{i_1 \dots i_m}. \end{cases}$

Определение 4. $\bar{E}_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f)_\psi = \inf_{l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}} \in L_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}} \int_{T^m} \|f_t - l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}\|_\psi dt$ – усредненное приближение на периоде в метрике $L_\psi(T^m)$ функции f элементами подпространства $L_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}$.

Определение 5. Под частным модулем непрерывности функции f по переменной x_k ($1 \leq k \leq m$) в пространстве $L_\psi(T^m)$ при $h \in \mathbb{R}_+^1$ будем понимать

$$\omega_k(f, h)_\psi = \sup_{|t_k| \leq h} \|\Delta_{t_k \mathbf{e}_k} f\|_\psi, \quad k = 1, \dots, m,$$

где $\Delta_{t_k \mathbf{e}_k} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + t_k \mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})$, \mathbf{e}_k – вектор, k -я координата которого равна 1, а остальные координаты – нули.

Определение 6. Для $\alpha_i \in (0, 1]$, $i = 1, \dots, m$, определим анизотропные классы Липшица

$$\Lambda_\psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(T^m) = \{f \in L_\psi(T^m) : \exists C, \omega_k(f, h)_\psi \leq Ch^{\alpha_k}, h \in \left(0, \frac{1}{2}\right), k = 1, \dots, m\}.$$

Для периодических функций одной переменной из L_p при $0 < p < 1$, в случае приближения тригонометрическими полиномами, прямая и обратная теоремы Джексона были доказаны независимо в [1] и [2]. Из них следовала конструктивная характеристика классов Липшица $\Lambda_p^\alpha(T^1)$:

Теорема. [1], [2]. Пусть $f \in L_p(T^1)$, $0 < p < 1$. Тогда при $\forall \alpha \in (0, p)$ имеет место эквивалентность

$$f \in \Lambda_p^\alpha(T^1) \Leftrightarrow E_n^*(f)_p \leq C \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha, n \geq 0,$$

где $E_n^*(f)_p = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_p = \inf_{T_n} \int_0^1 |f(x) - T_n(x)|^p dx$ – наилучшее приближение f в $L_p(T^1)$ тригонометрическими полиномами степени не выше n .

А для периодических функций одной переменной из $L_\psi(T^1)$ прямая и обратная теоремы Джексона, в случае приближения тригонометрическими полиномами, были получены в [3], [4]. Выяснилось, что справедливость этих теорем зависит от нижнего показателя растяжения γ_ψ функции ψ .

Определение 7. [5, с. 75]. Пусть $\varphi(t)$, $t \in (0, \infty)$, – произвольная строго положительная всюду конечная функция. Ее функцией растяжения называют функцию $M_\varphi(s)$, $s \in (0, \infty)$,

$$M_\varphi(s) = \sup_{0 < t < \infty} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}.$$

Общие свойства M_φ в [5, с. 75-78].

Определение 8. γ_φ – нижний показатель растяжения функции $\varphi(t) \in \Omega$, то есть:

- 1) $\gamma_\varphi \in [0, 1]$;
- 2) $M_\varphi(s) \geq s^{\gamma_\varphi}$, $\forall s \in (0, 1]$;
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists C_\varepsilon$:

$$M_\varphi(s) \leq C_\varepsilon s^{\gamma_\varphi - \varepsilon}, s \in (0, 1).$$

Теорема. [3].

1. Если $\gamma_\psi > 0$, то имеют место неравенства Джексона

$$\sup_n \sup_{\substack{f \in L_\psi(T^1), \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n^*(f)_\psi}{\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_\psi} < \infty.$$

2. Если $\gamma_\psi = 0$, то неравенства Джексона в форме

$$\sup_n \sup_{\substack{f \in L_\psi(T^1), \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_n^*(f)_\psi}{\omega(f, \alpha_n)_\psi} < \infty$$

невозможны ни при каком выборе последовательности $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \downarrow 0$.

Теорема. [4]. Пусть $\gamma_\psi > 0$. Тогда найдется константа $C = C(\psi)$ такая, что для всех $f \in L_\psi(T^1)$ и всех $h \in (0, \frac{1}{2}]$ имеют место неравенства

$$\omega(f, h)_\psi \leq C \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} \frac{M_\psi(jh)}{j} E_{j-1}^*(f)_\psi.$$

Конструктивная характеристика классов Липшица $\Lambda_\psi^\alpha(T^1)$:

Следствие. [4]. Пусть $f \in L_\psi(T^1)$ и $\gamma_\psi > 0$, тогда при $\forall \alpha \in (0, \gamma_\psi)$ имеет место эквивалентность

$$f \in \Lambda_\psi^\alpha(T^1) \Leftrightarrow E_{n-1}^*(f)_\psi \leq K_f \left(\frac{1}{n} \right)^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в случае приближения тригонометрическими полиномами, в пространствах $L_\psi(T^1)$ при $\gamma_\psi = 0$, например в L_0 , теорем Джексона нет, а значит и нет возможности получить конструктивную характеристику классов Липшица.

В [6] для периодических функций одной переменной из $L_\psi(T^1)$ доказаны прямая и обратная теоремы Джексона для усредненной аппроксимации кусочно-постоянными функциями с равномерным разбиением, откуда следовала конструктивная характеристика классов Липшица $\Lambda_\psi^\alpha(T^1)$:

Теорема. [6]. Для $\forall \psi \in \Omega$, $\forall f \in L_\psi(T^1)$ и $\forall \alpha \in (0, 1)$ имеет место эквивалентность

$$f \in \Lambda_\psi^\alpha(T^1) \Leftrightarrow \bar{E}_{2^k}(f)_\psi \leq C \left(\frac{1}{2^k} \right)^\alpha, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В этом проявилось преимущество аппроксимации кусочно-постоянными функциями в сравнении с приближением тригонометрическими полиномами.

В [7] получен многомерный аналог прямой и обратной теорем Джексона для аппроксимации кусочно-постоянными функциями с равномерным разбиением тора периода и, как следствие, получена конструктивная характеристика изотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^\alpha(T^m)$:

Теорема. [7]. Для $\forall \psi \in \Omega$, $\forall f \in L_\psi(T^m)$ и $\forall \alpha \in (0, 1)$ имеет место эквивалентность

$$f \in \Lambda_\psi^\alpha(T^m) \Leftrightarrow \bar{E}_{2^k \dots 2^k}(f)_\psi \leq C \left(\frac{1}{2^k} \right)^\alpha, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В настоящей работе, в случае приближения кусочно-постоянными функциями с разбиением на m -мерные параллелепипеды основного тора периода, для усредненных приближений доказаны прямая и обратная теоремы Джексона. И при подходящем разбиении получена конструктивная характеристика анизотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(T^m)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Прямая и обратная теоремы Джексона.

Теорема 1. Для $\forall \psi \in \Omega$ и $\forall f \in L_\psi(T^m)$ справедливы неравенства:

$$\bar{E}_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f)_\psi \leq \sum_{k=1}^m \omega_k \left(f, \frac{1}{2^{j_k}} \right)_\psi. \quad (2)$$

Доказательство. Для оценки сверху достаточно ограничиться всюду плотным в L_ψ множеством непрерывных функций. В качестве аппроксимирующей функции выберем следующим образом определенную функцию $l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}$ из $L_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}$:

$$\begin{aligned} l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f, \mathbf{x}) &= \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} f \left(\frac{i_1}{2^{j_1}}, \dots, \frac{i_m}{2^{j_m}} \right) \chi_{\Pi_{i_1, \dots, i_m}}(\mathbf{x}). \\ \bar{E}_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f)_\psi &= \inf_{l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}} \in L_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}} \int_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}\|_\psi d\mathbf{t} \leq \\ &\leq \int_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f_{\mathbf{t}})\|_\psi d\mathbf{t} = \int_{T^m} \int_{T^m} \psi(|f_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - l_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f_{\mathbf{t}}, \mathbf{x})|) d\mathbf{x} d\mathbf{t} = \\ &= \int_{T^m} \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} \int_{\frac{i_1}{2^{j_1}}}^{\frac{i_1+1}{2^{j_1}}} \dots \int_{\frac{i_m}{2^{j_m}}}^{\frac{i_m+1}{2^{j_m}}} \psi(|f_{\mathbf{t}}(x_1, \dots, x_m) - f_{\mathbf{t}}\left(\frac{i_1}{2^{j_1}}, \dots, \frac{i_m}{2^{j_m}}\right)|) dx_1 \dots dx_m d\mathbf{t} = \\ &= \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} \int_{\frac{i_1}{2^{j_1}}}^{\frac{i_1+1}{2^{j_1}}} \dots \int_{\frac{i_m}{2^{j_m}}}^{\frac{i_m+1}{2^{j_m}}} \int_{T^m} \psi(|f_{\mathbf{t}}(x_1 + \frac{i_1}{2^{j_1}}, \dots, x_m + \frac{i_m}{2^{j_m}}) - f(\mathbf{t})|) dt dx_1 \dots dx_m = \\ &= \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} \int_0^{\frac{1}{2^{j_1}}} \dots \int_0^{\frac{1}{2^{j_m}}} \int_{T^m} \psi(|f(x_1 + t_1, \dots, x_m + t_m) - f(\mathbf{t})|) dt dx_1 \dots dx_m. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно полученное подинтегральное выражение

$$\begin{aligned} &\psi(|f(x_1 + t_1, \dots, x_m + t_m) - f(t_1, \dots, t_m)|) \leq \\ &\leq \psi(|f(t_1 + x_1, \dots, t_m + x_m) - f(t_1, t_2 + x_2, \dots, t_m + x_m)|) + \\ &+ \psi(|f(t_1, t_2 + x_2, \dots, t_m + x_m) - f(t_1, t_2, t_3 + x_3, \dots, t_m + x_m)|) + \\ &+ \dots + \psi(|f(t_1, \dots, t_{m-1}, t_m + x_m) - f(t_1, \dots, t_m)|). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} &\bar{E}_{2^{j_1} \dots 2^{j_m}}(f)_\psi \leq \\ &\leq \sum_{i_1=0}^{2^{j_1}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m}-1} \int_0^{\frac{1}{2^{j_1}}} \dots \int_0^{\frac{1}{2^{j_m}}} (\|\Delta_{x_1 \mathbf{e}_1} f\|_\psi + \dots + \|\Delta_{x_m \mathbf{e}_m} f\|_\psi) dx_1 \dots dx_m = \\ &= 2^{j_1} \cdot \dots \cdot 2^{j_m} \int_0^{\frac{1}{2^{j_1}}} \dots \int_0^{\frac{1}{2^{j_m}}} \sum_{k=1}^m \|\Delta_{x_k \mathbf{e}_k} f\|_\psi dx_1 \dots dx_m = \\ &= \sum_{k=1}^m 2^{j_k} \int_0^{\frac{1}{2^{j_k}}} \|\Delta_{x_k \mathbf{e}_k} f\|_\psi dx_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) следует (2). Теорема 1 доказана.

Пусть $\{j_k(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ – монотонно возрастающие последовательности натуральных чисел $j_k(\nu)$ при каждом фиксированном k , где $k = 1, \dots, m$. При фиксированном k ($k = 1, \dots, m$) с помощью последовательности $\{j_k(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ устраиваем разбиение соответствующей k -ой оси равноотстоящими точками:

$$\frac{i_k}{2^{j_k(\nu)}}, \quad i_k = 0, 1, \dots, 2^{j_k(\nu)} - 1.$$

Для удобства обозначим

$$\bar{E}_{2^{Q_\nu}}(f)_\psi := \bar{E}_{2^{j_1(\nu)} \dots 2^{j_m(\nu)}}(f)_\psi, \quad l_{2^{Q_\nu}} := l_{2^{j_1(\nu)} \dots 2^{j_m(\nu)}}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Далее получим неравенства типа Бернштейна для приращений кусочно-постоянных функций, которые будут использованы при доказательстве обратной теоремы Джексона.

Лемма. Для любой функции $l_{2^{Q_\nu}}$ из $L_{2^{Q_\nu}}$, $\nu = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, при $h_k \in (0, \frac{1}{2^{j_k(n)}}]$ и для $|t_k| \leq h_k$ выполняются неравенства:

$$\|\Delta_{t_k e_k} l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi \leq h_k 2^{j_k(\nu)+1} \|l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $l_{2^{Q_\nu}} \in L_{2^{Q_\nu}}$, $\nu = 1, \dots, n$, тогда

$$\begin{aligned} \|l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi &= \sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1} \int_{\frac{i_1}{2^{j_1(\nu)}}}^{\frac{i_1+1}{2^{j_1(\nu)}}} \dots \int_{\frac{i_m}{2^{j_m(\nu)}}}^{\frac{i_m+1}{2^{j_m(\nu)}}} \psi(|b_{i_1 \dots i_m}|) dx_1 \dots dx_m = \\ &= \prod_{s=1}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}} \sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1} \psi(|b_{i_1 \dots i_m}|). \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $h_k \leq \frac{1}{2^{j_k(n)}}$, $k = 1, \dots, m$, то :

$$\begin{aligned} \|\Delta_{t_k e_k} l_{2^{Q_\nu}}\|_\psi &= \int_{T^m} \psi(|\Delta_{t_k e_k} l_{2^{Q_\nu}}|) dx \leq \\ &\leq 2 \sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1} \dots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1} \psi(|b_{i_1 \dots i_m}|) \mu \left(\Pi_{i_1 \dots i_{k-1} \quad i_k+t_k 2^{j_k} \quad i_{k+1} \dots i_m} / \Pi_{i_1 \dots i_m} \right), \end{aligned}$$

где $\mu(A)$ – m -мерная мера Лебега множества A .

Из определения разбиения (1) получаем

$$\mu(\Pi_{i_1 \dots i_m}) = \prod_{s=1}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu(\Pi_{i_1 \dots i_{k-1} \quad i_k+t_k 2^{j_k} \quad i_{k+1} \dots i_m} / \Pi_{i_1 \dots i_m}) &= \prod_{s=1}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}} - \\ - \left(\frac{1}{2^{j_k(\nu)}} - t_k \right) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}} &\leq \prod_{s=1}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}} (1 - (1 - 2^{j_k(\nu)} h_k)) = \\ &= 2^{j_k(\nu)} h_k \prod_{s=1}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает

$$\begin{aligned} \|\Delta_{t_k \mathbf{e}_k} l_{2Q_\nu}\|_\psi &\leq 2^{j_k(\nu)+1} h_k \prod_{s=1}^m \frac{1}{2^{j_s(\nu)}} \sum_{i_1=0}^{2^{j_1(\nu)}-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{2^{j_m(\nu)}-1} \psi(|b_{i_1 \dots i_m}|) = \\ &= 2^{j_k(\nu)+1} h_k \|l_{2Q_\nu}\|_\psi, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \dots, m$.

Лемма доказана.

Теорема 2. Для $\forall \psi \in \Omega$ и $\forall f \in L_\psi(T^m)$ при условии, что последовательности натуральных чисел $\{j_k(\nu)\}_{\nu=1}^n$ — монотонно возрастающие при каждом фиксированном k , где $k = 1, \dots, m$ и $n \in \mathbb{N}$, справедливы неравенства:

$$\omega_k \left(f, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi \leq \frac{1}{2^{j_k(n)-2}} \sum_{\nu=1}^n 2^{j_k(\nu)} \bar{E}_{2Q_\nu}(f)_\psi, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Доказательство. Фиксируем n . Так как $(l_{2Q_\nu} - l_{2Q_{\nu-1}})$ — кусочно-постоянная функция, то по лемме для $\nu \leq n$ имеем

$$\omega_k \left(l_{2Q_\nu} - l_{2Q_{\nu-1}}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi \leq \frac{1}{2^{j_k(n)}} 2^{j_k(\nu)} \|l_{2Q_\nu} - l_{2Q_{\nu-1}}\|_\psi. \quad (8)$$

Для заданной f и произвольного $\varepsilon > 0$ выберем l_{2Q_ν} , $\nu = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям:

$$\int_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - l_{2Q_\nu}\|_\psi d\mathbf{t} < \bar{E}_{2Q_\nu}(f)_\psi + \varepsilon. \quad (9)$$

Тогда, учитывая (8) и (9), получаем

$$\begin{aligned} \omega_k \left(f, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi &= \int_{T^m} \omega_k \left(f_{\mathbf{t}}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi d\mathbf{t} \leq \int_{T^m} \omega_k \left(f_{\mathbf{t}} - l_{2Q_n}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi d\mathbf{t} + \\ &+ \omega_k \left(l_{2Q_n}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi = \int_{T^m} \omega_k \left(f_{\mathbf{t}} - l_{2Q_n}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi d\mathbf{t} + \\ + \omega_k \left(l_{2Q_0} + \sum_{\nu=1}^n (l_{2Q_\nu} - l_{2Q_{\nu-1}}), \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi &\leq \int_{T^m} \omega_k \left(f_{\mathbf{t}} - l_{2Q_n}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi d\mathbf{t} + \\ &+ \sum_{\nu=1}^n \omega_k \left(l_{2Q_\nu} - l_{2Q_{\nu-1}}, \frac{1}{2^{j_k(n)}} \right)_\psi \leq 2 \int_{T^m} \|f_{\mathbf{t}} - l_{2Q_n}\|_\psi d\mathbf{t} + \\ &+ \frac{1}{2^{j_k(n)}} \sum_{\nu=1}^n 2^{j_k(\nu)} \int_{T^m} \|l_{2Q_\nu} - f_{\mathbf{t}} + f_{\mathbf{t}} - l_{2Q_{\nu-1}}\|_\psi d\mathbf{t} < 2 (\bar{E}_{2Q_n}(f)_\psi + \varepsilon) + \\ + \frac{1}{2^{j_k(n)}} \sum_{\nu=1}^n 2^{j_k(\nu)} 2 (\bar{E}_{2Q_\nu}(f)_\psi + \varepsilon) &\leq 2\varepsilon + 2 \frac{1}{2^{j_k(n)}} \sum_{\nu=1}^n 2^{j_k(\nu)} 2 (\bar{E}_{2Q_\nu}(f)_\psi + \varepsilon) = \\ &= \frac{1}{2^{j_k(n)-2}} \sum_{\nu=1}^n 2^{j_k(\nu)} \bar{E}_{2Q_\nu}(f)_\psi + 2\varepsilon \left(1 + \frac{1}{2^{j_k(n)-1}} \sum_{\nu=1}^n 2^{j_k(\nu)} \right), \end{aligned}$$

и ввиду произвольности ε отсюда следует (7).

Теорема 2 доказана.

2. Конструктивная характеристика анизотропных классов Липшица.

Теорема 3. Для $\forall \psi \in \Omega$, $\forall f \in L_\psi(T^m)$ и $\forall \alpha_k \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m$, имеет место эквивалентность:

$$f \in \Lambda_\psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \Leftrightarrow \overline{E}_{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_1} \rfloor} \dots 2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_m} \rfloor}}(f)_\psi \leq A \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\tilde{\alpha}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\tilde{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_m}}$ и A – константа, не зависящая от n .

Доказательство. Положим $j_k(\nu) = \lfloor \nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor$, где $\nu \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, m$.

Необходимость. Пусть $f \in \Lambda_\psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(T^m)$. Тогда, применяя теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} \overline{E}_{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_1} \rfloor} \dots 2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_m} \rfloor}}(f)_\psi &\leq \sum_{k=1}^m \omega_k \left(f, \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)_\psi \leq C \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)^{\alpha_k} < \\ &< C \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor - 1}} \right)^{\alpha_k} = C \sum_{k=1}^m 2^{\alpha_k} \left(\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)^{\alpha_k} = A \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\tilde{\alpha}}, \end{aligned}$$

где A – константа, не зависящая от n .

Достаточность. Пусть для любой функции $f \in L_\psi$ и $\forall \alpha_k \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m$, выполняются неравенства

$$\overline{E}_{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_1} \rfloor} \dots 2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_m} \rfloor}}(f)_\psi \leq A \left(\frac{1}{2^n} \right)^{\tilde{\alpha}}. \quad (10)$$

При каждом фиксированном k ($k = 1, 2, \dots, m$) последовательности $\left\{ \left\lfloor \nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \right\rfloor \right\}_{\nu=1}^n$ монотонно возрастают, поэтому по теореме 2 при $h_k = \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}}$ и, учитывая (10), получаем

$$\begin{aligned} \omega_k(f, h_k)_\psi &= \omega_k \left(f, \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)_\psi \leq \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor - 2}} \sum_{\nu=1}^n 2^{\lfloor \nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor} \overline{E}_{2^{\lfloor \nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_1} \rfloor} \dots 2^{\lfloor \nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_m} \rfloor}}(f)_\psi \leq \\ &\leq A \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor - 2}} \sum_{\nu=1}^n 2^{\lfloor \nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor} \left(\frac{1}{2^\nu} \right)^{\tilde{\alpha}} < A \frac{1}{2^{\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} - 3}} \sum_{\nu=1}^n 2^{\nu \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k}} \left(\frac{1}{2^\nu} \right)^{\tilde{\alpha}} = \\ &= \frac{A_1}{2^{\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k}}} \sum_{\nu=1}^n \left(2^{\tilde{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right)} \right)^\nu \leq \frac{A_2}{2^{\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k}}} 2^{n \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha_k} - 1 \right)} = A_2 \left(\frac{1}{2^{\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k}}} \right) = \\ &= A_2 \left(\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)^{\alpha_k} \leq A_2 \left(\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

где A_2 – константа, не зависящая от n .

Теперь для произвольного $h_k \in (0, \frac{1}{2}]$ ($k = 1, \dots, m$) найдем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \leq h_k < \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor - 1}}$. Тогда

$$\omega_k(f, h_k)_\psi \leq \omega_k \left(f, \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor - 1}} \right)_\psi \leq 2 \omega_k \left(f, \frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)_\psi \leq B \left(\frac{1}{2^{\lfloor n \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha_k} \rfloor}} \right)^{\alpha_k} \leq B h_k^{\alpha_k},$$

где B – константа, не зависящая от n .

Теорема 3 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В представленной статье для усредненных приближений функций многих переменных доказаны прямая и обратная теоремы Джексона в случае приближения кусочно-постоянными функциями с разбиением на m -мерные параллелепипеды основного тора периода в пространствах L_ψ . Важнейшими представителями пространств L_ψ являются пространства L_p , $0 \leq p \leq 1$. При подходящем разбиении удалось получить конструктивную характеристику анизотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(T^m)$, которая, в случае когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha$, дает конструктивную характеристику изотропных классов Липшица $\Lambda_\psi^\alpha(T^m)$.

1. **Стороженко Э. А.** Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p , $0 < p < 1$ / Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд // *Мат. сб.* – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415.
2. **Иванов В. И.** Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ / В. И. Иванов // *Мат. заметки.* – 1975. – Т. 18, № 5. – С. 641–658.
3. **Пичугов С. А.** О теореме Джексона для периодических функций в метрических пространствах с интегральной метрикой. II / С. А. Пичугов // *Укр. мат. журн.* – 2011. – Т. 63, № 11. – С. 1524–1533.
4. **Пичугов С. А.** Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой / С. А. Пичугов // *Укр. мат. журн.* – 2012. – Т. 64, № 11. – С. 351–362.
5. **Крейн С. Г.** Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
6. **Пичугов С. А.** Аппроксимация измеримых периодических функций по мере кусочно-постоянными функциями / С. А. Пичугов // *Укр. мат. журн.* – 1996. – Т. 48, № 5. – С. 711–715.
7. **Агошкова Т. А.** Аппроксимация в метрических пространствах периодических функций многих переменных кусочно-постоянными функциями / Т. А. Агошкова // *Укр. мат. журн.* – 2013. – Т. 65, № 10. – С. 1303–1314.

Mathematical Subject Classification: 34E10, 34A34
УДК 517.925

А. М. Клопот

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ
НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ N -ГО ПОРЯДКА С ПРАВИЛЬНО
МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ**

Клопот О. М. Асимптотична поведінка розв'язків неавтономних звичайних диференціальних рівнянь n -ого порядку з правильно змінними нелінійностями. Встановлюються умови існування і асимптотичні при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) представлення одного класу монотонних розв'язків диференціального рівняння n -го порядку, яке містить в правій частині суму нелінійних складових, що змінюються правильно.

Ключові слова: правильно змінні функції, звичайні диференціальні рівняння, асимптотична поведінка розв'язків.

Клопот А. М. Асимптотическое поведение решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. Устанавливаются условия существования и асимптотические при $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) представления одного класса монотонных решений у дифференциального уравнения n -го порядка, содержащего в правой части сумму слагаемых с правильно меняющимися нелинейностями.

Ключевые слова: правильно меняющиеся функции, обыкновенные дифференциальные уравнения, асимптотическое поведение решений.

Klopot A. Asymptotic behavior of solutions of n -th order nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities. Established existence conditions and asymptotic at $t \uparrow \omega$ ($\omega \leq +\infty$) representations of single class of monotonic solutions of differential equations of n -th order, in the right part containing made up sum with regularly varying nonlinearities.

Key words: regularly varying functions, ordinary differential equations, the asymptotic behavior of solutions.

ВВЕДЕНИЕ.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}), \quad (1.1)$$

где $n \geq 2$, $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ ($k = \overline{1, m}$), $p_k : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($k = \overline{1, m}$) – непрерывные функции, $\varphi_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ ($k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}$) – непрерывные и правильно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции порядков σ_{kj} , $-\infty < a < \omega \leq +\infty$ ¹, Δ_{Y_j}

¹Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$, и $\omega - 1 < a < \omega$ при $\omega < +\infty$.

- односторонняя окрестность Y_j , Y_j равно либо 0, либо $\pm\infty$. При этом предполагается, что числа ν_j ($j = \overline{0, n-1}$), определяемые следующим образом

$$\nu_j = \begin{cases} 1, & \text{если } Y_j = +\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} - \text{правая окрестность } 0, \\ -1, & \text{если } Y_j = -\infty, \text{ либо} \\ & Y_j = 0 \text{ и } \Delta_{Y_j} - \text{левая окрестность } 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

таковы, что

$$\nu_j \nu_{j+1} > 0 \text{ при } Y_j = \pm\infty, \quad \nu_j \nu_{j+1} < 0 \text{ при } Y_j = 0 \quad (j = \overline{0, n-2}). \quad (1.3)$$

Эти условия на ν_j ($j = \overline{0, n-1}$) являются необходимыми для существования у уравнения (1.1) решений, определенных в левой окрестности ω , каждое из которых удовлетворяет условиям

$$y^{(j)}(t) \in \Delta_{Y_j} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[\quad , \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(j)}(t) = Y_j \quad (j = \overline{0, n-1}). \quad (1.4)$$

Среди строго монотонных вместе с производными до порядка $n-1$ включительно в некоторой левой окрестности ω решений уравнения (1.1) они представляют наибольший теоретический интерес, поскольку каждое из остальных допускает лишь одно из представлений вида

$$y(t) = \pi_\omega^{k-1}(t)[c_{k-1} + o(1)] \quad (k = \overline{1, n}),$$

где c_{k-1} ($k = \overline{1, n}$) — отличные от нуля вещественные постоянные и

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{если } \omega < +\infty. \end{cases} \quad (1.5)$$

Ввиду отсутствия для решений со свойствами (1.4) конкретных асимптотических представлений возникает необходимость выделения из них класса решений, допускающих получение таких представлений. Один из таких достаточно широких классов решений был введен в работах [1]-[3], посвященных обобщенным уравнениям типа Эмдена-Фаулера n -го порядка вида

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \prod_{j=0}^{n-1} |y^{(j)}|^{\sigma_j}.$$

Для уравнения (1.1) этот класс определяется следующим образом.

Определение 1. Решение y уравнения (1.1), заданное на промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением, где $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, если для него наряду с (1.4) соблюдается условие

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(n-1)}(t)]^2}{y^{(n-2)}(t)y^{(n)}} = \lambda_0. \quad (1.6)$$

Если y — решение со свойствами (1.4) дифференциального уравнения (1.1) и при этом функции $\ln |y^{(n-1)}(t)|$ и $\ln |\pi_\omega(t)|$ сравнимы порядка один (см. Н. Бурбаки [4], гл. 5, §4,5, стр. 296-301)) при $t \uparrow \omega$, то нетрудно проверить, что данное решение является $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением при некотором значении λ_0 , зависящем от значения предела $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$.

Кроме того, используя предложения 1, 2, 5 и 9 (о свойствах правильно меняющихся функций) из монографии V. Marić [5, Appendix, pp. 115-117], можно доказать, что в случае правильно меняющихся при $t \uparrow \omega$ коэффициентов p_k ($k = \overline{1, m}$) уравнения (1.1) каждое его правильно меняющееся при $t \uparrow \omega$ решение со свойствами (1.4) является $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решением при некотором конечном или равном $\pm\infty$ значении λ_0 .

Ранее в работах [5]–[7] для частного случая уравнения (1.1)

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi(y)$$

устанавливались асимптотические свойства стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ ($\omega = +\infty$) решений. Вопрос об асимптотике $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений исследовался в [8]–[13] и некоторых других работах для уравнений вида

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y) \varphi_1(y'), \quad y'' = \sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{k0}(y) \varphi_{k1}(y'),$$

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t) \varphi(y) \quad (n \geq 2).$$

При $n \geq 2$ и $m \geq 1$ уравнение (1.1) рассматривалось в [14] и [15]. Здесь при некотором ограничении на коэффициенты p_k ($k = \overline{1, m}$) были получены необходимые и достаточные условия существования у него $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений в случаях, когда $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, $\lambda_0 = \pm\infty$ и $\lambda_0 = 1$. При этом также были выписаны асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных до порядка $n - 1$ включительно.

Целью настоящей работы является установление такого же типа результатов для $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений уравнения (1.1) в особом случае, когда $\lambda_0 = 0$.

В силу результатов из [3] данные решения уравнения (1.1) обладают следующими априорными асимптотическими свойствами.

Лемма 1. Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решение уравнения (1.1). Тогда при $t \uparrow \omega$ имеют место асимптотические соотношения

$$y^{(k-1)}(t) \sim \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-k-1}}{(n-k-1)!} y^{(n-2)}(t) \quad (k = \overline{1, n-2})^1, \quad (1.7)$$

$$y^{(n-1)}(t) = o\left(\frac{y^{(n-2)}(t)}{\pi_\omega(t)}\right) \quad (1.8)$$

и в случае существования (конечного или равного $\pm\infty$) предела $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$

$$y^{(n)}(t) \sim \frac{-1}{\pi_\omega(t)y^{(n-1)}(t)} \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (1.9)$$

¹При $n = 2$ эти соотношения отсутствуют.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Для формулировки установленных теорем потребуются некоторые вспомогательные обозначения и одно определение.

В силу определения правильно меняющейся функции (см. [16], Гл. 1, п. 1.1, стр. 9-10) нелинейности в (1.1) представимы в виде

$$\varphi_{kj} \left(y^{(j)} \right) = \left| y^{(j)} \right|^{\sigma_{kj}} L_{kj} \left(y^{(j)} \right) \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}), \quad (2.1)$$

где $L_{kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ непрерывные (медленно меняющиеся при $y^j \rightarrow Y_j$) функции, т.е. такие, для которых при любом $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}(\lambda y^{(j)})}{L_{kj}(y^{(j)})} = 1 \quad (k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1}). \quad (2.2)$$

Также известно (см. [16], гл. 1, п. 1.2, стр. 10–15), что предельные соотношения (2.2) выполняются равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1) и существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y^{(j)} \rightarrow Y_j$ функции $L_{0kj} : \Delta_{Y_j} \rightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2) такие, что

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{L_{kj}(y^{(j)})}{L_{0kj}(y^{(j)})} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{Y_j}}} \frac{y^{(j)} L'_{0kj}(y^{(j)})}{L_{0kj}(y^{(j)})} = 0. \quad (2.3)$$

$$(k = \overline{1, m}; j = \overline{0, n-1})$$

Определение 2. Будем говорить, что медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$, где Z_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, и Δ_{Z_0} - односторонняя окрестность Z_0 , удовлетворяет условию S_0 , если

$$L \left(\nu e^{[1+o(1)] \ln |z|} \right) = L(z)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad z \rightarrow Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}),$$

где $\nu = \text{sign } z$.

Замечание 1. Если медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0 , то для любой медленно меняющейся при $z \rightarrow Z_0$ функции $l : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$

$$L(zl(z)) = L(z)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad z \rightarrow Z_0 \quad (z \in \Delta_{Z_0}).$$

Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы о представлении (см. [16], гл. 1, §1.2, стр. 10) медленно меняющейся функции l и свойства M_1 функции L .

Замечание 2. (см. [13]) Если медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0 , а функция $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} [r + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L(y(t)) = L(\nu |\xi(t)|^r) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

где $\nu = \text{sign } y(t)$ в левой окрестности ω .

Замечание 3. Если медленно меняющаяся при $z \rightarrow Z_0$ функция $L : \Delta_{Z_0} \rightarrow]0, +\infty[$ удовлетворяет условию S_0 , а функция $r : \Delta_{Z_0} \times K \rightarrow \mathbb{R}$, где K — компакт в \mathbb{R}^m , такова, что

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} r(z, v) = 0 \quad \text{равномерно по } v \in K,$$

то

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{L(\nu e^{[1+r(z,v)] \ln |z|})}{L(z)} = 1 \quad \text{равномерно по } v \in K, \quad \text{где } \nu = \text{sign } z.$$

В самом деле, если бы это было не так, то существовали бы последовательность $\{v_n\} \in K$ и последовательность $\{z_n\} \in \Delta_{Z_0}$, сходящаяся к Z_0 , такие, что соблюдалось бы неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{L(\nu e^{[1+r(z_n, v_n)] \ln |z_n|})}{L(z_n)} - 1 \right| > 0. \quad (2.4)$$

При этом ясно, что существует функция $v : \Delta_{Z_0} \rightarrow K$ такая, что $v(z_n) = v_n$. Для этой функции, очевидно, $\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} r(z, v(z)) = 0$ и поэтому

$$\lim_{\substack{z \rightarrow Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}}} \frac{L(\nu e^{[1+r(z, v(z))] \ln |z|})}{L(z)} = 1,$$

что противоречит неравенству (2.4).

Наконец, введем вспомогательные обозначения, полагая

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n-3} \sigma_{kj} (n-2-j), \quad \gamma_k = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{kj},$$

$$C_k = \prod_{j=0}^{n-2} [(n-j-2)!]^{-\sigma_{kj}} \quad (k = \overline{1, m});$$

$$J_k(t) = \int_{A_k}^t p_k(s) |\pi_\omega(s)|^{\mu_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{kj} (\nu_j |\pi_\omega(s)|^{n-2-j}) ds \quad (k = \overline{1, m}),$$

$$J_{k1}(t) = \int_{A_{k1}}^t |J_k(s)|^{\frac{1}{1-\sigma_{kn-1}}} ds \quad (k = \overline{1, m}),$$

где каждый из пределов интегрирования A_k , A_{k1} выбирается равным точке $a_0 \in [a, \omega[$ (справа от которой, т. е. при $t \in [a_0, \omega[$ подынтегральная функция непрерывна), если при этом значении предела интегрирования соответствующий интеграл стремится к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, и равным ω , если при таком значении предела интегрирования он стремится к нулю при $t \uparrow \omega$.

