ISSN 2304—1579

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІСНИК
ОДЕСЬКОГО
НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ

Математика і механіка

Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік

Серія заснована у січні 1997 р.

Том 18. Випуск 1 (17). 2013

Одеса
«Астропринт»
2013

Засновник: **Одеський національний університет імені І.І. Мечникова**

«Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка» внесений до Переліку наукових фахових видань України постановою Президії ВАК України № 1-05/2 від 10.03.2010 р.

ISSN 2304—1579

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF UKRAINE
Odesa I. I. Mechnikov National University

VISNYK
ODESKOHO
NATSIONALNOHO
UNIVERSYTETU

(Odesa National University Herald)

Matematyka i Mekhanika
(Mathematics and Mechanics)

Scientific journal

Published four times a year

Series founded in January, 1997

Volume 18. Issue 1 (17). 2013

Odesa
«Astroprint»
2013

Founder: **Odesa I. I. Mechnikov National University**

ЗМIСТ

М А Т Е М А Т И К А

М Е Х А Н I К А

CONTENTS

M A T H E M A T I C S

M E C H A N I C S

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 7–15

М А Т Е М А Т И К А

Mathematical Subject Classification: 49M53
УДК 917.7

А. В. Арсирий
Одесский национальний университет имени И. И. Мечникова

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Арсірій А. В. Метод розв'язання задачі оптимального керування багатозначною траєкторією з термінальним критерієм якості. У даній статті розглядається задача оптимального керування багатозначною траекторією з термінальним критерієм якості. Пропонується чисельно-асимптотичний метод розв'язання, що базується на зведенні даної задачі до задачі математичного програмування.
Ключові слова: задачі керування, багатозначні відображення, диференціальні рівняння з похідною Хукухари, кусково-сталі керовані системи.

Арсирий А. В. Метод решения задачи оптимального управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. Предлагается численно-ассимптотический метод решения, основанный на сведении данной задачи к задаче многомерной оптимизации.
Ключевые слова: задачи управления, многозначные отображения, дифференциальные уравнения с производной Хукухары, кусочно-постоянные управляемые системы.

Arsirii A. V. Method of solving the optimal control problem of the setvalued trajectory with terminal criteria of quality. In the given article we consider the optimal control problem of the setvalued trajectory with the terminal criteria of quality. The approximated (numerical) method of control problem decision is offered. This method is based on leading the initial control problem to the mathematical programming problem.
Key words: control problem, set-valued map, differential equation with the Hukuhara derivative, piecewise constant control systems.

Введение.

С конца 60-х годов 20 века началось бурное развитие теории многозначных отображений и в [10] M. Hukuhara ввел производную и интеграл от многозначных отображений и исследовал их связь между собой. Впоследствии, в работе F. S. de Blasi и F. Iervolino [7] были рассмотрены дифференциальные уравнения с производной Хукухары, введены различные определения решений и доказаны теоремы их существования [8, 9], а M. Kisielewicz [13] и А. В. Плотников [5] рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для них.

Уравнения с производной Хукухары были использованы А. А. Толстоноговым [6] при изучении некоторых свойств "интегральной воронки" дифференциального включения в Банаховом пространстве, а O. Kaleva [11, 12] использовал их при исследовании уравнений с нечеткими начальными условиями.

В данной статье рассматривается задача управления системой, состояние которой описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. В статьях [1, 14] обосновывается возможность замены исходного допустимого управления на приближенное кусочно-постоянное. В данной статье приводится алгоритм численно-ассимптотического метода решения рассматриваемой задачи для случая R^2, основанный на сведении задачи управления к задаче многомерной оптимизации.

Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство векторов $x = (x_1, ..., x_n)^T$ с нормой $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Пусть $Conv(R^n)$ пространство непустых компактных и выпуклых подмножеств евклидового пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = min\{r \geq 0 | A \subset S_r(B), B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in Conv(R^n)$, $S_r(a)$ – шар радиуса r с центром в точке a.

Определение 1. [4] *Пусть $A, B \in Conv(R^n)$. Если существует множество $C \in Conv(R^n)$ такое, что $A = B + C$, то C называется разностью Хукухары множеств A и B и обозначается $A \overset{h}{-} B$.*

Определение 2. [4] *Многозначное отображение $F(\cdot) : R^1 \to Conv(R^n)$ дифференцируемо по Хукухаре в точке $t \in R^1$, если существует $D_h F(t) \in Conv(R^n)$ такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t + \Delta t) \overset{h}{-} F(t)), \quad \lim_{\Delta t \to 0_+} \frac{1}{\Delta t}(F(t) \overset{h}{-} F(t - \Delta t))$$

существуют и равны $D_h F(t)$.

Основные результаты.

Рассмотрим управляемое дифференциальное уравнение с производной Хукухары вида:

$$D_h X(t,u) = A(t)X(t,u) + F(t,u), \quad X(0,u) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$; $u(t) \in R^n$ — управляющее воздействие; $X(\cdot, u) : [0,T] \times R^n \to Conv(R^n)$ — многозначное отображение, определяющее состояние системы; $D_h X(t,u)$ — производная Хукухары; $A(t)$ — матрица с элементами $a_{ij}(t)$ порядка $(n \times n)$; $F(\cdot, u) : [0,T] \times R^n \to Conv(R^n)$ — многозначное отображение.

Введем следующий критерий качества

$$I(u) = \Phi(X(T,u)), \tag{2}$$

где $\Phi(\cdot) : Conv(R^n) \to R^1$.

Определение 3. [3] *Множество измеримых функций таких, что $u(t) \in U$ для всех $t \in [0,T]$, будем называть множеством допустимых управлений и обозначать $LU[0,T]$ (или LU).*

Далее в качестве множества допустимых управлений будем рассматривать произвольные прямоугольные области $LU = \prod\limits_{j=1}^{n} [u^j_{min}, u^j_{max}]$.

Если провести замену исходного измеримого управления $u(t)$ в задаче управления (1), (2) кусочно-постоянной функцией, то решение задачи станет намного более простым. Разработан алгоритм построения приближенного кусочно-постоянного управления.

Теорема 1. [2, 14] *Пусть $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^n(t))$ — измеримая функция на отрезке $[0, T]$ такая, что $u^j(t) \in [u^j_{min}, u^j_{max}]$, $\quad j = \overline{1, n}$ для всех $t \in [0, T]$. Разобьем отрезок $[0, T]$ на k частей $[(i-1)\Delta, i\Delta]$, $i = \overline{1, k}$, $\Delta = \frac{T}{k}$. Тогда существует кусочно-постоянная функция $\overline{u}(t)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\overline{u}(t)$ — постоянная на каждом из отрезков $[(i-1)\Delta, i\Delta], i = \overline{1, k}$;

2) $\overline{u}_i(t) = \{(\overline{u}^1_i(t), ..., \overline{u}^n_i(t))^T : \overline{u}^j_i(t) \in \{u^j_{min}, u^j_{max}\}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, n}\}$ для всех $t \in [0, T]$;

3) для любого $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_0^t u(s)ds - \int\limits_0^t \overline{u}(s)ds \right\| \leq \frac{1}{2} \| u_{max} - u_{min} \| \Delta. \tag{3}$$

где $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$.

В следующей теореме доказана близость решений уравнения (1), соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 2. [14] *Пусть уравнение (1) удовлетворяет следующим условиям:*
1) матрица $A(t)$ — измерима на $[0, T]$;
2) существует константа $a > 0$ такая, что $\|A(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a^2_{ij}(t)} \leq a$ для почти всех $t \in [0, T]$;
3) многозначное отображение $F(t, u)$ измеримо по t и непрерывно по u;
4) существует измеримая функция $f(t) > 0$ такая, что $h(F(t, u), \{0\}) \leq f(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$ и $\forall u \in LU$;
5) для всех $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in LU$ и $t \in [0, T]$ существует константа μ такая, что

$$h\left(\int\limits_0^t F(s, u_1(s))ds, \int\limits_0^t F(s, u_2(s))ds \right) \leq \mu \left\| \int\limits_0^t u_1(s)ds - \int\limits_0^t u_2(s)ds \right\|.$$

Также пусть $u(\cdot)$ — произвольное допустимое управление, а $X(t, u)$ — соответствующее ему многозначное решение уравнения (1) с начальным условием $X(0, u) = X_0$. Разобъем отрезок $[0, T]$ на k частей и сконструируем управление $\overline{u}(\cdot)$, согласно теореме 1, и пусть $X(t, \overline{u})$ — соответствующее многозначное решение уравнения (1) с начальным условием $X(0, \overline{u}) = X_0$. Тогда для всех $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$h(X(t, u), X(t, \overline{u})) \leq C_1 \frac{\Delta}{2} \| u_{max} - u_{min} \|, \tag{4}$$

где $C_1 = \mu e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Также доказана близость значений критериев качества, соответствующих исходному измеримому управлению и построенному кусочно-постоянному.

Теорема 3. [1] *Пусть задача (1), (2) удовлетворяет следующим условиям:*
1) матрица $A(t)$ *— измерима на* $[0, T]$*;*
2) существует константа $a > 0$ *такая, что* $\|A(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a^2_{ij}(t)} \leq a$ *для почти всех* $t \in [0, T]$*;*
3) многозначное отображение $F(t, u)$ *измеримо по* t *и непрерывно по* u*;*
4) существует измеримая функция $f(t) > 0$ *такая, что* $h(F(t, u), \{0\}) \leq f(t)$ *для почти всех* $t \in [0, T]$ *и* $\forall u \in LU$*;*
5) для всех $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in LU$ *и* $t \in [0, T]$ *существует константа* μ *такая, что*

$$h\left(\int\limits_0^t F(s, u_1(s))ds, \int\limits_0^t F(s, u_2(s))ds\right) \leq \mu \left\|\int\limits_0^t u_1(s)ds - \int\limits_0^t u_2(s)ds\right\|;$$

6) отображение $\Phi(\cdot)$ *непрерывно на* $Conv(R^n)$ *и удовлетворяет условию Липшица с постоянной* λ.

$u(t)$ *— произвольное допустимое управление для уравнения (1) на промежутке времени* $[0, T]$*. Разобъем отрезок* $[0, T]$ *на* k *частей и сконструируем управление* $\overline{u}(t)$*, согласно теореме 1. Тогда для всех* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$|I(u) - I(\overline{u})| \leq C_2 \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\|, \tag{5}$$

где $C_2 = \lambda\mu e^{aT}$, $\Delta = \frac{T}{k}$, $u_{max} = (u^1_{max}, ..., u^n_{max})$, $u_{min} = (u^1_{min}, ..., u^n_{min})$.

Приведем алгоритм метода решения данной задачи оптимального управления (1), (2) для R^2. Для простоты будем считать матрицу A и отклонение F постоянными.

Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем Δ из выражения:

$$0 \leq \Delta \leq \frac{\varepsilon}{\lambda\mu e^{aT}\|u_{max} - u_{min}\|}.$$

Получаем разбиение промежутка времени на $k = \frac{T}{\Delta}$ частей:

$$t_0 = 0,\ t_k = T,\ t_i = t_0 + i\Delta,\ i = 1, ..., k. \tag{6}$$

Пусть $u^*(\cdot)$ — оптимальное допустимое управление. Если построить приближенное кусочно-постоянное управление $\overline{u}^k(\cdot)$ согласно теореме 1, то

$$|I(u^*) - I(\overline{u}^k)| \leq \lambda\mu e^{aT} \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но мы не знаем управление $u^*(\cdot)$ и поэтому не можем построить управление $\overline{u}^k(\cdot)$. Значит найдем оптимальное управление $\overline{u}^k_*(\cdot)$ по данному разбиению Δ.

Очевидно, что $I(\overline{u}_*^k) \geq I(\overline{u}^k)$. (Так как разбиение промежутка времени остается неизменным.)

Следовательно, $I(u^*) \geq I(\overline{u}_*^k) \geq I(\overline{u}^k)$, т.е.

$$|I(u^*) - I(\overline{u}_*^k)| \leq \lambda \mu e^{aT} \frac{\Delta}{2} \|u_{max} - u_{min}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как на каждом из промежутков $[t_{i-1}, t_i]$ управление постоянно, то

$$\overline{u}^k(t) = \begin{cases} w_1, & t \in [t_0, t_1] \\ w_2, & t \in [t_1, t_2] \\ \dots \\ w_k, & t \in [t_{k-1}, t_k] \end{cases}, w_i \in U. \tag{7}$$

Запишем уравнение (1) в виде интегрального уравнения при $u(t) = \overline{u}^k(t)$.

$$X(t, \overline{u}^k) = X_0 + \int\limits_0^t \left[AX(s, \overline{u}^k) + F(s, \overline{u}^k(s)) \right] ds.$$

Воспользуемся возможностью аппроксимации "ломаными Эйлера"

$$X(t_i, w_1, ..., w_i) = X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}) + \Delta[AX(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}) + F(t_{i-1}, w_i)],$$

$$X(t_0, \overline{u}^k) = X_0.$$

Применим аппарат опорных функций

$$C(X(t_i, w_1, .., w_i), \psi) = C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), \psi) +$$

$$+\Delta[C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi) + C(F(t_{i-1}, w_i), \psi)]. \tag{8}$$

Таким образом получили расчетную формулу для построения аппроксимации "ломанными Эйлера" дифференциального уравнения с производной Хукухары. Значение $C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi)$ будем искать следующим образом:

$$C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), A^T\psi) =$$

$$= C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), \frac{A^T\psi}{\|A^T\psi\|}) \left\| A^T\psi \right\|. \tag{9}$$

Вектор ψ меняется, поэтому найденное значение $C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}),\, A^T\psi)$ следует суммировать со значениями $C(X(t_{i-1}, w_1, ..., w_{i-1}), \psi)$ и $C(F(t_{i-1}, w_i), \psi)$, которым соответствует такое же значение ψ.

Таким образом, решать уравнение (1) в явном виде довольно трудно, т.к. решением является многозначное отображение, но это оказывается вполне выполнимым, если иметь дело не с самим множеством, а с его опорной функцией.

Разобьем сегмент $[0, 2\pi]$ на m частей и получим m значений угла γ. Очевидно, что точность найденного управления зависит от m. То есть мы будем в два раза увеличивать число точек разбиения m, пока не достигнем нужной нам точности нахождения оптимального управления. Вектор ψ определим следующим образом

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \psi_1 = \cos\gamma, \\ \psi_2 = \sin\gamma. \end{array} \tag{10}$$

Затабулируем для каждого значения угла γ значение опорной функции начального множества X^0, т.е. $C(X^0,\psi)$, а также значения опорной функции множества F, т.е. $C(F,\psi)$. В каждый момент времени t_i мы получаем m значений опорной функции и m значений опорного вектора ψ, которые определяют m точек на границе множества $X(t_i,w_1,...,w_i)$. Однако сами точки мы получить не сможем, т.к. опорная функция определяет целую опорную гиперплоскость и неизвестно, какая именно точка этой гиперплоскости является точкой границы множества $X(t_i,w_1,...,w_i)$. Но мы сможем построить приближение множества $X(t_i,w_1,...,w_i)$ в виде описанного многоугольника, вершинами которого являются точки пересечения гиперплоскостей, определяемыми опорными функциями и опорными векторами. Для нахождения каждой j-й вершины многоугольника для множества, образуемого отображением $X(t_i,w_1,...,w_i)$ в конкретный момент времени, будем решать систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^1\psi_1^j + x_1^2\psi_2^j = C(X(t_i),\psi^j), \\ x_1^1\psi_1^{j+1} + x_1^2\psi_2^{j+1} = C(X(t_i),\psi^{j+1}). \end{array} \right. \tag{11}$$

После первого шага мы получим выражения для значений опорной функции $C(X(t_1,w_1),\psi)$ и точек границы множества $X(t_1,w_1)$, зависящие от w_1,

$$C(X(t_1,w_1),\psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(t_1,w_1),\psi^1) \\ C(X(t_1,w_1),\psi^2) \\ \dots \\ C(X(t_1,w_1),\psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(t_1,w_1) : \left\{ \begin{array}{l} X^1_{(1)}(t_1,w_1), X^2_{(1)}(t_1,w_1)\dots X^n_{(1)}(t_1,w_1) \\ X^1_{(2)}(t_1,w_1), X^2_{(2)}(t_1,w_1)\dots X^n_{(2)}(t_1,w_1) \\ \dots \\ X^1_{(m)}(t_1,w_1), X^2_{(m)}(t_1,w_1)\dots X^n_{(m)}(t_1,w_1) \end{array} \right\}.$$

После второго шага – зависящие от w_1 и w_2

$$C(X(t_2,w_1,w_2),\psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(t_2,w_1,w_2),\psi^1) \\ C(X(t_2,w_1,w_2),\psi^2) \\ \dots \\ C(X(t_2,w_1,w_2),\psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(t_2,w_1,w_2) : \left\{ \begin{array}{l} X^1_{(1)}(t_2,w_1,w_2), X^2_{(1)}(t_2,w_1,w_2)\dots X^n_{(1)}(t_2,w_1,w_2) \\ X^1_{(2)}(t_2,w_1,w_2), X^2_{(2)}(t_2,w_1,w_2)\dots X^n_{(2)}(t_2,w_1,w_2) \\ \dots \\ X^1_{(m)}(t_2,w_1,w_2), X^2_{(m)}(t_2,w_1,w_2)\dots X^n_{(m)}(t_2,w_1,w_2) \end{array} \right\}$$

и т.д.

И, наконец, мы получим выражения для $C(X(T,w_1,\dots,w_k),\psi)$ и для $X(T,w_1,\dots,w_k)$, зависящие соответственно от $w_1,\dots w_k$:

$$C(X(T,w_1,\dots,w_k),\psi) : \left\{ \begin{array}{l} C(X(T,w_1,\dots,w_k),\psi^1) \\ C(X(T,w_1,\dots,w_k),\psi^2) \\ \dots \\ C(X(T,w_1,\dots,w_k),\psi^m) \end{array} \right\},$$

$$X(T,w_1,\ldots,w_k):\left\{\begin{array}{l} X^1_{(1)}(T,w_1,\ldots,w_k),\ldots X^n_{(1)}(T,w_1,\ldots,w_k)\\ X^1_{(2)}(T,w_1,\ldots,w_k),\ldots X^n_{(2)}(T,w_1,\ldots,w_k)\\ \ldots\\ X^1_{(m)}(T,w_1,\ldots,w_k),\ldots X^n_{(m)}(T,w_1,\ldots,w_k)\end{array}\right\}.$$

И теперь, чтобы найти управление, оптимальное для данного m (оптимальное будем понимать как максиминное или как максимаксное), которое будет гарантировать нам максимум критерия качества, нам следует решить задачу математического программирования:

$$I(w_1,w_2,\ldots,w_k)=\Phi(X(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\to max, \tag{12}$$

$$W:\{w_1,\ldots,w_k|w_1\in U,...,w_k\in U\}. \tag{13}$$

Сначала требуется решить m задач условной максимизации функций $k\times n$ переменных (так как сами векторы $w_1,w_2\ldots,w_k$ размерности n) на замкнутом множестве W:

$$\begin{array}{l}\Phi(X_{(1)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\to max,\\ \quad w_1\in U,\qquad w_2\in U,\qquad \ldots\qquad w_k\in U;\\[1em] \Phi(X_{(2)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\to max,\\ \quad w_1\in U,\qquad w_2\in U,\qquad \ldots\qquad w_k\in U;\\ \qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\\ \Phi(X_{(m)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k))\to max,\\ \quad w_1\in U,\qquad w_2\in U,\qquad \ldots\qquad w_k\in U.\end{array}$$

После чего мы получим m значений целевой функции и m значений управления $(w_1,w_2,\ldots,w_k)$.

Теперь мы находим максимальное значение из полученных значений целевых функций, и управление, соответствующее этому максимальному значению целевой функции, и будет искомым оптимальным для данного m управлением $\overline{u_*}$.

Будем считать, что оптимальное управление найдено с точностью ε и прекращаем счет, если

$$|I(\overline{u}^k_{*m})-I(\overline{u}^k_{*2m})|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{14}$$

где k — разбиение промужетка времени, оно не меняется, а m и $2m$ — разбиение сегмента $[0,2\pi]$ на последней и предпоследней итерации алгоритма.

Теперь, так как для нахождения $X_{(m)}(T,w_1,w_2,\ldots,w_k)$ мы использовали метод "ломаных Эйлера" (8), мы проверим возможность уточнить значение критерия качества. Поэтому при полученном управлении $\overline{u}^k_{*2m}$ разделим отрезок $[0,T]$ на $2k$ частей и найдем $X^{2k}(T,\overline{u}^k_{*2m})$, а затем $\Phi(X^{2k}(T,\overline{u}^k_{*2m}))$. Теперь, если выполняется неравенство

$$|\Phi(X^{2k}(T,\overline{u}^k_{*2m}))-I(\overline{u}^k_{*2m})|>\frac{\varepsilon}{2}, \tag{15}$$

то разделим отрезок $[0,T]$ уже на $4k$, найдем $X^{4k}(T,\overline{u}^k_{*2m})$ и т.д., а иначе прекращаем счет и будем считать, что критерий качества равен последнему найденному значению.

Наконец мы сможем получить численное выражение для решения дифференциального уравнения с производной Хукухары, подставив в найденные выше выражения для $X(t_i)$, зависящие от $w_1, \ldots, w_i$, полученные оптимальные значения управления.

Исходя из приведенного выше, мы можем привести формализованную запись алгоритма. Итак, *алгоритм решения задачи оптимального управления процессом, описываемым дифференциальным уравнением с производной Хукухары (1), (2):*

ШАГ 1. Задаем $\varepsilon > 0$ и находим $\Delta > 0$. Получаем разбиение промежутка времени с помощью (6) на k частей. Будем искать оптимальное для данного $\Delta > 0$ управление $\overline{u_*}$.

ШАГ 2. Обозначаем через w_i управление на каждом из промежутков времени $[t_{i-1}, t_i]$ по формуле (7).

ШАГ 3. Решаем приближенно задачу Коши (1) при помощи расчетной формулы (8), используя аппарат опорных функций для m значений опорного вектора ψ, и по формуле (11) восстанавливаем m значений точек границы многозначного отображения Y в каждый из моментов времени. (Точность найденного управления будет зависеть от m.)

ШАГ 4. Подставляем найденное значение X в выражение для критерия качества (2) и получим задачу математического программирования (12), (13). Вернее мы получим m задач математического программирования, которые могут быть решены любым из существующих методов. Если мы понимаем оптимальное для данного m управление как доставляющее максимум критерию качества, то это будут m задач условной максимизации функций на замкнутом множестве W, если как доставляющее минимум критерию качества — то это будут m задач условной минимизации функций на замкнутом множестве W.

ШАГ 5. Находим оптимальное для данного m управление — это то управление, которое привело к максимальной из полученных m целевых функций (в случае максимизации критерия качества) или к минимальной из полученных m целевых функций (в случае минимизации критерия качества).

ШАГ 6. Если это первая итерация, то повторяем шаги с 3 по 5 и затем переходим к шагу 7. В противном случае сразу же переходим к шагу 7.

ШАГ 7. Если выполняется неравенство (14), то считаем, что оптимальное управление найдено с точностью ε, прекращаем счет и переходим к шагу 8. Иначе мы переходим к шагу 3 и задаем разбиение сегмента $[0, 2\pi]$ на $2m$ частей.

ШАГ 8. В связи с тем, что на шаге 3 использовалась аппроксимация "ломаными Эйлера", необходимо проверить возможность уточнения значения критерия качества. При полученном на последней итерации управлении $\overline{u}^k_{*2m}$ разделим отрезок $[0, T]$ на $2k$ частей.

ШАГ 9. Находим $X^{2k}(T, \overline{u}^k_{*2m})$, а затем $\Phi(X^{2k}(T, \overline{u}^k_{*2m}))$.

ШАГ 10. Если не выполняется неравенство (15), то считаем, что критерий качества равен последнему найденному значению. Иначе разбиваем сегмент $[0, T]$ на $4k$ частей и переходим к шагу 9.

Заключение. В статье рассматривалась задача оптимального управления многозначной траекторией с терминальным критерием качества. Состояние системы в задаче описывается дифференциальным уравнением с производной Хукухары. Разработан численно-асимптотический метод решения, основанный на сведении данной задачи к задаче математического программирования при замене исходной функции управления на приближенную кусочно–постоянную.

1. **Арсирий А. В.** Кусочно-постоянные системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества [текст] / Арсирий А. В. // Вестник Одесского национального университета. Матем. и механ. — Одесса: ОНУ, 2012. – Т. 17, Вып. 4. – С. 9–15.
2. **Арсирий А. В.** Системы управления многозначными траекториями с терминальным критерием качества [текст] / Арсирий А. В., Плотников А. В. // Украинский математический журнал. – Киев, 2009. – Т. 61, № 8. – С. 1141–1146.
3. **Ли Э. Б.** Основы теории оптимального управления [текст] / Ли Э. Б., Маркус Л. – М., 1972. – 576 с.
4. **Плотников А. В.** Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью [текст] / Плотников А. В., Скрипник Н. В. // Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.
5. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы [текст] / Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.
6. **Толстоногов А. А.** Дифференциальные включения в банаховом пространстве [текст] / Толстоногов А. А. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
7. **de Blasi F. S.** Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso [text] / de Blasi F. S., Iervolino F. // Boll. Unione Mat. Ital. – 1969. – Vol. 2, № 4–5. – P. 491–501.
8. **de Blasi F. S.** Euler method for differential equations with set-valued solutions [text] / de Blasi F. S., Iervolino F. // Boll.Unione Mat.Ital. – 1971. – Vol. 4, № 4. – P. 941–949.
9. **Brandao Lopes Pinto A. J.** Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions [text] / Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F. // Boll. U. M. I. – 1970. – № 4. – P. 534–538.
10. **Hukuhara M.** Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe [text] / Hukuhara M. // Func. Ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205–223.
11. **Kaleva O.** Fuzzy differential equations [text] // Fuzzy Sets and Systems / Kaleva O. – 1987. – 24, № 3. – P. 301–317.
12. **Kaleva O.** The Cauchy problem for fuzzy differential equations [text] // Fuzzy Sets and Systems / Kaleva O. – 1990. – 35. – P. 389–396.
13. **Kisielewicz M.** Differential inclusion and optimal control [text] / Kisielewicz M. – Warszawa: PWN, 1991. – 239 p.
14. **Plotnikov A. V.** Piecewise Constant Control Set Systems [text] / Plotnikov A. V., Arsiry A. V. // American Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – 1(2). – P. 89–93.

Mathematical Subject Classification: 11L05
УДК 511

Г. С. Белозеров
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО СРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕ $Z[i]$

Бєлозьоров Г. С. Про кількість розв'язків однієї еквіваленції в кільці $Z[i]$. Розглядається задача побудування точної формули для кількості рішень $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ еквіваленції $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$ в кільці цілих гаусових чисел $Z[i]$. Користуючись мультіпликативністю функції $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ, достатньо прорахувати $\rho(\alpha,\beta,\wp^n)$, де $\wp$ – простий елемент в $Z[i]$. При цьому задача переформулюється до проблеми обчислення спеціальних тригонометричних сум, зокрема, сум Гауса. Подібні результати можуть бути використані в аналітичній теорії чисел там, де досліджуються адитивні задачі з сумами квадратів цілих чисел.
Ключові слова: еквіваленція, кільце цілих гаусових чисел, сума Гауса, скінчене поле.

Белозеров Г. С. О числе решений одного сравнения в кольце $Z[i]$. Рассматривается задача построения точной формулы для числа решений $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ сравнения $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$ в кольце целых гауссовых чисел $Z\,[i]$. Пользуясь мультипликативностью функции $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ, достаточно вычислить $\rho(\alpha,\beta,\wp^n)$, где $\wp$ – простой элемент в $Z[i]$. При этом задача переформулируется в проблему вычисления специальных тригонометрических сумм, в частности, сумм Гаусса. Результаты подобного рода востребованы в аналитической теории чисел в той части, где исследуются аддитивные задачи с суммами квадратов целых чисел.
Ключевые слова: сравнение, кольцо целых гауссовых чисел, сумма Гаусса, конечное поле.

Belozerov G. S. About number of solutions of one congruence on ring $Z[i]$. The task of building the exact formula for the number of solutions $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ of the congruence $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$ over the ring of Gaussian integer $Z\,[i]$ is investigated. Using the multiplicative function $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ on γ is sufficient to calculate $\rho(\alpha,\beta,\wp^n)$, where $\wp$ – prime element in $Z[i]$. Here the problem is reformulated into a problem of computing of special exponential sums, in particular, Gauss sums. The results of this kind of demand in analytic number theory, in the part where the investigated additive problems with the sums of the squares of integers.
Key words: congruence, ring of Gaussian integer, Gauss sums , finite field.

Введение.

Оценки числа решений сравнений или точные формулы, представляющие соответствующие количества, бывают часто востребованы во многих задачах аналитической теории чисел. Это касается не только кольца рациональных целых, но и других колец целых алгебраических чисел. В данном случае речь пойдет о количестве решений сравнения $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}$, где $(\alpha,\gamma)=1$ в кольце целых гауссовых чисел. Если обозначить указанное количество через $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$, то будем рассматривать сумму

$$\rho(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{\substack{x,y\in Z[i]\\ \alpha(x^2+y^2)\equiv\beta \pmod{\gamma}}}1\quad . \tag{1}$$

В силу известной мультипликативности функции $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ достаточно вычислить результат по модулю $\wp^n$, где $\wp$ – простое число в $Z[i]$, т.е. либо $\wp=p\equiv 3 \pmod 4$, либо $\wp\bar{\wp}=p\equiv 1 \pmod 4$, либо $\wp=1+i$.

Основные результаты. Пусть сначала рассматривается случай $\wp$, где $\wp\bar{\wp}=p\equiv 1 \pmod 4$. Обозначим через $G_{\wp^n}$, $n\in N$, полную систему вычетов по модулю $\wp^n$ в $Z[i]$, а через $G^*_{\wp^n}$ — приведенную систему вычетов в этом кольце.

Лемма 1. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{x\in G_\gamma} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha x}{\gamma}\right)}=\begin{cases} N(\gamma), & \text{если } \alpha\equiv 0 \pmod{\gamma},\\ 0, & \text{если } \alpha\not\equiv 0 \pmod{\gamma}.\end{cases} \tag{2}$$

Это элементарный результат из теории тригонометрических сумм, где $N(\gamma)$ есть норма числа γ. Тогда, пользуясь формулой (1), получим

$$\begin{aligned}\sum_0 &=\rho(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_{x,y\in G_{\wp^n}}\frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{z\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{(\alpha(x^2+y^2)-\beta)z}{\wp^n}\right)}=\\ &=\frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{z\in G_{\wp^n}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^n}\right)}\sum_{x,y\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(x^2+y^2)z}{\wp^n}\right)}=\\ &=N(\wp^n)+\frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=0}^{n-1}\sum_{\substack{z\in G_{\wp^n}\\ (z\wp^n)=\wp^\delta}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^n}\right)}\sum_{x,y\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(x^2+y^2)z}{\wp^n}\right)}=\\ &=N(\wp^n)+\frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=0}^{n-1}\sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)}\sum_{x,y\in G_{\wp^n}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha(x^2+y^2)z}{\wp^{n-\delta}}\right)}=\\ &=N(\wp^n)+\frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=0}^{n-1}N(\wp^\delta)\sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)}\cdot\left(H(\alpha z,\wp^{n-\delta})\right)^2,\end{aligned}$$

где

$$H(\alpha,\wp^k)=\sum_{x\in G_{\wp^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha x^2}{\wp^k}\right)},\quad (\alpha,\wp)=1.$$

Займемся суммой $H(\alpha,\wp^k)$.

Лемма 2. *Имеет место соотношение для* $k\ge 2$

$$H(\alpha,\wp^k)=\begin{cases} N(\wp^{k_1}), & \text{если } k=2k_1,\quad k_1\in N,\\ N(\wp^{k_1})\displaystyle\sum_{u\in G_\wp} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp}\right)}, & \text{если } k=2k_1+1.\end{cases}$$

Доказательство. Положим $x = u + \wp^{k-1}v$, где $u \in G_{\wp^{k-1}}$, $v \in G_{\wp}$. Тогда

$$H(\alpha, \wp^k) = \sum_{u \in G_{\wp^{n-1}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp^k}\right)} \sum_{v \in G_{\wp}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{2\alpha uv}{\wp}\right)},$$

ибо $\alpha x^2 = \alpha u^2 + 2\alpha uv\wp^{k-1} + \alpha\wp^{2k-2}v^2$, а для $k \geq 2 \quad 2k-2 \geq k$, т.е.

$$\alpha x^2 \equiv \alpha u^2 + 2\alpha uv\wp^{k-1} + \alpha\wp^{2k-2}v^2 \pmod{\wp^k}.$$

И далее,

$$H(\alpha, \wp^k) = N(\wp) \sum_{\substack{u \in G_{\wp^{k-1}} \\ u \equiv 0 \pmod{\wp}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp^k}\right)} = N(\wp) \sum_{u \in G_{\wp^{k-2}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp^{k-2}}\right)}.$$

И теперь, пользуясь спуском по k, имеем

$$H(\alpha, \wp^k) = \begin{cases} N(\wp^{k_1}), & \text{если } k = 2k_1, \quad k_1 \in N, \\ N(\wp^{k_1}) \sum\limits_{u \in G_{\wp}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp}\right)}, & \text{если } k = 2k_1 + 1. \end{cases}$$

Лемма доказана. □

Для нечетного k $(k \geq 1)$ имеем $\sum\limits_{u \in G_{\wp}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha u^2}{\wp}\right)} = \sum\limits_{u \in G_{\wp}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\alpha\bar{\wp}u^2}{p}\right)}$, где $p = \wp\bar{\wp}$.

Если $\alpha\bar{\wp} \equiv a \pmod{p}$, где $a \in Z_p$, то последняя сумма превращается в рациональную сумму Гаусса $\sum\limits_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^2}{p}} = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \left(\dfrac{a}{p}\right) p^{1/2}$, а учитывая, что $p \equiv 1 \pmod{4}$, то $\sum\limits_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^2}{p}} = \left(\dfrac{a}{p}\right) p^{1/2}$, где $\left(\frac{a}{p}\right)$ – символ Лежандра.

Поэтому, возвращаясь к сумме $H(\alpha\, z, \wp^{n-\delta})$, получаем

$$H(\alpha z, \wp^{n-\delta}) = \begin{cases} N(\wp)^{\frac{n-\delta}{2}}, & \text{если } n-\delta \text{ четно}, \\ N(\wp)^{\frac{n-\delta-1}{2}} \left(\dfrac{c}{p}\right) p^{1/2}, & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Здесь $\alpha\bar{\wp}z \equiv c \pmod{p}$, $\quad c \in Z_p$. И, наконец,

$$H(\alpha z, \wp^{n-\delta}) = \begin{cases} N(\wp)^{\frac{n-\delta}{2}}, & \text{если } n-\delta \text{ четно}, \\ N(\wp)^{\frac{n-\delta}{2}} \left(\dfrac{c}{p}\right)^{1/2}, & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Лемма 3. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{z \in G^*_{\wp^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^k}\right)} = \begin{cases} \varphi(p^k), & \text{если } \beta \vdots p^k, \\ -p^{k-1}, & \text{если } \beta \vdots p^{k-1} \text{ и } \beta \vdots p^k, \\ 0, & \text{если } \beta \vdots p^{k-1}, \end{cases}$$

где $\wp\bar{\wp} = p$.

Доказательство. В силу того, что приведенная система вычетов по $\mod \wp^k$ совпадает с приведенной системой вычетов по $\mod p^k$, именно $G^*_{\wp^k} \cong Z^*_{p^k}$, получаем

$$\sum_{z\in G^*_{\wp^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^k}\right)} = \sum_{z\in Z^*_{p^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} = \sum_{z\in Z_{p^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} \sum_{d\backslash(p^k,z)} \mu(d) = \sum_1 .$$

Здесь $\mu(d)$– функция Мебиуса. Далее,

$$\sum_1 = \sum_{d\backslash p^k} \mu(d) \sum_{\substack{z\in Z_{p^k}\\ z\equiv 0 \pmod d}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} = \sum_{z\in Z_{p^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} - \sum_{\substack{z\in Z_{p^k}\\ z\equiv 0 \pmod p}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} =$$

$$= \sum_{z\in Z_{p^k}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^k}\right)} - \sum_{z\in Z_{p^{k-1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{p^{k-1}}\right)},$$

откуда, учитывая (2), получается результат леммы. □

Возвращаясь к сумме $\sum_0$, получаем

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \tfrac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} N(\wp^{n-\delta}) =$$

$$= N(\wp^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)}.$$

Пусть теперь $(\beta, \wp^n) = \wp^l$. Тогда, если $l = n$, то

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \bar{\varphi}(\wp^{n-\delta}) = N(\wp^n)\left(1 - \frac{1}{N(\wp)}\right) \sum_{\delta=0}^{n-1} \frac{1}{N(\wp^\delta)} =$$

$$= N(\wp^n) + N(\wp^n) - 1 = 2N(\wp^n) - 1.$$

Здесь $\bar{\varphi}$ – функция Эйлера в кольце $Z[i]$.

Если $l \le n-1$, то согласно лемме 3 внутренняя сумма в $\sum_0$ должна равняться $\bar{\varphi}(N(\wp^{n-\delta}))$, если $l \ge n-\delta$, $-N(\wp^{n-\delta-1})$, если $l = n-\delta-1$ и нулю в остальных случаях. Тогда

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \sum_{\delta=n-l-1}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} =$$

$$= N(\wp^n) - N(\wp^l) + \sum_{\delta=n-l}^{n-1} \bar{\varphi}(N(\wp^{n-\delta})) = N(\wp^n) - 1.$$

Рассмотрим случай $\wp = p \equiv 3 \pmod 4$. Как и ранее, имеем

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-1} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} \cdot \left(H(\alpha z, \wp^{n-\delta})\right)^2,$$

$$H(\alpha z, p^{n-\delta}) = \sum_{x\in G_{p^{n-\delta}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z x^2}{p^{n-\delta}}\right)},$$

и спуск по $p^{n-\delta}$ дает

$$\begin{aligned} H(\alpha\, z, p^{n-\delta}) &= \sum_{u\in G_{p^{n-\delta-1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p^{n-\delta}}\right)} \sum_{v\in G_p} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{2\alpha z u v}{p}\right)} = \\ &= N(p) \sum_{u\in G_{p^{n-\delta-2}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p^{n-\delta-2}}\right)}. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$H(\alpha z, p^{n-\delta}) = \begin{cases} N(p^{\frac{n-\delta}{2}}), & \text{если } n-\delta \text{ четно},\\ N(p^{\frac{n-\delta-1}{2}}) \sum\limits_{u\in G_p} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p}\right)}, & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{3}$$

Ввиду того, что $[G_p : Z_p] = 2$, можно считать, что внутренняя сумма в (3) рассматривается в поле F_q, где $q = p^2$. Здесь уместно привести результаты из [1]. Именно, пусть сумма Гаусса в поле F_q определяется выражением

$$G(\psi, \chi) = \sum_{c\in F_q^*} \psi(c)\chi(c),$$

где ψ – мультипликативный, а χ – аддитивный характеры поля F_q. Характер χ называется каноническим, если $\chi(x) = e^{2\pi i tr(x)/p}$, где $p = Char(F_q)$, а $\mathrm{tr}(x)$ – абсолютный след элемента x.

Лемма 4. *Пусть p — простое нечетное число, $s \in N$, F_q — конечное поле порядка $q = p^2$. Если η — квадратичный характер, а χ — канонический аддитивный характер поля F_q, то*

$$G(\eta, \chi) = \begin{cases} (-1)^{s-1} q^{1/2}, & \textit{если } p \equiv 1 \pmod 4,\\ (-1)^{s-1} i^s q^{1/2}, & \textit{если } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Доказательство. В [1].

Лемма 5. *Пусть χ– нетривиальный аддитивный характер поля F_q, где q – нечетно, и пусть $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in F_q[x]$. Тогда*

$$\sum_{c\in F_q} \chi(f(c)) = \chi(a_0 - a_1^2(4a_2)^{-1})\eta(a_2) \cdot G(\eta, \chi),$$

где η – квадратичный характер поля F_q.

Доказательство. В [1].

Теперь получаем

$$\sum_{u\in G_p} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha z u^2}{p}\right)} = \sum_{u\in F_q} e^{2\pi i tr\left(\frac{\alpha z u^2}{p}\right)} = \eta(\alpha z) G(\eta, e^{2\pi i tr(x)/p}),$$

ибо $a_0 = a_1 = 0, \quad a_2 = \alpha\, z$. Значит,

$$H(\alpha\, z, p^{n-\delta}) = \begin{cases} N(p^{\frac{n-\delta}{2}}), & \text{если } n-\delta \text{ четно}, \\ N(p^{\frac{n-\delta-1}{2}})\eta(\alpha\, z)G(\eta, e^{2\pi i tr(x)/p}), & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}.$$

Учитывая лемму 4, имеем

$$H(\alpha\, z, p^{n-\delta}) = \begin{cases} N(p^{\frac{n-\delta}{2}}), & \text{если } n-\delta \text{ четно}, \\ N(p^{\frac{n-\delta-1}{2}})\eta(\alpha\, z), & \text{если } n-\delta \text{ нечетно}. \end{cases}.$$

И тогда для $\sum\limits_0$ получаем

$$\sum_0 = N(p^n) + \frac{1}{N(p^n)}\sum_{\delta=0}^{n-1} N(p^\delta) \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^{n-\delta}}\right)} \cdot N(p^{n-\delta}) =$$
$$= N(p^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^{n-\delta}}\right)}.$$

Пусть снова $(\beta, p^n) = p^l$. Тогда, как и ранее, для $l = n$ имеем

$$\sum_0 = 2N(p^n) - 1.$$

Если $l \le n-1$, то

$$\sum_0 = N(p^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^{n-\delta}}\right)} = N(p^n) + \sum_{\delta=0}^{n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta_1 z}{p^{n-\delta-l}}\right)},$$

где $(\beta_1, p) = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\sum_0 &= N(p^n) + \sum_{0\le\delta<n-l} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta_1 z}{p^{n-\delta-l}}\right)} + \\ &\quad + \sum_{n-l\le\delta\le n-1} \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta_1 z}{p^{n-\delta-l}}\right)} = \\ &= N(p^n) + \sum_{0\le\delta<n-l} N(p^l) \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta-l}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta_1 z}{p^{n-\delta-l}}\right)} \\ &\quad + \sum_{n-l\le\delta\le n-1} N(p^l) \sum_{z\in G^*_{p^{n-\delta-l}}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta_1 z}{p^{n-\delta-l}}\right)} = \\ &= N(p^n) + \sum_2 + \sum_3.\end{aligned}$$

Лемма 6 (обобщенная лемма Рамануджана). *В условиях $Z[i]$ и $(\beta, p) = 1$ имеем*

$$\sum_{z\in G^*_{p^k}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\beta\, z}{p^k}\right)} = \begin{cases} 0, & \text{если } k > 1, \\ -1, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Аналогично лемме 3.

Теперь в соответствии с леммой 6 $\sum\limits_2 = -N(p^l)$, а $\sum\limits_3 = N(p^l)\cdot\bar\varphi(p^{n-\delta-l})$.
Поэтому

$$\sum_0 = N(p^n) - 1.$$

Рассмотрим последний случай $\wp = 1+i$. Стандартная выкладка опять дает

$$\sum_0 \;=\; N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)}\sum_{\delta=0}^{n-2} N(\wp^\delta) \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar\alpha\beta\, z}{\wp^{n-\delta}}\right)}\cdot\left(H(z\;,\;\wp^{n-\delta})\right)^2.$$

Изменение в суммировании по δ связано с тем, что $H(\,z,\wp) = 0$, и $\alpha\bar\alpha \equiv 1 \pmod{\wp^n}$. А для $H(z,\wp^2)$ нетрудно получить значение, если обозначить $z = w_1 + iw_2$. При этом, учитывая, что $(z,\wp) = 1$, заметим, что w_1 и w_2 имеют разную четность. Поэтому

$$H(z,\wp^2) = \begin{cases} 0, & \text{если } w_1 \text{ четно,}\\ 4, & \text{если } w_1 \text{ нечетно}\end{cases}$$

И, следовательно, в этом случае

$$\sum_0 \;= N(\wp^2) + \frac{1}{N(\wp^2)}\cdot N(\wp)\sum_{\substack{z\in G^*_{\wp^2}\\ \mathrm{Re}(z)\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar\alpha\beta z}{\wp^2}\right)}\cdot N\left(\wp^4\right) =$$

$$= N(\wp^2) + N(\wp^2)\cdot e^{-i\pi\,\mathrm{Im}(\bar\alpha\beta)}.$$

Для вычисления значения $H(z,\wp^3)$ можно воспользоваться полной системой вычетов вида $\{0,\ \pm 1,\ \pm i,\ 1\pm i,\ 2\}$. И тогда получим, что $H(z,\wp^3) = 0$. Поэтому при $n = 3$

$$\sum_0 \;= N(\wp^3) + \frac{1}{N(\wp^3)}\cdot N(\wp)\sum_{\substack{z\in G^*_{\wp^2}\\ \mathrm{Re}(z)\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2)}} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{\bar\alpha\beta z}{\wp^2}\right)}\cdot (H(z,\wp^2))^2 =$$

$$= N(\wp^3) + N(\wp^2)\cdot e^{-i\pi\,\mathrm{Im}(\bar\alpha\beta)}.$$

Снова рассмотрим сумму $H(z,\wp^k)$, $k\ge 4$. Легко видеть, что при $k = 2k_1$ и $x = u + \wp^{k_1}v$, где $u, v\in G_{\wp^{k_1}}$, выводим для H

$$\begin{aligned} H(z,\wp^k) \;&= \sum_{u\in G_{\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu^2}{p^k}\right)} \sum_{v\in G_{\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{2z\,uv}{\wp^{k_1}}\right)} = \\ &= N(\wp^{k_1}) \sum_{\substack{u\in G_{\wp^{k_1}}\\ 2u\,\vdots\,\wp^{k_1}}} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu^2}{\wp^k}\right)} = N(\wp^{k_1}) \sum_{u_1\in G\wp^2} e^{-2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu_1^2}{\wp^4}\right)} = \\ &= N(\wp^{k_1}) \sum_{u_1\in G\wp^2} e^{2\pi i\,\mathrm{Re}\left(\frac{zu_1^2}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Если вновь обозначить $z = w_1 + iw_2$, то простые вычисления дают

$$H(z,\wp^k) = N(\wp^{k_1})\begin{cases} 2\,, & \text{если } w_1 \text{ — нечетно},\\ 2\,, & \text{если } w_1 \equiv 0 \pmod 4),\\ -2\,, & \text{если } w_1 \equiv 2 \pmod 4).\end{cases}$$

При $k = 2k_1 + 1$, $k \geq 4$, и $x = u + \wp^{k_1+1}v$, где $u \in G_{\wp^{k_1+1}}$, $v \in G_{\wp^{k_1}}$ получаем

$$H(z,\wp^k) = \sum_{u\in G_{\wp^{k_1+1}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{zu^2}{p^k}\right)} \sum_{v\in G_{\wp^{k_1}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{2z\,uv}{\wp^{k_1}}\right)} =$$

$$= N(\wp^{k_1}) \sum_{\substack{u\in G_{\wp^{k_1+1}} \\ 2u\,\vdots\,\wp^{k_1}}} e^{2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{zu^2}{\wp^k}\right)} = N(\wp^{k_1}) \sum_{u_1\in G_{\wp^3}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{zu_1^2}{\wp^5}\right)}.$$

Вычисляя непосредственно последнюю сумму, находим, что

$$H(z,\wp^k) = N(\wp^{k_1})\begin{cases} 2\sqrt{2}\,, & \text{если } w_1 + w_2 \equiv 1 \text{ или } 7 \pmod 8),\\ -2\sqrt{2}\,, & \text{если } w_1 + w_2 \equiv 3 \text{ или } 5 \pmod 8).\end{cases}$$

Теперь, как и ранее, положим $(\beta,\wp^n) = \wp^{l_0}$. Тогда

$$\sum_4 = \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i Re\left(\frac{\bar\alpha\beta z}{\wp^{n-\delta}}\right)} \big(H(z,\wp^{n-\delta})\big)^2$$

$$= \sum_{z\in G^*_{\wp^{n-\delta}}} e^{-2\pi i Re\left(\frac{\bar\alpha\beta_1 z}{\wp^{n-\delta-l_0}}\right)} \big(H(z,\wp^{n-\delta})\big)^2,$$

где $\beta = \wp^{l_0}\beta_1$, $\quad (\beta_1,\wp) = 1$. Если $l_0 \geq n - \delta$, то

$$\sum_4 = \bar\varphi(\wp^{n-\delta}) \cdot \big(H(z,\wp^{n-\delta})\big)^2.$$

А если $l_0 < n - \delta$, то при $t = n - \delta - l_0$

$$\sum_4 = N(\wp^{l_0}) \sum_{z\in G^*_{\wp^t}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\bar\alpha\beta_1 z}{\wp^t}\right)} \big(H(z,\wp^{n-\delta})\big)^2 =$$

$$= \big(H(z,\wp^{n-\delta})\big)^2 \begin{cases} -N(\wp^{l_0}), & \text{если } \ t = 1,\\ 0, & \text{если } \ t > 1,\end{cases}$$

по лемме 6. Теперь для $n \geq 4$

$$\sum_0 = N(\wp^n) + \frac{1}{N(\wp^n)}\left(\sum_{\delta=0}^{n-4} N(\wp^\delta)\sum_4 + \sum_{\delta=n-3}^{n-2} N(\wp^\delta)\sum_4\right) = N(\wp^n) + \sum_5 + \sum_6.$$

$$\sum_5 = \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=0}^{n-4} N(\wp^\delta) \sum_4 = \frac{1}{N(\wp^n)} \sum_{\delta=n-l_0}^{n-4} N(\wp^\delta) \cdot \bar{\varphi}(\wp^{n-\delta}) \left(H(z,\wp^{n-\delta})\right)^2 - \\ -\frac{1}{N(\wp)} \left(H(z,\wp^{l_0+1})\right)^2 .$$

$$\begin{aligned} \sum_6 &= \sum_{\delta=n-3}^{n-2} N(\wp^{\delta-n}) \sum_4 = N(\wp^{-3}) \sum_{z\in G^*_{\wp^3}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta_1 z}{\wp^{3-l_0}}\right)} \left(H(z,\wp^3)\right)^2 + \\ &+N(\wp^{-2}) \sum_{z\in G^*_{\wp^2}} e^{-2\pi i Re\left(\frac{\bar{\alpha}\beta_1 z}{\wp^{2-l_0}}\right)} \left(H(z,\wp^2)\right)^2 = \\ &= N(\wp^{-2}) \sum_{z\in G^*_{\wp^2}} e^{-2\pi i \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{\alpha}\beta_1 z}{\wp^{2-l_0}}\right)} \left(H(z,\wp^2)\right)^2 = \\ &= \begin{cases} N(\wp^2)\ , & \text{если } \ l_0 \geq 2, \\ -N(\wp^2)\ , & \text{если } \ l_0 = 1, \\ N(\wp^2)\ , & \text{если } \ l_0 = 0,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta_1) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ -N(\wp^2)\ , & \text{если } \ l_0 = 0,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta_1) \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Наконец, суммируя по δ в $\sum_5$, в итоге получаем

$$\sum_0 = \begin{cases} N(\wp)\ , & \text{если } \ n = 1, \\ 2N(\wp^2)\ , & \text{если } \ n = 2,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \equiv 0\,(mod 2), \\ 0\ , & \text{если } \ n = 2,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \equiv 1\,(mod 2), \\ N(\wp^3) + N(\wp^2)\ , & \text{если } \ n = 3,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \equiv 0\,(mod 2), \\ N(\wp^3) - N(\wp^2)\ , & \text{если } \ n = 3,\ \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) \equiv 1\,(mod 2), \\ N(\wp^4) + N(\wp^5)(N(\wp)-1) + \sum_6 , & \text{если } \ n = 4, \\ N(\wp^n) + N(\wp^5)(N(\wp^{l_0-3})-1)- & \\ -N(\wp^{l_0+2}) + \sum_6 , & \text{если } n \geq 5, \end{cases}$$

где $\sum_6$ определяется формулой (4).