Теорема 1. Пусть $n \geq 2$ и для некоторого $s \in \{1, \dots, m\}$ при всех $k \in \{\overline{1, m}\} \setminus \{s\}$ выполняются неравенства

$$\limsup_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} < \beta \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-2), \quad (2.5)$$

где $\beta = \text{sign } \pi_\omega(t)$ при $t \in [a, \omega[$. Пусть, кроме того, $\gamma_s(1 - \sigma_{sn-1}) \neq 0$ и функции L_{sj} при всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ удовлетворяют условию S_0 . Тогда для существования у уравнения (1.1) $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений, для которых существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, необходимо и достаточно, чтобы (наряду с (1.3)) соблюдались неравенства

$$\nu_j \nu_{j-1} (n-j-1) \pi_\omega(t) > 0 \quad (j = \overline{1, n-2}), \quad (2.6)$$

$$\nu_{n-1} \nu_{n-2} \gamma_s (1 - \sigma_{sn-1}) J_{s1}(t) > 0, \quad \nu_{n-1} \alpha_s (1 - \sigma_{sn-1}) J_s(t) > 0 \quad (2.7)$$

в некоторой левой окрестности ω , а также условия

$$\nu_{j-1} \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{n-j-1} = Y_{j-1} \quad \text{при всех } j \in \{\overline{1, n}\} \setminus \{n-1\}, \quad (2.8)$$

$$\nu_{n-2} \lim_{t \uparrow \omega} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} = Y_{n-2},$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_s(t)}{J_s(t)} = \sigma_{sn-1} - 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} = 0. \quad (2.9)$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t) [1 + o(1)] \quad (j = 1, \dots, n-2), \quad (2.10)$$

$$y^{(n-1)}(t) = \frac{(1 - \sigma_{sn-1})J'_{s1}(t)}{\gamma_s J_{s1}(t)} y^{(n-2)}(t)[1 + o(1)], \quad (2.11)$$

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\gamma_s}}{L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t))} = |(1 - \sigma_{sn-1})C_s| \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right|^{1 - \sigma_{sn-1}} [1 + o(1)], \quad (2.12)$$

причем решений с такими представлениями в случае $\omega = +\infty$ существует n -параметрическое семейство, если $1 - \sigma_{sn-1} < 0$ и $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$, $n - 1$ -параметрическое, если $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$, $n - 2$ -параметрическое, если $1 - \sigma_{sn-1} > 0$ и $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$, а в случае $\omega < +\infty$ таких решений существует однопараметрическое семейство при $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$ и двухпараметрическое семейство при выполнении неравенств $1 - \sigma_{sn-1} > 0$ и $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$.

Замечание 4. Если в дифференциальном уравнении (1.1) коэффициенты p_k ($k = \overline{1, m}$) являются правильно меняющимися функциями при $t \uparrow \omega$ порядков ϱ_k ($k = \overline{1, m}$), то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t)}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \varrho_k \quad (k = \overline{1, m}).$$

В силу этих условий неравенства (2.5) принимают следующий вид:

$$\beta(\varrho_k - \varrho_s) < \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n - j - 2) \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$ — произвольное $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решение уравнения (1.1), для которого существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$. Тогда соблюдаются условия (1.4), существует $t_1 \in [a, \omega[$ такое, что $\nu_j y^{(j)}(t) > 0$ ($j = \overline{0, n-1}$) при $t \in [t_1, \omega[$ и в силу леммы 1 имеют место асимптотические соотношения (1.7) – (1.9). Согласно (1.7) справедливы асимптотические представления (2.10). Кроме того, из (1.7) – (1.9) вытекают соотношения

$$\frac{y^{(j)}(t)}{y^{(j-1)}(t)} = \frac{n - j - 1 + o(1)}{\pi_\omega(t)} \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{при } t \uparrow \omega \quad (2.13)$$

и поэтому

$$\ln |y^{(j-1)}(t)| = [n - j - 1 + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (j = \overline{1, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.14)$$

В силу (2.13) соблюдаются неравенства (2.6), а в силу (2.14) выполняются первые из условий (2.8).

Учитывая (2.14), представления (2.1) и условия

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \rightarrow Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta_{y_j}}} \frac{\ln L_{kj}(y^{(j)})}{\ln |y^{(j)}|} = 0 \quad (k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n-1}), \quad (2.15)$$

которые соблюдаются ввиду свойств медленно меняющихся функций (см. [16], гл.1, п.1.5, стр. 24), находим

$$\ln \varphi_{kj} \left(y^{(j)}(t) \right) = \sigma_{kj} \ln |y^{(j)}(t)| + \ln L_{kj}(y^{(j)}(t)) = [\sigma_{kj} + o(1)] \ln |y^{(j)}(t)| =$$

$$= [\sigma_{kj}(n-j-2) + o(1)] \ln |\pi_\omega(t)| \quad (k = \overline{1, m}, j = \overline{0, n-1}) \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому для любого $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$ при $t \uparrow \omega$

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} \right] &= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \sum_{j=0}^{n-1} [\ln \varphi_{kj}(y^{(j)}(t)) - \ln \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))] = \\ &= \ln \frac{p_k(t)}{p_s(t)} + \ln |\pi_\omega(t)| \sum_{j=0}^{n-1} [(\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(n-j-2) + o(1)] = \\ &= \beta \ln |\pi_\omega(t)| \left[\frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} + \beta \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-1}}^{n-1} (\sigma_{kj} - \sigma_{sj})(n-j-2) + o(1) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку выражение, стоящее в этом соотношении справа, в силу (2.5) и вида функции π_ω из (1.5) стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = 0 \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \quad (2.16)$$

Тогда из (1.1) следует, что для данного решения имеет место асимптотическое соотношение

$$y^{(n)}(t) = \alpha_s p_s(t) [1 + o(1)] \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t)) \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.17)$$

Здесь при всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$ функции L_{sj} в представлениях (2.1) функций φ_{sj} удовлетворяют условию S_0 . Поэтому в силу (2.13) и замечания 2.2 для них имеют место представления

$$L_{sj}(y^{(j)}(t)) = L_{sj}(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Учитывая (2.1) и эти представления, запишем (2.17) в виде

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \alpha_s p_s(t) \left| y^{(n-2)}(t) \right|^{\sigma_{sn-2}} L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t)) \times \\ &\times \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} |y^{(j)}(t)|^{\sigma_{sj}} L_{sj}(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношения (1.7), получим с учетом введенных до формулировки теорем обозначений соотношение

$$\frac{y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t))} =$$

$$= \alpha_s C_s p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_s} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj} (\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.18)$$

В силу свойства M_2 медленно меняющихся функций существует непрерывно дифференцируемая функция $L_{0sn-2} : \Delta_{Y_{n-2}} \rightarrow]0, +\infty[$, удовлетворяющая условиям (2.3) при $k = s$ и $j = n - 2$. С использованием этих условий и (2.13) при $t \uparrow \omega$ находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-1}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \\ & = \frac{\nu_{n-1} y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \times \\ & \times \left(1 - \sigma_{sn-1} + (\gamma_s + \sigma_{sn-1} - 1) \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)} \cdot \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} - \right. \\ & \left. - \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n)}(t)} \cdot \frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \cdot \frac{y^{(n-2)}(t) L'_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))}{L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \right) = \\ & = \frac{y^{(n)}(t) |y^{(n-1)}(t)|^{-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} [\nu_{n-1}(1 - \sigma_{sn-1}) + o(1)]. \end{aligned}$$

Поэтому (2.18) при $t \uparrow \omega$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \\ & = \nu_{n-1} \alpha_s (1 - \sigma_{sn-1}) C_s p_s(t) |\pi_\omega(t)|^{\mu_s} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj} (\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}) [1 + o(1)]. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t и учитывая, что дробь под знаком производной в силу условия $1 - \sigma_{sn-1} \neq 0$ стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, получим

$$\frac{|y^{(n-1)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}}}{|y^{(n-2)}(t)|^{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s} L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} = \nu_{n-1} \alpha_s (1 - \sigma_{sn-1}) C_s J_s(t) [1 + o(1)].$$

Отсюда, прежде всего, следует, что выполняется второе из (2.7). Кроме того, отсюда и (2.18) ввиду эквивалентности функций L_{sn-2} и L_{0sn-2} при $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$ следует, что

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_s(t)}{(1 - \sigma_{sn-1}) J_s(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда с учетом (2.13) при $j = n$ вытекает справедливость первого из условий (2.9).

Из полученного соотношения также имеем

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}-\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}} L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} =$$

$$= \nu_{n-1} |C_s(1 - \sigma_{sn-1})J_s(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.19)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \frac{\nu_{n-2} y^{(n-1)}(t) |y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s + \sigma_{sn-1} - 1}{1-\sigma_{sn-1}}}}{(1 - \sigma_{sn-1}) L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \times \\ & \quad \times \left[\gamma_s - \frac{y^{(n-2)}(t) L'_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))}{L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))} \right] = \\ & = \frac{\nu_{n-2} y^{(n-1)}(t) |y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s + \sigma_{sn-1} - 1}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \left[\frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} + o(1) \right] \quad \text{при } t \uparrow \omega, \end{aligned}$$

то из (2.19) и при $t \uparrow \omega$ следует, что

$$\left(\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} \right)' = \frac{\nu_{n-1} \nu_{n-2} \gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} |C_s(1 - \sigma_{sn-1})J_s(t)|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} [1 + o(1)].$$

Здесь дробь, стоящая под знаком производной, стремится либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, так как в силу (1.4) и свойств медленно меняющихся функций (см. (2.15))

$$\begin{aligned} & \ln \frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} = \\ & = \ln |y^{(n-2)}(t)| \left[\frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} - \frac{1}{1 - \sigma_{sn-1}} \frac{\ln L_{0sn-2}(y^{(n-2)}(t))}{\ln |y^{(n-2)}(t)|} \right] = \\ & = \ln |y^{(n-2)}(t)| \left[\frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} + o(1) \right] \rightarrow \pm\infty \quad \text{при } t \uparrow \omega. \end{aligned}$$

Поэтому, интегрируя данное соотношение на промежутке от t_1 до t , получим

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} = \frac{\nu_{n-1} \nu_{n-2} \gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} |\gamma_{sn-1} C_s|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} J_{s1}(t) [1 + o(1)]. \quad (2.20)$$

Отсюда вытекает справедливость первого из неравенств (2.7), а также ввиду эквивалентности при $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$ функций L_{sn-2} и L_{0sn-2} - асимптотического представления (2.12). Кроме того, из (2.19) и (2.20) следует, что

$$\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} = \frac{(1 - \sigma_{sn-1}) J'_{s1}(t)}{\gamma_s J_{s1}(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega. \quad (2.21)$$

В силу этого соотношения и леммы 1.1 соблюдаются вторые из условий (2.8) и (2.9), а также имеет место асимптотическое представление (2.11).

Достаточность. Предполагая выполненными условия (2.5) — (2.9), установим существование у уравнения (1.1) решений, допускающих при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10) — (2.12), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Для этого сначала рассмотрим соотношение

$$\frac{|Y|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(Y)} = |(1 - \sigma_{sn-1})C_s|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right| [1 + v_n], \quad (2.22)$$

где $L_{0sn-2} : \Delta_{Y_{n-2}} \rightarrow]0, +\infty[$ — непрерывно дифференцируемая медленно меняющаяся при $Y \rightarrow Y_{n-2}$ функция, удовлетворяющая условиям (2.3) (при $k = s$ и $j = n - 2$), существующая в силу свойства M_2 медленно меняющихся функций.

Выбрав произвольным образом число $d \in]0, \left| \frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s} \right|$, устанавливаем аналогично тому, как для соотношения (3.11) в работе [15], что при некотором $t_0 \in]a, \omega[$ соотношение (2.22) однозначно определяет заданную на множестве $[t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbb{R}_{\frac{1}{2}} = \{v \in \mathbb{R} : |v| \leq \frac{1}{2}\}$, непрерывно дифференцируемую неявную функцию $Y = Y(t, v_n)$ вида

$$Y(t, v_n) = \nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s} + z(t, v_n)}, \quad (2.23)$$

где функция z такова, что

$$\begin{aligned} |z(t, v_n)| &\leq d \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} z(t, v_n) &= 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

В силу (2.24) и второго из условий (2.8) функция Y из (2.23) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} Y(t, v_n) &\in \Delta_{Y_{n-2}} \quad \text{при} \quad (t, v_n) \in [t_0, \omega[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} Y(t, v_n) &= Y_{n-2} \quad \text{равномерно по} \quad v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Теперь, применяя к дифференциальному уравнению (1.1) преобразование

$$\begin{aligned} y^{(j-1)}(t) &= \frac{[\pi_\omega(t)]^{n-j-1}}{(n-j-1)!} y^{(n-2)}(t) [1 + v_j(\tau)] \quad (j = \overline{1, n-2}), \\ y^{(n-1)}(t) &= \frac{(1 - \sigma_{sn-1}) J'_{s1}(t)}{\gamma_s J_{s1}(t)} y^{(n-2)}(t) [1 + v_{n-1}(\tau)], \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$y^{(n-2)}(t) = Y(t, v_n(\tau)), \quad \tau(t) = \beta \ln |\pi_\omega(t)|,$$

где β определено в (2.5), и учитывая, что функция $y^{(n-2)}(t) = Y(t, v_n(\tau))$ при $t \in [t_0, \omega[$ и $v_n(\tau) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{|y^{(n-2)}(t)|^{\frac{\gamma_s}{1-\sigma_{sn-1}}}}{L_{0sn-2}^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}}(y^{(n-2)}(t))} = |(1 - \sigma_{sn-1})C_s|^{\frac{1}{1-\sigma_{sn-1}}} \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right| [1 + v_n(\tau)],$$

получим с использованием знаковых условий (2.6), (2.7) систему дифференциальных уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_j = \beta \left[(n-j-1)(v_{j+1} - v_j) - \frac{1 - \sigma_{sn-1}}{\gamma_s} h_1(\tau)(1+v_j)(1+v_{n-1}) \right] \\ (j = \overline{1, n-3}), \\ v'_{n-2} = \beta \left[-v_{n-2} - \frac{1 - \sigma_{sn-1}}{\gamma_s} h_1(\tau)(1+v_{n-2})(1+v_{n-1}) \right], \\ v'_{n-1} = \beta \left[\frac{1}{\gamma_s} h_1(\tau)(1+v_{n-1})(\gamma_s + \sigma_{sn-1} - 1) - (1 - \sigma_{sn-1})v_{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{h_2(\tau)}{1 - \sigma_{sn-1}} \left(\frac{\prod_{j=0}^{n-3} |1+v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} |1+v_{n-1}|^{\sigma_{sn-1}}}{|1+v_n|^{1-\sigma_{sn-1}}} G(\tau, v_1, \dots, v_n) - 1 - v_{n-1} \right) \right], \\ v'_n = \beta h_1(\tau) \left[(1+v_n)(1+v_{n-1}) - (1+v_n) - \frac{1}{\gamma_s} H(\tau, v_n)(1+v_n)(1+v_{n-1}) \right], \end{array} \right.$$

в которой

$$h_1(\tau) = h_1(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)}, \quad h_2(\tau) = h_2(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t) J'_s(t)}{J_s(t)},$$

$$G(\tau(t), v_1, \dots, v_n) = \frac{L_{sn-2}(Y(t, v_n))}{L_{0sn-2}(Y(t, v_n))} \cdot \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(v_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2})} \times \\ \times \frac{\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t) \varphi_{kn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{kj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{\alpha_s p_s(t) \varphi_{sn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))},$$

$$H(\tau(t), v_n) = \frac{Y(t, v_n) L'_{0sn-2}(Y(t, v_n))}{L_{0sn-2}(Y(t, v_n))},$$

$$Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n) = \begin{cases} \frac{\pi_\omega^{n-j-2}(t)}{(n-j-2)!} Y(t, v_n)(1+v_{j+1}), & j = \overline{0, n-3}, \\ \frac{1 - \sigma_{sn-1}}{\gamma_s} \frac{J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} Y(t, v_n)(1+v_{n-1}), & j = n-1. \end{cases}$$

Здесь функция $\tau(t) = \beta \ln |\pi_\omega(t)|$ обладает свойствами

$$\tau'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega], \quad \lim_{t \uparrow \omega} \tau(t) = +\infty$$

и поэтому согласно условиям (2.9)

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h_1(\tau(t)) = 0, \quad (2.27)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_2(\tau) = \lim_{t \uparrow \omega} h_2(\tau(t)) = \sigma_{sn-1} - 1.$$

В силу (2.25) и (2.3) (при $k = s$ и $j = n - 2$) функция H стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$ равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ и первая дробь в представлении функции G стремится к единице при $\tau \rightarrow +\infty$ равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$.

Покажем, что вторая и третья дроби в представлении функции G также стремятся к единице при $\tau \rightarrow +\infty$ равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$.

Ввиду (2.9) с использованием правила Лопиталья имеем

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |J_{s1}(t)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} = 0,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \left| \frac{J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} \right|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\pi_\omega(t) J'_s(t)}{(1 - \sigma_{sn-1}) J_s(t)} - \frac{\pi_\omega(t) J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} \right] = -1.$$

Поэтому, учитывая вид функций Y и $Y^{[j]}$ ($j = \overline{0, n-1}$, $j \neq n-2$), находим

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} + z(t, v_n) \right] \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |J_{s1}(t)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} = 0$$

равномерно по $v_n \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} &= n - j - 2 + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \frac{|1+v_{j+1}|}{(n-j-2)!}}{\ln |\pi_\omega(t)|} = \\ &= n - j - 2 \quad \text{равномерно по } (v_{j+1}, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^2 \quad \text{при } j = \overline{0, n-3} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y^{[n-1]}(t, v_{n-1}, v_n, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} &= \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln |Y(t, v_n)|}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \left| \frac{J'_{s1}(t)}{J_{s1}(t)} \right|}{\ln |\pi_\omega(t)|} + \\ &+ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\ln \frac{|(1-\sigma_{sn-1})(1+v_j)|}{|\gamma_s|}}{\ln |\pi_\omega(t)|} = -1 \quad \text{равномерно по } (v_{n-1}, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание эти предельные соотношения с использованием неравенств (2.5), получаем, повторяя рассуждения из доказательства необходимости, что для любого $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \varphi_{kn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{kj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{p_s(t) \varphi_{sn-2}(Y(t, v_n)) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} \varphi_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))} = 0$$

равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$.

Ввиду этих условий последняя дробь в представлении функции G стремится к единице при $\tau \rightarrow +\infty$ равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$.

Кроме того, ввиду установленных выше предельных соотношений имеют место представления

$$Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n) = \nu_j e^{\ln |Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n)|} = \nu_j e^{[1+r_j(t, v_j, v_{j+1}, v_n)] \ln |\pi_\omega(t)|^{n-j-2}}$$

при $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$,

где

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_j(t, v_j, v_{j+1}, v_n) = 0$$

равномерно по $(v_j, v_{j+1}, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^3$ для всех $j \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \{n-2\}$.

Поскольку функции L_{sj} ($j = \overline{1, n-1}$, $j \neq n-2$) удовлетворяют условию S_0 , то отсюда с учетом замечания 2.3 следует, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(Y^{[j]}(t, v_j, v_{j+1}, v_n))}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-2}}^{n-1} L_{sj}(\nu_j |\pi_\omega(t)|^{n-j-2})} = 1 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n.$$

Поэтому вторая дробь в представлении функции G стремится к единице при $\tau \rightarrow +\infty$ равномерно по $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$.

В силу изложенного выше полученная система дифференциальных уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} v'_j = \beta \left[f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{jk} v_k \right] & (k = \overline{1, n-2}), \\ v'_{n-1} = \beta \left[f_{n-1}(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{n-1k} v_k + V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) \right], \\ v'_n = \beta h_1(\tau) \left[f_n(\tau, v_1, \dots, v_n) + \sum_{k=1}^n p_{nk} v_k + V_n(v_1, \dots, v_n) \right], \end{cases} \quad (2.28)$$

где функции f_i ($i = \overline{1, n}$) непрерывны на множестве $[\tau_1, +\infty[\times \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n$ при некотором $\tau_1 \geq \beta \ln |\pi_\omega(t_0)|$ и таковы, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} f_i(\tau, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по } (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}^n, \quad (2.29)$$

$$p_{jj} = j - n + 1, \quad p_{j,j+1} = n - j - 1, \quad p_{jk} = 0,$$

при $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, j+1\}$ ($j = \overline{1, n-3}$),¹

¹При $i = 2$ эта строка отсутствует, а при $i = 1$ наряду с ней отсутствует и следующая строка.

$$\begin{aligned}
p_{n-2n-2} &= -1, \quad p_{n-2k} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-2\}, \\
p_{n-1k} &= -\sigma_{sk-1} \quad (k = \overline{1, n-2}), \quad p_{n-1n-1} = 1 - \sigma_{sn-1}, \\
p_{n-1n} &= 1 - \sigma_{sn-1}, \quad p_{nn-1} = 1, \quad p_{nk} = 0 \quad \text{при} \quad k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{n-1\}, \\
V_n(v_1, \dots, v_n) &= v_{n-1}v_n, \\
V_{n-1}(v_1, \dots, v_n) &= -\frac{\prod_{j=0}^{n-3} |1 + v_{j+1}|^{\sigma_{sj}} |1 + v_{n-1}|^{\sigma_{sn-1}}}{|1 + v_n|^{1-\sigma_{sn-1}}} +
\end{aligned}$$

$$+1 + \sum_{k=1}^{n-2} \sigma_{sk-1} v_k + \sigma_{sn-1} v_{n-1} - (1 - \sigma_{sn-1}) v_n.$$

Поскольку соблюдаются условия (2.29) и

$$\lim_{|v_1| + \dots + |v_n| \rightarrow 0} \frac{\partial V_j(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_k} = 0 \quad (j = n-1, n; k = \overline{1, n}),$$

то данная система принадлежит к классу систем дифференциальных уравнений, для которых в [17] были получены признаки существования исчезающих в бесконечности решений. Покажем, что для нее выполняются условия теоремы 2.6 из этой работы.

Прежде всего, учитывая условия (2.27) и вид интеграла $J_{s1}(t)$, заметим, что функция h_1 обладает свойствами

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} h_1(\tau) = 0,$$

$$\int_{\tau_1}^{+\infty} h_1(\tau) d\tau = \beta \int_{t_1}^{\omega} \frac{J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} dt = \beta \ln |J_{sii}(t)|_{t_1}^{\omega} = \pm \infty \quad (\tau_1 = \beta \ln |\pi_{\omega}(t_1)|),$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{h'_1(\tau)}{h_1(\tau)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(h_1(\tau(t)))'_t}{\tau'(t)h_1(\tau(t))} = \\
&= \beta \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\pi_{\omega}(t)J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} + \frac{1}{\gamma_{si}} \frac{\pi_{\omega}(t)J'_{si}(t)}{J_{si}(t)} \frac{\pi_{\omega}(t)J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} - \left(\frac{\pi_{\omega}(t)J'_{sii}(t)}{J_{sii}(t)} \right)^2 \right] = 0.
\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим матрицы $P_n = (p_{jk})_{j,k=1}^n$ и $P_{n-1} = (p_{jk})_{j,k=1}^{n-1}$. Для них имеем

$$\det P_{n-1} = (-1)^{n-2} (n-2)! (1 - \sigma_{sn-1}), \quad \det P_n = (-1)^{n-1} (n-2)! (1 - \sigma_{sn-1}),$$

$$\det [P_{n-1} - \rho E_{n-1}] = (-1)^{n-2} [1 - \sigma_{sn-1} - \rho] \prod_{k=1}^{n-2} (k + \rho).$$

Здесь корнями характеристического уравнения матрицы P_{n-1} являются числа $\rho_k = -k$ ($k = \overline{1, n-2}$), $\rho_{n-1} = 1 - \sigma_{sn-1}$. Все они отличны от нуля и поэтому на основании теоремы 2.6 из работы [17] у системы дифференциальных уравнений (2.28) существует хотя бы одно решение $(v_j)_{j=1}^n : [\tau_2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\tau_2 \geq \tau_1$),

стремящееся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$. Более того, согласно этой теореме в случае $\beta = 1$ у данной системы уравнений существует n -параметрическое семейство таких решений при выполнении неравенств $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$ и $\sigma_{sn-1} > 1$, $n-1$ -параметрическое семейство при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$ и $n-2$ -параметрическое — при $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$ и $\sigma_{sn-1} < 1$, а в случае $\beta = -1$ существует однопараметрическое семейство таких решений при выполнении неравенства $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s > 0$ и двухпараметрическое — при выполнении неравенств $\nu_{n-1}\nu_{n-2}\gamma_s < 0$ и $\sigma_{sn-1} < 1$.

Каждому такому решению системы (2.28) соответствует в силу замен (2.26) и первого из условий (2.3) решение $y : [t_2, \omega[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t_2 \in [a, \omega[$) уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10) — (2.12). Используя эти представления и условия (2.5) — (2.9) нетрудно убедиться в том, что оно является $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решением. Теорема полностью доказана.

Замечание 5. Из доказательства необходимости ясно, что если вместо неравенств (2.5) хотя бы для одного $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$ будет выполняться неравенство

$$\liminf_{t \uparrow \omega} \frac{\ln p_k(t) - \ln p_s(t)}{\beta \ln |\pi_\omega(t)|} > \beta \sum_{j=0}^{n-1} (\sigma_{sj} - \sigma_{kj})(n-j-2)$$

при всех $k \in \{\overline{1, m}\} \setminus \{s\}$,

то для этого k вместо (2.16) будем иметь

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_k(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{kj}(y^{(j)}(t))}{p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}(t))} = +\infty$$

и поэтому s -е слагаемое в правой части уравнения (1.1) не будет главным на любом его $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решении.

Замечание 6. Из полученного при доказательстве необходимости соотношения

$$\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \frac{J'_s(t)}{(1 - \sigma_{sn-1})J_s(t)} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega$$

и леммы 1.1 ясно, что в формулировке теоремы предположение о существовании (конечного или равного $\pm\infty$) предела $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$ может быть заменено условием о существовании предела $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}$.

В теореме 2.1 асимптотическое представление для $y^{(n-2)}$ записано в неявном виде. Следующая теорема указывает дополнительное ограничение, при котором это представление может быть записано в явном виде.

Теорема 2. Пусть соблюдаются условия теоремы 2.1 и медленно меняющиеся при $y^{(n-2)} \rightarrow Y_{n-2}$ функции L_{sn-2} удовлетворяют условию S_0 . Тогда для каждого $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения уравнения (1.1), для которого существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$, имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10), (2.11) и

$$y^{(n-2)}(t) = \nu_{n-2} \left| (1 - \sigma_{sn-1}) C_s L_{sn-2} \left(\nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} \right) \right|^{\frac{1}{\gamma_s}} \times \quad (2.30)$$

$$\times \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} [1 + o(1)].$$

Доказательство. Пусть уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решение $y : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_0}$, для которого существует (конечный или равный $\pm\infty$) предел $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}$. Тогда согласно теореме 2.1 соблюдаются условия (2.6) – (2.9) и для этого решения имеют место при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.10) – (2.12). Кроме того, из доказательства необходимости данной теоремы следует, что выполняется условие (2.21). Поскольку функции L_{n-2} удовлетворяют условию S_0 , то ввиду (2.21) и замечания 2.2

$$L_{sn-2}(y^{(n-2)}(t)) = L_{sn-2} \left(\nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} \right) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

Поэтому из (2.12) следует, что

$$|y^{(n-2)}(t)|^{\gamma_s} = |(1 - \sigma_{sn-1}) C_s| L_{sn-2} \left(\nu_{n-2} |J_{s1}(t)|^{\frac{1-\sigma_{sn-1}}{\gamma_s}} \right) \times$$

$$\times \left| \frac{\gamma_s}{1 - \sigma_{sn-1}} J_{s1}(t) \right|^{1-\sigma_{sn-1}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

откуда получаем представление (2.30).

Замечание 7. В случае одного слагаемого, стоящего в правой части уравнения (1.1), а именно для уравнения

$$y^{(n)} = \alpha_s p_s(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_{sj}(y^{(j)}), \quad (2.31)$$

теоремы 2.1 и 2.2 остаются справедливыми без предположения о выполнении неравенств (2.5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В настоящей работе продолжены исследования асимптотического поведения решений дифференциального уравнения (1.1), начатые в [14], [15]. Здесь для особого случая $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, \lambda_0)$ -решений, когда $\lambda_0 = 0$, получены условия (неравенства (2.5)), при выполнении которых на каждом таком решении правая часть уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному слагаемому.

Далее, предполагая выполненными неравенства (2.5) и условие S_0 на все нелинейности, кроме одной, установлены (теорема 2.1) необходимые и достаточные условия существования у уравнения (1.1) $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений, а также асимптотические представления этих решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Кроме того, выяснен вопрос о количестве таких решений. Важной особенностью теоремы 2.1 является то, что в ней асимптотика для $n-2$ производной $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения выписана в неявном виде. В теореме 2.2 указано дополнительное условие, допускающее получение в явном виде асимптотических формул для $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решения и всех его производных до порядка $n-1$ включительно.

Результаты работы (см. замечание 2.7) являются новыми даже для частного случая уравнения (1.1) вида (2.31). Асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0, \dots, Y_{n-1}, 0)$ -решений дифференциального уравнения (2.31) ранее исследовалось в работах В. М. Евтухова [1] – [3] в случае степенных нелинейностей, т.е. когда $\varphi_{sj}(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_{sj}}$ ($j = \overline{0, n-1}$).

Следует также обратить внимание на то, что исследование проводится в предположении, что $\omega \leq +\infty$. Поэтому, выбирая в качестве ω любое t_0 из промежутка, где непрерывны коэффициенты p_k ($k = \overline{1, m}$), можно с использованием теорем 2.1 и 2.2 получить признаки существования различных типов сингулярных решений (см. монографию И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия [18], гл. III, §11, стр. 262) и их асимптотические представления при $t \uparrow t_0$.

1. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера n -го порядка // Докл. АН России. – 1992. – Т. 234, №2. – С. 258–260.
2. **Евтухов В. М.** Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n -го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – Т. 145, №2. – С. 269–273.
3. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. д-ра физ.-мат. наук / В. М. Евтухов. – Киев, 1998. – 295 с.
4. **Бурбаки Н.** Функции действительного переменного / Н. Бурбаки. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
5. **Marić V.** Regular variation and differential equations. Lecture notes in mathematics 1726. / V. Marić. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000. – 128 p.
6. **Marić V.** Asymptotic Properties of Solutions of the Equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ / V. Marić, M. Tomić // Mathematische Zeitschrift. – 1976. – V. 149. – P. 261–266.
7. **Talliaferro S. D.** Asymptotic behavior of the solutions of the equation $y'' = \Phi(t)f(y)$ / S. D. Talliaferro // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – V. 12, №6. – P. 47–59.
8. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Укр. мат. журнал. – 2008. – Т. 60, №3. – С. 310–331.
9. **Белозерова М. А.** Асимптотические свойства одного класса решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Мат. студії. – 2008. – Т. 29, №1. – С. 52–62.

10. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, близкими к степенным / В. М. Евтухов, М. А. Белозерова // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 3–15.
11. **Евтухов В. М.** Признаки существования и асимптотика некоторых классов решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / В. М. Евтухов, А. А. Козьма // Укр. мат. журнал. – 2011. – Т. 63, №7. – С. 924–938.
12. **Козьма А. А.** Асимптотическое поведение одного класса решений нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений второго порядка / А. А. Козьма // Нелинейные колебания. – 2011. – Т. 14, №4. – С. 468–481.
13. **Евтухов В. М.** Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47, №5. – С. 628–650.
14. **Клопот А. М.** Об асимптотике решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка / А. М. Клопот // Нелинейные колебания. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 447–465.
15. **Евтухов В. М.** Асимптотика некоторых классов решений обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка с правильно меняющимися нелинейностями / В. М. Евтухов, А. М. Клопот // Укр. мат. журнал. – 2013. – Т. 56, №3. – С. 354–380.
16. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М. : Наука, 1985. – 144 с.
17. **Евтухов В. М.** Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений / В. М. Евтухов, А. М. Самойленко // Укр. мат. журнал. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 52–80.
18. **Кигурадзе И. Т.** Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе, Т. А. Чантурия. — М. : Наука, 1990.

Mathematical Subject Classification: 34C29, 34A60, 34A12
УДК 517.928.7

И. В. Молчанюк

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**НЕЧЕТКИЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ
С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

Молчанюк І. В. Нечітки керовані лінійні диференціальні включення з термінальним критерієм якості. У даній статті розглядається задача оптимального керування нечіткими R -розв'язками з термінальним критерієм якості, коли поведінка системи описана керованим нечітким лінійним диференціальним включенням.

Ключові слова: нечіткі диференціальні включення, управління, оптимальність.

Молчанюк И. В. Нечеткие управляемые линейные дифференциальные включения с терминальным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления нечеткими R -решениями с терминальным критерием качества, когда поведение системы описывается управляемым нечетким линейным дифференциальным включением.

Ключевые слова: нечеткие дифференциальные включения, управление, оптимальность.

Molchanyuk I. V. Linear fuzzy control differential inclusions with the terminal quality criterion. In this paper we consider the problem of optimal control fuzzy R -solution with terminal quality criterion, when the behavior of the system is described manageable fuzzy linear differential inclusion.

Key words: fuzzy differential inclusion, control, optimal.

ВВЕДЕНИЕ. В XX веке появились работы по дифференциальным уравнениям с многозначной правой частью А. Marchaud [11] – [14] и S. K. Zaremba [15], [16], в которых авторы попытались обобщить существовавшие в то время результаты по теории дифференциальных уравнений. Толчком для их детального исследования послужили работы Т. Wazewski и А. Ф. Филиппова 60-х годов, в которых показана связь с задачами оптимального управления. В дальнейшем данная теория не только стала бурно развиваться (В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, Ж.-П. Aubin, А. Cellina, С. Olech, Н. Hermes, Н. Kikuchi), но и широко использоваться при исследовании систем управления (В. И. Благодатских, Н. Н. Красовский, Б. Н. Пшеничный, В. А. Плотников, Ж.-П. Aubin, Н. Kikuchi).

В работе [3] представлены R -решения для дифференциального включения как абсолютно-непрерывные многозначные отображения. Различные проблемы для теории R -решений были рассмотрены в [1], [4]. Основная идея для разработки уравнения для R -решений (интегральные трубы) содержится в [5].