Собирая все вместе, получаем основной результат.

Теорема. *Для числа решений сравнения, определяемого формулой (1), справедливо равенство*

$$\rho(\alpha,\beta,\gamma) = E(\alpha,\beta,\gamma) \cdot \prod_{\substack{\wp^n || \gamma \\ \wp \neq 1+i}} \left(E(\beta)N(\wp^n) - 1\right),$$

где $\wp$– простые элементы из $Z[i]$, а

$$E(\beta) = \begin{cases} 2, & \text{\textit{если}} \ \ \wp^n | \beta, \\ 1, & \text{\textit{если}} \ \ \wp^n \nmid \beta, \end{cases}$$

$$E(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases} N(\wp)\ , & \textit{если}\ \ n=1,\\ 2N(\wp^2)\ , & \textit{если}\ \ n=2,\ \mathrm{Im}(\bar\alpha\beta)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ 0\ , & \textit{если}\ \ n=2,\ \mathrm{Im}(\bar\alpha\beta)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ N(\wp^3)+N(\wp^2)\ , & \textit{если}\ \ n=3,\ \mathrm{Im}(\bar\alpha\beta)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ N(\wp^3)-N(\wp^2)\ , & \textit{если}\ \ n=3,\ \mathrm{Im}(\bar\alpha\beta)\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2),\\ N(\wp^4)+N(\wp^5)+\sum\limits_{6}\ , & \textit{если}\ n=4,\\ N(\wp^n)-N(\wp^5)+\sum\limits_{6}\ , & \textit{если}\ n\geq 5. \end{cases}$$

Здесь $\wp=1+i$ *и* $\wp^n||\gamma$.

Заключение. Нами рассмотрена задача построения точной формулы для числа решений $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ сравнения $\alpha(x^2+y^2)\equiv\beta\ (\mathrm{mod}\ \gamma)$ в кольце целых гауссовых чисел $Z\,[i]$. Пользуясь мультипликативностью функции $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ по γ, задача переформулируется в проблему вычисления специальных тригонометрических сумм, в частности, сумм Гаусса. Результаты подобного рода востребованы в аналитической теории чисел при исследовании аддитивных задач с суммами квадратов целых чисел.

1. **Лидл Р.** Конечные поля / Лидл Р., Нидеррайтер Г. – М. : Мир, 1988. — 428 с.

ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 26–38

Mathematical Subject Classification: 11N25, 11S40
УДК 511

Я. А. Воробьев
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

ПЛОТНОСТНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ Z-ФУНКЦИИ ГЕККЕ ПОЛЯ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Воробйов Я. А. Щiльнiсна теорема для Геке Z-функцiї поля гаусових чисел. В данiй роботi нами вивчено розподiлення нулiв дзета-функцiї Геке в критичнiй областi над полем гаусових чисел $\mathbb{Q}(i)$. Ми отримуємо нетривiальну оцiнку для зета-суми рiвномiрно для m i $Im(s)$. Така оцiнка є аналогом оцiнки зета-суми для дзета-функцiї Римана. Така оцiнка грає важливу роль в побудовi асимптотичної оцiнки для числа нулiв дзета-функцiї Геке. Використовуючи модифiковану лему Хала i метод Хиз-Брауна, ми виводимо аналог щiльнiсної теореми для $Z_m(s)$ третього степеня при умовi $m \neq 0$.
Ключовi слова: дзета-функцiя, число нулiв, полiном Дирихле.

Воробьев Я. А. Плотностная теорема для Z-функции Гекке поля гауссовых чисел. В данной работе изучено распределение нулей дзета-функции Гекке в критической области над полем гауссовых чисел $\mathbb{Q}(i)$. Мы получаем нетривиальную оценку для зета-суммы равномерно для m и $Im(s)$. Данная оценка является аналогом оценки зета-суммы для дзета-функции Римана. Такая оценка играет важную роль в построении асимптотической оценки для числа нулей дзета-функции Гекке. Используя модифицированную лемму Хала и метод Хиз-Брауна, мы выводим аналог плотностной теоремы для $Z_m(s)$ в третьей степени при условии $m \neq 0$.
Ключевые слова: дзета-функция, число нулей, полином Дирихле.

Vorobyov Y. A. Dense theorem for Hecke Z-function over the field of Gaussian numbers. In this work the distribution of zeros in critical strip of the Hecke zeta-function over the Gaussian field $\mathbb{Q}(i)$ is studied. We obtain a non-trivial estimation for zeta-sum of $Z_m(s)$ uniformly in m and $Im(s)$, which is analogue of the estimation of zeta-sum for the Riemann zeta-function. Such estimations play a critical role in construction of the asymptotic estimation for the number of zeros of the Hecke zeta-function. Using the modificated Halas lemma and the method of Heath-Brown we deduce an analogue of the density theorem for $Z_m(s)$ with an exponent three if m is not equal to 0.
Key words: zeta-function, number of zeros, Dirichlet polynomial.

Введение. Знаменитая формула Римана-Монгольдта о числе нетривиальных нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ приводит к плотностной гипотезе

$$N(\sigma, T) \ll T^{2(1-\sigma)+\varepsilon}, \tag{1}$$

где $N(\sigma, T)$ означает число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \Re s \leq 1, \ \ |\Im s| \tag{2}$$

$\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, а постоянная в символе "$\ll$" зависит только от ε.

Эта гипотеза ещё не доказана, но наилучшим приближением к ней есть результат M. Huxley[3]:

$$N(\sigma,T) \ll T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 T. \tag{3}$$

Аналогичную плотностную гипотезу можно рассматривать и для других дзета-подобных функций в конечных расширениях поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Так, из работы D. R. Heath-Brown [2] следует существование абсолютной постоянной C, зависящей от дискриминанта квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d — бесквадратное целое число, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(\sigma,T) \ll T^{\left(\frac{8}{3}+\varepsilon\right)(1-\sigma)} \left(\log T\right)^C. \tag{4}$$

В настоящей работе мы получаем асимптотическую формулу для количества нулей $N_m(\sigma,T)$ в прямоугольнике (2) дзета-функции Гекке $Z_m(s)$, определяемой для $\Re s > 1$ равенством

$$Z_m(s) := \sum_{\omega} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-s}.$$

Для функции $Z_m(s)$ справедливо функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma\left(2|m|+s\right) Z_m(s) = \pi^{-(1-s)}\Gamma\left(2|m|+1-s\right) Z_m(1-s).$$

В основе наших рассмотрений лежат аналоги результатов H. Montgomery, M. Jutila, D. R. Heath-Brown и др. по изучению функции $N(\sigma,T)$ для дзета-функции Римана.

Мы будем использовать следующие стандартные обозначения:

$s=\sigma+it$	комплексное число, $\Re s=\sigma$, $\Im s=t$;
$\mathbb{Z}[i]$	кольцо целых гауссовых чисел $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Z}$, $i^2=-1$;
$\mathbb{Q}(i)$	поле гауссовых чисел $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Q}$;
$N(\omega)$	норма гауссового числа ω, $N(\omega)=a^2+b^2$;
$\arg\omega$	аргумент гауссового числа ω;
$\exp(z)$	$=e^z$;
"$\ll$", "O"	символ Виноградова "$\ll$" и символ Ландау "O" эквивалентны;
$\sum\limits_{\omega}$	означает, что суммирование идет по целым гауссовым ω, отличным от нуля;
$\Gamma(z)$	обозначает Г-функцию Эйлера.

Вспомогательные леммы и предварительные результаты. Сначала приведём некоторые леммы, используемые в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть* $s=\sigma+it$, $-1\le\sigma\le 2$; $m\in\mathbb{Z}$, $m\ne 0$. *Тогда для* $X=\frac{1}{2\pi}\left(t^2+(4m+\sigma)^2\right)$ *имеем*

$$Z_m(s) \ll \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)\le X}} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-s} + O\left(\log\left(t^2+m^2\right)\right).$$

Это утверждения следует из приближённого функционального уравнения для $Z_m(s)$ (например, в форме Лаврика [9]).

Рассмотрим полином Дирихле над $\mathbb{Z}[i]$

$$S_m(s) = \sum_{\substack{\omega \\ N<N(\omega)\le 2N}} a(\omega) e^{4mi \arg \omega}.$$

Пусть $\mathfrak{J}$ — конечное множество комплексных чисел $s = \sigma + it$, для которых $\sigma \geq \sigma_0$, $T_0 \leq t \leq T + T_0$, причём, если s, s' — различные элементы из $\mathfrak{J}$, то для соответствующих значений их мнимых частей имеем $|t - t'| \geq 1$. Тогда из [10] (теорема 7.5) находим

$$\min_{s\in\mathfrak{J}} |S(s)|^2 \ll \mathfrak{J}^{-1} \left(T + N\right) \left(\sum_{N<N(\omega)\le 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right) \left(\log N + 1\right).$$

Нам необходима также следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть μ и ν — положительные постоянные, такие, что*

$$|Z_m(\sigma + it)| \ll \left(t^2 + m^2\right)^{\mu} \left(\log\left(t^2 + m^2\right)\right)^{\nu}$$

равномерно по $\sigma \geq \theta \geq 0$. Тогда в принятых выше обозначениях имеем

$$|\mathfrak{J}| \ll N \left(\sum_{\substack{\omega \\ N<N(\omega\le 2N)}} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right) \cdot \left(\min_{s\in\mathfrak{J}} |S(s)|^2 \right)^{-1} +$$

$$+ N^{\frac{\theta}{\mu}} T \left(\sum_{N<N(\omega)\le 2N} |a(\omega)|^2 N(\omega)^{-2\sigma_0} \right)^{1+\frac{1}{\mu}} \times$$

$$\times \left(\min_{s\in\mathfrak{J}} |S(s)|^2 \right)^{-1-\frac{1}{\mu}} \left(\log\left(T^2 + m^2\right)\right)^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Эта лемма есть аналог модифицированной леммы Halász-Montgomery, доказанной Heath—Brown [2]. Её доказательство проходит по схеме доказательства Heath—Brown.

Из функционального уравнения для $Z_m(s)$ и принципа Фрагмена—Линделёфа следует оценка

$$Z_m(s) \ll (t^2 + m^2)^{\frac{1}{2} - \sigma} \log\left(t^2 + m^2\right),\ 0 \leq \sigma \leq 1,\ |\Im s| = |t| \geq 2. \tag{5}$$

Кроме того, для $\sigma \geq \frac{1}{2}$, $|\Im s| \geq 2$, имеем (см. Р. Кауфман [6])

$$Z_m(s) \ll (t^2 + m^2)^{\frac{1}{6}} (\log\left(t^2 + m^2\right))^4. \tag{6}$$

Поэтому в лемме 2 при $\theta = 0$ можно считать $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 1$, а при $\theta = \frac{1}{2}$ имеем $\mu = \frac{1}{6}$, $\nu = 4$.

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что для* $2 \le N \le t^2 + m^2$

$$\left|\sum_{N(\omega)\le N} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-it}\right| \ll N\exp\left(-C\frac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2}\right).$$

Доказательство. Рассматриваемая сумма есть аналог дзетовой суммы, которая играет ключевую роль в построении оценок дзета-функции Римана в критической полосе. (см. А. А. Карацуба [6], A. Ivič [4]). Мы будем следовать схеме доказательства из книги [5]. Из равенства

$$\log\omega = \log|\omega| + i\arg\omega$$

выводим

$$e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-it} = \exp\left(i(4m\Im\log\omega - 2t\Re\log\omega)\right).$$

Займемся оценкой суммы

$$S(N_1) = \sum_{\substack{N_1 < N(\omega) \le 2N_1 \le N\\ 0 \le \arg\omega \le \frac{\pi}{2}}} \exp\left(i(4m\Im\log\omega - 2t\Re\log\omega)\right). \tag{7}$$

Ясно, что

$$\left|\sum_{N(\omega)\le N} e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-it}\right| \ll \max_{2\le N_1\le \frac{1}{2}N} |S(N_1)|\cdot\log N. \tag{8}$$

В комплексной плоскости рассмотрим решётку L с длиной фундаментальной области ℓ ($\ell > 1$, более точно, значение ℓ определим позднее) так, что центры её ячеек расположены в точках с целыми координатами, а оси параллельны координатным осям. Пусть $L(N_1)$ обозначает наименьшую часть решётки L, содержащую область

$$G(N_1) : \left\{N_1 < N(\omega) \le 2N_1,\ 0 \le \arg\omega \le \frac{\pi}{2}\right\},$$

и пусть $C(N_1)$ — множество центров решётки, лежащих в $G(N_1)$. Обозначим через Δ — фундаментальную область с центром в $(0,0)$.

Мы имеем

$$\begin{aligned} S(N_1) = \sum_{z\in C(N_1)}\sum_{\omega\in\Delta} &\exp\left(i(4m\Im\log(z+\omega) - 2t\Re\log(z+\omega))\right) + \\ &+ O\left(eN_1^{\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Равенство (9) не зависит от выбора расположения центров решётки L. Различных расположений центров решётки может быть не более $([\ell])^2$. Проведём усреднения по всем положениям решётки L. Имеем

$$S(N_1) \ll \frac{1}{\ell^2} \sum_{0\neq z\in C(N_1)} \left| \sum_{\omega\in\Delta} \exp\left(i\left(4m\Im\log\left(1+\frac{\omega}{z}\right) - 2t\Re\left(1+\frac{\omega}{z}\right)\right)\right)\right| + \\ + O\left(\ell N_1^{\frac{1}{2}}\right). \tag{10}$$

Положим

$$\ell = 2\left[N_1^{\frac{5}{11}}\right] + \frac{1}{2}, \;\; r = \left[\frac{11\log(t^2+m^2)}{\log N_1}\right] + 1,$$

$$F_r(x+iy) = \sum_{q=1}^{r} \frac{(-1)^{r-1}}{q}\left(\frac{x+iy}{z}\right)^q, \;\; x, y \in \mathbb{R}, \;\; z \in \mathbb{Q}(i).$$

Тогда для $\omega = x+iy$, $|x| \leq \ell$, $|y| \leq \ell$ мы имеем

$$\exp\left(i\left(4m\Im\log\left(1+\tfrac{\omega}{z}\right) - 2t\Re\log\left(1+\tfrac{\omega}{z}\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(i\left(4m\Im F_r(x+iy) - 2t\Re F_r(x+iy)\right)\right) + O\left((t^2+m^2)^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{\ell}{|z|}\right)^{r+1}\right).$$

Теперь для чётного r простые вычисления дают

$$4m\Im F_r(x+iy) - 2t\Re F_r(x+iy) =$$

$$= \tfrac{(-1)^r t}{r|z|^r}x^r + \left(\tfrac{(-1)^{r-1}2t}{(r-1)|z|^{z-1}} + \tfrac{(-1)^{r-1}4m}{|z|^r}y\right)x^{r-1} +$$

$$+ \left(\tfrac{(-1)^{r-1}2t}{3!(r-2)|z|^{r-2}} + \tfrac{(-1)^{r-2}4m}{|z|^{r-1}}y + \tfrac{(-1)^{r-1}2t(r-1)}{2!|z|^r}y^2\right)x^{r-2} + \cdots$$

$$\cdots + \left(\tfrac{-2t}{|z|} - \tfrac{4m}{|z|^2}y + \cdots + \tfrac{(-1)^{r-1}4m}{|z|^r}y^{r-1}\right)x.$$

Для нечётного r следует заменить x на y, t на $2m$.
Обозначим

$$W = \sum_{|x|\leq\ell}\sum_{|y|\leq\ell} \exp\left(i(4m\Im F_r(x+iy) - 2t\Re F_r(x+iy))\right).$$

И теперь, повторяя рассуждения из книги А. А. Карацубы ([5], 58–59 и 66–69), мы получим утверждение леммы. □

Лемма 4. *В области* $\frac{1}{2} \leq \Re s \leq 1$, $|t| \geq 2$ *справедлива оценка*

$$Z_m(s) \ll (t^2+m^2)^{a(1-\sigma)^{3/2}} \log^4(t^2+m^2), \tag{11}$$

где $a > 1$ — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Пусть $m = 0$. В силу равенства

$$Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s,\chi_4),$$

где $L(s,\chi_4)$ — L-функция Дирихле с неглавным характером по модулю 4, утверждение леммы следует из аналогичных оценок для $\zeta(s)$ и $L(s,\chi_4)$ (см. [4], 160–161).

Пусть $m \neq 0$. Для $N < X = \frac{1}{2\pi}(t^2 + (4m+\sigma)^2)\log(t^2+m^2)$, в силу леммы 1, можем записать

$$\begin{aligned} Z_m(s) = &\sum_{N(\omega)\le N} e^{4mi\arg\omega} N^{-\sigma-it}(\omega) + \\ &+ \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N^{-\sigma-it}(\omega) + O(1) \ll N^{1-\sigma}\sum_{N(\omega)\le N}\frac{1}{N(\omega)} + \\ &+ \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}(N(\omega))^{-\sigma-it} + O(1) = \\ &= \sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}(N(\omega))^{-\sigma-it} + O\left(N^{1-\sigma}\log N\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Положим $N = \left[\exp\left(\left(\log(t^2+m^2)\right)^{2/3}\right)\right]$.

Тогда

$$N^{1-\sigma} \le e^{(1-\sigma)\log N} \le e^{2(q-\sigma)\left(\log(t^2+m^2)\right)^{2/3}},$$

если $(1-\sigma)\left(\log(t^2+m^2)\right)^{2/3} \le 1$.

Если же $(1-\sigma)\left(\log(t^2+m^2)\right)^{2/3} > 1$, то

$$\begin{aligned} (1-\sigma)(\log(t^2+m^2))^2 &\le \left((1-\sigma)\left(log(t^2+m^2)\right)^{2/3}\right)^{3/2} = \\ &= (1-\sigma)^{3/2}\log(t^2+m^2), \end{aligned}$$

а потому

$$N^{1-\sigma} \le (t^2+m^2)^{a(1-\sigma)^{3/2}},\ \text{с некоторой постоянной } a \ge 2. \tag{13}$$

Далее, для выбранного значения N применение частичного суммирования даёт для некоторого $\delta_0 > 0$

$$\begin{aligned} &\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}(N(\omega))^{-\sigma-it} \ll X^{-\sigma}\left|\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}(N(\omega))^{-it}\right| + \\ &+ \int_N^X u^{-\sigma-1}\left|\sum_{N<N(\omega)\le u} e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-it}\right| du. \end{aligned}$$

В силу леммы 4 получаем

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-it} \ll$$

$$\ll N\exp\left(-C\frac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2}+X\exp\left(-C\frac{\log^3 X}{(\log(t^2+m^2))^2}\right)\right).$$

А потому найдётся $\sigma_0>0$ такое, что

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-it} \ll (t^2+m^2)^{1-\sigma_0} \ll X^{1-\sigma_0}.$$

Поэтому, снова используя лемму 4, получаем с некоторым $0<C_1\le C$

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega}N(\omega)^{-\sigma-it} \ll$$

$$\ll X^{1-\sigma-\sigma_0}+\int_N^X u^{-\sigma}\exp\left(-C_1\frac{\log^3 u}{(\log(t^2+m^2))^2}\right)du \ll$$

$$\ll (t^2+m^2)^{(1-\sigma)^{3/2}}+\int_{\log N}^{\log X}\exp\left(v(1-\sigma)-C_1\frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right)dv,$$

если $1-\sigma_1\le\sigma\le 1$ для некоторого малого фиксированного $\sigma_1>0$.

Из выражения подынтегральной функции последнего интеграла видно, что найдётся $0<\varepsilon<C_1$ такое, что

$$\int_{\log N}^{\log X}\exp\left(v(1-\sigma)-C_1\frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right)dv \le$$

$$\le \max_{\log N<v\le\log X}\left\{\exp\left(v(1-\sigma)-(C_1-\varepsilon)\frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\int_{\log N}^{\log X}\exp\left(-\frac{\varepsilon v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}\right)dv\right\}.$$

В интеграле сделаем замену $v^3=u(\log(t^2+m^2))^2$, что даёт

$$\int_{\log N}^{\log X} \ll \int_{\frac{\log^3 N}{(\log(t^2+m^2))^2}}^{\frac{\log^3 X}{(\log(t^2+m^2))^2}} e^{-u}u^{-2/3}(\log(t^2+m^2))^{2/3}du \ll$$

$$\ll (\log(t^2+m^2))^{2/3}\int_0^\infty e^{-u}u^{-2/3}du \ll (\log(t^2+m^2))^{2/3}.$$

Кроме того, функция $f(v)=v(1-\sigma)-(C_1-\varepsilon)\frac{v^3}{(\log(t^2+m^2))^2}$ не возрастает при $v\ge\left(\frac{1-\sigma}{C_1-\varepsilon}\right)^{\frac12}\log(t^2+m^2)$. Поэтому мы получаем для $\log N\ge(\log(t^2+m^2))^{2/3}$

следующую оценку

$$\sum_{N<N(\omega)\le X} e^{4mi\arg\omega} N(\omega)^{-\sigma-it} \ll (t^2+m^2)^{a_1(1-\sigma)^{3/2}} (\log(t^2+m^2))^{b_1}, \qquad (14)$$

где $a_1 > 0$, $0 < b_1 \le 4$.

Теперь из (12)-(14) следует утверждение леммы. □

Основные результаты. В этой секции мы приводим наши основные результаты, связанные с оценкой функции

$$N_m(\sigma, T) := \left\{ \rho \in \mathbb{C}: \ Z_m(\rho) = 0, \ \Re\rho \ge \sigma \ge \frac{1}{2}, \ |\Im\rho| \le T \right\}.$$

Мы будем существенно использовать неравенства (5) и (6) предыдущей секции.

Рассмотрим пару Меллина e^{-x} и $\Gamma(z)$:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z) x^{-z} dz, \ (x > 0).$$

Тогда, полагая $x = \frac{N(\omega)}{Y}$, $Y > 1$, получим

$$e^{-\frac{N(\omega)}{Y}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(z) Y^z N(\omega)^{-z} dz. \qquad (15)$$

Рассмотрим полином Дирихле

$$M_X(s) = \sum_{N(\omega)\le X} a(\omega) N(\omega)^{-s},$$

где $s = \sigma + it$, $\log^2 T \le |t| \le T$, $1 \ll X \le Y \ll T^C$ ($C > 4$ — константа), а коэффициенты $a_m(\omega)$ являются коэффициентами разложения $Z_m^{-1}(s)$ в ряд Дирихле:

$$Z_m(s) = \sum_{\omega} \frac{a_m(\omega)}{N(\omega)^s}, \ \Re s > 1.$$

Очевидно, что

$$a_m(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad N(\omega) = 1; \\ (-1)^k e^{4mi\arg\omega}, & \text{если} \quad \omega = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k, \ \mathfrak{p}_i \text{ — различные неассоции-} \\ & \qquad\quad \text{рованные простые гауссовы числа;} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В дальнейшем X и Y рассматриваются как параметры, зависящие от T, и каждый раз выбираются отдельно.

Ясно, что $Z_m(s)M_X(s) \to 1$, когда $X \to \infty$ при $\sigma > 1$.

Мы имеем, в силу (15),

$$Z_m(s)M_X(s) = \sum_{\omega} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}N(\omega)^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s,z)dz, \tag{16}$$

где $f(s,z) = Z_m(s+z)M_X(s+z)Y^z\Gamma(z)$.

Учитывая выбор $M_X(s)$, мы можем записать правую часть (16) в виде

$$4e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)>X}} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}N(\omega)^{-s}.$$

Для вычисления интеграла в (16) перенесем контур интегрирования на прямую $\Re z = \frac{1}{2} - \sigma < 0$, при этом мы пройдем через два полюса подынтегральной функции в точках $z = 1 - s$ и $z = 0$, если $m = 0$, и единственный простой полюс в точке $z = 0$, если $m \neq 0$.

Мы можем считать, что $m \neq 0$, так как случай $m = 0$ можно рассматривать отдельно, используя известные результаты о распределении нулей $\zeta(s)$ и $L(s,\chi_4)$.

Поэтому из (16) находим

$$\begin{gathered} 4e^{-\frac{1}{Y}} + \sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)>X}} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}N(\omega)^{-s} = \\ = Z_m(s)M_X(s) + \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s,z)dz, \end{gathered} \tag{17}$$

где $a := a(s) = \frac{1}{2} - \Re s = \frac{1}{2} - \sigma$.

Пусть ρ — нуль $Z_m(s)$ в полосе $\frac{1}{2} \leq \Re\rho \leq 1$. Тогда первое слагаемое в правой части (17) исчезает.

Поскольку $|e^{-\frac{1}{Y}} - 1| \leq \frac{1}{4}$ для $Y > 5$, то (17) показывает, что хотя бы одно из выражений

$$\sum_{\substack{\omega \\ N(\omega)>X}} C_m(\omega)e^{-\frac{N(\omega)}{T}}, \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s,z)dz \tag{18}$$

по абсолютному значению ≥ 1.

Обозначим через N_1, N_2 количества различных корней $\rho = \beta + i\gamma$, $\beta \geq \sigma$, $|\gamma| \leq T$, Z-функции Гекке $Z_m(s)$, для которых I-е или II-е выражение в (18) не меньше 1 по абсолютному значению. Из леммы 12 работы J. P. Kubilius [8] видно, что кратность таких корней не превосходит $O(\log(T|m|))$, поэтому заключаем

$$N_m(\sigma,T) \ll (N_1 + N_2)\log(T|m|). \tag{19}$$

Возьмём некоторое η, $0 < \eta < 1$ (позднее его уточним) и положим $X = T^\eta \leq$ $\leq Y \leq T^4$.

Из оценок $Z_m(s)$ (см. формулы (5) и (6)), тривиальной оценки $M_X(s) \ll X$ и формулы Стирлинга для $\Gamma(z)$, видно, что $f(\rho, z)$ допускает оценку

$$|f(\rho, z)| \leq e^{-\frac{1}{2}|\gamma|},$$

если $\Re z = a(\rho)$, $|\Im z| > A \log T$, где A — достаточно большое.

Поэтому существует $B = B(\eta)$ такое, что

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{a \pm iB \log T}^{a \pm i\infty} f(\rho, z) dz \right| \leq \frac{1}{16}. \tag{20}$$

Далее, поскольку при $|z| > \frac{1}{\log T}$, $\Re z = a(\rho)$, выполняется неравенство $|\Gamma(z)| \ll \ll \log T$ (это следует их формулы Стирлинга для $\Gamma(z)$), то мы имеем

$$|M_X(\rho + z) Y^z \Gamma(z)| \ll XY^{a(\rho)} \log T. \tag{21}$$

Поэтому, если первое выражение в (18) не меньше 1, то

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma - B \log T}^{\gamma + B \log T} \left| Z_m\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right| du \gg \left(XY^{a(\rho)} \log T \right)^{-1}, \tag{22}$$

если только $a(\sigma) < -\frac{1}{\log T}$. В противном случае мы имеем тривиально $N(\sigma, T) \ll \ll T^{2(1-\sigma)} \log T$ (см. лемму 6).

Теперь применение неравенства Коши-Шварца даёт

$$\int\limits_{\gamma - A \log T}^{\gamma + A \log T} \left| Z_m\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right|^2 du \gg X^{-2} Y^{-2a(\rho)} (\log T)^{-2}.$$

А потому суммирование по всем корням ρ, дающим вклад в N_2, приводит к оценке

$$\int\limits_{T - A \log T}^{T + A \log T} \left| Z_m\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right|^2 \cdot n(u) du \gg N_2 X^{-2} Y^{-2a(\sigma)} (\log T)^{-2}, \tag{23}$$

здесь $n(u)$ означает количество тех нулей ρ, для которых $|\gamma - u| \leq A \log T$, что в силу леммы 6 даёт $n(u) \ll (\log T)^2$.

Далее, в силу оценки (см. [1], лемма 10)

$$\int\limits_{-T}^{T} \left| Z_m\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \ll (T + |m|) \log^b (T + |m|), \text{ (b-константа)}, \tag{24}$$

левая сторона (23) есть $O(T + |m|)(\log (T + |m|))^{b+2}$.

Сравнение оценок (23) и (24) приводит к неравенству

$$N_2 \ll X^2 Y^{2a(\sigma)} (T + |m|)(\log (T + |m|))^{b+5} \ll (T + |m|)^{1+2\eta} Y^{2\left(\frac{1}{2} - \sigma\right)}. \tag{25}$$

Вывод оценки величины N_1 полностью совпадает с рассуждениями из работы [2], что в принятых нами обозначениях даёт

$$N_1 \ll (T + |m| + N_0) N_0^{1-2\sigma} (\log (T^2 + m^2))^{C_1} \tag{26}$$

и

$$N_1 \ll \left(N_0^{2-2\sigma} + T|m| N_0^{3-4\sigma}\right) (\log (T^2 + m^2))^{C_1}, \tag{27}$$

где параметр N_0 удовлетворяет неравенству

$$Y^\alpha \ll N_0 \ll Y^\alpha (\log (T^2 + m^2)),\ \frac{1}{2} \le \alpha \le 1.$$

Если теперь учесть, что $1 - 2\sigma < 0$, то из (25), (26) получаем

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{1+3\eta} Y^{1-2\sigma} + \left(Y^{1-2\sigma} + T|m| Y^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) \log (TM)^{C_1+1}. \tag{28}$$

Возьмём $Y = (T|m|)^{2(3-2\sigma)^{-1}}$.

Тогда после простых упрощений получим для $\eta = \frac{1}{15}$, $\sigma \ge \frac{2}{3}$

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{4(1-\sigma)}{3-2\sigma}},\ \frac{2}{3} \le \sigma \le \frac{5}{6}.$$

Полагая $Y = (T|m|)^{(\alpha(2\sigma-1))^{-1}}$, $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, находим

$$(TM)^{1+3\eta} Y^{1-2\sigma} = (TM)^{1+3\eta-\frac{1}{\alpha}} \ll T^\varepsilon.$$

Поэтому из (25), (27) получаем для $\frac{5}{6} \le \sigma \le 1 + \varepsilon$

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{2(1-\sigma)}{2\sigma-1}} (\log T|m|)^C.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *В прямоугольнике $\frac{2}{3} \le \sigma \le 1 - \varepsilon$ для $m \ne 0$ справедливы оценки*

$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{4(1-\sigma)}{3-2\sigma}} (\log (T|m|))^C \quad \frac{2}{3} \le \sigma \le \frac{5}{6}.$$
$$N_m(\sigma, T) \ll (T|m|)^{\frac{2(1-\sigma)}{2\sigma-1}} (\log (T|m|))^C \quad \frac{5}{6} < \sigma \le 1 - \varepsilon,$$

с постоянной в символе $'' \ll''$, зависящей только от ε.

В случае $m = 0$ оценки для $N_0(\sigma, T)$ совпадают с оценками функции $N(\sigma, T)$ для дзета-функции Римана (см., например, [4]).

Теперь займемся оценкой $N_m(\sigma, T)$ вблизи прямой $\sigma = 1$.

Теорема 2. *Для $1 - \varepsilon \le \sigma < 1$ имеет место оценка*

$$N_m(\sigma, T) \ll_\varepsilon (T^2 + m^2)^{b(1-\sigma)^{3/2}} \log^C T^2 + m^2,$$

где b и C — абсолютные положительные постоянные.

Это утверждение есть следствие аналога оценки Монтгомери ([10], теорема 12.3)

$$N_m(\sigma,T) \ll \left(\max_{\substack{\alpha\le\sigma\le 1\\ |s-1|\ge 1\\ |\Im s|\le T}} |Z_m(s)| \log^{C_1} T \right)^{\frac{2(1-\sigma)(3\sigma-1-a)}{(2\sigma-1-a)(\sigma-a)}} \log^{C_2}(T+|m|),$$

где C_1, C_2 — положительные постоянные, $\frac{1}{2} \le a \le 1$, $\sigma \ge \frac{1+a}{2}$,
и оценки $Z_m(s)$ из леммы 5.

Следствием теоремы 1 и 2 является "плотностная" теорема

Теорема 3. *Существует абсолютная постоянная $C \ge 1$ такая, что при $\sigma \ge \frac{1}{2}$, $T \ge 2$*

$$N_m(\sigma,T) \ll \begin{cases} (T|m|)^{3(1-\sigma)} \log^C (T|m|), & |m| \ge 1, \\ T^{\frac{12}{5}(1-\sigma)} \log^9 T, & m = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Для $m = 0$ имеем $Z_0(s) = 4\zeta(s)L(s,\chi_4)$, а потому требуемый результат следует известных оценок $N_0(\sigma,T)$, полученных Huxley [3] и Montgomery [10]. Для $m \ne 0$ мы учитываем, что

$$N_m(\sigma,T) \ll T|m| \log T|m| \ll (T|m|)^{3(1-\sigma)} \log T|m|,$$

если $3(1-\sigma) \ge 1$, то есть $\frac{1}{2} \le \sigma \le \frac{2}{3}$.

Для $\frac{2}{3} \le \sigma \le 1-\varepsilon$ требуемый результат даёт теорема 1, ибо полученные там оценки для $\frac{2}{3} \le \sigma \le \frac{5}{6}$ и $\frac{5}{6} \le \sigma \le 1-\varepsilon$ достигают максимума при $\sigma = \frac{5}{6}$. Наконец, для $1-\varepsilon \le \sigma \le 1$ утверждение следует из теоремы 2, если положить $\varepsilon \le 9b^{-2}$. $\square$

В заключение заметим, что усреднённые по параметру m оценки для $N_m(\sigma,T)$ рассматривались в работах Ф. Б. Ковальчик [7] и M. D. Coleman [1].

По методу работы [1] можно получить оценку

$$N_m(\sigma,T) \ll (T|m|)^{\frac{10}{3}(1-\sigma)} \log^1 9T|m|,$$

которая слабее полученной в настоящей работе.

Заключение. Получена нетривиальная оценка для зета-суммы равномерно для m и $Im(s)$, являющаяся аналогом оценки зета-суммы для дзета-функции Римана. Такая оценка играет важную роль в построении асимптотической оценки для числа нулей дзета-функции Геке. Используя модифицированную лемму Хала и метод Хиз-Брауна доказан аналог плотностной теоремы для $Z_m(s)$ в третьей степени при условии $m \ne 0$.

1. **Coleman M. D.** The Rosser-Iwaniec sieve in number fields [text] / Coleman M. D. // Acta Arith. – 1995. – 65. – P. 53–83.
2. **Heath-Brown D. R.** On the density of the zeros of the Dedekind zeta-function [text] / Heath-Brown D. R. // Acta Arith. – 1977. – V. 37. – P. 169–181.
3. **Huxley M.** On the difference between consecutive primes [text] / Huxley M. // Inv. Math. – 1972. – V. 15. – P. 155–164.
4. **Ivič A.** The Riemann zeta-function. Theory and Applications [text] / Ivič A. – N.-Y.; Wiley, 1985.
5. **Карацуба А.А.** Основы аналитической теории чисел [текст] 90/ Карацуба А. А. – М., 1975.
6. **Кауфман Р. М.** Оценка L-функции Гекке гауссового поля на половинной прямой [текст] / Кауфман Р. М. // Запис. научн. семин. Ленингр. отдел. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1979. – 91. – С. 40–51.
7. **Ковальчик Ф. Б.** Плотностные теоремы и распределение в простых секторах и прогрессиях [текст] / Ковальчик Ф. Б. // ДАН СССР. – 1974. – 219. – С. 31–34.
8. **Kubilius J. P.** On a problem in the n-dimensional analytic theory of numbers [text] / Kubilius J. P. // Viliniaus Valst. Univ. Mokslo darbai Fiz. Chem. Moksly. Ser. 4. – 1955. – P. 5–43.
9. **Лаврик А. Ф.** Приближенное функциональное уравнение дзета-функции Гекке мнимого квадратичного поля [текст] / Лаврик А. Ф. // Мат. заметки. – 1967. – 2(5). – С. 475–482.
10. **Монтгомери Г.** Мультипликативная теория чисел [текст] / Монтгомери Г. // – М.: Мир, 1974.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 39–51

Mathematical Subject Classification: 65C10, 11K45, 11L99
УДК 511.338

О. А. Гунявий
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

НАБЛИЖЕННЯ ДРОБОВИХ ЧАСТИН ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ

Гунявий О. А. Наближення дробових частин тригонометричними поліномами. У роботі будується наближення дробових частин при допомозі тригонометричного полінома мінімального степеня.
Ключові слова: дробові частини, ряд Фур'є, тригонометричний ряд, тригонометрична сума.

Гунявый О. А. Приближение дробных долей тригонометрическими многочленами. В работе строится приближение дробных долей при помощи тригонометрического многочлена минимальной степени.
Ключевые слова: дробные доли, ряд Фурье, тригонометрический ряд, тригонометрическая сумма.

Gunyavy O. A. Approximation of the fractional part with help of trigonometric polynomials. In the article approximation is built to the fractional part through the trigonometric polynomial of minimum degree.
Key words: fractional part, Fourier series, trigonometric series, trigonometric sum.

Вступ. При підрахунку кількості цілих точок в різноманітних областях доводиться оцінювати суми у вигляді $\sum\limits_{a<n\le b} \psi(f(n))$, де

$$\psi(x) = \{x\} - 1/2,$$

а $\{x\}$– дробова частина дійсного числа x.

Один з методів розгляду таких сум — це заміна функції $\psi(x)$ тригонометричним рядом

$$\psi(x) = \sum_{\substack{m=-M \\ m\neq 0}}^{M} \frac{e^{-2\pi i m x}}{2\pi i m} + E_M(x),$$

де M обирається настільки великим, щоб похибка $E_M(x)$ була достатньо малою. Подробиці можна знайти, наприклад, в [1] або в [2]. Таким чином задача зводиться до отримання оцінок тригонометричних сум у вигляді

$$\sum_{a<n\le b} e^{2\pi i m f(n)}.$$

Але для похибки $E_M(x)$ виконується оцінка $E_M(x) \ll \min\left\{1, \frac{1}{M\|x\|}\right\}$, де $\|x\|$– відстань до найближчого до x цілого числа. Таким чином, якщо ми хочемо отримати похибку $E_M(x) \ll 1/E$ для $1 \ll E$, то ми змушені обрати $M \gg E/\|x\|$.

Тобто, функція $\psi(x)$ замінюється тригонометричним поліномом, ступінь якого оцінюється як $E/\|x\|$. В цій роботі показано, що функцію $\psi(x)$ можна замінити з похибкою, не більшою за $1/E$, тригонометричним поліномом, ступінь якого оцінюється як $\ln E/\|x\|$.

Основні результати. Отже, отримаємо наступний результат.

Теорема. *Нехай X — така множина дійсних чисел, що*

$$\forall x \in X \quad \|x\| \geq 1/D \ ,$$

де $D \geq 2$. Тоді $\forall E > 2$ існує тригонометричний поліном

$$T_d(x) = \sum_{0<|k|\leq d} a_m e^{-2\pi i k x}$$

степуня $d \ll D \ln E$, такий, що

$$\forall x \in X \quad \psi(x) - T_d(x) \ll 1/E \ .$$

Перед доведенням теореми отримаємо допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай $K(t)$— така функція, що*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad K(t+1) = K(t) = K(-t) \ , \int\limits_0^1 K(t)dt = 1.$$

Нехай $\psi(t) = \{t\} - 1/2$, де $\{t\}$— дробова частина дійсного числа t та

$$S(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K(t)dt.$$

Тоді, функція $S(x)$ є наближенням до функції $\psi(x)$. До того ж

$$\psi(x) - S(x) = \int\limits_{1/2}^{x} K(t)dt.$$

Доведення. Для $t \notin \mathbb{Z}$ $\psi(1-t) = \psi(-t) = -\psi(t)$. Тоді, з визначення функції $S(x)$ та властивостей функції $K(t)$

$$S(1-x) = S(-x) = \int\limits_0^1 \psi(-x+t)K(t)dt =$$

$$= -\int\limits_0^1 \psi(x-t)K(t)dt = -\int\limits_{-1}^0 \psi(x+t)K(-t)dt =$$

$$= -\int\limits_0^1 \psi(x+t)K(-t)dt = -\int\limits_0^1 \psi(x+t)K(t)dt = -S(x),$$

тобто $S(1-x) = S(-x) = -S(x)$. Нехай $x \in [0,1)$, тоді

$$\psi(x+t) - \psi(x) = \left\{\ t : t \in [0, 1-x); \quad t-1 : t \in [1-x, 1]\ \right\},$$

крім того $\psi(x) = \int\limits_0^1 \psi(x)K(t)dt$. Отже, для $x \in [0,1)$

$$S(x) - \psi(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K(t)dt - \int\limits_0^1 \psi(x)K(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (\psi(x+t) - \psi(x))K(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{1-x} tK(t)dt + \int\limits_{1-x}^1 (t-1)K(t)dt = \int\limits_0^1 tK(t)dt - \int\limits_{1-x}^1 K(t)dt.$$

Аналогічно для $x \in (0,1)$

$$S(1-x) - \psi(1-x) = -(S(x) - \psi(x)) = \int\limits_0^1 tK(t)dt - \int\limits_x^1 K(t)dt.$$

Віднімаючи від однієї рівності іншу, отримуємо

$$2(S(x) - \psi(x)) = \int\limits_x^1 K(t)dt - \int\limits_{1-x}^1 K(t)dt = \int\limits_x^{1-x} K(t)dt = 2\int\limits_x^{1/2} K(t)dt,$$

звідки $\psi(x) - S(x) = \int\limits_{1/2}^x K(t)dt$, що і потрібно було довести.

Зауваження 1. *Нехай*

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k t} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2\pi k t = \frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t} -$$

ядро Діріхле для $n \in \mathbb{N}$.

Очевидно, $\forall t \in \mathbb{R} \quad D_n(t+1) = D_n(t) = D_n(-t)$, $\int\limits_0^1 D_n(t)dt = 1$. *Тоді якщо взяти* $S_n(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)D_n(t)dt$, *то*

$$\psi(x) - S_n(x) = \int\limits_{1/2}^x D_n(t)dt.$$

А для інтеграла можна отримати наступну оцінку

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n(t)dt \ll \min\left\{1, \frac{1}{n\|x\|}\right\},$$

де $\|x\|$ — відстань до найближчого від x цілого числа.

Зауваження 2. *Зафіксуємо $m, n \in \mathbb{N}$ та розглянемо функцію*

$$D_n^{2m}(t) = \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} -$$

тригонометричний поліном степуня $2mn$. Позначимо $K_{n,m}(t) = \frac{D_n^{2m}(t)}{a(n,m)}$, де $a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt$. Тоді $\forall t \in \mathbb{R} \quad K_{n,m}(t+1) = K_{n,m}(t) = K_{n,m}(-t)$, $\int\limits_0^1 K_{n,m}(t)dt = 1$, і якщо

$$S_{n,m}(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K_{n,m}(t)dt,$$

то $\psi(x) - S_{n,m}(x) = \int\limits_{1/2}^{x} K_{n,m}(t)dt = \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt$. Таким чином, щоб оцінити похибку $\psi(x) - S_{n,m}(x)$, потрібно оцінити зверху інтеграл $\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt$ та оцінити знизу число $a(n,m)$.

Лема 2 (про оцінку суми $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}}$)**.** *Нехай $q > 0$, тоді*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \begin{cases} q: & \ln q \le -1; \\ 1/\sqrt{|\ln q|}: & -1 \le \ln q \le -1/m; \\ \sqrt{m}: & 0 \le |\ln q| \ll 1/m; \\ q^m/(\sqrt{m}\ln q): & 1/m \ll \ln q \ll 1; \\ q^m/\sqrt{m}: & 1 \ll \ln q. \end{cases}$$

Доведення. Для $\ln q \le -1$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} < \sum_{k=1}^{m} q^k < \frac{q}{1-q} \ll q.$$

Для $0 \le |\ln q| \ll 1/m$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}} \ll \sqrt{m}.$$

Для $1/m \ll |\ln q| \ll 1$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} = \sum_{k\le 1/|\ln q|} \frac{q^k}{\sqrt{k}} + \sum_{1/|\ln q|<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}}.$$

Але

$$\sum_{k\le 1/|\ln q|} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \sum_{k\le 1/|\ln q|} \frac{1}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln q|}}.$$

Якщо $\ln q < 0$, то функція $\frac{q^t}{\sqrt{t}}$ спадає, і тоді

$$\sum_{a<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^a}{\sqrt{a}} + \int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt.$$

А

$$\int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt = \frac{q^t}{\sqrt{t}\ln q}\bigg|_{t=a}^{m} + \frac{1}{2\ln q}\int_a^m \frac{q^t}{t^{3/2}}dt < \frac{q^a}{\sqrt{a}|\ln q|},$$

звідки

$$\sum_{a<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^a}{\sqrt{a}|\ln q|}.$$

Обравши $a = 1/|\ln q|$, отримуємо оцінку

$$\sum_{1/|\ln q|<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln q|}},$$

звідки для $-1 \ll \ln q \ll -1/m$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{|\ln q|}}.$$

Якщо $1/m \ll \ln q \ll 1$ та $\frac{1}{2\ln q} \le t$, то функція $\frac{q^t}{\sqrt{t}}$ зростає. Також для $\frac{1}{2\ln q} < a$

$$\sum_{a<k\le m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}} + \int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt.$$

Але

$$S(a) = \int_a^m \frac{q^t}{\sqrt{t}}dt = \frac{q^t}{\sqrt{t}\ln q}\bigg|_{t=a}^{m} + \frac{1}{2\ln q}\int_a^m \frac{q^t}{t^{3/2}}dt < \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q} + \frac{1}{2a\ln q}S(a),$$

звідки

$$S(a) \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q\left(1 - \frac{1}{2a\ln q}\right)}.$$

Таким чином,

$$S\left(\frac{1}{\ln q}\right) = \int\limits_{1/\ln q}^{m} \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q\left(1-\frac{1}{2}\right)} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q},$$

і тоді

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{1}{\sqrt{\ln q}} + \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q}.$$

Аналогічно, для $1 \ll \ln q$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}} + \int\limits_{1}^{m} \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt = \frac{q^m}{\sqrt{m}} + S(1).$$

Але

$$S(1) = \int\limits_{1}^{m} \frac{q^t}{\sqrt{t}} dt \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q\left(1-\frac{1}{2\ln q}\right)} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}\ln q},$$

звідки

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}} \ll \frac{q^m}{\sqrt{m}}.$$

Збираючи разом всі оцінки, отримуємо остаточний результат.