В последние годы теория нечетких множеств, представленная Заде [17], стала интересным и увлекательным разделом фундаментальных и прикладных наук. С начала 90-х годов XX века в теории нечетких множеств начали развиваться теория нечетких дифференциальных уравнений (А. А. Мартынюк, А. В. Плотников, В. И. Слынько, О. Kaleva, S. Seikkala, V. Lakshmikantham, Н. К. Хан,

J. Y. Park), теория дифференциальных включений с нечеткой правой частью (В. А. Байдосов, А. В. Плотников, J.-P. Aubin, V. Lakshmikantham, E. Hullermeier), а также нечетких дифференциальных включений и нечетких систем управления (P. Diamond, P. Kloeden, N.D. Phu, T. T. Tung, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник).

В статье введено понятие 0–максимаксности и 0–максиминности для нечеткого управляемого линейного дифференциального включения с нечетким критерием качества.

Пусть $conv(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(F, G) = \max\left\{\sup_{f \in F} \inf_{g \in G} \|f - g\|, \sup_{g \in G} \inf_{f \in F} \|f - g\|\right\},$$

где под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма в пространстве R^n .

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $x : R^n \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) x полунепрерывно сверху, то есть для любых $y' \in R^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y', \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y - y'\| < \delta$ выполняется условие $x(y) < x(y') + \varepsilon$;
- 2) x нормально, то есть существует $y_0 \in R^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;
- 3) x нечетко выпукло, то есть для любых $y', y'' \in R^n$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y' + (1 - \lambda)y'') \geq \min\{x(y'), x(y'')\}$;
- 4) замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \setminus 0 \end{cases}.$$

Определение 1. α -срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in E^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{y \in R^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in E^n$ назовем замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$.

Теорема 1. [2] Если $x \in E^n$, то

- 1) $[x]^\alpha \in conv(R^n)$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$;
- 2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;
- 3) если $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ — неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} [x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ — семейство подмножеств R^n , удовлетворяющих условиям 1) - 3), то существует отображение $x \in E^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \leq 1$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup_{0 < \alpha \leq 1} A^\alpha}$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \rightarrow [0, +\infty)$, полагая

$$D(x, z) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([x]^\alpha, [z]^\alpha).$$

Из [9] имеем, что

- 1) (E^n, D) является полулинейным полным метрическим пространством;
- 2) $D(u + w, v + w) = D(u, v)$, $D(ku, kv) = kD(u, v)$ для всех $u, v, w \in E^n$ и $k \geq 0$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ. Пусть движение объекта управления описывается нечеткой системой дифференциальных включений вида:

$$\dot{x} \in A(t)x + f(t, u), \quad x(0) \in X_0, \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; $t \in I = [0, T]$ – время; $u(t) \in U \subseteq \text{conv}(R^k)$ – вектор управления; $f : I \times R^k \rightarrow E^n$ – нечеткие отображения; $X_0 \in E^n$.

Определение 2. Суммируемую на отрезке I функцию $u(\cdot)$ такую, что $u(t) \in U$ для всех $t \in I$, будем называть допустимым управлением.

Множество всех допустимых управлений обозначим через $\Theta(I)$.

Предположение 1.

- 1) $A(\cdot)$ – измерима на $[0, T]$;
- 2) норма $\|A(t)\|$ матрицы $A(t)$ интегрируема на $[0, T]$;
- 3) нечеткое отображение $f : [t_0, T] \times R^m \rightarrow E^n$ удовлетворяет условиям:
 - а) измеримо по t ; б) непрерывно по u ;
- 4) существует $l(\cdot) \in L_2[0, T]$ такая, что $D(f(t, u), 0) \leq l(t)$ для почти всех $t \in [t_0, T]$;
- 5) существует множество $Q(t) = \{f(t, u(t)) : u(\cdot) \in \Theta\}$ компактно в пространстве E^n .

Теорема 2. [6] При выполнении условий Предположения ?? для любого допустимого управления $u(\cdot) \in \Theta$ нечеткое R -решение $X(\cdot, u)$ системы (1) удовлетворяет условиям:

- 1) для всех $t > 0$ нечеткое R -решение $X(\cdot, u)$ представимо в виде:

$$X(t, u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s, u(s))ds \quad (2)$$

где $\Phi(t)$ – матрица Коши дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$;

- 2) $X(t, u) \in E^n$ для всех $t \in [0, T]$;
- 3) при каждом допустимом управлении $u(\cdot)$ нечеткое отображение $X(\cdot, u)$ является абсолютно непрерывным нечетким отображением на $[0, T]$.

Теорема 3. [6] При выполнении условий Предположения 1 множество достижимости системы (1) $Y(T)$ является выпуклым и компактным множеством в пространстве E^n .

Рассмотрим задачу оптимального управления с нечетким критерием качества (нечеткую задачу Майера)

$$J(u) = \Phi(X(T, u)), \quad (3)$$

где $\Phi : E^n \rightarrow E^1$ такая, что $[\Phi(X)]^\alpha = [\varphi_{min}^\alpha, \varphi_{max}^\alpha]$ для всех $\alpha \in [0, 1]$, где $\varphi_{min}^\alpha = \min_{c \in [\Phi]^\alpha} (c, c)$, $\varphi_{max}^\alpha = \max_{c \in [\Phi]^\alpha} (c, c)$, $c \in R^n$ – постоянная,

$X(\cdot, u)$ – нечеткое R -решение нечеткого дифференциального включения (1)[10], соответствующее допустимому управлению $u(\cdot) \in \Theta(I)$,

$(c, c) = c_1c_1 + \dots + c_nc_n$.

Определение 3. Управление $u_* \in \Theta(I)$ назовем θ -максиминным (θ -максимаксным) для задачи (1), (3), если для любого управления $u \in \Theta(I)$ справедливо неравенство:

$$m[J(u)]^0 \leq m[J(u_*)]^0, \quad (M[J(u)]^0 \leq M[J(u_*)]^0), \quad (4)$$

где $mA = \min\{a : a \in A, A \in \text{conv}(\mathbb{R}^1)\}$, $MA = \max\{a : a \in A, A \in \text{conv}(\mathbb{R}^1)\}$.

Теорема 4. Пусть система (1), (3) удовлетворяет условиям Предположения 1. Управление $u_* \in \Theta$ является θ -максиминным для задачи (1), (3) тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in [0, T]$ имеет место равенство:

$$C([f(t, u_*(t))]^0, -\psi(t)) = \min_{u \in U} ([f(t, u)]^0, -\psi(t)), \quad (5)$$

где $\psi(t)$ решение системы

$$\dot{\Psi}(t) = -A^T(t)\psi(t), \psi(0) = c. \quad (6)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$s(u) = -C([X(T, u)]^0, -c), S(u) = C(X(T, u))^0, c),$$

тогда легко видно, что $[J(u)]^0 = [s(u), S(u)]$.

Предположим, что $u_*(\cdot)$ является θ -максиминным управлением, переводящим объект из точки $x_0 \in X_0$ в $X(T, u_*) \in Y(T)$ согласно нечеткому отображению (2), а допустимое управление $\tilde{u}(\cdot) \in \Theta(I)$ такое, что почти для всех $t \in [0, T]$

$$C([f(t, \tilde{u}(t))]^0, -\psi(t)) = \min_{u \in U} C([f(t, u)]^0, -\psi(t)).$$

Тогда для $X(\tilde{u})$ в момент времени T будем иметь:

$$s(u) = -C(\Phi(T)[x_0]^0 + \Phi(T) \int_0^T \Phi^{-1}(s)[f(T, \tilde{u}(s))]^0 ds, -c).$$

Обозначим через $\bar{\psi} = \Phi(T)\Phi^{-1}(t)e$, которое является решением уравнения (6). Тогда

$$s(u) = -C\left(\int_0^T ([f(s, \tilde{u}(s))]^0, -\bar{\psi}(s)) ds - C(\Phi(T)[X_0]^0, -c)\right).$$

Поскольку для всех $s \in [0, T]$

$$C([f(s, \tilde{u}(s))]^0, -\bar{\psi}(s)) < C([f(s, u_*(s))]^0, -\bar{\psi}(s)),$$

то $s(\tilde{u}) > s(u_*)$, т.е. получаем противоречие. Следовательно, u_* удовлетворяет условию (5). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть управление $u_*(\cdot) \in \Theta(I)$ удовлетворяет условию (5) почти для всех $t \in [0, T]$. Требуется доказать, что $u_*(\cdot)$ θ -максиминное.

Предположим, что существует такое управление, что $s(\tilde{u}) > s(u_*)$. Согласно предположению

$$C(f(t, \tilde{u}(t)), -\psi(t)) \geq C(f(t, u_*(t)), -\psi(t)) = \min_{u \in U} C(f(t, u), -\psi(t))$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Так как

$$s(u_*) = -C(\Phi(T)[x_0]^0, -c) - C\left(\int_0^T \Phi(s)\Phi^{-1}(s)[f(s, u_*(s))]^0 ds, -c\right),$$

$$s(\tilde{u}) = C(\Phi(T)[x_0]^0, -c) - C\left(\int_0^T \Phi(s)\Phi^{-1}(s)[f(s, \tilde{u}(s))]^0 ds, -c\right),$$

то $s(u_*) \leq s(\tilde{u})$, приходим к противоречию с $s(\tilde{u}) > s(u_*)$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть система (1), (3) удовлетворяет условиям Предположения 1. Управление $u_* \in \Theta(I)$ является θ -максимаксным для задачи (1), (3) тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in [0, T]$ имеет место равенство:

$$C([f(t, u_*(t))]^0, -\psi(t)) = \max_{u \in U} ([f(t, u)]^0, -\psi(t)), \quad (7)$$

где $\psi(t)$ решение системы (6).

Доказательство. Так как θ -максимаксное управление для задачи (1), (3) очевидно эквивалентно оптимальному управлению для задачи (1) со следующим критерием качества

$$J(u) = C([X(T, u)]^0, C).$$

Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в предыдущей теореме 4.

Определение 4. Управление $u_*(\cdot) \in \Theta(I)$ назовем ρ -оптимальным в задаче (1), (3), если управление $u_*(\cdot)$ является θ -максимаксным и θ -максиминным одновременно.

Теорема 6. Пусть система (1), где $f(t, u)$ имеет вид $B(t)u + f(t)$, удовлетворяет условиям:

- 1) $A(\cdot)$ — измерима на $[0, T]$;
- 2) норма $\|A(t)\|$ матрицы $A(t)$ интегрируема на $[0, T]$;
- 3) $B(\cdot)$ — измерима на $[0, T]$;
- 4) норма $\|B(t)\|$ матрицы $B(t)$ интегрируема на $[0, T]$;
- 5) нечеткое отображение $f : [t_0, T] \times R^m \rightarrow E^n$ измеримо по t ;
- 6) существует $l(\cdot) \in L_2[0, T]$ такая, что $D(f(t, u), 0) \leq l(t)$ для почти всех $t \in [t_0, T]$.

Управление $u_*(\cdot) \in \Theta$ является оптимальным для задачи тогда и только тогда, когда для почти всех t имеет место равенство:

$$(B(t)u_*(t), \psi(t)) = \max_{u \in U} (B(t)u, \psi(t)),$$

где $\psi(\cdot)$ решение системы (6).

Доказательство. В начале докажем справедливость следующего свойства - критерия качества: для любых двух управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ из Θ справедливо следующее равенство:

$$|S(u_1) - s(u_1)| = |S(u_2) - s(u_2)|. \quad (8)$$

Из теоремы 2 получим, что для любых двух управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ из Θ существует такой вектор $z(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ из R^n , что

$$[X(T, u_1)]^0 = [X(T, u_2)]^0 + z(u_1(\cdot), u_2(\cdot)). \quad (9)$$

Из полученного равенства (9) и вида функционала (3) получим (8). Воспользовавшись теоремой 4, равенством (8), получим справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В статье рассматривалась задача оптимального управления нечеткими R -решениями с терминальным критерием качества. Введено понятие 0-максимаксности и 0-максиминности. Аналогично можно ввести понятие α -максимаксности и α -максиминности и получить аналогичные результаты для $\alpha \in (0, 1]$.

1. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.
2. **Negoita С. V.** Application of fuzzy sets to systems analysis. / С. V. Negoita, D. A. Ralescu – New York, Wiley, 1975.
3. **Панасюк А. И.** Квазидифференциальные уравнения в метрических пространствах / А. И. Панасюк // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Ч. 21, № 8. – С. 1344–1353.
4. **Панасюк А. И.** Асимптотическая магистральная оптимизация / А. И. Панасюк, В. И. Панасюк // Наука и техника. – Минск. – 1982. – 295 с.
5. **Толстоногов А. А.** Об уравнении интегральной воронки дифференциального включения / А. А. Толстоногов // Математические заметки. – 1982. – Ч.32, №6. – С. 841–910.
6. **Plotnikov A. V.** Linear control problems of the fuzzy maps / A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk // J. Software Engineering & Applications (Scientific Research Publishing, Inc., USA), 2010. – V.3, №3. – P. 191–197.

7. **Plotnikov A. V.** Linear control differential inclusions with fuzzy right-hand side and some optimal problems / A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk // Journal Advanced Research in Dynamical and Control Systems (Institute of Advanced Scientific Research, USA), 2011. – V.3, №2. – P. 34–46.
8. **Plotnikov A. V.** The Time-Optimal Problems for Controlled Fuzzy R-Solutions / A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk // Intelligent Control and Automation (Scientific Research Publishing, Inc., USA), 2011. – V.2, №2. – P. 152–159.
9. **Puri M. L.** Fuzzy random variables / M. L. Puri, D. A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl., 1986. – №114. – P. 409 – 422.
10. **Hüllermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system / E. Hüllermeier // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.-Based Syst., 1997. – №7. – P. 117–137.
11. **Marchaud A.** Sur les champs de demi-cones et equations differentielles du premier order / A. Marchaud // Bull. Soc. Math. France. – 1934. – № 62. – P. 1–38.
12. **Marchaud A.** Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs integrales / A. Marchaud // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1934. – № 199. – P. 1278–1280.
13. **Marchaud A.** Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs integrales / A. Marchaud // Comput. Math. Ser. – 1936. – № 8. – P. 89–127.
14. **Marchaud A.** Sur les champs de demi-cones convexes / A. Marchaud // Bull. Sci. Math. – 1938. – V.62, № 2. – P. 229–240.
15. **Zaremba S. K.** Sur une extension de la notion d'equation differentielle / S. K. Zaremba // C. P. Acad. Sci. Paris. – 1934. – № 199. – P. 545–548.
16. **Zaremba S. K.** Sur les equations au paratingent / S. K. Zaremba // Bull.Sci. Math. – 1936. – V. 60, № 2. – P. 139–160.
17. **Zadeh L. A.** Fuzzy set / L. A. Zadeh // Inf.Control – 1965. – № 8. – P. 338–353.

Mathematical Subject Classification: 11N37
UDC 511.35

S. S. Sergeev

Odesa I. I. Mechnikov National University

SMARANDACHE CEIL FUNCTION OVER $\mathbb{Z}[i]$

Сергеев С. С. Функция Смарандаче над $\mathbb{Z}[i]$. Вивчені арифметичні властивості функції Смарандаче $S_k(\omega)$ та двоїстої функції Смарандаче $\bar{S}_k(\omega)$ над цілими гауссовими числами. Отримані асимптотичні оцінки суматорної функції для функції Смарандаче у секторі та двоїстої функції Смарандаче.

Ключові слова: функція Смарандаче, двоїста функція Смарандаче, асимптотичні оцінки.

Сергеев С. С. Функция Смарандаче над $\mathbb{Z}[i]$. Изучены арифметические свойства функции Смарандаче $S_k(\omega)$ и двойственной функции Смарандаче $\bar{S}_k(\omega)$ над целыми гауссовыми числами. Получены асимптотические оценки сумматорной функции для функции Смарандаче в секторе, а также для двойственной функции Смарандаче.

Ключевые слова: функция Смарандаче, двойственная функция Смарандаче, асимптотические оценки.

Sergeev S. S. Smarandache ceil function over $\mathbb{Z}[i]$. We use analytic method to study the arithmetic properties of the Smarandache ceil function $S_k(\omega)$ and its dual $\bar{S}_k(\omega)$ over the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$. Constructed asymptotic formula summatory functions for Smarandache ceil function $S_k(\omega)$ in sector and for its dual $\bar{S}_k(\omega)$.

Key words: Smarandache ceil function, dual function to Smarandache ceil function, asymptotic estimates.

INTRODUCTION. For any fixed positive integer $k \geq 2$, the Smarandache ceil function of order k were introduced by F. Smarandache [9] and has the following definition.

$$S_k(n) = \min \{m \in \mathbb{N} : m|m^k\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

The dual function of $S_k(n)$ is defined as

$$\bar{S}_k(n) = \max \{m \in \mathbb{N} : m^k|n\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

There are many papers on the Smarandache ceil function and its dual. Ding Liping [4] studied the mean value properties of the Smarandache ceil function $S_k(n)$, and obtained a sharp asymptotic formula for it. Xiaoyan Li [11] and P. Varbanets and S. Kirabt [10] estimated an error term in asymptotic formulae for the mean value of the Smarandache dual function $\bar{S}_k(n)$.

In this paper, we use the analytic method to study the arithmetic properties of the Smarandache ceil function and its dual over the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$.

NOTATION. For $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ we define

$$S_k(\alpha) := \min \left\{ N(\omega), \omega \in \mathbb{Z}[i], 0 \leq \arg \omega \leq \frac{\pi}{2} : \alpha|\omega^k \right\},$$

$$\bar{S}_k(\alpha) := \max \left\{ N(\omega), \omega \in \mathbb{Z}[i], 0 \leq \arg \omega \leq \frac{\pi}{2} : \omega^k | \alpha \right\}.$$

Its easy to check that functions are multiplicative. Also we use some common notations such as $\mathbb{Z}[i]$ for a ring of Gaussian integers, $\alpha \in \mathbb{Z}[i], \alpha = a + bi, N(\alpha) = a^2 + b^2$, $\xi(s)$ — Hecke's zeta-function, $L(s, \chi_4)$ — Dirichlet L -function with non-principal character χ_4 , $\Gamma(z)$ — totient gamma function, O, \ll — Vinogradov's symbol, $\sum^*, (\prod^*)$ — sum (or product) over unassociated Gaussian integers.

AUXILIARY ARGUMENTS. Let $m \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{C}$. Consider Hecke's Z -function defined in half-plane $\text{Res} > 1$ by absolutely convergent series

$$Z_m(s) = \sum_{\omega}^* e^{4mi \arg \omega} N(\omega)^{-s},$$

symbol $*$ means summarizing over not-associated Gaussian integers $\omega \neq 0$.

Lemma 1. *Hecke's Z -function allow analytic extension over all complex s -plane and is integer function, if $m \neq 0$, and on $m = 0$ $Z_0(s)\zeta(s)L(s, \chi_4)$, where $\zeta(s)$ is Riemann zeta-function, $L(s, \chi_4)$ — Dirichlet L -function with non-principal character χ_4 modulo 4. Moreover we have the following functional equation*

$$\pi^{-s}\Gamma(2|m|+s)Z_m(s) = \pi^{-(1-s)}\Gamma(2|m|+1-s)Z_{-m}(1-s).$$

Lemma 2. *We have the following estimates*

$$(i) \quad Z_m(s) \ll (m^2 + t^2)^{\frac{1}{2}-\sigma} \log^4(m^2 + t^2 + 3), s = \sigma + it,$$

$$(ii) \quad Z_m(\frac{1}{2} + it) \ll (m^2 + t^2 + 3)^{\frac{1}{6}} \log^4(m^2 + t^2 + 3),$$

$$(iii) \quad \int_{-T}^T |Z_m(\frac{1}{2} + \delta + it)|^2 dt \ll (T + |m|) (\log(T + |m|))^a, a > 0 - \text{const}$$

if δ is real and $|\delta| < (\log(|t| + |m| + 3))^{-1}$.

Proof. For the proof of (i) we can use functional equation for $Z_m(s)$, apply Stirling formulae for $\Gamma(z)$ and Phragmen-Lindelof principle (using trivial estimation for $Z_m\left(1 + \frac{1}{\log(T+|m|)} + it\right) \ll \log(T + |m|)$ and $Z\left(-\frac{1}{\log(T+|m|)} + it\right) \ll (m^2 + t^2 + 3)^{\frac{1}{2}} \log^4(m^2 + t^2 + 3)$).

Equation (ii) proved by P. Kaufman [7], and estimation (iii) was obtained in the work on M. D. Coleman [3].

Lemma 3. ([2]). *There are absolute constants $c_1 > 0$ and $c_0, 0 < c_0 < 1$ so in area*

$$\text{Res} > 1 - c(\log(t^2 + m^2 + 3))^{-c_0}$$

$Z_m(s) \neq 0$. Moreover in that area we have the estimate

$$(Z_m(s))^{-1} \ll \log^2(m^2 + t^2 + 3).$$

Lemma 4. Let $f(\alpha)$ be an arbitrary function on $(Z)[i]$, and let $\mathcal{F} \subset \mathbb{Z}[i]$ be any set. Then every $M \geq 1$ and $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ we have

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{F} \\ \varphi_1 \leq \arg \alpha < \varphi_2}} f(\alpha) &= (\varphi_2 - \varphi_1) \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} f(\alpha) + O\left(\frac{1}{M} \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} |f(\alpha)|\right) + \\ &+ O\left((\varphi_2 - \varphi_1) \sum_{0 \leq |m| \leq M} \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{F}} f(\alpha) e^{4mi \arg \alpha} \right|\right). \end{aligned}$$

Proof. This statement is analogue on Vinogradov's lemma. See [1].

MAIN RESULTS. In view of the obvious inequalities

$$S_k(p^m) \leq N(p^m), \bar{S}_k(p^m) \leq N(p^m)^{\frac{1}{k}},$$

where p - Gaussian integer, $m \in \mathbb{N}$, and because of $S_k(\alpha)$ and $\bar{S}_k(\alpha)$ are multiplicative, we easily get in half-plane $Res > 2$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega}^* \frac{S_k(\omega) e^{4mi \arg \omega}}{N(\omega)^s} &:= \\ &:= \prod_p^* \left(1 + \frac{e^{4mi \arg p}}{N(p)^{s-1}} + \frac{e^{4mi \arg p^2}}{N(p)^{2s-1}} + \dots + \frac{e^{4mi \arg p^k}}{N(p)^{ks-1}} + \frac{e^{4mi \arg p^{k+1}}}{N(p)^{(k+1)s-1}} + \dots \right) = \\ &= \prod_p^* \left(1 + \left(1 + \frac{e^{4mi \arg p}}{N(p)^s} + \frac{e^{4mi \arg p^2}}{N(p)^{2s}} + \dots + \frac{e^{4mi \arg p^{k-1}}}{N(p)^{(k-1)s}} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{e^{4mi \arg p}}{N(p)^{s-1}} + \frac{e^{4mi \arg p^{k+1}}}{N(p)^{(k+1)s-2}} + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{Z_m(s-1)Z_m(ks-1)}{Z_m(2s-2)} G_m^{(k)}(s) = \frac{Z_m(s)Z_m(ks-1)}{Z_m(ks)} H_m^{(k)}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

where $G_m^{(k)}$ and $H_m^{(k)}$ are functions defined by Dirichlet series and absolutely convergent in half-plane $Res \geq \frac{5}{4}$.

$$\sum_{\omega}^* \frac{S_k(\omega) e^{4mi \arg \omega}}{N(\omega)^s} = \frac{Z_m(s)Z_m(ks-1)}{Z_m(ks)}. \quad (2)$$

Relation (1) allows to prove next theorem.

Theorem 1. Let $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$. Then for all $k = 2, 3, \dots$ we have asymptotic formulae

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}[i] \\ \varphi_1 \leq \arg \omega \leq \varphi_2 \\ N(\omega) \leq x}} S_k(\omega) = c_k(\varphi_2 - \varphi_1)x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}}(\log x)^4\right) + O\left((\varphi_2 - \varphi_1)x^2(\log x)^{-a_1}\right), \quad (3)$$

$$\text{where } a_1 > 0, c_k = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Z_0(2k-1)}{Z_0(2)} \prod_p^* \left(1 + \frac{1 - N(p)^{-2(k-1)}}{(N(p)+1)(N(p^2)-1)} \right).$$

This asymptotic formula is non-trivial if

$$\varphi_2 - \varphi_1 \gg x^{-\frac{1}{2}}(\log x)^b, \quad b > 5.$$

Proof. For $m = 0$ using (1) and Peron's formula we obtain for $c > 2, T > 1$

$$\sum_{N(\omega) \leq x} {}^* S_k(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{Z_0(s-1)}{Z_0(2(s-1))} H_0^{(k)}(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-2)}\right). \quad (4)$$

We replace segment $\{Res = c, |Im s| \leq T\}$ with polygon consisting of 2 horizontal parts

$$\mathcal{I}_1 = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{c_1}{\log(T^2 + m^2)^{c_0}} \leq Res \leq c, Im s = T \right\},$$

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ \frac{3}{2} - \frac{c_1}{\log(T^2 + m^2)^{c_0}} \leq Res \leq c, Im s = -T \right\},$$

and one vertical

$$\mathcal{I}_0 = \left\{ Res = \frac{3}{2} - \frac{c_1}{\log(T^2 + m^2)^{c_0}}, T \leq Im s \leq T \right\},$$

where c_0, c_1 are constants from lemma 5.

Now using residue theorem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{Z_0(s-1)}{Z_0(2(s-1))} H_0^{(k)}(s) \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{I}_1} - \int_{\mathcal{I}_2} + \int_{\mathcal{I}_0} \right) \frac{Z_0(s-1)}{Z_0(2(s-1))} H_0^{(k)}(s) ds + \\ &+ \text{res}_{s=2} \left(\frac{Z_0(s-1)}{Z_0(2(s-1))} H_0^{(k)}(s) \frac{x^s}{s} \right) = I_1 - I_2 + I_0 + \text{res}_{s=2} \left(\frac{Z_0(s-1)}{Z_0(2(s-1))} H_0^{(k)}(s) \frac{x^s}{s} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

So from (4)-(5) and using lemmas 2 and 3, we found

$$\sum_{N(\omega) \leq x} {}^* S_k(\omega) = c_k x^2 + O\left(\frac{x^c}{T(c-2)}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}-\delta} (\log T)^{a+1}\right). \quad (6)$$

Setting $c = 2 + \frac{1}{\log x}, T = x^{\frac{1}{2}}, \delta = \frac{c_1}{2 \log T}$ we immediately have

$$\sum_{N(\omega) \leq x} {}^* = c_k x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{a_1}\right).$$

For $m \neq 0$ using similar considerations we have that

$$\sum_{N(\omega) \leq x} {}^* S_k(\omega) e^{4mi \arg \omega} = O\left(\frac{x^c}{T(c-2)}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}-\delta} (\log(T + |m|))^{a+1}\right) \quad (7)$$

with $\delta = \frac{c_1}{2 \log(T + |m|)}$

Using lemma 4 and (6) and (7) we finish proof of theorem 1 considering $M = T(\log T)^{-Q_1}, T = x^{\frac{1}{2}}$. ■

Now we are ready to explore function $\bar{S}_k(\omega)$

Theorem 2. Let $x \rightarrow \infty$. Then for $k = 2, 3, \dots$ we have

$$\bar{S}_k(x) := \sum_{N(\omega) \leq x} {}^* \bar{S}_k(\omega) = A_k(x) + \Delta_k(x) \quad (8)$$

where

$$A_k(x) = \begin{cases} \frac{3}{46} (L(2, \chi_4))^{-1} x \log x + \frac{6}{\pi^2 L(2, \chi_4)} \left(1 + \frac{z'_0(2)}{z(2)} + \frac{\pi^2 \cdot \gamma}{6}\right), & k = 2 \\ \frac{\pi Z_0(2)}{Z_0(s)} x + \frac{\pi Z_0(\frac{3}{2})}{12 Z_0(2)} x^{\frac{2}{3}}, & k = 3 \\ \frac{\pi Z_0(3)}{Z_0(4)} x + \frac{\pi Z_0(\frac{1}{2})}{16 Z_0(2)} x^{\frac{1}{2}}, & k = 4 \\ \frac{\pi Z_0(k-1)}{Z_0(2k)} x, & k = 5 \end{cases}$$

$$\Delta_k(x) \ll \begin{cases} x^{\frac{3}{4}} (\log x)^3, & k = 2 \\ x^{\frac{1}{2}} (\log x)^4, & k = 3 \\ x^{\frac{1}{2}} e^{-c_2 (\log x)^{c_3}}, & k \geq 4 \end{cases}$$

$c_2 > 0, 0 < c_3 < 1$ — absolute constants.

Proof Lets use equality (2) with $m = 0$. For $Res > 1$ we have

$$\sum_{\omega}^* \frac{\bar{S}_k(\omega)^s}{N(\omega)} = \frac{Z_0(s) Z_0(ks-1)}{Z_0(ks)} := F_k(s).$$

Function $F_2(s)$ has a pole in $s = 1$ and in zeros of function $Z_0(2s)$. For $k > 2$ singular points will be $s = 1, s = \frac{2}{k}$ and zeros of $Z_0(ks)$. Therefore further we will distinguish 4 cases $k = 2, k = 3, k = 4$ and $k \geq 5$.

For the $k = 2$ case point $s = 1$ is double pole and therefore using Peron's formulae ([8], application, theorem 3.1) we get

$$\sum_{\omega}^* \bar{S}_k(\omega) = \operatorname{res}_{s=1} \left(\frac{Z_0(s) Z_0(2s-1)}{Z_0(2s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{Z_0(s) Z_0(2s-1)}{Z_0(2s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T^{(c-\frac{3}{2})^2}}\right), \quad (9)$$

$c > \frac{3}{2}, T > 1$.

Lets move path of integration on line $Res = \frac{3}{4}$ and take into account that on segment $|t| \leq T$ of this line

$$Z_0^{-1}(2s) = Z_0^{-1}\left(\frac{3}{2} + 2it\right) \ll 1.$$

Moreover using Cauchy–Schwarz inequality

$$\begin{aligned} \left| \int_{-T}^T \frac{Z_0(s) Z_0(2s-1)}{Z_0(2s)} \cdot \frac{x^s}{s} ds \right| &\ll x^{\frac{3}{4}} \left(\int_1^T \left| Z_0\left(\frac{3}{4} + it\right) \right|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int_1^T \left| Z_0\left(\frac{1}{2} + 2it\right) \right|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\ll x^{\frac{3}{4}} \left(\int_1^T \left| \xi\left(\frac{3}{4} + it\right) \right|^4 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_1^T \left| L\left(\frac{3}{4} + it, \chi_4\right) \right|^4 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_1^T \left| \xi\left(\frac{1}{2} + 2it\right) \right|^4 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\cdot \left(\int_1^T \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_4\right) \right|^4 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{4}} \ll x^{\frac{3}{4}} \log^3 T. \end{aligned} \quad (10)$$

Further, given that $Z_0(s) = \xi(s)L(s, \chi_4)$ we easily discover

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s=1} \left(\frac{Z_0(s)Z_0(2s-1)}{Z_0(2s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right) &= \frac{3}{46} (L(2, \chi_4))^{-1} x \log x + \\ &+ \frac{6}{\pi^2 L(2, \chi_4)} \left(1 + \frac{Z'_0(2)}{Z(2)} + \frac{\pi^2 \cdot \gamma}{6} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

where γ — Euler constant.

From (9)–(11) we get theorem for $k = 2$.

In case $k = 3$ we move path of integration on the line $\operatorname{Res} = \frac{1}{2}$ wherein we move through 2 poles in points $s = 1$ and $s = \frac{2}{3}$.

Reasoning similar to the above gives

$$\begin{aligned} \bar{S}_3(x) &= \operatorname{res}_{s=\frac{2}{3}} \left(\frac{Z_0(s)Z_0(3s-1)}{Z_0(3s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right) + \operatorname{res}_{s=1} \left(\frac{Z_0(s)Z_0(3s-1)}{Z_0(3s)} \cdot \frac{x^s}{s} \right) + \\ &+ O \left(\int_1^T \left| \frac{Z_0(\frac{1}{2}+it)Z_0(\frac{3}{2}+3it)}{Z_0(\frac{3}{2}+3it)} \right| \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} dt \right) + \\ &+ O \left(\int_{\frac{1}{2}}^c \left| \frac{Z_0(\sigma+iT)Z_0(3\sigma+iT)}{Z_0(\frac{3}{2}+3iT)} \right| \cdot \frac{x^\sigma}{T} d\sigma \right) + O \left(\frac{x^c}{T^{(c-\frac{3}{2})}} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

And so using estimates of four moments of the $\xi(s)$ and $L(s, \chi_4)$ on the half-plane (see [Montgomeri]) leads to the asymptotic formulae

$$\bar{S}_3(x) = \frac{\pi Z_0(2)}{Z_0(3)} x + \frac{\pi Z_0(\frac{2}{3})}{12 Z_0(2)} x^{\frac{4}{3}} + O \left(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^4 \right). \quad (13)$$

If $k = 4$ then integrand has 2 simple poles in points $s = 1$ and $s = \frac{1}{2}$ and pole in zeros of $Z_0(2s)$ places to the left of $s = \frac{1}{2}$.

We move path of integration in a region free of zeros $Z_0(2s)$ namely on the line

$$\operatorname{Res} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} c (\log(T^2 + 1))^{c_0}.$$

Then we obtain

$$\bar{S}_4(x) = \frac{\pi Z_0(3)}{Z_0(4)} x + \frac{\pi Z_0(\frac{1}{2})}{16 Z_0(2)} x^{\frac{1}{2}} + O \left(x^{\frac{1}{2}} e^{-c_2 (\log x)^{c_3}} \right). \quad (14)$$

Finally for $k \geq 5$ lets take same path as in case $k = 4$. This leads to asymptotic formulae

$$\bar{S}_k(x) = \frac{\pi Z_0(k-1)}{Z_0(2k)} x + O \left(x^{\frac{1}{2}} e^{-c_2 (\log x)^{c_3}} \right). \quad (15)$$

Relations (13)–(15) proves our theorem. ■

Proof of the Theorem 1 shows that using Theorem 2 we can obtain asymptotic formula for the distribution of values of the function $\bar{S}_k(\omega)$ in narrow sectors $N(\omega) \leq x, \varphi_1 \leq \arg \omega < \varphi_2, \varphi_2 - \varphi_1 \gg x^{-\alpha_k} (\log x)^4$, where $\alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_k = \frac{1}{2}, k = 3, 4, \dots$

CONCLUSION. In our work we use analytic method to study the arithmetic properties of the Smarandache ceil function $S_k(\omega)$ and its dual $\bar{S}_k(\omega)$ over the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$. An asymptotic formula for summatory functions for Smarandache ceil function $S_k(\omega)$ in sector and for its dual $\bar{S}_k(\omega)$ is obtained.