Лема 3 (про оцінку інтеграла $\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt$)**.** *Для $x \in (0,1)$ справедливі наступні оцінки:*

для $\psi(x) \ll 1/(n\sqrt{m})$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \psi(x);$$

для $1/(n\sqrt{m}) \ll \psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \frac{\psi(x)}{\sqrt{m}} + \frac{1}{n\sqrt{m}};$$

для $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt \ll \frac{1}{m\sqrt{m}\psi(x)\sin^{2m-1}\pi x} + \frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}.$$

Доведення. Нехай для визначеності, $1/2 < x < 1$. Далі оцінимо

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \int\limits_{1/2}^{x} \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} dt.$$

Отже, маємо

$$\frac{1}{2}+\frac{k}{2n+1}\leq x\Leftrightarrow 2n+1+2k\leq 2x(2n+1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2k\leq (2x-1)(2n+1)\Leftrightarrow k\leq \psi(x)(2n+1).$$

Позначимо $x_k=\frac{1}{2}+\frac{k}{2n+1}$, $K=[\psi(x)(2n+1)]$ — ціла частина, тоді

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt=\sum_{k=1}^{K}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} D_n^{2m}(t)dt+\int\limits_{x_K}^{x} D_n^{2m}(t)dt.$$

Далі

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} D_n^{2m}(t)dt>\frac{1}{\sin^{2m}\pi x_{k-1}}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt;$$
$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} D_n^{2m}(t)dt<\frac{1}{\sin^{2m}\pi x_{k}}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt.$$

Але $x_k-x_{k-1}=\frac{1}{2n+1}$ та

$$\sin^{2m}\pi t(2n+1)=\frac{C_{2m}^m}{4^m}+\frac{2}{4^m}\sum_{r=1}^{m}(-1)^r C_{2m}^{m-r}\cos 2\pi tr(2n+1),$$

звідки $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\cos 2\pi tr(2n+1)dt=0$. Таким чином,

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt=\frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)}.$$

Отже

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt<\frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k}+\int\limits_{x_K}^{x} D_n^{2m}(t)dt.$$

Для C_{2m}^m користуємось оцінкою

$$C_{2m}^m=\frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}(1+O(1/m)),$$

яку можна отримати з формули Стірлінга для $\ln\Gamma(s)$.

Аналогічно

$$\int\limits_{x_K}^{x} D_n^{2m}(t)dt<\frac{1}{\sin^{2m}\pi x}\int\limits_{x_K}^{x_{K+1}}\sin^{2m}\pi t(2n+1)dt=$$
$$=\frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)\sin^{2m}\pi x}\ll\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt < \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

З іншого боку,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt > \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_{k-1}} =$$

$$= \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \left(\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + 1 - \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_K}\right) =$$

$$= \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Отже,

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \frac{C_{2m}^m}{4^m(2n+1)} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Крім того,

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\sin^{2m}\pi x_k} = (2n+1)\int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^{2m}\pi t} + O\left(\frac{1}{\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Тоді остаточно

$$\int\limits_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t)dt = \frac{C_{2m}^m}{4^m}\int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^{2m}\pi t} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m}\sin^{2m}\pi x}\right).$$

Позначимо далі

$$I_m(x) = \int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^{2m}\pi t}.$$

Тоді

$$I_m(x) = \int\limits_{1/2}^{x} \frac{\sin^2\pi t + \cos^2\pi t}{\sin^{2m}\pi t}dt = I_{m-1}(x) + \int\limits_{1/2}^{x} \frac{\cos^2\pi t}{\sin^{2m}\pi t}dt.$$

Але

$$\int\limits_{1/2}^{x} \frac{\cos^2 \pi t}{\sin^{2m} \pi t} dt =$$

$$= -\left(\frac{\cos \pi t}{\pi(2m-1)\sin^{2m-1} \pi t} \right)\Bigg|_{t=1/2}^{x} - \frac{1}{2m-1} \int\limits_{1/2}^{x} \frac{\sin \pi t}{\sin^{2m-1} \pi t} dt =$$

$$= -\frac{\cos \pi x}{\pi(2m-1)\sin^{2m-1} \pi x} - \frac{1}{2m-1} I_{m-1}(x).$$

Таким чином,

$$I_m(x) = \frac{m-1}{m-1/2} I_{m-1}(x) - \frac{\cos \pi x}{2\pi(m-1/2)\sin^{2m-1} \pi x}.$$

Крім того,

$$I_1(x) = \int\limits_{1/2}^{x} \frac{dt}{\sin^2 \pi t} = -\left(\frac{\cos \pi t}{\pi \sin \pi t} \right)\Bigg|_{t=1/2}^{x} = -\frac{\cos \pi x}{\pi \sin \pi x}.$$

Отже,

$$I_m(x) = -\frac{\cos \pi x}{2\pi(m-\frac{1}{2})\sin^{2m-1} \pi x} \times \Bigg(1 + \frac{m-1}{m-\frac{3}{2}} \sin^2 \pi x +$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})} \sin^4 \pi x + \ldots + \frac{(m-1)(m-2)\ldots 1}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})\ldots \frac{1}{2}} \sin^{2m-2} \pi x \Bigg).$$

Тобто

$$I_m(x) =$$

$$= -\frac{\cos \pi x}{2\pi(m-\frac{1}{2})\sin^{2m-1} \pi x} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})\ldots(m-k-\frac{1}{2})} \sin^{2k} \pi x.$$

Далі,

$$\ln\left(\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{(m-3/2)(m-5/2)\ldots(m-k-1/2)} \right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{2m-2r-1}\right) = \sum_{r=m-k}^{m-1} \ln\left(1 + \frac{1}{2r-1}\right) =$$

$$= \sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{2r-1} + O\left(\sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{(2r-1)^2} \right).$$

Але

$$\sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{(2r-1)^2} <$$

$$< \frac{1}{(2m-2k-1)^2} - \frac{1}{(2m-1)^2} + \frac{1}{4} \int\limits_{m-k}^{m} \frac{dt}{(t-1/2)^2} \ll \frac{k}{m(m-k)}.$$

Також

$$\sum_{r=m-k}^{m-1} \frac{1}{2r-1} = \sum_{m-k+1/2<r\le m+1/2} \frac{1}{2r-1} + \frac{1}{2m-2k-1} - \frac{1}{2m-1} =$$

$$= \frac{2k}{(2m-2k-1)(2m-1)} + \int\limits_{m-k+1/2}^{m+1/2} \frac{dt}{2t-1} - 2 \int\limits_{m-k+1/2}^{m+1/2} \psi(t) \frac{dt}{(2t-1)^2} =$$

$$= \ln \sqrt{\frac{m}{m-k}} + O\left(\frac{k}{m(m-k)}\right).$$

Таким чином,

$$\ln\left(\frac{(m-1)\dots(m-k)}{(m-3/2)\dots(m-k-1/2)}\right) = \ln\sqrt{\frac{m}{m-k}} + O\left(\frac{k}{m(m-k)}\right).$$

Отже,

$$\frac{(m-1)\dots(m-k)}{(m-3/2)\dots(m-k-1/2)} = \sqrt{\frac{m}{m-k}} + O\left(\frac{k}{\sqrt{m}(m-k)^{3/2}}\right).$$

Тоді

$$I_m(x) \ll \frac{\cos\pi(1-x)}{m\sin^{2m-1}\pi x} \sum_{k=0}^{m-1} \sqrt{\frac{m}{m-k}} \sin^{2k}\pi x =$$

$$= \frac{\sin\pi x \cdot \cos\pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}\sin^{2k}\pi x} = \frac{\sin\pi x\cdot\cos\pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{q^k}{\sqrt{k}},$$

де $q = \sin^{-2}\pi x \ge 1$.

Далі використовуємо результати леми 2. Для x, близьких до $1/2$,

$$\ln q = \ln(\sin^{-2}\pi x) = -2\ln\cos\pi(x-1/2) = -2\ln\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{2}\psi(x)\right) \ll \psi^2 x),$$

а отже,

$$0 \le |\ln q| \ll 1/m \quad \Leftrightarrow \quad \psi^2(x) \ll 1/m \quad \Leftrightarrow \quad \psi(x) \ll 1/\sqrt{m}\ .$$

Тоді, якщо $\psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$, то

$$I_m(x) \ll \frac{\sin\pi x\cdot\cos\pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}\sin^{2k}\pi x} \ll$$

$$\ll \cos\pi\psi(x)\sin\pi\psi(x) \ll \psi(x).$$

Для $1/m \ll \ln q \ll 1$, тобто, коли $1/\sqrt{m} \ll \psi(x) \ll 1$,

$$I_m(x) \ll \frac{\sin \pi x \cdot \cos \pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k} \sin^{2k} \pi x} \ll \frac{\cos \pi(1-x)}{m \sin^{2m-1}(\pi x) \ln(\sin^{-1} \pi x)}.$$

Але

$$\frac{\cos \pi(1-x)}{\ln(\sin^{-1} \pi x)} = \frac{\sin \pi \psi(x)}{-2 \ln(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2} \psi(x))} \ll \frac{1}{\psi(x)},$$

звідки

$$I_m(x) \ll \frac{1}{m \psi(x) \sin^{2m-1} \pi x}.$$

Для $1 \ll \ln q$

$$I_m(x) \ll \frac{\sin \pi x \cdot \cos \pi(1-x)}{\sqrt{m}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k} \sin^{2k} \pi x} \ll$$
$$\ll \frac{\cos \pi(1-x)}{m \sin^{2m-1} \pi x} \ll \frac{1}{m \psi(x) \sin^{2m-1} \pi x}.$$

Збираючи разом отримані оцінки, маємо для

$$\int_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t) dt = \frac{C_{2m}^m}{4^m} I_m(x) + O\left(\frac{1}{n\sqrt{m} \sin^{2m} \pi x}\right):$$

для $\psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$

$$\int_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t) dt \ll \frac{\psi(x)}{\sqrt{m}} + \frac{1}{n\sqrt{m}};$$

для $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$

$$\int_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t) dt \ll \frac{1}{m\sqrt{m}\psi(x) \sin^{2m-1} \pi x} + \frac{1}{n\sqrt{m} \sin^{2m} \pi x}.$$

Крім того, коли $\psi(x) \ll (n\sqrt{m})^{-1}$,

$$\int_{1/2}^{x} D_n^{2m}(t) dt = \int_{1/2}^{x} \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} dt \ll \int_{1/2}^{x} dt \ll \psi(x).$$

Таким чином, лему доведено.

Лема 4 (про оцінку $a(n,m)$ знизу). *Справедлива наступна оцінка*

$$a(n,m) = \int_{0}^{1} D_n^{2m}(t) dt \gg \frac{(2n+1)^{2m-1}}{\sqrt{m}}.$$

Доведення. Маємо для достатньо малого $\delta > 0$

$$a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt \gg \int\limits_0^\delta \left(\frac{\sin \pi t(2n+1)}{\sin \pi t}\right)^{2m} dt \gg$$

$$\gg \int\limits_0^\delta \frac{\left(\pi t(2n+1) + O\left((\pi n t)^3\right)\right)^{2m}}{(\pi t)^{2m}} dt \gg (2n+1)^{2m} \int\limits_0^\delta \left(1 + O\left((\pi n t)^2\right)\right)^{2m} dt \gg$$

$$\gg (2n+1)^{2m} \int\limits_0^\delta \left(1 + O\left(m(nt)^2\right)\right) dt.$$

Взявши $\delta = \frac{1}{\sqrt{m}(2n+1)}$, отримуємо

$$a(n,m) \gg \frac{(2n+1)^{2m-1}}{\sqrt{m}}.$$

Лема 5 (про оцінку для $\psi(x) - S_{n,m}(x)$)**.** *Нехай* $K_{n,m}(t) = \frac{D_n^{2m}(t)}{a(n,m)}$, *де* $a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt$, $S_{n,m}(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K_{n,m}(t)dt$. *Тоді для* $\psi(x) - S_{n,m}(x)$ *справедливі наступні оцінки:*

для $\psi(x) \ll 1/(n\sqrt{m})$

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll \frac{\sqrt{m}}{(2n+1)^{2m-1}} \psi(x);$$

для $1/(n\sqrt{m}) \ll \psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll \frac{|\psi(x)|}{(2n+1)^{2m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2m}};$$

для $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll$$

$$\ll \frac{1}{m|\psi(x)|[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m-1}} + \frac{1}{[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m}}.$$

Доведення. Так як

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) = \int\limits_{1/2}^x K_{n,m}(t)dt = \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^x D_n^{2m}(t)dt,$$

то лема 5 є наслідком леми 3 та леми 4.

Зауваження 3. *Останньою оцінкою варто користуватися тільки у випадку* $(2n+1)\sin \pi x > 1$, *тобто, коли* x *знаходиться достатньо далеко від цілих чисел, а саме для* $1/n \ll \|x\|$. *В іншому випадку користуємось оцінкою*

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) = \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^x D_n^{2m}(t)dt \le \frac{1}{a(n,m)} \int\limits_{1/2}^1 D_n^{2m}(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Доведення. Доведемо далі теорему.

Нехай $n = \left[\frac{eD}{4} + \frac{1}{2}\right]$, тоді $\frac{eD}{4} - \frac{1}{2} < n \le \frac{eD}{4} + \frac{1}{2}$, звідки

$$\frac{eD}{2} < 2n + 1 \le \frac{eD}{2} + 2.$$

До того ж, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin \pi\|x\| \ge 2\|x\|$. Таким чином, $\forall x \in X$

$$(2n+1)\sin(\pi\|x\|) \ge (2n+1)2\|x\| \ge \frac{2(2n+1)}{D} > e.$$

Нехай $m = \left[\frac{1}{2}\ln E\right] + 1$, тоді $\frac{1}{2}\ln E < m \le \frac{1}{2}\ln E + 1$, звідки $E < e^{2m}$.
$K_{n,m}(x) = \frac{D_n^{2m}(x)}{a(n,m)}$, де $a(n,m) = \int\limits_0^1 D_n^{2m}(t)dt$. Беремо $d = 2nm$ та

$$T_d(x) = S_{n,m}(x) = \int\limits_0^1 \psi(x+t)K_{n,m}(t)dt = \sum_{0<|k|\le d} a_k e^{-2\pi ikx},$$

де $d = 2nm = 2\left[\frac{eD}{4} + \frac{1}{2}\right]\left(\left[\frac{1}{2}\ln E\right] + 1\right) \le \left(\frac{eD}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\ln E + 1\right) \ll D\ln E$.

Для оцінки $\psi(x) - T_d(x) = \psi(x) - S_{n,m}(x)$ використовуємо лему 5.

Якщо $\psi(x) \ll 1/\sqrt{m}$, то

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll \frac{|\psi(x)|}{(2n+1)^{2m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2m}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{\sqrt{m}(2n+1)^{2m-1}} + \frac{1}{(2n+1)^{2m}} \ll \frac{1}{\sqrt{m}}\left(\frac{2}{eD}\right)^{2m-1} + \left(\frac{2}{eD}\right)^{2m} =$$
$$= \frac{e}{\sqrt{m}}\frac{1}{e^{2m}(D/2)^{2m-1}} + \frac{1}{e^{2m}(D/2)^{2m}} \ll \frac{1}{e^{2m}} < \frac{1}{E}.$$

Якщо $1/\sqrt{m} \ll \psi(x)$, то

$$\psi(x) - S_{n,m}(x) \ll$$
$$\ll \frac{1}{m|\psi(x)|[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m-1}} + \frac{1}{[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m}} \ll$$
$$\ll \frac{1}{[(2n+1)\sin(\pi\|x\|)]^{2m}} < \frac{1}{e^{2m}} < \frac{1}{E}.$$

Отже, теорему доведено.

Висновки. Таким чином, показано, що функцію $\psi(x)$ можна замінювати тригонометричними поліномами невеликого ступеня. Це дозволяє краще оцінювати суми $\sum\limits_{a<n\le b}\psi(f(n))$.

1. **Бари Н. К.** Тригонометрические ряды [текст] / Бари Н. К. – М. : Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении [текст] / Эдвардс Р. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 264 с.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 52–66

Mathematical Subject Classification: 15A40, 15A04
УДК 512.533, 512.579

А. В. Жучок, Ю. В. Жучок
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка

НАПІВРЕТРАКЦІЇ ДЕЯКИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

Пам'яті професора Віталія Михайловича Усенка присвячується

Жучок А. В., Жучок Ю. В. Напівретракції деяких алгебраїчних систем. При вивченні фактор-напівгруп ефективною є техніка напівретракцій, вперше визначених у роботах В. М. Усенка, яка дозволяє використовувати напівретракції замість гомоморфізмів і мутації замість фактор-напівгруп. З використанням напівретракцій напівгруп суттєво полегшується задача знаходження конгруенцій напівгруп. У цій роботі наведено результати, отримані за допомогою техніки напівретракцій. Розглянуто техніку напівретракцій груп, запропоновану В.М. Усенком. Техніку напівретракцій моноїдів розповсюджено на довільні напівгрупи. У термінах напівретракцій представлено описи Герхарда, Петрича та Сільви ідемпотентних конгруенцій вільної напівгрупи. Визначено поняття напівретракції дімоноїда та наведено приклад застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів. Розглянуто конструкції симетричної 0-категорії та симетричної інверсної 0-категорії. Охарактеризовано один тип напівретракцій симетричної 0-категорії та один тип напівретракцій симетричної інверсної 0-категорії. У термінах матричних напівгруп описано будову мутацій відповідних 0-категорій.
Ключові слова: напівретракція, група, напівгрупа, дімоноїд, симетрична 0-категорія.

Жучок А. В., Жучок Ю. В. Полуретракции некоторых алгебраических систем. При изучении фактор-полугрупп эффективна техника полуретракций, впервые определенных в работах В. М. Усенко, которая позволяет использовать полуретракции вместо гомоморфизмов и мутации вместо фактор-полугрупп. С использованием полуретракций полугрупп существенно облегчается задача нахождения конгруэнций полугрупп. В этой работе приведены результаты, полученные с помощью техники полуретракций. Рассмотрена техника полуретракций групп, предложенная В. М. Усенко. Техника полуретракций моноидов распространена на произвольные полугруппы. В терминах полуретракций представлены описания Герхарда, Петрича и Сильвы идемпотентных конгруэнций свободной полугруппы. Определено понятие полуретракции димоноида и приведен пример применения полуретракций к изучению конгруэнций димоноидов. Рассмотрены конструкции симметрической 0-категории и симметрической инверсной 0-категории. Охарактеризованы один тип полуретракций симметрической 0-категории и один тип полуретракций симметрической инверсной 0-категории. В терминах матричных полугрупп описано строение мутаций соответствующих 0-категорий.
Ключевые слова: полуретракция, группа, полугруппа, димоноид, симметрическая 0-категория.

Zhuchok A. V., Zhuchok Yu. V. Semiretractions of some algebraic systems. The technique of semiretractions which first appeared in the papers of V.M. Usenko is effective to the study of quotient semigroups. It allows to use semiretractions instead of homomorhisms and mutations instead of quotient semigroups. With the help of semiretractions the problem of finding of congruences on semigroups is simplified. In this paper we give

results obtained with the help of the technique of semiretractions. We consider the technique of semiretractions of groups proposed by V.M. Usenko. The technique of semiretractions of monoids is extended to arbitrary semigroups. In terms of semiretractions the descriptions of idempotent congruences on free semigroups obtained in the works of Gerhard, Petrich and Silva are presented. The notion of a semiretraction of a dimonoid is defined and an example of an application of semiretractions to the study of congruences on dimonoids is given. The constructions of a symmetric 0-category and a symmetric inverse 0-category are considered. One type of semiretractions of a symmetric 0-category and one type of semiretractions of a symmetric inverse 0-category are characterized. In terms of matrix semigroups the structure of mutations of the corresponding 0-categories are described.
Key words: semiretraction, group, semigroup, dimonoid, symmetric 0-category.

Вступ. При вивченні фактор-напівгруп ефективною стає техніка напівретракцій, уперше визначених у роботах В.М. Усенка (див., наприклад, [1]), яка дозволяє інтеріоризувати класичні факторизаційні методи використанням напівретракцій замість гомоморфізмів і мутацій замість фактор-напівгруп. З використанням лівих (правих, симетричних) напівретракцій напівгрупи суттєво полегшується задача знаходження правих (лівих, двобічних) конгруенцій цієї напівгрупи. Більш того, ліві (праві, симетричні) напівретракції взаємнооднозначно (з точністю до еквівалентності) відповідають трансверсалям розбиттів напівгруп, які визначаються правими (лівими, двобічними) конгруенціями.

У [2] визначено поняття напівретракції групи, яке узагальнює поняття ретракції (ідемпотентного ендоморфізму) та дозволяє з єдиної точки зору розглядати такі конструкції як довільні розширення груп і загальні добутки. При цьому виникає техніка, аналогічна техніці пірсовської декомпозиції ендоморфізмів прямих добутків.

Відзначимо, що в роботах Герхардта, Петрича і Сільви [3 – 7] описано конгруенції вільної напівгрупи, фактор-напівгрупи за якими є вільними в многовидах напівгруп ідемпотентів. Виявляється, що техніка, яка використовується в цих працях, збігається з технікою напівретракцій напівгруп.

Опираючись на вищезгадані результати, природньо виникає задача поширення поняття напівретракції на інші алгебраїчні структури. Так, у [8] було визначено поняття напівретракції дімоноїда та наведено деякі застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів.

У цій роботі розглянуто техніку напівретракцій груп, напівгруп та дімоноїдів, а також наведено деякі її застосування.

Основні результати.

1. Напівретракції груп. У цьому пункті наведено техніку напівретракцій груп [2], запропоновану В.М. Усенком.

1.1. Загальні зауваження. У п.1 групову операцію будемо позначати зірочкою $*$, зберігаючи мультиплікативне позначення за операцією композиції перетворень. Нейтральний елемент групи G будемо позначати через θ_G (опускаючи нижній індекс у випадках, коли це не викликає непорозумінь), а елемент, протилежний елементу $g \in G$ – через $\bar{g}$ (тобто $g * \bar{g} = \bar{g} * g = \theta_G$). Через ι_G позначимо тотожний автоморфізм групи G (будемо говорити, що ι_G – операторна одиниця групи G), а через o_G – її нульовий ендоморфізм (тобто $go_G = \theta$ для всіх $g \in G$).

Для $g, h \in G$ покладемо $[g; h] = g * h * \overline{g} * \overline{h}$, $hi_g = \bar{g} * h * g$. Символ i_g при цьому будемо трактувати як образ елемента $g \in G$ при канонічному гомоморфізмі

$$i : G \to Int\, G : g \mapsto i_g$$

групи G в групу $IntG$ її внутрішніх автоморфізмів.

Якщо ϕ, ψ – перетворення групи G, то через $\phi * \psi$ будемо позначати їх суму: $g(\phi * \psi) = g\phi * g\psi$, $g \in G$.

Група G називається загальним добутком своїх підгруп U і H, якщо $G = U * H$, $U \bigcap H = \{\theta_G\}$. При цьому говорять, що група G факторизуюча або, що вона факторизується в загальний добуток своїх підгруп. У наш час загальні добутки є одним із основних об'єктів обширної і розгалуженої теорії про властивості груп, що піддаються опису в термінах їх підгруп.

Основні поняття шрейєрової теорії розширень груп будемо використовувати в такій інтерпретації.

Нехай H_1, H_2 – групи, для яких визначено відображення

$$q : H_2 \times H_2 \to H_1 : (x; y) \mapsto (x; y)q,$$

$$\sigma : H_2 \to AutH_1 : x \mapsto \sigma_x,$$

що задовольняють співвідношенням

$$(t; u)q * (t * u; \upsilon)q = (u; \upsilon)q\sigma_t * (t; u * \upsilon)q, t, u, \upsilon \in H_2,$$

$$\sigma_{u*\upsilon} = \sigma_\upsilon \sigma_u i_{\overline{(u;\upsilon)q}}, u, \upsilon \in H_2.$$

Множина $H_1 \times H_2$ в цих умовах перетворюється в групу відносно операції

$$(u_1; \upsilon_1) * (u_2; \upsilon_2) = (u_1 * u_2\sigma_{\upsilon_1} * (u_1; \upsilon_2)q; \upsilon_1 * \upsilon_2),$$

$$u_1, u_2 \in H_1, \upsilon_1, \upsilon_2 \in H_2.$$

Цю групу називають шрейєровим добутком груп H_1 і H_2, який визначається системою факторів $(q; \sigma)$ (або, коротше, шрейєровим $(q; \sigma)$-добутком). Шрейєровий $(q; \sigma)$-добуток груп H_1 і H_2 будемо позначати через $(H_1; H_2)\mathfrak{S}_q^\sigma$.

1.2. Напівретракції. Лівою напівретракцією групи G називається таке її перетворення τ, для якого

$$(x * y)\tau = (x\tau * y)\tau, x, y \in G \tag{1}$$

при будь-яких $x, y \in G$. Якщо ж замість (1) виконується умова

$$(x * y)\tau = (x * y\tau)\tau,$$

то говорять про праву напівретракцію групи G.

Очевидна двоякість понять лівої та правої напівретракцій дозволяє нам обмежитися розглядом лівих напівретракцій.

У множині усіх ідемпотентних перетворень групи G ліві напівретракції характеризуються такою властивістю трансверсальності:

Лема. ([2], лема п.2.1) *Ідемпотентне перетворення τ групи G тоді й лише тоді буде лівою напівретракцією цієї групи, коли існує підгрупа $H \leq G$ така, що*

$$x\tau = y\tau \Leftrightarrow x * \overline{y} \in H,$$

які б не були $x, y \in G$.

Ліва напівретракція τ групи G називається регулярною, якщо $G\tau = Im\tau$ – підгрупа групи G. Перетворення $\tau' = \iota_G * \overline{\tau}$, де ι_G – операторна одиниця групи G (п.1.1), називається доповненням напівретракції τ.

Твердження. ([2], твердження п.2.3) *Ліва напівретракція τ групи G є регулярною тоді й лише тоді, коли її доповнення τ' є правою напівретракцією.*

Теорема. *([2], теорема п.2.4) Для будь-якої групи G наступні твердження є еквівалентними:*

1) група G факторизуюча;

2) існують регулярна права й регулярна ліва напівретракції τ_1 і, відповідно, τ_2 такі, що

$$\tau_1 * \tau_2 = \iota_G, \ \tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 = o_G.$$

Напівретракцією групи G називають таку її ліву напівретракцію τ, яка є також і правою. Іншими словами, перетворення τ групи G називається напівретракцією, якщо при будь-яких $x, y \in G$ виконуються умови:

$$(x * y)\tau = (x\tau * y)\tau,$$

$$(x * y)\tau = (x * y\tau)\tau.$$

Якщо τ – деяка напівретракція групи, то її ядро (за визначенням)

$$Ker\tau = \{x \in G | x\tau = \theta\tau\}$$

є, як не важко перевірити безпосередньо, підгрупою групи G.

Критерій того, що ліва напівретракція є правою, дає

Лема. ([2], лема п.4.1) *Для будь-якої лівої напівретракції τ довільної групи G наступні умови рівносильні*:

1) τ є правою напіретракцією групи G;

2) ядро $Ker\tau$ лівої напівретракції τ є нормальною підгрупою групи G.

Операторні властивості напівретракцій характеризуються так:

Лема. ([2], лема п.4.2) *Перетворення τ тоді й лише тоді є напівретракцією групи G, коли $\theta\tau = \theta$ і*

$$(x * y)\tau = (x\tau * y\tau)\tau$$

для всіх $x, y \in G$.

Якщо τ – напівретракція групи G, то множина $G\tau = Im\tau$ є, як легко перевірити, групою відносно операції

$$x(*_\tau)y = (x * y)\tau, x, y \in Im\tau.$$

Цю групу називають τ-мутацією групи G і позначають через G^τ. Неважко помітити, що $G^\tau \cong G/Ker\tau$. Таким чином, при наявності напівретракції τ для групи G виникає представлення у вигляді шрейєрового добутку (п.1.1) груп $Ker\tau$ і G^τ. Система факторів, що відповідає цьому шрейєровому добутку, визначається рівностями

$$(x; y)q = (x * y)\tau', \ \ x, y \in G\tau, \tag{2}$$

$$\sigma_x = i_{\overline{x}}, \ \ x \in G\tau, \tag{3}$$

де τ' – доповнення напівретракції τ, а через i_g позначено внутрішній автоморфізм групи G, який відповідає елементу $g \in G$ (див. п.1.1).

Якщо, навпаки, $G = (H_1; H_2)\mathfrak{S}_q^\sigma$ – шрейєровий добуток груп H_1 і H_2, то безпосередньо превіряється, що перетворення

$$\tau : G \to G : (u; \upsilon) \mapsto (\theta; \upsilon)$$

є напівретракцією групи G. При цьому

$$H_1 = Ker\tau, \ H_2 = G^\tau$$

і мають місце співвідношення (2), (3).

Твердження. ([2], твердження п.4.3) *Для будь-яких груп G, H_1, H_2 наступні умови еквівалентні*:

1) $G = (H_1; H_2)\mathfrak{S}_q^\sigma$;

2) існує напівретракція τ групи G, для якої $H_1 \cong Ker\tau$, $H_2 = G^\tau$ і для всіх $x, y \in G\tau$ виконуються співвідношення (2), (3).

У [2] відзначено, що за допомогою напівретракцій для шрейєрових добутків вдається отримати аналог теореми п. 3.3 з [2], яка представляє собою узагальнення пірсовської декомпозиції напівгрупи ендоморфізмів прямого добутку груп.

2. Напівретракції напівгруп. У цьому пункті техніку напівретракцій моноїдів [1], запропоновану В.М. Усенком, поширено на довільні напівгрупи. Доведення наведених результатів грунтується на тих самих міркуваннях, що й доведення відповідних результатів роботи [1].

Нехай $Eq(X)$ – множина усіх еквівалентностей довільної множини X, $I\Im(X)$ – множина ідемпотентів симетричної напівгрупи $\Im(X)$. Між множинами $Eq(X)$ та $I\Im(X)$ існує взаємнооднозначна (з точністю до еквівалентності) відповідність, яка полягає в тому, що для будь-якого $\xi \in I\Im(X)$ виконується умова $(x; x\xi) \in \nabla_\xi$, де ∇_ξ – відношення рівнозначності перетворення ξ, тобто

$$\nabla_\varphi = \{(x; y) \,|\, x, y \in X, \, x\varphi = y\varphi\}, \, \varphi \in \Im(X).$$

Таким чином, множина $Im\xi$ перетворення $\xi \in I\Im(X)$ є трансверсаллю розбиття, що визначається відношенням ∇_ξ. Навпаки, якщо образ $Im\xi$ перетворення $\xi \in \Im(X)$ є трансверсаллю розбиття, що визначається деякою еквівалентністю $\pi \in Eq(X)$, причому $(x; x\xi) \in \pi$ для всіх $x \in X$, то $\xi^2 = \xi$, а $\nabla_\xi = \pi$.

Для довільної напівгрупи S важливу роль при цьому відіграє деяка підмножина множини $I\Im(S)$, елементи якої відповідають конгруенціям (можливо однобічним) напівгрупи S.

Перетворення τ напівгрупи S називають лівою напівретракцією, якщо

$$(xy)\tau = (x\tau\, y)\tau \tag{4}$$

для всіх $x, y \in S$. Якщо замість тотожності (4) виконується наступна:

$$(xy)\tau = (xy\tau)\tau, \tag{5}$$

то говорять про праву напівретракцію.

Двоїстість понять лівої та правої напівретракцій є очевидною. Тому у випадку однобічних напівретракцій обмежимося розглядом лівих напівретракцій.

Якщо для $\tau \in \Im(S)$ виконуються обидві тотожності (4), (5), то перетворення τ називають (симетричною) напівретракцією напівгрупи S.

Необхідні та достатні умови, за якими ідемпотентне перетворення напівгрупи є її лівою напівретракцією, дає

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ напівгрупи S є її лівою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення рівнозначності ∇_τ є правою конгруенцією цієї напівгрупи.*

Нехай μ – довільна права конгруенція напівгрупи S, $a \in S$, $[\mu]a = \{s \in \in S \,|\, (a; s) \in \mu\}$. Якщо розглянути деяке фіксоване константне перетворення $e_a \in \in \Im([\mu]a)$ $(se_a = a,\ s \in [\mu]a)$ і покласти $xe = xe_a \Leftrightarrow x \in [\mu]a$ для всіх $x \in S$, то отримаємо ідемпотентне перетворення множини S таке, що $\nabla_e = \mu$. Отже, має місце

Лема. *Для кожної правої конгруенції μ напівгрупи S існує її ліва напівретракція τ така, що $\nabla_\tau = \mu$.*

Ліві напівретракції τ_1, τ_2 напівгрупи S називають еквівалентними, якщо має місце рівність $\nabla_{\tau_1} = \nabla_{\tau_2}$.

Загальну характеристику (симетричних) напівретракцій дає

Твердження. *Для ідемпотентного перетворення π напівгрупи S еквівалентними є твердження*:

1) π є симетричною напівретракцією;

2) π є лівою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією напівгрупи S;

3) π є правою напівретракцією, а відношення ∇_π її рівнозначності є конгруенцією напівгрупи S;

4) для всіх $x, y \in S$ виконується тотожність: $(xy)\pi = (x\pi\, y\pi)\pi$.

Якщо τ – ідемпотентна напівретракція напівгрупи S, то множина $Im\tau$ є напівгрупою відносно операції $x \cdot_\tau y = (xy)\tau,\ x, y \in Im\tau$. Напівгрупу $S^\tau = (Im\tau,\ \cdot_\tau)$ називають τ-мутацією напівгрупи S. Відображення $S \to S^\tau\ : x \mapsto x\tau$ при цьому є гомоморфізмом напівгруп, конгруенція якого, зрозуміло, збігається з відношенням рівнозначності напівретракції.

Навпаки, якщо $\varphi\ : S \to T$ – деякий гомоморфізм напівгруп, Δ_φ – відповідна конгруенція, то, визначивши перетворення $\tau\ : S \to S$ умовами

$$(x;x\tau) \in \Delta_\varphi,\ \ x\tau = y\tau \Leftrightarrow (x;y) \in \Delta_\varphi,$$

отримаємо ідемпотентну напівретракцію напівгрупи S таку, що $S^\tau \cong Im\varphi$.

Таким чином, задача опису конгруенцій напівгруп заданого класу є еквівалентною задачі опису класів еквівалентних напівретракцій. Тобто, знаючи дію напівретракції на напівгрупі, ми можемо побудувати єдину конгруенцію, що їй відповідає, та, навпаки, знаючи будову конгруенції на напівгрупі, можливо задати клас еквівалентних напівретракцій – напівретракцій, відношення рівнозначності за якими збігаються з заданою конгруенцією.

Відзначимо, що напівретракції різних напівгруп та моноїдів розглядалися також у [9 – 19].

3. Напівретракції вільних напівгруп. Роботи Герхардта, Петрича [3 – 5] і Петрича, Сільви [6], [7] присвячені опису відносно вільних напівгруп ідемпотентів. У цих працях знайдено всі перетворення τ вільної напівгрупи такі, що напівгрупи $(Im\tau, *)$ з операціями $x * y = (xy)\tau$ є вільними у многовидах напівгруп ідемпотентів. При цьому виявляється, що такі перетворення є симетричними напівретракціями вільної напівгрупи, а напівгрупи $(Im\tau, *)$ – відповідними мутаціями (див. п.2). Отже техніка напівретракцій напівгруп стає корисною та ефективною при описі конгруенцій вільних напівгруп.

У цьому пункті ми сформулюємо основні результати [7], користуючись термінологією та позначеннями п.2.

Нехай $F^\theta = F^\theta[X]$ – вільний моноїд в алфавіті $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ..\}$, θ – порожнє слово, $F = F[X]$ – вільна напівгрупа в тому ж алфавіті.

Для всіх слів w в алфавіті X покладемо

$c(w)$ – множина елементів $x \in X$, які входять до запису елемента w,

$\vec{w}\quad (\overleftarrow{w})$ – початкове (кінцеве) слово мінімальної довжини слова w, для якого $c(w) = c(\vec{w})\quad (c(w) = c(\overleftarrow{w}))$,

$wf^{'}\quad (wr^{'})$ – остання (перша) літера слова $\vec{w}\quad (\overleftarrow{w})$,

$wf\quad (wr)$ – слово, отримане з $\vec{w}\quad (\overleftarrow{w})$ викресленням літери $wf^{'}\ \ (wr^{'})$,

wg_2 – перша літера слова w,

wk_2 – слово, отримане з w викресленням усіх літер, крім тих, які вперше з'явилися в запису,

$\bar{w}$ – слово, отримане з w записом у зворотньому порядку.

Якщо τ – довільне перетворення напівгрупи $F[X]$ або моноїду $F^\theta[X]$, $w \in\ \in F[X]$, то покладемо $\theta\tau = \theta, w\bar{\tau} = \overline{\bar{w}\tau}$.

Для всіх $w \in F[X]$, $\tau \in \{g, k\}, n > 2$ визначимо індуктивно перетворення τ_n вільної напівгрупи $F[X]$:

$$w\tau_n = (wf\tau_n)(wf^{'})(w\bar{\tau}_{n-1}). \tag{6}$$

Розглянемо далі систему слів $M_2 = x_2x_1, G_2 = x_2, K_2 = x_2x_1x_2$ і для $n > 2$ визначимо індуктивно формули:

$$M_n = x_n\overline{M_{n-1}},\ I_n = M_nx_n\overline{I_{n-1}}, I_m \in \{K_m, G_m\},\ m \geq 2. \tag{7}$$

Відзначимо, що у формулі (6) τ позначає g (відповідно, k) тоді й лише тоді, коли у формулі (7) I позначає G (відповідно, K).

Нехай $M_n = I_n$ та $\overline{M_n} = \overline{I_n}$ – напівгрупові тотожності, $n > 2$.

Теорема. *([7], леми 2.3, 2.4) Будь-яке перетворення $\tau \in \{g_n, k_n | n \geq 2\}$ вільної напівгрупи $F[X]$ є її напівретракцією. При цьому τ-мутація $(F[X])^\tau$ напівгрупи $F[X]$ є вільною напівгрупою у многовиді напівгруп ідемпотентів, визначених тотожністю $M_n = I_n$.*

У двоїстий спосіб отримується

Теорема. *([7], леми 2.3, 2.4) Будь-яке перетворення $\tau \in \{\bar{g}_n, \bar{k}_n | n \geq 2\}$ вільної напівгрупи $F[X]$ є її напівретракцією. При цьому τ-мутація $(F[X])^\tau$ напівгрупи $F[X]$ є вільною напівгрупою у многовиді напівгруп ідемпотентів, визначених тотожністю $\overline{M_n} = \overline{I_n}$.*

Визначимо перетворення μ^τ та δ^τ, $\tau \in \{g_{n+1}, k_n | n \geq 2\}$ вільної напівгрупи $F[X]$ за правилами:

$$w\mu^\tau = (wf\tau)(wf'), \quad w\delta^\tau = (wr')\,(wr\bar{\tau})$$

для всіх $w \in F[X]$.

При цьому будемо вважати, що $\mu^{g_2} = g_2, \quad \delta^{g_2} = \bar{g}_2$.

За допомогою перетворень μ^τ та δ^τ визначимо тепер перетворення $z^{\alpha\beta}$ вільної напівгрупи $F[X]$. Для цього розглянемо множину

$$\begin{aligned} D = \{&(k_{n+1}, k_n), (g_{n+1}, k_n), (g_{n+1}, g_{n+1}), (k_n, g_{n+1}), (k_n, k_{n+1}), \\ &(g_{n+1}, g_n), (k_n, g_n), (k_n, k_n), (g_n, k_n), (g_n, g_{n+1}) | n \geq 2\} \end{aligned}$$

і для кожного $(\alpha; \beta) \in D$ покладемо

$$wz^{\alpha\beta} = w\mu^\alpha w\delta^\beta, \ w \in F[X].$$

Лема. ([7], лема 4.3) *Будь-яке перетворення $z^{\alpha\beta}$ $((\alpha, \beta) \in D)$ вільної напівгрупи $F[X]$ є її напівретракцією.*

Нехай $u = \vartheta$ – напівгрупова тотожність. Через $(u = \vartheta)$ будемо позначати многовид напівгруп, визначених тотожністю $u = \vartheta$. Має місце

Теорема. *([7], теорема 4.6) Якщо $(\alpha_m, \beta_n) \in D$, $\nu = (M_m = A_m) \vee (\overline{M_n} = \overline{B_n})$, то $z^{\alpha_m\beta_n}$-мутація $(F[X])^{z^{\alpha_m\beta_n}}$ напівгрупи $F[X]$ є вільною у многовиді напівгруп ідемпотентів, визначених тотожністю ν.*

Елемент a напівгрупи S назвемо медіальною одиницею, якщо $xax = x$ для всіх $x \in S$. Напівгрупу, кожен елемент якої є медіальною одиницею, назвемо напівгрупою медіальних одиниць.

Наведемо результат, який стосується многовиду напівгруп медіальних одиниць.

Теорема. *([7], твердження 6.2) Відображення*

$$\pi : F[X] \to F[X] \, : \, w \mapsto w\pi = (w\, g_2)\,(w\,\overline{g_2})$$

є напівретракцією вільної напівгрупи $F[X]$. При цьому π-мутація $(F[X])^{\pi}$ напівгрупи $F[X]$ є вільною у многовиді напівгруп медіальних одиниць.

Визначимо індуктивно перетворення b вільної напівгрупи $F[X]$, поклавши

$$\theta\, b = \theta, \; w\, b = (w\, f\, b)(w\, f^{'})(w\, r^{'})(wrb)$$

для всіх $w \in F[X]$.

Теорема. *([7], твердження 6.2) Перетворення b вільної напівгрупи $F[X]$ є напівретракцією такою, що b-мутація $(F[X])^{b}$ напівгрупи $F[X]$ є вільною напівгрупою ідемпотентів.*

Результати роботи [7] не описують напівретракції вільних напівгруп, мутації за якими є вільними в многовидах лівих нормальних напівгруп ідемпотентів, правих нормальних напівгруп ідемпотентів, нормальних напівгруп ідемпотентів, комутативних напівгруп ідемпотентів. Ці напівретракції описано окремо в роботі [14].

4. Напівретракції дімоноїдів. Дімоноїдом [20] називається алгебра з двома асоціативними операціями, що задовольняють деякі три аксіоми (див. нижче). Це поняття було введено Ж.-Л. Лоде для вивчення властивостей алгебр Лейбніца. У випадку, коли операції дімоноїда збігаються, він перетворюється в напівгрупу.

У цьому пункті визначено поняття напівретракції дімоноїда та наведено приклад застосування напівретракцій до вивчення конгруенцій дімоноїдів. Результати цього пункту належать [8].

Нагадаємо, що непорожня множина D з визначеними на ній бінарними асоціативними операціями $\prec$ і $\succ$, які задовольняють умови:

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \succ z),$$

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z),$$

$$(x \prec y) \succ z = x \succ (y \succ z)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. Гомоморфізмом дімоноїда D_1 в дімоноїд D_2 називається відображення $f : D_1 \to D_2$ таке, що

$$(x \prec y)f = xf \prec yf, \;\; (x \succ y)f = xf \succ yf$$

для всіх $x, y \in D_1$.

Перетворення τ дімоноїда D називається лівою напівретракцією, якщо

$$(x \prec y)\tau = (x\tau \prec y)\tau, \tag{8}$$

$$(x \succ y)\tau = (x\tau \succ y)\tau \tag{9}$$

при будь-яких $x, y \in D$. Якщо замість (8), (9) виконуються тотожності

$$(x \prec y)\tau = (x \prec y\tau)\tau, \tag{10}$$

$$(x \succ y)\tau = (x \succ y\tau)\tau, \tag{11}$$

то говорять про праву напівретракцію.

Якщо для перетворення τ дімоноїда D виконуються тотожності (8) – (11), то перетворення τ називається (симетричною) напівретракцією дімоноїда D.

Якщо напівретракція τ дімоноїда $D = (D, \prec, \succ)$ є симетричною, то виникає дімоноїд $D^\tau = (Im\tau, \prec_\tau, \succ_\tau)$, у якому операції визначаються за правилами:

$$x \prec_\tau y = (x \prec y)\tau, \ x, y \in Im\tau,$$
$$x \succ_\tau y = (x \succ y)\tau, \ x, y \in Im\tau.$$

Дімоноїд D^τ називається τ-мутацією дімоноїда D. Неважко помітити, що відображення $\tau^\# : D \to D^\tau \ : x \mapsto x\tau^\# = x\tau$ є гомоморфізмом дімоноїдів.

Відзначимо: якщо операції дімоноїда збігаються, то визначення лівої (правої, двобічної) напівретракції дімоноїда збігається з визначенням лівої (правої, двобічної) напівретракції напівгрупи (див. п.2). Таким чином, поняття напівретракції дімоноїда узагальнює поняття напівретракції напівгрупи.

Наведемо один розв'язок задачі безпосереднього опису напівретракцій дімоноїдів.

Нехай $D = (D, \prec, \ \succ)$ – довільний дімоноїд, I, J – довільні непорожні множини, для яких визначено відображення

$$p : \quad J \times I \to D : (j, i) \mapsto (j, i)p = p_{ji}.$$

Визначимо на множині $D^{'} = I \times D \times J$ операції за правилами:

$$(i, g, j) \prec^{'} (k, h, l) = (i, g \prec p_{jk} \prec h, l)\,,$$

$$(i, g, j) \succ^{'} (k, h, l) = (i, g \succ p_{jk} \succ h, l)\,.$$

Лема. ([8], лема п.3.3) *Алгебра* $(D^{'}, \prec^{'}, \succ^{'})$ *є дімоноїдом.*

Дімоноїд, отриманий таким способом, називається дімоноїдом Ріса й позначається через $D^{'} = D^{'}(I, D, J; p)$.

Нехай $D^{'} = D^{'}(I, D, J; p)$ – дімоноїд Ріса, τ – ідемпотентна напівретракція дімоноїда D, α та β – такі ідемпотенти симетричних напівгруп $\Im(I)$ та, відповідно, $\Im(J)$, що виконується умова:

$$p_{ji} = p_{j\beta\, i\alpha}, \ j \in J, \, i \in I.$$

Нехай далі $D^{''}(I\alpha, D^\tau, J\beta; p^{'})$ – дімоноїд Ріса такий, що

$$p^{'} : J\beta \times I\alpha \to D^\tau : (j\beta, i\alpha) \mapsto (j\beta, i\alpha)p^{'} = p^{'}_{j\beta\ i\alpha} = p_{j\beta\, i\alpha}\tau.$$

Визначимо перетворення $\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}$ дімоноїда $D^{'}$, поклавши

$$(i, a, j)\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]} = (i\alpha, \ a\tau, j\beta)$$

для всіх $(i, a, j) \in D^{'}$.