1. **Baker R. S.** Diophantine inequalities / R. S. Baker. — LMS Monographos (New Series), Casderon Press, Oxford, 1986. — V. 1. — 275 P.
2. **Coleman M. D.** A zero-free region for the Hecke's L-functions / M. D. Coleman // *Mathematika*. — 1990. — V. 37. — P. 287–304.
3. **Coleman M. D.** The Rosser-Iwanec sieve in number fields, with an applications / M. D. Coleman // *Acto Arith.* — 1993. — V. 55. — P. 53–83.
4. **Ding Liping** On the mean value of the Smarandache ceil function / Ding Liping // *Sci. Magna*. — 2005. — V. 1, №2. — P. 74–77
5. **Hecke E.** Eine neue Art vof Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzaklen / E. Hecke // *Math. Z.* — 1918. — no. 1 (4). — P. 357-376.
6. **Hecke E.** Eine neue Art vof Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzaklen / E. Hecke // *Math. Z.* — 1920. — no. 6 (1-2). — P. 11–51.
7. **Kaufman R. M.** Estimate of the Hecke L-function on the half-line / R. M. Kaufman // *Zap. Nauch. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov, (LDMI)*. — 1979. — V. 91. — P. 40–51 [in Russian].
8. **Prachar K.** Primzahl vertailung / K. Prachar. — Springer-Verlag, 1957. — 393 P.
9. **Smarandache F.** Only problems, Not solutions / F. Smarandache. — Chicago, Xiqnan Publ. House, 1993. — 113 P.
10. **Kirabt S., Varbanets P.** On the mean value of the Smarandache function $\bar{S}_k(n)$ / S. Kirabt, P. Varbanets // *Ukr. Mat. Journ.* — 2011. — V. 63. — P. 448–459.
11. **Xiaiyang Li** The mean value of the k -th Smarandache dual function / Xiaiyang Li // *Proc. Fifth Int. Conf. Number Theory and Smarandache Notions*. — Nexis, 2009. — P. 128–132.

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74S05
УДК 539.3

С. М. Гребенюк, В. З. Юречко, А. А. Бова
Запорізький національний університет

**ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
ГУМОВОГО БУФЕРА НА ОСНОВІ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ
СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА**

Гребенюк С. М., Юречко В. З., Бова А. А. **Визначення напружено-деформованого стану гумового буфера на основі моментної схеми скінченного елемента.** Робота присвячена розробці та чисельній реалізації підходів при дослідженні напружено-деформованого стану пористого та непористого гумового буфера з урахуванням слабкої стисливості на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента в умовах в'язкопружного деформування.

Ключові слова: еластомери, слабка стисливість, кубічна апроксимація, пористість, метод скінчених елементів, ядро релаксації, в'язкопружність.

Гребенюк С. Н., Юречко В. З., Бова А. А. **Определение напряженно-деформированного состояния резинового буфера на основе моментной схемы конечного элемента.** Работа посвящена разработке и численной реализации подходов при исследовании напряженно-деформированного состояния пористого и непористого резинового буфера с учетом слабой сжимаемости на основе уточненной моментной схемы конечного элемента в условиях вязкоупругого деформирования.

Ключевые слова: эластомеры, слабая сжимаемость, кубическая аппроксимация, пористость, метод конечных элементов, ядро релаксации, вязкоупругость.

Grebenyuk S. N., Iurichko V. Z., Bova A. A. **Determination of stress-strain state of rubber buffer on the basis of finite element moment scheme.** This work is devoted to elaboration and numerical realization of approaches at research of the stress-strain state of the porous and non-porous rubber buffer taking into account weak compressibility on the basis of the precise finite element moment scheme under viscoelastic deformation conditions.

Key words: the elastomer, a weak compressibility, cubic approximation, porosity, finite element method, relaxation core, viscoelasticity.

Вступ. На сьогодні важко знайти таку галузь сучасної техніки і науки, в якій не використовувалися б конструкції на основі еластомерів. Особливо широко застосування вони отримали в машинобудуванні, гірській промисловості, сільськогосподарській техніці як амортизатори, віброізолятори, буфери, шини, підвіски, демпфери та інші деталі.

Згадані елементи, як правило, знаходяться в складному тривимірному напружено-деформованому стані (НДС). Описання такого стану вимагає побудови адекватних математичних моделей досліджуваних об'єктів, розробки спеціальних методів і алгоритмів розв'язку задач задля того, щоб враховувати відмінні

риси еластомерів, зокрема слабку стисливість, високу механічну міцність з високою еластичністю, реологічні характеристики, наявність пористості.

Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою, тому великого значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ).

Дослідженню поведінки еластомерних елементів конструкцій за допомогою аналітичних, емпіричних, експериментальних методів присвячені роботи [1, 2, 3].

Розвиток і особливості використання МСЕ та його модифікації в механіці слабкостисливих еластомерів розглянуто в роботах [4, 5, 6, 7].

В роботах [8, 9, 10, 11, 12] розроблені методи чисельного моделювання і аналізу НДС пористих середовищ і конструкцій з пористих матеріалів (ПМ) в умовах в'язкопружного деформування.

Аналізуючи дослідження НДС еластомерів, можна зробити такі висновки: більшість методів мають теоретичний характер; розраховувалися об'єкти простої геометричної форми; враховувалась гіпотеза про нестисливість еластомера; розрахунок, як правило, проводився в двовимірній постановці; представлені тільки теоретичні співвідношення для ПМ без розрахунків конкретних конструкцій з ПМ; не враховувалися реологічні властивості ПМ; практично відсутні роботи, в яких описується в'язкопружна поведінка пористих еластомерів.

Зроблені висновки підтверджують необхідність проведення дослідження в обраному напрямку для отримання розв'язання поставленої задачі.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.

1. Постановка задачі

Розв'язується статична задача пружності в тривимірній постановці для циліндричного гумового буфера (ГБ) з круглим отвором, в якому d – діаметр буфера, d_0 – діаметр отвору, L – висота буфера, t – висота виточки, h – відстань від нижньої основи буфера до виточки, Q – розподілене поверхневе навантаження (рис. 1). Такий ГБ використовують для амортизації кабіни ліфту, встановлюючи його в приямку ліфтової шахти (ідентифікаційний номер MOS09121152198-1, ліфтовий пристрій марки "SCHINDLER EUROLIFT").

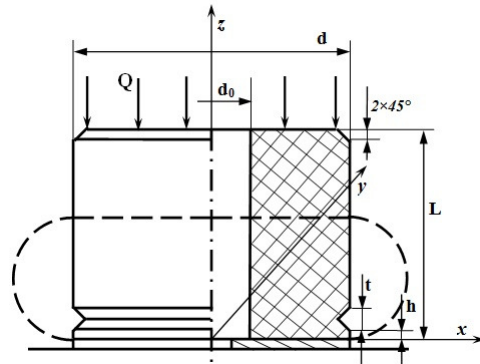


Рис. 1. Циліндричний гумовий буфер з круглим отвором

ГБ знаходиться під осьовим навантаженням, знизу до нього привулканізована металева пластина, що спирається на абсолютно жорстку основу. Бічна грань вільна від навантажень та зацемлена. Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\bar{u}|_{z=0} = 0,$$

$$\sigma_{zz}|_{z=L} = -Q,$$

де \bar{u} – вектор переміщень, σ_{zz} – нормальне напруження.

Розв'язок задачі будується на основі варіаційного принципу з використанням співвідношень Коші, як закони стану використовуються закон Гука та закон Больцмана — Вольтерра.

2. Уточнена моментна схема скінченного елемента. Стандартний МСЕ у формі методу переміщень не дозволяє враховувати жорсткі зміщення скінченного елемента (СЕ) і іншу негативну властивість матриці жорсткості (МЖ), пов'язану з появою фіктивних зсувних деформацій, – «ефект хибного зсуву». Крім того, для еластомерних матеріалів, більшість з яких є слабкостисливими, традиційний МСЕ не дозволяє отримувати адекватні результати. Щоб усунути перераховані недоліки, використовують моментну схему скінченного елемента (МССЕ) [5], яка полягає у введенні потрібної апроксимації компонент вектора переміщень, компонент тензора деформацій та функції зміни об'єму.

Але безпосереднє застосування МССЕ для отримання МЖ за заданими інтерполяційними поліномами для апроксимації переміщень СЕ в ряді випадків призводить до відкидання значної кількості членів розкладу деформацій, особливо для СЕ з високим ступенем апроксимуючих поліномів.

Вирішити цю проблему можна за допомогою уточненої моментної схеми скінченного елемента (УМССЕ), яка по суті є модифікацією МССЕ [13]. Цей підхід передбачає отримання виразів для деформацій на базі доповнення вихідних апроксимуючих поліномів СЕ до повного кубічного поліному з подальшим виключенням «зайвих» коефіцієнтів при додаткових доданках.

Використання УМССЕ дозволяє зменшити кількість членів розкладу деформацій, що відкидаються, не порушуючи принципи МССЕ, забезпечуючи при цьому більш високу точність та ефективність процесу розв'язання широкого класу задач механіки деформівного твердого тіла.

Для побудови розв'язуючих рівнянь МССЕ компоненти тензора напружень визначаються на основі узагальненого закону Гука [5]:

$$\sigma^{ij} = 2G_0 \left(g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} g^{ij} \theta \right) + K_0 g^{ij} \theta, \quad (1)$$

де K_0 – модуль об'ємного стиску; G_0 – модуль зсуву гуми; $\theta = \varepsilon_{ii}$ – функція об'ємного стиску; g^{ij} – компоненти метричного тензора.

Компоненти вектора переміщень \tilde{u}_i СЕ апроксимуємо у вигляді розкладу:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_i^{(pqr)} \frac{(x_1)^p}{p!} \frac{(x_2)^q}{q!} \frac{(x_3)^r}{r!} = \omega_i^{000} + \omega_i^{100} x_1 + \omega_i^{010} x_2 + \\ + \omega_i^{110} x_1 x_2 + \omega_i^{001} x_3 + \omega_i^{101} x_1 x_3 + \omega_i^{011} x_2 x_3 + \omega_i^{111} x_1 x_2 x_3, \end{aligned} \quad (2)$$

де ω_i^{pqr} – коефіцієнти розкладу переміщень; l, m, n – максимальні степені апроксимуючих поліномів відносно осей місцевої системи координат x_1, x_2, x_3 відповідно ($p = \overline{0, l}; q = \overline{0, m}; r = \overline{0, n}$).

Зведемо (2) до повного кубічного поліному, при цьому через $V_i^{(\dots)}$ позначимо додаткові коефіцієнти:

$$u_i = \tilde{u}_i + \Delta u_i, \quad (3)$$

де

$$\Delta u_i = \frac{1}{2} (V_i^{200} x_1^2 + V_i^{020} x_2^2 + V_i^{002} x_3^2 + V_i^{210} x_1^2 x_2 + V_i^{201} x_1^2 x_3 +$$

$$+V_i^{120}x_1x_2^2 + V_i^{102}x_1x_3^2 + V_i^{021}x_2^2x_3 + V_i^{012}x_2x_3^2) + \\ + \frac{1}{6}(V_i^{300}x_1^3 + V_i^{030}x_2^3 + V_i^{003}x_3^3).$$

Для СЕ у формі прямокутного паралелепіпеда всі компоненти деформацій, отримані на основі (2), представляються у вигляді повних квадратичних поліномів:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij}^{000} + e_{ij}^{100}x_1 + e_{ij}^{010}x_2 + e_{ij}^{001}x_3 + \frac{1}{2}e_{ij}^{200}x_1^2 + \\ + e_{ij}^{110}x_1x_2 + \frac{1}{2}e_{ij}^{020}x_2^2 + e_{ij}^{101}x_1x_3 + e_{ij}^{011}x_2x_3 + \frac{1}{2}e_{ij}^{002}x_3^2,$$

де всі моменти деформацій e_{ij} задовольняють умовам МССЕ.

Далі визначаються ті компоненти, які містять $V_i^{(\dots)}$:

$$e_{11}^{100} = V_1^{200}; e_{11}^{110} = V_1^{210}; e_{11}^{101} = V_1^{201}; e_{11}^{020} = V_1^{120}; e_{11}^{002} = V_1^{102}; e_{11}^{200} = V_1^{300}; \\ e_{22}^{010} = V_2^{020}; e_{22}^{200} = V_2^{210}; e_{22}^{110} = V_2^{120}; e_{22}^{011} = V_2^{021}; e_{22}^{002} = V_2^{012}; e_{22}^{020} = V_2^{030}; \\ e_{33}^{001} = V_3^{002}; e_{33}^{200} = V_3^{201}; e_{33}^{101} = V_3^{102}; e_{33}^{020} = V_3^{021}; e_{33}^{011} = V_3^{012}; e_{33}^{002} = V_3^{003}; \\ e_{12}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{110} + V_2^{200}); e_{12}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{110} + V_1^{020}); e_{12}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_2^{201}); \\ e_{12}^{011} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_1^{021}); e_{12}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + V_2^{102}); e_{12}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{210} + V_2^{300}); \\ e_{12}^{110} = \frac{1}{2}(V_1^{120} + V_2^{210}); e_{12}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{030} + V_2^{120}); e_{13}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{101} + V_3^{200}); \\ e_{13}^{001} = \frac{1}{2}(\omega_3^{101} + V_1^{002}); e_{13}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_3^{210}); e_{13}^{011} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + \omega_3^{111}); \\ e_{13}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{021} + V_3^{120}); e_{13}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{201} + V_3^{300}); e_{13}^{101} = \frac{1}{2}(V_1^{102} + V_3^{201}); \\ e_{13}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{003} + V_3^{102}); e_{23}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{011} + V_3^{020}); e_{23}^{001} = \frac{1}{2}(V_2^{002} + \omega_3^{011}); \\ e_{23}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_3^{120}); e_{23}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_3^{111} + V_2^{102}); e_{23}^{200} = \frac{1}{2}(V_2^{201} + V_3^{210}); \\ e_{23}^{011} = \frac{1}{2}(V_2^{012} + V_3^{021}); e_{23}^{020} = \frac{1}{2}(V_2^{021} + V_3^{030}); e_{23}^{002} = \frac{1}{2}(V_2^{003} + V_3^{012}).$$

Уточнення схеми зводиться до мінімізації тих коефіцієнтів розкладу деформацій, які згідно МССЕ повинні відкидатися. А саме, з моментів деформацій, які представлені через переміщення та мають «зайві» коефіцієнти, складається сума квадратів. Шляхом її мінімізації отримуємо систему рівнянь, розв'язавши яку, визначимо додаткові коефіцієнти:

$$V_1^{200} = V_1^{210} = V_1^{201} = V_1^{120} = V_1^{102} = V_1^{300} = V_1^{030} = 0; \\ V_1^{003} = V_2^{020} = V_2^{021} = V_2^{012} = V_2^{030} = V_2^{210} = V_2^{120} = 0; \\ V_2^{300} = V_2^{003} = V_3^{003} = V_3^{021} = V_3^{002} = 0;$$

$$\begin{aligned}
V_3^{300} &= V_3^{030} = V_3^{201} = V_3^{102} = V_3^{012} = 0; \\
V_1^{021} &= V_3^{120} = -\omega_2^{111}/3; V_1^{020} = -\omega_2^{110}; V_3^{200} = -\omega_1^{101}; \\
V_1^{012} &= V_2^{102} = -\omega_3^{111}/3; V_1^{002} = -\omega_3^{101}; V_2^{200} = -\omega_1^{110}; \\
V_2^{201} &= V_3^{210} = -\omega_1^{111}/3; V_2^{002} = -\omega_3^{011}; V_3^{020} = -\omega_2^{011}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Таким чином, виходячи з формул (2) та (3), допоміжний закон розподілення переміщень тривимірного СЕ матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_1^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_2^{110} x_2^2 + \omega_3^{101} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_2^{111} x_2^2 x_3 + \omega_3^{111} x_2 x_3^2); \\
u_2 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_2^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_1^{110} x_1^2 + \omega_3^{011} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_3 + \omega_3^{111} x_1 x_3^2); \\
u_3 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_3^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \frac{1}{2}(\omega_1^{101} x_1^2 + \omega_2^{011} x_2^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_2 + \omega_2^{111} x_1 x_2^2).
\end{aligned}$$

Функція зміни об'єму:

$$\theta = e_{11}^{000} g^{11} + e_{22}^{000} g^{22} + e_{33}^{000} g^{33},$$

де e_{ij}^{pqr} – коефіцієнти розкладу деформацій.

Детальне виведення співвідношень МЖ для еластомерних конструкцій з використанням запропонованих апроксимацій представлено в роботі [14].

3. Урахування пористості матеріалу. Для отримання пружних сталих пористої гуми (ПГ) використовувалися метод самоузгодження і варіаційний метод Хашина—Штрікмана [15]. В рамках методу самоузгодження для пор сферичної форми:

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \alpha_0 \rho}; \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{1 - \rho}{1 - \beta_0 \rho}, \tag{5}$$

де $\alpha_0 = \frac{1 + \nu_0}{3(1 - \nu_0)}$; $\beta_0 = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu_0}{1 - \nu_0}$; K , G , K_0 , G_0 – модулі об'ємного стиску та зсуву пористого матеріалу і матриці відповідно; ν_0 – коефіцієнт Пуассона матриці; $\rho = 1 - P$, P – пористість.

Для випадкового просторового розподілення пор:

$$\frac{K}{K_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} p\right)^{-1}; \frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{1 - \rho}{\rho} q\right)^{-1}. \tag{6}$$

Для пор голкоподібної форми:

$$p = \frac{5 - 4\nu_0}{3(1 - 2\nu_0)}; q = \frac{8}{15}(5 - 3\nu_0). \tag{7}$$

Для пор дискової форми:

$$p = \frac{4}{3} \frac{1 - \nu_0^2}{1 - 2\nu_0} \frac{1}{\pi l}; q = \frac{8}{15} \frac{(1 - \nu_0)(5 - \nu_0)}{2 - \nu_0} \frac{1}{\pi l}, \tag{8}$$

де $l = t/d$, t — товщина, d — діаметр пори.

Варіаційний метод Хашина—Штрікмана має вигляд:

$$\frac{K}{K_0} = \rho \left(1 + (1 - \rho) \frac{3K_0}{4G_0} \right)^{-1}; \quad \frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{2}{3}(1 - \rho) \left(\frac{10G_0}{9K_0 - G_0} \right) \right)^{-1}. \quad (9)$$

4. В'язкопружне деформування пористого ГБ. Реологічні складові параметрів НДС пористого гумового буфера (ПГБ) урахуються введенням вектора додаткового навантаження, для визначення якого розв'язуючі рівняння МСЕ будуються на основі варіації повної потенціальної енергії системи [16]. Основний закон спадкової в'язкопружності представляється в операторній формі Гука на основі принципу Больцмана—Вольтерра.

Для побудови скінченно-елементної моделі інтегральні співвідношення в'язкопружності представляються в кінцево-різницевої формі. Вважаючи, що переміщення $u(t)$ і деформації $\varepsilon(t)$ змінюються лінійно всередині кожного інтервалу часу, вираз для компонентів тензора напружень запишеться у вигляді:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t_n) = C^{ijkl} \left(\varepsilon_{kl}(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon_{kl}(t_m) R_m \right),$$

де C^{ijkl} — компоненти тензора пружних сталей, $R_m = \int_{t_m}^{t_{m+1}} R(t - \tau) d\tau$.

Як ядро релаксації ПГ використовуємо слабкосингулярне ядро Работнова

$$R(t - \tau) = (t - \tau)^\alpha \chi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma((n+1)(\alpha+1))} \quad (10)$$

і ядро Ржаніцина

$$R(t - \tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} (t - \tau)^{\alpha-1}, \quad (11)$$

де χ , A — параметри релаксації, α , β — реологічні параметри.

На основі варіаційного принципу співвідношення для МЖ ПМ в умовах в'язкопружного деформування матимуть вигляд:

$$\left(M^{\mu\nu}(t_n) u_\mu(t_n) - \sum_{m=0}^{n-1} M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m) R_m - F^\nu(t_n) \right) \delta u_\nu = 0.$$

Оскільки $\delta u_\nu \neq 0$, то нулю повинен дорівнювати вираз в дужках, який є лінеаризованою системою розв'язуючих рівнянь спадкової в'язкопружності:

$$M_n \bar{u}^{(n)} = \sum_{m=0}^{n-1} \bar{P}_m + \bar{Q}_{(n)}, \quad (12)$$

де $\bar{u}^{(n)} = u_\mu(t_n)$ — вектор переміщень, $\bar{P}_m = R_m M^{\mu\nu}(t_m) u_\mu(t_m)$ — вектор додаткового навантаження, $\bar{Q}_{(n)} = F^\nu(t_n)$ — вектор розподілених поверхневих навантажень, діючих на момент часу t_n .

Розв'язок системи (12) будується на основі модифікованого методу Ньютона—Канторовича для розв'язання задачі в'язкопружності [16].

5. Результати розрахунків. Даний підхід розрахунку ГБ був реалізований в рамках програмного комплексу «МІРЕЛА+» [17].

Вихідні дані: $d = 0,125$ м, $d_0 = 0,035$ м, $L = 0,1$ м, $t = 0,005$ м, $h = 0,00375$ м, $Q = 10000$ Н, коефіцієнт Пуассона $\nu_0 = 0,49$, товщина буфера $b = (d - d_0)/2 = 0,045$ м, модуль зсуву ПГ $G_0 = 2 \times 10^6$ Па, модуль об'ємного стиску ПГ $K_0 = 99,3 \times 10^6$ Па, реологічні параметри: ядра Работнова $\alpha = -0,6$, $\beta = 2,082$, $\chi = 0,45$, ядра Ржаніцина $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,05$, $A = 0,0765$. Припускається релаксація лише модуля зсуву G ПМ.

Розрахунки в лінійній постановці були проведені для низки марок гуми при різних сітках дискретизації. Результати представлені при сітці дискретизації $7 \times 10 \times 13$.

Розподілення переміщень u_1 за товщиною ГБ при коефіцієнті Пуассона $\nu = 0,4999$ і по висоті ГБ при $\nu = 0,49999$, отримані на основі УМССЕ, представлені на рис. 2 і на рис. 3 відповідно.

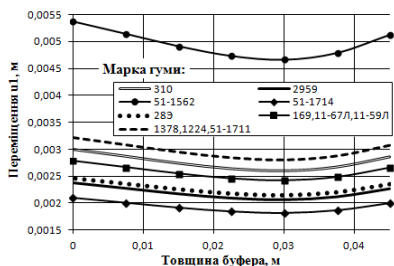


Рис. 2. Розподілення переміщень u_1 за товщиною гумового буфера

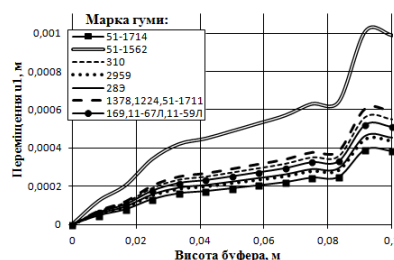


Рис. 3. Розподілення переміщень u_1 по висоті гумового буфера

Залежність переміщень u_1 від коефіцієнта Пуассона ν і розподілення нормальних напружень за товщиною ГБ при $L = 0,05$ м та $\nu = 0,4999$, отримані з використанням кубічної апроксимації переміщень (3), представлені на рис. 4 і на рис. 5 відповідно. На рис. 5: 1 – σ^{11} , 2 – σ^{22} , 3 – σ^{33} .

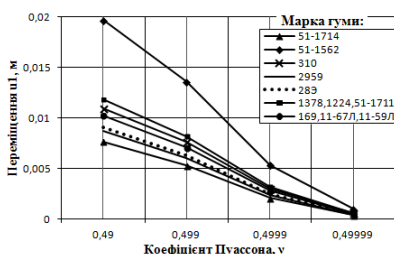


Рис. 4. Залежність переміщень u_1 від коефіцієнта Пуассона ν

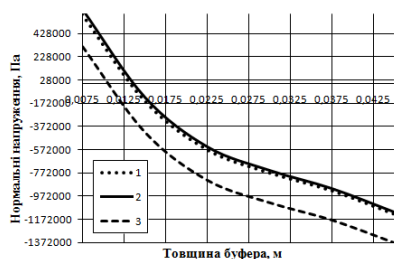


Рис. 5. Розподілення нормальних напружень за товщиною ГБ

На рис. 6–8: 1 – формула (1), 2 – формули (2) і (3), 3 – формули (2) і (4), 4 – формула (5).

На рис. 6 представлено розподілення нормальних напружень $\tilde{\sigma}^{11}$ за товщиною ПГБ для ядра Работнова (10) в момент часу $t = 1$ секунда при пористості $P = 50\%$ для кожного з методів (5)–(9) при сітці дискретизації $5 \times 8 \times 12$.

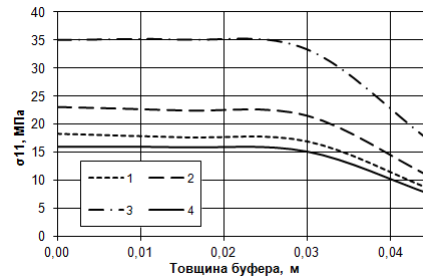


Рис. 6. Розподілення нормальних напружень $\tilde{\sigma}^{11}$ за товщиною пористого буфера (формула (10))

Залежність переміщень $u_1(t)$ від часу $t \in [0; 1]$ секунди при пористості $P = 50\%$ для кожного з методів (5)–(9) при сітці дискретизації $5 \times 8 \times 12$ представлена для ядра Работнова (10) на рис. 7 та для ядра Ржаніцина (11) — на рис. 8.

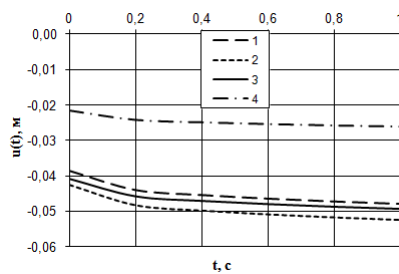


Рис. 7. Залежність переміщень від часу (формула (10))

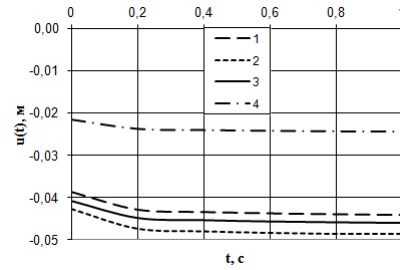


Рис. 8. Залежність переміщень від часу (формула (11))

Висновки. При дослідженні напружено-деформованого стану гумового буфера на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента отримані такі результати: збільшення коефіцієнта Пуассона посилює жорсткісні характеристики конструкції; на внутрішній частині буфера, по контуру отвору, діють розтягуючі напруження, а на зовнішній частині — стискальні напруження; при використанні гуми марки 51-1562 буфер зазнає найбільших деформацій, використання гуми марки 51-1714 дозволяє зменшити рівень деформації на 58%.

При дослідженні в'язкопружної поведінки пористого гумового буфера наявність пористості та урахування реологічних характеристик пористої гуми значно впливають на параметри напружено-деформованого стану. Найбільші переміщення отримані з використанням формул (5), (8), найменші — для формули (9). Переміщення в залежності від використання методів (5)–(9) збільшились на 13–15% для ядра Работнова і на 21–24% для ядра Ржаніцина.

Запропоновані підходи розв'язку задач механіки еластомерів на основі моментної схеми скінченного елемента дозволяють уточнити параметри напружено-деформованого стану слабкостисливих та пористих еластомерів, що доводить перспективність використання цих підходів. Надалі доцільним буде проводити розрахунок конструкцій більш складної геометричної форми в умовах геометрично

нелінійного деформування та з урахуванням нелінійності властивостей матеріалу.

1. **Дырда В. И.** Аналитические и численные методы расчета резиновых деталей: монография / В. И. Дырда, С. Н. Гребенюк, С. И. Гоменюк. – Днепропетровск; Запорожье : Запорожский национальный университет, 2012. – 370 с.
2. **Прикладные** методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / С. И. Дымников, Э. Э. Лавендел, А. А. Павловскис, М. И. Сниегс. – Рига : Зинатне, 1980. – 238 с.
3. **Zhang S. W.** Studies on rubber wear / S. W. Zhang // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. – 1998. – Vol. 212, 3. – P. 227–234.
4. **Големшток Г. М.** Реализация метода конечных элементов для расчета конструкций из несжимаемых и почти несжимаемых материалов / Г. М. Големшток // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1983. – № 23. – С. 47–56.
5. **Киричевский В. В.** Метод конечных элементов в механике эластомеров : [монография] / В. В. Киричевский. – К. : Наукова думка, 2002. – 655 с.
6. **Гребенюк С. Н.** Расчет напряженно-деформированного состояния резинового виброизолятора / С. Н. Гребенюк, А. А. Бова // Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте. – 2012. – Т. 3. – С. 30–34.
7. **Mankovits T.** Finite Element Analysis of Rubber Bumper Used in Air-springs / T. Mankovits, T. Szaby // Procedia Engineering. – 2012. – No. 48. – P. 388–395.
8. **Голованов А. И.** Расчет больших упругопластических деформаций трехмерных тел МКЭ / А. И. Голованов, Л. У. Султанов // Математическое моделирование систем и процессов. – 2004. – № 12. – С. 4–11.
9. **Гребенюк С. М.** Визначення напружено-деформованого стану порожнистого циліндра із пористого матеріалу в умовах в'язкопружного деформування / С. М. Гребенюк, В. З. Юречко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 53–60.
10. **Дорняк О. Р.** Численное решение краевой задачи вязкоупругого деформирования ортотропного капиллярно-пористого материала при прессовании / О. Р. Дорняк // Вестник ВГУ. Серия: физ., мат. – 2005. – № 2. – С. 138–146.
11. **Chateau X.** Micro mechanics of saturated and unsaturated porous media / X. Chateau, L. Dormieux // International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2002. – Vol. 26. – P. 831–844.
12. **Coussy O.** Non-linear binding and the diffusion-migration test / O. Coussy, R. Eymard // Transport in Porous Media. – 2003. – Vol. 1770. – P. 1–24.
13. **Метод** конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислюцкий, В. В. Киричевский и др. / под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К. : Вища школа, 1982. – 480 с.
14. **Гребенюк С. Н.** Повышение точности моментной схемы конечного элемента для слабосжимаемых материалов / С. Н. Гребенюк, А. А. Бова // Современные проблемы и пути их решения в науке, транспорте, производстве и образовании. – 2009. – Т. 22. – С. 55–64.

15. **Ковальченко М. С.** Механические свойства изотропных пористых материалов / М. С. Ковальченко // Порошковая металлургия. – 2002. – № 5-6. – С. 105–127.
16. **Гребенюк С. М.** Визначення напружено-деформованого стану пористого гумового буфера в умовах нелінійного деформування / С. М. Гребенюк, В. З. Юречко // Вісник ТНТУ імені Івана Пулюя. Механіка та матеріалознавство. – 2013. – № 2. – С. 52–62.
17. **Метод** конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб и др. – К. : Наук. думка, 2005. – 416 с.

Mathematical Subject Classification: 74B20, 74C05, 74G70
УДК 539.375

М. В. Дудик, Ю. В. Дихтяренко, Г. А. Хазин
Уманский государственный педагогический университет

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
У ВЕРШИН ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА,
ВЫХОДЯЩЕЙ ИЗ УГЛОВОЙ ТОЧКИ
ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД**

Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В., Хазин Г. А. **Напружено-деформований стан біля вершин тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу середовищ.** Методом Вінера—Хопфа в умовах плоскої деформації знайдено розв'язок задачі про напружено-деформований стан біля вершин тріщини нормального відриву, що виходить з кутової точки межі поділу двох різних пружних середовищ. Отримані вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в обох вершинах в загальному і частинних випадках розподілу навантаження вздовж берегів тріщини.
Ключові слова: кутова точка межі поділу середовищ, тріщина нормального відриву, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Дудик М. В., Дихтяренко Ю. В., Хазин Г. А. **Напряженно-деформированное состояние у вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела сред.** Методом Винера—Хопфа в условиях плоской деформации найдено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии вблизи вершин трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела двух различных упругих сред. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений у обеих вершин в общем и частных случаях распределения нагрузки вдоль берегов трещины.
Ключевые слова: угловая точка границы раздела сред, трещина нормального отрыва, коэффициент интенсивности напряжений.

Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V., Khazin G. A. **Stress-strain state near the tips of a mode I crack going out from angular point of an interface of media.** The solution of the problem about the stress-strain state near the tips of a mode I crack going out from angular point of an interface of two different elastic media is founded by the Wiener—Hopf method for the plain strain conditions. The expressions for the stress intensity factor at the both tips in general and particular cases of stress distribution along the crack lips are obtained.
Key words: angular point of an media interface, mode I crack, stress intensity factor.

ВВЕДЕНИЕ. В механике разрушения кусочно-однородных тел большое количество публикаций посвящено трещинам, расположенным на границе раздела сред, и гораздо меньше трещинам, выходящим на границу раздела, причем главным образом рассматриваются задачи о трещинах, выходящих на плоскую границу [1, 9, 16-20, 22, 23]. В то же время определенный интерес представляет более общий случай ломаной границы раздела с трещиной, выходящей из вершины излома. Отсутствие симметрии здесь существенно усложняет решение соот-

ветствующей задачи теории упругости, что требует применения для этих целей числовых методов или упрощения условий нагружения [4, 8, 11, 14, 15, 21].

В данной работе в условиях плоской деформации получено аналитическое решение симметричной задачи о трещине нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела, при нагружении ее берегов отрывным нормальным напряжением произвольного вида. Знание локального поля напряжений у вершин трещины необходимо для исследования зон предразрушения в их окрестности и предсказания направления дальнейшего распространения трещины [3, 5-7].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Постановка задачи. В условиях плоской деформации рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного тела, состоящего из двух линейно-упругих клиньев с упругими параметрами E_1, ν_1 и E_2, ν_2 , дополняющих друг друга до плоскости, жестко соединенных вдоль их граней $\theta = \pm\alpha$ (рис. 1). Из угловой точки границы раздела вдоль линии симметрии $\theta = \pm\pi$ выходит трещина длины L , к части берегов которой $a \leq r \leq b$ приложено отрывное нормальное напряжение $\sigma_\theta(r, \pm\pi) = -\sigma(r) < 0$, а какая-либо другая внешняя нагрузка отсутствует. Задача состоит в определении коэффициентов интенсивности напряжений у вершин трещины, для чего в силу симметрии достаточно получить решение статической краевой задачи теории упругости в полуплоскости $0 \leq \theta \leq \pi$ с граничными условиями:

$$\theta = 0 : \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = 0; \quad \theta = \pi : \tau_{r\theta} = 0;$$

$$\theta = \alpha : \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0; \quad (1)$$

$$\theta = \pi, \quad 0 \leq a \leq r \leq b \leq L : \sigma_\theta = -\sigma(r);$$

$$\theta = \pi, \quad r \geq L : u_\theta = 0; \quad (2)$$

$$\forall \theta, \quad r \rightarrow \infty : \sigma_\theta(r, \theta) \sim o(1/r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) \sim o(1/r);$$

$\langle f \rangle$ – скачок величины f .

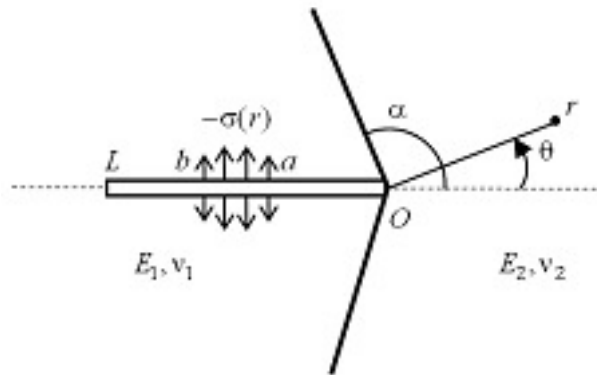


Рис. 1. Схема кусочно-однородного тела, состоящего из двух линейно-упругих клиньев

Построение решения задачи методом Винера—Хопфа. Применяв к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций и закону Гука интегральное преобразование Меллина [13] $f^*(p, \theta) = \int_0^\infty f(r, \theta) r^p dr$, где $f(r, \theta)$ – произвольная компонента тензора напряжений, p – комплексный параметр преобразования, получим следующие выражения для трансформант напряжений и производных от смещений:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta^{k*}(p, \theta) &= a_1^k(p) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p) \sin(p-1)\theta + a_3^k(p) \cos(p+1)\theta + \\ &\quad + a_4^k(p) \cos(p-1)\theta, \\ \tau_{r\theta}^{k*}(p, \theta) &= \frac{1}{p-1} [a_1^k(p)(p+1) \cos(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \\ &\quad - a_3^k(p)(p+1) \sin(p+1)\theta - a_4^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta], \\ \sigma_r^{k*}(p, \theta) &= -\frac{1}{p-1} [a_1^k(p)(p+3) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta + \\ &\quad + a_3^k(p)(p+3) \cos(p+1)\theta + a_4^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta], \\ \left(\frac{\partial u_\theta^k}{\partial r}\right)^* &= \frac{1+\nu_k}{E_k(p-1)} [a_1^k(p)(p-\kappa_k) \cos(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta - \\ &\quad - a_3^k(p)(p-\kappa_k) \sin(p+1)\theta - a_4^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta], \\ \left(\frac{\partial u_r^k}{\partial r}\right)^* &= -\frac{1+\nu_k}{E_k(p-1)} [a_1^k(p)(p+\kappa_k) \sin(p+1)\theta + a_2^k(p)(p-1) \sin(p-1)\theta + \\ &\quad + a_3^k(p)(p+\kappa_k) \cos(p+1)\theta + a_4^k(p)(p-1) \cos(p-1)\theta],\end{aligned}\quad (3)$$

где $a_j^k(p)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – неизвестные функции, определяемые в ходе решения задачи ($k = 1$ для первого и $k = 2$ для второго материала), $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$.

Подставив (3) в преобразованные по Меллину граничные условия (1), приддем к системе линейных алгебраических уравнений для $a_j^k(p)$, решение которой выразим через трансформанту $\sigma_\theta^*(p, \pi)$:

$$\begin{aligned}a_1^1(p) &= -\frac{(p-1)(1-e)}{D_0(p)} \{2d_1(p)d_2(p) + (1+\kappa_1) \sin p(\pi - 2\alpha)\Delta_4(p)\} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\ a_2^1(p) &= -\frac{1}{D_0(p)} \{(1+\kappa_1)(e+\kappa_1-1-e\kappa_2) \sin p\pi \Delta_4(p) - \\ &\quad - 2(1-e)(p+1)d_1(p)d_3(p) - \\ &\quad - (1-e)(1+\kappa_1)(p+1) \sin p(\pi - 2\alpha)\Delta_4(p)\} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\ a_3^1(p) &= \frac{(p-1)}{D_0(p)} \{2(1-e)d_1(p)d_4(p) + \\ &\quad + (1+\kappa_1)[(1-e) \cos p(\pi - 2\alpha)\Delta_4(p) + e(1+\kappa_1) \sin p\pi]\} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\ a_4^1(p) &= -\frac{1}{D_0(p)} \{(1+\kappa_1)(e+\kappa_1-1-e\kappa_2) \cos p\pi \Delta_4(p) + \\ &\quad + 2(1-e)(p+1)d_1(p)d_5(p) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - e)(1 + \kappa_1)(p + 1) \cos p(\pi - 2\alpha) \Delta_4(p) + \\
& + (1 + \kappa_1)e(1 + \kappa_2)(p + 1) \sin p\pi \} \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
& a_1^2(p) = a_2^2(p) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3^2(p) &= \frac{(p-1)}{D_0(p)} (1 + \kappa_1) [(1 + \kappa_1) \sin p\pi + 2(1 - e)d_6(p)] \sigma_\theta^*(p, \pi), \\
a_4^2(p) &= -\frac{(p-1)}{D_0(p)} (1 + \kappa_1) [(1 + \kappa_1)d_7(p) + 2(1 - e)d_8(p) - \\
& - 2e(1 + \kappa_2)d_2(p)] \sigma_\theta^*(p, \pi); \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_0(p) &= -4e^2 \Delta_1(p) \Delta_2(p) + e \{ (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \sin 2p\pi + 4\Delta_1(p) \Delta_2(p) - \\
& - \Delta_4(p) [(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) - 4\Delta_3(p)] \} + \Delta_4 [(1 + \kappa_1)^2 - 4\Delta_3(p)]
\end{aligned}$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha), \quad \Delta_2(p) = p \sin 2\alpha - \kappa_2 \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \alpha + \kappa_1 \sin^2 p(\pi - \alpha), \quad \Delta_4(p) = p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha;$$

$$d_1(p) = (1 - e) \Delta_4(p) + e(1 + \kappa_2) \sin 2p\alpha,$$

$$d_2(p) = p \sin \alpha \cos(p\pi + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$d_3(p) = p \sin \alpha \cos(p\pi - \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$d_4(p) = p \sin \alpha \sin(p\pi + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha,$$

$$d_5(p) = p \sin \alpha \sin(p\pi - \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha,$$

$$d_6(p) = p \sin \alpha \cos(p\pi - 2p\alpha + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$d_7(p) = p \sin(p\pi + 2\alpha) - \sin p(\pi - 2\alpha),$$

$$\begin{aligned}
d_8(p) &= p \sin \alpha [p \cos(p\pi - 2p\alpha - \alpha) - \cos(p\pi + \alpha)] - \\
& - \sin p(\pi - \alpha) [p \cos(p + 2)\alpha - \cos p\alpha],
\end{aligned}$$

$$e = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1}.$$

Выразив с помощью (3-4) трансформанту $\left(\frac{\partial u_\theta^1}{\partial r}\right)^*$ через $\sigma_\theta^*(p, \pi)$ и используя условия (2), приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа задачи в полосе $-\varepsilon_2 < \text{Re} p < \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – достаточно малые положительные числа):

$$\Phi^+(p) - \tilde{\sigma}(p) = -ctgp\pi G(p) \Phi^-(p), \tag{5}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^\infty \sigma_\theta(\rho L, \pi) \rho^p d\rho, \quad \Phi^-(p) = \frac{E_1}{2(1 - \nu_1^2)} \int_0^1 \frac{\partial u_\theta(\rho L, \pi)}{\partial r} \rho^p d\rho,$$

$$\tilde{\sigma}(p) = \int_{a/L}^{b/L} \sigma(\rho L) \rho^p d\rho, \quad G(p) = \frac{D_0(p)}{2D(p)} \frac{\sin p\pi}{\cos p\pi};$$

$$D(p) = e^2 \Delta_2(p) \Delta_6(p) - e(\Delta_2(p) \Delta_6(p) + \Delta_4(p) \Delta_5(p) - \Delta_7(p)) + \Delta_4(p) \Delta_5(p),$$

$$\Delta_5(p) = p \sin 2\alpha + \kappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha), \quad \Delta_6(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_7(p) = (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) \sin^2 p\pi.$$

Функция $G(it)$ является вещественной положительной четной функцией, которая стремится к 1 при $t \rightarrow \pm\infty$, поэтому можно факторизовать $G(p)$ по формуле Гахова [2]:

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} \quad (Re p = 0),$$

$$\exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & Re p < 0, \\ G^-(p), & Re p > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Также имеет место факторизация

$$pctgp\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(0,5 \mp p)}, \quad (7)$$

($\Gamma(p)$ – гамма-функция Эйлера), где $K^+(p)$ аналитична и не имеет нулей в области $Re p < 0,5$, а $K^-(p)$ – в области $Re p > -0,5$. Тогда уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} - \frac{\bar{\sigma}(p)}{K^+(p)G^+(p)} = -\frac{K^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} \quad (Re p = 0). \quad (8)$$

Заменим функцию $\frac{\bar{\sigma}(p)}{K^+(p)G^+(p)}$ разностью крайних значений аналитических функций [2]:

$$\frac{\bar{\sigma}(p)}{K^+(p)G^+(p)} = \bar{\sigma}^+(p) - \bar{\sigma}^-(p) \quad (Re p = 0),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\bar{\sigma}(z) dz}{K^+(z)G^+(z)(z-p)} = \begin{cases} \bar{\sigma}^+(p) & (Re p < 0), \\ \bar{\sigma}^-(p) & (Re p > 0). \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), получим:

$$\frac{\Phi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} - \bar{\sigma}^+(p) = -\frac{K^-(p)\Phi^-(p)}{pG^-(p)} - \bar{\sigma}^-(p) \quad (Re p = 0). \quad (10)$$

Левая часть уравнения (10) аналитична в полуплоскости $Re p < 0$, а правая – в полуплоскости $Re p > 0$. Тогда, в соответствии с принципом аналитического продолжения, должна существовать единая функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, которая равна левой и правой частям этого уравнения в соответствующих полуплоскостях.

У левой вершины трещины напряжения и смещения имеют асимптотики, соответствующие полубесконечной трещине нормального отрыва в однородном материале:

$$\sigma_\theta(r, \pi) \sim \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-L)}} \quad (r > L), \quad \frac{\partial u_\theta(r, \pi)}{\partial r} \sim -\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(L-r)}} \quad (r < L).$$

Отсюда с помощью теоремы абелева типа [12] получим:

$$\Phi^+(p) \sim \frac{K_I}{\sqrt{-2pL}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{K_I}{\sqrt{2pL}} \quad (p \rightarrow \infty). \quad (11)$$

В силу (6) и (9) имеем $G^\pm(p) \rightarrow 1$, $\tilde{\sigma}^\pm(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, а формула Стирлинга для гамма-функции дает асимптотики

$$\begin{aligned} K^+(p) &\sim \sqrt{-p} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p < 0, 5), \\ K^-(p) &\sim \sqrt{p} \quad (p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p > -0, 5). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая приведенные выше асимптотики, находим, что левая и правая части уравнения (10) обращаются на бесконечности в ноль. Поэтому, согласно теореме Лиувилля [10], единая аналитическая функция тождественно равна нулю во всей комплексной плоскости p . Отсюда следует искомое решение исходного уравнения Винера—Хопфа (5):

$$\Phi^+(p) = K^+(p) G^+(p) \tilde{\sigma}^+(p), \quad \Phi^-(p) = -\frac{pG^-(p)}{K^-(p)} \tilde{\sigma}^-(p). \quad (13)$$

В соответствии с (6), (9), (12) и (13), при $p \rightarrow \infty$ имеем

$$\Phi^+(p) \sim \frac{1}{2\pi i \sqrt{-p}} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\sigma}(z) dz}{K^+(z) G^+(z)}.$$

Сравнивая эту асимптотику с (11), получим выражение для коэффициента интенсивности напряжений у левой вершины трещины:

$$K_I = \sqrt{2L} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\tilde{\sigma}(z) dz}{K^+(z) G^+(z)}. \quad (14)$$

Для определения коэффициента интенсивности напряжений у правой вершины найдем, используя полученное решение (13) и первую формулу в (3), трансформанту нормального напряжения на продолжении трещины во втором материале:

$$\sigma_\theta^{2*}(p, 0) = \frac{2(1 + \kappa_1)}{D_0(p)} F(p) [K^+(p) G^+(p) \tilde{\sigma}^+(p) - \tilde{\sigma}(p)] L^{p+1},$$

$$F(p) = (1 + \kappa_1) f_1(p) + (1 - e) f_2(p) - e(1 + \kappa_2) d_2(p),$$

$$f_1(p) = p \cos \alpha \sin(p\pi + \alpha) - \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha,$$

$$\begin{aligned} f_2(p) &= p^2 \sin 2\alpha \cos(p\pi - 2\alpha) - p [\cos 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) + \sin(p\pi + 2\alpha)] + \\ &\quad + 2 \sin p(\pi - \alpha) \cos p\alpha. \end{aligned}$$

Применив к этой трансформанте обратное преобразование Меллина $f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f^*(p, \theta) r^{-p-1} dp$ (γ – произвольная прямая в полосе $-\varepsilon_2 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_1$, параллельная мнимой оси), с использованием теоремы о вычетах найдем главный член разложения напряжения в ряд при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^2(r, 0) &= \frac{2(1 + \kappa_1)}{D'_0(-1 - \lambda)} F(-1 - \lambda) [K^+(-1 - \lambda) G^+(-1 - \lambda) \tilde{\sigma}^+(-1 - \lambda) - \\ &\quad - \tilde{\sigma}(-1 - \lambda)] \left(\frac{r}{L}\right)^\lambda, \end{aligned} \quad (15)$$

где $D'_0(p) = \frac{dD_0(p)}{dp}$; λ – наименьший на интервале $(-1, 0)$ корень уравнения $D_0(-1 - \lambda) = 0$, определяющий степень сингулярности напряжений у вершины трещины, заканчивающейся в угловой точке. Зависимость λ от упругих параметров соединенных материалов и угла раствора границы раздела сред была исследована ранее в [4]. Определение производной $D'_0(p)$ не составляет проблем, поэтому выражение для нее не приводится.

Полагая, что у вершины трещины напряжение имеет вид $\sigma_\theta^2(r, 0) \sim \tilde{K}_I(2\pi r)^\lambda \times F(-1 - \lambda)$, найдем из его сравнения с (15) выражение для коэффициента интенсивности:

$$\tilde{K}_I = \frac{2(1 + \kappa_1)(2\pi L)^{-\lambda}}{D'_0(-1 - \lambda)} [K^+(-1 - \lambda)G^+(-1 - \lambda)\tilde{\sigma}^+(-1 - \lambda) - \tilde{\sigma}(-1 - \lambda)]. \quad (16)$$

Частные случаи нагружения. Применим полученные результаты к некоторым частным случаям распределения нагрузки по берегам трещины.

а) Пусть на отрезке (a, b) действует постоянное напряжение σ_0 . Согласно (5)

$$\tilde{\sigma}(p) = \frac{\sigma_0}{p+1} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{p+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{p+1} \right]. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (14) дает:

$$K_I = \sqrt{2L}\sigma_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{1}{(z+1)K^+(z)G^+(z)} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{z+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{z+1} \right] dz. \quad (18)$$

С учетом (5–7) формулу (18) перепишем следующим образом:

$$K_I = -\sqrt{2L}\sigma_0 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{2D(z)K^-(z)}{z(z+1)G^-(z)D_0(z)} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{z+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{z+1} \right] dz.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о вычетах, получим:

$$K_I = \sqrt{2L}\sigma_0 \sum_k \frac{2D(z_k)K^-(z_k)}{z_k(z_k+1)G^-(z_k)D'_0(z_k)} \left[\left(\frac{b}{L} \right)^{z_k+1} - \left(\frac{a}{L} \right)^{z_k+1} \right], \quad (19)$$

где z_k – корни уравнения $D_0(z) = 0$, удовлетворяющие условию $Re z_k > 0$.

При $a = 0$ и $b = L$ интегрирование в (18) приводит к полученному ранее результату [8]

$$K_I = \frac{\sqrt{2L}\sigma_0}{K^+(-1)G^+(-1)}.$$

Коэффициент интенсивности напряжений \tilde{K}_I у правой вершины трещины при заданных условиях нагружения определяется из формулы (16) после вычисления $\tilde{\sigma}^+(-1 - \lambda)$ согласно (9) с учетом (17) и использованием теоремы о вычетах. В результате получим:

$$\tilde{K}_I = \frac{\sigma_0}{(2\pi)^\lambda} \frac{2(1 + \kappa_1)}{\lambda D'_0(-1 - \lambda)} \left\{ b^{-\lambda} - a^{-\lambda} + \right.$$

$$+ \sum_k \frac{2\lambda D(z_k) K^-(z_k) K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{z_k(z_k+1)(z_k+1+\lambda) G^-(z_k) D'_0(z_k) L^\lambda} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{z_k+1} - \left(\frac{a}{L}\right)^{z_k+1} \right]. \quad (20)$$

В частности, при $a = 0$ и $b = L$ имеем

$$\tilde{K}_I = \frac{\sigma_0}{(2\pi L)^\lambda} \frac{2(1+\kappa_1)}{\lambda D'_0(-1-\lambda)} \frac{K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{K^+(-1) G^+(-1)}.$$

б) Найдем коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах трещины при действии на ее берега в точках с координатами $(a, \pm\pi)$ нормальных сосредоточенных сил одинаковой интенсивности P . С этой целью в формулах (19) и (20) выполним предельные переходы $a \rightarrow b$, требуя постоянства полной нагрузки $P = \sigma_0(b-a)$. В результате получим:

$$K_I = \frac{\sqrt{2LP}}{a} \sum_k \frac{2D(z_k) K^-(z_k)}{z_k G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left(\frac{a}{L}\right)^{z_k+1},$$

$$\tilde{K}_I = \frac{P}{a(2\pi a)^\lambda} \frac{2(1+\kappa_1)}{D'_0(-1-\lambda)} \times$$

$$\times \left[\sum_k \frac{2D(z_k) K^-(z_k) K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{z_k(z_k+1+\lambda) G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left(\frac{a}{L}\right)^{z_k+1+\lambda} - 1 \right].$$

в) Формулы (19) и (20) могут быть легко обобщены на случай действия на отрезке (a, b) нормального напряжения с полиномальной зависимостью от расстояния:

$$\sigma(r) = \sum_{n=0}^m \sigma_n \left(\frac{r}{L}\right)^n \quad (\sigma_n = const).$$

Вычисления, аналогичные проведенным выше для постоянного напряжения, приводят к следующим выражениям:

$$K_I = \sqrt{2L} \sum_{n=0}^m \sum_k \frac{2\sigma_n D(z_k) K^-(z_k)}{z_k(n+z_k+1) G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{n+z_k+1} - \left(\frac{a}{L}\right)^{n+z_k+1} \right],$$

$$\tilde{K}_I = \frac{2(1+\kappa_1)(2\pi L)^{-\lambda}}{D'_0(-1-\lambda)} \sum_{n=0}^m \sigma_n \left\{ \frac{-1}{n-\lambda} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{n-\lambda} - \left(\frac{a}{L}\right)^{n-\lambda} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_k \frac{2D(z_k) K^-(z_k) K^+(-1-\lambda) G^+(-1-\lambda)}{z_k(n+z_k+1)(z_k+1+\lambda) G^-(z_k) D'_0(z_k)} \left[\left(\frac{b}{L}\right)^{n+z_k+1} - \left(\frac{a}{L}\right)^{n+z_k+1} \right] \right\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В условиях плоской деформации найдено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии кусочно-однородного тела вблизи трещины нормального отрыва, выходящей из угловой точки границы раздела двух различных упругих изотропных сред. Вершина, совпадающая с угловой точкой, оказывается концентратором напряжений со степенной особенностью, отличной от корневой, тогда как у другой вершины, расположенной в одном из соединенных материалов, сохраняется корневая особенность. Для коэффициентов интенсивности напряжений у обеих вершин при симметричном действии на части берегов трещины отрывного напряжения произвольного вида получены выражения в

форме двукратных интегралов, которые вычислены в частных случаях постоянного напряжения, напряжения с полиномальной зависимостью от расстояния до угловой точки и действия на берега трещины сосредоточенных сил одинаковой интенсивности.

В заключение авторы выражают глубокую признательность проф. Л. А. Кипнису за плодотворные обсуждения настоящей работы.

1. **Боджи Д.** Плоская статическая задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела двух материалов / Д. Боджи // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – Т. 32, № 2. – С. 186–192.
2. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. **Дудик М. В.** Разветвление трещины нормального отрыва в угловой точке границы раздела сред / М. В. Дудик, Ю. В. Дихтяренко // Теор. и прикл. механика. – 2012. – Вып. 5. – С. 101–111.
4. **Каминский А. А.** О поведении напряжений вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, В. Н. Дякон // Теор. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 103–108.
5. **Каминский А. А.** О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред / А. А. Каминский, М. В. Дудик, Л. А. Кипнис // Прикл. механика. – 2007. – Т. 43, № 106. – С. 28–41.
6. **Каминский А. А.** О зоне предразрушения в конце трещины, выходящей на границу раздела упругих сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова, М. В. Дудик // Доповіді НАН України. – 2006. – № 7. – С. 43–46.
7. **Камінський А. О.** Дослідження зони передруйнування у кінці тріщини нормального відриву, що виходить на негладку межу розділу пружних середовищ / А. О. Камінський, Л. А. Кіпніс, М. В. Дудик, Ю. В. Діхтяренко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 4. – С. 111–119.
8. **Кипнис Л. А.** Кусочно-однородная плоскость с границей раздела в форме сторон угла и симметричным разрезом, исходящим из вершины / Л. А. Кипнис // ПММ. – 1986. – Т. 50, Вып. 2. – С. 334–336.
9. **Кулиев В. Д.** О торможении трещины на границе раздела различных упругих сред / В. Д. Кулиев, Ю. Н. Работнов, Г. П. Черепанов // Изв. АН СССР, Механика тв. тела. – 1978. – № 4. – С. 120–128.
10. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 678 с.
11. **Махоркін М.** Асимптотики і поля напружень у клиновій системі за умов антиплоскої деформації / М. Махоркін, Г. Сулим // машинознавство. – 2007. – № 1. – С. 8–13.
12. **Нобл Б.** Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных / Б. Нобл. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
13. **Уфлянд Я. С.** Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.

14. **Bardzokas D. I.** About a stress deformation condition of a piecewise-uniform wedge with a system of collinear cracks at an antiplane deformation / D. I. Bardzokas, S. H. Gevorgyan, S. M. Mkhitarian // *Mathematical Problems in Engineering*. – 2005. – № 2. – P. 245–268.
15. **Carpinteri A.** Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems / A. Carpinteri, M. Paggi // *Eng. Fracture Mechanics*. – 2007. – Vol. 74. – P. 59–75.
16. **Chen S.** Finite boundary effects in problem of a crack perpendicular to and terminating at a bimaterial interface / S. Chen, T. Wang, S. Kao-Walter // *Acta Mech. Sinica*. – 2005. – Vol. 21. – P. 56–64.
17. **Cook T. S.** Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface / T. S. Cook, F. Erdogan // *Int. J. Eng. Sciences*. – 1972. – Vol. 10. – P. 677–697.
18. **He M.Y.** Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials / M. Y. He, J. M. Hutchinson // *Int. J. of Solids and Structures*. – 1989. – Vol. 25. – P. 1053–1067.
19. **Leguillon D.** Crack deflection by an interface – asymptotics of the residual thermal stresses / D. Leguillon, C. Lacroix, E. Martin // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2001. – Vol. 38. – P. 7423–7445.
20. **Li J.** Investigation of an arbitrarily oriented crack meeting an interface between two elastic materials / J. Li, X. B. Zhang, N. Recho // *Eur. J. Mech. A – Solid*. – 1997. – Vol. 16, № 5. – P. 795–821.
21. **Linkov A. M.** Multi-wedge points and multi-wedge elements in computational mechanics: evaluation of exponent and angular distribution / A. M. Linkov, V. F. Koshelev // *Int. J. Solids and Structures*. – 2006. – Vol. 43. – P. 5909–5930.
22. **Zak A. R.** Crack point stress singularities at bi-material interface / A. R. Zak, M. L. Williams // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30, №1. – P. 142–143.
23. **Zhang Z.** Split singularities and the competition between crack penetration and debond at a bimaterial interface / Z. Zhang, Z. Suo // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2007. – Vol. 44. – P. 4559–4573.

Mathematical Subject Classification: 74B10, 42A48
УДК 539.1

Ю. С. Процеров

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ СО СВОБОДНОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И УЧЕТОМ
СОБСТВЕННОГО ВЕСА**

Процеров Ю. С. Осесимметричні задачі теорії пружності для циліндра кінцевої довжини з вільною циліндричною поверхнею та за умов врахування власної ваги. Розглянуто пружний циліндр скінченної довжини з урахуванням власної ваги, на нижній основі якого задано умови гладкого контакту, до верхньої основи додано вісисиметричне нормальне навантаження, а бічна поверхня вільна від напружень. За допомогою скінченного інтегрального перетворення Фур'є задачу зведено до інтегро-диференціального рівняння 1-го роду відносно вертикальних переміщень верхньої основи циліндра. Розв'язок рівняння будується у вигляді ряду Фур'є за поліномами Якобі. Знайдено елементарний розв'язок для окремого випадку навантаження циліндра.

Ключові слова: пружний циліндр скінченної довжини, власна вага, вільна бічна поверхня, скінченне інтегральне перетворення Фур'є, інтегро-диференціальне рівняння 1-го роду.

Процеров Ю. С. Осесимметричные задачи теории упругости для цилиндра конечной длины со свободной цилиндрической поверхностью и учетом собственного веса. Рассматривается упругий цилиндр конечной длины с учетом собственного веса, на нижнем основании которого заданы условия гладкого контакта, к верхнему основанию приложена осесимметричная нормальная загрузка, а боковая поверхность свободна от напряжений. При помощи конечного интегрального преобразования Фурье задача сведена к интегро-дифференциальному уравнению 1-го рода относительно вертикальных смещений верхнего основания цилиндра. Решение полученного уравнения строится в виде ряда по многочленам Якоби. Найдено элементарное решение для частого случая загрузки цилиндра.

Ключевые слова: упругий цилиндр конечной длины с учетом собственного веса, свободная боковая поверхность, конечное интегральное преобразование Фурье, интегро-дифференциальное уравнение 1-го рода.

Protserov Yu. S. Axisymmetric problems of elasticity theory for a cylinder of finite length with free cylindrical surface and with taking into account its own weight. The finite elastic cylinder with regard of its dead weight is considered. The conditions of the smooth contact are given on the lower base, the axisymmetrical normal loading is applied to the upper base, the lateral surface is free from the stress. With the help of the finite integral Fourier's transformation the problem is reduced to the integro-differential equation of the 1-st kind with regard to the vertical displacement of the cylinder's upper base. The solution of the obtained equation is constructed as the Fourier's series by the Jacobi's polynomials. The elementary solution is found for the one case of the cylinder's loading.

Key words: elastic finite cylinder, dead weight, free lateral surface, finite integral Fourier transformation, integro-differential equation of 1-st kind.

ВВЕДЕНИЕ. Осесимметричным задачам для упругих цилиндров конечной длины, сплошных и полых, посвящена довольно обширная литература. Состояние проблемы до 1963 года освещено в обзоре [1]. Этим же задачам посвящена значительная часть монографии [5], где приводится обзор работ, опубликованных после 1963 года. Однако, если не касаться приближенных численных методов решения осесимметричных задач для цилиндров конечной длины, аналитических методов, позволяющих построить решение в виде явной функциональной зависимости от вида нагрузки и параметров цилиндра, явно недостаточно. К направлению получения точных решений относятся работы [2] и [3], где решение строится в виде разложений по тригонометрическим или гиперболическим функциям Бесселя, что приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов этих разложений. Однако ни в одной из этих работ не приводится численная реализация предложенных алгоритмов решения. Из последних работ следует упомянуть работы [4] и [8], где с использованием методов суперпозиции и разложений в ряды Фурье—Бесселя решение задач не только сведено к бесконечным системам, но и получены числовые значения напряжений в цилиндре. В работах [9]–[11] решение задачи о напряженном состоянии кругового цилиндра, нагруженного по торцам или по цилиндрической боковой поверхности, также строится в виде рядов Фурье—Бесселя и приводятся численные результаты для определенных видов загрузок. Во всех публикациях, в том числе и выполненных в последнее время, не учитывается действие объемных сил в виде собственного веса материала цилиндра, что приводит к решению неоднородных уравнений Ламе.

Целью данной работы является определение полей смещений и напряжений в конечном упругом цилиндре со свободной боковой поверхностью под действием осесимметричной нагрузки и с учетом собственного веса цилиндра.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи. Рассматриваем осесимметричную задачу для упругого цилиндра, заданного в цилиндрической системе координат соотношениями $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$. Искомые функции являются смещения $u_r(r, z)$ и $u_z(r, z)$, которые должны удовлетворять осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами в виде собственного веса

$$\begin{aligned} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_r \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \frac{2}{\kappa+1} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} &= \frac{(\kappa-1)\gamma}{(\kappa+1)G}, \end{aligned}$$

где $\kappa = 3 - 4\mu$, μ — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига и γ — удельный вес материала цилиндра.

Напряжения выражаются через смещения формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{4G}{\kappa-1} [(1-\mu) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} +$$

$$+\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \right),$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Будем считать, что цилиндр опирается на абсолютно жесткое гладкое основание, т. е. при $z=0$ заданы условия скользящей заделки

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

К верхнему основанию $z=h$ приложена осесимметричная нормальная нагрузка

$$\sigma_z|_{z=h} = -p(r); \quad \tau_{rz}|_{z=h} = 0.$$

Боковая поверхность цилиндра $r=a$ свободна от напряжений

$$\sigma_r|_{r=a} = 0; \quad \tau_{rz}|_{r=a} = 0.$$

Перейдем к безразмерным координатам $\rho = a^{-1}r$ и $\zeta = h^{-1}z$ и величинам $u(\rho, \zeta) = u_r(a\rho, h\zeta)$, $w(\rho, \zeta) = u_z(a\rho, h\zeta)$, $\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \sigma_r(a\rho, h\zeta)$, ... Система уравнений Ламе примет вид

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} u \right] + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{2\alpha}{\kappa-1} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \zeta} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{2\alpha}{\kappa+1} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\gamma a^2 (\kappa-1)}{G(\kappa+1)},$$

где $\alpha = a^{-1}h$.

Краевые условия на нижнем и верхнем основаниях цилиндра примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad w|_{\zeta=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \alpha \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=1} = -\frac{a(\kappa-1)}{4G\mu} P(\rho); \quad \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \Big|_{\zeta=1} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{\mu} = \mu^{-1}(1-\mu) = (3-\kappa)^{-1}(\kappa+1)$, $P(\rho) = p(a\rho)$.

Краевые условия на боковой поверхности цилиндра имеют вид

$$\left(\bar{\mu} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} u + \alpha \frac{\partial w}{\partial z} \right) \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (4)$$

2. Сведение поставленной краевой задачи к одномерной. Для сведения поставленной краевой задачи к одномерной воспользуемся конечными преобразованиями Фурье по переменной ζ

$$u_n(\rho) = \int_0^1 u(\rho, \zeta) \cos \lambda_n \zeta d\zeta; \quad u(\rho, \zeta) = u_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho) \cos \lambda_n \zeta,$$

$$w_n(\rho) = \int_0^1 w(\rho, \zeta) \sin \lambda_n \zeta d\zeta; \quad w(\rho, \zeta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\rho) \sin \lambda_n \zeta, \quad \lambda_n = \pi n. \quad (5)$$

Применяя их к системе уравнений Ламе (1) с учетом краевых условий (2) и второго из условий (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\rho u'_n(\rho) \right)' - \frac{1}{\rho^2} u_n(\rho) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} u_n(\rho) + \frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} w'_n(\rho) &= \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha (-1)^n \chi'(\rho), \quad (6) \\ -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\rho} (\rho u_n(\rho))' + \frac{1}{\rho} \left(\rho w'_n(\rho) \right)' - \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} w_n(\rho) &= \\ &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \alpha \lambda_n^* (-1)^n \chi(\rho) + \frac{1 - (-1)^n \gamma \alpha a^2}{\lambda_n^* G}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n^* = \alpha \lambda_n$, а $\chi(\rho) = w|_{\zeta=1}$ — неизвестная функция.

Применив интегральное преобразование (5) к краевым условиям (4), получим

$$\bar{\mu} u'_n(1) + u_n(1) + \lambda_n^* w_n(1) = \alpha (-1)^{n+1} \chi(1); \quad w'_n(1) - \lambda_n^* u_n(1) = 0. \quad (7)$$

3. Построение решения одномерной краевой задачи. При $n=0$ краевая задача (6) – (7) имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \left(\rho u'_0(\rho) \right)' - \frac{1}{\rho^2} u_0(\rho) = \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha \chi'(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (8)$$

$$\bar{\mu} u'_0(1) + u_0(1) = -\alpha \chi(1), \quad |\chi(0)| < \infty.$$

Общее решение однородного уравнения из (8), ограниченное в нуле, имеет вид $u_0(\rho) = C\rho$. Для получения решения неоднородного уравнения надо построить функцию Грина этой краевой задачи. Поскольку первое краевое условие сильно усложняет процесс построения функции Грина, то заменим его на $u_0(1) = 0$. Тогда при помощи конечного интегрального преобразования Ханкеля

$$u_{0k} = \int_0^1 u_0(\rho) J_1(\beta_k \rho) \rho d\rho; \quad u_0(\rho) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k} \frac{J_1(\beta_k \rho)}{J_0^2(\beta_k)},$$

где β_k — корни уравнения $J_1(\beta) = 0$, несложно построить билинейное разложение функции Грина этой измененной краевой задачи

$$G_0(\rho, t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k)}.$$

Решение краевой задачи (8) имеем в виде

$$u_0(\rho) = C\rho + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha \int_0^1 G_0(\rho, t) \chi'(t) dt.$$

Удовлетворив краевому условию из (8), получим

$$u_0(\rho) = \frac{\alpha}{2}(\kappa - 3)\rho \int_0^1 \chi(t) dt - 2\alpha \frac{\kappa - 3}{\kappa + 1} \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k^2 J_0^2(\beta_k)} \right] t dt.$$

При $n \geq 1$ запишем краевую задачу (6) – (7) в векторном виде, для чего введем матричный дифференциальный оператор

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} & \frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} \frac{d}{d\rho} \\ -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho) & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^* \end{pmatrix},$$

векторы $y(\rho) = \begin{pmatrix} u_n(\rho) \\ w_n(\rho) \end{pmatrix}$, $f(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \alpha (-1)^n \chi'(\rho) \\ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \alpha \lambda_n^* (-1)^n \chi(\rho) + \frac{1-(-1)^n}{\lambda_n^*} \frac{\gamma \alpha a^2}{G} \end{pmatrix}$,
 $g = \begin{pmatrix} \alpha (-1)^{n+1} \chi(1) \\ 0 \end{pmatrix}$ и матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_n^* \\ -\lambda_n^* & 0 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} \bar{\mu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда данная краевая задача запишется в виде

$$Ly(\rho) = f(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (9)$$

$$U[y(\rho)] = Ay(1) + By'(1) = g.$$

При ее решении будем придерживаться схемы работы [6].