Теорема. *([8], теорема п.3.4)*
Будь-яке перетворення $\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}$ дімоноїда Ріса $D^{'}$ є напівретракцією, для якої має місце рівність $(D^{'})^{\sigma_\tau^{[\alpha;\beta]}} = D^{''}(I\alpha, D^\tau, J\beta; p^{'})$.

5. Напівретракції симетричних 0-категорій. У цьому пункті описано один тип напівретракцій симетричної 0-категорії та один тип напівретракцій симетричної інверсної 0-категорії. При цьому вивчається будова мутацій відповідних 0-категорій в термінах матричних напівгруп.

Нагадаємо визначення симетричної 0-категорії. Нехай X – довільна непорожня множина, $U(X)$ – множина усіх непорожніх підмножин множини X. Для будь-яких $A, B \in U(X)$ через $Map(A;B)$ позначатимемо множину всіх сюр'єктивних відображень $\varphi : A \to B : x \mapsto x\varphi$ множини A на множину B.

Якщо $\varphi \in Map(A;B)$, то через $Dom\varphi$ будемо позначати область визначення відображення φ, а через $Im\varphi$ – його область значень (образ), тобто $Dom\varphi = A$, $Im\varphi = B$. На множині

$$SymX = \{\varphi \in Map(A;B) | A, B \in U(X)\}$$

природньо визначеною є часткова операція композиції відображень. Якщо $\varphi, \psi \in$ $\in SymX$ такі, що $\varphi \in Map(A;B)$, $\psi \in Map(C;D)$, то про композицію $\varphi\psi$ можна говорити лише у випадку, коли $B \bigcap C \neq \emptyset$, а саме: якщо $M = B \bigcap C \neq \emptyset$, то композицією $\varphi\psi$ відображень φ і ψ називається відображення

$$\varphi|_E \psi|_M : E \to F : x \mapsto x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi,$$

де $E = \varphi^{-1}(M),\ F = \psi(M)$.

На цьому шляху виникає напівгрупоїд (множина з бінарною частковою операцією), який називають напівгрупоїдом часткових перетворень множини X та позначають через $\mathfrak{P}\mathfrak{I}(X)$. Цей напівгрупоїд не є алгебраїчною категорією.

Дійсно, нехай $\varphi \in Map(A;B)$, $\psi \in Map(C;D)$ і $\eta \in Map(E;F)$ такі відображення із $\mathfrak{P}\mathfrak{I}(X)$, що добутки $\varphi\psi$, $\psi\eta$ визначено і $x\psi \notin Dom\eta$ для кожного $x \in B \bigcap C$. Це означає, що $Im\varphi\psi \bigcap E = \emptyset$, тобто добуток $(\varphi\psi)\eta$ відображень $\varphi\psi$ та η не є визначеним. Отже, напівгрупоїд часткових перетворень не є локально асоціативним [21].

Вимоги до визначення композиції $\varphi\psi$ сюр'єктивних відображень $\varphi, \psi \in SymX$, де $\varphi \in Map(A;B)$, $\psi \in Map(C;D)$, можна посилити: вважатимемо композицію $\varphi\psi$ визначеною лише за умови $B = C$. Напівгрупоїд, що при цьому виникає на множині $SymX$, називається симетричною категорією на множині X та позначається через $SymX$.

Симетрична категорія $SymX$ на відміну від напівгрупоїда часткових перетворень є локально-асоціативним напівгрупоїдом.

Дійсно, якщо φ, ψ та η із $SymX$ такі, що добутки $\varphi\psi$, $\psi\eta$ визначено, то $Im\varphi = Dom\psi$, $Im\psi = Dom\eta$. Оскільки $Dom\psi\eta = Dom\psi$, $Im\varphi\psi = Im\psi$, то добутки $(\varphi\psi)\eta$ і $\varphi(\psi\eta)$ є визначеними, при цьому $(\varphi\psi)\eta = \varphi(\psi\eta)$.

Якщо напівгрупоїд $\mathfrak{P}\mathfrak{I}(X)$ часткових перетворень множини X доповнити зовнішнім анулятором 0 і для всіх $\varphi \in Map(A;B)$, $\psi \in Map(C;D)$ таких, що $B \bigcap C \neq \emptyset$, покласти $\varphi\psi = 0$, то отримаємо напівгрупу $\mathfrak{P}\mathfrak{I}^0(X) = \mathfrak{P}\mathfrak{I}(X) \bigcup \{0\}$, яка називається напівгрупою часткових перетворень множини X.

Виявляється, що напівгрупа $\mathfrak{P}\Im^0(X)$ не є 0-категорійною [22], оскільки для тотожнього перетворення i_X множини X та відображень $\varphi \in Map(A;A)$, $\psi \in \in Map(B;B)$, де $A = \{a\}, B = \{b\}$ $(a, b \in X, a \neq b)$, маємо: $\varphi i_X \neq 0$, $i_X\psi \neq 0$, $\varphi i_X \psi = 0$.

Приєднуючи до симетричної категорії $SymX$ зовнішній нуль 0 і довизначивши операцію композиції $\varphi\psi$ за правилом: $\varphi\psi = 0$, коли $B \neq C$, отримаємо групоїд, який називається симетричною 0-категорією на множині X і позначається через Sym^0X.

На відміну від напівгрупи часткових перетворень, симетрична 0-категорія є категорійною в нулі напівгрупою, що перевіряється безпосередньо. Відзначимо, що деякі структурні властивості симетричної 0-категорії та її піднадпівгрупи – симетричної інверсної 0-категорії, вивчалися в [21], [23].

Нехай X – довільна непорожня множина. Визначимо бінарне відношення λ на множині $U(X)$ таким способом:

$$(A; B) \in \lambda \Leftrightarrow |A| \geq |B|.$$

Підмножину T із Sym^0X, де $0 \notin T$, назвемо λ-системою (ненульових) представників даної напівгрупи, якщо для всіх $(A;B) \in \lambda$ існує лише один елемент $\varphi \in Map(A;B)$, для якого $\varphi \in T$. Якщо T – деяка λ-система представників Sym^0X і $\psi \in T \bigcap Map(A;B)$, де $(A;B) \in \lambda$, то представника ψ позначатимемо через ψ_{AB}.

Через T_X позначимо множину всіх λ-систем представників Sym^0X. Визначимо перетворення $\delta_T \in \Im(Sym^0X)$, де $T \in T_X$, поклавши $\delta_T(0) = 0$ та

$$\delta_T(\varphi) = \varphi_{AB} \Leftrightarrow \varphi \in Map(A;B) \quad ((A;B) \in \lambda)$$

для кожного $\varphi \in Sym^0X$, $\varphi \neq 0$.

Лема. *Перетворення δ_T є напівретракцією напівгрупи Sym^0X при будь-якому $T \in T_X$.*

Доведення. Нехай $\varphi, \psi \in Sym^0X$. Якщо хоча б один з цих елементів дорівнює нулю або $\varphi, \psi \in Sym^0X$ такі, що $\varphi \neq 0 \neq \psi$ і $Im\varphi \neq Dom\psi$, то

$$\delta_T(\varphi\psi) = \delta_T(0) = \delta_T(\delta_T(\varphi)\delta_T(\psi)).$$

В інших випадках, тобто коли $\varphi, \psi \in Sym^0X$ такі, що $\varphi \neq 0 \neq \psi$ та $Im\varphi = Dom\psi$, отримуємо:

$$\delta_T(\varphi\psi) = (\varphi\psi)_{Dom\varphi\psi\ Im\varphi\psi} = \eta_{Dom\varphi\ Im\psi}, \text{де } \eta = \varphi\psi,$$

$$\delta_T(\delta_T(\varphi)\delta_T(\psi)) = \delta_T(\varphi_{Dom\varphi\ Im\varphi}\psi_{Dom\psi\ Im\psi}) = \delta_T(\phi) = \phi_{Dom\varphi\ Im\psi},$$

$$\text{де } \varphi_{Dom\varphi\ Im\varphi}\psi_{Dom\psi Im\psi} = \phi \in Map(Dom\varphi; Im\psi),$$

звідки $\eta_{Dom\varphi\ Im\psi} = \phi_{Dom\varphi\ Im\psi}$.

Лему доведено.

Нехай $M = X \times X$, 0 – зовнішній елемент, тобто $0 \notin M$. На множині $M^0 = = (X \times X) \bigcup \{0\}$ визначимо операцію за правилом:

$$(a;b)(c;d) = \begin{cases} (a;d), & b = c, \\ 0, & b \neq c, \end{cases}$$

$$(a;b)0 = 0(a;b) = 00 = 0.$$

Множина M^0 з такою операцією є напівгрупою з нулем, оскільки напівгрупоїд M задовольняє умовам Конрада (див. [22]). Отриману напівгрупу назвемо матричною напівгрупою та позначимо через M_X^0.

Відзначимо, що матрична напівгрупа M_X^0 є напівгрупою Брандта [22].

Якщо ρ – деяке транзитивне бінарне відношення на множині X, то множина ρ^0, де $\rho^0 = \rho \bigcup \{0\}$, є піднапівгрупою матричної напівгрупи M_X^0. Цю піднапівгрупу будемо позначати $M_X^0(\rho)$.

Твердження. *Для будь-якої напівретракції δ_T напівгрупи Sym^0X δ_T-мутація $(Sym^0X)^{\delta_T}$ є ізоморфною напівгрупі $M_{U(X)}^0(\lambda)$.*

Доведення. Визначимо відображення

$$f : (Sym^0X)^{\delta_T} \to M_X^0(\lambda) : \varphi_{AB} \mapsto f(\varphi_{AB}), \text{де}$$

$$f(\varphi_{AB}) = \begin{cases} (A;B), & \varphi_{AB} \neq 0, \\ 0, & \varphi_{AB} = 0, \end{cases}$$

яке, як неважко пересвідчитися, є гомоморфізмом.

Дійсно, при будь-яких φ_{AB}, $\varphi_{CD} \in (Sym^0X)^{\delta_T}$, $\varphi_{AB} \neq 0 \neq \varphi_{CD}$ матимемо:

$$f(\varphi_{AB}\, \varphi_{CD}) =$$

$$= \begin{cases} f(\varphi_{AD}) = (A;D) = (A;B)(C;D) = f(\varphi_{AB})\, f(\varphi_{CD}), & B = C, \\ f(0) = 0 = (A;B)(C;D) = f(\varphi_{AB}) f(\varphi_{CD}), & B \neq C. \end{cases}$$

Якщо принаймні один з елементів φ_{AB}, $\varphi_{CD} \in (Sym^0X)^{\delta_T}$ дорівнює 0, то перевірка тотожності гомоморфізму для f є тривіальною. Крім цього, відображення f є біекцією.

Твердження доведено.

Через $BSym^0X$ позначимо підмножину із симетричної 0-категорії Sym^0X, яка складається з усіх взаємнооднозначних часткових перетворень множини X в об'єднанні з нулем, тобто

$$BSym^0X = \{\varphi \in Sym^0X | \varphi = 0 \ \vee \ (\varphi \neq 0,\ \varphi - \text{біекція})\}.$$

Неважко помітити, що $BSym^0X$ є піднапівгрупою напівгрупи Sym^0X. Її називають симетричною інверсною 0-категорією на множині X (див., наприклад, [23]).

Нехай μ – відношення рівнопотужності на множині $U(X)$. Підмножину H із $BSym^0X$, де $0 \notin T$, назвемо μ-системою (ненульових) представників цієї напівгрупи, якщо для всіх $(A;B) \in \mu$ існує лише один елемент $\psi \in Map(A;B)$, для якого $\psi \in H$. Якщо H – μ-система представників $BSym^0X$ і $\psi \in H \bigcap Map(A;B)$, де $(A;B) \in \mu$, то представника ψ позначатимемо через ψ_{AB}.

Позначимо через H_X множину всіх μ-систем з $BSym^0X$ і визначимо перетворення $\delta_H \in \Im(BSym^0X)$, де $H \in H_X$, поклавши $\delta_H(0) = 0$ та

$$\delta_H(\psi) = \psi_{AB} \Leftrightarrow \psi \in Map(A;B) \quad ((A;B) \in \mu)$$

для кожного $\psi \in BSym^0X,\ \psi \neq 0$.

Твердження. *Для будь-якого $H \in H_X$ перетворення δ_H є напівретракцією напівгрупи $BSym^0X$ такою, що δ_H-мутація $(BSym^0X)^{\delta_H}$ ізоморфна напівгрупі $M^0_{U(X)}(\mu)$.*

Доведення. Аналогічно тому як в попередній лемі можна довести, що δ_H є напівретракцією напівгрупи $BSym^0X$ при будь-якому $H \in H_X$. Крім того, безпосередньою перевіркою можна переконатися, що відображення $f : (BSym^0X)^{\delta_H} \to$ $\to M^0_{U(X)}(\mu)$, яке визначається умовою:

$$f(\psi_{AB}) = \begin{cases} (A;B), & \psi_{AB} \neq 0, \\ 0, & \psi_{AB} = 0 \end{cases}$$

для кожного $\psi_{AB} \in (BSym^0X)^{\delta_H}$, є ізоморфізмом.

Твердження доведено.

Висновки. У роботі розглянуто застосування техніки напівретракцій, запропонованої В. М. Усенком, до вивчення таких алгебраїчних систем як групи, напівгрупи та дімоноїди.

1. **Усенко В. М.** Напівретракції моноїдів [текст] / Усенко В. М. // Труды ИПММ. – 2000. – Т. 5. – С. 155–164.
2. **Усенко В. М.** О полуретрациях групп [текст] / Усенко В. М. // Вопросы алгебры. Изд-во Гомельс. ун-та. – 1997. – Т. 11. – С. 151–169.
3. **Gerhardt J. A.** Free bands and free *-bands [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Glasgow Math J. – 1986. – 28. – P. 161–179.
4. **Gerhardt J. A.** Certain characterizations of varieties of bands [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1988. – 31. – P. 301–319.
5. **Gerhardt J. A.** Varieties of bands revisited [text] / Gerhardt J. A., Petrich M. // Proc. London Math. Soc. – 1989. – 58 (3). – P. 323–350.
6. **Petrich M.** Relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Comm. in Algebra. – 2000. – 28 (5). – P. 2615–2631.
7. **Petrich M.** Structure of relatively free bands [text] / Petrich M., Silva P. V. // Commun. Algebra. – – 2002. – 30, № 9. – P. 4165–4187.
8. **Жучок А. В.** Напівретракції дімоноїдів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. – 2008. – Вып. 17. – С. 42–50.
9. **Усенко В. М.** Полуретракции моноидов [текст] / Усенко В. М. // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л. А. Калужніна. – Вінниця: ВДПУ, 1999. – С. 120–121.

10. **Усенко В. М.** Напівретракції та симетричні зображення [текст] / Усенко В. М. // Вісник Київ. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 81–85.
11. **Жучок Ю. В.** Деякі напівретракції вільних напівгруп [текст] / Жучок Ю. В., Жучок А. В. // Наукова молодь: Збірник праць молодих вчених. Луганськ: ЛНДПУ. – 2005. – Т. 2. – С. 148–153.
12. **Жучок А. В.** Напівретракції вільних моноїдів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. – 2005. – Вып. 11. – С. 81–88.
13. **Жучок А. В.** Свободные полугруппы идемпотентов [текст] / Жучок А. В. // Известия Гомельского ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – №4(19). – С. 55–58.
14. **Жучок А. В.** Вільні нормальні напівгрупи ідемпотентів [текст] / Жучок А. В. // Труды ИПММ. – 2006. – Вып. 12. – С. 57–62.
15. **Жучок А. В.** Що таке напівретракція напівгрупи [текст] / Жучок А. В. // Освіта Донбасу. – 2008. – № 1 (126). – С. 66–71.
16. **Жучок А. В.** Про один клас напівретракцій вільних моноїдів [текст] / Жучок А. В. // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз-мат науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 50–53.
17. **Жучок Ю. В.** Про деякий клас напівретракцій [текст] / Жучок Ю. В. // Пошуки і знахідки. Матеріали наукової конференції Слов'янського держ. пед. ун-ту. – Слов'янськ, 2004. – Вип. 3. – С. 35–37.
18. **Кизименко А. М.** Свободные полугруппы и прямоугольные связки [текст] / Кизименко А. М. // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л. А. Калужніна. – Вінниця : ВДПУ, 1999. – С. 85.
19. **Кизименко А. М.** Свободные полугруппы и комутативные связки [текст] / Кизименко А. М. // II Міжнародна алгебр. конф. в Україні, присв. пам'яті проф. Л. А. Калужніна. – Вінниця: ВДПУ, 1999. – С. 84–85.
20. **Loday J.-L.** Dialgebras [text] / Loday J.-L. // Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math. – 1763. – Springer-Verlag, Berlin, 2001. – P. 7–66.
21. **Жучок Ю. В.** Декомпозиції напівгруп з нулем [текст] / Жучок Ю. В. // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 7–13.
22. **Клиффорд А.** Алгебраическая теория полугрупп [текст] / Клиффорд А., Престон Г. М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 185 с.; Т. 2. – 422 с.
23. **Жучок Ю. В.** Група автоморфізмів симетричної інверсної 0-категорії [текст] / Жучок Ю. В. // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Т. 2. – С. 57–61.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 67–74

Mathematical Subject Classification: 65C10, 11K45
УДК 511.33

О. В. Савастру
Одесский национальний университет имени И. И. Мечникова

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТИ $U^2 + V^2 = N^3$ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Савастру О. В. Про розподіл цілих точок на поверхні $u^2 + v^2 = n^3$ в арифметичній прогресії. У роботі побудована асимптотична формула для суматорної функції, яка позначає кількість цілих точок, розташованих на поверхні $u^2 + v^2 = n^3$. Дослідженням цієї проблеми займалися Kühleitner M. и Nowak W. У статті розглядається діофантове рівняння у випадку, коли $0 < n \le x$, x – зростаючий параметр, $n \equiv l \pmod q$, $(l, q) = 1$. Користуючись загальною схемою оцінки середніх значень рядів Дирихле, отримана оцінка для середньої кількості цілих розв'язків вказаного рівняння, яка нетривіальна при $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\log x)^{-4}$.
Ключові слова: асимптотична формула, діофантові рівняння, L-функція Дирихле, арифметична прогресія.

Савастру О. В. О распределении целых точек на поверхности $u^2+v^2 = n^3$ в арифметической прогрессии. В работе построена асимптотическая формула для сумматорной функции, обозначающей количество целых точек, лежащих на поверхности $u^2+v^2 = n^3$. Исследованием этой проблемы занимались Kühleitner M. и Nowak W. В статье рассматривается диофантово уравнение в случае, когда $0 < n \le x$, x – растущий параметр, $n \equiv l \pmod q$, $(l, q) = 1$. Используя метод производящих рядов Дирихле, общую схему оценки средних значений этих рядов, получена оценка для среднего количества целочисленных решений указанного уравнения, которая нетривиальная при $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\log x)^{-4}$. Вычислимые константы в главном члене зависят только от q.
Ключевые слова: асимптотическая формула, диофантовы уравнения, L-функция Дирихле, арифметическая прогрессия.

Savastru O. V. About the distribution of integer points on the surface $u^2 + v^2 = n^3$ in an arithmetic progression. The aim of our paper is to construct the asymptotic formula for the summatory function, that denote the number of integer points on the surface $u^2 + v^2 = n^3$. This problem was investigated by Kühleitner M. and Nowak W. We consider this diophantine equation in an arithmetic progression, when $0 < n \le x$, x is a large parameter, n in residue class $l \pmod q$, $(l, q) = 1$. The proof of theorem is based on the method of generating Dirichlet series. Using the Phragmen-Lindelöf theorem and the general scheme of the estimation of the mean values of Dirichlet series we obtained the non-trivial result for the average number of integer solutions of the above equation for $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon} (\log x)^{-4}$. The computable constants in main term depend only of q. The analogical result can be proved in general case, when $(l, q) > 1$.
Key words: asymptotic formula, diophantine equation, L-Dirichlet function,arithmetic progression.

Введение.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение функцию $A_k(x)$, обозначающую количество целочисленных решений диофантового уравнения

$$u^2 + v^2 = n^k, \tag{1}$$

при условии $0 < n \leq x$. Тогда

$$A_k(x) = \sum_{n \leq x} r(n^k), \tag{2}$$

где $r(n)$ обозначает количество представлений положительного целого числа n в виде суммы двух квадратов целых чисел.

Сумматорные функции такого вида при $k = 2$ изучались в работах [1], [5]. В работе [1] также рассматривался вопрос о числе решений уравнения (1) при $k > 2$.

Fischer K.H. [8], Kühleitner M., Nowak W. [10] и Recknagel W. [11] исследовали распределение целых точек на соответствующей поверхности при $k = 3$. В работе Варбанца П.Д. [12] была построена асимптотическая формула для числа примитивных точек на эллиптических конусах в арифметической прогрессии. Поэтому естественным образом возник вопрос решения подобной задачи на поверхности (1) при $k = 3$.

Целью данной работы является построение асимптотической формулы для сумматорной функции $A_3(x, l, q)$, обозначающей число целых точек (u, v, n), лежащих на поверхности $u^2 + v^2 = n^3$, при условии $n \leq x$,
$n \equiv l \pmod q$, где $l, q \in \mathbb{N}$, $(l, q) = 1$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие стандартные обозначения:
$s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $\sigma = \Re s$, $t = \Im s$;
(a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b;
$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана;
$L(s, \chi_4)$ – L-функция Дирихле с неглавным характером по $\bmod 4$;
χ – характер Дирихле по $\bmod q$;
χ_0 – главный характер Дирихле по $\bmod q$;
$\sum\limits_{\chi}$ – сумма по всем характерам по $\bmod q$;
$\sideset{}{'}\sum\limits_{\chi'}$ – сумма по всем примитивным характерам χ' по $\bmod q$;
$\tau(n)$ – функция числа делителей;
$\varphi(n)$ – функция Эйлера;
символ Виноградова $'' \ll ''$ означает то же, что и символ Ландау $''O''$.

Основные результаты.

1. Вспомогательные утверждения.

Приведем некоторые вспомогательные утверждения, используемые в дальнейшем.

Пусть $L(s, \chi)$ – L-функция Дирихле с характером по $\bmod q$

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \qquad \Re s > 1.$$

Хорошо известно, что $L(s,\chi)$ является целой функцией (см., например, [4]), если $\chi\neq\chi_0$. В случае $\chi=\chi_0$ L-функция Дирихле $L(s,\chi_0)$ аналитична во всей комплексной s-плоскости, кроме точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом $\frac{\varphi(q)}{q}=\Pi_{p|q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Рассмотрим поведение функции $L(s,\chi)$ в области
$\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1+\frac{1}{\log T}$, $2\leq|t|\leq T$.

Лемма 1. *При* $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1+\frac{1}{\log T}, 2\leq|t|\leq T$, *справедлива оценка*

$$L(s,\chi)\ll_\chi (q|t|)^{\frac{1-\sigma}{2}}(\log T). \tag{3}$$

Доказательство. Для произвольного примитивного характера χ по $\mod q$ при $s=\frac{1}{2}+it$ имеет место следующая оценка ([9])

$$L(s,\chi)\ll(q|s|)^{\frac{1}{4}}. \tag{4}$$

При $s=1+\frac{1}{\log T}+it$

$$L(s,\chi)\ll\log T. \tag{5}$$

Теперь из (4) и (5) на основании принципа Фрагмена-Линделефа для
$\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1+\frac{1}{\log T}, 2\leq|t|\leq T$ получаем

$$L(s,\chi)\ll(q|t|)^{\frac{1+\frac{1}{\log T}-\sigma}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log T}}}(\log T)^{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log T}}}\ll$$

$$\ll(q|t|)^{\frac{1-\sigma}{2}}(qT)^{\frac{C}{\log T}}(\log T),$$

где $C>0$. Учитывая, что при $q,T\ll x^A$, где $0\leq A<1$, справедлива оценка $q^{\frac{C}{\log T}}=O(1)$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Если* $|T|\geqslant 2$, $q\geqslant 2$, *тогда при* $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq 1+\frac{1}{\log T}$

$$\sum_{\chi}{}'\int_{-T}^{T}|L(\sigma+it;\chi)|^4dt\ll\varphi(q)T\log^4(qT). \tag{6}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы Монтгомери ([3], с.77) и теоремы Габриэла о выпуклости среднего значения по двум переменным ([6], с.238).

Исходя из определения сумматорной функции $A_3(x,l,q)$, ее можно представить в виде

$$A_3(x,l,q)=\sum_{\substack{n\equiv l \pmod q\\ n\leq x}} r(n^3). \tag{7}$$

Тогда в области $\Re s > 1$ имеем

$$F(s) = \sum_{\substack{n\equiv l \pmod q\\ n\le x}}^{\infty} \frac{r(n^3)}{n^s} = \frac{4}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{r(n^3)}{4}\chi(n)}{n^s}.$$

Как известно, $\frac{1}{4}r(n)$ является мультипликативной функцией. Если p – простое число, то она принимает следующие значения

$$\frac{1}{4}r(p^\alpha) = \begin{cases} \alpha+1, & \text{если } p\equiv 1 \pmod 4, \\ 1, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4, \quad \alpha - \text{четное}, \\ 0, & \text{если } p\equiv 3 \pmod 4, \quad \alpha - \text{нечетное}, \\ 1, & \text{если } p=2. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда в области $\Re s > 1$ имеем

$$F(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{r(n^3)}{4}\chi(n)}{n^s}.$$

Покажем, что справедливо следующее равенство

$$F(s,\chi) = \left(L(s,\chi)L(s,\chi\chi_4)\right)^2 G(s,\chi), \tag{9}$$

где $G(s,\chi)$ – регулярна в области $\Re s > \frac{1}{2}$.

Действительно,

$$\begin{gathered} F(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \frac{\frac{r(p^3)}{4}\chi(p)}{p^s} + \frac{\frac{r(p^6)}{4}\chi(p)}{p^{2s}} + \dots\right) = \left(1+\tfrac{1}{2^s}+\dots\right) \times \\ \times \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \left(1 + \frac{4\chi(p)}{p^s} + \frac{7\chi(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \left(1 + \frac{\chi(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\chi(p^4)}{p^{4s}} + \dots\right) = \\ = \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \cdot \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1+2\frac{\chi(p)}{p^s}}{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1-\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2}. \end{gathered} \tag{10}$$

С другой стороны

$$\begin{gathered} L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4) = \left(\prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}\right)^2 \times \\ \times \left(\prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{1+\frac{\chi(p)}{p^s}}\right)^2 = \\ = \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \frac{1}{\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^4} \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\right)^2}. \end{gathered}$$

Подставляя в (10), получаем

$$\begin{gathered} F(s,\chi) = L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^s}} \times \\ \times \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} \left(1+2\frac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2 \cdot \prod_{p\equiv 3 \pmod 4} \left(1-\left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\right) = \\ = L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4)G(s,\chi), \end{gathered}$$

где

$$G(s,\chi)=\tfrac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\times$$
$$\times\prod_{p\equiv 1(\bmod 4)}\left(1+2\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right)\left(1-\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\cdot\prod_{p\equiv 3(\bmod 4)}\left(1-\left(\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right)^2\right). \tag{11}$$

Таким образом, в области $\Re s>1$

$$F(s)=\frac{4}{\varphi(q)}\sum_{\chi}\overline{\chi}(l)L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4)G(s,\chi). \tag{12}$$

2. Основная теорема.

Воспользуемся формулой Перрона, полагая $c=1+\frac{1}{\log x}$, $T>1$, $\epsilon>0$.

$$A_3(x,l,q)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\frac{x\log^2 x}{Tq}\right)+O_\epsilon(x^\epsilon). \tag{13}$$

В (13) перенесем контур интегрирования на прямую $\Re s=\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}$. При этом мы пройдем через полюс подынтегральной функции в точке $s=1$. Рассмотрим интеграл по контуру Γ, который представляет собой прямоугольник с вершинами $c\pm iT$, $\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}\pm iT$. Подынтегральная функция аналитична на Γ и внутри него, исключая полюс второй кратности в точке $s=1$ (за счет $L^2(s,\chi)$ или $L^2(s,\chi\chi_4)$). Таким образом, в силу теоремы Коши, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-iT}^{c+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds=\underset{s=1}{res}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right)+\frac{1}{2\pi i}\left(I_1+I_2+I_3\right), \tag{14}$$

где

$$I_1=\int\limits_{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}-iT}^{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds,$$

$$I_2=\int\limits_{1+(\log x)^{-1}-iT}^{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}-iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds,\quad I_3=\int\limits_{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}+iT}^{1+(\log x)^{-1}+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds.$$

Используя оценки (3) из леммы 1, мы получаем вклад горизонтальных участков интегрирования:

$$I_2,I_3\ll x^{1+\frac{1}{\log x}}\cdot T^{-1-\frac{1}{2\log x}}\log T+x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}\cdot T^{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2\log x}}\log T. \tag{15}$$

Далее осталось рассмотреть интеграл I_1. Как известно, если через χ' обозначить примитивный характер по $\mod q'$, который индуцирует характер χ по $\mod q$, тогда (см.[2]) в области $\Re s>1$

$$L(s,\chi)=L(s,\chi)\prod_{p|q,\,p\nmid q'}\left(1-\tfrac{\chi(p)}{p^s}\right).$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}-iT}^{\frac{1}{2}+(\log x)^{-1}+iT} \frac{4}{\varphi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(l) L^2(s,\chi) L^2(s,\chi\chi_4) G(s,\chi) \frac{x^s}{s} ds \ll$$
$$\ll \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\log x}}}{\varphi(q)} \times$$
$$\times \left[\sum_{q'|q} \times \left[\sum_{\chi' \mod q}{}' \int\limits_1^T \left| L(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\log x} + it, \chi') \right|^2 \left| L(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\log x} + it, \chi'\chi_4) \right|^2 \tfrac{1}{t} dt \right] \right].$$

В силу неравенства Коши и леммы 2 получаем следующую оценку

$$I_1 \ll \tau(q) x^{\frac{1}{2}} \log^5 T. \tag{16}$$

Вычислим вычеты в точке $s = 1$ подынтегральной функции в (13).

Если $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$, то существует единственный характер χ по $\mod q$, такой, что $\chi\chi_4 = \chi_0$ – главный характер по $\mod q$ (при этом $\chi_0\chi_4$ не является главным). Если же $q \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$, то такого характера не существует. Рассмотрим сначала случай, когда $q \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)$, тогда представим $F(s)$ в виде

$$F(s) = \tfrac{4}{\varphi(q)} L^2(s,\chi_0) L^2(s,\chi_0\chi_4) G(s,\chi_0) +$$
$$+ \tfrac{4}{\varphi(q)} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) L^2(s,\chi) L^2(s,\chi\chi_4) G(s,\chi) \right).$$

Как известно, в окрестности точки $s = 1$

$$L(s,\chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q} \left((s-1)^{-1} + \gamma + \ldots \right),$$

$$\frac{x^s}{s} = x + (x \log x - x))(s-1) + \ldots,$$

где γ – постоянная Эйлера. Поэтому после несложных технических вычислений получаем

$$\begin{aligned} \underset{s=1}{res} \left(F(s) \tfrac{x^s}{s} \right) = \underset{s=1}{res} \left(\tfrac{4}{\varphi(q)} L^2(s,\chi_0) L^2(s,\chi_0\chi_4) G(s,\chi_0) \tfrac{x^s}{s} \right) = \\ = A_1(q) x \log x + A_0(q) x, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$A_1(q) = \frac{\pi^2}{4q} G(1,\chi_0) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p} \right), \tag{18}$$

$$\begin{gathered} A_0(q) = \\ = \tfrac{\pi}{q} \prod_{p|q} \left(1 - \tfrac{1}{p} \right) \left[2L'(1,\chi_4) + \tfrac{\pi}{4}(2\gamma - 1) G(1,\chi_0) + G'(1,\chi_0) \right], \end{gathered} \tag{19}$$

функция $G(s,\chi)$ определяется в (11).

При $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ и $l \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ особенность возникает при $\chi = \chi_0$ и χ_4. Учитывая, что $G(s,\chi_0) = G(s,\chi_4)$, получаем

$$\underset{s=1}{res}\left(F(s)\tfrac{x^s}{s}\right) = \underset{s=1}{res}\left(\tfrac{4}{\varphi(q)}\sum_{\chi=\chi_0,\chi_4} L^2(s,\chi)L^2(s,\chi\chi_4)G(s,\chi)\tfrac{x^s}{s}\right) = \\ = 2\left[A_1(q)x\log x + A_0(q)x\right]. \tag{20}$$

Из соотношений (13)–(20), полагая $T = x^{\frac{1}{2}}$, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $l, q \in \mathbb{N}$, $0 < l \leq q$, $(l,q) = 1$. Тогда при $x \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$A_3(x,l,q) = \delta_q\left[A_1(q)x\log x + A_0(q)x\right] + O\left(x^{\frac{1}{2}}\tau(q)\log^5 x\right),$$

где $A_1(q), A_0(q)$ – вычислимые константы, зависящие от q и определяемые соотношениями (18) и (19),

$$\delta_q = \begin{cases} 1, & \text{если } q \not\equiv 0 \pmod 4, \\ 2, & \text{если } q \equiv 0 \pmod 4 \text{ и } l \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Замечание 1. *При $q \equiv 0 \pmod 4$, $l \equiv 3 \pmod 4$ уравнение $u^2 + v^2 = n^3$ не имеет решений, поэтому этот случай мы исключаем из рассмотрения.*

Заключение. В данной статье исследовался вопрос о среднем значении числа решений диофантового уравнения $u^2 + v^2 = n^3$ в арифметической прогрессии. Полученный результат нетривиален для всех $q \ll x^{\frac{1}{2}-\epsilon}(\log x)^{-4}$. Кроме того, аналогичное утверждение можно получить и для общего случая, когда $(l,q) > 1$.

1. **Бабаев Г.** Распределение целых точек на алгебраических поверхностях [текст] / Бабаев Г. – Душанбе, 1966. – 280 с.
2. **Карацуба А. Л.** Основы аналитической теории чисел [текст] / А. Л. Карацуба. – М.: Наука, 1983. – 240 с.
3. **Монтгомери Г.** Мультипликативная теория чисел [текст] / Монтгомери Г. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
4. **Прахар К.** Распределение простых чисел [текст] / Прахар К. – М.: Мир, 1967. – 511 с.
5. **Стронина М. И.** Целые точки на круговых конусах [текст] / Стронина М. И. // Известия вузов (Математика). – 1969. – Т. 87, № 8. – С. 112–116.
6. **Титчмарш Е. К.** Теория дзета-функции Римана [текст] / Титчмарш Е. К. – М.: ИИЛ, 1958. – 406 с.
7. **Apostol T. M.** Introduction to Analytic Number Theory [text] / Apostol T. M. – Springer-Verlag, 1976. – 338 p.
8. **Fischer K. H.** Über die Anzahl der Gitterpunkte auf Kreisen mit quadratfreien Radienquadraten [text] / Fischer K. H. // Arch. Math. – 1979. – V. 33. – P. 150–154.

9. **Iwaniec H.** Analytic Number Theory [text] / Iwaniec H., Kowalski E. // Collocuium Publications (American Mathematical Society). – 2004. – V. 53. – 615 p.

10. **Kühleitner M.** The average number of solutions of the Diophantine equation $U^2 + V^2 = W^3$ and related arithmetic functions [text] / Kühleitner M., Nowak W. // Acta Math. Hung. – 2004. – V. 104. – P. 225–240.

11. **Recknagel W.** Varianten des Gaußschen Kreisproblems[text] / Recknagel W. // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. – 1989. – V. 59. – P. 183–189.

12. **Varbanets P. D.** On the number of primitive integer points on elliptic cones in the arithmetic progression [text] / Varbanets P. // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2006. – V. 26. – P. 25 –42.

ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 75–84

Mathematical Subject Classification: 11N60, 11R42
УДК 511

С. С. Сергеев, Чан Тхе Винь
Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ, ВЗВЕШЕННЫЕ СУММАМИ КЛОСТЕРМАНА

Сергєєв С. С., Чан Тхе Вiнь Мультиплiкативнi функцiї, зваженi сумами Клостермана. Побудована асимптотична формула суматорної функцiї для суми Клостермана $K(s,a;q)$, зваженої мультиплiкативними функцiями $f(n)$ спецiального вигляду, а саме згорткою Дiрiхле цiлком мультiплiкативних функцiй та тотожної 1.
Ключовi слова: сума Клостермана, функцiї дiльникiв, асимптотичнi оцiнки.

Сергеев С. С., Чан Тхе Винь Мультипликативные функции, взвешенные суммами Клостермана. Построена асимптотическая формула сумматорной функции для суммы Клостермана $K(s,a;q)$, взвешенной мультипликативными функциями $f(n)$ специального вида, а именно сверткой Дирихле вполне мультипликативных функций и тождественной 1.
Ключевые слова: сумма Клостермана, функции делителей, асимптотические оценки.

Sergeev S. S., Tran Vinh Tkhe Multiplicative function of the weighted sum Kloosterman. Constructed asymptotic formula summatory functions for Kloosterman sums $K(s,a;q)$, weighted by multiplicative function $f(n)$ of a special kind namely Dirichlet convolution of completely multiplicative functions and constant 1. This problem is significant because of the importance estimates for Kloosterman sums of a special type in progressions over Gaussian integers. Also the method of proof can be applyed to obtain estimates of different kinds of the Kloosterman sums.
Key words: sum Kloosterman divisor function, asymptotic estimates.

Введение. Классические суммы Клостермана возникли в аналитической теории чисел почти 90 лет тому назад и на протяжении этого периода постоянно используются как инструмент исследования во многих задачах математики и её приложений.

Применениям сумм Клостермана в математике посвящено много работ, например, [1], [3], [5], [6]. В ряде задач, связанных с построением псевдо-случайных чисел (см. [2]) и специальных линейных кодов (см.[4], [7]), возникает необходимость вычислить суммы, содержащие суммы Клостермана и их степени.

Целью настоящей работы является построение асимптотических оценок для сумматорных функций, ассоциированных с взвешенными суммами Клостермана мультипликативными функциями специального вида.

Пусть $a, b, q \in \mathbb{Z}$, $q > 1$.

Рассмотрим сумму Клостермана

$$K\left(a,b;q\right) = \sum_{S(c)} e^{2\pi i \frac{ax+bx'}{q}}$$

здесь $c = \left\{x \in Z_q^\star, xx^{'} \equiv 1 \,(\mod q)\right\}$ $Z_q^\star$ как обычно обозначает приведенную систему вычетов по модулю q, а штрих при x, означает, что $xx^{'} \equiv 1(mod\, q)$.

Для произвольной вполне мультипликативной функции $g(n)$ определим мультипликативную функцию $f(n)$ посредством соотношения

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

где запись $d|n$ означает, что суммирование идёт по всем делителям d числа n.

Обозначим

$$F(x) = \sum_{n \leqslant x} f(n) K(a,\, b;\, n)$$

и будем называть $F(x)$ взвешенной сумматорной функцией для $f(n)$.

В последующем нам понадобятся следующие стандартные обозначения:
$s = \sigma + it$ — комплексное число, $\sigma = Re\, s$, $t = Im\, s$;
Z_q (соответственно $Z_q^\star$) — полная (приведенная) система вычетов по модулю q;
$HOD(a, b) = (a, b)$ — наибольший общий делитель a и b;
$\mu(n)$ — функция Мебиуса;
$\varphi(n)$ — функция Эйлера;
$\Gamma(z)$ — гамма-функции Эйлера;
для $(x,\, q) = 1$ обозначаем через $x^{'}$ мультипликативное обратное для x по модулю q;
$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана;
$\zeta(s;\, \delta_0, \delta_1)$ - дзета-функция Лерха.

Ради удобства в формулах типа $a \equiv b(modq)$ мы мишем $a \equiv b(q)$.

Предварительные результаты. Мы приведём некоторые вспомогательные утверждения, которые нам понадобятся для получения основных результатов.

Лемма 1. Пусть $a,\, q \in \mathbb{Z},\, q > 1$.

$$\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax}{q}} = \begin{cases} q, \text{ если} & a \equiv 0(\mod q) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 2 ([8], стр. 48). Пусть $\zeta(s, \delta)$, $0 < \delta \leqslant 1$ — дзета-функции Гурвица, определяемая для $Re\, s > 1$ абсолютно сходящимся рядом

$$\zeta(s, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\delta)^s}.$$

Тогда $\zeta(s, \delta)$ аналитически продолжаема на всю комплексную s–плоскость, кроме точки $s = 1$, где она имеет полюс 1-го порядка с вычетом 1. Кроме того, справедливо соотношение Гурвица для $Re\, s < 0$

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n\delta}{n^{1-s}} + \cos\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n\delta}{n^{1-s}} \right\}.$$

Пусть $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 < \delta_1 \le 1$. Функция Лерха в области $Re\, s > 1$ определена абсолютно сходящимся рядом

$$\xi\left(s; \delta_0, \delta_1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n \delta_1}}{\left(n + \delta_0\right)^s}.$$

Лемма 3. ([3], стр. 42). Функция Лерха аналитически продолжаема на всю комплексную s-плоскость, кроме быть может точки $s = 1$, если $\delta_1 \in \mathbb{Z}$, и в этом случае она имеет в точке $s = 1$ полюс 1-го порядка с вычетом 1. Кроме того, справедливо функциональное уравнение

$$\xi\left(s; \delta_0, \delta_1\right) = \left(2\pi\right)^{s-1} \Gamma\left(1 - s\right) \Big\{ e^{\frac{\pi i}{2}(1-s)} \xi\left(1 - s, \{\delta_1\}, \delta_0\right) + \\ + e^{-\frac{\pi i}{2}(1-s)} \xi\left(1 - s; \{1 - \delta_1\}, \delta_0\right) \Big\}.$$

(Здесь $\{\delta_1\}, \{1 - \delta_1\}$ — дробные доли то δ_1 и $1 - \delta_1$).

Следствие. В полосе $-\epsilon \le Re\, s = \sigma \le 1 + \epsilon, |Im\, s| \ge 3$ справедливы следующие оценки

$$\xi\left(s; 0, \delta\right) << \begin{cases} |t|^{\frac{1-\sigma}{2}} log|t|, \text{ если } -\epsilon \le \sigma \le \frac{1}{2} \\ |t|^{\frac{1-\sigma}{3}} log|t|, \text{ если } \frac{1}{2} \le \sigma \le 1 + \epsilon. \end{cases}$$

Напомним некоторые свойства сумм Клостермана.

Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$ и пусть $q_1 \overline{q_1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q_2), q_2 \overline{q_2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q_1)$. Тогда имеет место "квази–мультипликативность" суммы Клостермана.

$$K\left(a, b; q\right) = K\left(a\overline{q_2}, b\overline{q_2}; q_1\right) \cdot K\left(a\overline{q_1}, b\overline{q_1}; q_2\right).$$

Далее, если $(a, q) = 1$, то

$$K\left(a, b; q\right) = K\left(1, ab; q\right).$$

Лемма 4 ([6]). Пусть p — простое число. Тогда

$$\left|K\left(a, b; p^m\right)\right| \leqslant 2\left(a, b\right)^{\frac{1}{2}} p^{\frac{m}{2}}.$$

(Эта оценка принадлежит А. Вейлю [9]).

Лемма 5. Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, q_1 – бесквадратная часть q, q_2 — квадратно-полная часть q, и пусть $(b, q) = d = d_1 d_2$, $d_1 | q_1$, $d_2 | q_2$. Тогда для $d_1 d_2 > 1$ имеем

$$K\left(1, b; q\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } d_2 > 1, \\ \mu\left(d_1\right) K\left(1, b\overline{d}^2; \frac{q}{d_1}\right), & \text{если } d_2 = 1, \end{cases}$$

где $d_1 \overline{d_1} \equiv 1 \left(\mod \frac{q}{d_1}\right)$.

Доказательство. В силу квази-мультипликативности суммы Клостермана относительно q нам достаточно рассмотреть только случай $q = p^m$, p — простое.

Если $m = 1$, то обязательно $d_2 = 1$, и тогда $(b,q) = (b,p) = p$. Так что мы имеем в этом случае

$$K\left(1,b;p^m\right) = K\left(1,0;p\right) = \sum_{x\in Z_p^\star} e^{2\pi i\frac{x}{p}} = -1 = \mu\left(d_1\right) K\left(1,0;1\right).$$

Пусть теперь $m \geqslant 2$ и пусть$(b,p^m) = p^k$, $k > 0$. Тогда $d_1 = 0$, $d_2 = p^k$. Обозначим $m_1 = \left[\frac{m}{2}\right] \geqslant 1$, и положим $x = x_0\left(1+p^{m-m_1}y\right)$, где $x_0 \in Z^\star_{p^{m-m_1}}$, $y \in Z_{p^m}$.

Тогда $x^{'} = x_0^{'}\left(1-p^{m-m_1}y+p^{2(m-m_1)}y^2\right)$, где мультипликативное обратное $x_0^{'}$ берётся по модулю p^m.

Поэтому мы можем записать (полагая $b = p^k b_0$, $(b_0,p) = 1$):

$$K\left(1,b_0p^k;p^m\right) = \sum_{x_0\in Z^\star_{p^{m-m_1}}} \sum_{y\in Z_{p^{m_1}}} e^{2\pi i\frac{f(x_0,y)}{p^m}},$$

где $f(x_0,y) = x_0 + b_0p^kx_0^{'} + p^{m-m_1}\left(y - b_0p^kx_0^{'}p^{m-m_1}y + b_0p^kx_0^{'}p^{m-m_1}y^2\right)$.

Поэтому, в силу лемммы 1,

$$K\left(1,b_0p^k;p^m\right) = \sum_{x_0\in Z^\star_{p^{m-m_1}}} e^{2\pi i\frac{x_0+b_0p^kx_0^{'}}{p^m}} \sum_{y\in Z_{p^{m_1}}} e^{2\pi i\frac{y}{p^{m_1}}} = 0.$$

Следствие. Для любой мультипликативной функции $f(n)$ под условием $f(n) \ll n^\varepsilon$, ε — произвольное малое положительное число, имеем для $Re\, s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)K(1,n;q)}{n^s} = \sum_{d\backslash q_1}\mu(d) \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=d}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} K\left(1,n\overline{d}^2;\frac{q}{d}\right),$$

где q_1 — бесквадратная часть q, а $d\overline{d} \equiv 1\left(\mod \frac{q}{d}\right)$.

Лемма 6. Пусть $q(n)$ — вполне мультипликативная функция под условием $q(n) \ll n^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое, и пусть $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$.

Тогда для любого натурального $q > 1$ и целого a, $(a,q) = 1$, в области $Re\, s > 1$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)K(1,an;q)}{n^s} = $$
$$= \sum_{d|q_1}\mu(d)\sum_{t_1t_2|\frac{q}{d}}\frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{t_1^st_2^s}\sum_{S(c)} g(d)Z_g\left(s;\frac{a_1d_1\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)Z_g\left(s;\frac{a_2d_2\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right),$$

где $c = \left\{a_1,a_2 \in Z^\star_{\frac{q}{d}}, a_1a_2 \equiv 1\left(\mod \frac{q}{d}\right)\right\}$, а функция $Z_g\left(s,\frac{c}{q}\right)$ определена рядом

$$Z_g\left(s;\frac{c}{q}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)e^{2\pi i\frac{cn}{q}}}{n^s},\quad Re\, s > 1, (c,q) = 1.$$

Доказательство. Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, q_1 — бесквадратная часть q, и пусть $d \setminus q_1$. Тогда $\left(d, \frac{q}{d}\right) = 1$, а потому существует $\overline{d}$ такое, что $d\overline{d} \equiv 1 \left(\bmod \frac{q}{d}\right)$. Принимая во внимание вполне-мультипликативность функции $q(n)$ и следствие из леммы 5, получаем для $d \setminus q_1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{S(c_1)} \sum_{d_1 d_2 = d} g(d_1) g(d_2) \sum_{S(c_2)} \frac{g(n_1) g(n_2)}{(n_1 d_1)^s (n_2 d_2)^s} e^{2\pi i \frac{a_1 n_1 d_1 \overline{d} + a_2 n_2 d_2 \overline{d}}{\frac{q}{d}}} = \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=d}}^{\infty} n^{-s} \sum_{d_1 d_2 = d} g(d) \sum_{S(c_3)} g(n_1) g(n_2) \sum_{S(c_1)} e^{2\pi i \frac{a_1 d_1 n_1 \overline{d} + a_2 n_2 d_2 \overline{d}}{\frac{q}{d}}} = \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=d}}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s} K\left(1, a \cdot n \cdot \overline{d}^2; \frac{q}{d}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

С другой стороны, левая часть равенства (1) равна

$$\begin{aligned}
&\sum_{S(c_1)} \sum_{d_1 d_2 = d} g(d_1) g(d_2) \sum_{S(c_2)}^{\infty} \frac{g(n_1) g(n_2)}{(n_1 n_2)^s} e^{2\pi i \frac{a_1 n_1 d_1 \overline{d} + a_2 n_2 d_2 \overline{d}}{\frac{q}{d}}} = \\
&= \sum_{S(c_1)} \sum_{d_1 d_2 = d} \sum_{t_1, t_2 \setminus \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1) \mu(t_2)}{t_1^s t_2^s} g(t_1 t_2) \sum_{n_1, n_2 = 1} g(n_1) \frac{e^{2\pi i \frac{a_1 n_1 t_1 d_1 \overline{d}}{\frac{q}{d}}}}{n_1^s} \cdot \\
&\cdot \frac{e^{2\pi i \frac{a_2 n_2 t_2 d_2 \overline{d}}{\frac{q}{d}}}}{n_2^s} = \\
&= \sum_{S(c_1)} \sum_{t_1, t_2 \setminus \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1)}{t_1^s} \cdot \frac{\mu(t_2)}{t_2^s} \sum_{d_1 d_2 = d} Z_g\left(s; \frac{a_1 t_1 d_1 \overline{d}}{\frac{q}{d}}\right) Z_g\left(s; \frac{a_2 t_2 d_2 \overline{d}}{\frac{q}{d}}\right),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left\{ a_1, a_2 \in Z^{\star}_{\frac{q}{d}}, a_1 a_2 \equiv 1 \left(\bmod \frac{q}{d} \right) \right\}, \\
c_2 &= \left\{ (n_1, n_2) = 1, \left(n_1, \frac{q}{d}\right) = \left(n_2, \frac{q}{d}\right) = 1 \right\}, \\
c_3 &= \left\{ n_1, n_2, n_1 d_1 \cdot n_2 d_2 = n \right\}.
\end{aligned}$$

Теперь, умножая (1), (2) на $\mu(d)$ и суммируя по всем d, $d|q_1$, мы, в силу леммы 5 и хорошо известного тождества Сельберга–Кузнецова [5] получаем требуемое утверждение.