Найдем сначала решение однородного векторного уравнения $Ly(\rho) = 0$, ограниченное при $\rho = 0$. Для этого надо построить ограниченное при $\rho = 0$ решение матричного уравнения $LY(\rho) = 0$, $0 < \rho < 1$, где $Y(\rho)$ – матрица второго порядка.

Введем матрицу $H(\rho, s) = \begin{pmatrix} J_1(s\rho) & 0 \\ 0 & J_0(s\rho) \end{pmatrix}$.

Учитывая, что $LH(\rho, s) = -H(\rho, s)M(s)$, где матрица

$$M(s) = \begin{pmatrix} s^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} & \frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} s \\ \frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} s & s^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix},$$

решением матричного уравнения будет матрица

$$Y(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C H(\rho, s) M^{-1}(s) ds,$$

где C – замкнутый контур, охватывающий полюса обратной матрицы

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{(s^2 + \lambda_n^{*2})^2} \begin{pmatrix} s^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} & -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa+1} s \\ -\frac{2\lambda_n^*}{\kappa-1} s & s^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix}.$$

Рассматривая замкнутые контуры C^\pm , охватывающие полюсы второго порядка $s = \pm \lambda_n^*$, и используя теорему о вычетах, получим два комплексно-сопряженных решения

$$Y^\pm(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa-1} \left[\frac{\kappa+1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) \right] & \mp \frac{i}{\kappa+1} \left[\frac{1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) \right] \\ \frac{\rho}{\kappa-1} I_1(\lambda_n^* \rho) & \mp \frac{i}{\kappa+1} \left[\frac{\kappa}{\lambda_n^*} I_0(\lambda_n^* \rho) + \rho I_1(\lambda_n^* \rho) \right] \end{pmatrix},$$

где $I_k(z)$ ($k = 0, 1$) — модифицированные функции Бесселя.
В качестве решения матричного уравнения можно взять

$$Y(\rho) = 2 [ReY^\pm(\rho) \mp I_m Y^\pm(\rho)].$$

Общим же решением однородного векторного уравнения будет

$$y(\rho) = Y_0(\rho) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где $Y_0(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa+1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) & \frac{1}{\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_0(\lambda_n^* \rho) \\ \rho I_1(\lambda_n^* \rho) & \frac{\kappa}{\lambda_n^*} I_0(\lambda_n^* \rho) + \rho I_1(\lambda_n^* \rho) \end{pmatrix}$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Для нахождения частного решения неоднородного векторного уравнения (9) построим матрицу Грина. Однако краевые условия (7) сильно затрудняют процесс построения, поэтому поступим следующим образом. Заменим их на однородные краевые условия скользящей заделки при $\rho = 1$

$$u_n'(1) = 0; \quad w_n(1) = 0,$$

т.е. оператор краевых условий в (9) заменим на

$$U[y(\rho)] = y(1) + y'(1) = 0, \quad (10)$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Для построения билинейного разложения матрицы Грина этой измененной краевой задачи введем матричное интегральное преобразование

$$y_n = \int_0^1 H(\rho, \beta_k) y(\rho) d\rho$$

с ядром $H(\rho, \alpha_k) = \begin{pmatrix} J_1(\beta_k \rho) & 0 \\ 0 & J_0(\beta_k \rho) \end{pmatrix}$, где β_k — корни уравнения $J_1(\beta) = 0$.

Применив его к неоднородному уравнению (9) и удовлетворив при этом краевому условию (10), получим

$$M_0(\beta_k) y_k = -f_k, \quad \text{где } M_0(\beta_k) = \begin{pmatrix} \beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_k^{*2} & 2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa+1} \\ 2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} & \beta_k^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix}.$$

Тогда $y_k = -M_0^{-1}(\beta_k) f_k$, где $M_0^{-1}(\beta_k) = \frac{1}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \begin{pmatrix} \beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} & -2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} \\ -2 \frac{\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} & \beta_k^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} \end{pmatrix}$

при $k \geq 1$ и $y_0 = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{\lambda_n^{*2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_0$ при $k = 0$.

Воспользовавшись далее формулой обращения

$$y(\rho) = 2y_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_0^2(\beta_k)} H(\rho, \beta_k) y_k,$$

получим следующее выражение для частного решения неоднородного уравнения при измененных краевых условиях

$$y_k = \int_0^1 G(\rho, t) f(t) dt,$$

где матрица Грина $G(\rho, t)$ имеет вид

$$G(\rho, t) = -\frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{2}{\lambda_n^{*2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2 J_0^2(\beta_k)} \begin{pmatrix} G_{11}(\rho, t) & G_{12}(\rho, t) \\ G_{21}(\rho, t) & G_{22}(\rho, t) \end{pmatrix},$$

$$G_{11}(\rho, t) = \left(\beta_k^2 + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \lambda_n^{*2} \right) J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t);$$

$$G_{12}(\rho, t) = -\frac{2\lambda_n^* \beta_k}{\kappa+1} J_1(\beta_k \rho) J_0(\beta_k t),$$

$$G_{21}(\rho, t) = -\frac{2\lambda_n^* \beta_k}{\kappa-1} J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t);$$

$$G_{22}(\rho, t) = \left(\beta_k^2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \lambda_n^{*2} \right) J_0(\beta_k \rho) J_0(\beta_k t).$$

Таким образом построено общее решение неоднородного уравнения (9)

$$y(\rho) = Y_0(\rho) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^1 G(\rho, t) f(t) dt.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдем из удовлетворения краевому условию краевой задачи (9). Таким образом найдены выражения для трансформант смещений при $n \geq 1$

$$u_n(\rho) = -2\alpha (-1)^n \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{*2} + \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \beta_k^2}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \right] t dt -$$

$$-\frac{\kappa-3}{2(\kappa-1)} M_n(\rho) K_n,$$

$$w_n(\rho) = 2\alpha (-1)^n \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{*2} + \frac{\kappa+5}{\kappa+1} \beta_k^2}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \right] t dt +$$

$$+\frac{\kappa-3}{2(\kappa-1)} N_n(\rho) K_n - \frac{2\alpha}{\lambda_n^*} (-1)^n \int_0^1 \chi(t) t dt - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} [1 - (-1)^n] \frac{\gamma \alpha a^2}{G \lambda_n^{*3}},$$

$$\text{где } M_n(\rho) = \Delta^{-1}(\lambda_n^*) \left[I_0(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_1(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) + \frac{\kappa+1}{2\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^* \rho) \right],$$

$$N_n(\rho) = \Delta^{-1}(\lambda_n^*) \left[I_0(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - \rho I_1(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - \frac{\kappa + 1}{2\lambda_n^*} I_1(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) \right],$$

$$\Delta(\lambda_n^*) = \lambda_n^* I_0^2(\lambda_n^*) - (\lambda_n^* + \frac{\kappa + 12}{2\lambda_n^*}) I_1^2(\lambda_n^*),$$

$$K_n = -\frac{16\alpha(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)(\kappa - 3)} (-1)^n \lambda_n^{*2} \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] t dt +$$

$$+ \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\gamma \alpha a^2}{G \lambda_n^{*2}} [1 - (-1)^n].$$

Теперь следует воспользоваться формулами обращения (5) для преобразований Фурье. После упрощения и суммирования по n некоторых из рядов получим

$$u(\rho, \zeta) = -\frac{\kappa - 3}{\kappa + 1} \frac{\gamma \alpha a^2}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^{*2}} M_n(\rho) \cos \lambda_n \zeta + \frac{\alpha}{2} (\kappa - 3) \rho \int_0^1 \chi(t) t dt +$$

$$+ \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} A_k(\zeta) + \right.$$

$$\left. + \frac{16\alpha}{\kappa + 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^{*2} M_n(\rho) \cos \lambda_n \zeta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] t dt,$$

$$w(\rho, \zeta) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\gamma h^2}{2G} \zeta (1 - \zeta) + \frac{\kappa - 3}{\kappa + 1} \frac{\gamma \alpha a^2}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^{*2}} N_n(\rho) \sin \lambda_n \zeta +$$

$$+ 2\zeta \int_0^1 \chi(t) t dt + \int_0^1 \chi'(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} B_k(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{16\alpha}{\kappa + 1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n^{*2}(\rho) N_n(\rho) \sin \lambda_n \zeta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)^2} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] t dt,$$

где

$$A_k(\zeta) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{ch\beta_k^* \zeta}{\beta_k sh\beta_k^*} - \frac{\alpha(\kappa - 3)}{(\kappa + 1)\beta_k^2} + 2 \frac{ch\beta_k^* \zeta ch\beta_k^* - \zeta sh\beta_k^* \zeta sh\beta_k^*}{\alpha(\kappa + 1) sh^2 \beta_k^*},$$

$$B_k(\zeta) = -2 \frac{sh\beta_k^* \zeta}{\beta_k sh\beta_k^*} - 4 \frac{sh\beta_k^* \zeta ch\beta_k^* - \zeta ch\beta_k^* \zeta sh\beta_k^*}{\alpha(\kappa + 1) sh^2 \beta_k^*}, \quad \beta_k^* = \beta_k/\alpha.$$

4. Получение интегро-дифференциального уравнения и его решение. Полученные выражения для смещений содержат неизвестную функцию

$\chi(\zeta)$ — вертикальные смещения точек верхнего основания цилиндра и ее производную $\chi'(\zeta)$. Для их нахождения следует воспользоваться нереализованным ранее первым краевым условием из (3). В результате приходим к интегро-дифференциальному уравнению I-го рода, которое после выделения сингулярной части ядра имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \sqrt{\rho} \int_0^1 \chi'(t) \ln \frac{1}{|\rho-t|} \sqrt{t} dt + \int_0^1 \chi'(t) R(\rho, t) t dt + \quad (11)$$

$$+ \frac{\alpha(\kappa+1)(\kappa+7)}{\kappa+5} \int_0^1 \chi(t) dt = \frac{a(\kappa+1)}{G(\kappa+5)} P(\rho) + F_\gamma(\rho), \quad 0 < \rho < 1, \quad (12)$$

где $R(\rho, t)$ — регулярная часть интегрального уравнения, а $F_\gamma(\rho)$ — правая часть, отвечающая за учет собственного веса цилиндра (приведены в приложении А).

Решение полученного уравнения будем разыскивать в виде разложений по многочленам Якоби

$$\chi(t) = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\chi_m}{2m-1} P_m^{(-\frac{1}{2}, -1)}(1-2t), \quad (13)$$

откуда $\chi'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi_{m+1} P_m^{(\frac{1}{2}, 0)}(1-2t)$.

Данное представление обусловлено наличием следующего соотношения [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \sqrt{\rho} \int_0^1 \ln \frac{1}{|\rho-t|} P_m^{(\frac{1}{2}, 0)}(1-2t) \sqrt{t} dt = \\ & = \frac{2\Gamma(m)}{3 \left(\frac{5}{2}\right)_m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(m\right)_j \left(-m-\frac{3}{2}\right)_j}{\left(-\frac{1}{2}\right)_j \cdot j!} \rho^{j-3/2}, \quad m > 0, \end{aligned}$$

при $m=0$ в правой части равенства будет стоять

$$\frac{8}{3\sqrt{\rho}} + \frac{2}{9\rho\sqrt{\rho}} - \frac{1}{3\rho\sqrt{\rho}} \ln|1-\rho| - \frac{4}{3} \ln \left| \frac{1+\sqrt{\rho}}{1-\sqrt{\rho}} \right|.$$

После подстановки представлений (12) в уравнение (11) умножим полученное соотношение на $\rho P_s^{(1/2, 0)}(1-2\rho)$ и проинтегрируем по ρ от 0 до 1. В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов χ_m разложений (12)

$$\sum_{m=0}^{\infty} [A_{sm}\chi_{m+1} + B_{sm}\chi_m] = F_s + F_s^\gamma, \quad s = 0, 1, \dots \quad (14)$$

Выражения для коэффициентов системы и правых частей приведены в приложении В. Интегралы, входящие в них, вычислялись по квадратурным формулам Гаусса повышенной точности.

Для случая, когда приложенная внешняя нагрузка является равномерно-распределенной $P(\rho) = P^*$, а вес цилиндра не учитывается, численное решение системы (13) дает $\chi_0 \neq 0$, а $\chi_m = 0$ при $m \geq 1$. Таким образом, в этом случае $w|_{\zeta=1} = \chi(\rho) = 2\chi_0$ постоянно, а $\chi'(\rho) = 0$. Этот результат наводит на мысль о существовании элементарного решения для данного частного случая задачи. Действительно, несложно проверить, что функции

$$u(\rho, \zeta) = \frac{\mu a P^*}{2G(1+\mu)} \rho, \quad w(\rho, \zeta) = -\frac{h P^*}{2G(1+\mu)} \zeta$$

удовлетворяют однородным уравнениям Ламе (1) и краевым условиям (2) – (4). Кроме того, найденные из элементарного решения значения $\chi(\rho) = -\frac{h P^*}{2G(1+\mu)}$ и $\chi'(\rho) = 0$ удовлетворяют полученному уравнению (11).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Построено решение осесимметричной задачи теории упругости для цилиндра конечной длины со свободной боковой поверхностью и учетом собственного веса. Найден элементарное решение при частном случае загрузки цилиндра. Рассмотренный метод и само решение могут быть использованы при решении задач несвязной термоупругости.

Приложение А

Здесь N число, обеспечивающее возможность замены функций Бесселя $J_m(\beta_k \rho)$ ($m = 0, 1$) их асимптотическим представлением.

$$\begin{aligned} R(\rho, t) = & \frac{16\alpha}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{*2} D_n(\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} - \\ & - \frac{1}{2\pi\sqrt{\rho t}} \left[\frac{1}{2\rho} \ln \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} |\rho - t|}{|\rho - t|} + \frac{\frac{\pi}{2}(\rho - t) \cos \frac{\pi}{2}(\rho - t) - \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)}{(\rho - t) \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha(\kappa-3)^2}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \ln 2 \sin \frac{\pi}{2}(\rho + t) \right] + \\ & + \frac{3\rho + t - 1}{8\rho\sqrt{\rho t}} + \frac{\alpha(\kappa-3)^2}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \frac{1 - \rho + t}{4\sqrt{\rho t}} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\rho\sqrt{t}} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[\left(\sqrt{\rho} - \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \cos \beta_k \rho + \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \sin \beta_k \rho \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\alpha(\kappa-3)^2}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \left[\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k J_0^2(\beta_k)} + \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho t}} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) (\cos \beta_k \rho + \right. \right. \\ & \left. \left. \sin \beta_k \rho) \right] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \frac{e^{-2\beta_k^*}}{1 - e^{-2\beta_k^*}} \cdot \left[1 + \frac{4(3\kappa-1)\beta_k}{\alpha(\kappa-1)(\kappa+5)(1 - e^{-2\beta_k^*})} \right], \end{aligned}$$

$$F_\gamma(\rho) = \frac{\kappa + 1}{\kappa + 5} \frac{\gamma h}{2G} - \frac{(\lambda - 3)\gamma\alpha a^2}{(\kappa - 1)(\kappa + 5)G} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^{*2}} D_n(\rho),$$

$$D_n(\rho) = 2\Delta^{-1}(\lambda_n^*) [(\kappa - 3)\lambda_n^* I_0(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) + (\kappa + 1)\lambda_n^* I_0(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho) - 4(\kappa - 1) I_1(\lambda_n^*) I_0(\lambda_n^* \rho) - 2(\kappa - 1)\lambda_n^* \rho I_1(\lambda_n^*) I_1(\lambda_n^* \rho)].$$

Приложение В

$$\begin{aligned} A_{sm} &= \frac{\delta_{m0}}{6\pi} \int_0^1 [8\sqrt{\rho} + \frac{2}{3\sqrt{\rho}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \ln|1 - \rho| - \\ &\quad - 4\rho \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\rho}}{1 - \sqrt{\rho}} \right|] P_s^{(1/2,0)}(1 - 2\rho) d\rho + \\ &\quad + \frac{1}{6} \delta_{s0} \delta_{m0} - \left(\frac{\delta_{m0}}{30} + \frac{\delta_{m1}}{70} \right) \frac{\left(\frac{3}{2} \right)_s}{s!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l \left(s + \frac{3}{2} \right)_l}{\left(\frac{3}{2} \right)_l l! \left(l + \frac{1}{2} \right)} + \\ &\quad + \frac{\alpha(\kappa - 3)^2}{3(\kappa - 1)(\kappa + 5)} \left[\frac{1}{3} \delta_{s0} \delta_{m0} + \frac{2}{35} \delta_{s1} \delta_{m0} - \frac{2}{35} \delta_{s0} \delta_{s1} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3\pi} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)_s \Gamma(m)}{\left(\frac{5}{2} \right)_m s!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l \left(s + \frac{3}{2} \right)_l}{\left(\frac{3}{2} \right)_l l!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(m)_j \left(-m - \frac{3}{2} \right)_j}{\left(-\frac{1}{2} \right)_j \cdot j!} \frac{2j + 1}{2j + 2l + 1} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{2\sqrt{\rho}} \ln \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)}{|\rho - t|} + \sqrt{\rho} \frac{\frac{\pi}{2}(\rho - t) \cos \frac{\pi}{2}(\rho - t) - \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)}{(\rho - t) \sin \frac{\pi}{2}(\rho - t)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(\kappa - 3)^2}{(\kappa - 1)(\kappa + 5)} \sqrt{\rho} \ln 2 \sin \frac{\pi}{2}(\rho + t) \right] P_s^{(1/2,0)}(1 - 2\rho) P_m^{(1/2,0)}(1 - 2t) \sqrt{t} dt d\rho + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^N \left[\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \rho \sqrt{t} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) \left[\left(\sqrt{\rho} - \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \cos \beta_k \rho + \right] \right] \right) \\ &\quad + \left(\sqrt{\rho} + \frac{1}{2\beta_k \sqrt{\rho}} \right) \sin \beta_k \rho \left. \right] - \frac{\alpha(\kappa - 3)^2}{(\kappa - 1)(\kappa + 5)} \left[\frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{\beta_k J_0^2(\beta_k)} \rho \sqrt{t} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left[\left[\frac{\sqrt{\rho}}{2\beta_k} (\cos \beta_k t - \sin \beta_k t) (\cos \beta_k \rho + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sin \beta_k \rho) \right] \right] P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) P_m^{(1/2,0)} (1-2t) \sqrt{t} dt d\rho + \right. \\
& \left. + 2 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\beta_k \rho) J_1(\beta_k t)}{J_0^2(\beta_k)} \frac{e^{-2\beta_k^*}}{1-e^{-2\beta_k^*}} \left[1 + \frac{4(3\kappa-1)\beta_k}{\alpha(\kappa-1)(\kappa+5)(1-e^{-2\beta_k^*})} \right] \right\} \cdot \right. \\
& \cdot P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) P_m^{(1/2,0)} (1-2t) dt d\rho + \frac{16\alpha}{(\kappa-1)(\kappa+5)} \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^{*2} D_n(\rho) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\lambda_n^{*2} + \beta_k^2)} \frac{J_1(\beta_k t)}{J_0(\beta_k)} \right] P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) P_m^{(1/2,0)} (1-2t) \rho dt d\rho; \\
B_{sm} = & - \frac{2\alpha(\kappa+1)(\kappa-7)}{(\kappa+5)(2m-1)} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_s \left(\frac{1}{2}\right)_m}{s! \cdot m!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l (s+3/2)_l}{\left(\frac{3}{2}\right)_l l! (l+2)} \sum_{j=0}^m \frac{(-m)_j (m-1/2)_j}{\left(\frac{1}{2}\right)_j \cdot j! \cdot (j+2)}; \\
F_s = & \frac{a(\kappa+1)}{G(\kappa+5)} \int_0^1 P(\rho) P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) \rho d\rho; \\
F_s^\gamma = & \frac{\gamma a h (\kappa+1)}{2G(\kappa+5)} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_s}{s!} \sum_{l=0}^s \frac{(-s)_l (s+3/2)_l}{\left(\frac{3}{2}\right)_l \cdot l! \cdot (l+2)} - \\
& - \frac{\gamma \alpha a^2 (\kappa-3)}{G(\kappa-1)(\kappa+5)} \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\lambda_n^{*2}} D_n(\rho) \right] P_s^{(1/2,0)} (1-2\rho) \rho d\rho.
\end{aligned}$$

1. **Абрамян Б. Л.** Осесимметричная задача теории упругости / Б. Л. Абрамян, А. Я. Александров // Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. Вып.3. – М.: Наука, 1966. – С. 7–37.
2. **Бухаринов Г. Н.** К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра / Г. Н. Бухаринов // Вестник Ленингр. ун-та. – 1952. – № 2. – С. 3–33.
3. **Валов Г. М.** Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины / Г. М. Валов // Прикл. мат. и механ. – 1962. – Т. 26. – С. 650–667.
4. **Вігак В. М.** Точний розв'язок осесимметричної задачі теорії пружності в напружених для суцільного циліндру певної довжини / В. М. Вігак, Ю. В. Токовий // Прикл. проблеми механ. і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
5. **Колтунов М. А.** Упругость и прочность цилиндрических тел / М. А. Колтунов, Ю. Н. Васильев, В. А. Черных. – М.: Высшая школа, 1975. – 516 с.

6. **Попов Г. Я.** О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики / Попов Г.Я. // Прикл. мех. – 2003. – Т. 39, № 12. – С. 46–73.
7. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.
8. **Токовий Ю. В.** Осесиметричні напруження в скінченному пружньому циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні / Ю. В. Токовий // Прикл. пробл. механ. і матем. – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
9. **Chan K. T.** Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part II. Analytic solution / K. T. Chan, X. X. Wei // International journal of solids and structures. – 2000. – Vol. 37, № 40. – P. 5707–5732.
10. **Chan K. T.** Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part II. Application to double – punch test / K. T. Chan, X. X. Wei // International journal of solids and structures. – 2000. – Vol. 37, № 40. – P. 5733–5744.
11. **Chan K. T.** A new analytic solution for the diametral point load strength test on finite solid circular cylinders / K. T. Chan, X. X. Wei // International journal of solids and structures. – 2001. – Vol. 38, № 4. – P. 1459–1481.

Mathematical Subject Classification: 74G05
УДК 539.3

А. А. Фесенко

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ВНУТРЕННЕЙ СИЛЫ

Фесенко Г. О. Мішана задача для нескінченної пружної плити з урахуванням впливу довільно орієнтованої внутрішньої сили. Отримано точний розв'язок задачі теорії пружності для нескінченної плити з урахуванням дії усередині плити довільно орієнтованої зосередженої сили. Припускається, що одна границя плити є жорстко закріпленою, а на іншій – задані напруження. Для отримання розв'язку використовується новий аналітичний метод, який базується на зведенні системи рівнянь Ламе до одного рівняння, що незалежно розв'язується, та двох сумісно розв'язуваних рівнянь. Граничні умови при цьому також розділяються. Отримана задача за допомогою інтегрального перетворення Фур'є зводиться до векторної одномірної крайової задачі. Проведено числовий аналіз розподілу напружень на закріпленій грані в залежності від розміру ділянки розподілу заданих напружень і розташування внутрішньої зосередженої сили.

Ключові слова: нескінченна плита, інтегральні перетворення, точний розв'язок, довільно орієнтована внутрішня сила.

Фесенко А. А. Смешанная задача для бесконечной упругой плиты с учетом воздействия произвольно ориентированной внутренней силы. Получено точное решение задачи теории упругости для бесконечной плиты в случае воздействия произвольно ориентированной сосредоточенной внутри плиты силы. Предполагается, что на одной грани заданы напряжения, а другая – жестко закреплена. Для построения решения используется новый аналитический метод, основанный на приведении системы уравнений Ламе к двум совместно решаемым и одному отдельно решаемому уравнениям. При этом граничные условия также разделяются. Полученная краевая задача с помощью интегрального преобразования Фурье сводится к векторной одномерной краевой задаче. Проведен численный анализ распределения напряжений на закрепленной грани в зависимости от параметров участка распределения заданного напряжения и расположения внутренней сосредоточенной силы.

Ключевые слова: бесконечная плита, интегральные преобразования, точное решение, произвольно ориентированная внутренняя сила.

Fesenco A. A. The space elasticity problem for the infinite layer with the presence of an arbitrary concentrated force inside the layer. The exact solution of the elasticity mixed problem for the space layer in the case of presence an arbitrary orientation concentrated force inside the layer is constructed. The stresses are set on one side, and another side is fixed. New method was used here, based on reducing Lamé equations to an independently solved one and two combined solved equations. Boundary conditions are divided as well. These two equations are reduced to the vector one-dimensional boundary problem using Fourier integral transformations method. The numerical analysis of the stresses distribution in the fixed side of the layer was done depending on the area parameters

of the initial stresses and the location of the concentrated force.

Key words: the infinite layer, the integral transformations, the exact solution, an arbitrary orientation inner force.

ВВЕДЕНИЕ. Традиционные подходы к исследованию трехмерных задач теории упругости основываются на представлениях решений однородных уравнений Ламе с помощью гармонических и бигармонических функций [6], [7]. Широко известен метод Папковича—Нейбера, который заключается в сведении уравнений Ламе к последовательности гармонических уравнений с неразделенными граничными условиями, что существенно усложняет технику построения решения. Обобщение этого метода для задач, в которых областью контакта является слой, использовано в [8]–[10]. В данной работе используется новый подход, предложенный Г. Я. Поповым в [2]. Метод основан на приведении уравнений Ламе к одному независимо решаемому и двум совместно решаемым уравнениям. Методом интегральных преобразований, применяемых непосредственно к полученным уравнениям равновесия и краевым условиям, задача сводится к одномерной векторной краевой задаче, которая решается точно. Этот подход применен в работе [5], где построено поле смещений точек упругого слоя, на одной грани которого задана равномерно распределенная нормальная сжимающая нагрузка единичной интенсивности, а на другой — жесткое закрепление. Внутри слоя действует произвольно ориентированная сосредоточенная сила. Оказалось, что выбранная система координат существенно усложняет расчеты. В данной работе выбрана другая система координат, построено поле смещений упругой среды и исследованы нормальные напряжения на закрепленной грани.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1. Постановка задачи Рассмотрим упругую бесконечную плиту (рис. 1) (модуль сдвига G , коэффициент Пуассона μ),

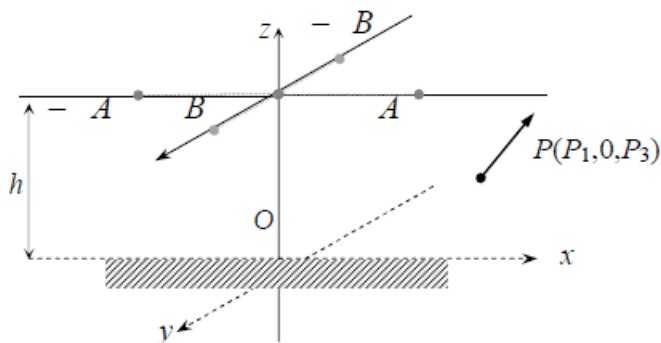


Рис. 1.

описываемую в декартовой системе координат соотношениями

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 0 < z < h.$$

На грани $z = h$ заданы напряжения

$$\sigma_z|_{z=h} = -p(x, y), \quad \tau_{zx}|_{z=h} = 0, \quad \tau_{zy}|_{z=h} = 0. \quad (1)$$

Грань $z = 0$ предполагается жестко закрепленной:

$$u_x(x, y, 0) = 0, \quad u_y(x, y, 0) = 0, \quad u_z(x, y, 0) = 0. \quad (2)$$

В точке плиты с координатами $x = d, y = 0, z = c$ приложена произвольно ориентированная сосредоточенная сила $P = P_1, 0, P_3$, которую можно трактовать как объемную силу интенсивности

$$q_x = P_1 \delta(x - d) \delta(y) \delta(z - c), \quad q_y = 0, \quad q_z = P_3 \delta(x - d) \delta(y) \delta(z - c), \quad (3)$$

$\delta(z)$ – дельта функция Дирака.

Требуется определить смещения упругой среды

$$u(x, y, z) = u_x, \quad v(x, y, z) = u_y, \quad w(x, y, z) = u_z, \quad (4)$$

удовлетворяющие граничным условиям (1), (2) и уравнениям равновесия

$$\Delta(u, v, w) + \mu_0(\Theta', \Theta', \Theta') = -G^{-1}(q_x, 0, q_z), \quad (5)$$

где штрих означает производную по переменной x , точка – производную по переменной y , запятая – по z , $\Theta = u' + v' + w'$ – объемное расширение, $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, Δ – оператор Лапласа.

2. Сведение задачи к векторной одномерной краевой задаче

Воспользовавшись известными формулами связи смещений и напряжений [1], запишем граничное условие (1) в виде

$$\mu [u'(x, y, h) + v'(x, y, h)] + (1 - \mu)w'(x, y, h) = -p(x, y)/(2G\mu_0). \quad (6)$$

Дальнейшее решение основано на введении новых неизвестных функций [2]

$$Z(x, y, z) = u'(x, y, z) + v'(x, y, z), \quad \tilde{Z}(x, y, z) = v'(x, y, z) - u'(x, y, z), \quad (7)$$

относительно которых уравнения равновесия (5) примут вид

$$\Delta w + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w)' = -q_z/G, \quad \Delta Z + \mu_0 \nabla_{xy}(Z + w) = -q'_x/G. \quad (8)$$

Граничные условия (2), (5) переформулируются

$$\begin{aligned} \mu Z(x, y, h) + (1 - \mu)w(x, y, h) &= -p(x, y)/(2G\mu_0), \\ \nabla_{xy}w(x, y, h) + Z'(x, y, h) &= 0, \quad \tilde{Z}'(x, y, h) = 0, \\ w(x, y, 0) = 0, \quad Z(x, y, 0) &= 0, \quad \tilde{Z}(x, y, 0) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Перейдем в приведенных соотношениях от искомым и заданным функциям к трансформантам Фурье по переменным x и y

$$w_{\beta\alpha}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) e^{i\beta y} e^{i\alpha x} dy dx, \quad Z_{\beta\alpha}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(x, y, z) e^{i\beta y} e^{i\alpha x} dy dx. \quad (10)$$

Тогда соотношения (8), (9) запишутся в форме

$$\begin{aligned} w''_{\beta\alpha}(z) - \mu_*^{-1} N^2 w_{\beta\alpha}(z) + \mu_*^{-1} \mu_0 Z'_{\beta\alpha}(z) &= -q_z^{\beta\alpha}(z\alpha)/G, \quad 0 < z < h, \\ Z'_{\beta\alpha}(z) - N^2 [\mu_* Z_{\beta\alpha}(z) + \mu_0 w'_{\beta\alpha}(z)] &= i\alpha q_x^{\beta\alpha}(z)/G, \quad N^2 = \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -N^2 w_{\beta\alpha}(h) + Z'_{\beta\alpha}(h) = 0, \quad \mu Z_{\beta\alpha}(h) + (1 - \mu)w'_{\beta\alpha}(h) = -(2G\mu_0)^{-1}p_{\beta\alpha}, \\ w_{\beta\alpha}(0) = 0, \quad Z_{\beta\alpha}(0) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Если будет решена краевая задача (11), (12), то трансформанты смещений $u_{\beta\alpha}(z)$ и $v_{\beta\alpha}(z)$ найдем из уравнений [2]

$$\nabla_{xy}u = Z' - \tilde{Z}', \quad \nabla_{xy}v = Z' - \tilde{Z}',$$

применив к ним преобразование Фурье (10)

$$u_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\alpha Z_{\beta\alpha}(z) - \beta \tilde{Z}_{\beta\alpha}(z)), \quad v_{\beta\alpha}(z) = iN^{-2}(\beta Z_{\beta\alpha}(z) + \alpha \tilde{Z}_{\beta\alpha}(z)). \quad (13)$$

Введем искомый вектор $\vec{y}(z)$ и матрицы P, Q

$$\vec{y}(z) = \begin{pmatrix} w_{\beta\alpha}(z) \\ Z_{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \mu_*^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_* \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \mu_*^{-1} \\ -N^2_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Тогда систему (11) запишем в векторной форме

$$L_2 \vec{y}(z) \equiv I \vec{y}''(z) + \mu_0 Q \vec{y}'(z) - N^2 P \vec{y}(z) = f(z), \quad 0 < z < h, \quad (15)$$

где $f(z) = \frac{1}{G} \begin{pmatrix} -q_z^{\beta\alpha}(z) \\ i\alpha q_x^{\beta\alpha}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \delta(z - c) e^{i\alpha d} \begin{pmatrix} -P_3 \\ i\alpha P_1 \end{pmatrix}$.

Решение векторного уравнения (15) строим в форме [3]

$$\vec{y}(z) = \int_0^h \Phi(z, \xi) f(\xi) d\xi + Y_-(z) \begin{pmatrix} C_0^0 \\ C_1^0 \end{pmatrix} + Y_+(z) \begin{pmatrix} C_1^0 \\ C_1^1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

$C_i^j, i, j, = 0, 1$ — неизвестные постоянные, а $\Phi(z, \xi)$ — фундаментальная матрица и $Y_{\mp}(z)$ — фундаментальная матричная система решений построены ранее в [5]:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \xi) = \mu_0 (4N)^{-1} e^{-N|z-\xi|} \begin{pmatrix} -\kappa - N|z-\xi| & \mu_*^{-1}(z-\xi) \\ -(z-\xi)N^2 & \mu_*^{-1}(N|z-\xi| - \kappa) \end{pmatrix}, \\ Y_{\mp}(z) = \mu_0 e^{\mp Nz} \begin{pmatrix} -Nz \mp \kappa & \pm \mu_*^{-1}z \\ \mp N^2 z & \mu_*^{-1}(Nz \mp \kappa) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

где $\mu_* = 1 + \mu_0, \kappa = 3 - 4\mu$.

Учитывая вид правой части уравнения (15), решение задачи (15), (12) в пространстве трансформант запишется так

$$\begin{aligned} w_{\beta\alpha}(z) = \frac{e^{i\alpha d} e^{-N|z-c|}}{4NG} \{(\kappa + N|z-c|)P_3 + \mu_1(z-c)i\alpha P_1\} - \\ - \mu_0(Nz + \kappa)e^{-Nz}C_0^0 + \mu_1 z e^{-Nz}C_0^1 + \mu_0(-Nz + \kappa)e^{Nz}C_1^0 - \mu_1 z e^{Nz}C_1^1, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} Z_{\beta\alpha}(z) = \frac{e^{i\alpha d} e^{-N|z-c|}}{4NG} \{\mu_0(z-c)N^2 P_3 - \mu_1(\kappa - N|z-c|)i\alpha P_1\} - \\ - \mu_0 N^2 z e^{-Nz}C_0^0 + \mu_1(Nz - \kappa)e^{-Nz}C_0^1 + \mu_0 N^2 z e^{Nz}C_1^0 + \mu_1(Nz + \kappa)e^{Nz}C_1^1, \end{aligned}$$

где $\mu_1 = (2 - 2\mu)^{-1}$.