Основные результаты. Из доказанной выше леммы 6 видно, что для получения хорошей асимптотической оценки сумматорной функции, ассоциированной с функцией
$f(n) K(1, an; q)$, важно иметь определённую информацию о дзета-подобной функции $Z_g\left(s; \frac{c}{q}\right)$. Нетрудно заметить что, если в качестве $g(n)$ взять вполне мультипликативную функцию вида $g(n) = \chi(n) d^{\alpha}$, где $\chi(n)$ — характер Дирихле по некоторому модулю D, а α — фиксированное комплексное число, то функцию

$Z_g\left(s;\frac{c}{q}\right)$ удаётся выразить через дзета-функцию Римана $\zeta(s)$ и L — функцию Дирихле $L\left(s,\chi_1\right)$ с некоторым характером Дирихле. В этой статье мы рассмотрим два случая $g(n)=1, n\in\mathbb{N}$, и $g(n)=\chi_4(n)$, где $\chi_4(n)$ есть неглавный характер Дирихле по модулю 4.

Тогда учитывая, что $\sum\limits_{d|n}g(d)=\sum\limits_{d|n}X_4(d)=\frac{r(n)}{4}$, где $r(n)$ — количество представлений n суммой двух квадратов целых чисел, мы построим асимптотическую формулу для суммы

$$\sum_{n\leqslant x}r(n)K(1,an;q),\quad a\in\mathbb{Z}.$$

$\sum\limits_{d|n}d^\alpha=\sigma_\alpha(n)$ — сумма всех делителей n в степени α, $\sigma_0(n)=\tau(n)$,
$\sum d^\alpha\chi_4(n)=\frac{r(n)}{4}, \alpha=0.$

И тогда приходим, соответственно, к сумме вида

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)K(1,an;q),$$

где $\tau(n)$ — число делителей n.

Оба этих случая рассматриваются однаково, но случай $\tau(n)$ технически проще. Мы этот случай в дальнейшем и рассматриваем.

Таким образом, в области $Re\, s>0$ лемма 3 даёт

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)K(1,an;q)}{n^s}=\sum_{d|q_1}\frac{\mu(d)F(s;d,q)}{d^s}, \tag{3}$$

где

$$F(s;d,q)=\sum_{t_1t_2|\frac{q}{d}}\frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{(n_1n_2)^s}\sum_{a_1a_2\equiv1\left(\frac{q}{d}\right)}\sum_{d_1d_2=d}\zeta\left(s;0,\frac{a_1d_1t_1\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)\zeta\left(s;0,\frac{a_2d_2t_2\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right).$$

В силу леммы 3, заключаем, что $F(s)$ аналитически продолжаема на всю s — плоскость, кроме быть может точки $s=1$, где $F(s)$ может иметь полюс 2-го порядка. Поэтому из (3) по формуле Перрона находим

$$\sum_{n\leqslant x}\tau(n)K(1,an;q)=res_{s=1}(F(s)x^ss^{-1})+res_{s=0}(F(s)x^ss^{-1})+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\varepsilon-iT}^{-\varepsilon+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds+O\left(\int\limits_{-\varepsilon}^{c}|F(\sigma\pm iT)|\,\frac{x^s}{T}d\sigma\right)+O\left(\frac{x^c}{T(c-1)^2}q^{\frac{1}{2}}\tau(q)\right), \tag{4}$$

где $c>1$, $T>1$, $\varepsilon>0$ будут определены позднее.

(Здесь мы учли, что коэффициенты производящего ряда Дирихле для $\tau(n)K(1,an;q)$ оцениваются величиной $\tau(n)q^{\frac{1}{2}}\tau(q)$.)

Для вычисления интегралова в (4) нам необходима оценка функции $F(s)$ в полосе $-\epsilon \leq Re\, s \leq 1+\epsilon, |Im\, s| > 3$.

Из (3) мы сразу имеем

$$F\left(1+\epsilon+it\right) << \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)|K(1,an;q)|}{n^{1+\epsilon}} << \tau(q) q^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\epsilon}. \tag{5}$$

Кроме того, следствие леммы 3 даем для $Re\, s = -\epsilon$

$$F(s,d,q) << |t|^{1+\epsilon} \frac{q}{d} \tau(d) \tau^2 \left(\frac{q}{d}\right) log^2 |t|.$$

А потому

$$F(-\epsilon+it) << |t|^{1+\epsilon} q \tau^3(q) log^2 |t|. \tag{6}$$

Теперь, в силу принципа Фрагмена–Линделёфа, находим

$$F(s) << t^{\frac{1-\sigma}{1+2\epsilon}} q^{\frac{1+\sigma+3\epsilon}{2(1+2\epsilon)}} \tau^3(q) log^2 |t|. \tag{7}$$

Поэтому для $c = 1+\epsilon$ имеем

$$\int\limits_{-\epsilon}^{1+\epsilon} F(s) \frac{x^s}{s} ds << max \left(\frac{1}{\epsilon} \tau(q) q^{\frac{1}{2}} \frac{x}{T}, q\tau^3(q) \left(log^2 T\right) T^{\epsilon} \right). \tag{8}$$

Далее, из функционального уравнения для фукнции Лерха (см. лемма 2) на прямой $Re\, s = -\epsilon$ получаем:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{d|q} \frac{\mu(d) F(s;d,q)}{d^s} = \\ &= \sum_{d|q_1} \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{t_1 t_2 | \frac{q}{d}} \frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{(t_1 t_2)^s} \sum_{a_1 a_2 \equiv 1 (mod \frac{q}{d})} \sum_{d_1 d_2 = d} \frac{\Gamma^2(1-s)}{(2\pi)^{2-2s}} \times \\ &\times \prod_{j=1}^{2} \left[e^{\frac{\pi i(1-s)}{2}} \zeta \left(1-s, \left\{ \frac{a_j d_j t_j \overline{d}}{\frac{q}{d}} \right\}, 0\right) + e^{\frac{-\pi i(1-s)}{2}} \zeta \left(1-s; 1-\left\{ \frac{a_j d_j t_j \overline{d}}{\frac{q}{d}} \right\}, 0\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

(здесь $\{u\}$ означает дробную долю u).

Поскольку $Re(1-s) = 1+\epsilon > 0$, то подставляя вместо $\zeta(1-s,x,0)$ представление в виде абсолютно сходящегося ряда Дирихле и проводя стандартные преобразования, мы придем к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds = \sum_{d|q_1} \mu(d) \sum_{t_1 t_2 | \frac{q}{d}} \mu(t_1)\mu(t_2) \sum_{S(c_1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} I(n,a,t,d), \tag{10}$$

где

$$I(n,a,t,d) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT} \Gamma^2(1-s) \sum_{S(c_2)} e^{\frac{\pi i(1-s)}{2}(\pm 1 \pm 1)} \left(\frac{x n_1 n_2 \pi^2}{q^2 t_1 t_2} \right) \frac{ds}{s}.$$

$$c_1 = \left\{ a_1a_2 \equiv 1 \left(\frac{q}{d}\right); d_1, d_2 \in \mathbb{N}, d_1d_2 = d \right\}.$$
$$c_2 = \left\{ n = n_1n_2, n_j = \pm a_jd_jt_j\overline{d}(mod\frac{q}{d}), j = 1, 2 \right\}.$$

Очевидно, что интеграл $I(n, a, t, d)$ есть сумма четырех интегралов (как результат вычисления произведения в (9)), из них два, которым соответствует выбор знаков $+1$, $+1$ или -1, -1, дают наибольший вклад в оцениваемый интеграл $\int F(s)\frac{x^s}{s}ds$.

Обозначим $y = \frac{\pi^2xn_1n_2}{q^2t_1t_2}$. Тогда интеграл в (10) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT}\Gamma^2(1-s)e^{\frac{\pi s}{2}s}\frac{y^s}{s}ds.$$

Последний интеграл возникает в классической задаче делителей Дирихле. Его оценка получена в ([8], с. 314-317).

Поэтому проводя стандартные вычисления, получаем

$$I(n, a, t, d) << \begin{cases} y^{-\epsilon}, \text{ если } n > N = \frac{T^2}{4\pi^2x}, \\ y^{\frac{1}{4}}, \text{ если } n \le N. \end{cases} \tag{11}$$

Следовательно из (10), (11)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\epsilon-iT}^{-\epsilon+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds << q^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}\tau^2(q)log^2T. \tag{12}$$

Осталось вычислить вычеты фукнции $F(s)\frac{x^s}{s}$ в точках $s = 0$ и $s = 1$.

Мы имеем

$$res_{s=0}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right) = \sum_{S(c)}\frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{t_1t_2}\sum_{a_1a_2\equiv 1\left(\frac{q}{d}\right)}\zeta\left(0; 0, \frac{a_1d_1t_1\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)\times$$
$$\times\zeta\left(0; 0, \frac{a_2d_2t_2\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right) = O\left(q\tau^2(q)\right). \tag{13}$$

$$res_{\lim_{s=1}}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right) =$$
$$= \sum_{S(c)}\frac{\mu(t_1)\mu(t_2)}{t_1t_2}\sum_{a_1a_2\equiv 1\left(\frac{q}{d}\right)} res_{\lim_{s=1}}\left(\zeta\left(s; 0, \frac{a_1d_1t_1\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)\zeta\left(s; 0, \frac{a_2d_2t_2\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)\frac{x^s}{s}\right), \tag{14}$$

где в (13) и (14) $c = \left\{d|q_1; d_1d_2 = d; t_1t_2|\frac{q}{d}\right\}$.

Заметим, что $\zeta(s; 0; \delta)$ имеет особую точку в т. $s = 1$ только в случае $\delta \in \mathbb{Z}$. Но так как НОД $\left(a_jd_j\overline{d}, \frac{q}{d}\right) = 1$, то вычет может быть не равным нулю при $q_2 > 1$, если только $t_1 = q_2$ или $t = q_2$ (вспомним, что q_2 — квадратно полная часть q, следовательно $\mu(t_1)\mu(t_2) = 0$), а значит соответствующие слагаемые обратятся в нуль. Следовательно, для $q_2 > 1$ вклад в вычеты равен нулю. Если $q_2 = 1$, т.е. $q_1 = q$, то при $t_1 = \frac{q}{d}$ или $t_2 = \frac{q}{d}$ вычет подынтегральной функции отличен от нуля. И мы имеем

$$res_{\lim_{s=1}}\left(F(s)\frac{x^s}{s}\right)=\sum_{d|q}\sum_{d\in\mathbb{Z}^*_{\frac{q}{d}}}\left[\left(\frac{\mu\left(\frac{q}{d}\right)}{fracqd}\right)^2(xlogx+(2\gamma-1)x+\right.$$

$$\left.\left.+\;x\sum_{\substack{t|\frac{q}{d}\\ t\neq\frac{q}{d}}}\zeta\left(1;0,\frac{dt\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)\right)\right]=\prod_{r|q}\left(1+\frac{p-1}{p^2}\right)(xlogx+(2\gamma-1)x+$$

$$\left.+\,x\sum_{d|q}\sum_{l\in\mathbb{Z}^*_{\frac{q}{d}}}\sum_{\substack{t|\frac{q}{d}\\ t\neq\frac{q}{d}}}\zeta\left(1;0,\frac{lt\overline{d}}{\frac{q}{d}}\right)\right),\tag{15}$$

где γ — постоянная Эйлера.

Теперь, собирая оценки (8), (10), (11) и полагая $T=x^{\frac{2}{3}},\epsilon=\frac{1}{logx},c=1+\frac{1}{logx}$, мы, в силу (13), (15) получаем утверждение следующей теоремы.

Теорема. Пусть q — натуральное число, $q=q_1q_2$, где $(q_1,q_2)=1,q_1$ — бесквадратная часть q, а q_2 — квадратно полная часть q. Тогда для $(a,q)=1$ и $x\to\infty$ справедлива ассимптотическая формула

$$\sum_{n\le x}\tau(n)K(1,an;q)=A(x,q)+O(x^{\frac{1}{3}}q^{\frac{1}{2}}\tau^3(q)log^2x),$$

где $A(x,q)=\begin{cases}0,\text{ если } q_2>1,\\ (15),\text{ если } q_2=1.\end{cases}$

Заключение. Изложенное выше доказательство теоремы для $(a,q)=1$ легко переложить на случай $(a,q)>1$, при этом порядок роста (относительно x), сохраняется, но изменяются констатны в (15).

Заметим, что утверждение, аналогичное доказанной теореме, можно получить в случае $g(n)=\chi_k(n)$, где $\chi_k(n)$ неглавный характер модуля k.

1. **Bruggeman R. W.** Fourier coefficients of curp forms [text] / Bruggeman R. W. // Invent. Math. – 1978. – 47 (1). – P. 29–39.
2. **Eichenamer-Herrmann I.** Kloosterman-type sums and the discrepancy of nonoverlapping pairs of inversive congruential pseudorandom numbers [text] / Eichenamer-Herrmann I., Niederreiter H. // Acta Arith. – 1993. – 65 (2). – P. 185–194.
3. **Ivie A.** The Riemann Zeta-Function [text] / Ivie A. – Mineola; New York, 1985. – P. 565.

4. **Kim D. S.** Codes associated with special linear groups and power moments of multi-dimensional Kloosterman sums [text] / Kim D. S. // Ann. Mat. Pura Appli. – 2011. – 190. – P. 61–76.

5. **Кузнецов Н. В.** Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника, I. Суммы Клостермана [текст] / Кузнецов Н. В. // Мат. сб. – 1980. – Т. III (153). – Р. 334–383.

6. **Малышев А. В.** Обобщеннаые суммы Клостермана и их оценки [текст] / Малышев А. В. // Вестник Ленингр. унив. Сер. мат., тех. и астрон. – 1960. – 15 (3). – P. 59–75.

7. **Moisio M.** The moments of a Kloosterman sums and the weight distribution a Zetterberg-type cyclic code [text] / Moisio M. // IEEE Trans. inform. Theory. – 2007. – 53. – P. 813–817.

8. **Титчмарш Е.** Теория дзета-фукнции Римана [текст] / Титчмарш Е. – М. 1953. – С. 406.

9. **Weil A.** On the some exponential sums [text] / Weil A. // I. London Math Soc. (2). – 1948. – V. 3. – P. 204–207.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V. 18,Is.1(17).–P.85–93

Mathematical Subject Classification: 11N25, 11S40
UDC 511.33

L. Balyas
I. I. Mechnikov Odessa National University

THE DISTRIBUTION OF THE SOLUTIONS OF THE CONGRUENCES OF SPECIAL FORM MODULO p^n

Баляс Л. Розподілення розв'язків конгруенцій спеціального типу за модулем p^n. Ми отримуємо нетривіальну асимптотичну формулу для числа розв'язків конгруенції $ax^3 + by^4 \equiv c \pmod{p^n}$.
Ключові слова: тригонометрична сума, асимптотична формула, розв'язок порівняння.

Баляс Л. Распределение решений сравнений специального вида по модулю p^n. Мы получаем нетривиальную асимптотическую формулу для числа решений сравнения $ax^3 + by^4 \equiv c \pmod{p^n}$.
Ключевые слова: тригонометрическая сумма, асимптотическая формула, решение сравнения.

Balyas L. The distribution of the solutions of the congruences of special form modulo p^n. We obtain nontrivial asymptotic formula for the number of the solutions of the congruence $ax^3 + by^4 \equiv c \pmod{p^n}$
Key words: exponential sum, asymptotic formula, solution of the congruence.

Introduction. In 1918 I. M. Vinogradov and G. Polya nearly at the same time got the non-trivial estimate for the number of quadratic residue classes prime modulo in the interval $[1, x]$, where $x < p$. It was the first problem on the distribution of solutions of the congruence $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$, where $f(x, y)$ is a polynomial with coefficients from the field $\mathbb{Z}_p$. Nowadays the problem on the incomplete residue system is defined in the following manner.

Let $f(x_1, \cdots, x_n)$ be a polynomial with integer coefficients and let $\mathbb{Z}_q$ be a residue class ring modulo q, where $q \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; let $A_q(a_1, b_1, \cdots, a_n, b_n)$ be the number of solutions of the congruence

$$f(x_1, \cdots, x_n) \equiv 0 \pmod{q}, \ (x_1, \cdots, x_n) \in R, \tag{1.1}$$

where

$$R := \left\{ \begin{array}{l} a_i \le x_i < a_i + b_i, \ i = \overline{1, n}, \\ 0 \le a_i < a_i + b_i < q, \\ a_i, b_i \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}, \ i = \overline{1, n} \end{array} \right\}. \tag{1.2}$$

The purpose of our work is the derivation of the asymptotic formula for the congruence of special form with the use of the solutions of proper congruences modulo p^n, where p is prime and $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Notation. Latin letter p (with an index or without one) is always the notation of a prime number.

$\mathbb{Z}_p$ – residue class field prime modulo p.

$\mathbb{Z}_q$ – residue class ring modulo q.

"$\ll$", "O" – Landau and Vinogradov symbols respectively.

$(a_1, \dots, a_k)$ – greatest common divisor of $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$.

$\nu_p(a)$ – index of power, with which a prime number p is included in canonical decomposition of $a \in \mathbb{Z}$. If $(a, p) = 1$, then $\nu_p(a) = 0$.

Auxiliary arguments. The purpose of our work is the derivation of the asymptotic formula for congruence analogously to Postnikova work [2].

$$ax^3 + by^4 \equiv c \pmod{p^n}, \tag{2.1}$$

where $p \geq 5$, $(a, b, c, p) = 1$.

The congruence (2.1) is equivalent to the congruence

$$y^4 \equiv c - ax^3 \pmod{p^n}. \tag{2.2}$$

Let (x_0, y_0) be an arbitrary solution of the congruence

$$y^4 \equiv c - ax^3 \pmod{p}. \tag{2.3}$$

If there is no such solution, our initial congruence has no solutions at all.

Firstly one can concede that $x_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$. For every t, $t = \overline{0, p^{n-1}}$ we set $A(t) \equiv c - a(x_0 + pt)^3 \pmod{p^n}$.

Let the congruence

$$y^4 \equiv c - ax_0^3 \pmod{p}, \tag{2.4}$$

have κ, $\kappa \geq 1$ solutions. From elementary theory of numbers we have that the congruence

$$y^4 \equiv A(t) \pmod{p^n}, \tag{2.5}$$

also has κ, $\kappa \geq 1$ solutions for every t.

Let us denote $y_1(t), \dots, y_\kappa(t)$ as all the solutions of the congruence (2.5). Furthermore, we have κ solutions $y_1(0), \dots, y_\kappa(0)$ in the case, when $t = 0$. Let $y(0)$ be one of these solutions.

Lemma 1. *2.1 Let $s = \left[\frac{p-1}{p-2}\left(n + \nu_p(a)\right)\right]$. Then there exists the polynomial $f(t)$, $\deg f(t) = s$*

$$f(t) = \Phi_0(x_0) + p^{\lambda_1}\Phi_1(x_0)t + \dots + p^{\lambda_s}\Phi_s(x_0)t^s,$$

such that

$$y_i(t) \equiv y_i(0)f(t) \pmod{p^n},\ i = 1, \dots, \kappa.$$

Moreover, all the coefficients $\Phi_j(x_0) \in \mathbb{Z}$, $\lambda_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = \overline{0, s}$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_j \geq j\frac{p-2}{p-1}$, $j = \overline{1, s}$.

Proof. From $(y_0, p) = 1$ we obtain that the congruence $(c - ax_0^3)x \equiv 1 \pmod{p^n}$ has the unique solution. Let us denote it as x_0'.

We shall suppose, that $0 \leq x_0 \leq p - 1$, $1 \leq x_0' \leq p^{n-1}$. We consider the expansion in series of the function

$$U(w) = \left(1 - 3awx_0^2x_0' - 3ax_0x_0'w^2 - ax_0'w^3\right)^{\frac{1}{4}}$$

in powers of w:

$$U(w) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j w^j.$$

We equate the two expressions for the derivative of the function (using the written above equations) and easily get:

$$\sum_{j=1}^{\infty} jX_j w^{j-1}(1 - 3awx_0^2 x_0^{'} - 3ax_0 x_0^{'} w^2 - ax_0^{'} w^3) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{\infty} X_j w^j (3ax_0^2 x_0^{'} + 6ax_0 x_0^{'} w + 3ax_0^{'} w^2).$$

After this we equate the coefficients at equal powers of w and get the recurrence relation:

$$(j+1)X_{j+1} = \frac{9j}{4} ax_0^2 x_0^{'} X_j + \frac{3(j-1)}{2} ax_0 x_0^{'} X_{j-1} + \frac{j-2}{4} ax_0^{'} X_{j-2}. \tag{2.6}$$

We should notice that X_0, X_1, X_2 can be directly defined:

$$X_0 = 1,\ X_1 = -\frac{3ax_0^2 x_0^{'}}{4},\ X_2 = -\frac{3ax_0 x_0^{'}}{4} - \frac{3}{32} a^2 x_0^4 x_0^{'2}.$$

Let us consider the following polynomial

$$U_s(w) = \sum_{j=0}^{s} X_j w^j,$$

in which a value of s will be defined later. Now in view of this formula we shall consider the following equations:

$$U_s^4(w) - B(w)^4 = (U_s(w) - B(w))\,(U_s(w) + B(w))\,\big(U_s^2(w) - B(w)^2\big) \tag{2.7}$$

where $B(w) = \Big(1 - 3awx_0^2 x_0^{'} - 3ax_0 x_0^{'} w^2 - ax_0^{'} w^3\Big)^{\frac{1}{4}}$.

From the expansion in series of $B(w)$ we obtain that the coefficients at powers of w in the expansion in series at the left of (2.7) go to zero, when $j = \overline{0, s}$. Since the coefficients $X_j \in \mathbb{Q}$, the coefficients of $U_s(pt)$ are rational numbers too.

But we have

$$U_s(pt) = \sum_{j=0}^{s} X_j p^j t^j.$$

Let us denote

$$X_j p^j = p^{\lambda_j} \frac{c_j}{d_j},\ (c_j, p) = (d_j, p) = 1. \tag{2.8}$$

From formula (2.6) we can see that the denominators at $j = 2, 3, \ldots$ in formula

$$X_{j+1} = \frac{9j}{4(j+1)} ax_0^2 x_0^{'} X_j + \frac{3(j-1)}{2(j+1)} ax_0 x_0^{'} X_{j-1} + \frac{j-2}{4(j+1)} ax_0^{'} X_{j-2}$$

are the divisors of $2^{2j}j!$.

From the formula for an index of power, with which a prime number p is included in canonical decomposition into factors, we have

$$\nu_p\left(X_j p^j\right) \geq j - \frac{j}{p-1} + \nu_p(a) = j\frac{p-2}{p-1} + \nu_p(a) \tag{2.9}$$

Let us consider the series $U(w)$ over the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$. Then from the result that has been received before we get, that for every $w \in \mathbb{Q}_p$, $\|w\|_p < 1$ the series converges and, furthermore, for $w = pt$, $t \in \mathbb{Z}$ we have:

$$U(pt) = U_s(pt) \pmod{p^n}, \; if \; s = \left[\frac{p-1}{p-2}\left(n + \nu_p(a)\right)\right].$$

We shall define e_j from the congruence $e_j d_j \equiv c_j \pmod{p^n}$ and put

$$f(t) = \sum_{j=0}^{s} e_j p^{\lambda_j} t^j.$$

We know that X_j depend on x_0. That is why we shall write that

$$e_j = \Phi_j(x_0), \; j = \overline{0, s}.$$

Thus, we established the assertion of lemma. $\square$

Lemma 2. *2.2 Let $p \geq 5$ be a prime number. With the notations of Lemma 2.1 for $j = 3, 4, \ldots, s$ we have:*

$$\min\left(\lambda_j, \lambda_{j-1}, \lambda_{j-2}\right) \leq j + 7 + \frac{5j-7}{p-1}.$$

Proof. Let us consider for every $j = \overline{1, s}$ the following values X_j, Y_j, Z_j, which are defined by the relations:

$$\begin{aligned}
&X_0 = 1, \; X_1 = -\frac{3ax_0^2x_0'}{4}, \; X_2 = -\frac{3ax_0x_0'}{4} - \frac{3}{32}a^2x_0^4x_0'^2, \\
&Y_0 = 0, \; Y_1 = 1, \; Y_2 = -\frac{3ax_0^2x_0'}{4}, \\
&Z_0 = 0, \; Z_1 = 0, \; Z_2 = 1,
\end{aligned}$$

and for $j = 3, 4, \ldots, s$, X_j, Y_j and Z_j satisfy the recurrence relation (2.6).

We shall consider the determinants

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} X_{j-2} & X_{j-1} & X_j \\ Y_{j-2} & Y_{j-1} & Y_j \\ Z_{j-2} & Z_{j-1} & Z_j \end{vmatrix}, \; j = 3, 4, \ldots, s.$$

In particular,$\Delta_3 = -\frac{3ax_0^2x_0'}{4}$.

From now on we consider appearing fractions modulo p^n.

We know that $\left(x_0^{'}, p\right) = 1$. But then $\nu_p(\Delta_3) = \nu_p(a)$. Furthermore, for $j \geq 4$ we easily get

$$\Delta_j = \frac{j-3}{4j} a x_0^{'} \Delta_{j-1} = (a x_0^{'})^{j-3} \frac{1}{j(j-1)(j-2)} \Delta_3. \tag{2.10}$$

Let us denote

$$\nu_p\left(X_j p^j\right) = \nu_p(\lambda_j),\ \nu_p\left(Y_j p^j\right) = \nu_p(\mu_j),\ \nu_p\left(Z_j p^j\right) = \nu_p(\tau_j).$$

It is clear that $\mu_j = \lambda_{j-1}$, $\tau_j = \lambda_{j-2}$. And from formula (2.10) we obtain

$$j(j-1)(j-2)\begin{vmatrix} X_{j-2}p^{j-2} & X_{j-1}p^{j-1} & X_j p^j \\ Y_{j-2}p^{j-2} & Y_{j-1}p^{j-1} & Y_j p^j \\ Z_{j-2}p^{j-2} & Z_{j-1}p^{j-1} & Z_j p^j \end{vmatrix} = \left(a x_0^{'}\right)^{j-3} \Delta_3 p^{3j-3}.$$

We factor out from the rows of the determinant

$$p^{\min(\lambda_j,\lambda_{j-1},\lambda_{j-2})},\ p^{\min(\mu_j,\mu_{j-1},\mu_{j-2})},\ p^{\min(\tau_j,\tau_{j-1},\tau_{j-2})}$$

and come to conclusion:

$$\min(\lambda_j,\lambda_{j-1},\lambda_{j-2}) + \min(\mu_j,\mu_{j-1},\mu_{j-2}) + \min(\tau_j,\tau_{j-1},\tau_{j-2}) \leq 3j-3.$$

But we already know that

$$\mu_j, \mu_{j-1}, \mu_{j-2} \geq (j-3)\frac{p-2}{p-1} + \nu_p(a),$$
$$\tau_j, \tau_{j-1}, \tau_{j-2} \geq (j-4)\frac{p-2}{p-1} + \nu_p(a).$$

That is why we obtain:

$$\min(\lambda_j,\lambda_{j-1},\lambda_{j-2}) \leq 3j + (2j-7)\,\frac{p-2}{p-1} + (j-6)\nu_p(a).$$

When $\nu_p(a) = 0$, the result takes the form:

$$\min(\lambda_j,\lambda_{j-1},\lambda_{j-2}) \leq j + 7 + \frac{5j-7}{p-1}.$$

□

Now we consider the case, when $x_0 \equiv 0 \pmod p$. If the congruence $y^4 \equiv c \pmod p$ has no solutions, the congruence (2.5) has no solutions (x, y) under the condition $x \equiv 0 \pmod p$.

That is why we suggest that our congruence has a solution. Let $y_1, \ldots, y_k$ be all its solutions. A solution of the congruence (2.5) we search in the form $x = pt$, $y_j = y_j(t)$, $j = \overline{1,k}$, where

$$y_j(t) \equiv y_j(0)\left(1 + p^3 a_1 t^3 + p^{\lambda_2} a_2 t^6 + \cdots + a_r p^{\lambda_r} t^{3r}\right),\ t = \overline{0, p^{n-1}}.$$

Moreover, $r \leq \left[\frac{n-1}{3}\right]$ and

$$\lambda_j \geq 4,\ j = 2, \ldots, r,\ (a_i, p) = 1,\ i = 1, \ldots, r.$$

Main Results. Let $A(T_1, T_2)$ be the number of solutions of the congruence (2.2), which belong to the rectangle $R = \{0 \le x \le T_1,\ 0 \le y \le T_2\}$. Then let $A(T_1, T_2)$ be the number of pairs of fractional portions $\left\{\frac{x}{p^n}, \frac{y}{p^n}\right\}$, that have got into the rectangle $\left\{0 \le u \le \frac{T_1}{p^n},\ 0 \le v \le \frac{T_2}{p^n}\right\}$, when a pair (x, y) range over the set of the solutions of the congruence (2.2).

Let $\chi(v)$ be the characteristic function of the interval $\left[0, \frac{T_2}{p^n}\right]$. Using the description of the solutions of the congruence (2.2), we can write

$$A(T_1, T_2) = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{x_0}{}^{*} \sum_{0 \le t < \frac{T_1}{p}} X\left(\frac{y_i(t)}{p^n}\right) + \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{0 \le t < \frac{T_1}{p}} X\left(\frac{y_i(t)}{p^n}\right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

where the sign "$*$" means the summation over such $x_0 \in \mathbb{Z}_p$, that $x_0 \ne 0$ and the congruence $y^4 \equiv c - ax_0^3 \pmod p$ has solutions (it has κ, $\kappa \ge 1$ solutions $y_0 \in \mathbb{Z}_p$).

Furthermore, $y_i(t)$ runs all the solutions of the congruence (2.5) in the first sum and the congruence $y^4 \equiv c - a(pt)^3 \pmod{p^n}$ $(2.5)'$ for the second sum respectively.

We shall extend the characteristic function $\chi_{\alpha,\beta}(u)$ of the interval $[\alpha, \beta]$, $0 < \beta + \alpha \le 1$ periodically with period 1 to the whole real axis. We need the following assertion.

Lemma 3. *(Vinogradov's "glasses", see [1]) Let $0 < \Delta < \frac{1}{2}$, $\Delta \le \beta - \alpha \le 1 - \Delta$. Then for every natural r there exists the periodical function with period 1 $\varphi(u)$ such, that:*

$$\varphi(u) = 1, \qquad if \quad \alpha + \Delta \le u \le \beta - \Delta;$$

$$\varphi(u) = 0, \qquad if \quad 0 \le u \le \alpha + \Delta \ or\ \beta + \Delta \le u < 1;$$

$$0 \le \varphi(u) \le 1, \quad if \quad \alpha - \Delta \le u \le \alpha + \Delta \ or\ \beta - \Delta \le u \le \beta + \Delta,$$

and the function is monotone in each of these intervals.

Moreover, the function $\varphi(u)$, has the expansion in a Fourier series

$$\varphi(x) = \beta - \alpha + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \ne 0}}^{m=+\infty} a_m e^{2\pi i m u},$$

where $|a_m| \le \min\left(\frac{1}{|m|}, \beta - \alpha, \frac{1}{|m|}\left(\frac{r}{\pi |m|}\right)^r\right)$.

Furthermore, we need the theorem of Vinogradov on the estimate of the exponential sum.

Theorem 1. *Let $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n+1} x^{n+1}$ be a polynomial with real coefficients. Moreover, $a_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $1 < q < r$ for some $r \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$. Let us define τ from the condition:*

1. *$q = P^\tau$, $1 < q \le P$;*
2. *$\tau = 1$, $P < q < P^{r-1}$;*

3. $q = P^{r-\tau}$, $P^{r-1} < q < P^r$.

Then

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}\right| < (8n)^{\frac{nl}{2}} m^{\frac{2\rho}{\tau}} P^{1-r},$$

where $m \in \mathbb{N}$, $l = \log \frac{12n(n+1)}{\tau}$, $\rho = \frac{\tau}{3n^2 l}$.

Theorem 2. *3.1 Let* $p \geq 5$ *be a prime number and* $1 < T_2 \leq p^n$, $p^{\frac{5n+43}{9}} \leq T_1 \leq p^n$, $n \geq 13$. *Then for the number of the solutions* $A(T_1, T_2)$ *of the congruence (2.2) (with the condition* $(a,p) = 1$*), for which the following asymptotic formula is true:*

$$a\left(T_1, T_2\right) = \frac{T_1 T_2}{p^n} \cdot \frac{N(a,c;p)}{p} + O\left(T_1^{1-\frac{1}{28n^3 \log 27n^3}} e^{7n(\log n)^2}\right), \tag{3.1}$$

where $N(a,c;p)$ *is the number of the solutions of the congruence* $y^4 \equiv c - ax^3 \pmod{p}$.

Proof. From the equation (3.1) it follows, that it is sufficient to us to calculate the inner sums in the sums $\sum_1$ and $\sum_2$. Let us calculate the inner sum in the first sum. From the description of $y(t)$ (see Lemma 2.1) we obtain:

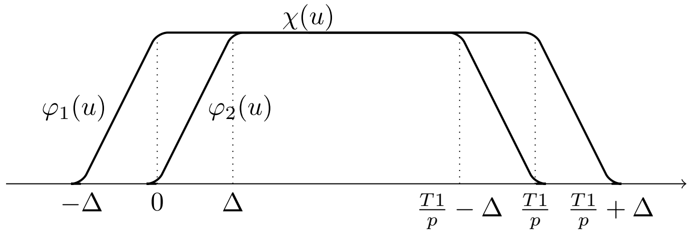
$$\sum_{t_1 < \frac{T_1}{p}} \chi\left(\frac{y(t)}{p^n}\right) = \sum_{t_1 < \frac{T_1}{p}} \chi\left(\frac{\Phi_0(x_0) + p^{\lambda_1}\Phi_1(x_0)t + \cdots + p^{\lambda_s}\Phi_s(x_0)t^s}{p^n}\right),$$

where $s = \left[\frac{p-1}{p-2}\left(n + \nu_p(a)\right)\right]$.

We shall consider the most important case, when $\nu_p(a) = 0$, because the general case may be resolved to the case $\nu_p(a) = 0$. We choose $0 < \Delta \leq \frac{T_1}{2p}$ (we shall define its value more precisely later). Let $\varphi_1(u)$ be the function from the Vinogradov lemma about "glasses" for $\alpha = -\Delta$, $\beta = \frac{T_2}{p^n} + \Delta$ and let $\varphi_2(u)$ be the function for $\alpha = \Delta$, $\beta = \frac{T_2}{p^n} - \Delta$. We can see from Picture 1, that for every $u \in \mathbb{R}$ the inequality $\varphi_1(u) \leq \chi(u) \leq \varphi_2(u)$ takes place and that is why

$$\sum_{u \in [0,1)} \chi(u) = \sum_{u \in [0,1)} \varphi_1(u) + O\left(\Delta\right) = \sum_{u \in [0,1)} \varphi_2(u) + O\left(\Delta\right). \tag{3.2}$$

From the lemma about "glasses" we have



$$
\begin{aligned}
&\sum_{t_1<\frac{T_1}{p}} \chi\left(\frac{\Phi_0(x_0)+p^{\lambda_1}\Phi_1(x_0)t+\cdots+p^{\lambda_s}\Phi_s(x_0)t^s}{p^n}\right)= \\
&=\sum_{t_1<\frac{T_1}{p}} \varphi_1\left(\frac{\Phi_0(x_0)+p^{\lambda_1}\Phi_1(x_0)t+\cdots+p^{\lambda_s}\Phi_s(x_0)t^s}{p^n}\right)+O\left(\Delta\right)= \\
&=\frac{T_1T_2}{p^{n+1}}+O\left(\frac{T_1\Delta}{p}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|\cdot\sum_{t_1<\frac{T_1}{p}} e^{2\pi i\frac{y_i(0)\left(p^{\lambda_1}\Phi_1(x_0)t+\cdots\right)}{p^n}}+O\left(\Delta\right).
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Let us define the largest value of j, for which by Lemma 2 the following condition takes place:

$$
\min\left(\lambda_j,\lambda_{j-1},\lambda_{j-2}\right)\le j+7+\frac{5j-7}{p-1}\le j+7+\frac{5j-7}{4}\le(n-1)\,. \tag{3.4}
$$

Thus, we get that $j=\left[\frac{4n-25}{9}\right]$.

Now with the help of Vinogradov theorem we shall get the estimate for the inner sum with respect to t in the formula (3.3) on such index of $\left[\frac{4n-25}{9}\right]$ or $\left[\frac{4n-25}{9}\right]-1$, for which $\lambda_j\le n-1$. Thus, we have $\frac{4n-34}{9}\le\lambda_j$. From $(y_i(0),p)=1$, $(\Phi_j(x_0),p)=1$ we get, that the coefficient at t^j has the form of the irreducible fraction $\frac{y_i(0)\Phi_j(x_0)}{p^{n-\lambda_j}}$ and $1\le n-\lambda_j\le\frac{5n+34}{9}$.

By our suggestion $p^{\frac{5n+34}{9}}\le T_1\le p^n$, and that is why we have, that $p^{n-1}\ge\frac{T_1}{p}\ge p^{\frac{5n+34}{9}}$. In terms of Vinogradov theorem $P=\frac{T_1}{p}$, and this means, that we have come to the first case of the theorem. Let us put $p^{n-\lambda_j}=P^{\tau}$. That is why $P^{\tau}\le P$, $\tau\le 1$. On the other side we have $n-\lambda_j\le 1$, $p\le P^{\tau}$, $p\le p^{(n-1)\tau}$. We have the estimate $\frac{1}{n-1}\le\tau\le 1$.

Let us put $l=\log\frac{12(s-1)s}{\tau}$. By virtue of the fact, that $s\ge n$, $\tau<1$, $s\le\frac{3}{2}n$, we have that $\log 12(n-1)n\le l\le\log 27n^2(n-1)$.

Let us denote more

$$
\rho=\frac{\tau}{3(s-1)^2l},\ \frac{1}{7n^3\log 27n^2}\le\rho\le\frac{1}{3(n-1)^2\log 12(n-1)n}.
$$

And then Vinogradov theorem gives the following result:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{t_1<\frac{T_1}{p}} e^{2\pi im\frac{y_i(0)\left(p^{\lambda_1}\Phi_1(x_0)t+\cdots+p^{\lambda_s}\Phi_s(x_0)t^s\right)}{p^n}}\right|\le \\
&\le(12n)^{\frac{3}{4}n\log 27n^2(n-1)}m^{\frac{1}{3(n-1)^2\log 12(n-1)n}}\left(\frac{T_1}{p}\right)^{1-\frac{1}{7n^3\log 27n^3}}.
\end{aligned}
$$

We divide the sum over m into two parts: $m\le\frac{1}{\Delta}$ and $m>\frac{1}{\Delta}$. We use the estimate $|a_m|\le\frac{1}{|m|}$ for the first sum and the estimate $|a_m|\le\frac{1}{|m|}\left(\frac{2}{\pi|m|\Delta}\right)^2$ for the second sum.

And then, using Abel lemma on partial summation, choosing

$$\Delta = \left(\frac{T_1}{p}\right)^{-\frac{1}{7n^3 \log 27n^3}}$$

and taking account of the condition $n \geq 13$, we obtain:

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{x_0} {}^{*} \sum_{t<\frac{T_1}{p}} \chi\left(\frac{y_i(t)}{p^n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} \sum_{x_0} \left(\frac{T_1 T_2}{p^{n+1}} + O\left(\left(\frac{T_1}{p}\right)^{1-\frac{1}{14n^3 \log 27n^3}} e^{7n \log^2 n} \right) \right).$$

We do the same things for the second sum and obtain the similar result. And after that we get the asymptotic formula (3.1). □

Remark 1. *One can consider the congruence* $x^m + y^3 \equiv 1 \pmod{p^n}$ *on the condition, that* $(m, p) = 1$, $p \geq 5$ *and get similar results.*

Conclusion. Nontrivial asymptotic formula for the number of the solutions of the congruence $ax^3 + by^4 \equiv c \pmod{p^n}$ was obtained.

1. **Vinogradov I.M.** Osnovy teorii chisel / Vinogradov I.M. – M.;L.: Gostehizdat, 1952. — 180 p. (in russian)

2. **Postnikova L. P.** Raspredelenie reshenij sravneniya $x^2 + y^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$ / Postnikova L. P. // Matematicheskij sbornik. – 1964. – 65 (2). – P. 228-238 (in russian).

Mathematical Subject Classification: 11N25, 11S40
UDC 511

S. Varbanets
I. I. Mechnikov Odessa National University

PARITY OF THE NUMBER OF PRIMES IN A GIVEN INTERVAL AND ALGORITHMS OF THE SUBLINEAR SUMMATION

Варбанець С. Лінійно-інверсний генератор псевдовипадкових чисел за модулем ступеня двійки. Розглянуто узагальнення інверсного конгруентного генератора псевдовипадкових чисел за модулем ступеня простого числа. Отримані оцінки експоненційних сум на послідовності псевдовипадкових чисел.
Ключові слова: інверсні конгруентні псевдовипадкові числа, експоненційна сума, дискрепансія.

Варбанец С. Линейно-инверсный генератор псевдослучайных чисел по модулю степени двойки. Рассмотрено обобщение инверсного конгруэнтного генератора псевдослучайных чисел по модулю степени простого числа. Даны оценки экспоненциальных сумм на последовательности псевдослучайных чисел.
Ключевые слова: инверсные конгруэнтные псевдослучайные числа, экспоненциальная сумма, дискрепансия.

Varbanets S. Linear-inversive prn's generator with power of two modulus. Generalization of the inversive congruential generator of pseudorandom numbers with prime-power modules is considered and the trigonometrical sums on sequence of pseudorandom numbers are estimated.
Key words: inversive congruential pseudorandom numbers, exponential sum, discrepancy.

Introduction. Nonlinear methods of generating uniform pseudorandom numbers in the interval $[0, 1)$ have been introduced and studied during the last twenty five years. The development of this attractive fields of research is described in the works of Lehn, Eichenauer, Niederreiter, Emmerich etc. A particularly promising approach is the inversive congruential method. Four types of inversive congruential generators can be distinguished, depending on whether the modulus is a prime, an odd prime power, a power of two or a product of distinct prime numbers. In the case of prime-power modulus the inversive congruential generator is defined in the following way:

Let p be a prime, $p \geq 3$, m be a natural number. For given $a, b \in \mathbb{Z}$ we take an initial value y_0, and let y_n^{-1} denotes a multiplicative inverse for y_n in $\mathbb{Z}^*_{p_m}$ if $(y_n, p) = 1$, and $y_n^{-1} = 0$ if $m = 1$ and $y_n \equiv 0(mod\ p)$. Then the recurrence relation

$$y_{n+1} \equiv a y_n^{-1} + b(mod\ p^m) \tag{1}$$

generates a sequence $y_0, y_1, \ldots$ which we call the inversive congruential sequence modulo p^m.
The case $p \geq 3$, $m = 1$ studied in [2],[6]. For the case $p = 2$, $m > 3$ the relevant investigation presented in [1, 3, 4].

In 1996 T. Kato, L.-M. Wu and N. Yanagihara[4] studied a non-linear congruential generator for the modulus $M = 2^m$ defined by the congruence

$$y_{n+1} \equiv a\overline{y}_n + b + cy_n \pmod{M},\ n = 0, 1, \dots \tag{2}$$

with the conditions

$$(y_0, 2) = (a, 2) = 1,\ b \equiv c \equiv 2 \pmod{2}. \tag{3}$$

Note that the conditions (3) guarantee infinity of the process of generation. This authors obtained the condition whereby the recursion (2) generates the sequence $\{y_n\}$ with the maximal period $\tau = 2^{m-1}$. They also give the estimate for the discrepancy of the sequence $\{x_n\}$, $x_n = \frac{y_n}{p^m}$.

In the present note we give the representation of elements y_n as polynomials of n and y_0 and that permits to improve the results from [7].

The essential nature of our method consists in the construction of representations of y_n as the polynomial on initial value y_0 and number n.

It is purpose of the present work to demonstrate that the sequence of PRN's $\{x_n\} = \left\{\frac{y_n}{2^m}\right\}$, $n = 0, 1, \dots$, generated by the recursion (2), satisfies the requirements of equidistribution on $[0, 1)$ and passes the serial test on unpredictability.

Notation. Variables of summation automatically range over all integers satisfying the condition indicated. For $m \in \mathbb{N}$ and $M = 2^m$ the notation $\mathbb{Z}_M$(respectively, $\mathbb{Z}_M^*$) denotes the complete(respectively, reduced) system of residues modulo M. We write $gcd(a, b) = (a, b)$ for notation a great common divisor of a and b. For $z \in \mathbb{Z}$, $(z, 2) = 1$ let z^{-1} be the multiplicative inverse of a modulo M. We write $\nu_2(A) = \alpha$ if $2^\alpha | A$, $2^{\alpha+1} \not| A$. For real t, the abbreviation $e(t) = e^{2\pi it}$ is used.

Auxiliary results. We need the following two simple statements.

Let $f(x)$ be a periodic function with period τ. For any $N \in \mathbb{N}$, $1 \le N \le \tau$, we denote

$$S_N(f) := \sum_{x=1}^{N} e(f(x)).$$

Lemma 1. *In above notations we have*

$$|S_N(f)| \le \max_{1 \le n \le \tau} \left| \sum_{x=1}^{\tau} e\left(f(x) + \frac{nx}{\tau}\right) \right| \cdot (1 + \log \tau). \tag{4}$$

This lemma is well-known.

Lemma 2 ([7])**.** *Let p be a prime number and let $f(x)$, $g(x)$ be polynomials over $\mathbb{Z}$*

$$f(x) = A_1x + A_2x^2 + 2(A_3x^3 + \cdots),$$
$$g(x) = B_1x + +2(B_2x^2 + \cdots),$$

and let, moreover, $\nu_2(A_2) = \alpha > 0$, $\nu_2(A_j) \ge \alpha$, $j = 3, 4, \dots$.
Then we have the following estimates

$$\left|\sum_{x\in\mathbb{Z}_{2^m}} e\left(\frac{f(x)}{2^m}\right)\right| \leq \begin{cases} 2^{\frac{m+\alpha}{2}+1} & if \quad \nu_2(A_1)\geq\alpha, \\ 0 & else; \end{cases} \tag{5}$$

$$\left|\sum_{x\in\mathbb{Z}^*_{2^m}} e\left(\frac{f(x)+g(x^{-1})}{2^m}\right)\right| \leq \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}+1} & if \quad B_1 \text{ is odd}, \\ 2^{\frac{m+\alpha+4}{2}} & if \quad \nu_2(A_1)\geq \ell, \\ & \quad\; \nu_2(B_j)\geq\alpha,\ldots, \\ 0 & if \quad \nu_2(A_1)<\alpha\leq\nu_2(B_j), \\ & \quad\; j=1,2,3,\ldots, \end{cases} \tag{6}$$

Now we will obtain the representation of y_n in the form of rational function on y_0.
Let $n=2k$. We put

$$y_{2k}=\frac{\sum\limits_{\ell\geq0}A_\ell^{2k}y_0^\ell}{\sum\limits_{\ell\geq0}B_\ell^{2k}y_0^\ell},\;\; A_\ell^{2k},B_\ell^{2k}\in\mathbb{Z}. \tag{7}$$

After simple calculations by recursion (2) we infer

$$y_{2(k+1)}=\frac{\sum\limits_{\ell\geq0}A_\ell^{2(k+1)}y_0^\ell}{\sum\limits_{\ell\geq0}B_\ell^{2(k+1)}y_0^\ell},$$

where

$$\begin{aligned} A_\ell^{2(k+1)} = & \sum_{s+t=\ell}\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{t}(aA_iB_{s-i}A_jB_{t-j}+abB_iA_jB_{s-i}B_{t-j}+ \\ & +b^2A_iA_jB_{s-i}B_{t-j}+bcA_iA_jA_{s-i}B_{t-j}+a^2cB_iB_jB_{s-i}B_{t-j}+ \\ & +abcB_iA_jB_{s-i}B_{t-j}+ac^2B_iB_{s-i}A_jA_{t-j}+abcA_iB_jB_{s-i}B_{t-j}+ \\ & +b^2cA_iA_jB_{s-i}A_{t-j}+bc^2A_iA_jB_{s-i}A_{t-j}+ac^2A_iB_jA_{s-i}B_{t-j}+ \\ & +bc^2A_iA_jA_{s-i}B_{t-j}+c^3A_iA_jA_{s-i}A_{t-j}\ ); \\ B_\ell^{2(k+1)} = & \sum_{\substack{s,t\geq0\\ s+t=\ell}}\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{t}(aB_iA_jB_{s-i}B_{t-j}+A_iA_jB_{t-j}(bB_{s-i}+cA_{s-i})) \end{aligned}$$

(Here, for the sake of comfort we write A_j, B_j instead $A_i^{(2k)}$, $B_j^{(2k)}$).

Let j'_n (respectively, j''_n) be a exponent of y_0, for which $\left(A_{j'_n}^{(2k)},2\right)=1$ (respectively, $\left(A_{j''_n}^{(2k)},2\right)=1$).
By induction we infer easy

$$i'_{2k}=\frac{2^{2k}+2}{3},\;\; j''_{2k}=j'_{2k}-1.$$

Moreover,

$$\nu_2\left(A_\ell^{(2k)}\right) \geq \left|\frac{j'_{2k}-\ell}{2}\right| \cdot \nu_2(b),$$
$$\nu_2\left(B_\ell^{(2k)}\right) \geq \left|\frac{j''_{2k}-\ell}{2}\right| \cdot \nu_2(b).$$

Thus, the numerator and the denominator of fraction in (7) for $k \geq 2m_0+1$, $m_0 = \left[\frac{m}{\nu_2(b)}\right]$, over $\mathbb{Z}_{2^m}$ contain at the most $4m_0+1$ summands, i.e.

$$y_{2k}\frac{\left(\sum\limits_{\ell=j'_n-2m_0}^{j'_n+2m_0} A_\ell^{(2k)} y_0^\ell\right)}{\left(\sum\limits_{\ell=j''_n-2m_0}^{j''_n+2m_0} B_\ell^{(2k)} y^\ell\right)}. \tag{8}$$

Divide on a^k the numerator and the denominator in (8). Then we obtain the following representation

$$y_{2k} = \frac{\sum \overline{A}_\ell y^\ell}{\sum \overline{B}_\ell y^\ell},\ \overline{A}_\ell \equiv a^{-k}A_\ell,\ \overline{B}_\ell \equiv a^{-k}B_\ell (mod\ 2^m). \tag{9}$$

Now the coefficients $\overline{A}_\ell$, $\overline{B}_\ell$ are polynomials on k with coefficients, which depend only on a, b_0, c_0, m, where $b = 2^{\nu_2(b)}b_0$, $c = 2^{\nu_2(b)}c_0$, and these coefficients have the indicated above properties of divisibility on power of 2.

By the congruence for every $t \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{1-2t} \equiv 1 + 2t + 2^2t^2 + \cdots + 2^{m-1}t^{m-1} (mod\ M)$$

and taking into account that in denominator of y_{2k} it has only one power y_0 (just $y_0^{i''_{2k}}$) with coefficient $B_{j''_{2k}}$, $(B_{j''_{2k}}, 2) = 1$, we may write

$$y_{2k} \equiv F(k, y_0, y_0^{-1}) (mod\ 2^m),\ \ F(u,v,w) \in \mathbb{Z}[u,v,w]. \tag{10}$$

The analogous representation holds for y_{2k+1}

$$y_{2k+1} \equiv G(k, y_0, y_0^{-1}) (mod\ M). \tag{11}$$

Let $\nu_2(b) \leq \nu_2(c)$. We make more precise the representations (10), (11). Using the principle of mathematical induction it is not difficult to check the correctness of the following relations for $k \geq 2m+1$:

$$\begin{aligned} y_{2k} &= kb + kacy_0^{-1} + (1 - k(k-1)a^{-1}b^2)y_0 + (-ka^{-1}b)y_0^2 + \\ &+ (-ka^{-1}c + k^2a^{-2}b^2)y_0^3 + 2^\alpha F_0(k, y_0, y_0^{-1}), \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} y_{2k+1} &= (k+1)b + (a - k(k+1)b^2)y_0^{-1} + (-kab)y_0^{-2} + \\ &+ (-ka^2c + k^2ab^2)y_0^{-3} + (k+1)cy_0 + 2^\alpha G_0(k, y_0, y_0^{-1}), \end{aligned} \tag{13}$$

where $\alpha := \min(\nu_2(b^3), \nu_2(bc))$;

$F_0(u,v,w)$, $G_0(u,v,w) \in \mathbb{Z}[u,v,w]$, $F_0(0,v,w) = G_0(0,v,w) = 0$.

Thus, we get the following result.

Lemma 3. *Let $\{y_n\}$ is the sequence of PRN's generated by the recursion (2) with conditions $(y_0, 2) = (a, 2) = 1$, $0 < \nu_2(b) < \nu_2(c)$. There exist the polynomials $F_0(u, v, w)$, $G_0(u, v, w)$ over $\mathbb{Z}$, $F_0(0, v, w) = G_0(0, v, w) = 0$ such that the relations (12) and (13) are right for any $k \geq 2m + 1$.*

Corollary 1. *Let $m \geq 3$. Then the sequence $\{y_n\}$ defined by recursion (2) is purely periodic, where $b = 2^\nu b_0$, $(b_0, 2) = 1$, $c = 2^\mu c_0$, $(c_0, 2) = 1$, $\mu > \nu > 0$; $\nu_2(a - y_0^2) = \nu_0 \geq 1$. And its period τ is equal*

$$\begin{array}{lll} (i) & 2^{m-2\nu+1} & if \quad m \geq 2\nu,\ \nu_0 > \nu; \\ (ii) & 2^{m-2\nu-\beta_0+1} & if \quad m > 2\nu,\ \nu_0 = \nu, \beta_0 = \nu_2\left(\frac{y_0^2-a}{2^{\nu_0}} + b_0\right); \\ (iii) & 2^{m-\nu-\nu_0+1} & if \quad m \geq \nu + nu_0,\ \nu_0 < \nu. \end{array}$$

Proof. The first part of corollary follows as in [7].

To prove the second part, we have

$$\begin{gathered} y_{2k} \equiv y_0 (mod\ 2^m) \iff \\ kb(1 - a^{-1}y_0^2) - k(k-1)a^{-1}b^2 y_0 + \\ + ka^{-1}cy_0^{-1}(a^2 - y_0^4) + 2^\alpha F_0(k) \equiv 0 (mod\ 2^m). \end{gathered} \tag{14}$$

It follows that k must be a least positive integer for which the congruence $k \equiv 0(mod\ 2^\ell)$ holds, where

$$\ell = \begin{cases} \nu_2(b) + \nu_2(a - y_0^2) & if \quad \nu_2(a - y_0^2) < \nu_2(b) \leq \frac{1}{2}m; \\ 2\nu_2(b) & if \quad \nu_2(b) \leq \frac{1}{2}m,\ \nu_2(a - y_0^2) > \nu_2(b). \end{cases}$$

□

Remark 1. *From (i), (ii) of Corollary 2 we obtain that for $\nu_0 \geq \nu$ the maximal period $\tau = 2^{m-2\nu+1}$ achieves, if and only if, $\nu_0 > \nu$ and $m \geq 2\nu$. In the work [4] this assertion was obtained only for $\nu = 1$.*

Exponential sums on sequence of PRN's. In this section we determine the estimates of certain exponential sums over the linear-inversive congruential sequence $\{y_n\}$ which was defined in (2).

For $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ we denote

$$\sigma_{k,\ell}(h_1, h_2; M) := \sum_{y_0 \in \mathbb{Z}_M^*} e\left(\frac{h_1 y_k + h_2 y_\ell}{M}\right),\ (h_1, h_2 \in \mathbb{Z}). \tag{15}$$

Here we consider y_k, y_ℓ as a functions at y_0 generated by (2) (see, formula (13)).

Theorem 1. *Let $(h_1, h_2, 2) = 1$, $\nu_2(h_1 + h_2) = \beta$, $\nu_2(h_1 k + h_2 \ell) = \gamma$. The following estimates*

$$|\sigma_{k,\ell}(h_1, h_2; M)| \leq \begin{cases} 2^{\frac{m+2}{2}} & if \quad k \not\equiv \ell (mod\ 2); \\ 0 & if \quad k \equiv \ell (mod\ 2) \\ & and \quad \beta < \gamma + \nu,\ m - \beta - \nu > 0; \\ 2^{m-1} & if \quad k \equiv \ell (mod\ 2) \\ & and \quad \beta \geq \gamma + \nu,\ m - \nu - \gamma \leq 0; \\ 2^{\frac{m+\nu+\gamma+2}{2}} & if \quad k \equiv \ell (mod\ 2) \\ & and \quad \beta \geq \gamma + \nu,\ m - \nu - \gamma > 0. \end{cases}$$

hold.

Proof. We consider two cases:
(I) If k and ℓ be non-negative integers of different parity, we obtain the statement of theorem by (12), (13) and Lemma 2.

(II) Let k and ℓ be integers of identical parity. Then for $k := 2k$, $\ell := 2\ell$, we have modulo M:

$$h_1 y_{2k} + h_2 y_{2\ell} =$$
$$= B_0 + B_1 y_0 + B_2 y_0^2 + B_3 y_0^3 + B_{-1} y_0^{-1} + 2^{\alpha} K(y_0, y_0^{-1}) := F_2(y_0, y_0^{-1}),$$

where $B_1 = h_1 + h_2 + 2^{2\nu} B_1'$,
$B_2 = -ab(h_1 k + h_2 \ell) + 2^{\alpha} B_2'$,
$B_3 = -a^{-2} b^2 (h_1 k^2 + h_2 \ell^2) - a^{-1} c(h_1 k + h_2 \ell) + 2^{\alpha} B_3'$,
$B_{-1} = ac(h_1 k + h_2 \ell) + 2^{\alpha} B_{-1}'$,
moreover, B_1', B_2', B_3', B_{-1}' and coefficients of $K(y_0, y_0^{-1})$ contain multipliers of form $h_1 k^j + h_2 \ell^j$, $j \geq 0$.

Let $\nu_2(h_1 + h_2) = \beta \geq \nu$, $\nu_2(h_1 k + h_2 \ell) = \gamma \geq 0$, $\delta = \min(\beta, \gamma)$.
The application of Lemma 1 gives

$$|\sigma_{2k,2\ell}(h_1, h_2; M)| \leq \begin{cases} 0 & if \quad \beta < \gamma + \nu,\ m - \beta - \nu > 0, \\ 2^{\frac{m+\nu+\gamma+2}{2}} & if \quad \beta \geq \gamma + \nu,\ m - \nu - \gamma > 0, \\ 2^{m-2} & if \quad \beta \geq \gamma + \nu,\ m - \nu - \gamma \leq 0, \end{cases}$$

where $\varphi(2^{m-1})$ is the totient Euler function.
For $k \equiv \ell \equiv 1 (mod\ 2)$ we have the analogous result.
This finishes the proof of Theorem 1. □

Remark 2. *The case* $\nu_2((h_1, h_2, M)) > 1$ *reduces easily to the case* $\nu_2((h_1, h_2, 2)) = 0$.

Let h be integer, $(h, M) = 2^s$, $0 \leq s < m$, and let τ be a least period length of the sequence of PRN's $\{y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, defined in (2). For $1 \leq N \leq \tau$ we denote

$$S_N(h, y_0) = \sum_{n=0}^{N-1} e\left(\frac{h y_n}{M}\right). \tag{16}$$

The sum $S_N(h, y_0)$ calls the exponential sum on the sequence of PRN's $\{y_n\}$.
We shall obtain the bound for $S_N(h, y_0)$.
By the relation (12)-(13) we get for $k \geq 2m + 1$:

$$y_{2k} = A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + A_3 k^3 := F(k), \tag{17}$$
$$y_{2k+1} = B_0 + B_1 k + B_2 k^2 + B_3 k^3 := G(k), \tag{18}$$

where

$$\begin{aligned}
&A_0 = A_0(y_0) \equiv y_0(mod\ 2^{\alpha})\\
&A_1 = A_1(y_0) \equiv b(1-a^{-1}y_0^2) + a^{-1}b^2y_0 + acy_0^{-1}(1-a^{-2}y^4)(mod\ 2^{\alpha})\\
&A_2 = A_2(y_0) \equiv -a^{-1}b^2y_0 + a^{-2}b^2y_0^3(mod\ 2^{\alpha}) = -a^{-1}b^2y_0(1-a^{-1}y_0^2)\\
&B_0 = B_0(y_0) \equiv b + ay_0^{-1} + cy_0(mod\ 2^{\alpha})\\
&B_1 = B_1(y_0) \equiv b(1-ay_0^{-2}) - b^2y_0^{-1} - y_0c(1-a^2y_0^{-4})(mod\ 2^{\alpha})\\
&B_2 = B_2(y_0) \equiv -b^2y_0^{-1} + ab^2y_0^{-3}(mod\ 2^{\alpha}) = -b^2y_0^{-1}(1-ay_0^{-2})\\
&A_3 = A_3(y_0,k) \equiv B_3(y_0,k) \equiv B_3 \equiv 0(mod\ 2^{\alpha}),\\
&\alpha = \min(3\nu, \nu+\mu).
\end{aligned} \tag{19}$$

After all this preliminary work, it is straightforward to prove two main result of this section:

Theorem 2. *Let the linear-inversive congruential sequence generated by the recursion (2) has the period* τ*, and let* $\nu_2(b) = \nu$*,* $\nu_2(c) = \mu$*,* $\nu < \mu$*,* $\alpha = \min(3\nu, \nu+\mu)$*,* $\nu_2(a - y_0^2) = \nu_0$*,* $2\nu \le m$*. Then the following bounds*

$$|S_\tau(h,y_0)| \le \begin{cases} O(m) & if \quad p=2,\ \nu_0<\nu,\ \nu_2(h)<m-2\nu;\\ 4\cdot 2^{\frac{m+\nu_2(h)}{2}} & if \quad \nu_0 \ge \nu,\ \nu_2(h) < m-2\nu;\\ \tau & else, \end{cases}$$

hold.

Proof. From the formulas (17)-(18) we have

$$\begin{aligned}
|S_\tau(h,y_0)| &= \left|\sum_{n=0}^{\tau-1} e\left(\frac{hy_n}{M}\right)\right| = \left|\sum_{n=0}^{2^\ell-1} e\left(\frac{hy_n}{M}\right)\right| \le\\
&\le \left|\sum_{\substack{k_1=0\\k=2k_1}}^{2^\ell-1} e\left(\frac{hy_{2k_1}}{M}\right)\right| + \left|\sum_{\substack{k_1=0\\k=2k_1+1}}^{2^\ell-1} e\left(\frac{hy_{2k_1+1}}{M}\right)\right| =\\
&= \left|\sum_{k=0}^{2^\ell-1} e\left(\frac{hF(k)}{M}\right)\right| + \left|\sum_{k=0}^{2^\ell-1} e\left(\frac{hG(k)}{M}\right)\right| + O(m).
\end{aligned} \tag{20}$$

In the last part of the formula (20) we into account that the representation y_n as a polynomial on k holds only for $k \ge 2m+1$.

By (18), the Corollaries 1 and Lemma 2 (from (5)) we easy obtain

$$|S_\tau(h,y_0)| \le \begin{cases} O(m) & if \quad p=2,\ \nu_0<\nu,\ \nu_2(h)<m-2\nu,\\ 2^{\frac{m+\nu_2(h)+4}{2}} & if \quad \nu_0 \ge \nu,\ \nu_2(h) < m-2\nu,\\ \tau & else. \end{cases}$$

The constants implied by the O-symbol are absolute. □

Corollary 2. *Let* $1 \le N < \tau$*. Then in the notations of Theorem 2 we have*

$$|S_N(h,y_0)| \le \begin{cases} N & if \quad \nu+\nu_2(h) \ge m,\\ 2^{\frac{m+\nu(h)+4}{2}}\log\tau & if \quad \nu+\nu_2(h) < m. \end{cases}$$

□

This statement follows from Theorem 2 and Lemma 1.

Let $N \le 2^{m-1}$.

We will study $S_N(h, y_0)$ at the average over $y_0 \in \mathbb{Z}_M^*$.

Theorem 3. *Let a, b, c be parameters of the linear-inversive congruential generator (2) and let $(a,2)=1$, $0<\nu=\nu_2(b)<\nu_2(c)$, $1\le N\le 2^{m-1}$, $\nu_2(h)=2^s$, $s<m$. Then the average value of the $S_N(h,y_0)$ over $y_0\in\mathbb{Z}_M^*$ satisfies*

$$\overline{S}_N(h) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{y_0\in\mathbb{Z}_M^*} |S_N(h,y_0)| \le N^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m}{4}} 2\sqrt{10}\cdot 2^{\frac{\nu+s}{4}},$$

where $s=\nu_2((h,M))$, $h=h_0 2^s$.

Proof. First we will consider the case $s=0$, i.e. $(h,2)=1$. By the Cauchy-Schwarz inequality we get for $\sigma_{k,\ell}=\sigma_{k,\ell}(h,-h;M)$

$$|\overline{S}_N(h)|^2 \le \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{y_0\in\mathbb{Z}_M^*} |S_N(h,y_0)|^2 = \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{k,\ell=0}^{N-1} \sum_{y_0\in\mathbb{Z}_M^*} e\left(\tfrac{h(y_k-y_\ell)}{M}\right) \le$$

$$\le \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{k,\ell=0} |\sigma_{k,\ell}| = \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,\ell=0\\ \nu_2(k-\ell)=r}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}| = \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sum_{\substack{k,\ell=0\\ \nu_2(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}| +$$

$$+ \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{\substack{k=0\\ k=\ell}}^{N-1} |\sigma_{k,k}| = N + \tfrac{1}{2^{m-1}} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sum_{\substack{k,\ell=0\\ \nu_2(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}|.$$

Using Theorem 1 we, after simple calculations, obtain

$$|\overline{S}_N(h)|^2 \le N + \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{\gamma=0}^{m-1} \left(\sum_{\substack{k,\ell=0\\ k\not\equiv\ell (mod\ 2)\\ \nu_2(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}| + \sum_{\substack{k,\ell=0\\ k\equiv\ell (mod\ 2)\\ \nu_2(k-\ell)=\gamma}}^{N-1} |\sigma_{k,\ell}| \right) \le \tag{21}$$

$$\le N^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m}{4}} \left(2+\sqrt{10}\cdot 2^{\frac{\nu}{4}}\right).$$

Now an argument similar to the one used to prove (21) leads to general bound

$$|S_N(h)| \le N^{\frac{1}{2}} 2^{-\frac{m-s}{4}} \left(2+\sqrt{10}\cdot 2^{\frac{\nu}{4}}\right). \tag{22}$$

□

The estimates of exponential sums obtained in this section we will use for study of properties of the sequence PRN's $\{y_n\}$.

Discrepancy. Equidistribution and statistical independence properties of pseudorandom numbers can be analyzed based on the discrepancy of certain point sets in $[0,1)^s$.

For N arbitrary points $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{N-1} \in [0,1)^s$, the discrepancy is defined by

$$D_N^{(s)}(\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{N-1}) := \sup_I \left| \frac{A_N(I)}{N} - |I| \right|,$$

where the supremum is extended over all subintervals I of $[0,1)^s$, $A_N(I)$ is the number of points among $\mathfrak{t}_0, \mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{N-1}$ falling into I, and $|I|$ denotes the s-dimensional volume I.

Let $\{y_n\}$ be the sequence of PRN's generated by (2) and let $x_n = \frac{y_n}{M}$, $n = 0, 1, \ldots$. From our sequence $\{x_n\}$ we derive the sequence $\{X_n^{(s)}\}$ of points in $[0,1)^s$ putting $X_n^{(s)} := (x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+s-1})$.

We will say the sequence $\{x_n\}$ passes d-dimensional serial test on independence if for every $s \leq d$ the sequence $\{X_n^{(s)}\}$ has uniform distribution.

Theorem 4. *The discrepancy $D_N^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, 4$, of points constructed by linear-inversive congruential generator (2) with parameters a, b, c, which satisfy the condition*

$$0 < \nu_2(b) = \nu,\ 2\nu < \mu = \nu_2(c),\ \nu_2(a - y_0^2) = \nu_0 \geq 1,\ m \geq 2\nu,\ \nu_0 > \nu,$$

the following bound

$$D_\tau^{(s)} \leq \frac{s}{2^{m-\nu+1}} + 2^{-\frac{m-2\nu}{2}} \log^s M. \tag{23}$$

holds.

Proof. Consider only the case $s = 3$ (This case is the most complex). In order to apply Turan-Erdös-Koksma inequality in the Niederreiter's form[6] we must have an estimate for sum

$$\sum_{n=0}^{\tau-1} e\left(\frac{h_1 y_n + h_2 y_{n+1} + h_3 y_{n+2}}{M}\right).$$

Without loss of generality, we can suppose that $(h_1, h_2, h_3, 2) = 1$. From (17)-(19) we can write

$$\begin{gathered} h_1 y_{2k} + h_2 y_{2k+1} + h_3 y_{2k+2} = \\ = (h_1 y_0 + h_2(a y_0^{-1} + b + c y_0) + h_3 y_0) + \\ +k\left[h_1((1 - a^{-1}y_0^2)b + a y_0^{-1} c(1 - a^{-2} y_0^4) + y_0 b^2) + \right. \\ +h_2(-((1 - a^{-1}y_0^2)b + b y_0^{-1} + a^2 c y_0^{-1})) + \\ +h_3(b(1 - a^{-1}y_0^2) + b a y_0^{-1}(1 - a^{-1}y_0^2) + \\ \left. +y_0 b^2 + 2a^{-1} y_0 b^2 (1 - a^{-1} y_0^2))\right] + \\ +k^2 b^2 (h_1 a^2 - h_2 y_0 (a^{-1} - a^{-2} y_0^2) + h_2 a^2) + 2^\alpha L(h_1, h_2, h_3, k) = \\ = C_0 + C_1 k + C_2 k^2 + 2^\alpha L(h_1, h_2, h_3, k), \end{gathered} \tag{24}$$

say.

Since the congruences

$$C_1 \equiv 0 (mod\ 2^{2\nu+1})$$
$$C_2 \equiv 0 (mod\ 2^{2\nu+1})$$

cannot be held simultaneously (taking into account that $1 - a^{-1}y_0^2 \not\equiv 0 \pmod{2^{\nu_0}}$) we obtain (by Lemma 2)

$$|\sum\nolimits_1| \leq \begin{cases} 2^{\frac{m+\nu}{2}+1} & if \quad A_1(h_1, h_2, h_3) \equiv 0 (mod\ 2^{2\nu}), \\ 0 & else. \end{cases} \tag{25}$$

Similarly, we have

$$|\sum\nolimits_2| \leq \begin{cases} 2^{\frac{m+\nu}{2}+1} & if \quad B_1(h_1, h_2, h_3) \equiv 0 (mod\ 2^{2\nu}), \\ 0 & else, \end{cases} \tag{26}$$

where $B_1(h_1, h_2, h_3)$ defined by the representation

$$h_1 y_{2k+1} + h_2 y_{2k+2} + h_3 y_{2k+3} = B_0 + B_1 k + B_2 k^2 + 2^\alpha M(h_1, h_2, h_3, k).$$

Now, Lemma 4 and simple calculations give

$$D_\tau^{(3)} \leq \frac{3}{2^{m-\nu+1}} + 2^{-\frac{m-2\nu}{2}} \log^3 M.$$

□

The assertions of theorem 4 stay held if write N instead τ for $N \leq \tau$.

The Theorem 4 shows that the sequence of PRN's $\{x_n\}$ passe the s-dimensional test on unpredictability (for $s \leq 4$) if this sequence generated by the linear-inversive generator (2) under indicated conditions on the parameters a, b, c, y_0.

Conclusion. Since every nonlinear congruential generator passes also the s-dimensional lattice test for all $s \leq 4$ we conclude that the sequence of PRN's $\{x_n\}$ generated by (2) may be use in applications.

1. **Eichenauer-Herrmann J.** Inversive Congruential Pseudorandom Number Generator with Power of Two Modulus / Eichenauer-Herrmann J., Grothe H. // ACM Transactions of Modelling and Computer Simulation. – 1992. – 2(1). – P. 1-11.
2. **Eichenauer J.** A non-linear congruential pseudorandom number generator / Eichenauer J., Lehn J. // Statist. Hefte. – 1986. – 27. – P. 315-326.
3. **Eichenauer J.** A nonlinear congruential pseudorandom number generator with power of two modulus / Eichenauer J., Lehn J., Topuzoğlu A. // Math. Comp. – 1988. – 51. – P. 757-759.
4. **Kato T.** On a nonlinear congruential pseudorandom number generator / Kato T., Wu L.-M., Yanagihara N. // Math. of Comp. – 1996. – 65(213). – P. 227-233.
5. **Niederreiter H.** Recent trends in random number and random vector generation / Niederreiter H. // Ann. Oper. Res. – 1991. – 31. – P. 323-345.
6. **Niederreiter H.** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods / Niederreiter H. – SIAM, Philadelphia, Pa., 1992.
7. **Varbanets P.** On a nonlinear congruential pseudorandom number generator / Varbanets P., Varbanets S. // Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Proc. Fifth. International Conference in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, 04-10 Semtember 2011. – 2012. – 17. – P. 265-282.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V. 18, Is. 1(17).–P. 104–114

Mathematical Subject Classification: 11N25, 11S40
UDC 511

A. V. Lelechenko
I. I. Mechnikov Odessa National University

PARITY OF THE NUMBER OF PRIMES IN A GIVEN INTERVAL AND ALGORITHMS OF THE SUBLINEAR SUMMATION

Лелеченко А. В. Парність кількості простих чисел на заданному інтервалі та алгоритми сублінійного підсумовування. Пропонується алгоритм визначення парності кількості простих чисел на $[a, b] \subset [x, 2x]$, де $b-a \le x^{1/2+c}$ та $c \in (0, 1/2]$, за $O(x^{\max(c,7/15)+\varepsilon})$ операцій. Алгоритм базується на сублінійних методах підсумовування, розробка котрих становить основну частину статті. Доведено теорему щодо сублінійного підсумовування широкого классу мультиплікативних функцій.
Ключові слова: алгоритмічна теорія чисел, функція розподілу простих чисел, підсумовування мультиплікативних функцій, сублінійне підсумовування.

Лелеченко А. В. Четность количества простых чисел на заданном интервале и алгоритмы сублинейного суммирования. Предлагается алгоритм определения четности числа простых на отрезке $[a, b] \subset [x, 2x]$, где $b - a \le x^{1/2+c}$ и $c \in (0, 1/2]$, за $O(x^{\max(c,7/15)+\varepsilon})$ шагов. Алгоритм основан на сублинейных методах суммирования, разработка которых составляет основную часть статьи. Доказана теорема о сублинейном суммировании широкого класса мультипликативных функций.
Ключевые слова: вычислительная теория чисел, функция распределения простых чисел, суммирование мультипликативных функций, сублинейное суммирование.

Lelechenko A. V. Parity of the number of primes in a given interval and algorithms of the sublinear summation. An algorithm to determine the parity of the number of primes in an interval $[a, b] \subset [x, 2x]$, where $b - a \le x^{1/2+c}$ and $c \in (0, 1/2]$, in $O(x^{\max(c,7/15)+\varepsilon})$ steps is proposed. The algorithm is based on methods of the sublinear summation, which the primary part of the paper is devoted to. A theorem on the sublinear summation of a wide class of multiplicative functions is proven.
Key words: computational number theory, prime-counting function, summation of multiplicative functions, sublinear summation.

Introduction. How many operations are required to find any prime $p > x$ (not necessary the closest) for given x?

A direct approach is to apply AKS primality test [1], which was improved by Lenstra and Pomerance [5] to run in time $O(\log^{6+\varepsilon} x)$, on consecutive integers starting with x. Such method leads to an algorithm with average complexity $O(\log^{7+\varepsilon} x)$, because in average we should run AKS $\log x$ times before a next prime encounters.

But in the worst case available estimates of the complexity are much bigger; they depend on upper bounds of the gaps between primes. The best currently known result on the gaps between primes is by Baker, Harman and Pintz: for large enough x there exists at least one prime in the interval

$$[x, x + x^{0.525+\varepsilon}].$$

Thus we obtain that the worst case of an algorithm may need up to

$$O(x^{0.525+\varepsilon}) \gg x^{1/2}$$

operations.

One can propose another algorithm, which is distinct from the pointwise testing. Suppose that there is a test, which allows to determine whether a given interval $[a,b] \subset [x,2x]$ contains at least one prime in $A(x)$ operations. Then (starting with interval $[x,2x]$) we are able to find a prime $p > x$ in $A(x)\log x$ operations using a dichotomy.

A test to determine whether a given interval contains at least one prime can be built atop Lagarias—Odlyzko formula for $\pi(x)$ [6], which provides an algorithm with $O(x^{1/2+\varepsilon}) \gg x^{1/2}$ complexity. See [8] for more detailed discussion.

In [8] Tao, Croot and Helfgott offer a hypothesis that there exists an algorithm to compute $\pi(x)$ in $O(x^{1/2-c+\varepsilon})$ operations, where $c > 0$ is some absolute constant. This implies that a prime $p > x$ can be found in $O(x^{1/2-c+\varepsilon}) \ll x^{1/2}$ steps. Authors prove the following weaker theorem [8, Th. 1.2].

Theorem 1 (Tao, Croot and Helfgott, 2012)**.** *There exists an absolute constant $c > 0$, such that one can (deterministically) decide whether a given interval $[a,b]$ in $[x,2x]$ of length at most $x^{1/2+c}$ contains an* odd number *of primes in time $O(x^{1/2-c+o(1)})$.*

The aim of our paper is to prove the following result.

Theorem 2. *Let $[a,b] \subset [x,2x]$, $b-a \le x^{1/2+c}$, c is arbitrarily constant such that $0 < c \le 1/2$. Then a parity of $\#\{p \in [a,b]\}$ can be determined in time*

$$O(x^{\max(c,7/15)+\varepsilon}).$$

Main Results.

1. The general summation algorithm. Consider the summation

$$\sum_{n\le x} f(x),$$

where f is a multiplicative function, from the complexity's point of view.

Generally speaking, a property of the multiplicativity does not impose significant restrictions on pointwise computational complexity. Multiplicative functions can be both easily-computable (e. g., $f(n) = n^k$ for every k) and hardly-computable: e. g.,

$$f(p^\alpha) = \begin{cases} 2, & \text{if there are } p^\alpha \text{ consecutive zeroes in digits of } \pi \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Luckily the vast majority of multiplicative functions, which have applications in the number theory, are relatively easily-computable.

Definition 1. *A multiplicative function f is called* easily-computable, *if for any prime p, integer $\alpha > 0$ and real $\varepsilon > 0$ the value of $f(p^\alpha)$ can be computed in time $O(p^\varepsilon \alpha^m)$ for some absolute constant m, depending only on f.*

Example 1. The (two-dimensional) divisor function $\tau_2(p^\alpha) = \alpha + 1$, the (two-dimensional) unitary divisor function $\tau_2^*(p^\alpha) = 2$, the totient function $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, the sum-of-divisors function $\sigma(p^\alpha) = (p^{\alpha+1} - 1)/(p-1)$, the Möbius function $\mu(p^\alpha) = [\alpha < 2](-1)^\alpha$ are examples of easily-computable multiplicative functions for any $m > 0$.

Example 2. Let $a(n)$ be the number of non-isomorphic abelian groups of order n. Then $a(p^\alpha) = P(\alpha)$, where $P(n)$ is a number of partitions of n. It is known [4, Note I.19], that $P(n)$ is computable in $O(n^{3/2})$ operations. Thus function $a(n)$ is an easily-computable multiplicative function with $m = 3/2$.

The number of rings of n elements is known to be multiplicative, but no explicit formula exists currently for $\alpha \geqslant 4$. See OEIS [9] sequences A027623, A037289 and A037290 for further discussions.

Example 3. The Ramanujan tau function τ_R is a rare example of an important number-theoretical multiplicative function, which is not easily-computable. The best known result is due to Charles [2]: a value of $\tau_R(p^\alpha)$ can be computed by p and α in $O(p^{3/4+\varepsilon} + \alpha)$ operations.

Surely pointwise product and sum of easily-computable functions are also easily-computable ones. The following statement shows that the Dirichlet convolution

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d)$$

also saves a property of easily-computability.

Lemma 1. *If f and g are easily-computable multiplicative functions, then*

$$h := f \star g$$

is also easily-computable.

Proof. By definition of easily-computable functions there exists m such that $f(p^\alpha)$ and $g(p^\alpha)$ can be both computed in $O(p^\varepsilon \alpha^m)$ time.

By definition of the Dirichlet convolution

$$h(p^\alpha) = \sum_{a=0}^{\alpha} f(p^a) g(p^{\alpha-a}).$$

This means that computation of $h(p^\alpha)$ requires

$$\sum_{a=0}^{\alpha} O(p^\varepsilon a^m + p^\varepsilon (\alpha - a)^m) \ll p^\varepsilon \alpha^{m+1}$$

operations.

Firstly, consider a trivial summation algorithm: calculate values of function pointwise and sum them up. For an easily-computable multiplicative function the majority of time will be spend on the factoring numbers from 1 to x one-by-one. But no

```
sum(ff, x) =
  Σ = 0
  A ← {k}_{k=1}^{x}
  B ← {1}_{k=1}^{x}
  for prime p ≤ √x
    F ← {ff(p, α)}_{α=1}^{log x / log p}
    for k ← p, 2p, ..., ⌊x/p⌋p
      α ← max{a | p^a | k}
      A[k] ← A[k]/p^α
      B[k] ← B[k] · F[α]
  for n ← 1, ..., x
    if A[n] ≠ 1 ⇒ B[n] ← B[n] · ff(n, 1)
  for n ← 1, ..., x
    Σ ← Σ + B[n]
  return Σ
```

Listing 1: Pseudocode of Algorithm M. Here $ff(p, \alpha)$ stands for the routine that effectively computes $f(p^\alpha)$.

polynomial-time factoring algorithm is currently known; the best algorithms (e. g., GNFS [10]) have complexities about

$$\exp\left((c+\varepsilon)(\log n)^{\frac{1}{3}}(\log\log n)^{\frac{2}{3}}\right),$$

which is very expensive.

We propose a faster general method like the sieve of Eratosthenes. We shall refer to it as to *Algorithm M.*

Algorithm M. Consider an array A of length x, filled with integers from 1 to x, and an array B of the same length, filled with 1. Values of $f(n)$ will be computed in the corresponding cells of B.

For each prime $p \le \sqrt{x}$ cache values of $f(p), f(p^2), \ldots, f(p^{\lfloor \log x/\log p \rfloor})$ and take integers

$$k = p, 2p, 3p, \ldots, \lfloor x/p \rfloor p$$

one-by-one; for each of them determine α such that $p^\alpha \parallel k$ and replace $A[k]$ by $A[k]/p^\alpha$ and $B[k]$ by $B[k] \cdot f(p^\alpha)$.

After such steps cells of A contain 1 or primes $p > \sqrt{x}$. So for each n such that $A[n] \ne 1$ multiply $B[n]$ by $f(A[n])$.

Now array B contains computed values of $f(1), \ldots, f(n)$. Sum up its cells to end the algorithm.

Algorithm M can be encoded in pseudocode as it is shown in Listing 1.

Note that (similarly to the sieve of Eratosthenes) instead of the continuous array of length x one can manipulate with the set of arrays of length $\Omega(\sqrt{x})$. Inner cycles can be run independently of the order; they can be paralleled easily. Also one can compute several easily-computable functions simultaneously with a slight modification of Algorithm M.

Lemma 2. *If f is an easily-computable multiplicative function then Algorithm M runs in time $O(x^{1+\varepsilon})$.*

Proof. The description of Algorithm M shows that its running time is asymptotically lesser than

$$\sum_{p\le\sqrt{x}} p^\varepsilon \sum_{\alpha\le\log x/\log p} \alpha^m + \sum_{p\le\sqrt{x}} \frac{x}{p} + \sum_{\sqrt{x}<p\le x} p^\varepsilon \ll x^{1+\varepsilon}.$$

2. The fast summation.

Definition 2. *We say that function f* sums up with the deceleration a, *if function $F(x)=\sum_{n\le x} f(x)$ can be computed in $O(x^{a+\varepsilon})$ time.*

Denote the deceleration of f as $\operatorname{dec} f$. Notation $\operatorname{dec} f = a$ means exactly that there exists a method to sum up function f with the deceleration a (not necessarily there is no faster method).

Example 4. Lemma 2 shows that any easily-computable multiplicative function sums up with the deceleration 1.

Example 5. Function $f(n)=n^k$, $k\in\mathbb{Z}_+$, sums up in time $O(1)$, because there is an explicit formula for $F(x)$ using Bernoulli numbers. Thus its deceleration is equal to 0. Note that Dirichlet series of f is $\zeta(s-k)$, including case $\zeta(s)$ when $k=0$.

One can check that the same can be said about $f(n)=\chi(n)n^k$, where χ is an arbitrary multiplicative character modulo m. We just split $F(x)$ into m sums of powers of the elements of arithmetic progressions. In this case Dirichlet series equals to $L(s-k,\chi)$.

Example 6. The characteristic function of k-th powers, $k\in\mathbb{N}$, sums up in $O(1)$ trivially, so its deceleration equals to 0. Dirichlet series of such function is $\zeta(ks)$.

Consider now f such that $f(n^k)=\chi(n)$ and $f(n)=0$ otherwise, where χ is a multiplicative character. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = L(ks,\chi).$$

Such function f also sums up in $O(1)$, because $F(x)=\sum_{n\le x^{1/k}} \chi(n)$ (see Example 5).

Generally, if function f has Dirichlet series $\mathcal{F}(s)$ and function g has Dirichlet series $\mathcal{F}(ks)$ then $\operatorname{dec} g = (\operatorname{dec} f)/k$.

Example 7. Consider Mertens function $M(x) := \sum_{n\le x}\mu(n)$. In [3] an algorithm of computation of $M(x)$ is proposed with time complexity $O(x^{2/3}\log^{1/3}\log x)$ and memory consumption $O(x^{1/3}\log^{2/3}\log x)$. We obtain $\operatorname{dec}\mu = 2/3$.

Note that Dirichlet series of μ equals to $1/\zeta(s)$.

One can see that a function μ_k such that $\mu_k(n^k)=\mu(n)$ and $\mu_k(n)=0$ otherwise sums up with the deceleration $2/(3k)$. Its Dirichlet series is $1/\zeta(ks)$.

Example 8. In [8] an algorithm of computation of $T_2(x) := \sum_{n \le x} \tau_2(n)$ in $O(x^{1/3+\varepsilon})$ time is described. Another algorithm with the same complexity may be found in [7], accompanied with detailed account and pseudocode implementation. Thus $\operatorname{dec} \tau_2 = 1/3$.

Theorem 3. *Let f and g be two easily-computable multiplicative functions, which sums up with decelerations $a := \operatorname{dec} f$ and $b := \operatorname{dec} g$ such that $a + b < 2$. Then $h := f \star g$ sums up with the deceleration*

$$\operatorname{dec} h = \frac{1 - ab}{2 - a - b}.$$

Proof. Let

$$F(x) := \sum_{n \le x} f(n), \quad G(x) := \sum_{n \le x} g(n), \quad H(x) := \sum_{n \le x} h(n).$$

By definition of the Dirichlet convolution

$$H(x) = \sum_{n \le x} \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{d_1 d_2 \le x} f(d_1) g(d_2).$$

Rearrange items:

$$\sum_{d_1 d_2 \le x} = \sum_{\substack{d_1 \le x^c \\ d_2 \le x/d_1}} + \sum_{\substack{d_1 \le x/d_2 \\ d_2 \le x^{1-c}}} - \sum_{\substack{d_1 \le x^c \\ d_2 \le x^{1-c}}},$$

where an absolute constant $c \in (0, 1)$ will be defined below in (2). Now

$$H(x) = \sum_{d \le x^c} f(d) G\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{d \le x^{1-c}} g(d) F\left(\frac{x}{d}\right) - F(x^c) G(x^{1-c}). \tag{1}$$

As far as we can calculate $f(1), \ldots, f(x^c)$ with Algorithm M in $O(x^{c+\varepsilon})$ steps, we can compute the first sum at the right side of (1) in time

$$O(x^{c+\varepsilon}) + \sum_{d \le x^c} O\left(\frac{x}{d}\right)^{b+\varepsilon} \ll x^{b+\varepsilon} \sum_{d \le x^c} d^{-b-\varepsilon} \ll$$
$$\ll x^{b+\varepsilon} x^{c(1-b-\varepsilon)} \ll x^{c+b(1-c)+\varepsilon}.$$

Similarly the second sum can be computed in $O(x^{1-c+ac+\varepsilon})$ operations. The last item of (1) can be computed in time $O(x^{ac+\varepsilon} + x^{b(1-c)+\varepsilon})$.

It remains to select c such that $c + b(1 - c) = 1 - c + ac$. Thus

$$c = \frac{1 - b}{2 - a - b}, \tag{2}$$

which implies the deceleration $(1 - ab)/(2 - a - b)$.

Example 9. Function $\sigma_k(n)$ maps n into the sum of k-th powers of its divisors. Thus $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, which is the Dirichlet convolution of $f(n) = n^k$ and $\mathbf{1}(n) = 1$. So Example 5 and Theorem 3 shows that $\operatorname{dec} \sigma_k = 1/2$.

Example 10. Consider $r(n) = \#\{(k,l) \mid k^2 + l^2 = n\}$. It is well-known that $r(n)/4$ is a multiplicative function, and $\frac{1}{4}R(x) := \sum_{n\le x} r(n)/4$ is the number of integer points in the first quadrant of the circle of radius $\sqrt{x}$. Then $R(x)$ can be naturally computed in $O(x^{1/2})$ steps, so $\operatorname{dec} r = 1/2$.

Dirichlet series of $r(n)/4$ equals to $\zeta(s)L(s,\chi_4)$, where χ_4 is the single non-principal character modulo 4. This representation shows that $r(\cdot)/4 = \chi_4 \star \mathbf{1}$. Thus Example 5 together with Theorem 3 gives us another way to estimate the deceleration of r.

Example 11. By Möbius inversion formula for the totient function we have

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu(n/d).$$

This representation implies that $\operatorname{dec}\varphi = 3/4$ (see Example 7 for $\operatorname{dec}\mu$). Jordan's totient functions have the same deceleration, because

$$J_k(n) = \sum_{d|n} d^k \mu(n/d).$$

Theorem 4. *Let f be an easily-computable multiplicative function. Consider*

$$f_k := \underbrace{f \star \cdots \star f}_{k \text{ factors}}.$$

Then

$$\operatorname{dec} f_k = 1 - \frac{1 - \operatorname{dec} f}{k}.$$

Proof. Follows from iterative applications of Lemma 1 and Theorem 3 and from the identities

$$\frac{1-a^2}{2-2a} = 1 - \frac{1-a}{2},$$
$$\frac{1-a(k+a-1)/k}{2-1+(1-a)/k-a} = 1 - \frac{1-a}{k+1}.$$

Example 12. For the multidimensional divisor function τ_k representations

$$\begin{aligned} \tau_{2k} &= \underbrace{\tau_2 \star \ldots \star \tau_2}_{k \text{ factors}}, \\ \tau_{2k+1} &= \underbrace{\tau_2 \star \ldots \star \tau_2}_{k \text{ factors}} \star \mathbf{1} \end{aligned}$$

imply that by Example 8 and Theorem 4 function τ_{2k} sums up with the deceleration $1 - 2/(3k)$, and τ_{2k+1} with the deceleration $1 - 2/(3k+2)$.

In other words

$$\operatorname{dec}\tau_k = \begin{cases} 1 - 4/(3k), & k \text{ is even}, \\ 1 - 4/(3k+1), & k \text{ is odd}. \end{cases} \tag{3}$$

Considering

$$\tau_{-k} = \underbrace{\mu \star \cdots \star \mu}_{k \text{ factors}},$$

we obtain by Example 7 and Theorem 4 that $\operatorname{dec}\tau_{-k} = 1 - 1/(3k)$.

Theorems 3 and 4 cannot provide the deceleration lower than $1/2$ even in the best case. To overcome this barrier we should develop better instruments.

Theorem 5. *Let f and g be two easily-computable multiplicative functions, which sums up with decelerations $a := \operatorname{dec} f$ and $b := \operatorname{dec} g$ such that $a + b < 2$. Let*

$$h(n) := \sum_{d_1^{k_1} d_2^{k_2} = n} f(d_1) g(d_2). \tag{4}$$

Then h sums up with the deceleration

$$\operatorname{dec} h = \frac{1 - ab}{(1-a)k_2 + (1-b)k_1}.$$

Proof. Following the outline of the proof of Theorem 3 we obtain identity

$$H(x) = \sum_{d \le x^{c/k_1}} f(d) G\left(\sqrt[k_2]{x/d^{k_1}} \right) + \sum_{d \le x^{(1-c)/k_2}} g(d) F\left(\sqrt[k_1]{x/d^{k_2}} \right) - \\ - F(x^{c/k_1}) G(x^{(1-c)/k_2}).$$

Thus we need $y(x)$ operations to calculate $H(x)$, where

$$y(x) \ll \sum_{d \le x^{c/k_1}} \left(\frac{x}{d^{k_1}} \right)^{b/k_2} + \sum_{d \le x^{(1-c)/k_2}} \left(\frac{x}{d^{k_2}} \right)^{a/k_1} + \\ + x^{ac/k_1} + x^{b(1-c)/k_2} \ll \\ \ll x^{b/k_2 + (1 - bk_1/k_2) \cdot c/k_1} + x^{a/k_1 + (1 - ak_2/k_1) \cdot (1-c)/k_2} + \\ + x^{ac/k_1} + x^{b(1-c)/k_2}.$$

Substitution

$$c = \frac{(1-b)k_1}{(1-a)k_2 + (1-b)k_1}$$

completes the proof.

In terms of Dirichlet series identity (4) means that

$$\mathcal{H}(s) = \mathcal{F}(k_1 s) \mathcal{G}(k_2 s)$$

where

$$\mathcal{F}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad \mathcal{G}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}, \quad \mathcal{H}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}.$$

One can prove (similarly to Lemma 1) that convolutions of form (4) save a property of the easily-computability.

Example 13. Function τ_2^* sums up with the deceleration $7/15$, because

$$\tau_2^*(n) = \sum_{d^2 | n} \mu(d) \tau_2(n/d^2).$$

Example 14. As soon as

$$\tau_2^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)\tau_4(n/d^2),$$

we obtain $\operatorname{dec}\tau_2^2 = 5/9$.

The discussion in Examples 5, 6, 7 leads to the following general statement.