Постоянные вектора C_0^i и C_1^i , $i = 0, 1$, из (16) найдем, удовлетворив граничные условия (12).

$$\begin{aligned} C_0^0 = C_1^0 &= -\frac{p_{\beta\alpha}}{2G\mu_0\kappa} \frac{1}{N} \frac{1}{D_N} (-Nh \sinh Nh + \mu_1^{-1} \cosh Nh) - \frac{e^{i\alpha d} F_1}{4\kappa N D_N G}, \\ C_0^1 = C_1^1 &= \frac{p_{\beta\alpha}}{2G\mu_0\kappa} \frac{\mu_*}{D_N} (Nh \cosh Nh - \mu_0^{-1} \sinh Nh) - \frac{\mu_* e^{i\alpha d} F_2}{4\kappa N D_N G}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$D_N = \frac{1}{\kappa} (4(Nh)^2 + \kappa^2 + 1) + e^{2Nh} + e^{-2Nh} = 2 \cosh 2Nh + \frac{1}{\kappa} (4(Nh)^2 + \kappa^2 + 1),$$

где

$$F_1 = e^{-Nc} \{Nh\delta_1 + \delta_3\} - e^{Nc} \{Nh\delta_2 + \delta_4\} + e^{-2Nh} e^{Nc} \delta_5 - e^{2Nh} e^{-Nc} \delta_6,$$

$$\delta_1 = \pm 2N^2(h-c)P_3 + \kappa NP_3 + 2\mu_0^{-1}\mu_1 N(h-c)i\alpha P_1 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 \kappa i\alpha P_1,$$

$$\delta_3 = \kappa N^2(h-c)P_3 \mp \frac{1+\kappa^2}{2} NP_3 \mp \mu_0^{-1}\mu_1 \kappa N(h-c)i\alpha P_1 - 2\mu_0^{-2}i\alpha P_1,$$

$$\delta_5 = Nh(NP_3 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 i\alpha P_1) - N^2(h-c)P_3 \mp \kappa NP_3 \mp \mu_0^{-1}\mu_1 N(h-c)i\alpha P_1.$$

$$F_2 = e^{-Nc} \{Nh\delta_7 + \delta_9\} + e^{Nc} \{Nh\delta_8 - \delta_{10}\} + e^{-2Nh} e^{Nc} \delta_{11} + e^{2Nh} e^{-Nc} \delta_{12},$$

$$\delta_7 = \mp 2N^2(h-c)P_3 + \kappa NP_3 + 2\mu_0^{-1}\mu_1 N(h-c)i\alpha P_1 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 \kappa i\alpha P_1,$$

$$\delta_9 = \mu_0^{-1} (\mp \kappa \mu_0 N^2(h-c)P_3 + 2\mu_1^{-1} NP_3 + \mu_1 \kappa N(h-c)i\alpha P_1 \pm \mu_1 \frac{1+\kappa^2}{2} i\alpha P_1),$$

$$\delta_{11} = Nh(NP_3 \pm \mu_0^{-1}\mu_1 i\alpha P_1) + \mu_0^{-1} (-\mu_0 N^2(h-c)P_3 \mp \mu_1 N(h-c)i\alpha P_1 - \mu_1 \kappa i\alpha P_1).$$

Решение задачи строится в виде суперпозиции функций

$$\begin{aligned} w_{\beta\alpha}(z) &= w_{\beta\alpha}^0(z) + w_{\beta\alpha}^P(z), & Z_{\beta\alpha}(z) &= Z_{\beta\alpha}^0(z) + Z_{\beta\alpha}^P(z), \\ w_{\beta\alpha}^P(z) &= w_{\beta\alpha}^{P_1}(z) + w_{\beta\alpha}^{P_3}(z), \end{aligned} \quad (19)$$

где функции с верхним индексом 0 соответствуют задаче о загрузении грани $z = h$ бесконечного слоя равномерно распределенной нормальной сжимающей нагрузкой единичной интенсивности по прямоугольной площадке $-A < x < A$, $-B < y < B$. Функции с индексом P означают смещения, вызванные действием внутренней силы.

Для задачи о загрузении бесконечной плиты сжимающей нагрузкой ранее получено решение [5]

$$\begin{aligned} u^0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{S_1(t, z)}{tD_t} \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) da db dt, \\ v^0(x, y, z) &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{S_1(t, z)}{tD_t} \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) da db dt, \\ w^0(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-A}^A \int_{-B}^B \int_0^\infty \frac{t \cdot S_2(t, z)}{D_t} \tilde{J}_0(t, x, y, a, b) da db dt, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$D_t = 2 \cosh 2th + \frac{1}{\kappa} (4(th)^2 + \kappa^2 + 1), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_1(t, z) &= t \left(\frac{1}{\kappa} z - 1 \right) \sinh t(1-z) + t(1-z) \sinh t(1+z) + \frac{2}{\kappa} t^2 z \cosh t(1-z) - \\ &\quad - \mu_0^{-1} (\cosh t(1+z) - \cosh t(1-z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_2(t, z) &= \left(\frac{1}{\kappa} z + 1 \right) \cosh t(1-z) - (1-z) \cosh t(1+z) + \frac{2}{\kappa} tz \sinh t(1-z) - \\ &\quad - \mu_1^{-1} \frac{1}{t} (\sinh t(1+z) - \sinh t(1-z)), \end{aligned}$$

$$\tilde{J}_0(t, x, y, a, b) = J_0(t\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}) + J_0(t\sqrt{(x+a)^2 + (y-b)^2}),$$

$J_0(t)$ – функция Бесселя.

Для напряжения, возникающего на нижнем торце $z = 0$, получена формула

$$\begin{aligned} \sigma_z^{AB}(x, y, 0) &= -\frac{8}{\mu_1 \kappa \pi} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \frac{(\kappa + 1) \cosh t + 2t \sinh t}{tD_t} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\sin(t \frac{A}{h} \sqrt{1 - \tau_k^2}) \sin(t \frac{B}{h} \tau_k) \cos(t \frac{x}{h} \sqrt{1 - \tau_k^2}) \cos(t \frac{y}{h} \tau_k)}{\tau_k \sqrt{1 - \tau_k^2}} dt, \\ \tau_k^{(N)} &= \cos \frac{2k-1}{2N} \pi, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (22)$$

$\tau_k^{(N)}$ – нули многочлена Чебышева 1-го рода.

3. Построение функции $\tilde{Z}(x, y, z)$

Для отыскания функции $\tilde{Z}(x, y, z)$ получена независимо решаемая краевая задача

$$\Delta \tilde{Z}(x, y, z) = q_x / G, \quad \tilde{Z}'(x, y, h) = 0, \quad \tilde{Z}(x, y, 0) = 0,$$

которая в трансформантах (10) имеет вид

$$\tilde{Z}_{\beta\alpha}''(z) - N^2 \tilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = -i\beta q_x^{\beta\alpha}(z) / G, \quad 0 < z < h, \quad \tilde{Z}'_{\beta\alpha}(h) = 0, \quad \tilde{Z}_{\beta\alpha}(0) = 0.$$

Ранее в работе [5] найдено точное решение этой краевой задачи

$$\tilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\beta e^{iad} P_1}{2NG \cosh Nh} [e^{-N|z-c|} \cosh Nh + e^{-N(h-z)} \cosh Nc -] \quad (23)$$

$$-e^{-Nz} \cosh N(h-c)].$$

4. Детализация задачи для двух различных видов сосредоточенной силы $P = (P_1, 0, P_3)$

Рассмотрим случай, когда $P_1 \neq 0$, $P_3 = 0$. Исходя из соотношений (17), (18), получим в пространстве трансформант выражение для смещения

$$w_{\beta\alpha}^{P_1}(z) = \frac{e^{i\alpha d}}{4NG} i\alpha P_1 \mu_1 F^{(1)}(z, N), \quad (24)$$

где

$$F^{(1)}(z, N) = (z-c)(e^{-N|z-c|} - e^{-N(z-c)}) + \frac{2}{D_N} \left[\frac{2}{N} \sinh Nz \cdot f_1 + z \cdot f_2 \right],$$

$$f_1 = 2N^2 h(h-c) \sinh Nc - Nc \cosh N(2h-c) - \kappa \cosh Nc,$$

$$f_2 = -\sinh N(2h-c+z) + 2N(h-c) \sinh N(z+c) + \frac{1}{\kappa} (4N^2 h(h-c) + 1) \sinh N(z-c) + \\ + 2Nh \cosh N(z-c) + \left(\frac{2}{\kappa} N(2h-c) + 1 \right) \cosh(2h-c-z) - \kappa \cosh N(z+c).$$

Применим к полученной трансформанте последовательно обратные преобразования Фурье $N^2 = \alpha^2 + \beta^2$ и учтем соотношение [4]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) e^{-i\alpha x - i\beta y} d\alpha d\beta = \int_0^{\infty} t F(t) J_0(t\sqrt{x^2 + y^2}) dt, \quad (25)$$

тогда получим смещение в виде

$$w^{P_1}(x, y, z) = -P_1 \frac{\mu_1}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} F^{(1)}(z, t) J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (26)$$

где функция $F^{(1)}(z, t)$ такая же, как и $F^{(1)}(z, N)$ в (24) с заменой переменной N на t , функция D_t определена в (21).

По аналогии, для случая $P_1 = 0$, $P_3 \neq 0$ найдем оригинал смещения

$$w^{P_3}(x, y, z) = P_3 \frac{\mu_0}{8\pi G} \int_0^{\infty} F^{(2)}(z, t) J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (27)$$

где

$$F^{(2)}(z, t) = (\kappa + t|z-c|) e^{-t|z-c|} - (\kappa - t(z-c)) e^{t(z-c)} + \frac{2}{D_t} (2 \sinh tz \cdot f_3 + tz \cdot f_4),$$

$$f_3 = (2t^2 h(h-c) + \frac{1+\kappa^2}{2}) \cosh tc + (tc + \kappa) \sinh t(2h-c) + \kappa t(h-c+1) \sinh tc,$$

$$f_4 = 2t(h-c) \cosh t(z+c) - \frac{4}{\kappa} t^2 h(h-c) \cosh t(z-c) + \left(\frac{2}{\kappa} t(h-c) - 1 \right) \cosh t(2h-c-z) + \\ + (2ht - \frac{1}{\kappa}) \sinh t(z-c) - \cosh t(2h-c+z) - \frac{2}{\kappa} tc \sinh t(2h-c-z) + \kappa \sinh t(z+c).$$

Построим функции $Z_{\beta\alpha}^{P_1}(z)$ и $Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z)$.

$$Z_{\beta\alpha}^{P_1}(z) = \frac{e^{i\alpha d}}{4NG} i\alpha P_1 \mu_1 F^{(3)}(z, N), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(3)}(z, N) &= -(\kappa - N|z - c|)e^{-N|z-c|} + (\kappa + N(z - c))e^{N(z-c)} + \\ &\quad + \frac{2}{D_N}(-2 \sinh Nz \cdot f_5 + Nz \cdot f_6), \\ f_5 &= (2N^2 h(h - c) + \frac{\kappa^2 + 1}{2}) \cosh Nc - Nc \sinh N(2h - c) - \kappa \cosh N(2h - c) - \\ &\quad - \kappa(N(h - c) + 1) \sinh Nc, \\ f_6 &= -\sinh N(z - c) - \kappa \cosh N(z + c) - \frac{1}{\kappa}(4N^2 h(h - c) + 2Nh\kappa + 1) \cosh N(z - c) + \\ &\quad + 2N(h - c) \sinh N(z + c) - \frac{2}{\kappa}(N(2h - c) - \kappa) \cosh N(2h - c - z). \\ Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z) &= \frac{e^{i\alpha d}}{4NG} P_3 \mu_0 F^{(4)}(z, N), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(4)}(z, N) &= (z - c)(e^{-N|z-c|} - e^{N(z-c)}) + \frac{2}{D_N}(-2N \sinh Nz \cdot f_7 + N^2 z \cdot f_8), \\ f_7 &= 2(N^2 h(h - c) - \mu_0^{-1} \mu_1^{-1}) \sinh Nc + \kappa Nc \cosh Nc + Nc \cosh N(2h - c), \\ f_8 &= \kappa \sinh N(z + c) + 2N(h - c) \cosh N(z + c) + \frac{1}{\kappa}(4N^2 h(h - c) + 1) \cosh N(z - c) - \\ &\quad - 2Nh \sinh N(z - c) - N(\frac{2}{\kappa}c + 1) \sinh N(2h - c - z) + N \sinh N(2h - c + z). \end{aligned}$$

Трансформанты $u_{\beta\alpha}(z)$ и $v_{\beta\alpha}(z)$ найдем из соотношений (13), учитывая (23).

Для случая $P_1 = 0$, $P_3 \neq 0$

$$\tilde{Z}_{\beta\alpha}(z) = 0, \quad u_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\alpha}{N^2} Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z), \quad v_{\beta\alpha}(z) = \frac{i\beta}{N^2} Z_{\beta\alpha}^{P_3}(z).$$

Применим к полученным трансформантам обратные преобразования Фурье с учетом формулы (25):

$$u^{P_3}(x, y, z) = -P_3 \frac{\mu_0}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{F^{(4)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (30)$$

$$v^{P_3}(x, y, z) = -P_3 \frac{\mu_0}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{F^{(4)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt.$$

Для случая $P_1 \neq 0$, $P_3 = 0$

$$u^{P_1}(x, y, z) = \frac{P_1 \mu_1}{8\pi G} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty \frac{F^{(3)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt -$$

$$-\frac{P_1}{4\pi G} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\infty \frac{F^{(0)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt, \quad (31)$$

$$v^{P_1}(x, y, z) = \frac{P_1 \mu_1}{8\pi G} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_0^\infty \frac{F^{(3)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt + \\ + \frac{P_1}{4\pi G} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_0^\infty \frac{F^{(0)}(z, t)}{t^2} J_0(t\sqrt{(x-d)^2 + y^2}) dt,$$

где

$$F^{(0)}(z, t) = e^{-t|z-c|} + e^{-t(h-c)} \frac{\sinh tc}{\cosh th} - e^{-tz} \frac{\cosh t(h-c)}{\cosh th}.$$

Таким образом, решение (4) поставленной задачи (1), (2), (5) выражается формулами (19), (29), (30), (27), (31), (26).

Найдем нормальное напряжение по формуле [1]

$$\sigma_z(x, y, z) = 2G\mu_0[\mu u' + \mu v' + (1-\mu)w']. \quad (32)$$

На закрепленной грани $z = 0$ формула (32) примет вид

$$\sigma_z(x, y, 0) = 2G\mu_0(1-\mu)[w^{0,}(x, y, 0) + w^{P,}(x, y, 0)] = \\ = G\mu_0\mu_1^{-1}[w^{0,}(x, y, 0) + w^{P,}(x, y, 0)].$$

Окончательно запишем

$$\sigma_z(x, y, 0) = \sigma_z^{AB}(x, y, 0) + \sigma_z^P(x, y, 0), \quad (33) \\ \sigma_z^P(x, y, 0) = \sigma_z^{P_1}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_3}(x, y, 0),$$

где напряжение $\sigma_z^{AB}(x, y, 0)$ определено соотношением (22).

С помощью формул для смещений (26), (27) найдем напряжения

$$\sigma_z^{P_1}(x, y, 0) = -P_1 \frac{\mu_0}{h^2 8\pi} \frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}} \int_0^\infty t F_1(t) J_1(t\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}) dt, \quad (34)$$

$$\sigma_z^{P_3}(x, y, 0) = P_3 \frac{\mu_0^2 \mu_1^{-1}}{h^2 \pi} \int_0^\infty t F_2(t) J_0(t\sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}) dt, \quad (35)$$

где $\alpha = d/h$, $\beta = c/h$.

$$F_1(t) = (\beta + \beta^2)te^{-t\beta} - \frac{2}{D_t} f_1(t), \quad F_2(t) = \frac{1}{D_t} f_2(t),$$

$$f_1(t) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{8}{\mu_0} t^2 (1-\beta) + 2t\kappa(1-\beta) - 1 \right) \sinh t\beta + \frac{2}{\kappa} t (\kappa(1-\beta) - 2\mu_0^{-1}) \cosh t(2-\beta) + \\ + (2t - 3\kappa) \cosh t\beta + \frac{2}{\kappa} t (1-\beta) \sinh t(2-\beta), \\ f_2(t) = (t(1-\beta) \left(\frac{4}{\kappa\mu_0} t + 1 \right) + \frac{\kappa^2 + 1}{2}) \cosh t\beta - \frac{2}{\kappa\mu_0} t\beta \sinh t(2-\beta) +$$

$$+\frac{2}{\mu_0} \cosh t(2-\beta) + (t(\kappa(1-\beta) - 1) + \frac{3\kappa^2 + 1}{2\kappa}) \sinh t\beta.$$

Функция D_t определена в соотношении (21).

4. Анализ численных результатов

Для плиты из меди ($\mu = 1/3$) толщиной $h = 2$ с площадкой загрузки, равной $B/A = 2$ ($A = 1/2, B = 1$), что соответствует распределению сжимающей нагрузки по грани $z = h$ по прямоугольнику, вытянутому вдоль оси y , зададим координаты точки приложения внутренней силы таким образом: $\alpha = 1$ ($d = 2$), $\beta = 1/2$ ($c = 1$). Компоненты вектора силы: $P_1 = 1, P_3 = 1$.

Построим распределение напряжений по участку $-2A < x < 2A, -2B < y < 2B$. На рис. 2 приводится график напряжения $\sigma_z^{AB}(x, y, 0)$, определяемого по формуле (22).

На рис. 3 приводится график изменения напряжения, возникающего при действии внутренней сосредоточенной силы $P = (P_1, 0, P_3)$:

$$\sigma_z^P(x, y, 0) = \sigma_z^{P_1}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_3}(x, y, 0),$$

рассчитанного по выражениям (33)–(35). На рис. 4 $-\sigma_z^{AB}(x, y, 0) + \sigma_z^{P_3}(x, y, 0)$, на рис. 5 $-\sigma_z^{AB}(x, y, 0) + \sigma_z^{-P_3}(x, y, 0)$, определенных в соотношениях (22), (35). Учет составляющей силы P_1 не существенно влияет на распределение напряжений при данном выборе параметров.

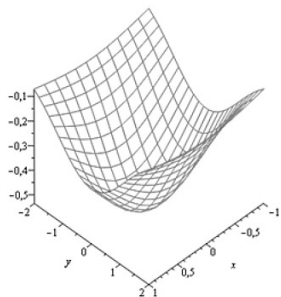


Рис. 2.

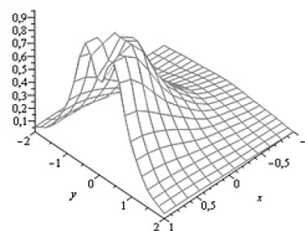


Рис. 3.

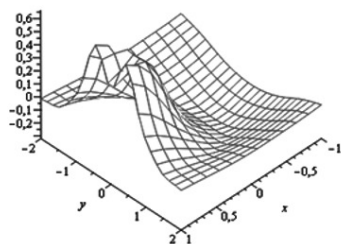


Рис. 4.

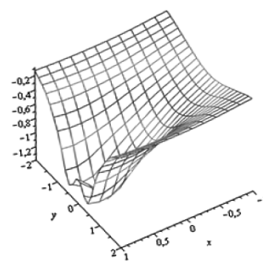


Рис. 5.

Из приведенных графиков видно, что возможен отрыв закрепленной грани в случае действия только внутренней силы (см. рис. 3) и в случае учета составляющей P_3 (см. рис. 4). Когда проекция силы P на ось z имеет вид $-P_3$, т.е. сила прилагается коллинеарно к распределенной по грани $z = h$ нагрузке, достигаются максимальные по абсолютной величине напряжения, равные -1.2 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

1. Получено точное решение смешанной задачи для бесконечной плиты с учетом воздействия произвольно ориентированной внутренней силы.

2. Исследовано распределение напряжений на закрепленной грани в зависимости от площадки распределения заданных напряжений и расположения внутренней силы.

3. Выявлены параметры, при которых возможен отрыв плиты от жесткой стенки.

1. **Новацкий В.** Вопросы термоупругости / В. Новацкий. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
2. **Попов Г. Я.** О приведении уравнений движения упругой среды к одному независимому и к двум совместно решаемым уравнениям / Г. Я. Попов // ДАН. – 2002. – 384, №2. – С. 193-196.
3. **Попов Г. Я.** Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманапов, В. В. Ефимов. – Алматы: Изд. Рауан, 1999. – 133 с.
4. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
5. **Попов Г. Я.** Об одном новом методе решения пространственной задачи для упругого слоя / Г. Я. Попов, А. А. Фесенко // Проблемы машиностроения. Раздел: Динамика и прочность машин. – Харьков, 2010. – Т.13. – №2.
6. **Teodorescu P. P.** Treatise on Classical Elasticity, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering, Chapter 9. Elastic Space / P. P. Teodorescu. – Elastic-Half-Space, DOI:10.1007/978-94-007-2616-1-9. – 2013, Springer.
7. **Chen W. T.** Computation of Stresses and Displacements in a Layered Elastic Medium / W. T. Chen // International Journal of Engineering Science. – 1971. – Vol.9. – P. 775–800.
8. **Bufler H.** Theory of elasticity of multilayered medium / H. Bufler // Journal of Elasticity. – 1971. – Vol.1, Issue 2. – P. 125–143.
9. **Johnson K. L.** Contact Mechanics / K. L. Johnson. – Cambridge University Press 0521347963. – 1984. – P. 448.
10. **Friedrichs K. O.** A boundary-layer theory for the elastic plates / K. O. Friedrichs, R. F. Dressier // Comm. on Pure and Applied Mathematics. – 1961. – Vol.14, Issue 1. – P. 1–33.

Mathematical Subject Classification: 74J20, 44A10
UDC 539.3

A. P. Moysyeyenok

Odesa I. I. Mechnikov National University

**THE STUDY OF THE INERTIAL PROPERTIES OF THE
EXFOLIATED HARD INCLUSION IS IN THE CONDITIONS
OF SMOOTH CONTACT WITH A NON-STATIONARY WAVES**

Мойсеєнок О. П. Дослідження інерціальних властивостей жорсткого відшарованого включення за умов гладкого контакту за нестационарної хвильової дії. Розв'язана задача про визначення напруженого стану в околі тонкого жорсткого включення у вигляді смуги кінцевої ширини у безмежному тілі (матриці) при проходженні плоских нестационарних хвиль. Вважається, що матриця знаходиться у стані плоскої деформації, а на обох сторонах включення реалізовано умови гладкого контакту. Метод розв'язання полягає у застосуванні інтегрального перетворення Лапласа за часом і у поданні зображень напружень та переміщень через розривний розв'язок рівнянь Ламе за умов плоскої деформації. В результаті початкову задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно зображень невідомих стрибків напружень та переміщень. Для обернення перетворення Лапласа застосовано числовий метод, який ґрунтується на заміні інтеграла Мелліна рядом Фур'є.

Ключові слова: жорстке відшароване включення, нестационарна плоска хвиля, розривний розв'язок, числове обернення перетворення Лапласа, КІН.

Мойсеєнок А. П. Исследование инерциальных свойств жесткого отслоившегося включения при условиях гладкого контакта при нестационарном волновом воздействии. Решена задача об определении напряженного состояния вблизи тонкого жесткого включения в виде полосы конечной ширины в неограниченном упругом теле (матрице) при прохождении плоских нестационарных волн. Считается, что матрица находится в состоянии плоской деформации, а на обеих сторонах включения реализованы условия гладкого контакта. Метод решения состоит в применении интегрального преобразования Лапласа по времени и представлении изображений напряжений и перемещений через разрывное решение уравнений Ламе для случая плоской деформации. В результате исходная задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений относительно изображений неизвестных скачков напряжений и перемещений. Для обращения преобразования Лапласа применен численный метод, основанный на замене интеграла Меллина рядом Фурье.

Ключевые слова: жесткое отслоившееся включение, нестационарная плоская волна, разрывное решение, численное обращение преобразования Лапласа, КИН.

Moysyeyenok A. P. The study of the inertial properties of the exfoliated hard inclusion is in the conditions of smooth contact with a non-stationary waves. The problem about determining the stress state near the thin rigid inclusion in a strip of finite width in an infinite elastic body (matrix) when passing of plane nonstationary waves is solved. It is considered that the matrix is in the conditions of plane strain and on both sides of the inclusion conditions of the smooth contact are implemented. The method of solution consists in applying the integral Laplace transform in time and presenting images of stresses and displacements through the discontinuous solution of Lamé's equations for the case of

plane strain. As a result, the initial problem is reduced to a system of singular integral equations with respect to unknown images jumps of stresses and displacements. To inverse the Laplace transform the numerical method based on the replacement of the Mellin integral by the Fourier series is applied.

Key words: hard exfoliated inclusion, non-stationary waves, the discontinuous solution, numerical Laplace transformation, SIF.

INTRODUCTION. Dynamic problems of the theory of elasticity for solids with thin inclusions often are considered on the assumption that between the matrix and the inclusion the conditions of full coupling are fulfilled. The solution of such 2D and 3D problems for the case of harmonic vibrations of solids with inclusions can be found in [1], [2]. The concentration of stresses near the thin rigid inclusion which is fully coupled with the matrix at the non-stationary loading was studied in [3]. The dynamic problems, when between the matrix and the inclusion the smooth contact conditions are realized, are not considered. In [4] the problem of the interaction of plane harmonic waves with the rigid inclusion under conditions of smooth contact is solved. In this paper we consider the similar problem of the interaction with non-stationary waves.

MAIN RESULTS. Let us consider an infinite elastic body (matrix), which is in the plane strain and containing the inclusion in the form of of the rigid plate width a and thickness $h \ll a$. This inclusion in the plane Oxy occupies an area of $|x| \leq a$, $-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}$. Let at the initial moment $t = 0$ the non-stationary plane longitudinal wave with a potential $\varphi_0(x, y, t)$ or shear wave with a potential $\psi_0(x, y, z)$ interacts with the inclusion. The displacements caused by these waves we will be denoted as $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$. Then the displacements and stresses in the matrix can be represented as the sum of two terms

$$u = u_0 + u_1, v = v_0 + v_1, \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \tau_{yx} = \tau_{yx}^0 + \tau_{yx}^1; \quad (1)$$

where u_1 , v_1 , σ_y^1 , τ_{yx}^1 – the displacements and stresses in the matrix caused by the waves reflected from the inclusion. The displacements u_1 , v_1 satisfy the Lamé equations for plane strain and zero initial conditions at $t = 0$.

The boundary conditions of the external environment on the inclusion due to its small thickness we formulate concerning its median plane. We shall assume that on both sides of the inclusion the conditions of smooth contact with the matrix are fulfilled. Then on the inclusion the stress σ_y^1 and displacement u_1 have discontinuity, which jumps we denote:

$$\sigma_y^1(x, +0, t) - \sigma_y^1(x, -0, t) = \chi_1(x, t), \quad (2)$$

$$u_1(x, +0, t) - u_1(x, -0, t) = \chi_4(x, t), \chi_4(\pm a, t) = 0, -a \leq x \leq a. \quad (3)$$

Also, from the conditions of the smooth contact, since the rigidity of inclusion should be the following equations:

$$v_1(x, 0, t) = \alpha_1(t) + \gamma(t)x - v_0(x, 0, t), \tau_{yx}^1(x, \pm 0, t) = -\tau_{yx}^0(x, 0, t), \quad (4)$$

where $\alpha_1(t)$ – the unknown displacement along the axis Oy , and $\gamma(t)$ – the unknown angle of the rotation of the inclusion. They are found from the equations of motion

for inclusion as a rigid body:

$$\begin{aligned} m\ddot{\alpha}_1(t) &= q(t) + R(t), J\ddot{\gamma}(t) = m(t) + M(t), \\ R(t) &= \int_{-a}^a \chi_1(x, t) dx, M(t) = \int_{-a}^a \chi_1(x, t) x dx. \end{aligned} \quad (5)$$

In these equations m – mass, a J – the moment of inertia per unit length of inclusion; $R(t)$, $M(t)$ – the force and the moment of the reaction on the inclusion from the part of the matrix.

Obtaining the integral equations and solution of the problem. To solve the formulated initial boundary value problem we apply the time-integral Laplace transform. Then from (2) - (4) for images we obtain the equalities

$$S_y^1(x, +0, p) - S_y^1(x, -0, p) = X_1(x, p), U_1(x, +0, p) - U_1(x, -0, p) = X_4(x, p), \quad (6)$$

$$V_1(x, 0, p) = A_1(p) + G(p)x - V_0(x, 0, p), T_y^1(x, \pm 0, p) = -T_y^1(x, 0, p). \quad (7)$$

The equations of motion (5) after the Laplace transform take the form

$$\begin{aligned} mp^2 A_1(p) &= \bar{R}_y(p), Jp^2 G(p) = \bar{M}(p), \\ \bar{R}_y(p) &= \int_{-a}^a X_1(x, p) dx, \bar{M}(p) = \int_{-a}^a X_1(x, p) x dx. \end{aligned} \quad (8)$$

In the recent equalities $V_k, U_k, S_y^k, T_{yx}^k, k = 0, 1; X_1, X_4, A_1, G$ – images of the corresponding functions, p – parameter of the Laplace transform.

The Laplace image of displacements and stresses in the matrix can be represented as the discontinuous solution of Lamé equations for images with jumps (6). For this purpose in the corresponding formulas from [1], where they are given for the harmonic oscillations, we should set $\kappa_k = i \frac{p}{c_k}, k = 1, 2$. Here c_1, c_2 – velocities of longitudinal and transverse waves in the matrix. Then, for the displacements and stresses which are included in boundary conditions we obtain

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\mu p_2^2} \int_{-a}^a X_1 \left(\left(p_1^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) K_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_2 \right) d\eta + \\ &+ \frac{1}{p_2^2} \int_{-a}^a X_4' \left(\left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - p_2^2 \right) K_2 - 2 \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - p_1^2 \right) K_1 \right) d\eta, \\ T_{yx}^1 &= \frac{1}{p_2^2} \int_{-a}^a X_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - p_2^2 \right) K_2 - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - p_1^2 \right) K_1 \right) d\eta + \\ &+ \frac{\mu}{p_2^2} \int_{-a}^a X_4' \left(4 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - p_2^2 \right) K_2 - 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + p_1^2 \right) K_1 - p_2^4 K_2^* \right) d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

In these formulas

$$K_j^* = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha(\eta-x) - \gamma_j |y|}}{2\alpha\gamma_j} d\alpha, K_j = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha(\eta-x) - \gamma_j |y|}}{2\gamma_j} d\eta =$$

$$- = \frac{1}{2\pi} K_0 \left(p_j \sqrt{(\eta - x)^2 + y^2} \right),$$

$$\gamma_j = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{c_j^2}}, p_j = \frac{p}{c_j}, j = 1, 2.$$

The presentation from the discontinuous solution makes it possible to find the stresses and displacements in the matrix with using the formulas (1), (9), if we known the jumps of displacements and stresses. To determine these jumps from the conditions on the inclusion (4) we obtain the integral equations. For this purpose the first equation (7) we differentiate and add to the result the condition of the equivalence of the original and differentiated equations.

$$V_1'(x, 0, p) = G(p) - V_0'(x, 0, p), V_1(x, 0, p) = A_1(p) - G(p)a - V_0(-a, 0, p), \quad (10)$$

After the substitution of (9) in the second condition (7) and in the conditions of (10) we obtain the system of integral equations with the additional condition concerning the images of unknown jumps. This system after the isolation of the singular components of kernels has the form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(z, q) \left(-\frac{(1+\xi^2)}{2(z-\zeta)} + F_{11}(q(z-\zeta)) \right) dz + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(z, q) \left(-\frac{\xi^2}{z-\zeta} + F_{12}(q(z-\zeta)) \right) dz = \\ & = g(q) - f_1(\zeta), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(z, q) \left(-\frac{\xi^2}{z-\zeta} + F_{21}(q(z-\zeta)) \right) dz + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(z, q) \left(\frac{2(1-\xi^2)}{z-\zeta} + F_{22}(q(z-\zeta)) \right) dz = f_2(\zeta), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(z, q) \left(\frac{1+\xi^2}{2} \ln(z+1) + R_1(q(z+1)) \right) dz + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(z, q) \left(\xi^2 \ln(z+1) + R_2(q(z+1)) \right) dz = \\ & = d_1(q) - g(q) - f_3(q), \\ & \int_{-1}^1 \Phi_2(z, q) dz = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

The functions $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, R_1, R_2$ are limited and continuous for $-1 \leq z, \zeta \leq 1$.