Theorem 6. *Let f be a multiplicative function such that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{m=1}^{M_1} \zeta(k_m s)^{\pm 1} \prod_{m=1}^{M_2} z_m(l_m s - n_m), \tag{5}$$

where each of z_m is either ζ or $L(\cdot,\chi)$, M_1, M_2, $k_m, l_m, n_m \in \mathbb{N}$. Then f sums up in sublinear time: its deceleration is strictly less than 1.

Theorem 6 clearly shows that the concept of fast summation can be easily generalized over various quadratic fields. Following theorem is an example of such kind of results.

Theorem 7. *Consider the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i]$. Let*

$$\mathfrak{t}_k \colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$$

be a k-dimensional divisor function on this ring. Let

$$\mathfrak{T}_k(x) := \sum_{N(\alpha)\le x} \mathfrak{t}_k(\alpha),$$

where $N(a+ib) = a^2+b^2$. Then $\mathfrak{T}_k(x)$ can be computed in sublinear time.

Proof. It is well-known that

$$\frac{1}{4} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}[i]} \frac{\mathfrak{t}_k(\alpha)}{N^s(\alpha)} = \zeta^k(s) L^k(s,\chi_4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s},$$

where

$$f(n) := \sum_{N(\alpha)=n} \mathfrak{t}_k(\alpha).$$

But by Theorem 4

$$\operatorname{dec} \underbrace{\chi_4 \star \cdots \star \chi_4}_{k \text{ factors}} = 1 - 1/k.$$

By (3) we obtain that for even k

$$\operatorname{dec} f = \frac{1-(1-1/k)\bigl(1-4/(3k)\bigr)}{1/k+4/(3k)} = 1 - \frac{4}{7k}$$

and for odd k

$$\operatorname{dec} f = \frac{1-(1-1/k)\bigl(1-4/(3k+1)\bigr)}{1/k+4/(3k+1)} = 1 - \frac{4}{7k+1}.$$

3. Proof of the Theorem 2. The proof follows the outline of the proof of [8, Th. 1.2], but uses improved bound for the complexity of the computation of

$$T_2^*(x) := \sum_{n \le x} \tau_2^*(n).$$

Proof. Trivially we have

$$\sum_{a \le n \le b} \tau_2^*(n) = T_2^*(b) - T_2^*(a-1).$$

As soon as $\tau_2^*(n) = 2^{\omega(n)}$, where $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, all summands in the left side are divisible by 4, beside those, which corresponds to $n = p^j$. Moving to the congruence modulo 4, we obtain

$$2 \sum_{j=1}^{O(\log x)} \# \left\{ p \in \left[a^{1/j}, b^{1/j} \right] \right\} \equiv T_2^*(b) - T_2^*(a-1) \pmod 4.$$

As far as $a > x$ and $b - a \le O(x^{1/2+c})$, then for $j > 1$ interval $\left[a^{1/j}, b^{1/j}\right]$ contains $O(x^c)$ elements; thus all such summands can be computed in $O(x^{c+\varepsilon})$ steps using AKS primality test [1]. The right side of the congruence is computable in $O(x^{7/15+\varepsilon})$ operations due to Example 13.

The discussion above shows that the desired quantity

$$\#\{p \in [a,b]\} \equiv \frac{T_2^*(b) - T_2^*(a-1)}{2} - \\ - \sum_{j=2}^{O(\log x)} \# \left\{ p \in \left[a^{1/j}, b^{1/j} \right] \right\} \pmod 2$$

can be computed in $O(x^{\max(c, 7/15)+\varepsilon})$ steps.

Conclusion. Further development of algorithms of the sublinear summation (e. g., summation of μ in arithmetic progressions) will lead to the generalization of Theorem 6 over broader classes of functions. Also one can investigate summation of f such that its Dirichlet series is infinite, but sparse product of form (5).

1. **Agrawal M.** PRIMES is in P [text] / M. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena // Annals of Mathematics. – 2004. – Vol. 160, no. 2. – P. 781–793.
2. **Charles D. X.** Computing the Ramanujan tau function [text] / D. X. Charles // The Ramanujan Journal. – 2006. – Vol. 11, no. 2. – P. 221–224.
3. **Deléglise M.** Computing the summation of the Möbius function [yext] / M. Deléglise, J. Rivat // Exp. Math. – 1996. – Vol. 5, no. 4. – P. 291–295.
4. **Flajolet P.** Analytic combinatorics [text] / P. Flajolet, R. Sedgewick. – [S. l.] : Cambridge University Press, 2009. – 824 p.

5. **Lenstra Jr. H. W.** Primality testing with Gaussian periods H. W. Lenstra Jr., C. Pomerance. – 2011. – nov. – URL: http://www.math.dartmouth.edu/ carlp/aks041411.pdf.
6. **Lagarias J. C.** Computing $\pi(x)$: An analytic method [text] / J. C. Lagarias, A. M. Odlyzko // Journal of Algorithms. – 1987. – Vol. 8, no. 2. – P. 173–191.
7. **Sladkey R. A** Successive approximation algorithm for computing the divisor summatory function [text] / R. Sladkey. – 2012. – URL: http://arxiv.org/pdf/1206.3369v1.
8. **Tao T.** Deterministic methods to find primes [text] / T. Tao, E. Croot III, H. Helfgott // Math. Comp. – 2012. – Vol. 81, no. 278. – P. 1233–1246.
9. **The on-line** encyclopedia of integer sequences [text] / Ed. by N. J. A. Sloane. – [S. l. : s. n.]. – URL: http://oeis.org.
10. **The development** of the number field sieve [text] / Ed. by A. K. Lenstra, H. W. Lenstra. – [S. l.] : Springer Verlag, 1993. – Vol. 1554 of Lecture Notes in Mathematics.

ISSN 2304-1579. Visnyk Odesk. Nats. Univers. Mat. i Mekh.–2013 .–V. 18,Is.1(17).–P.115–120

Mathematical Subject Classification: 65C10, 11K45
UDC 511

N. A. Fugelo*, P. Popovich**
*Podillya State Agrarian and Engineering University,
Institute of Business and Finances
**I. I. Mechnikov Odessa National University

SQUARE-FREE NUMBERS IN THE SEQUENCE $\{n^2+1\}$

Фугело М. А., Попович П. Безквадратні числа послідовності $\{n^2+1\}$. Нехай $B_2(x)$ є числом безквадратних чисел, що належать послідовності зсунутих квадратів в інтервалі $[1,x)$. Раніше було вивчено розподілення значень деяких арифметичних функцій на даній послідовності. Функція $B_2(x)$ представляє собою узагальнення рахункової функції для безкадратних цілих в інтервалі $[1,x)$. Р. Белман [1] отримав нетривіальну оцінку для $B_2(x)$. В даній роботі ми уточнюємо оцінку Белмана, користуючись поєднанням елементарного та аналітичного методів.

Ключові слова: безквадратні числа, асимптотична формула, рівняння Пела.

Фугело Н. А., Попович П. Бесквадратные числа последовательности $\{n^2+1\}$. Пусть $B_2(x)$ это число бесквадратных чисел, принадлежащих последовательности сдвинутых квадратов в интервале $[1,x)$. Ранее было изучено распределение значений некоторых арифметических функций на данной последовательности. Функция $B_2(x)$ представляет собой обобщение счетной функции для бескадратных целых в интервале $[1,x)$. Р. Беллман [1] получил нетривиальную оценку для $B_2(x)$. В данной работе мы уточняем оценку Беллмана, используя сочетание элементарного и аналитического методов.

Ключевые слова: бесквадратные числа, асимптотическая формула, уравнение Пелла.

Fugelo N. A., Popovich P. Square-free numbers in the sequence $\{n^2+1\}$. Let $B_2(x)$ be the number of square-free numbers belonging to the sequence of shifting square on the interval $[1,x)$. The distribution of values of some arithmetic functions on the relevant sequence has been studied ahead. The function $B_2(x)$ is the generalization of counting function for square-free integers on interval $[1,x)$. R. Bellman [1] found a non-trivial estimation for $B_2(x)$. In this work we extend the Bellman's estimate, using the compatibility of elementary and analytic methods.

Key words: square-free numbers, asymptotic formula, Pell's equation.

Introduction. The sequence of natural numbers of form $\{n^2+1\}$, $n=1,2,\ldots$, has the complex structure. It's the talk of such fact that it is unknown the set of prime numbers $p=n^2+1$ are finite or infinite. That is why the study of number-theoretical function on the sequence $\{n^2+1\}$, $n\in\mathbb{N}$ is very interesting problem, but challenging task. Recall two important results:

$$\sum_{n\le x}\frac{\varphi(n^2+1)}{n^2+1}=\frac{x}{2}\prod_{p\equiv 1\pmod 4}\left(1-\frac{2}{p^2}\right)+O(\log x)\qquad (Schwartz), \tag{1}$$

$$\sum_{n\le x}\tau(n^2+1)=c_1x\log x+c_2x+O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\qquad (Motohashi). \tag{2}$$

In present paper we construct an asymptotic formula for the sum

$$B_2(x) = \sum_{n\le x} \mu^2(n^2+1),$$

where $\varphi(n)$, $\tau(n)$, $\mu(n)$ are respectively Euler's function, divisor function, Möbius function.

It is obvious that $B_2(x)$ determines the number of square-free integers among of n^2+1, $n = 1, 2, \ldots, [x]$. The function $B_2(x)$ is generalization of the function

$$B_1(x) = \sum_{n\le x} \mu^2(n),$$

which study usually by "elementary method" or method of the Dirichlet generating series. Unfortunately, the study of $B_2(x)$ by method of the Dirichlet generating series does not make sense, because $\mu^2(n^2+1)$ does not a multiplicative function. We will combine "elementary" and analytical methods to study the $B_2(x)$. We proved the following theorem.

Theorem 1. *For $x\to\infty$ we have*

$$\sum_{n\le x} \mu^2(n^2+1) = xO\left(x^{\frac{1}{2}}\left(\log x\right)^3\right)$$

with an absolute constant in symbol "O".

Auxiliary arguments. For a fix natural k we consider pair of the equations (as n and d):

$$n - kd^2 = \pm 1. \tag{3}$$

The pair of equations calls the Pell's equation.

Denote by $\mathbb{Q}\left(\sqrt{k}\right)$ a real quadratic extension of $\mathbb{Q}$. Every solution (n,d) of the Pell's equation defines the tetrad of numbers $\pm n \pm d\sqrt{k}$ each of which has a norm $n^2 - kd^2 = \pm 1$ (thereof call unity of field). There exists a number $\varepsilon_0 = n_0 \pm d_0\sqrt{k}$, $\varepsilon_0 > 1$, such that $N(\varepsilon_0) = n_0^2 - kd_0^2 = \pm 1$, and every $\varepsilon = n \pm d\sqrt{k}$ with norm $n^2 - kd^2 = \pm 1$ is a degree of ε_0, $\varepsilon = \varepsilon_0^a$, $a \in \mathbb{N}$. That number calls a fundamental unit. So there is one-one correspondence between the solutions (n,d) and natural numbers a (for given unity). Hence, it follows that if (n_0, d_0) be the solution of the Pell's equation and ε_0 be an associated unity then we have for any solution (n,d):

$$\begin{gathered} n - d\sqrt{k} = (n_0 - d_0\sqrt{k})^2 = \\ \left(n_0^2 + \binom{a}{2} kd_0^2 n_0^{a-2} + \cdots\right) - \left(\binom{a}{1} n_0^{a-1} d_0 + \cdots\right)\sqrt{k}, \\ n = n_0^a + \binom{a}{2} kd_0^2 n_0^{a-2} + \cdots, \\ d = \binom{a}{1} n_0^{a-1} d_0 + \binom{a}{3} n_0^{a-3} d_0^3 k + \cdots. \end{gathered} \tag{4}$$

Lemma 1. *Let $A_k(x)$ be the number of solutions of the Pell's equation (3) under the condition $n \le x$. Then the following estimation*

$$A_k(x) = O_k(\log x)$$

holds.

This assertion follows from (4).

Denote by $\rho(m)$ the number of solutions of the congruence $u^2 \equiv -1 \pmod{m}$, $1 \le u \le m$. It is clear for a prime p we have

$$\rho(p^\alpha) = \begin{cases} 2 & if \quad p \equiv 1 \pmod 4,\ \alpha = 1,2,\dots, \\ 0 & if \quad p \equiv 3 \pmod 4 \ or\ p = 2,\ \alpha > 1, \\ 1 & if \quad p = 2,\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Lemma 2. *For $x \to \infty$*

$$\sum_{n \le x} \rho(n) = x + O\left(x^{\frac{1}{2}} (\log x)^3\right).$$

Proof. We have

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^s}\right)^{-1},\ \Re s > 1.$$

The Perron's formula gives

$$\sum_{n \le x} \rho(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right),\ c > 1, T > 1. \tag{5}$$

Therefore, we infer

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \rho(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} \frac{\zeta(s) L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{-1} \frac{x^s}{s} ds + \\ + res \lim_{s=1} \left\{ \frac{\zeta(s) L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)(1+2^{-s})} \cdot \frac{x^s}{s} ds + O\left(\int \lim_{1/2}^{c} x^\sigma T^{1-\sigma} \log T^8 \cdot \frac{ds}{T}\right) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{x^c}{T(c-1)}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

By the inequality Cauchy-Bunyakovsky we obtain for the first integral in (6)

$$\begin{aligned} \int\limits_{1/2-iT}^{1/2+iT} \left|\zeta(s) L(s,\chi_4) \zeta^{-1}(2s)(1+2^{-s})^{-1}\right| \frac{x^{\frac{1}{2}}}{|s|} dt = \\ = O\left(x^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-T}^{T} \left|\zeta(\frac{1}{2} + it)\right|^2 \frac{dt}{t} \cdot \int\limits_{-T}^{T} \left|L\left(\frac{1}{2} + it, \chi_4\right)\right|^2 \frac{dt}{t}\right) \cdot \log T\right) = \\ = O\left(x^{\frac{1}{2}} (\log T)^3\right). \end{aligned}$$

Next,

$$res\lim_{s=1}\left\{\frac{\zeta(s)L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)(1+2^{-s})}\cdot\frac{x^s}{s}\right\}=x\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{2}{3}=x,$$

$$\int\limits_{1/2}^{c}\left|\zeta(s)L(s,\chi_4)\zeta^{-1}(2s)(1+2^{-s})^{-1}\right|\frac{x^\sigma}{T}d\sigma=O\left(\int\limits_{1/2}^{c}\left(\frac{x}{T}\right)^{\sigma}(\log T)^3 d\sigma\right)=$$

$$=O\left(\left(\frac{x}{T}\right)^{\frac{1}{2}}\log^3 T\right)+O\left(\frac{x^c}{T^c}\log^3 T\right).$$

Here, we used the estimations for $\zeta(s)$, $L(s,\chi_4)$ with $\Re s\geq\frac{1}{2}$, $1\leq|\Im s|\leq T$ and also the estimations of the second moments $\zeta(s)$, $L(s,\chi_4)$ on half line $\Re s=\frac{1}{2}$. Taking $c=1+\frac{1}{\log x}$, $T=x^{\frac{1}{2}}$ we obtain our assertion.

Main Results. R. Bellman[1] (pp.146-148) have been obtained the asymptotic formula

$$B_2(x)=cx+O\left(\frac{x}{\log x}\right),\quad c=\prod p\left(1-\frac{\rho(p)}{p^2}\right).\tag{7}$$

Repeating the argument used by Bellman in the proof of (7) we can make more precise this result:

$$B_2(x)=cx+O\left(\frac{x}{\log x(log\log x)^{A_1}}\right),$$

where A_1 is a large constant.

P. Bellman made an attempt to obtain an error term in form $O\left(x^{\frac{2}{3}}\log x\right)$. However, the assertion of author that the equation $n^2-kd^2=-1$ (as to n and k) has $O(\log x)$ solutions $n\leq x$, $k\leq x$ for every fixed $d\leq x^{\frac{2}{3}}$, is fallible (example, for $d=1$ this equation has $O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ solutions).

For this reason the Bellman's arguments does not lead to goal. We use other method.

By the equality

$$\mu^2(n)=\sum_{d^2|n}\mu(d)$$

we derive

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\mu^2(n^2+1)&=\sum_{n\leq x}\sum_{d^2|(n^2+1)}\mu(d)=\sum_{\substack{k,d\\1\leq kd^2=n^2+1\leq x^2+1}}\mu(d)=\\&=\sum_{k\leq x^{\frac{2}{3}}(\log x)^{-\frac{2}{3}}}+\sum_{x^{\frac{2}{3}}(\log x)^{-\frac{2}{3}}<k\leq x^2+1}=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2,\end{aligned}\tag{8}$$

say.

We have

$$\left|\sum\nolimits_1\right|\leq\sum_{n\leq x}\sum_{\substack{k\leq\left(\frac{x}{\log x}\right)^{\frac{2}{3}}\\n^2-kd^2=1}}=O\left(x^{\frac{2}{3}}(\log x)^{\frac{1}{3}}\right).\tag{9}$$

(We taken into account that by Lemma 1 for every $k \le \left(x\log^{-1}x\right)^{\frac{2}{3}}$ it exists $O(\log x)$ values of n and d, $n \le x$, for which $n^2 - kd^2 = \pm 1$).

Next, by $k > (x\log^{-1}x)^{\frac{2}{3}}$ and $kd^2 \le x^2+1$, we have $d \le x^{\frac{2}{3}}(\log x)^{\frac{1}{3}}$.

Therefore

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{k > x^{\frac{2}{3}}\log^{-\frac{2}{3}}x} \sum_{\substack{d \le x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x \\ kd^2 = n^2+1 \le x^2+1}} \mu(d) = \sum_{d \le x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x} \mu(d) \sum_{\substack{n^2+1 \equiv 0 \pmod{d^2} \\ x^{\frac{1}{3}}\log^{-\frac{1}{3}}x < n \le x}} 1 = \tag{10}$$
$$= \sum_{d \le x^{\frac{1}{2}}} + \sum_{x^{\frac{1}{2}} < d \le x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x} = \sum\nolimits_{21} + \sum\nolimits_{22}.$$

Application Lemma 2, gives

$$\sum\nolimits_{21} = \sum_{d \le x^{\frac{1}{2}}} \mu(d) \sum_{\substack{n^2+1 \equiv 0 \pmod{d^2} \\ x^{\frac{1}{3}}\log^{-\frac{1}{3}}x < n \le x}} 1 = \sum_{d \le x^{\frac{1}{2}}} \mu(d)\left\{\frac{x}{d^2}\rho(d^2)\right\} + O\left(\rho(d^2)\right) +$$
$$+O\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot\rho(d^2)}{(\log x)^{\frac{1}{3}}d^2}\right) = x\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)\rho(d^2)}{d^2} + O\left(x\sum_{d > x^{\frac{1}{2}}}\frac{\rho(d^2)}{d^2}\right) + O\left(\sum_{d \le x^{\frac{1}{2}}}\rho(d^2)\right) +$$
$$+O\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(\log x)^{\frac{1}{3}}}\sum_{d \le x^{\frac{1}{2}}}\frac{\rho(d^2)}{d^2}\right) = x\prod_{\substack{p \\ p \equiv 1 \pmod 4}}\left(1 - \frac{\rho(p^2)}{p^2}\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right). \tag{11}$$

Moreover,

$$\sum\nolimits_{22} = O\left(\sum_{x^{\frac{1}{2}} < d \le x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x} \sum_{\substack{n^2+1 \equiv 0 \pmod{d^2} \\ n \le x}} 1\right) =$$
$$= O\left(\sum_{x^{\frac{1}{2}} < d \le x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x}\left\{\frac{x}{d^2}\rho(d^2) + \rho(d^2)\right\}\right) = \tag{12}$$
$$= O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x\right) = O\left(x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x\right).$$

Now from (7)-(11) derive

$$B_2(x) = x\prod_{\substack{p \\ p \equiv 1 \pmod 4}}\left(1 - \frac{\rho(p^2)}{p^2}\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}}\log^{\frac{1}{3}}x\right).$$

Conclusion. With the similar method it may be obtained the asymptotic formula for the sum

$$\sum_{n \le x}\mu^2(n+a),\ \ a \ne -b^2,\ \ b \in \mathbb{Z},$$

and hence, taking into account well-known result about the sum $\sum\limits_{n\leq x}\mu^2(n)\mu^2(n+k)$ it is reputed that the distribution of square-free numbers over the sequence of values of quadratic polynomial have been studied.

1. **Bellman R.** Analytic number theory – An Introduction [text] / Bellman R. – Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980.

ISSN 2304-1579.Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех.–2013 .–Т. 18, вип. 1(17).–С. 121–131

М Е Х А Н І К А

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.3

О. Ф. Кривий
Одеська національна морська академія

ТУНЕЛЬНЕ ВКЛЮЧЕННЯ ПРИ ЗМІШАНИХ УМОВАХ ВЗАЄМОДІЇ ІЗ КУСКОВО-ОДНОРІДНИМ АНІЗОТРОПНИМ ПРОСТОРОМ

Кривий О. Ф. Тунельне включення при змішаних умовах взаємодії із кусково-однорідним анізотропним простором. Розглянуто задачу про тунельне жорстке включення, що виходить одним кінцем в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів, які знаходяться в умовах узагальненої плоскої деформації. На включенні реалізовані змішані умови контактної взаємодії: зчеплене однією гранню із середовищем і знаходиться в умовах гладкого контакту на іншій грані. За допомогою побудованого розривного розв'язку задачу зведено до системи п'яти сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомою особливістю. Встановлені умови існування і асимптотики розв'язків вказаної системи. Отримані залежності показників особливостей напружень в вершині включення від його розташування і анізотропних властивостей півпросторів.
Ключові слова: кусково-однорідний анізотропний простір, включення, розривний розв'язок, сингулярні інтегральні рівняння, нерухома особливість.

Кривой А. Ф. Туннельное включение при смешанных условиях взаимодействия с кусочно-однородным анизотропным пространством. Рассмотрена задача о туннельном включении, выходящем одним концом в плоскость соединения двух различных анизотропных полупространств, находящихся в условиях обобщенной плоской деформации. На включении реализованы смешанные условия контактного взаимодействия: сцепление одной из граней со средой и гладкий контакт другой. С помощью построенного разрывного решения задачи сведены к системе пяти сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. Установлены условия разрешимости и асимптотика решений указанной системы. Получены зависимости показателей напряжений в вершине включения от его положения и анизотропных свойств полупространств.
Ключевые слова: кусочно-однородное анизотропное пространство, включение, разрывное решение, сингулярные интегральные уравнения, неподвижная особенность.

Kryvyy O. F. Tunnel inclusion in mixed conditions of interaction with piecewise homogeneous anisotropic space. The problem of the tunnel inclusion that goes on one end to the splice plane of the of two different anisotropic half spaces in situations of generalized plane strain. Implemented to enable mixed conditions of contact interaction: cohesion one of the faces with the medium and sleek contact with the other. With the constructed of discontinuous solution problems are reduced to a system of a system of five singular integral equations with fixed singularity. Establishes the conditions the solvability and the asymptotic behavior of solutions of this system. The dependencies of stress exponent

at the apex of inclusion of its provisions and the anisotropic properties of half-spaces.
Key words: inhomogeneous anisotropic spaces, crack, inclusion, discontinuous solution, singularity equations, fixed singularity cohesion.

Вступ. Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних анізотропних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались плоскими випадками [1-6]. В роботах [7-9] за допомогою побудованих інтегральних сингулярних співвідношень досліджені міжфазні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі, яке знаходиться в двовимірному стані (узагальнена плоска деформація ([10]). В цій праці вказаний метод узагальнено на випадок внутрішнього тунельного включення. Зокрема побудовано розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору за наявності внутрішніх дефектів і інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки і суми переміщень та напружень на вказаних дефектах в просторі узагальнених функцій повільного зростання. В результаті задача про тунельне включення, яке виходить під довільним кутом в площину з'єднання двох різних анізотропних півпросторів і перебуває в умовах повного зчеплення на одній із граней і умовах гладкого контакту на іншій, зведена до системи п'яти сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з нерухомими особливостями. Обґрунтовано існування і виявлена асимптотика поведінки розв'язків отриманих систем СІР. Отримані залежності показників особливостей напружень в вершинах включення від анізотропних властивостей матеріалів і кута нахилу включення.

Основні результати.

1. Побудова розривного розв'язку для кускво-однорідного анізотропного середовища. Нехай простір, який складений із двох різних анізотропних півпросторів, з'єднаних в площині $x = 0$, знаходиться в двовимірному стані, без наявності площин пружної симетрії, тобто в умовах узагальненої плоскої деформації [10]. В просторі містяться довільні кусково-неперервні циліндричні поверхні, напрямні яких паралельні осі OZ, в результаті перетину останніх площиною XOY утворюється кусково-неперервний контур ℓ. На вказаних поверхнях розташовані наскрізні дефекти загальної природи (типу тріщин, відшарованих і не відшарованих включень). Виходячи із рівняння рівноваги та узагальненого закону Гука, відносно компоненти тензора напружень та вектора переміщень:

$$\overrightarrow{\eta} = \{\eta_k(x,y)\}_{k=1}^{8} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, u, v, w\}, \tag{1}$$

отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$D[x, \partial_1, \partial_2]\overrightarrow{\eta} = f, x \neq 0, (x,y) \notin l, \tag{2}$$

де

$$D[x, \partial_1, \partial_2] = \left\| \begin{array}{cc} D_* & O_{3\times 3} \\ -B(x) & D_*^{\mathrm{T}} \end{array} \right\|, \ B(x) = \{\beta_{kj}(x)\}_{j,k=1}^{5}, \beta_{kj}(x) = \begin{cases} \beta_{kj}^{+}, x > 0, \\ \beta_{kj}^{-}, x < 0. \end{cases}$$

$$D_* = \left\| \begin{array}{ccccc} \partial_1 & 0 & \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_2 \end{array} \right\|, \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y},$$

$f = \{-X_0,\ -Y_0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$, $\beta_{kj}^{\pm}$ — коефіцієнти узагальненого закону Гука відповідно для верхнього та нижнього півпросторів, X_0, Y_0 проекції об'ємних сил на відповідні осі. Нормальні напруження σ_z при цьому визначимо за формулою $\sigma_z = -\beta_{66}^{-1}\sum_{j=1}^{5}\beta_{6j}v_j$. В площинні $x = 0$ вважаємо виконаними умови неперервності:

$$\chi^- = 0, \tag{3}$$

де $\chi^- = \left\{\chi_k^-(y)\right\}^6 = \{\langle\eta_1\rangle^-, \langle\eta_3\rangle^-, \langle\eta_4\rangle^-, \langle\eta_6\rangle^-, \langle\eta_7\rangle^-, \langle\eta_8\rangle^-\}$, $\langle\eta_k\rangle^-$ — стрибки функцій η_k при переході площини $x = 0$. Для подання умов на лінії ℓ, де можливі розриви всіх компонент вектора $\vec{\eta}$, введемо в кожній точці лінії ℓ локальну систему координат (N, S, Z). Напрямок осі S співпадає з напрямком дотичного вектора s до лінії ℓ в даній точці, напрямок осі N співпадає з напрямком нормального вектора n, який вибирається зліва від дотичного вектора, вісь Z залишається незмінною. Кут між осями X і N позначимо $\phi = \phi(x, y)$, $(x, y) \in \ell$. В новій системі координат компоненти тензора напружень та вектора переміщень позначимо так:

$$\overrightarrow{\eta}_\ell = \{\tilde{\eta}_k(x,y)\}_{k=1}^{8} = \{\sigma_{\rm N},\ \sigma_{\rm S},\ \tau_{\rm NS},\ \tau_{\rm NZ},\ \tau_{\rm SZ},\ u_{\rm N},\ v_{\rm S},\ w_{\rm Z}\}. \tag{4}$$

В залежності від виду контактної взаємодії дефектів із простором на лінії ℓ будуть відомі шість із наступних величин: $\tilde{\chi}^{\pm} = \{\tilde{\chi}_k^{\pm}\}_{k=1}^{6}$, де $\tilde{\chi}_k^{\pm} = \langle\tilde{\chi}_k\,(x,y)\rangle_\ell^{\pm}$ — відповідно стрибки і суми функцій (4). Для визначеності будемо вважати відомими на лінії ℓ стрибки:

$$\langle\tilde{v}_k\rangle_\ell^- = \tilde{\chi}_k^-(x,y),\ k = \overline{1,8},\ k \neq 2,5,\ \ (x,y) \in \ell. \tag{5}$$

Розв'язки крайової задачі (2), (3), (5), при виконані умов $X_0,\, Y_0 \in C^1_{0,\ell}(\mathbb{R}^2) \cap$ $\cap L_1(\mathbb{R}^2)$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(x,y) \in C_*(\ell) \cap L_1(\ell)\,, \chi_{k0}^{\pm}(y) \in C_*(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, слід розшукувати в класі $C^1_{0,\ell}(\mathbb{R}^2) \cap L_1(\mathbb{R}^2)$, де $C^m_{0,\ell}$ — простір функцій, неперервних разом зі всіма похідними до m-порядку в $\mathbb{R}^2$, за виключенням прямої $x = 0$ і лінії ℓ, $L_1(\mathbb{R}^2)$ — простір інтегрованих в $\mathbb{R}^2$ функцій, $C_*(\ell)\,, L_1(\ell)$ — простори відповідно кусково-неперервних та інтегрованих на ℓ функцій.

Продовжимо систему (2) на весь простір, для цього перейдемо до простору узагальнених функцій повільного зростання $\Im'(\mathbb{R}^2)$ і врахуємо зв'язок між узагальненими і звичайними похідними $\partial_k\eta_j = \tilde{\partial}_k\eta_j - \chi_j^-(x,y)(-1)^{k+1}\kappa_k\delta(\ell)$, де $\delta(\ell)$ — функція Дірака зосереджена на контурі ℓ, χ_j^- — стрибки функцій η_j на контурі ℓ, а також формули зв'язку між компонентами векторів $\vec{\eta}$ і $\vec{\eta}_\ell$ [11]. В результаті відносно вектору $\vec{\eta}$ в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$ отримаємо крайову задачу

$$\left(D[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2]\vec{\eta}, q\right) = (f_*, q)\,,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ q \in \Im(\mathbb{R}^2), \tag{6}$$

$$\eta_k^+ = \eta_k^-,\ k = 1,3,4,6,7,8, \tag{7}$$

де

$$v_k^{\pm} \in \Im'_{\pm}(\mathbb{R}^2), f_* = \{f_{j*}\}^8, f_{1*} = \left(\tilde{\chi}_1^-\kappa_1 + \tilde{\chi}_2^-\kappa_2\right)\delta(\ell) - X_0,$$

$$f_{2*} = \left(-\tilde{\chi}_1^-\kappa_2 + \tilde{\chi}_2^-\kappa_1\right)\delta(\ell) - Y_0, f_{3*} = \tilde{\chi}_3^-\delta(\ell), f_{8*} = -\tilde{\chi}_6^-\kappa_2\delta(\ell),$$

$$f_{4*} = (\tilde{\chi}_4^-\kappa_1 + \tilde{\chi}_5^-\kappa_2)\kappa_1\delta(\ell), f_{5*} = (\tilde{\chi}_4^-\kappa_2 - \tilde{\chi}_5^-\kappa_1)\kappa_2\delta(\ell), \kappa_1 = \cos\phi,$$

$$f_{6*} = (\tilde{\chi}_5^-(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) - 2\kappa_1\kappa_2\tilde{\chi}_4^-)\delta(\ell), f_{7*} = \tilde{\chi}_6^-\kappa_1\delta(\ell), \kappa_2 = \sin\phi,$$

$$\Im'_\pm(\mathbb{R}^2) = \{f^\pm \in \Im'(\mathbb{R}^2)\,|\text{supp}\ f^\pm = \mathbb{R}_\pm \times \mathbb{R}\}.$$

Розв'язки крайової задачі (6), (7), слідуючи роботам [12, 7–9], будемо називати *розривним розв'язком для кусково-однорідного анізотропного середовища* в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$. Останній отримаємо, спираючись на фундаментальний розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного простору, тобто на систему векторів $w_j = \{w_{kj}(x, y, x_0, y_0)\}_{k=\overline{1,8}}$, $w_{kj} \in \Im'(\mathbb{R}^2)$, $j = \overline{1,8}$, яка задовольняє наступній системі крайових задач:

$$D[x, \tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_2]w_j = f_{0j}, j = \overline{1,8} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{8}$$

$$w_{kj}^+ = w_{kj}^-,\ k = \overline{1,8}, k \neq 2, k \neq 5, \tag{9}$$

де $w_{kj}^\pm \in \Im'_\pm(\mathbb{R}^2)$,$f_{0j} = \{f_{kj}^0\}^8 = \{\delta_{kj}\}^8\delta(x - x_0, y - y_0), \cdots (x_0, y_0) \neq 0$, δ_{nj} — символ Кронекера.

Компоненти векторів w_j належать підпростору [6] $\Im'_0(\mathbb{R}^2)$, отже, застосувавши до (8) двовимірне перетворення Фур'є і скориставшись результатами робіт [7–9], відносно $\mathrm{W}_{kj}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{F}_2\left[w_{kj}^\pm\right] \in \Omega'_{\pm,-1}(\mathbb{R}^2)$, отримаємо за змінною α_1 матричну крайову задачу Рімана в просторі $\Im'(\mathbb{R}^2)$:

$$M_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\,W_j^+ = M_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\,W_j^+ + f_{*j}, \quad j = \overline{1,8}, \tag{10}$$

де $M_\pm = \pm D\left[\pm 0, -i\alpha_1, -i\alpha_2\right], W_j^\pm = \left\{\mathrm{W}_{kj}^\pm\right\}^8,\ f_{*j} = \{\delta_{kj}e_0^*\}^8, e_0^* = e^{i\alpha_1 x_0 + i\alpha_2 y_0}$.

Враховуючи поліноміальний вид коефіцієнтів задачі (10), застосуємо до її розв'язування метод, поданий в роботах [6–7], в результаті отримаємо

$$W_{kj} = W_{kj}^+ + W_{kj}^-,\ k = \overline{1,8},\ j = \overline{1,8}, \tag{11}$$

де $(W_{kj}^\pm = (-i\alpha_2)W_{kj}^\pm,\ k = 6,7,8), W_{kj}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\mathrm{P}_6^\pm(\alpha_1,\alpha_2)}\sum_{p=1}^8 i^{\theta_1} r_{kp}^\pm t_{pj}^\pm$,

$$\mathrm{P}_6^\pm(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{P}_4^\pm\mathrm{P}_2^\pm - \left(\mathrm{P}_3^\pm\right)^2,\ \mathrm{P}_2^\pm = \beta_{44}^\pm\alpha_2^2 - 2\beta_{45}^\pm\alpha_1\alpha_2 + \beta_{55}^\pm\alpha_1^2,$$

$$\mathrm{P}_3^\pm = \beta_{14}^\pm\alpha_2^3 - (\beta_{15}^\pm + \beta_{34}^\pm)\alpha_1\alpha_2^2 + (\beta_{24}^\pm + \beta_{35}^\pm)\alpha_1^2\alpha_2 - \beta_{25}^\pm\alpha_1^3,$$

$$\mathrm{P}_4^\pm = \beta_{11}^\pm\alpha_2^4 - 2\beta_{13}^\pm\alpha_1\alpha_2^3 + (\beta_{33}^\pm + 2\beta_{12}^\pm)\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\beta_{23}^\pm\alpha_1^3\alpha_2 + \beta_{22}^\pm\alpha_1^4,$$

$$r_{kp}^\pm = h_k^\pm\lambda_{p,l}^\pm,\ k = \overline{1,5},\ p = \overline{1,8},\ l = \begin{cases} 1, & k = 1,2,3 \\ 2, & k = 4,5, \end{cases}, \theta_1 = \begin{cases} 1, p = \overline{1,3} \\ 0, p = \overline{4,8} \end{cases},$$

$$\lambda_{1l}^\pm = \alpha_1^{-1}(g_j^\pm\mathrm{P}_{l+2}^\pm - \ell_j^\pm\mathrm{P}_{l+1}^\pm), \lambda_{jl}^\pm = \alpha_2^{-1}(g_5^\pm\mathrm{P}_{l+2}^\pm - \ell_5^\pm\mathrm{P}_{l+1}^\pm), j = 1,3,$$

$$\lambda_{5l}^\pm = -\,\alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^\pm,\ \lambda_{6l}^\pm = -\alpha_1\alpha_2\mathrm{P}_{l+1}^\pm,\ \lambda_{7l}^\pm = \alpha_2\mathrm{P}_{l+2}^\pm, \lambda_{8l}^\pm = -\alpha_1\mathrm{P}_{l+2}^\pm, l = 1,2,$$

$$r_{6j}^\pm = \alpha_1^{-1}\alpha_2(\lambda_{j1}^\pm\ell_1^\pm - \lambda_{j2}^\pm g_1^\pm),\ r_{7j}^\pm = \lambda_{j1}^\pm\ell_2^\pm - \lambda_{j2}^\pm g_2^\pm, r_{8j}^\pm = \lambda_{j1}^\pm\ell_5^\pm - \lambda_{j2}^\pm g_5^\pm,$$

$$h_1^\pm = \alpha_2^2,\ h_2^\pm = \alpha_1^2,\ h_3^\pm = -\alpha_1\alpha_2,\ h_4^\pm = -\alpha_2, h_5^\pm = \alpha_1, \lambda_{4l}^\pm = \alpha_2^2\mathrm{P}_{l+1}^\pm,$$

$$\ell_k^\pm = \beta_{1k}^\pm\alpha_2^2 - \beta_{3k}^\pm\alpha_1\alpha_2 + \beta_{2k}^\pm\alpha_1^2,\ g_k^\pm = \beta_{4k}^\pm\alpha_2 - \beta_{5k}^\pm\alpha_1,\ k = \overline{1,5}.$$

$$\{t^{\pm}_{kj}\}_{k=\overline{1,8}} = \theta(\pm x_0)e^*_0\{\delta_{kj}\}_{k=\overline{1,8}} \mp \frac{1}{2}f^*_0,\ j=\overline{1,8},$$

$$f^*_0 = \{\chi_{10}(\alpha_2), \chi_{30}(\alpha_2), \chi_{40}(\alpha_2), \chi_{60}(\alpha_2), 0, \chi_{70}(\alpha_2), \chi_{80}(\alpha_2), 0\}.$$

Для визначення невідомих функцій $\chi_{k0}(\alpha_2)$ скористаємося умовами (9). Після обернення (11), вирази компонент фундаментальних розривних розв'язків для кусково-однорідного анізотропного простору подамо так:

$$w_{kj}(x,y,x_0,y_0) = \theta(x)w^+_{kj} + \theta(-x)w^-_{kj},\ \ k=\overline{1,8},\ j=\overline{1,8}, \tag{12}$$

де

$$w^+_{kj} = \tfrac{2}{\pi} Im \textstyle\sum_{n=1}^3 \{\theta(x_0)\bar{R}^+_{kjn}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}^+_n - \bar{\xi}^+_{n0}] + \sum_{m=1}^3 [\theta(x_0)\beta^{++}_{kjnm}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}^+_n - \xi^+_{m0}] +$$
$$+\theta(-x_0)\beta^{+-}_{kjnm}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}^+_n - \bar{\xi}^{\pm}_{m0}]]\},$$

$$w^-_{kj} = \tfrac{2}{\pi} Im \textstyle\sum_{n=1}^3 \{\theta(-x_0)\bar{R}^-_{kjn}\mathrm{K}_{kj}[\bar{\xi}^-_n - \bar{\xi}^-_{n0}] + \sum_{m=1}^3 [\theta(x_0)\beta^{-+}_{kjnm}\mathrm{K}_{kj}[\xi^-_n - \xi^+_{m0}] +$$
$$+\theta(-x_0)\beta^{--}_{kjnm}\mathrm{K}_{kj}[\xi^-_n - \bar{\xi}^-_{m0}]]\},$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f] = f^{-1}, (k=\overline{1,5}; j=\overline{1,3}) \bigcup (k=\overline{6,8}; j=\overline{4,8}), \xi^{\pm}_m = z^{\pm}_m x + y,$$

$$\mathrm{K}_{kj}[f] = -f^{-2}, (k=\overline{1,5}; j=\overline{4,8}), \mathrm{K}_{kj}[f] = \ln f, (k=\overline{6,8}; j=\overline{1,3}),$$

$$\alpha^+_{pjn} = \sum_{k=1}^6 a^*_{kp}R^{0,+}_{kjn},\ \alpha^-_{pjn} = \sum_{k=1}^6 a^*_{kp}\bar{R}^{0,-}_{kjn},\ \beta^{+\pm}_{kjmn} = \sum_{p=1}^6 \alpha^{\pm}_{pjm}\bar{\mathrm{N}}^+_{kpn},\ \mathrm{R}^{\pm}_{kp} = \sum_{n=1}^3 R^{\pm}_{kpn},$$

$$\beta^{-\pm}_{kjnm} = \sum_{p=1}^6 \alpha^{\pm}_{pjn}\mathrm{N}^-_{kpm},\ \xi^{\pm}_{m0} = z^{\pm}_m x_0 + y_0, \left\{R^{0,\pm}_{kjm}\right\}_{k=\overline{1,6}} = \left\{R^{\pm}_{kjm}\right\}_{k=1,3,4,6,7,8},$$

$$R^{\pm}_{kpn} = \frac{r^{\pm}_{kp}(z^{\pm}_n,1)}{\beta^{\pm}_0 q^{\pm}_n(z^{\pm}_n)\bar{q}^{\pm}_n(z^{\pm}_n)}, q^{\pm}_n(z^{\pm}_n) = \prod_{l=1,\,l\neq n}^3 (z^{\pm}_n - z^{\pm}_l), \bar{q}^{\pm}_n(z^{\pm}_n) = \prod_{l=1}^3 (z^{\pm}_n - \bar{z}^{\pm}_l),$$

$$\mathrm{P}^{\pm}_6(z^{\pm}_n,1) \equiv 0,\ \beta^{\pm}_0 = \beta^{\pm}_{22}\beta^{\pm}_{55} - (\beta^{\pm}_{25})^2,$$

$$N^{\pm} = \left\{\sum_{n=1}^3 \mathrm{N}^{\pm}_{kpn}\right\}^6 = \left\{\sum_{n=1}^3 R^{\pm}_{kpn}\right\}^{p=1,2,3,4,6,7}_{k=1,3,4,6,7,8}.$$

Знайдені вирази (12) дають змогу, скориставшись теоремою про згортку, отримати розривний розв'язок для кусково-однорідного анізотропного середовища:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^8 w_{kj} * f_{j*} = \sum_{j=1}^8 \iint_{\mathbb{R}^2} w_{kj}(x,y,x_0,y_0)f_{j*}(x_0,y_0)dx_0dy_0. \tag{13}$$

Подання (13) містить шість стрибків $\tilde{\chi}^-_k$, $k=\overline{1,6}$ компонент тензора напружень та вектора переміщень, зосереджених на контурі ℓ. Частина із яких, в залежності від типу дефекту, виявляються невідомими функціями. Для їх визначення, скориставшись формулами Сохотського, отримаємо інтегральні співвідношення, що зв'язують стрибки та суми $\tilde{\chi}^{\pm} = \{\tilde{\chi}^{\pm}_k\}^6_{k=1}$ на контурі ℓ. Зокрема, якщо контур ℓ є об'єднанням відрізків, розташованих вздовж прямої, яка проходить через початок координат під кутом ϕ до осі OX: $\ell = \bigcup_{j=1}^{r}(a_j;b_j)$, тобто: $x = t\cos\phi$, $x_0 = \tau\cos\phi$, $y = t\sin\phi$, $y_0 = \tau\sin\phi$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(x,y) = \tilde{\chi}_k^{\pm}(t), (k=\overline{1,6})$, $\tilde{\chi}_k^{\pm}(t) = (\tilde{\chi}_k^{\pm}(t))', (k=\overline{4,6})$, вказані співвідношення подамо так:

$$\tilde{\chi}_k^{+}(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_{\ell}\tilde{\chi}_j^{-}(\tau)\left[\frac{\Upsilon_{kj}(t)}{t-\tau} + Im\sum_{n,m=1}^{3}\frac{\mathrm{B}_{kjnm}}{te_{mn}-\tau}\right]d\tau, \quad t\in\ell, \ \ k=\overline{1,6}, \qquad (14)$$

де

$$\Upsilon_{kj}^{\pm} = 4Im\sum_{n=1}^{3}\frac{H_{jkn}^{\pm}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \, B_{kjmn}^{\pm+} = \frac{b_{kjnm}^{\pm+}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \, B_{kjmn}^{\pm-} = \frac{b_{kjnm}^{\pm-}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \delta_* = \begin{cases} 1, j=\overline{1,3} \\ 2, j=\overline{4,6} \end{cases},$$

$$B_{kjnm}^{\pm+} = \frac{b_{kjnm}^{\pm+}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \, B_{kjnm}^{\pm-} = \frac{b_{kjnm}^{\pm-}}{\left(\bar{\beta}_n^{\pm}\right)^{\delta_*}}, \left\{e_{nm}^{++}, e_{nm}^{+-}, e_{nm}^{-+}, e_{nm}^{--}\right\} = \left\{\frac{\bar{\beta}_n^{+}}{\beta_m^{+}}, \frac{\bar{\beta}_n^{+}}{\bar{\beta}_m^{-}}, \frac{\beta_n^{-}}{\beta_m^{+}}, \frac{\beta_n^{-}}{\bar{\beta}_m^{-}}\right\},$$

$$\beta_n^{\pm} = z_n^{\pm}\cos\phi + \sin\phi, \Upsilon_{kj} = \sum_{\pm}\theta(\pm t)\Upsilon_{kj}^{\pm}, \mathrm{B}_{kjnm} = \sum_{\pm(\pm)}\theta(\pm t)\theta((\pm)\tau)B_{kjnm}^{\pm(\pm)},$$

$$e_{nm} = \sum_{\pm(\pm)}\theta(\pm t)\theta((\pm)\tau)e_{nm}^{\pm(\pm)}.$$

Співвідношення (14) узагальнюють співвідношення для кусково-однорідної анізотропної площини [6] і дозволяють задачі про внутрішні тунельні дефекти в кусково-однорідному анізотропному середовищі зводити безпосередньо до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР).

2. Постановка і зведення до системи СІР задач про тунельне включення. Нехай в результаті перетину тунельного включення площиною X0У утвориться відрізок $\ell = (0;a)$ (Рис. 1).

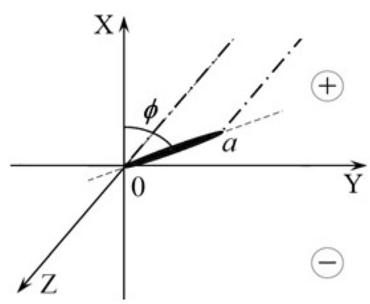


Рис. 1

До включення прикладене довільне навантаження з рівнодійною $P=(P_1,P_2,0)$ і центральним моментом M, які забезпечують двовимірний стан. Розміщення граней включень після деформації описується функціями

$$\tilde{w}^{\pm}(t) = \varepsilon + \delta^{*}t + \tilde{w}_{*}^{\pm}(t), \ t\in\ell, \qquad (15)$$

де функції $\tilde{w}_*^{\pm}(t)$ описують форму граней включення. Грані включень, що знаходяться з боку нормалі, зчепленні з середовищем, а протилежні грані знаходяться в умовах гладкого контакту. Враховуючи подання $\tilde{\chi}_4^+(t) = (\tilde{w}^+(t))' + +(\tilde{w}^-(t))'$, $\tilde{\chi}_4^-(t) = (\tilde{w}^+(t))' - (\tilde{w}^-(t))', t \in \ell$, рівності $\tilde{\chi}_j^-(t) = 0,\ t \notin \ell, j = \overline{1,6}$, і умови

$$\zeta_j^-(t) = \zeta_{j+3}^+(t) = 0,\ j = 2,3; t \in \ell, \{\zeta_k^{\pm}\}^6 = \frac{1}{2}\{\tilde{\chi}_k^+ \pm \tilde{\chi}_k^-\}^6,$$

які відображають вказаний тип контактної взаємодії, за допомогою останніх п'яти рівностей із співвідношень (14), отримаємо відносно вектора $h = \{h_j(t)\}^5 = = \{\tilde{\chi}_1^-(t), \tilde{\zeta}_2^+(t), \tilde{\zeta}_3^+(t), -\tilde{\zeta}_5^-(t), -\tilde{\zeta}_6^-(t)\}$, систему п'яти СІР

$$M_0 h(t) + \frac{1}{\pi} M_{\mathrm{S}} \int_0^a \frac{h(\tau)}{t-\tau} d\tau + \frac{4}{\pi} Im \sum_{n,m=1}^{3} B_{nm} \int_0^a \frac{h(\tau) d\tau}{e_{nm}^{++} t - \tau} = q(t),\ \ t \in \ell, \tag{16}$$

де

$$M_{\mathrm{S}} = \left\{ \Upsilon_{kj}^+ \right\}_{k=\overline{2,6}; j=\overline{1,6}, j\neq 4},\ M_{nm} = \left\{ \mathrm{B}_{kjnm}^{++} \right\}_{k=\overline{2,6}; j=\overline{1,6}, j\neq 4},$$

$$q(t) = \left\{ \tilde{\chi}_4^+(t)\delta_{k,4} - \frac{\Upsilon_{k,4}^+}{\pi} \int_\ell \frac{\tilde{\chi}_4^-(\tau)}{t-\tau} d\tau - Im \sum_{n,m=1}^{3} \frac{\mathrm{B}_{k,4,nm}^{++}}{\pi} \int_\ell \frac{\tilde{\chi}_4^-(\tau)}{t e_{nm}(t,\tau) - \tau} d\tau \right\}_{k=\overline{2,6}},$$

$M_0 = \mathrm{diag}\{0,-1,-1,1,1\}$ — діагональна матриця п'ятого порядку. Вказану систему слід доповнити умовами рівноваги і замкнутості

$$\int_\ell \tilde{\chi}_k^-(\tau) d\tau = \mathrm{P}_k, \quad (\mathrm{P}_3 = \mathrm{P}_4 = \mathrm{P}_5 = \mathrm{P}_6 = 0), k = \overline{1,6}, k \neq 4, \tag{17}$$

і умовами моментної рівноваги

$$\int_\ell \tau \chi_1^-(\tau) d\tau = \mathrm{M}_0. \tag{18}$$

3. Умови існування і асимптотики поведінки розв'язків системи СІР із нерухомою особливістю. Ядра системи (16), крім сингулярності типу Коші, містять також нерухомі особливості, що обумовлює необхідність доведення існування і визначення асимптотики її розв'язків. Позначимо через $L_q^2(\ell_0, \omega(t))$ $(\omega(t) = t^\gamma (a-t)^\beta,\ q-1 < Re\gamma < -1 + qRe\gamma,\ q-1 < Re\beta < -1 + qRe\beta$, $1 < q < \infty)$ простір Банаха функцій з нормою [13] $\|f\|_{q,\omega} = \sqrt[q]{\int_\ell \omega(t)\, |f(t)|^q\, dt}$. $\mathrm{H}_\mu^{\gamma,\beta}(\ell)$ $(-1 < Re\gamma, Re\beta \leq 0)$ клас функцій $f(t)$ $(t \in \ell)$ які допускають розвинення $f = t^\gamma (1-t)^\beta f_*(t)$,$f_*(t) \in \mathrm{H}_\mu(\ell)$, $\mathrm{H}_\mu(\ell)$ — клас Гельдерових функцій. Передсимвол [13] системи (16) подамо так:

$$\begin{gathered} \mathrm{G}^0(\eta) = \tfrac{\mathrm{G}(\eta)}{\sin \pi\eta} = \left\{ \tfrac{g_{kj}(\eta)}{\sin \pi\eta} \right\}^5 = \{M_0 - \mathrm{ctg}\pi\eta M_s - \\ - \tfrac{i}{2\sin \pi\eta} \textstyle\sum_{m,n=1}^3 (B_{nm}(-e_{nm}^{++})^{-1-\eta} - \bar{B}_{nm}(-\bar{e}_{nm}^{++})^{-1-\eta}))\}. \end{gathered} \tag{19}$$

Теорема 1. *Якщо існує таке число* γ, $\mathrm{Re}\gamma \in (-1;0]$, *яке є* $(\kappa+1)$ *— кратним коренем рівняння*

$$\Delta(\eta)=0, \Delta(\eta)=\left\{\begin{array}{l} \det \mathrm{G}(\eta),\ \textit{при } g_{kj}\neq 0\,(k=j), \\ tr\mathrm{G}(\eta),\ \textit{при }\ g_{kj}=0\,(k\neq j), \end{array}\right. \tag{20}$$

$\mathrm{trG}\,(\eta)$ *— слід матриці* $\mathrm{G}\,(\eta)$, *то система (16) розв'язна в* $L_q^2\,(\ell,\omega\,(t))$, *її індекс дорівнює одиниці, і при умовах (17) та при* $q_k(t)\in \mathrm{H}_\mu^{\alpha+\varepsilon,\beta+\varepsilon}(\ell)$ *має єдиний розв'язок в* $L_q^2\,(\ell,\omega(t))\cap \mathrm{H}_\mu^{\alpha,\beta}(\ell)$, $(0\le\alpha,\beta<1)$, *який має асимптотичне розвинення*

$$h_j(t)\simeq h_j^* t^\gamma P_{\kappa j}(\ln t),\ t\to 0,\ h_j^*\neq 0, j=\overline{1,5}, \tag{21}$$

де $P_{\kappa j}(z)$ *— многочлени k-того ступеня.*

Доведення. При виконанні умов теореми будемо мати: $\det \mathrm{G}^0(\eta)\neq 0$ якщо $-1<Re\eta<Re\gamma$. Отже згідно [13], система нетерова в просторі $L_q^2(\ell,\omega(t))$, а її індекс визначається формулою $\mathrm{Ind\,A}=-\mathrm{ind}(\mathrm{A}_\xi(\tau))$, $\mathrm{A}_\xi(\tau)=\mathrm{det}\mathrm{G}^0(\eta)$, $\eta=\xi+$ $+i\tau$. Неважко встановити, що $\mathrm{ind}(\mathrm{A}_\xi(\tau))=m^0-1$, де $m^0=\mathrm{ind}(\mathrm{A}_\xi^0(\tau))$,$\mathrm{A}_\xi^0(\tau)=$ $=\mathrm{tg}^5\frac{\eta}{2}\mathrm{A}_\xi(\tau)$. Якщо τ змінюється від $-\infty$ до ∞ функція $\mathrm{A}_\xi^0(\tau)$ при $\xi\in(Re\gamma,1)$ опише замкнутий контур, який розташований симетрично відносно дійсної осі і не охоплює початок координат. Така поведінка має місце для поставлених задач і для комбінацій відомих матеріалів (16) дорівнює одиниці і при умовах (17) існує єдиний розв'язок в просторі $L_q^2(\ell,\omega(t))$, який має інтегровану особливість при $t\to 0$. Тобто має місце подання $h_j(t)\simeq t^\gamma P_{rj}(\ln t)h_j^*$, $t\to 0$, $h_j^*\in \mathrm{H}_\mu(\ell), j=\overline{1,r}$. Скориставшись асимптотичними властивостями операторів із нерухомими особливостями [2], для оператора

$$\mathrm{N}_{jk}[f]=m_{jk}^0 f(t)+\frac{m_{jk}^s}{\pi}\int_0^a\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau+\frac{4}{\pi}Im\sum_{n,m=1}^3 b_{jk}^{lm}\int_0^a\frac{f(\tau)d\tau}{e_{nm}t-\tau},$$

отримаємо наступне розвинення ($\varepsilon>0$):

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}_{jk}[t^\gamma P_{\kappa k}(\ln t)h_k^*]= \\ &=t^\gamma h_k^*(0)\sum_{m=0}^{\kappa} g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa k}^{(m)}(\ln t)+\Omega_{jk}^*(t),\left|\Omega_{jk}^*\right|<C_{jk}t^{Re\gamma+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{22}$$

Скориставшись поданням (22) із системи (16), отримаємо співвідношення

$$t^\gamma\sum_{k=1}^5 h_{k*}(0)\sum_{m=0}^{\kappa} g_{jk}^{(m)}(\gamma)\frac{(-1)^{m+1}}{m!}P_{\kappa j}^{(m)}(\ln t)+\Omega_j^0(t)=0,\ j=\overline{1,5}. \tag{23}$$

Функція $\Omega_j^0(t)$ задовольняє оцінці $\left|\Omega_j^0(t)\right|<Ct^{Re\gamma+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. Згідно останній, рівності (23) можливі при $t\to 0$ лише при виконання співвідношень

$$\sum_{l=0}^{\kappa}\ln^l t\cdot N_{\kappa-l}=0, \tag{24}$$

$$N_m = \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p+1} \begin{pmatrix} \kappa \\ m-p \end{pmatrix} Q_{m-p} X_{\kappa-p}, X_p = \{h_{j*}(0) a_{pj}\}_1^5,$$

$$Q_{m-p} = \{g_{jk}^{(m-p)}(\gamma)\}^5,$$

$a_{\kappa j}$ — коефіцієнти многочленів $P_{\kappa j}(z)$. Рівність (24) можлива, якщо виконуються співвідношення

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p+1} \begin{pmatrix} r \\ m-p \end{pmatrix} Q_{m-p} X_{\kappa-p} = 0, \;\; m = \overline{0, \kappa}. \tag{25}$$

Так як вектори $X_p \neq 0, \; p = \overline{0, r}$ лінійно не залежні, то останні рівності можливі тоді і тільки тоді, коли визначник системи (25), який дорівнює $\Delta^{(r)}(\gamma)$, обертається в нуль. Отже, якщо має місце подання (22), то γ є $(\kappa + 1)$ — кратним коренем трансцендентного рівняння (21). Поведінка при $t \to a - 0$ розв'язків системи (16) визначається характеристичною частиною і співпадає з поведінкою розв'язків для відповідних задач, про включення в однорідному просторі [7]. *Теорему доведено.*

Наслідок 1. *Якщо γ є простим коренем трансцендентного рівняння (20) з найбільшою дійсною частиною із смуги* $\mathrm{Re}\gamma \in [0; 1)$*, то розв'язки системи (16) допускають асимптотичне подання*

$$h_j(t) \simeq t^{\gamma} h_j^*, \; t \to 0 \;, \; \mathrm{Re}\gamma \in (-1, 0], j = \overline{1, 5}. \tag{26}$$

Наслідок 2. *Трансцендентне рівняння (20) дозволяє виявити наступні за головною доданки до будь якого порядку* K *в асимптотичному розвиненні розв'язків системи (16)*

$$h_j(t) \simeq \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} h_{jk}^* t^{\gamma_k}, \; t \to 0 \;, \; j = \overline{1, 5},$$

$$-1 < \mathrm{Re}\gamma_0 < \mathrm{Re}\gamma_1 < \ldots < \mathrm{Re}\gamma_{\mathrm{K}}, \; \Delta(\gamma_j) = 0, \; h_{jk}^* \neq 0.$$

Дослідження показали, що для поставленої задачі, для відомих комбінацій анізотропних матеріалів [10, 14] рівняння (20) має принаймі один корінь в смузі $\mathrm{Re}\gamma \in (-1; 0]$, отже справедливе твердження

Наслідок 3. *Система (16) при додаткових умовах (17) має єдиний розв'язок в просторі $L_q^2(\ell, \omega(t))$, який допускає асимптотичне подання (26).*

4.Числові результати і їх аналіз. На рисунках 2, 3 наведені залежності найбільших показників особливостей для деяких комбінацій матеріалів при повороті осей анізотропії навколо осі Z і при зміні кута ϕ нахилу дефекту, відповідно для комбінацій матеріалів [10] $m1 - m2$ і $m3 - m4$ (матеріал $m1$ — склопластик однонаправлений, матеріал $m2$ — склопластик ортогонально-армований (2:1), $m3$ — склопластик СТЕТ, $m4$ — склопластик АСТТ(б)), наведені залежності $\alpha_0 = -Re\gamma_0$, де γ_0 корінь рівняння (21) з найменшою дійсною частиною із смуги $\mathrm{Re}\gamma \in (-1; 0]$, від кута φ ортогонального перетворення осей анізотропії навколо осі Z.

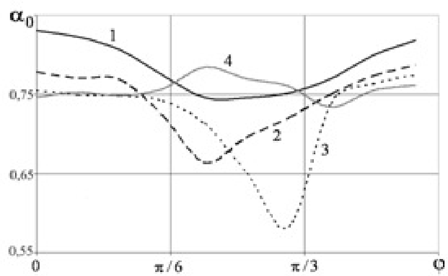


Рис.2

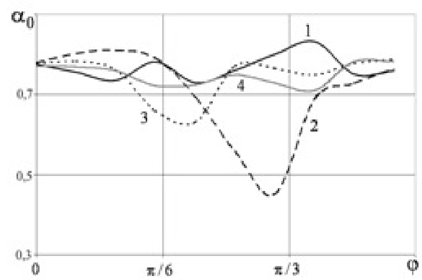


Рис.3

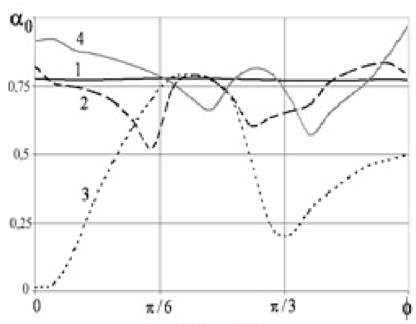


Рис.4

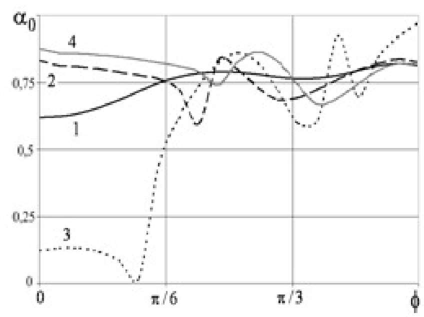


Рис.5

Крива 1 відповідає значенню кута нахилу дефекту $\phi = 0$, крива 2 — $\phi = \frac{\pi}{6}$, крива 3 — $\phi = \frac{\pi}{4}$, крива 4 — $\phi = \frac{\pi}{3}$. На рис. 4, 5, відповідно для комбінацій матеріалів $m1 - m2$ і $m3 - m4$, наведені залежності α_0 від кута нахилу дефекту ϕ. Крива 1 відповідає значенню кута повороту осей анізотропії $\varphi = 0$, навколо осі Z, крива 2 — $\varphi = \frac{\pi}{6}$, крива 3 — $\varphi = \frac{\pi}{4}$, крива 4 — $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Результати обчислень показують, що концентрація напружень в околі дефекту, який виходить в площину з'єднання різних півпросторів суттєво залежить від анізотропних властивостей матеріалів і кута нахилу включення. Зокрема, виявився суттєвим вплив орієнтації головних осей анізотропії півпростору, в якому розташовано включення. Слід також відмітити, що при наближенні кута ϕ до $\frac{\pi}{2}$ (включення наближається до площини з'єднання півпросторів) показники особливості наближаються до показників особливостей відповідних задач про міжфазні дефекти [7].

Висновки. Отже, запропоновано методику зведення задач про тунельні включення, які виходять одним кінцем в площину з'єднання різних анізотропних півпросторів до системи СІР з нерухомими особливостями. Досліджено їх розв'язність і виявлені асимптотики поведінки розв'язків в вершинах включень, що дає можливість до їх розв'язування застосувати ефективні числово-аналітичні методи.

Аналогічно можуть бути розглянуті задачі про тунельні дефекти інших типів (тріщини, відшаровані включення), які виходять в площину з'єднання різних анізотропних півпросторів.

1. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости [текст]/ А. Ф. Кривой, М. В. Радиолло // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
2. **Кривой А. Ф.** Некоторые задачи о произвольно ориентированном стрингере в составной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов, М. В. Радиолло // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, № 4. – С. 622–632.
3. **Herrmann K. P.** On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial [text] / K. P. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1999. – V. 69. – P. 317–335.
4. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные дефекты в составной анизотропной плоскост [текст] / А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2001. – Т. 6, вип. 3. – С. 108–115.
5. **Кривой А. Ф.** Произвольно ориентированные трещины в неоднородной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой, К. Н. Архипенко // Теорет. и прикладная механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 29–35.
6. **Кривой А. Ф.** Фундаментальное решение для четырехсоставной анизотропной плоскости [текст] / А. Ф. Кривой // Вісн. Одеськ. держ. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2003. – Т. 8, вип. 2. – С. 140–149.
7. **Кривий О. Ф.** Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі [текст] / О. Ф. Кривий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, № 2. – С. 55–66.
8. **Кривой А. Ф.** Межфазные туннельные трещины в составном анизотрпном пространстве [текст] /А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов // Прикл. математика и механика. – 2008. – Т. 72, № 4. – С. 689–700.
9. **Кривой А. Ф.** Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве [текст] / А. Ф. Кривой, Г. Я. Попов // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 6. – С. 36–45.
10. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела [текст] / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
11. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости [текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. **Попов Г. Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений [текст] / Г. Я. Попов. – М.: Наука, 1982. – 342 с.
13. **Дудучава Р. В.** Интегральные уравнения свёртки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики [текст] / Р. В. Дудучава. – Тбилисси: Мецниереба, 1979. – 136 с.
14. **Александров К. С.** Упругие свойства кристаллов. Обзор [текст] / К. С. Александров, Т. В. Рыжова // Кристаллография. – 1961. – Т. 6, вып. 2. – С. 289–314.

Mathematical Subject Classification: 74R10
УДК 539.3

І. Я. Шот
Львівський національний університет імені Івана Франка

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ НА ЗСУВ ТА СТИСНЕННЯ

Шот І. Я. Чисельне розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення. У матричному вигляді записано ключові співвідношення для визначення напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок, методом скінченних елементів. Наведено низку числових прикладів.
Ключові слова: оболонка, крайова задача, варіаційна задача, метод скінченних елементів.

Шот И. Я. Численное решение задач теории тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие. В матричном виде записаны ключевые соотношения для определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек, податливых на сдвиг и сжатие, нахождения собственных частот свободных колебаний и начального послекритического состояния рассматриваемых оболочек, методом конечных элементов. Приведены числовые примеры.
Ключевые слова: оболочка, краевая задача, вариационная задача, метод конечных элементов.

Shot I. Ya. Numerical solution of problems in the theory of thin shells compliant to shear and compression. Written in matrix form key equations to determine the stress-strain state of thin shells compliant to shear and compression, the natural frequencies of free oscillations and the initial post-critical state shells by the finite element method. There are a number of numerical examples.
Key words: shell, boundary value problem, variational problems, finite element method.

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану тонких гнучких оболонок, що вимагає використання нелінійної теорії оболонок, а також розвиток ефективних числових методів їх розв'язання має важливе значення, оскільки дозволить прогнозувати і покращувати міцнісні та експлуатаційні властивості гнучких конструкцій.

При розгляді задач сучасної нелінійної теорії оболонок, головним чином, використовують класичну гіпотезу Кірхгофа–Лява та гіпотезу Тимошенка–Міндліна (так звана п'ятимодальна теорія) [8, 16]. Дослідженню нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка, податливих на зсув та стиснення (шестимодальний варіант, у якому поле переміщень характеризується шістьма функціями, що описують поворот та стиснення нормалі), присвячено праці [6, 11, 15].

У цій статті записано ключові співвідношення для визначення напруженодеформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок, методом скінченних елементів. Для зручності застосування числових методів [1, 11, 13, 14] усі співвідношення подано в матричному вигляді.

Основні результати.

1. Головні припущення та співвідношення теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло сталої товщини h. Віднесемо серединну поверхню Ω оболонки до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \leq h/2$. Вважаємо, що координатні лінії серединної поверхні збігаються із лініями головних кривин, а товщина оболонки є істотно меншою від інших її розмірів.

Вектор переміщень довільної точки оболонки, податливої на зсув та стиснення, повністю визначають компоненти вектора переміщень $u_i(\alpha)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$ та вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки $\gamma_i(\alpha)$ $\left(i = \overline{1,3}\right)$. Якщо ввести:

$u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ — вектор узагальнених переміщень точок серединної поверхні оболонки;

$e_L = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, \kappa_{13}, \kappa_{23})^T$ — вектор компонент тензора лінійної деформації;

$\omega = \left(\overset{0}{\omega}_1, \overset{0}{\omega}_2, \overset{0}{\omega}_3, \overset{1}{\omega}_1, \overset{1}{\omega}_2, \overset{1}{\omega}_3\right)^T$ — вектор компонент тензора поворотів;

$\varepsilon = (\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \varepsilon_{12},\ \varepsilon_{13},\ \varepsilon_{23},\ \chi_{11},\ \chi_{22},\ \chi_{12},\ \chi_{13},\ \chi_{23})^T$ — вектор компонент тензора деформацій Гріна, то вирази для визначення компонент тензора лінійної деформації і тензора повороту в матричній формі з точністю до $o(h)$ подамо у вигляді:

$$e_L = C_L u, \tag{1}$$

$$\omega = C_\Omega u. \tag{2}$$

Тоді деформаційні співвідношення для гнучких оболонок з урахуванням лінійної і нелінійної складових деформації запишемо таким чином:

$$\varepsilon = e_L + e_N, \tag{3}$$

де

$$e_N = \frac{1}{2} \left(C_\Omega u\right)_{11}^T E_\Omega \left(C_\Omega u\right). \tag{4}$$

Тут C_L та C_Ω — матриці диференціальних операторів розмірності $11{\times}6$ та $6{\times}6$ відповідно:
повний вигляд C_L наведено у [3], а

$$C_\Omega = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} & 0 & -1 & 0 \\ k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1A_2} & \frac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1A_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2k_2 & \frac{\partial_2}{A_2} \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & -\frac{\partial_1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial_2(A_1\cdot)}{A_1A_2} & \frac{\partial_1(A_2\cdot)}{A_1A_2} & 0 \end{pmatrix};$$

E_Ω — матриця вигляду $E_\Omega = (E_1, E_2, ..., E_{11})^T$, де E_i — матриці розмірності 6×6, відмінні від нуля компоненти яких відповідно рівні

$$\begin{gathered}
E_1^{22} = E_1^{33} = 1, \quad E_2^{11} = E_2^{33} = 1, \quad E_4^{21} = E_4^{12} = -1/2, \\
E_5^{31} = E_5^{13} = -1/2, \quad E_6^{32} = E_6^{23} = -1/2, \quad E_7^{22} = -k_1, \\
E_7^{25} = E_7^{36} = E_7^{52} = E_7^{63} = 1, \quad E_7^{33} = -\left(k_1 + 2k_2\right), \\
E_8^{41} = E_8^{14} = E_8^{36} = E_8^{63} = 1, \quad E_8^{33} = -\left(2k_1 + k_2\right), \\
E_8^{11} = -k_2, \quad E_9^{51} = E_9^{42} = E_9^{24} = E_9^{15} = -1/2, \\
E_{10}^{31} = E_{10}^{13} = k_2, \quad E_{10}^{61} = E_{10}^{43} = E_{10}^{16} = E_{10}^{34} = -1/2, \\
E_{11}^{32} = E_{11}^{23} = k_1, \quad E_{11}^{62} = E_{11}^{53} = E_{11}^{26} = E_{11}^{35} = -1/2.
\end{gathered}$$

Тут $A_1 = A_1(\alpha)$, $A_2 = A_2(\alpha)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні оболонки Ω; $k_1 = k_1(\alpha)$, $k_2 = k_2(\alpha)$ – її головні кривини відповідно.

Зауважимо, що співвідношення (1) визначають геометричні співвідношення теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, в лінійній постановці, а співвідношення (3) пов'язують компоненти тензора деформацій Гріна з переміщеннями в геометрично нелінійній постановці для розглядуваних оболонок.

Співвідношення пружності, що пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами, подамо у матричному вигляді:

$$\sigma = B\varepsilon, \tag{5}$$

де $\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$ – вектор внутрішніх зусиль-моментів, B – симетрична матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11 [3].

Диференціальні рівняння, що описують рівновагу деформованого тіла, та статичні крайові умови на частині Γ_σ контуру серединної поверхні оболонки $\Gamma = \Gamma_u \bigcup \Gamma_\sigma$ отримаємо з принципу можливих переміщень [9] та запишемо у матричному вигляді:

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \tag{6}$$

$$G_\sigma \sigma^*|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g. \tag{7}$$

Для встановлення кінематичної визначеності системи необхідно додати також крайові умови в зміщеннях [10]

$$G_u u|_{\Gamma_u} = u_g, \;\; \Gamma_u = \Gamma \backslash \Gamma_\sigma. \tag{8}$$

У виразах (6)–(8) введено позначення:
$P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^T$ — вектор зовнішнього навантаження,
$\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^T$ — вектор симетричних зусиль-моментів,
$\sigma^* = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^T$ – вектор нововведених зусиль-моментів,
$\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^T$ — вектор крайових зусиль-моментів,
$u_g = (u_t^b, u_s^b, u_n^b, \gamma_t^b, \gamma_s^b, \gamma_n^b)^T$ — вектор крайових зміщень,
C_σ — матриця диференціальних операторів розмірності 6×15, відмінні від нуля компоненти якої рівні

$$C_\sigma^{1,1} = \frac{\partial_1 (A_2 \cdot)}{A_1 A_2}, \;\; C_\sigma^{1,2} = -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, \;\; C_\sigma^{1,4} = \frac{\partial_2 (A_1 \cdot)}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{1,5} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{1,6} = k_1, \ \ C_\sigma^{1,12} = C_\sigma^{1,13} = \frac{\left(\partial_2 \left(A_1 k_1 \cdot\right) + k_2 \partial_2 A_1\right)}{2 A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{2,1} = -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{2,2} = \frac{\partial_2 \left(A_1 \cdot\right)}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{2,4} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{2,5} = \frac{\partial_1 \left(A_2 \cdot\right)}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{2,8} = k_2, \ \ C_\sigma^{2,12} = C_\sigma^{2,13} = \frac{\left(\partial_1 \left(A_2 k_2 \cdot\right) + k_1 \partial_1 A_2\right)}{2 A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{3,1} = -k_1, \ \ C_\sigma^{3,2} = -k_2, \ \ C_\sigma^{3,6} = \frac{\partial_1 \left(A_2 \cdot\right)}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{3,8} = \frac{\partial_2 \left(A_1 \cdot\right)}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{4,7} = -1, \ \ C_\sigma^{4,10} = \frac{\partial_1 \left(A_2 \cdot\right)}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{4,11} = -\frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{4,12} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2} + \frac{\partial_2}{A_2},$$

$$C_\sigma^{4,13} = \frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{5,9} = -1, \ \ C_\sigma^{5,10} = -\frac{\partial_2 A_1}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{5,11} = \frac{\partial_2 \left(A_1 \cdot\right)}{A_1 A_2},$$

$$C_\sigma^{5,12} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{5,13} = \frac{\partial_1 A_2}{A_1 A_2} + \frac{\partial_1}{A_1}, \ \ C_\sigma^{6,3} = -1, \ \ C_\sigma^{6,10} = -k_1,$$

$$C_\sigma^{6,11} = -k_2, \ \ C_\sigma^{6,14} = \frac{\partial_1 \left(A_2 \cdot\right)}{A_1 A_2}, \ \ C_\sigma^{6,15} = \frac{\partial_2 \left(A_1 \cdot\right)}{A_1 A_2};$$

G_σ, G_u – матриці розмірностей 6×15 та 6×6 відповідно, ненульові компоненти яких рівні

$$G_\sigma^{11} = G_\sigma^{25} = G_\sigma^{4,10} = G_\sigma^{5,13} = \cos^2\left(n, \alpha_1\right),$$

$$G_\sigma^{12} = -G_\sigma^{24} = G_\sigma^{4,11} = -G_\sigma^{5,12} = \sin^2\left(n, \alpha_1\right),$$

$$G_\sigma^{14} = G_\sigma^{15} = -G_\sigma^{21} = G_\sigma^{22} = G_\sigma^{4,12} = G_\sigma^{4,13} = -G_\sigma^{5,10} = G_\sigma^{5,11} = \frac{1}{2} \sin 2\left(n, \alpha_1\right),$$

$$G_\sigma^{1,12} = G_\sigma^{1,13} = \frac{1}{4}\left(k_1 + k_2\right) \sin 2\left(n, \alpha_1\right),$$

$$G_\sigma^{2,12} = G_\sigma^{2,13} = \frac{1}{2}\left(k_2 \cos^2\left(n, \alpha_1\right) - k_1 \sin^2\left(n, \alpha_1\right)\right),$$

$$G_\sigma^{3,6} = G_\sigma^{6,14} = \cos\left(n, \alpha_1\right), \ \ G_\sigma^{3,8} = G_\sigma^{6,15} = \sin\left(n, \alpha_1\right),$$

$$G_u^{11} = G_u^{22} = G_u^{44} = G_u^{55} = \cos\left(n, \alpha_1\right),$$

$$G_u^{12} = G_u^{45} = -G_u^{21} = -G_u^{54} = \sin\left(n, \alpha_1\right), \ \ G_u^{33} = -G_u^{66} = -1.$$

Тут через n позначено нормаль до межі серединної поверхні оболонки.
Зв'язок між симетричними зусиллями-моментами та їх нововведеними характеристиками подамо у матричному вигляді:

$$\sigma^* = F\sigma, \tag{9}$$

де F – матриця розмірності 15×11 з відмінними від нуля коефіцієнтами

$$F^{11} = F^{22} = F^{33} = F^{44} = F^{54} = F^{65} = F^{75} = F^{86} = F^{96} = F^{10,7} = \\ = F^{11,8} = F^{12,9} = F^{13,9} = F^{14,10} = F^{15,11} = 1,$$

$$F^{45} = -F^{55} = F^{64} = -F^{74} = F^{82} = -F^{92} = F^{12,10} = -F^{13,10} = \\ = F^{14,9} = F^{15,8} = \tfrac{1}{2} \overset{0}{\omega}_1,$$

$$F^{46} = -F^{56} = -F^{61} = F^{71} = -F^{84} = F^{94} = F^{12,11} = \\ = -F^{13,11} = -F^{14,7} = -F^{15,9} = \tfrac{1}{2} \overset{0}{\omega}_2,$$

$$F^{41} = F^{42} = F^{51} = F^{52} = -F^{66} = F^{76} = F^{85} = F^{12,7} = F^{12,8} = \\ = -F^{13,7} = -F^{13,8} = -F^{14,11} = F^{15,10} = -\tfrac{1}{2} \overset{0}{\omega}_3,$$

$$F^{69} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_1, \;\; F^{89} = -\frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_2, \;\; F^{7,11} = -F^{9,10} = -\frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_3,$$

$$F^{4,7} = -F^{5,7} = \frac{1}{2} \left((k_1 + 2k_2) \overset{0}{\omega}_3 - \overset{1}{\omega}_3 \right),$$

$$F^{4,8} = -F^{5,8} = \frac{1}{2} \left((2k_1 + k_2) \overset{0}{\omega}_3 - \overset{1}{\omega}_3 \right),$$

$$F^{4,10} = -F^{5,10} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_1 - k_2 \overset{0}{\omega}_1, \;\; F^{4,11} = -F^{5,11} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_2 - k_1 \overset{0}{\omega}_2,$$

$$F^{67} = \frac{1}{2} \left(k_1 \overset{0}{\omega}_2 - \overset{1}{\omega}_2 \right), \;\; F^{6,11} = \frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_3 - k_1 \overset{0}{\omega}_3,$$

$$F^{77} = \frac{1}{2} \left(k_1 \overset{0}{\omega}_2 + \overset{1}{\omega}_2 \right), \;\; F^{79} = -k_1 \overset{0}{\omega}_1 - \overset{1}{\omega}_1,$$

$$F^{88} = \frac{1}{2} \left(-k_2 \overset{0}{\omega}_1 + \overset{1}{\omega}_1 \right), \;\; F^{8,10} = -\frac{1}{2} \overset{1}{\omega}_3 + k_2 \overset{0}{\omega}_3, \;\; F^{98} = -\frac{1}{2} \left(k_2 \overset{0}{\omega}_1 + \overset{1}{\omega}_1 \right).$$

Лінійне формулювання рівнянь рівноваги й відповідних крайових умов теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, подано у [3].

Якщо компоненти зовнішнього навантаження, що діє на оболонку, змінюються в часі, то викликані ними переміщення, деформації та напруження теж є функціями часу t. Рівняння руху оболонок, податливих на зсув та стиснення, які отримаємо з варіаційного принципу Остроградського–Гамільтона [4, 6], мають вигляд:

$$C_\sigma \sigma^* + P - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (10)$$

де m – діагональна матриця розмірності $6{\times}6$, ненульові компоненти якої

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = \rho h,$$

$$m_{44} = m_{55} = m_{66} = \rho \frac{h^3}{12},$$

ρ – густина матеріалу оболонки.

Для однозначного інтегрування системи рівнянь (10), окрім статичних (7) та геометричних (8) крайових умов, необхідно задати ще початкові умови

$$u(\alpha, 0) = u^0(\alpha), \;\; \dot{u}(\alpha, 0) = u^1(\alpha). \qquad (11)$$

Розв'язок системи (10) з крайовими та початковими умовами визначає реакцію оболонки на дію змінного в часі зовнішнього навантаження.

2. Варіаційні формулювання задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення. Розв'язування задач механіки деформування гнучких оболонок у даній роботі здійснюється методом скінченних елементів [11, 13, 14], який базується на варіаційних принципах. На основі принципу віртуальних робіт сформулюємо варіаційні постановки задач статики і динаміки теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення. Для цього введемо функціональні простори

$$V = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[W_2^1(\Omega)\right]^6 \quad | \; v = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \backslash \Gamma_\sigma \right\}$$

та

$$G = \left\{ v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \left[L^2(\Omega)\right]^6 \right\}.$$

Тоді наведемо варіаційне формулювання задачі статики нелінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення:
задано $l \in V'$,
знайти вектор узагальнених переміщень $u \in V$ *такий, що*

$$a_N(u, v) = < l, v >, \quad \forall v \in V, \tag{12}$$

де форма $a_N(u,v)$ та функціонал $< l, v >$ мають вигляд:

$$a_N(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \left(C_l v + (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega C_\Omega v \right)^T E_0 B \left(C_l u + \frac{1}{2} (C_\Omega u)_{11}^T E_\Omega C_\Omega u \right) d\Omega \,, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} < l, v > &= \textstyle\sum_{i=1}^3 \iint\limits_{\Omega} (P_i v_i + m_i \xi_i) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ &+ \int\limits_{\Gamma_\sigma} (N_t v_t + N_s v_s + N_n v_n + M_t \xi_t + M_s \xi_s + M_n \xi_n) d\Gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

У рівності (13) E_0 – діагональна матриця розміру 11×11 з відмінними від нуля елементами:

$$E_0^{11} = E_0^{22} = E_0^{33} = E_0^{77} = E_0^{88} = 1,$$

$$E_0^{44} = E_0^{55} = E_0^{66} = E_0^{99} = E_0^{10,10} = E_0^{11,11} = 2.$$

Зауважимо, що варіаційне формулювання задачі статики лінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, теж має вигляд (12), але вираз для форми $a_N(u,v)$ замінюємо на такий:

$$a(u, v) = \iint\limits_{\Omega} (C_l v)^T E_0 B C_l u d\Omega. \tag{15}$$

Сформулюємо тепер варіаційну задачу динаміки нелінійної теорії зсувних оболонок, податливих на зсув та стиснення:
задано $l \in L^2(0, T; V')$, $u^0 \in V$, $u^1 \in G$;
знайти вектор узагальнених переміщень $u \in L^2(0, T; V)$ *такий, що*

$$\mu(u''(t), v) + a_N(u(t), v) = < l(t), v >, \quad \forall t \in (0, T] \,, \tag{16}$$

$$\mu\left(u'(0) - u^1, v\right) = 0,$$
$$a\left(u(0) - u^0, v\right) = 0, \ \ \forall v \in V.$$

Тут форма $a_N(u,v)$ та лінійний функціонал $< l, v >$ співпадають з відповідними формою (13) та функціоналом (14) нелінійної задачі статики, а білінійна форма $\mu(u,v)$ має вигляд:

$$\mu(u,v) = \iint\limits_{\Omega} \rho h \sum_{i=1}^{3} \left(u_i v_i + \frac{h^2}{12} \gamma_i \xi_i \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{17}$$

Зазначимо, що варіаційне формулювання початково-крайової задачі лінійної теорії оболонок, податливих на зсув та стиснення, теж має вигляд (16), але вираз для форми $a_N(u,v)$ замінюємо на білінійну форму $a(u,v)$ (15).

3. Обчислювальні аспекти методу скінченних елементів. Розв'язування задач здійснюється методом скінченних елементів [11, 13, 14] з використанням біквадратичних ізопараметричних апроксимацій серендипового типу.

Вектор переміщень $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$, що входить у варіаційну рівність (12), подамо на елементі Ω^* ($\Omega^* = \{(\xi_1, \xi_2) : -1 \le \xi_1, \xi_2 \le 1\}$) у вигляді

$$u = N^k(\xi_1, \xi_2)\, q^k, \ \ (\xi_1, \xi_2) \in \Omega^*, \tag{18}$$

де $q^k = \left(u_1^1, u_2^1, u_3^1, \gamma_1^1, \gamma_2^1, \gamma_3^1, ..., \gamma_3^8\right)^T$ – вектор невідомих вузлових переміщень та поворотів на k-му елементі,

$$N^k(\xi_1, \xi_2) = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8),$$

$$N_i(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} \varphi_i & & & & & \\ & \varphi_i & & & & \\ & & \varphi_i & & & \\ & & & \varphi_i & & \\ & & & & \varphi_i & \\ & & & & & \varphi_i \end{pmatrix},$$

φ_i – базисні функції.

Відповідно вектор шуканих переміщень $u(\alpha, t)$, що входить у варіаційну рівність (16), подамо на елементі Ω^* у вигляді

$$u = N^k(\xi_1, \xi_2)\, q^k(t), \ \ (\xi_1, \xi_2) \in \Omega^*, \tag{19}$$

де $q^k(t) = \left(u_1^1(t), u_2^1(t), u_3^1(t), \gamma_1^1(t), \gamma_2^1(t), \gamma_3^1(t), ..., \gamma_3^8(t)\right)^T$ – вектор невідомих вузлових переміщень та поворотів, що залежить від часу t на k-му елементі.

Після розбиття області Ω на скінченні елементи співвідношення (18) та (19) символічно можна записати

$$u = \sum_k N^k(\xi_1(\alpha_1, \alpha_2), \xi_2(\alpha_1, \alpha_2)) q_k = N(\alpha_1, \alpha_2) q, \tag{20}$$

де q – вектор шуканих переміщень та поворотів всього ансамблю скінченних елементів.

Підставивши (20) у варіаційні формулювання (12) та (16), отримаємо відповідно задачі статичного та динамічного деформування:

$$K_T(q)\,q = R, \tag{21}$$

$$Mq''(t) + K(q(t))\,q(t) = R(t)\,. \tag{22}$$

Для розв'язування нелінійної системи застосовується метод Ньютона, який приводить до ітераційної процедури

$$K_T(q_i)\,\Delta q + K(q_i)\,q_i - R = 0, \tag{23}$$

де q_0 – вектор шуканих переміщень лінійної статичної задачі.

При знаходженні частот лінійних власних коливань попередньо навантаженої оболонки приходимо до так званої узагальненої задачі на власні значення

$$K_T(0)\,\tilde{q} = \omega^2 M\tilde{q}, \tag{24}$$

де ω – кругова частота власних коливань, $\tilde{q}(t) = \{\tilde{q}_l(t)\}$ – невідомі коефіцієнти, які є функціями часу.

Рівняння стійкості розглядуваної теорії оболонок запишемо у вигляді

$$K_T(0)\,\tilde{q} = \lambda G(q)\,\tilde{q}. \tag{25}$$

Найменше власне значення рівняння (25) визначає критичний параметр навантаження λ^*, при якому оболонка з початкового стану рівноваги переходить у суміжний.

У співвідношеннях (21)—(25) введено наступні позначення:
$K(q^i) = \iint\limits_{\Omega} \left(\left(C_l + \left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N\right)^T E_0 B \left(C_l + \frac{1}{2}\left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N d\Omega$ – матриця січної жорсткості;
$K_T(q^i) = K_u(q^i) + G(q^i)$ – матриця тангенціальної жорсткості, де

$$K_u(q^i) = \iint\limits_{\Omega} \left(\left(C_l + \left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N\right)^T E_0 B \left(C_l + \left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N d\Omega,$$

$$G(q^i) = \iint\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{11} b_j\left(N q^i\right)\left(C_\Omega N\right)_{11}^T E_j C_\Omega N d\Omega,$$

$$b = (b_1, \ldots, b_{11})^T = E_0 B\left(C_l + \frac{1}{2}\left(C_\Omega N q^i\right)_{11}^T E_\Omega C_\Omega\right) N q^i;$$

$R = \iint\limits_{\Omega} N^T P d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\sigma} (G_u N)^T \sigma_g d\Gamma_\sigma$ – вектор зовнішнього вузлового навантаження;
$M = \iint\limits_{\Omega} N^T m N d\Omega$ – матриця мас.

4. Числові приклади. Досліджено та розв'язано низку числових прикладів визначення статичних та динамічних характеристик оболонок, знаходження власних частот вільних коливань та початкового післякритичного стану розглядуваних оболонок методом скінченних елементів. Здійснено порівняльний аналіз отриманих числових розв'язків з розв'язками, наведеними в літературі.

Зокрема приклади задач статичного деформування замкнутої циліндричної оболонки та катеноїда наведено у [2], результати отриманих числових розв'язків порівнюються з результатами, наведеними у праці [13] (в межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка—Міндліна).

Приклади задач про вільні коливання циліндричних оболонок можна знайти у [3], де результати реалізованої методом скінченних елементів моделі зсувних оболонок, описаної у цьому дослідженні, порівнюються з результатами, розглянутими у [7, 11, 12] (у межах п'ятимодальної теорії оболонок типу Тимошенка–Міндліна та Кірхгофа–Лява). З аналізу наведених результатів видно, що значення частот власних коливань, знайдені за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув і стиснення, є більшими порівняно з обчисленими згідно з іншими теоріями оболонок. Врахування обтиску показує, що оболонка швидше може піддатися резонансу, а отже й руйнуванню.

Порівняння результатів числового розрахунку задачі про знаходження критичного навантаження затиснутої по контуру круглої пластинки з результатами, розглянутими у [5], наведено у праці [15].

Також розглянемо задачу стійкості для зрізаного конуса, що знаходиться під дією зовнішнього навантаження P. Розрахунок проведений для значень: радіус більшої основи $R_1 = 1$ м, радіус меншої основи $R_2 = 0,5$ м, кут при основі $\alpha = 60^0$, товщина оболонки $h = 0,02$ м, довжина $L = 1$ м. Фізико-механічні параметри матеріалу вибрано наступним чином: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E = 10^5$ МПа. Крайові умови наступні: жорстке защемлення при меншій основі конуса та шарнір при більшій його основі. При втраті стійкості оболонки у вигляді зрізаного конуса форми опуклості є несиметричні відносно осі і характеризуються числом хвиль n, тому розрахунок методом скінченних елементів проводиться для сектору π/n (у даному випадку $\pi/8$). Наведемо порівняння результатів числового розрахунку критичного навантаження $P_{кр}$ для цієї задачі, при якому оболонка у вигляді зрізаного конуса перейде зі стану рівноваги у суміжний стан:

– п'ятимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка—Міндліна [11]

$$P_{кр} = 9,57,$$

– шестимодальний варіант теорії оболонок типу Тимошенка—Міндліна

$$P_{кр} = 8,67.$$

Висновки. З аналізу наведених результатів бачимо, що навантаження, знайдене за шестимодальною теорією оболонок, податливих на зсув та стиснення, є меншим порівняно з критичним навантаженням, обчисленим згідно з іншою теорією оболонок. Врахування обтиску зменшує жорсткість оболонки, тому для того, щоб оболонка втратила стійкість, достатньо меншого навантаження.

1. **Бате К.** Численные методы анализа и метод конечных элементов [текст] / Бате К., Вилсон Е. – М.: Стройиздат, 1982. – 447 с.

2. **Вагін П. П.** Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення [текст] / Вагін П. П., Шот І. Я. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 135–147.
3. **Вагін П. П.** Про вільні коливання оболонок, податливих на зсув та стиснення [текст] / Вагін П. П., Шот І. Я. // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 177–184.
4. **Васидзу К.** Вариационные методы в теории упругости и пластичности [текст] / Васидзу К. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем [текст] / Вольмир А. С. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
6. **Галимов К. З.** Теория оболочек с учетом поперечного сдвига [текст] / К. З. Галимов. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 211 с.
7. **Гольденвейзер А. Л.** Свободные колебания тонких упругих оболочек [текст] / Гольденвейзер А. Л., Лидский В. Б., Товстик П. Е. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
8. **Григоренко Я. М.** Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей [текст] / Я. М. Григоренко, Г. Г. Влайков, А. Я. Григоренко. – К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.
9. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости [текст] / В. В. Новожилов. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. – 211 с.
10. **Пелех Б. Л.** Обобщенная теория оболочек [текст] / Пелех Б. Л. – Львов: Вища шк., 1978. – 159 с.
11. **Рикардс Р. Б.** Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин [текст] / Рикардс Р. Б. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
12. **Савула Я. Г.** Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями [текст] / Савула Я. Г., Флейшман Н. П. – Львов: Вища шк., 1989. – 172 с.
13. **Савула Я. Г.** Некоторые приложения метода конечных элементов [текст] / Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. М. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1981. – 88 с.
14. **Babuska I.** Finite elements: an introduction to the method and error estimation [text] / Babuska I., Whiteman J. R., Strouboulis T. – Oxford: Oxford University Press, 2011. – 352 p.
15. **Bernakevych I. E.** A study of the stable equilibrium of thin shells compliant to shear and compression [text] / Bernakevych I. E., Vahin P. P., Shot I. Ya. // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – 181, № 4. – P. 497–505.
16. **Libai A.** The nonlinear theory of elastic shells [text] / Libai A., Simmonds J. G. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ АВТОРІВ
(скорочений варіант)

Журнал "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка" має мету інформувати читачів про нові наукові дослідження у сфері теоретичної і прикладної математики і механіки та суміжних дисциплін. У журналі друкуються статті, в яких наведені оригінальні результати теоретичних досліджень і огляди з актуальних проблем за тематикою видання.

Журнал структуровано за такими напрямами:
1. Математика.
2. Механіка.
3. Хроніка (ювілеї, знаменні дати та події тощо).

Статті публікуються українською, російською або англійською мовами.

До журналу приймаються раніше не опубліковані наукові роботи.

Авторський оригінал складається із двох друкованих примірників, підписаних авторами, та електронної версії на будь-якому електронному носії.

Електронна версія містить анкетні дані авторів: прізвище, ім'я, по-батькові, місце роботи, адресу для листування та телефон.

Текст статті має бути підготовлений за допомогою видавничої системи LaTeX у відповідності до вимог, які викладено на сторінці журналу для авторів на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка". Також їх можна отримати в редакційній колегії журналу. Загальний обсяг статті не повинен перевищувати 20 сторінок.

Структура статті:

— УДК;

— Mathematical Subject Classification (2010)

— назва статті;

— список авторів;

— анотації українською, російською та англійською мовами, які містять назву, список авторів, резюме, причому, текст резюме повинен мати не менше ста слів, а також список ключових слів відповідною мовою;

— основний текст статті повинен відповідати вимогам постанови Президії ВАК України "Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України" від 15.01.2003 р. № 7-05/1, тобто необхідно виділити вступ, основну частину і висновки. Основна частина повинна містити постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор, виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття; формулювання цілей статті (постановка завдання); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів; висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Посилання на літературу в тексті подаються порядковим номером в квадратних дужках;

— список літературних джерел укладається в порядку посилань або в алфавітному порядку та оформляється відповідно до державного стандарту України ДСТУ ГОСТ 7.1:2006 "Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання" та відповідає вимогам ВАК України (див. наказ № 63 від 26.01.2008).

Усі надіслані статті проходять рецензування.

Редколегія має право відхилити рукописи, якщо вони не відповідають вимогам журналу "Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка".

В одному номері журналу публікується тільки одна стаття автора, в тому числі у співавторстві.

Статті слід подавати до редакційної колегії журналу або надсилати за адресою:

Редакційна колегія журналу
"Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка"
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
м. Одеса, 65082

Текст статті можна надіслати електронною поштою за адресою:

visnyk_math@onu.edu.ua

Рукописи статей та електронні носії авторам не повертаються.

Електронну версію журналу можна знайти в розділі "Наука" → "Наукові видання" → "Вісник ОНУ" → "Математика і механіка" на сайті Одеського національного університету імені І. І. Мечникова:

www.onu.edu.ua

.