When obtaining the system (11) the following notation were introduced :

$$\eta = az, x = a\zeta, p = \frac{c_2 q}{a}, \xi = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}, p_1 = \frac{p}{c_1},$$

$$p_2 = \frac{p}{c_2}, d_1(q) = \frac{c_2}{a^2} A_1\left(\frac{c_2 q}{a}\right),$$

$$g(q) = \frac{c_2}{a} G\left(\frac{c_2 q}{a}\right), X_1\left(az, \frac{c_2 q}{a}\right) = \frac{a\mu}{c_2} \Phi_1(z, q), X_4\left(az, \frac{c_2 q}{a}\right) = \frac{a}{c_2} \Phi_2(z, q), \quad (12)$$

$$f_1(\zeta) = -\frac{c_2}{a} V_0'\left(a\zeta, 0, \frac{c_2 q}{a}\right),$$

$$f_2(\zeta) = \frac{c_2}{a\mu} T_{yx}^0\left(a\zeta, 0, \frac{c_2 q}{a}\right), f_3(q) = \frac{c_2}{a^2} V_0\left(-a, 0, \frac{c_2 q}{a}\right).$$

The recent equation (11) follows from (12) and $X_4(\pm a, p) = 0$. To the system (11) we also need to add two more equations to determine the images of unknown amplitude of the motion of the inclusion $d_1(q)$ and the angle of the rotation $g(q)$. We obtain these equations from (8) going to the notation (12):

$$d_1(q) = \frac{\bar{\rho}}{4\varepsilon q^2} \int_{-1}^1 \Phi_1(z, q) dz, g(q) = \frac{3\bar{\rho}}{16\varepsilon q^2} \int_{-1}^1 \Phi_1(z, q) z dz, \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (13)$$

ρ_1, ρ_0 – the density of matrix and inclusions. The approximate solution of the (11), (13) we shall find in the form [5]

$$\Phi_j(z, q) = \frac{\Psi_j(z, q)}{\sqrt{1-z^2}}, j = 1, 2.$$

The functions $\Psi_j(z, q)$ we approximate by interpolating polynomials

$$\Psi_j(z_m, q) = \sum_{m=1}^n \Psi_{mj} \frac{T_n(z_m)}{T_n'(z_m)(z-z_m)}, \Psi_{mj} = \Psi_j(z_m), j = 1, 2, \quad (14)$$

where $T_n(z)$ – Chebyshev polynomials of the 2nd kind, $z_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}$, $m = 1, \dots, n$ – roots of these polynomials. To find the unknown values of the images Ψ_{mj} , $j = 1, 2$ in the interpolation points of (11) we get a system of linear algebraic equations. For this we substitute there

$$\zeta = \zeta_k, \zeta_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k = 1, \dots, n-1,$$

the integrals with Cauchy kernel substitute the special quadrature formula, and the integrals with regular kernels - Gauss-Chebyshev quadrature formulas [5]. For the integral with a logarithmic singularity we use the formula [6]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi_j(z, q) \ln(z+1) dz &= \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{mj} B_m, B_m = \\ &= -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{\cos \frac{j\pi(2n-1)}{2n}}{j}, a_m = \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

As a result we get the system of $2n+2$ linear algebraic equations

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_1(z_m, q) \left(-\frac{(1+\xi^2)}{2(z_m - \zeta_k)} + F_{11}(q(z_m - \zeta_k)) - \frac{3\pi\bar{\rho}z_m}{8\varepsilon q^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_2(z_m, q) \left(-\frac{\xi^2}{z_m - \zeta_k} + F_{12}(q(z_m - \zeta_k)) \right) = f_1(\zeta_k), \\
& \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_1(z_m, q) \left(-\frac{\xi^2}{z_m - \zeta_k} + F_{21}(q(z_m - \zeta_k)) \right) + \\
& + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_2(z_m, q) \left(\frac{2(1-\xi^2)}{z_m - \zeta_k} + F_{22}(q(z_m - \zeta_k)) \right) = f_2(\zeta_k), \\
& \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_1(z_m, q) \left(-\left(\frac{1+\xi^2}{2}\right) B_m + R_1(q(z_m + 1)) - \frac{\pi\bar{\rho}}{2\varepsilon q^2} + \frac{3\pi\bar{\rho}z_m}{8\varepsilon q^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_2(z_m, q) (-\xi^2 B_m + R_2(q(z_m + 1))) = f_3(q), \\
& \sum_{m=1}^n a_m \Psi_2(z_m, q) = 0, \\
& d_1(q) = \frac{\bar{\rho}}{4\varepsilon q^2} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_1(z_m, q), g(q) = \frac{3\bar{\rho}}{16\varepsilon q^2} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_1(z_m, q) z_m. \quad (15)
\end{aligned}$$

The most interest to the fracture mechanics represent the stress state in the matrix near the inclusion. We should use the asymptotic formulas for the stresses near the ends of the inclusion [7], [8]. These formulas for the rigid inclusion which is in the smooth contact with the matrix after notation which was introduced in (12) have the form

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_y \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} &= \frac{\mu\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} k_1^\pm(\tau) \begin{pmatrix} -\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ -7\sin\theta_1 - \sin\theta_5 \\ 3\cos\theta_1 + \cos\theta_5 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{\mu\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} k_2^\pm(\tau) \begin{pmatrix} (2\kappa + 3)\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ -(2\kappa - 5)\sin\theta_1 + \sin\theta_5 \\ (2\kappa - 1)\cos\theta_1 - \cos\theta_5 \end{pmatrix} + O(1), \theta_p = \frac{p\theta}{2}. \quad (16)
\end{aligned}$$

In the formulas (16) r, θ are coordinates in the polar coordinate system, the centers of which coincide with the ends of the inclusion $x = \pm a$, $\tau = \frac{c_2}{a} t$ - dimensionless time. From (16) it is clear that the stress state in the matrix near the inclusion determined by the coefficients k_1^\pm and k_2^\pm . These coefficients, following [7], [8], we will call the dimensionless stress intensity factors (SIF) for inclusion. These factors equal

$$k_1^\pm(\tau) = \mp \frac{\psi_2(\pm 1, \tau)}{8(1-\nu)}, k_2^\pm(\tau) = \pm \frac{\psi_1(\pm 1, \tau)}{16(1-\nu)}. \quad (17)$$

The approximate values of the images (SIF) using (14), (17) can be expressed through the solution of (15). There are following formulas

$$K_1^\pm(q) = \mp \frac{\Psi_2(\pm 1, q)}{8(1-\nu)}, K_2^\pm(q) = \mp \frac{\Psi_2(\pm 1, q)}{16(1-\nu)},$$

$$\Psi_j(\pm 1) = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{m=1}^n \Psi_{mj} (-1)^m \left(ctg \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\pm 1}, \gamma_m = \frac{(2m-1)\pi}{2n}.$$

The numerical results. The numerical implementation of the proposed solution carried out for the case of the interaction with the inclusion of longitudinal or transverse waves with the front parallel to the inclusion. Here by the symmetry for the longitudinal waves we have $k_j^+(\tau) = -k_j^-(\tau) = k_j(\tau)$, and for transverse waves we have $k_j^+(\tau) = k_j^-(\tau) = k_j(\tau)$, $j = 1, 2$.

The originals of the dimensionless (SIF) $k_j^\pm(\tau)$ were restored numerically using a method based on the replacement of the Mellin integral by the Fourier series [9], as well as the modification of this method proposed in [10].

Suppose that the inclusion interacts with the flat longitudinal waves. During the numerical analysis, it was found that in this case $|k_2| \gg |k_1|$ and therefore only depending on the time graphics $k_2(\tau)$, are shown in Fig.1(a) and Fig.1(b) The curve in Fig.1(a) shows the graph of $k_2(\tau)$ under the action of the inclusion of a impact wave with the potential

$$\varphi_0 = (c_1 t - y)^2 H(c_1 t - y),$$

$H(t)$ – Heaviside function.

There is a rapid growth of (SIF) $k_2(\tau)$, and then it decreases to a value of 0. On Fig.1(b) it is shown the similar graph for the case when the incident wave is harmonic with potential.

$$\varphi_0 = \frac{c_1}{\omega} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c_1}\right)\right) H(c_1 t - y).$$

It was assumed that $\omega_0 = \frac{a\omega}{c_2} = 3$. It can be seen that the $\tau > 2$ we have access to the steady state.

The calculation of (SIF) has also been performed for the interaction with the inclusion of transverse shear waves. The results of these calculations are shown in Fig.2(a) and Fig.2(b). As in this case, $|k_1| \gg |k_2|$, then only studied the behavior of $k_1(\tau)$. On Fig.2(a) the variation of this coefficient under the action of the impact wave on the inclusion with the potential

$$\psi_0 = (c_2 t - y)^2 H(c_2 t - y).$$

is shown. Under this action $k_1(\tau) < 0$, and the absolute value of (SIF) increases to a maximum and then decreases to a constant value. The dependence of the $k_1(\tau)$ of time under the influence of transverse shear harmonic wave with the potential

$$\psi_0 = \frac{c_2}{\omega} \cos\left(\omega\left(t - \frac{y}{c_2}\right)\right) H(c_2 t - y), \omega_0 = \frac{a\omega}{c_2} = 3$$

is shown in Fig.2(b). It can be seen that at $\tau > 2$ (SIF) changes harmonically, and during the transition time the absolute values of (SIF) may slightly exceed the maximum values at the steady state.

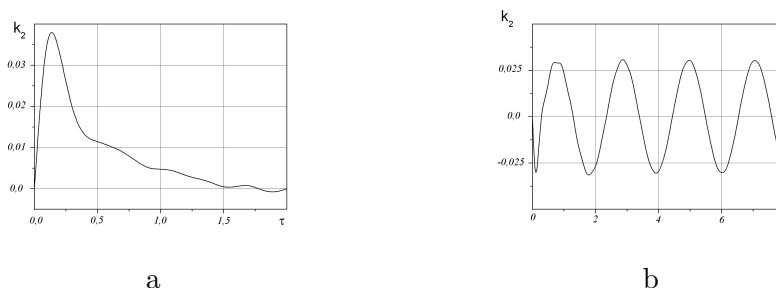


Fig. 1. The dependence of the dimensionless SIF on time during the action of the plane transverse impact wave on the inclusion (a) and of the plane transverse impact harmonic wave on the inclusion (b).

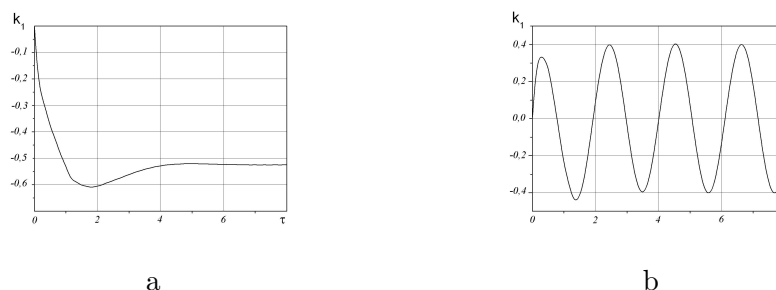


Fig. 2. The dependence of the dimensionless SIF on time during the action of the plane longitudinal impact wave on the inclusion (a) and of the plane longitudinal harmonic impact wave on the inclusion (b).

CONCLUSION. In the state of plane strain the conditions of smooth contact significantly affect to the nature of the stress state near the the rigid inclusion [3] and the dependence of the (SIF) from time. It is established that at the impact wave action values of (SIF) are taking extreme values at the beginning of wave action. Under the sudden harmonic action, the value of (SIF) in the transition period is not significantly greater than the value of (SIF) in the steady state. Last fact allows when studying the stress state near the such inclusion, with harmonic action, to solve the stationary problem immediately.

1. **Popov V. G.** Sravnitelnyy analiz diffratsionnykh poley pri prokhozhdennii uprugikh voln cherez defekty razlichnoi prorody / V. G. Popov, A. E. Ulanovskiy // Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela. – 1995. – № 4. – P. 99–109.
2. **Kit G. S.** Analiz ustanovivshyhsya kolebaniy ploskogo absolyutno zhestkogo vklyucheniya v trekhmernom tele metodom granichnykh elementoov / G. S. Kit, V. V. Mikhaskiv, O. M. Khay // Prikl. mat. i mekhanika. – 2002. – T. 66, Vyp. 5. – P. 855–863.

3. **Moyseenok A. P.** Doslidzhennya napruzhenogo stany v okoli smugovogo vkluchennya za umov nestastionarnogo navantazhennya / A. P. Moyseenok, V. G. Popov // Pid zagalnoyu redakstieyu V. V. Panasyuka – Lviv: Fiz.-mekh. institut im. G. V. Karpenka NAN Ukrainy, 2004. – P. 143–148.
4. **Litvin O. V.** Vzaemodiya ploskikh pruzhnukh khvul z zhorstkym vkluchennyam za umovu gladkogo kontaktu / O. V. Litvin, V. G. Popov // Mashinoznavstvo, 2003. – №9. – P. 24–27.
5. **Belotserkovskiy S. M.** Chislennye metodu v singulyarnykh integralnykh uravneniyakh i ih primenenie v aerodinamike, teorii yprugosti, electrodinamike / S. M. Belotserkovskiy, I. K. Lifanov. – M.: Nayka, 1985. – 256 P.
6. **Nazarchyk Z. T.** Chislennoe issledovanie difraktsii voln na tsilindricheskikh strukturakh / Z. T. Nazarchyk. – K. : Naykova dymka, 1989. – 256 P.
7. **Grulitskiy D. V.** Uprugie napryazheniya v ploskosti s tonkostennymi vklyuchenyami / D. V. Grulitskiy, G. T. Sulim // Mat. metody i fiz.-mekh. polya. – 1975. – Vyp.1. – P. 41–48.
8. **Berezhnitskiy L. T.** Vzaimodeistvie zhestkikh lineinykh vklyucheniy i treshin v deformiruemom tele / L. T. Berezhnitskiy, N. G. Stashyuk. – K.: Naykova Dymka, 1983. – 288 P.
9. **Davies B.** Numerical inversion of the place Laplace transform: a survey and comparison of methods / B. Davies, B. Martin // J. of Comp. Phys. – 1979. – Vol. 33, №1. – P. 1–32.
10. **Jaemin A.** A flexible inverse place Laplace transform algorithm and its application / A. Jaemin, K. Sungkwon, K. YongHoon // Computing. – 2003. – Vol. 71, № 2. – P. 115–131.

Mathematical Subject Classification: 74A10
UDC 539.3

A. V. Reut

Odesa I. I. Mechnikov National University

**THE AXISYMMETRICAL PROBLEM ON THE STRESS STATE
OF THE TRUNCATED HOLLOW CONE
UNDER THE EXTERNAL LOADING**

Реут А. В. Вісесиметрична задача про напружений стан порожнистого двічі зрізаного по сферичних поверхнях пружного конуса під впливом нормального навантаження. Розв'язано вісесиметричну задачу про напружений стан порожнистого двічі зрізаного по сферичних поверхнях пружного конуса під впливом нормального навантаження. По конічних поверхнях виконано умови гладкого контакту, по сферичних — задано умови першої основної задачі теорії пружності. За допомогою інтегрального перетворення Попова, що застосовано по кутовій координаті, вихідну крайову задачу зведено у просторі трансформант до одновимірної. Цю задачу подано у вигляді векторної крайової задачі, яка розв'язується точно відносно трансформант переміщень. Застосування оберненого інтегрального перетворення до отриманих виразів трансформант переміщень завершує побудову точного розв'язку поставленої задачі. Проведено дослідження значень нормальних напружень на конічних поверхнях з метою встановити наявність зон розтягуючих напружень.

Ключові слова: порожнистий конус, вісесиметрична задача, зовнішнє навантаження.

Реут А. В. Осесимметричная задача о напряженном состоянии полого дважды усеченного по сферическим поверхностям упругого конуса. Решена осесимметричная задача о напряженном состоянии полого дважды усеченного по сферическим поверхностям упругого конуса, находящегося под действием нормальной нагрузки. На конических поверхностях тела выполнены условия гладкого контакта, на сферических — заданы условия первой основной задачи теории упругости. С помощью интегрального преобразования Попова, применяемого по угловой координате, исходная краевая задача сведена в пространстве трансформант к одномерной. Последняя сформулирована в виде векторной краевой задачи, которая решается точно относительно трансформант смещений. Применение обратного интегрального преобразования к полученным трансформантам смещений завершает построение точного решения поставленной задачи. Проведено исследование значений нормальных напряжений на конических поверхностях конуса с целью установить наличие зон растягивающих напряжений.

Ключевые слова: полый конус, осесимметричная задача, внешняя нагрузка.

Reut A. V. The axisymmetrical problem on the stress state of the truncated hollow cone under the external loading. The axisymmetrical problem on the stress state of a hollow twice truncated by the spherical surfaces elastic cone under action of a normal loading is solved. On the conic surfaces of the body conditions of a smooth contact are satisfied, on the spherical ones — the conditions of a first main problem of elasticity are given. The initial boundary problem is reduced in the transformations' space to the one-dimensional problem with the help of Popov's integral transformation with regard to

the angular coordinate. The one-dimensional problem is formulated in the form of a vector boundary problem, where the unknown vector consists of the unknown displacements' transformations. The vector problem is solved exactly with the apparatus of the matrix differential calculation. The application of the inverse integral transformation to the obtained displacements' transformations finishes the construction of the problem's exact solution. It is carried out the analyses of the normal stress' values on the conic surfaces of a cone with the purpose to establish the presence of the stretching stress' zones.

Key words: hollow cone, axisymmetrical problem, external loading.

INTRODUCTION. There are many works devoted to the stress state estimation of the conic form bodies. So, the general solution for the axisymmetric boundary problem for the truncated cone is obtained in [1]. The homogeneous solution for a cone is considered in [2]. A number of the solutions for the boundary problems for cones under various boundary conditions at end faces of a cone and at a conic surface are resulted in [3-5]. In [6, 7] it was supposed, that on a conic surface are executed either conditions of coupling, or a condition of a smooth contact accordingly. The general solution of the axisymmetric boundary problems for the truncated cone is obtained in [8]. The dead weight of a body was not considered in all resulted above problems. In [9] the solution of the axisymmetric boundary problem for a continuous cone with regard of its dead weight is constructed by the fulfilling of the smooth contact conditions on a conic surface. The solution is constructed by the method, offered by G.Ya. Popov. It is based on the application of the new integral transformations [10] directly to the Lamé's equations with the subsequent reducing of an initial problem to the vector boundary problem. The last one is solved exactly with the apparatus of the matrix differential calculus. On the basis of the offered approach the elasticity problem for a hollow twice truncated cone which is being under loading of a body weight [10] and the axisymmetric problem of elasticity for a circular cone with an edge with regard of its dead body weight [9] were solved.

MAIN RESULTS. The elastic (G is the shear module, μ is the Poisson's coefficient) twice truncated hollow cone $a_0 < r < a_1$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$, $-\pi < \phi < \pi$ is considered (r , θ , ϕ are the spherical coordinate system). On the conical surfaces the conditions of the smooth contact are executed

$$u_\theta(r, \omega_i) = 0, \tau_{r\theta}(r, \omega_i) = 0; i = 0, 1; a_0 < r < a_1. \quad (1)$$

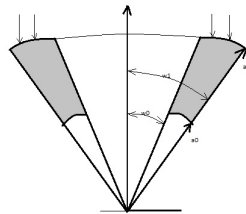


Fig. 1. The elastic twice truncated hollow cone.

On the spherical surfaces the stress are given

$$\sigma_r(a_1, \theta) = -p(\theta), \tau_{r\theta}(a_1, \theta) = 0; \omega_0 < \theta < \omega_1 \quad (2)$$

$$\sigma_r(a_0, \theta) = 0, \tau_{r\theta}(a_0, \theta) = 0; \omega_0 < \theta < \omega_1$$

The displacements $u \equiv u_r(r, \theta)$, $v \equiv u_\theta(r, \theta)$ satisfy the Lamé's equations [7]

$$(r^2 u')' - 2u - \frac{1}{\mu_*} \frac{(\sin \theta u^*)'}{\sin \theta} - \frac{\mu_{**}}{\mu_*} \frac{(\sin \theta v^*)'}{\sin \theta} + \frac{\mu_0}{\mu_*} \frac{(\sin \theta v')^*}{\sin \theta} = 0, \quad (3)$$

$$(r^2 v')' + \mu_* \left[\frac{(\sin \theta v^*)'}{\sin \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right] + \mu_0 r u'^* + 2\mu_* u^* = 0,$$

where $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$, $\mu_* = \mu + 1$, $\mu_{**} = \chi\mu_0$, $\chi = 3 - 4\mu$, a stroke above a symbol denotes the first variable derivative, a dot denotes the second variable derivative. One should estimate the cone's stress state.

The problem's reducing to the one dimensional vector boundary problem.

The Popov's integral transformation [11] is applied to the equilibrium's equations by the scheme

$$U_k(r) = \int_{w_0}^{w_1} y_*(\theta, \nu_k) u(r, \theta) d\theta,$$

$$V_k(r) = \int_{w_0}^{w_1} y(\theta, \nu_k) v(r, \theta) d\theta \quad (4)$$

with the inverse formulas

$$u(r, \theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r) (2\nu_k + 1) \times [S_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial \nu}]|_{\nu=\nu_k}^{-1} y_*(\theta, \nu_k),$$

$$v(r, \theta) = - \sum_{k=0}^{\infty} V_k(r) \frac{(2\nu_k + 1)}{\nu_k(\nu_k + 1)} \times [S_\nu \frac{\partial \Omega_\nu}{\partial \nu}]|_{\nu=\nu_k}^{-1} y(\theta, \nu_k). \quad (5)$$

Here the following designations are taken

$$y(\theta, \nu) = P_\nu^1(\cos \theta) Q_\nu^1(\cos \omega_1) - P_\nu^1(\cos \omega_1) Q_\nu^1(\cos \theta),$$

$$y_*(\theta, \nu) = P_\nu^1(\cos \theta) Q_\nu^1(\cos \omega_1) - P_\nu^1(\cos \omega_1) Q_\nu^1(\cos \theta),$$

$\nu = \nu_k, k = 0, 1, 2, \dots$ are the roots of the transcendental equation

$$\Omega_\nu = \Omega(\omega_0, \omega_1) = P_\nu^1(\cos \omega_0) Q_\nu^1(\cos \omega_1) - P_\nu^1(\cos \omega_1) Q_\nu^1(\cos \omega_0) = 0. \quad (6)$$

As a result, the Lamé's equations (3) in the integral transformations' space take the form

$$(r^2 U_k'(r))' - \mu_*^{-1} \mu_0 r V_k'(r) - (2 + \mu_*^{-1} N_k) * U_k(r) + \mu_*^{-1} \mu_{**} V_k(r) = 0,$$

$$(r^2 V_k'(r))' + \mu_0 N_k r U_k'(r) + 2\mu_* N_k \times U_k(r) - \mu_* N_k V_k(r) = 0,$$

$$N_k = \nu_k(\nu_k + 1). \quad (7)$$

The boundary conditions (2) are reformulated in the displacements' designations. Integral transformations (4) are applied to them with the previous variable changing

$$r = a_1\rho, \quad U_k(a_1\rho) = \tilde{u}_k(\rho), \quad V_k(a_1\rho) = \tilde{v}_k(\rho), \quad \alpha = \frac{a_0}{a_1}, \quad \alpha < \rho < 1$$

$$\begin{aligned} (1 - \mu)\tilde{u}'_k(\rho) + 2\mu\tilde{u}_k(\rho) - \mu\tilde{v}_k(\rho)|_{\rho=\alpha} &= 0 & (1 - \mu)\tilde{u}'_k(\rho) + 2\mu\tilde{u}_k(\rho) - \mu\tilde{v}_k(\rho)|_{\rho=1} &= p_k \\ N_k\tilde{u}_k(\rho) + \tilde{v}'_k(\rho) - \tilde{v}_k(\rho)|_{\rho=\alpha} &= 0 & N_k\tilde{u}_k(\rho) + \tilde{v}'_k(\rho) - \tilde{v}_k(\rho)|_{\rho=1} &= 0 \end{aligned}$$

$$p_k = \int_{w_0}^{w_1} y_*(\theta, \nu_k)p(\theta)d\theta$$

Let's input into consideration the matrixes and the vectors

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -\mu_*^{-1} \\ N & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} -2 - \mu_*^{-1} & \mu_*^{-1}\mu_{**} \\ 2\mu_*N & -\mu_*N \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2\mu & -\mu \\ N & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 - \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \vec{y}(\rho) &= \begin{pmatrix} \tilde{u}_k(\rho) \\ \tilde{v}_k(\rho) \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} p_k \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

The vector boundary problem is formulated with their help in the form

$$\begin{aligned} L_2(\vec{y}(\rho)) &= 0, \quad \alpha < \rho < 1 \\ V[\vec{y}] &= \vec{f} \end{aligned} \quad (8)$$

where the differential operator and the boundary functionals are

$$\begin{aligned} L_2\vec{y} &= I(\rho^2\vec{y}'(\rho))' + \mu_0rQ\vec{y}'(\rho) + P\vec{y}(\rho), \\ V[\vec{y}] &= Ay(a_i) + By'(a_i) = \vec{f}, \quad a_0 = \alpha, \quad a_1 = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

The solving of the vector one-dimensional boundary problem.

One should construct the solution of the matrix equation

$$L_2Y(\rho) = 0, \quad \alpha < \rho < 1 \quad (10)$$

before the construction of the vector solution of the equation (8).

With this aim let's substitute the matrix $Y(\rho) = \rho^s I$ (I is the unitary matrix) at the equation (8). It leads to the correlation $L_2Y(\rho) = \rho^s M(s)$, where $M(s)$ is the 2x2 matrix. The solution of this equation is searched in the form [12]

$$Y(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \rho^s \frac{\tilde{M}(s)}{\Delta(s)} ds. \quad (11)$$

C is the closed circuit around all poles of the integrated function . These poles are the roots of the transcendental equation $\Delta(s) = 0$, $\Delta(s)$ is the matrix's $M(s)$ determinant, $\tilde{M}(s)$ is the union matrix [13].

$$\Delta(s) = s^4 + 2s^3 + (2N_k + 1)s^2 - 2(N_k + 1)s + N_k(N_k - 2) = \prod_{i=1}^4 (s - s_i),$$

$$s_1 = \nu_k + 1, \quad s_2 = \nu_k - 1, \quad s_3 = -\nu_k, \quad s_4 = -\nu_k - 2.$$

Let's input the designations

$$\Omega_k(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{s^k \rho^s}{\Delta(s)} ds, \quad k = 0, 1. \quad (12)$$

The matrix $Y(\rho)$ is written with the help of (12) as

$$Y(\rho) = \begin{pmatrix} \Omega_2(s) - \Omega_1(s) - \mu_* N_k \Omega_0 & \frac{\mu_0}{\mu_*} \Omega_1 - \frac{\mu_{**}}{\mu_*} \Omega_0(s) \\ -\mu_0 N_k \Omega_1 - 2\mu_* N_k \Omega_0 & \Omega_2(s) + \Omega_1(s) - (2 + \mu_*^{-1} N_k) \Omega_0(s) \end{pmatrix}.$$

If one calculate the integrals (12) in the simple poles $s_1 = \nu_k + 1$ and $s_2 = \nu_k - 1$, then one obtain the solution $Y_0(\rho)$, increasing on the infinity, if one take the simple poles $s_3 = -\nu_k, s_4 = -\nu_k - 2$ it will be $Y_1(\rho)$ the solution decreasing on the infinity.

$$\begin{aligned} Y_0(\rho) &= \rho^{\nu+1} R_{\nu+1} A_+(\nu) - \rho^{\nu-1} R_\nu B_+(\nu) Y_1(\rho) = \\ &= \rho^{-\nu} R_\nu A_-(\nu) - \rho^{-\nu-1} R_{\nu+1} B_-(\nu) \end{aligned} \quad (13)$$

Here

$$R_\nu = [2(4\nu^2 - 1)]^{-1}, \quad \mu_1 = [2(1 - \mu)]^{-1}, \quad \nu = \nu_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

$$A_+(\nu) = \begin{pmatrix} 2(\nu + 1) - \mu_0 N_k & \mu_*^{-1} (\mu_0 \nu_k - 2) \\ -\mu_0 N_k (\nu + k + 2) & \mu_1 N_k + 2\nu_k \end{pmatrix},$$

$$B_+(\nu) = \begin{pmatrix} -(\mu_0 N_k + 2\nu) & 2 - \mu_1 \nu \\ \mu_0 N_k (\nu + \kappa) & -(2(\nu + 1) - \mu_1 N_k) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$A_-(\nu) = \begin{pmatrix} -\mu_0 N_k - 2\nu & -\mu_1 (\nu + k) \\ \mu_0 N_k (\nu - 4(1 - \mu)) & \mu_1 N - 2(\nu + 1) \end{pmatrix},$$

$$B_-(\nu) = \begin{pmatrix} -(\mu_0 N_k - 2(\nu + 1)) & -\mu_1 (\nu + k + 2) \\ N_k (\mu_0 \nu - 2) & \mu_1 N_k + 2\nu \end{pmatrix}.$$

Let's consider the case $k = 0$. $\nu_0 = 0$ for this case, i.e. ν_0 is the eigenvalue only of the function $P_\nu(\cos \theta)$, hence $P_0(\cos \theta) = 1$, $P_0^1(\cos \theta) = 0$. It leads from it that $u_0(\rho) \neq 0$, when $\nu_0(\rho) = 0$. In this case the one-dimensional problem in the transformations' space is simplified

$$\begin{cases} (\rho^2 u_0'(\rho))' - 2u_0(\rho) = 0, \quad \alpha < \rho < 1, \\ (1 - \mu) u_0'(1) + 2\mu u_0(\alpha) = 0, \\ (1 - \mu) a u_0(1) + 2\mu u_0(1) = p_0. \end{cases} \quad (16)$$

The unknown constants d_1 and d_2 of the equation's (16) general solution

$$u_0(\rho) = d_1 \rho + \frac{d_2}{\rho^2} \quad (17)$$

one must find from the boundary conditions (16). Finally, the solution for the case $k = 0$ takes the form

$$u_0(\rho) = -\frac{a_1^2 p_0}{2}(\alpha_1 \rho + \alpha_2 \rho^{-2}), \quad (18)$$

where $\alpha_1 = \frac{(\alpha^2+1)(\alpha-1)}{\alpha^2-\alpha+1}$, $\alpha_2 = \frac{\alpha^3}{\alpha^2-\alpha+1} \frac{1}{(2-5\mu)}$.

Now let's pass to the case $k \geq 1$. The general solution of the vector equation (9) is

$$\vec{y}_k(\rho) = Y_0(\rho) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + Y_1(\rho) \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

The unknown constants C_i , $i = \overline{1,4}$ are found from the satisfying of the boundary conditions (8). The exact solution of the vector one-dimensional boundary problem is constructed in the transformation's space exactly.

The inverting of the obtained solution

For the finally solution of the stated problem construction let's apply the inverse integral transformations (5) to the vector's components (19) correspondently, taking into consideration that in the second formula one should sum the series starting from 1. It is useful during the summation to take the formula for the calculation of the Legendre's function derivative relatively the order

$$\frac{\partial P_\nu^\mu(\cos \theta)}{\partial \nu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\Gamma(\frac{1}{2} + \mu) \sin \mu \theta]^{-1} \times \int_0^\theta (\cos \phi - \cos \theta)^{\mu-1/2} \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} \times \\ \times [(\Psi(\nu - \mu + 1) - \Psi(\nu + \mu + 1)) \times \cos(\phi(\nu + 1/2)) - \phi \sin(\phi(\nu + 1/2))] d\phi. \quad (20)$$

For the big values of ν the asymptotic formula is obtained with regard of the formulas for the asymptotic behavior of $\Gamma(z)$ and $\Psi(z)$ functions at the big values of their arguments [14]:

$$\frac{\partial P_\nu^\mu(\cos \theta)}{\partial \nu} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\Gamma(1/2 + \mu) \sin^\mu \theta]^{-1} \times \int_0^\theta (\cos \phi - \cos \theta)^{\mu-1/2} \frac{1}{\nu^{2\mu}} \times \\ \times [\frac{2}{(\nu+1)^2 - \mu^2} \cos(\phi(\nu + 1/2)) + 4 \sin(\phi \sin(\nu + 1/2))] d\phi.$$

The numerical results and discussions

The values of the normal stress $\sigma_\theta(r, \theta)$ on the conical surfaces $\theta = \omega_i$, $i = 0, 1$, $a_0 < r < a_1$ of the steel cone were investigated. The aim of the investigation is to establish the surfaces' zones of the stretching stress' creation and also the geometric parameters of the cones which lead to such situation.

The results of the numerical investigation show that by the radiuses' ratio a_1/a_0 less than 2, the stretching stress $\sigma_\theta(r, \theta)$ appear on the surfaces at the angles' ratio ω_1/ω_0 less then 1,2. With the increasing of the ratio a_1/a_0 the stretching stress $\sigma_\theta(r, \theta)$ appear at the ratio ω_1/ω_0 value less than 4. This zone of the stretching stress creation is situated near the spherical surface $r = a_1$, $\omega_0 < \theta < \omega_1$. The length of the zone increases with the increasing of the ratio a_1/a_0 .

CONCLUSION.

1. The exact solution of the problem on the stress state of the hollow twice truncated cone is constructed for the case of the smooth contact on the conical surfaces.

2. The investigation of the normal stress on the conical surfaces is worked out with the aim to estimate the condition of the stretching stress' zones creation and conditions of their appearance.

1. **Ulitko A. F.** The vectors' expansion in the space elasticity theory / A. F. Ulitko. – Kiev: Akadempriodika, 2002. – 341 p. (in Russian).
2. **Nuller B. M.** To the solving of the elasticity problems for the truncated cone / B. M. Nuller // *Izvestiya AN SSSR*. – 1967. – №5. – P.(in Russian).
3. **Khomsuridze N. G.** The thermoelastic equilibrium of the conical bodies / N. G. Khomsuridze // *Prikladnaya matematika i mechanica*. – 2003. – Vol. 67, Is. 3. – P. 124–133 (in Russian).
4. **Thompson T. R.** End effects in a truncated semi-infinite cone / T. R. Thompson, R. W. Little // *Quart.J. Mech.Appl. Math.* – Vol. 23, Is. 2. – 1970 – P. 185–196.
5. **Kamran Asemi** Elastic solution of a two-dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads / Asemi Kamran, Salehi Manouchehr, Akhlaghi Mehdi // *Acta Mechanica*. – Vol. 217, Is. 1-2. – 2011. – P. 119–134.
6. **Vaysfeld N. D.** The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the fixed through the lateral surface cone with spherical segment / N. D. Vaysfeld, G. Ya. Popov, V. V. Reut // *Prikladnaya matematika i mechanica*. – 2013. – Vol. 77, Is. 1. – P. 102–112 (in Russian).
7. **Popov G. Ya.** The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the truncated circular hollow cone / G. Ya. Popov // *Prikladnaya matematika i mechanica*. – 2000. – Vol. 64, Is. 3. – P.431–443 (in Russian).
8. **Popov G. Ya.** On the axisymmetrical problems of elasticity for the truncated hollow cone / G. Ya. Popov // *Prikladnaya matematika i mechanica*. – 2005. – Vol. 69, Is. 3. – P. 458–468 (in Russian).
9. **Vaysfeld N. D.** The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the truncated circular cone with edge with regard of its proper weight / N. D. Vaysfeld, A. V. Reut // *Vestnik Odesskogo Universiteta. Matematika i Mechanica*. – 2012. – Vol. 17, Is. 3. – P. 99–107 (in Russian).
10. **Vaysfeld N. D.** The axisymmetrical mixed problem of elasticity for the hollow twice truncated cone / N. D. Vaysfeld, A. V. Reut // *Vestnik Kievskogo Universiteta. Fizyko-matematychni nauki*. – 2013. – Is. 3. – P. 93–98 (in Russian).
11. **Popov G. Ya.** On the one method of the integral transformations obtaining with the application to the exact solution of the boundary problems of mathematical physics construction / G. Ya. Popov // *Mat. Metody i Fiz. Mech. Polya*. – 2003. – Vol.46, №3. – P. 74–89 (in Russian).
12. **Gantmakher R. F.** The matrix theory / R. F. Gantmakher. – Moscow: Nauka, 1967. – 576 p. (in Russian).
13. **Popov G. Ya.** The Green's functions and matrixes of the onedimensional boundary problems / G. Ya. Popov, S. A. Abdymanapov, V. V. Efimov. – Almaty: Ruan, 1998. – 106 p. (in Russian).
14. **Beytmen G.** The higher transcendental functions / G. Beytmen., A. Erdelye. – Moscow: Nauka, 1967. – 576 p. (in Russian).

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ (скорочений варіант)

Журнал “Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка” має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямками:

1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друківаних примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

в розділі “Наука” → “Наукові видання” → “Вісник ОНУ” → “Математика і механіка”. Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

- УДК;
- Mathematical Subject Classification (2010)
- назва статті;
- список авторів;
- анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;
- основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України “Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України” від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження

і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка" на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua