

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Зміст випуску, анотації та тексти статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <https://visnyk-univ.site/index.html>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського – <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>.

Для науковців, викладачів, студентів.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	В. САМОЙЛЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	Є. Бондаренко, д-р фіз.-мат. наук, доц. (заст. відп. ред.); О. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); А. Клевцовський, канд. фіз.-мат. наук (відп. секр.); М. Bavula, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Великобританія); М. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Дрозд, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; N. Leonenko, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Великобританія); Р. Майборода, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Т. Мельник, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. Перестюк, акад. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov, д-р фіз.-мат. наук, проф. (Швеція); О. Станжицький, д-р. фіз.-мат. наук, проф.; І. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	Механіко-математичний факультет, просп. акад. Глушкова, 4Е, м. Київ, 03127, Україна, ☎ (38044) 259 05 42, E-mail: alex_z_ua@ukr.net, alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 08.10.20 (протокол № 3)
Атестовано	Міністерством освіти і науки України. Рішення атестаційної колегії № 886 від 02.07.2020
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	ВПЦ "Київський університет", б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна, ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS

1(41)/2020

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. A table of contents, the summaries and texts of the articles are posted on the Visnyk Web-page – <https://visnyk-univ.site/index.html>, as well as on the website of the National Library of Ukraine named VI Vernadsky <http://www.nbu.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

For scientist, professors, students.

CHIEF EDITOR	V. SAMOILENKO, Dr. Hab., Prof.
EDITORIAL BOARD	Y. Bondarenko, Dr Hab., Associate Prof. (Deputy Editor-in-Chief); O. Kapustyan, Dr Hab., Prof., (Deputy Editor-in-Chief); A. Klevtsovskii, PhD., Associate Prof. (Secretary in charge); V. Bavula, Dr Hab., Prof., (United Kingdom); Y. Drozd, Dr Hab., Prof.; M. Gorodnii, Dr Hab., Prof.; N. Leonenko, Dr Hab., Prof. (United Kingdom); O. Limarchenko, Dr Hab., Prof.; R. Maiboroda, Dr Hab., Prof.; T. Melnyk, Dr Hab., Prof.; Y. Mishura, Dr Hab., Prof.; I. Parasyuk, Dr Hab., Prof.; M. Perestyuk, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine, Dr Hab., Prof.; A. Petravchuk, Dr Hab., Prof.; I. Shevchuk, Dr Hab., Prof.; D. Silvestrov, Dr Hab., Prof. (Sweden); O. Stanzhetskii, Dr Hab., Prof.; Y. Zhuk, Dr Hab. Prof.
Address of Editorial board	Faculty of Mechanics and Mathematics, 4E, Acad. Glushkova Avenue, Kyiv, 03127, Ukraine, ☎ (38044) 259 05 42, E-mail: alex_z_ua@ukr.net, alex_z_ua@univ.kiev.ua
Approved	Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics 08.10.20 (protocol № 3)
Attested	By Ministry of Education and Science (MES) of Ukraine. Decision of MES of Ukraine to include in list as professional from 04.04.18
Registered	Ministry of Justice of Ukraine. Certificate of state registration KB № 16007-4479P from 11.12.09
Founder and publisher	Taras Shevchenko National University, Kyiv University Publishing and Printing Centre. The certificate included in the State Register ДК № 1103 from 31.10.02
Address of publisher	Kyiv University Publishing and printing center, 14, Taras Shevchenko blv., Kyiv, 01601, Ukraine, ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; fax 239 31 28

ЗМІСТ

М. Кузнєцов Закон співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень над простором неперервних функцій.....	5
Б. Довгий, Л. Вакал, Є. Вакал Чисельний розв'язок крайової задачі для параболічного рівняння з несамоспрямленим оператором і зв'язаними крайовими умовами.....	7
Ю. Горбань, А. Соловйова Узагальнений розв'язок задачі Діріхле для модельного анізотропного вагового рівняння.....	11
О. Макарчук, К. Сальник Лебегівська структура розподілу узагальнених згорток Бернуллі спеціального виду.....	15
О. Безущак, Б. Олійник Потужності груп ізометрій просторів Хемінга періодичних послідовностей.....	18
А. Петравчук, Є. Чаповський, І. Клименко, М. Сидоров Нільпотентні модулі над поліноміальними кільцями.....	20
Ю. Волков, В. Наратовий Випадкові гравітаційні хвилі у двошаровій гідродинамічній системі.....	25
Ю. Гуртовий, О. Кухаренко Швидкості та траєкторії хвильового руху у двошаровій гідродинамічній системі.....	30
Я. Жук, О. Остос Вплив початкових напружень на термомеханічну поведінку в'язкопружної кругової циліндричної оболонки.....	37
Я. Жук, А. Тарасов Компенсація осесиметричних резонансних коливань і вібророзігріву податливої на зсув жорстко закріпленої непружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами.....	42
О. Лимарченко, О. Кліменков, О. Нефьодов, О. Константінов Характер прояву нелінійностей при вібраційному збудженні руху еліпсоїдального резервуару із рідиною з вільною поверхнею.....	47
О. Лимарченко, О. Нефьодов, О. Сіренко Верифікація алгоритму керування резервуарами з рідиною на основі компенсації силового відгуку в різних діапазонах прояву нелінійностей.....	51
К. Єлгондієв, С. Матмуратова, В. Бородін, Л. Вовк Повна енергія гармонічного осцилятора з імпульсною дією.....	56
Дмитро Юрійович Садовий (16.07.1988 – 30.08.2020).....	60
Наукова хроніка Міжнародна математична конференція з алгебри, присвячена 60-річчю кафедри "Алгебра та математична логіка" Київського національного університету імені Тараса Шевченка.....	61

CONTENTS

M. Kuznietsov The law of coexistence of homoclinic trajectories for maps of the space of continuous functions.....	5
B. Dovgiy, L.Vakal, E.Vakal Numerical solution of the boundary problem for parabolic equation with non-self-adjoint operator and related boundary conditions	7
Yu. Gorban, A. Soloviova A generalized solution of the Dirichlet problem for a model anisotropic weighted equation	11
O. Makarchuk, K. Salnik Lebesgue structure of distribution of generalized Bernoulli convolutions of special type.....	15
O. Bezushchak, B. Oliynyk Ordinality of isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences.....	18
A. Petravchuk, Ie. Chapovskyi, I. Klimenko, M. Sidorov Nilpotent modules over polynomial rings	20
Y. Volkov, V. Naradovyi Random gravity waves in two-layer hydrodynamic system	25
Y. Hurtovyi, O. Kuharenko Velocities and trajectories of wave motion in a two-layer hydrodynamic system.....	30
Y. Zhuk, O. Ostos Prestress effect on the thermomechanical response of viscoelastic circular cylindrical shell under harmonic loading	37
Y. Zhuk, A. Tarasov Damping of the axisymmetric resonant vibration and dissipative heating of the fixed shear compliant inelastic cylindrical shell with piezoactuator	42
O. Limarchenko, O. Klimenkov, O. Nefedov, O. Konstantinov Character of manifestation of nonlinearities for vibration disturbance of motion of ellipsoidal reservoir with liquid with a free surface	47
O. Limarchenko, O. Nefedov, O. Sirenko Verification of the control algorithm for reservoirs with liquid based on the compensation of the force response in different ranges of manifestation of nonlinearities.....	51
K. Elgondiyev, S. Matmuratova, V. Borodin, L. Vovk Total energy of harmonic oscillator with impulse action.....	56
Dmitry Yurievich Sadovoy (16.07.1988 – 30.08.2020)	60
Scientific chronicle International mathematical conference on algebra, dedicated to the 60th anniversary of the department of "Algebra and mathematical logic" of the Taras Shevchenko National University of Kyiv.....	61

ЗАКОН СПІВІСНУВАННЯ ГОМОКЛІНІЧНИХ ТРАЕКТОРІЙ ДЛЯ ВІДОБРАЖЕНЬ НАД ПРОСТОРОМ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлено порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень простору неперервних функцій відрізка в себе, які породжуються деякою неперервною функцією відрізка.

Ключові слова: гомоклінічні траєкторії, співіснування траєкторій, теорема Шарковського, неперервні відображення відрізка, нескінченновимірні простори

Вступ. Для неперервних відображень відрізка закон співіснування гомоклінічних траєкторій був сформульований на конференції в 1979 р. [1] та остаточно доведено в [3]. Там, зокрема, встановлювався такий порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для неперервних функцій відрізка:

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2 \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \dots$$

Цей лінійний порядок натуральних чисел описує закон співіснування гомоклінічних у такому сенсі: якщо $f \in C^0(I, I)$ має n -гомоклінічну траєкторію, то для кожного m , для якого $n \triangleright m$, функція f має також m -гомоклінічну траєкторію. Виникає запитання: чи можна перенести цей закон на множини функцій, які діють не на відрізку, а на більш складній, зокрема, нескінченновимірній множині. Цікавим кандидатом на роль такої множини є простір неперервних функцій відрізка $C^0(I, I)$, над яким діє відображення, яке також задається неперервною функцією відрізка $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$, $\varphi \in C^0(I, I)$ та $f \in C^0(I, I)$. Такі нескінченновимірні системи є, з одного боку, відносно простими для дослідження, а з іншого, вони мають важливе теоретичне значення, зокрема, до них зводяться різниці рівняння з неперервним часом вигляду $x(t+1) = f(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$ (див., напр., [4-5]).

Мета статті – встановити, що зазначений вище порядок співіснування гомоклінічних траєкторій виконується і для таких систем.

Основні означення і попередні відомості. Періодичною траєкторією, або циклом функції $f: X \rightarrow X$, називають множину точок $\{x, f(x), f(f(x)), \dots, f^{n-1}(x)\}$, якщо $f^n(x) = x$ і $f^d(x) \neq x$ для будь-якого $0 < d < n$. Число n називають періодом цього циклу. Кажуть, що траєкторія $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ гомоклінічна до циклу $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, якщо точка x_0 не періодична, її ω -гранична множина збігається з $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ й існує деяка послідовність прообразів x_0 $\{x_{-1}, x_{-2}, x_{-3}, \dots\} \subset X$, для якої $f(x_{-k-1}) = x_{-k}$, $k \geq 0$, і множина всіх часткових границь цієї послідовності збігається з $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

Нехай I – замкнений інтервал, $C^0(I, I)$ – простір неперервних функцій з інтервалу I у себе з рівномірною метрикою і $f \in C^0(I, I)$. Розглянемо відображення над простором неперервних функцій відрізка вигляду $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$, $\varphi \in C^0(I, I)$, для деякої $f \in C^0(I, I)$.

Для відображень відрізка гомоклінічна траєкторія називається односторонньою, якщо до кожної з точок $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони. Якщо ж хоча б до однієї з точок вона наближається з двох сторін, то ця траєкторія називається двосторонньою гомоклінічною траєкторією.

Для відображень над $C^0(I, I)$ гомоклінічна траєкторія $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ називається односторонньою, якщо до кожної з точок $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони, тобто для будь-якого $x \in I$ до кожної з точок $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)\}$ відповідна підпослідовність прообразів наближається з однієї сторони.

m -гомоклінічною траєкторією називається гомоклінічна траєкторія до циклу періоду m або двостороння гомоклінічна траєкторія до циклу періоду $m/2$.

Теорема (Шарковський, 1965) [2]. *Існує такий порядок співіснування періодичних траєкторій для неперервних функцій відрізка:*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Якщо $f \in C^0(I, I)$ має цикл періоду n , то для кожного m , для якого $n \triangleright m$, функція f має також цикл періоду m .

Теорема Шарковського встановлює закон співіснування періодичних траєкторій для неперервних функцій відрізка. Перш ніж встановити, як виконується закон співіснування гомоклінічних траєкторій, треба показати, чому виконується порядок Шарковського. Покажемо, що для класу функцій $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$, $\varphi \in C^0(I, I)$, для деякої функції $f \in C^0(I, I)$ порядок співіснування періодичних траєкторій збігається з порядком Шарковського.

Дійсно, нехай відображення F має цикл періоду n , покажемо, що F має також цикл періоду m для будь-якого m , для якого $n \succ m$. Спочатку розглянемо випадок, коли n не є степенем двійки. Тоді $n = 2^k l$ для деякого цілого $k \geq 0$ і непарного $l \neq 1$. Існує таке $\varphi \in C^0(I, I)$, що $F^n(\varphi(x)) = \varphi(x)$ для будь-якого $x \in I$, і $F^d(\varphi(x)) \neq \varphi(x)$ для $d = 1, 2, \dots, n-1$. Для кожного фіксованого $x = x_0$ маємо $F^n(\varphi(x_0)) = f^n(\varphi(x_0)) = \varphi(x_0)$, а отже, точка $\varphi(x_0)$ періодична для функції f , причому її період є дільником n .

Нам треба показати, що хоча б для однієї точки $x_0 \in I$ період $\varphi(x_0)$ відносно функції f не є степенем двійки. Це, очевидно, виконується, оскільки, припускаючи супротивне, ми отримаємо, що для будь-якого $x \in I$, $F^{2^k}(\varphi(x)) = f^{2^k}(\varphi(x)) = \varphi(x)$, що суперечить тому, що мінімальним періодом відображення F є величина n . Отже, існує точка $x^* \in I$, для якої значення $\varphi(x^*)$ є періодичною точкою функції f із періодом, що є дільником n і не є степенем двійки.

Для неперервної функції відрізка f виконується теорема Шарковського, а, отже, оскільки всі дільники n , що не є степенями двійки, займають у порядку Шарковського місця, що є не слабшими, ніж f , будь-який з них є сильнішим в сенсі порядку Шарковського, аніж m для будь-якого m , такого, що $n \succ m$. Тому f має періодичну точку періоду m , яку позначимо за допомогою $a \in I$. Тоді стала функція $\varphi(t) \equiv a$ є періодичною точкою відображення F періоду m .

Тепер розглянемо випадок, коли n є степенем двійки. У цьому разі кожне m , для якого $n \succ m$, є меншим степенем двійки. Існує таке $\varphi \in C^0(I, I)$, що $F^n(\varphi(x)) = \varphi(x)$, а отже, для будь-якого $x \in I$, $f^n(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Якби для кожної точки $x \in I$ період відносно функції f був строго меншим за n , то виконувалося б $F^{n-1}(\varphi(x)) = \varphi(x)$, що призводить до суперечності з припущенням, що періодом відображення F є значення n . Отже, існує точка $x^* \in I$, яка періодична періоду n для функції f . Тому за теоремою Шарковського функція f також має деяку точку a періоду m . Тоді $\varphi(t) \equiv a$ є періодичною точкою періоду m для відображення F .

Перейдемо до доведення основного результату.

Основна теорема. *Існує такий порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень над $C^0(I, I)$ вигляду $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$, $f \in C^0(I, I)$:*

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \dots \triangleright 2 \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \dots \\ \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \dots$$

Якщо відображення F має n -гомоклінічну траєкторію, то для кожного m , для якого виконується властивість $n \triangleright m$, F має також m -гомоклінічну траєкторію.

Доведення. Нехай відображення F має деяку n -гомоклінічну траєкторію, тобто або односторонню гомоклінічну траєкторію до циклу періоду n , або двосторонню до циклу періоду $n/2$.

У випадку, коли n не є степенем двійки, ми можемо стверджувати, що якщо відображення F має n -гомоклінічну траєкторію, то воно має і періодичну траєкторію відповідно періоду n або $n/2$, до якого ця гомоклінічна траєкторія збігається. Як показано вище, звідси випливає, що функція f також матиме періодичну точку періоду n або старшого в сенсі порядку Шарковського періоду (звідки також випливає існування циклу періоду n). У статті [3] показано (див. теореми 3, 4), що якщо неперервна функція відрізка має цикл періоду $n \neq 2^d$, то вона має і односторонню гомоклінічну до циклу такого ж періоду, тобто n -гомоклінічну траєкторію. А отже, f має і m -гомоклінічні траєкторії для всіх m , таких, що $n \triangleright m$. Отже, існує деяка точка $a \in I$, для якої траєкторія a є m -гомоклінічною траєкторією для функції f . Тоді $\varphi(x) \equiv a$ є m -гомоклінічною точкою для відображення F .

Далі припустимо, що $n = 2^k$. Нехай відображення F має n -гомоклінічну траєкторію $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ до деякої періодичної траєкторії $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n'}\}$, де $n' = n$, якщо $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ є односторонньою гомоклінічною траєкторією, і $n' = n/2$, якщо $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ – двостороння. Серед точок $\{\varphi_0(x), x \in I\}$ можуть існувати періодичні точки функції f , однак їхній період є дільником n , і отже, не може перевищувати n .

Якби всі точки $\{\varphi_0(x), x \in I\}$ були періодичними, то внаслідок обмеженості на кількість можливих періодів, так само періодичною була б і функція φ_0 , що суперечить означенню гомоклінічної траєкторії. Тому існує така точка $x^* \in I$, що $\varphi_0(x^*)$ не є періодичною, а отже, і всі прообрази $\varphi_0(x^*)$ не є періодичними точками функції f .

Оскільки $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ є гомоклінічною траєкторією відображення F , то для кожної точки $x \in I$ існує послідовність прообразів, множина всіх часткових границь якої збігається з ω -граничною множиною точки $\varphi_0(x)$. Зокрема, ω -граничною множиною точки $\varphi_0(x^*)$ є множина $\{\pi_1(x^*), \pi_2(x^*), \dots, \pi_{n'}(x^*)\}$, у якій деякі з її елементів можуть збігатися, однак вона є циклом періоду 2^d , $d \leq k$ для функції f .

Множина часткових границь послідовності прообразів $\varphi_0(x^*)$, що повторює послідовність прообразів φ_0 , збігається з цією множиною. Отже, $\varphi_0(x^*)$ є гомоклінічною точкою функції f , причому її ω -гранична множина

є періодичною траєкторією з періодом 2^d , $d \leq k$. Окрім того, якщо задана n -гомоклінічна траєкторія для відображення F була односторонньою, то односторонньою буде і гомоклінічна траєкторія точки $\varphi_0(x^*)$.

Таким чином, функція f має 2^d -гомоклінічну або 2^{d+1} -гомоклінічну траєкторію, причому в обох випадках це не перевищує n -гомоклінічну траєкторію. Згідно з [3] із останньої властивості випливає, що f має також n -гомоклінічну траєкторію, а отже, вона має і m -гомоклінічну траєкторію $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Тоді траєкторія функції $\varphi(t) \equiv x_0$ є m -гомоклінічною траєкторією відображення F .

Висновки. Порядок співіснування гомоклінічних траєкторій для відображень простору $C^0(I, I)$ вигляду $F(\varphi(x)) = f(\varphi(x))$, $f \in C^0(I, I)$ збігається з порядком співіснування гомоклінічних траєкторій для неперервних відображень відрізка.

Список використаних джерел:

1. Федоренко В. В. О сосуществовании периодических и гомоклинических траекторий / В. В. Федоренко, А. Н. Шарковский // V Всесоюз. конф. по качественной теории дифференциальных уравнений : Тез. докл. – Кишинев : Штиинца, 1979. – С. 174–175.
2. Шарковский А. Н. Об одной классификации неподвижных точек / А.Н. Шарковский // Укр. матем. журн., 1965. – 17 (5). – С. 80–95.
3. Kuznetsov M. V. The order of coexistence of homoclinic trajectories for the maps of an interval / M. V. Kuznetsov // Ukr Math Jour., 2019. – Vol. 71, iss. 7. – P. 1146–1152.
4. Romanenko O. Yu. Dynamical systems induced by continuous time difference equations and long-time behavior of solutions / O. Yu. Romanenko // Jour. of Difference Equations and Applications, 2003. – Vol. 9, iss. 3-4. – P. 263–280.
5. Sharkovsky A. N. Difference Equations and Their Applications / A. N. Sharkovsky, Y. L. Maistrenko, E. Yu. Romanenko. – Dordrecht : Springer Netherlands, 1993. – 358 p.

Надійшла до редколегії 20.09.20

M. Kuznietsov, PhD Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE LAW OF COEXISTENCE OF HOMOCLINIC TRAJECTORIES FOR MAPS OF THE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

The paper deals with problem of ordering coexistence of homoclinic trajectories for maps of segment into itself, which are generated by a certain continuous function of the segment.

Keywords: homoclinic trajectories, coexistence of trajectories, Sharkovsky theorem, continuous mapping of interval, infinite-dimensional spaces.

УДК 517.9:519.63

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.02.07-11>

Б. Довгий, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Л. Вакал, канд. тех. наук,

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: dovgiy_i_ko@i.ua, lara.vakal@gmail.com, jvakal@gmail.com

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕСАМОСПРЯЖЕНИМ ОПЕРАТОРОМ І ЗВ'ЯЗАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглянуто крайову задачу для параболічного рівняння другого порядку з несамоспряженим оператором. Подібні задачі є математичною моделлю ряду задач, що описують процеси конвективно-дифузійного перенесення речовини, механізми виникнення у плазмі пробою лазерної активності тощо. При дослідженні фізики пробою слід враховувати лавиноподібне наростання кількості вільних електронів за рахунок процесів багатофотонної іонізації під впливом оптичних імпульсів. Це вимагає включення в постановку задачі зв'язаних крайових умов. Важливою обставиною, яку слід врахувати при розробці методики розв'язання такої задачі, є виконання певного закону збереження. Для розв'язання крайової задачі запропоновано підхід на основі методу скінченних різниць. Апроксимацію рівняння і крайових умов побудовано так, щоб різницева схема була повністю консервативною і апроксимувала вихідну задачу з другим порядком за просторовою змінною і часом та мала другий порядок збіжності. Для ефективного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному часовому проміжку використано метод прогонки для складних систем у поєднанні з методом немонотонної прогонки для систем з тридіагональною матрицею. Для проведення числових розрахунків розроблено програмне забезпечення на основі системи комп'ютерної математики MATLAB. Отримано наближений розв'язок прикладної задачі для різних моментів часу, а також значення коефіцієнта поглинання, зміна знака якого вначає перехід плазми в лазерно активний стан.

Ключові слова: несамоспряжений оператор, зв'язані крайові умови, закон збереження, метод прогонки для складних систем, метод немонотонної прогонки.

Вступ. У роботі розглядається крайова задача для рівнянням другого порядку параболічного типу з несамоспряженим оператором. Подібні задачі виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів, зокрема, конвективно-дифузійного перенесення речовини, конвективного тепломасообміну, механізму виникнення в плазмі пробою лазерної активності [1; 6]. При дослідженні фізики пробою слід враховувати лавиноподібне наростання кількості вільних електронів за рахунок процесів багатофотонної іонізації під впливом оптичних імпульсів, що приводить до необхідності розгляду кінетичного рівняння Больцмана для функції розподілу електронів за енергіями. Якщо виконати перехід від розмірної задачі до безрозмірної, то математична модель цього фізичного процесу може бути описана параболічним рівнянням зі зв'язаними крайовими умовами. Важливою обставиною, яку

слід враховувати при розробці методики розв'язання такої задачі, є виконання для розв'язання певного закону збереження. У цій роботі здійснено узагальнення крайових умов, розглянутих у [6], що дозволило уточнити закон збереження для розв'язання крайової задачі.

1. Постановка задачі. Розглянемо в області $\bar{D} = [0,1] \times [0,T]$ крайову задачу для рівняння

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + F(x,t), \quad (x,t) \in D \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0,1] \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$Q(0,t) - Q(1,t) = \mu_1(t), \tag{3}$$

$$u(1,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T], \tag{4}$$

де

$$Q(x,t) = K(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + r(x,t)u(x,t), \quad u(x,t) \geq 0, \quad 0 < K(x,t) < C_1, \quad |r(x,t)| \leq C_2, \tag{5}$$

і $u_0(x)$ задовольняє умови (3) – (4).

Покажемо, що для задачі (1) – (5) справедливий такий закон збереження:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(x,t) dx + \mu_1(t) = \int_0^1 F(x,t) dx \tag{6}$$

або

$$\int_0^1 u(x,t) dx + \int_0^t \mu_1(\zeta) d\zeta = \int_0^1 u_0(x) dx + \int_0^t \int_0^1 F(x,\zeta) dx d\zeta, \quad t \in [0, T]. \tag{7}$$

Справді, якщо проінтегрувати рівняння (1) за змінною x на відрізку $[0, 1]$ і врахувати крайову умову (3), то отримуємо співвідношення (6)

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(x,t) dx = Q(1,t) - Q(0,t) + \int_0^1 F(x,t) dx = -\mu_1(t) + \int_0^1 F(x,t) dx.$$

Інтегруючи (6) за змінною t на відрізку $[0, t]$, отримуємо (7).

2. Чисельне розв'язання задачі. Ураховуючи вигляд умов (3), (5), знайти аналітичний розв'язок поставленої задачі досить складно, тому будемо шукати наближений розв'язок, використовуючи скінченнорізницевий метод. Вкринемо область \bar{D} рівномірною сіткою $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, де h і τ – кроки сітки за x і t , відповідно,

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, N, h = 1/(N-1)\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, M, \tau = T/M\}.$$

Для побудови різницевої схеми (РС) використаємо інтегро-інтерполяційний метод [8]. Проінтегруємо (1) на відрізку $[x_{i-0.5}, x_{i+0.5}]$:

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} dx + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} F(x,t) dx.$$

Перший і третій інтеграли обчислимо наближено за методом центральних прямокутників із точністю $O(h^2)$, а другий – обчислимо точно

$$h \frac{du(x_i,t)}{dt} = Q(x_{i+0.5},t) - Q(x_{i-0.5},t) + hF(x_i,t), \quad i = 2, 3, \dots, N-1, \quad t \in [0,T].$$

Для отримання точності $O(\tau^2)$ виберемо в цій рівності точку $t = \bar{t}_j \equiv t_{j+0.5}$, у якій апроксимуємо похідну $\frac{du(x_i,t)}{dt}$,

а праву частину (яка містить Q) апроксимуємо середнім значенням у точках $\hat{t} = t_{j+1}, t = t_j$:

$$\begin{aligned} h(y_{i,j}) &= 0.5[\hat{K}_{i+0.5} \hat{y}_{x,i} + 0.5\hat{r}_{i+0.5}(\hat{y}_{i+1} + \hat{y}_i) - \hat{K}_{i-0.5} \hat{y}_{x,i} - 0.5\hat{r}_{i-0.5}(\hat{y}_i + \hat{y}_{i-1})] + \\ &+ 0.5[K_{i+0.5} y_{x,i} + 0.5r_{i+0.5}(y_{i+1} + y_i) - K_{i-0.5} y_{x,i} - 0.5r_{i-0.5}(y_i + y_{i-1})] + hF(x_i, \bar{t}_j), \end{aligned} \tag{8}$$

$$i = 2, 3, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

Крайову умову (4) і початкову умову (2) апроксимуємо точно:

$$\hat{y}_N = \mu_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \tag{9}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{10}$$

Апроксимацію крайової умови (3) необхідно отримати в такому вигляді, щоб різницева схема була повністю консервативною. Отримаємо різницеві аналоги закону збереження (6), (7). Для цього сумуємо рівняння (8) за змінною i від 2 до $N-1$:

$$\begin{aligned} h \sum_{i=2}^{N-1} (y_{t,j})_i &= 0.5[Q(x_{2.5}, t_{j+1}) - Q(x_{1.5}, t_{j+1}) + Q(x_{2.5}, t_j) - Q(x_{1.5}, t_j)] + \\ &+ 0.5[Q(x_{3.5}, t_{j+1}) - Q(x_{2.5}, t_{j+1}) + Q(x_{3.5}, t_j) - Q(x_{2.5}, t_j)] + \dots + \\ &+ 0.5[Q(x_{N-0.5}, t_{j+1}) - Q(x_{N-1.5}, t_{j+1}) + Q(x_{N-0.5}, t_j) - Q(x_{N-1.5}, t_j)] + h \sum_{i=2}^{N-1} F(x_i, \bar{t}_j) = \\ &= 0.5[Q(x_{N-0.5}, t_{j+1}) - Q(x_{1.5}, t_{j+1}) + Q(x_{N-0.5}, t_j) - Q(x_{1.5}, t_j)] + h \sum_{i=2}^{N-1} F(x_i, \bar{t}_j). \end{aligned} \quad (11)$$

Враховуючи, що виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} Q(x_{N-0.5}, t) &= Q(1, t) - 0.5hQ'_x(1, t) + O(h^2) = Q(1, t) - 0.5hu'_t(1, t) + 0.5hF(1, t), \\ Q(x_{1.5}, t) &= Q(0, t) + 0.5hQ'_x(0, t) + O(h^2) = Q(0, t) + 0.5hu'_t(0, t) - 0.5hF(0, t), \\ 0.5(u'_t(x_i, t_{j+1}) + u'_t(x_i, t_j)) &= u'_t(x_i, \bar{t}_j) = (y_{t,j})_i + O(\tau^2), \end{aligned} \quad (12)$$

і підставляючи їх у (11), отримаємо

$$\begin{aligned} h \sum_{i=2}^{N-1} (y_{t,j})_i &= 0.5[(Q(1, t_{j+1}) - Q(0, t_{j+1})) - h(y_{t,j})_N + (Q(1, t_j) - Q(0, t_j)) - h(y_{t,j})_1] + h \sum_{i=1}^N \eta_i F(x_i, \bar{t}_j) = \\ &= -\mu_1(\bar{t}_j) - 0.5h[(y_{t,j})_1 + (y_{t,j})_N] + h \sum_{i=1}^N \eta_i F(x_i, \bar{t}_j). \end{aligned}$$

Таким чином, побудовано різницеві аналоги співвідношень (6), (7):

$$I_{t,j} + \mu_1(\bar{t}_j) = h \sum_{i=1}^N \eta_i F(x_i, \bar{t}_j)$$

або

$$I^j + \tau \sum_{k=0}^{j-1} \mu_1(\bar{t}_k) = I^0 + h \tau \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=1}^N \eta_i F(x_i, \bar{t}_k), \quad j = \overline{0, M},$$

де введено позначення

$$I^j = h \sum_{i=1}^N \eta_i y_i^j, \quad \eta_1 = \eta_N = 0.5, \quad \eta_i = 1, \quad i = \overline{2, N-1},$$

яке є наближеним (за методом трапецій) значенням інтеграла $\int_0^1 u(x, t_j) dx$. Звідси випливає, що умову (3) треба апроксимувати виразом

$$0.5[Q(0, t_{j+1}) - Q(1, t_{j+1}) + Q(0, t_j) - Q(1, t_j)] = 0.5[\mu_1(t_{j+1}) + \mu_1(t_j)],$$

у якому, замінивши $Q(0, t)$ і $Q(1, t)$ на співвідношення, отримані з (12), матимемо

$$(y_{t,j})_1 + (y_{t,j})_N = F(0, \bar{t}_j) + F(1, \bar{t}_j) + [Q(x_{1.5}, t_{j+1}) + Q(x_{1.5}, t_j) - Q(x_{N-0.5}, t_{j+1}) - Q(x_{N-0.5}, t_j) - 2\mu_1(\bar{t}_j)]/h. \quad (13)$$

Таким чином, сукупність рівнянь (8) – (10), (13) становить повну систему скінченнорізницевої рівнянь для визначення $\{y_1^j, y_2^j, \dots, y_N^j\}$, $j = 0, 1, \dots, M$, яка з похибкою $O(h^2 + \tau^2)$ апроксимує вихідну задачу. Оскільки задача лінійна, то згідно з теоремою Лакса її порядок збіжності збігається з порядком апроксимації.

Запишемо систему рівнянь (8), (9), (13) для шару $j+1$ у формі [9]:

$$\begin{cases} \hat{c}_1 \hat{y}_1 - \sum_{k=2}^{N-2} d_k \hat{y}_k - \psi_1 \hat{y}_{N-1} = f_1, & i = 1; \\ -\varphi_i \hat{y}_1 - \hat{a}_i \hat{y}_{i-1} + \hat{c}_i \hat{y}_i - \hat{b}_i \hat{y}_{i+1} - \psi_i \hat{y}_{N-1} = f_i, & i = 2, 3, \dots, N-2, \\ -\varphi_{N-1} \hat{y}_1 - \sum_{k=2}^{N-2} g_k \hat{y}_k + \hat{c}_{N-1} \hat{y}_{N-1} = f_{N-1}, & i = N-1; \\ \hat{y}_N = \mu_2(t_{j+1}), & i = N, \end{cases} \quad (14)$$

де введено такі позначення:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1 &= h/\tau + \hat{a}_2; \\ \hat{c}_i &= 2h/\tau + (\hat{K}_{i-0.5} + \hat{K}_{i+0.5})/h + 0.5(\hat{r}_{i-0.5} - \hat{r}_{i+0.5}), \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ d_2 &= \hat{b}_1, \quad d_i = 0, \quad i = 3, 4, \dots, N-2; \\ \psi_1 &= \hat{a}_N, \quad \psi_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-2; \\ \varphi_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ g_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, N-3, \quad g_{N-2} = \hat{a}_{N-1}; \\ \hat{a}_i &= \hat{K}_{i-0.5}/h - 0.5\hat{r}_{i-0.5}, \quad \hat{b}_i = \hat{K}_{i+0.5}/h + 0.5\hat{r}_{i+0.5}, \quad i = 2, 3, \dots, N-2; \\ f_1 &= (h/\tau - a_2)y_1 + b_1y_2 + a_Ny_{N-1} - b_{N-1}y_N - \hat{b}_{N-1}\hat{y}_N - h(\hat{y}_N - y_N)/\tau - 2\mu_1(\bar{t}_j); \\ f_i &= a_iy_{i-1} + (4h/\tau - c_i)y_i + b_iy_{i+1} + 2hF(x_i, \bar{t}_j), \quad i = 2, 3, \dots, N-2; \\ f_{N-1} &= a_{N-1}y_{N-2} + (4h/\tau - c_{N-1})y_{N-1} + b_{N-1}y_N + 2hF(x_{N-1}, \bar{t}_j) + \hat{b}_{N-1}\hat{y}_N. \end{aligned}$$

Для ефективного розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) (14) використано метод прогонки для складних систем [9], який є варіантом методу розв'язання систем різницевих рівнянь з матрицями, які обрамляють тридіагональні з чотирьох сторін. Для підвищення обчислювальної стійкості цей метод поєднано з алгоритмом методу немонотонної прогонки [9] для СЛАР з тридіагональною матрицею, який ґрунтується на використанні вибору головного елемента по рядках у методі виключення Гаусса.

3. Чисельні експерименти. Розглядалася задача (1)–(5) за таких даних:

$$\begin{aligned} K(x, t) &= xv(x) \exp\left(-m\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right)^2\right), \quad v(x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right), \\ r(x, t) &= v(x)(px - 0.5), \quad F(x, t) = F_0 \delta(x - x_1, \Delta x), \\ \mu_1(t) &= \mu_2(t) = 0, \\ u_0(x) &= \tilde{u}_0(x) + x(Ax + B), \quad \tilde{u}_0(x) = \frac{2\beta}{x_2} \sqrt{\frac{x}{\pi x_2}} \exp\left(-\frac{x}{x_2}\right), \\ A &= \tilde{u}_0(1) - \frac{d\tilde{u}_0(1)}{dx}, \quad B = -A - \tilde{u}_0(1). \end{aligned}$$

Тут $\delta(\cdot)$ – апроксимація δ -функції Дірака, а значення числових параметрів $x_0, x_1, x_2, m, t_0, t_1, p, \beta, F_0$ змінювалися в процесі розв'язання задачі.

На рис. 1 наведено значення наближеного розв'язку задачі для моментів часу $t = 0; 0.25; 0.5$, на рис. 2 – значення коефіцієнта поглинання

$$\theta(t) = \int_0^1 v(x) \sqrt{x^3} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx = v(1)\mu_2(t) - \int_0^1 (xv'(x) + 1.5v(x)) \sqrt{x} u(x, t) dx, \tag{15}$$

зміна знака якого визначає перехід плазми в лазерно активний стан.

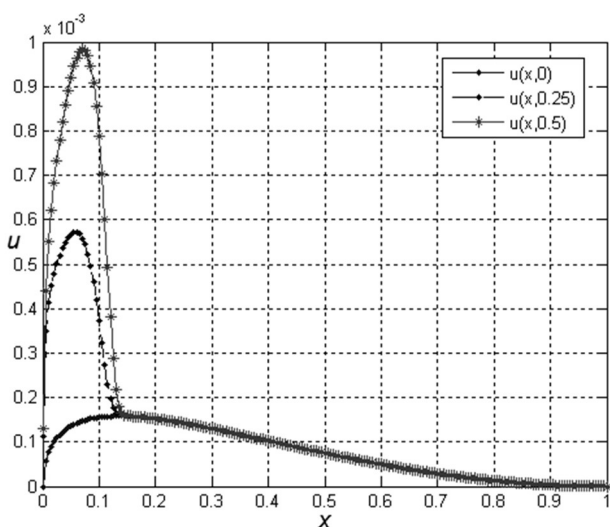


Рис. 1. Графік наближеного розв'язку $u(x, t)$ для різних значень t

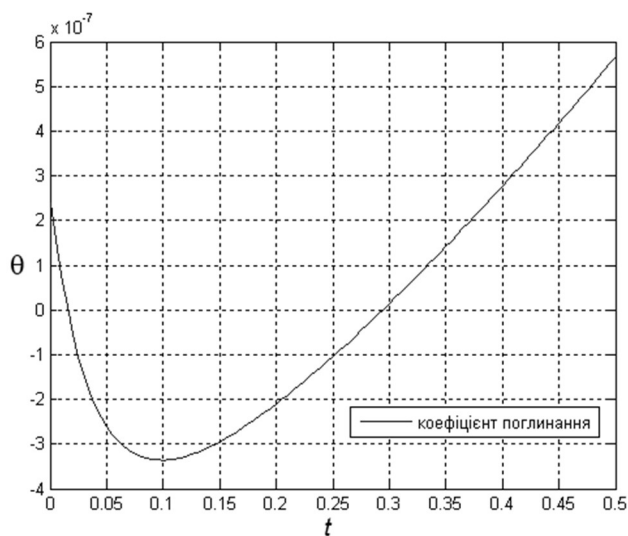


Рис. 2. Графік коефіцієнта поглинання $\theta(t)$

Варіація параметрів задачі в широкому діапазоні показала, що відбувається така еволюція: протягом дії імпульсу накачки [1; 6] величина (15) поступово спадає до нуля і стає від'ємною. Після закінчення імпульсу плазма термалізується, і коефіцієнт поглинання знову стає додатним, що узгоджується з експериментальними даними і розкриває механізм виникнення підсилювального стану нерівновагової плазми оптичного пробоя.

Висновки. Отримані в роботі результати відповідають характерній поведінці розв'язання диференціальної задачі, а виконання закону збереження з точністю не гірше похибки апроксимації свідчить про практичну надійність запропонованої методики для розв'язання такого класу задач. Використане в роботі програмне забезпечення на основі системи комп'ютерної математики MATLAB [5] може бути застосоване (при відповідній модифікації) для отримання числових розв'язків ряду крайових задач математичної фізики, у яких виконуються закони збереження, наприклад, для системи рівнянь поширення імпульсу в дворівневому середовищі без дисипації, майже періодичні й солітонні розв'язки якої отримані в [2], задач нелінійної оптики, що описуються рівняннями типу Шредінгера [7], а також задач конвекції – дифузії для параболічних рівнянь другого порядку з несамоспряженими операторами [3; 4] тощо.

Список використаних джерел:

- 1 Амеров А. К. Плазма оптического пробоя в жидкостях в поле сверхкоротких импульсов как лазерно активная среда / А. К. Амеров, В. С. Овечко, В. Л. Стрижевский // Изв. АН СССР. Сер. физ., 1989. – Т. 53, № 4. – С. 714–717.
- 2 Боголюбов Н. Н. (мл.). Точные почти периодические и солитонные решения нелинейных уравнений распространения волнового импульса в двухуровневой среде без диссипации / Н. Н. Боголюбов, А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко // Докл. АН УССР. Сер. А, 1982. – № 4. – С. 5–9.
- 3 Вакал Ю. С. Дослідження руху забруднень з урахуванням процесу сорбції / Ю. С. Вакал // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки, 2013. – Вип. 4. – С. 41–44.
- 4 Вакал Ю. С. Моделирование руху забруднюючих речовин з урахуванням процесу сорбції / Ю. С. Вакал, В. В. Личман // Интеллектуальные информационно-аналитические системы и комплексы, Киев, 2000. – С. 42–46.
- 5 Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач: навч. посібник / Б. П. Довгий, Ю. С. Вакал, Ю. С. Вакал, А. В. Попов. – К.: Укр. фітосоціоцентр, 2012. – 78 с.
- 6 Довгий Б. П. Численное решение задачи о лазерной активности плазмы пробоя / Б. П. Довгий // Вычисл. и приклад. математика, 1991. – Вып. 75. – С. 60–64.
- 7 Довгий Б. П. Численное решение осесимметричной краевой задачи для квазилинейного уравнения типа Шредингера / Б. П. Довгий, Ю. С. Вакал, Ю. С. Вакал // Весн. Брест. ун-та. Сер. 4. Фізика. Матэматыка, 2016. – № 1. – С. 66–70.
- 8 Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
- 9 Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

Надійшла до редколегії 19.08.20

B. Dovgii, PhD, Associate Prof.,
L. Vakal, PhD,
E. Vakal, PhD, Associate Prof.,
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

NUMERICAL SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATION WITH NON-SELF-ADJOINT OPERATOR AND RELATED BOUNDARY CONDITIONS

A boundary value problem for a second-order parabolic equation with a non-self-adjoint operator is considered. Such problems are mathematical models for a number of problems, describing convective-diffusion processes of matter transfer, breakdown mechanisms of laser activity in plasma, etc. While studying the physics of breakdown, one should take into account the avalanche-like increase in the number of free electrons due to multiphoton ionization processes under the influence of optical pulses. This requires the inclusion of related boundary conditions in the problem formulation. An important circumstance that must be taken into account when developing a method for solving the problem is fulfillment of a certain conservation law for its solution. To solve the boundary value problem an approach based on the finite difference method is proposed. The approximation of the equation and boundary conditions is constructed so that the difference scheme is completely conservative. It approximates the original problem with the second order in the spatial variable and in time, and it has the second order of convergence. To effectively solve a system of linear algebraic equations at each time layer, the sweep method for complex systems in combination with the non-monotonic sweep method for systems with a tridiagonal matrix is used. Software based on computer mathematics MATLAB is developed to perform numerical calculations. It is obtained an approximate solution of an applied problem for different instants of time, as well as values of an absorption coefficient, the change in sign of which determines the transition of the plasma in a laser-active state.

Keywords: non-self-adjoint operator, related boundary conditions, conservation law, sweep method for complex systems, non-monotonic sweep method.

УДК 517.9

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.03.11-15>

Ю. Горбань, канд. фіз.-мат. наук,
А. Соловйова, студ.
Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна
E-mail: yuliyagorban77@gmail.com

УЗАГАЛЬНЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО АНІЗОТРОПНОГО ВАГОВОГО РІВНЯННЯ

Досліджено розв'язність задачі Діріхле для модельного нелінійного вироджуваного анізотропного еліптичного рівняння другого порядку. Анізотропія і виродження (за незалежними змінними) характеризуються наявністю в лівій частині рівняння різних показників q_1 та q_2 і степеневих вагових функцій $|x|^{q_1}$ та $|x|^{q_2}$. Основним результатом роботи є теорема про існування узагальненого розв'язку розглянутої задачі Діріхле.

Ключові слова: вироджувані анізотропні еліптичні рівняння, задача Діріхле, існування розв'язків.

Вступ. За належної інтерпретації поняття похідної, багато важливих класів крайових задач і задач з крайовими та початковими умовами для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними можна розглядати як операторні рівняння, або операторні диференціальні рівняння в рефлексивних банахових просторах. Цей факт дозволяє вивчати такі задачі за допомогою теорії монотонних операторів, яка є одним із сучасних напрямів нелінійного функціонального аналізу.

Загальна постановка задачі про розв'язність операторного рівняння вимагає наявності оператора A , діючого з деякого банахового простору W у відповідний спряжений простір W^* , та елементу $F \in W^*$ ("правої частини" рівняння). При цьому сама задача полягає у відшуванні такого елементу $u \in W$, що для всіх $v \in W$ виконується рівність

$$\langle Au, v \rangle = \langle F, v \rangle. \tag{1}$$

Відповідні теореми про розв'язність операторних рівнянь вигляду (1) можна знайти, наприклад, у монографії [1, с. 78–98], у яких основними умовами є наявність властивостей монотонності та коерцитивності оператора A . У цій статті встановлено існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле для модельного анізотропного вагового рівняння, яке відповідає нелінійному оператору дивергентного вигляду з деякими умовами зростання, еліптичності та монотонності стосовно коефіцієнтів, причому сам оператор визначений на відповідному соболевському просторі. Доведення основного результату базується на використанні основної теореми теорії монотонних операторів, а саме, теореми Браудера–Мінті [1, с. 95], згідно з якою достатньо показати, що оператор, який породжує ліву частину рівняння, радіально неперервний, коерцитивний і монотонний. Зауважимо, що при доведенні властивості коерцитивності зазначеного оператора використано теорему вкладення відповідного вагового анізотропного простору Соболева у клас Лебега L^2 .

Зазначимо, що розглядуване рівняння є модельним випадком анізотропних вагових рівнянь, які вивчаються в роботах [4; 5]. Розглянуто задачу Діріхле для анізотропних вагових рівнянь з L^1 – правими частинами, розв'язки яких (т. зв. ентропійні розв'язки) належать більш широкому функціональному класу, ніж простори Соболева. У відповідних теоремах на ліву частину таких рівнянь накладаються певні умови зростання, коерцитивності та монотонності. Якщо права частина рівняння виявляється "достатньо гладкою", то ентропійний розв'язок збігається з узагальненим. У розглянутому модельному випадку ці умови виконуються автоматично.

Постановка задачі. Сформулюємо задачу Діріхле і наведемо означення її узагальненого розв'язку, існування якого будемо досліджувати в подальшому. Також визначимо підходящий ваговий анізотропний простір Соболева, якому належить узагальнений розв'язок задачі Діріхле, і розглянемо деякі властивості цього простору. Нехай $\Omega \subset R^2$ – обмежена область з межею $\partial\Omega$; $q_i \in (1, 2)$, $i = 1, 2$ – задані дійсні числа (показники анізотропії). За аналогією з [3, с. 106] розглянемо ваговий анізотропний простір Соболева

$$W^{1, q_1, q_2}(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : |x|^{q_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \in L^1(\Omega), i = 1, 2 \right\}.$$

Нескладно показати, що він є банаховим простором відносно норми

$$\|u\|_{W^{1, q_1, q_2}(\Omega)} = \int_{\Omega} |u| dx + \left(\int_{\Omega} |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} + \left(\int_{\Omega} |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} dx \right)^{1/q_2}. \tag{2}$$

Через $W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ позначимо замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ у просторі $W^{1, q_1, q_2}(\Omega)$. Простір $W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми, що індукована нормою (2). Окрім того, простір $W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ є рефлексивним (див. [2, с. 14]).

Із твердження 2.9 [3, с. 109] випливає вкладення $W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ та існування такої додатної залежної лише від n, q_1 і q_2 сталої c_0 , що для довільної функції $u \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ маємо

$$\left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_0 \left(\int_{\Omega} |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} dx \right)^{1/2q_1} \left(\int_{\Omega} |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} dx \right)^{1/2q_2},$$

звідки, користуючись нерівністю Юнга, виводимо нерівність

$$\left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \leq c_0 \left\{ \left(\int_{\Omega} |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} dx \right)^{1/2q_1} + \left(\int_{\Omega} |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} dx \right)^{1/2q_2} \right\}. \tag{3}$$

Нехай $a_i(x, \xi) = |x|^{q_i} |\xi_i|^{q_i-1} \text{sign } \xi_i$, де $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1; \xi_2) \in R^2$, $i = 1, 2$.

Зауважимо, що для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $\xi, \eta \in R^2$ виконується нерівність

$$[a_1(x, \xi) - a_1(x, \eta)] (\xi_1 - \eta_1) + [a_2(x, \xi) - a_2(x, \eta)] (\xi_2 - \eta_2) \geq 0. \tag{4}$$

Розглянемо задачу Діріхле

$$-\frac{\partial(a_1(x, \nabla u))}{\partial x_1} - \frac{\partial(a_2(x, \nabla u))}{\partial x_2} = f \quad \text{у } \Omega, \tag{5}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{6}$$

Перш за все зауважимо, що для всіх $u, v \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ функції $a_1(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_1}$ і $a_2(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_2}$ є сумовними на Ω . Дійсно, використовуючи нерівність Юнга, отримуємо

$$\left| a_1(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_1} \right| \leq |x|^{q_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{-q_1/(q_1-1)} |a_1(x, \nabla u)|^{q_1/(q_1-1)} = |x|^{q_1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1}.$$

Звідси, беручи до уваги, що $u, v \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$, отримуємо включення $a_1(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_1} \in L^1(\Omega)$. Аналогічно, $a_2(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^1(\Omega)$.

Нехай $A: W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega) \rightarrow \left(W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega) \right)^*$ оператор такий, що для довільних $u, v \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$:

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} \left(a_1(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx. \quad (7)$$

Означення. Нехай $f \in L^2(\Omega)$. Функція $u \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком задачі Діріхле (5), (6), якщо для довільної функції $v \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ справедлива інтегральна тотожність $\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx$.

Основний результат. Сформулюємо і доведемо теорему існування узагальненого розв'язання задачі Діріхле для модельного анізотропного вагового рівняння.

Теорема. Нехай $a_i(x, \xi) = |x|^{q_i} |\xi_i|^{q_i-1} \text{sign } \xi_i$, $x \in \Omega$, $\xi = (\xi_1; \xi_2) \in R^2$, $i = 1, 2$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі Діріхле (5), (6).

Доведення. Скористаємось теоремою Браудера–Мінті, згідно з якою достатньо показати, що оператор A , який визначається рівністю (7), радіально неперервний, коерцитивний і монотонний. Для доведення радіальної неперервності оператора A згідно з відповідним означенням (див. [1, с. 79]) необхідно показати, що для довільних фіксованих $u, v \in W^{o, 1, q_1, q_2}(\Omega)$ дійсна функція $s \rightarrow \langle A(u + sv), v \rangle$ неперервна на $[0, 1]$. Для цього скористаємось означенням неперервності цієї функції. Нехай $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ – така послідовність дійсних чисел, що для будь-яких $m \in N$ маємо $s_m \in [0, 1]$, $s_m \rightarrow s$ при $m \rightarrow \infty$. Тоді, очевидно, $s \in [0, 1]$. Треба довести, що при $m \rightarrow \infty$:

$$\langle A(u + s_m v), v \rangle \rightarrow \langle A(u + sv), v \rangle,$$

або, відповідно до (7),

$$\int_{\Omega} \left(a_1(x, \nabla u + s_m \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u + s_m \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx \rightarrow \int_{\Omega} \left(a_1(x, \nabla u + s \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u + s \nabla v) \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx. \quad (8)$$

Позначимо для будь-якого $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_1(x, \nabla u(x) + s \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u(x) + s \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_2}, \\ \varphi_m(x) &= a_1(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Оскільки функція a_i , $i = 1, 2$ згідно з означенням неперервна в точці $\nabla u(x) + s \nabla v(x)$, то при майже всіх $x \in \Omega$ маємо

$$a_i(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \rightarrow a_i(x, \nabla u(x) + s \nabla v(x)), \quad m \rightarrow \infty,$$

звідки випливає, що для майже всіх $x \in \Omega$:

$$\varphi_m(x) \rightarrow \varphi(x), \quad m \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Отримаємо тепер рівномірну щодо m оцінку для $\varphi_m(x)$. За допомогою нерівності Юнга та означення функції a_i , $i = 1, 2$ виводимо

$$\begin{aligned} \left| a_i(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right| &\leq |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i} + |x|^{-q_i/(q_i-1)} \left| a_i(x, \nabla u(x) + s_m \nabla v(x)) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i/(q_i-1)} = \\ &= |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i} + |x|^{-q_i/(q_i-1)} \left(|x|^{q_i} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + s_m \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i-1} \right)^{q_i/(q_i-1)} \leq |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i} + (1 + s_m^{q_i}) |x|^{q_i} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right|^{q_i}, \end{aligned}$$

звідки, користуючись обмеженістю послідовності $\{s_m\}_{m=1}^\infty$ (унаслідок її збіжності), отримаємо при всіх $m \in N$:

$$|\varphi_m(x)| \leq |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|^{q_1} + (1 + M_1^{q_1}) |x|^{q_1} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|^{q_2} + (1 + M_2^{q_2}) |x|^{q_2} \left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} \right|^{q_2},$$

де M_1, M_2 – такі додатні сталі, що $s_m^{q_1} \leq M_1, s_m^{q_2} \leq M_2, m \in N$. З останньої оцінки, включення $u, v \in W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)$, властивості (9) і теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла виводимо (8). Отже, радіальну неперервність оператора A доведено.

Для встановлення коерцитивності оператора A скористаємося відповідним означенням (див. [1, с. 80]). За допомогою нерівності Гельдера та оцінки (3) виводимо

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2} \left(meas \ \Omega \right)^{1/2} \leq c_0 \left(meas \ \Omega \right)^{1/2} \left\{ \left(\int_{\Omega} |x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} dx \right)^{1/q_1} + \left(\int_{\Omega} |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} dx \right)^{1/q_2} \right\}.$$

Звідси випливає, що для довільної функції $u \in W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)$ маємо

$$\|u\|_{W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)}^{q_-} \leq \left(1 + c_0 \left(meas \ \Omega \right)^{1/2} \right)^{q_-} \int_{\Omega} \left(|x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} \right) dx, \tag{10}$$

де $q_- = \min \{q_1, q_2\}$. Далі покладемо в (7) $v = u \in W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)$ і скористаємося (10):

$$\langle Au, u \rangle = \int_{\Omega} \left(a_1(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x, \nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx = \int_{\Omega} \left(|x|^{q_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^{q_1} + |x|^{q_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^{q_2} \right) dx \geq c_* \|u\|_{W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)}^{q_-},$$

де $c_* = \left(1 + c_0 \left(meas \ \Omega \right)^{1/2} \right)^{-q_-}$.

Отже,

$$\langle Au, u \rangle \geq c_* \|u\|_{W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)}^{q_-},$$

звідки

$$\frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|_{W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)}^{q_-}} \geq c_* \|u\|_{W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)}^{q_-} \rightarrow \infty \text{ при } \|u\|_{W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)} \rightarrow \infty,$$

що й означає коерцитивність оператора A .

Залишилося встановити монотонність оператора A (див. [1, с. 79]). Згідно з (7) і (4) для довільних $u, v \in W^{o^{1,q_1,q_2}}(\Omega)$ маємо

$$\langle Au - Av, u - v \rangle = \int_{\Omega} \left\{ (a_1(x, \nabla u) - a_1(x, \nabla v)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + (a_2(x, \nabla u) - a_2(x, \nabla v)) \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right\} dx \geq 0,$$

що й означає монотонність оператора A .

Таким чином, за теоремою Браудера–Мінті існує узагальнений розв'язок задачі Діріхле (5), (6) для довільної правої частини рівняння $f \in L^2(\Omega)$. Теорему доведено.

Отже, у розглянутому модельному випадку для конкретно заданих $a_i, i=1,2$ (у вигляді степеневих функцій з анізотропією та виродженням) у лівій частині рівняння, перевіряється безпосереднє виконання потрібних в теоремі Браудера–Мінті умов на нелінійний оператор, який породжує ця ліва частина.

Висновки. Досліджено питання про розв'язність задачі Діріхле для модельного вироджуваного анізотропного рівняння другого порядку. Доведено теорему про існування узагальненого розв'язку задачі Діріхле для нелінійного еліптичного рівняння другого порядку, яке відповідає нелінійному оператору дивергентного вигляду з "природними" умовами зростання, еліптичності і монотонності для коефіцієнтів, причому сам оператор визначений на відповідному ваговому анізотропному просторі Соболева. При доведенні теореми використано відомі результати про розв'язність операторних рівнянь з монотонними операторами в рефлексивних банахових просторах.

Першого автора підтримано грантом Міністерства освіти і науки України (№ 0118U003138).

Список використаних джерел:

1. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
2. Ковалевский А. А. Вырождающиеся анизотропные вариационные неравенства с L^1 -данными / А. А. Ковалевский, Ю. С. Горбань // Донецк, ИПММ НАН Украины, препринт, 2007. – 92 с.
3. Ковалевский А. А. О Т-решениях вырождающихся анизотропных эллиптических вариационных неравенств с L^1 -данными / А. А. Ковалевский, Ю. С. Горбань // Изв. РАН, сер. матем., 2011. – 75. – №1. — С. 101–160.
4. Gorban Yu. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations / Yu. Gorban // Open Math., 2017. – 15. – P. 768–786.
5. Gorban Yu. On uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic degenerate anisotropic equations / Yu. Gorban // Mat. Stud. – 47. – №1. – 2017. – P. 59–70.

Yu. Gorban, PhD,
A. Soloviova, Student
Vasyl' Stus Donetsk National University, Vinnitsia, Ukraine

A GENERALIZED SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A MODEL ANISOTROPIC WEIGHTED EQUATION

The paper deals with the Dirichlet problem for a model nonlinear degenerate anisotropic elliptic second-order equation. Anisotropy and degeneration (with respect to the independent variables) is characterized by the presence of different exponents q_1 , q_2 and weighted functions $|x|^{q_1}$, $|x|^{q_2}$ in the left side of the equation. The main result of the paper is theorem on the existence of the generalized solution of the Dirichlet problem under consideration.

Keywords: degenerate anisotropic elliptic equations, Dirichlet problem, existence of the solutions.

УДК 519.21

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.04.15-18>

О. Макачук, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
К. Сальник, асп.

Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна
E-mail: makolpet@gmail.com, vikasvat2013@gmail.com

ЛЕБЕГІВСЬКА СТРУКТУРА РОЗПОДІЛУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЗГОРТОК БЕРНУЛЛІ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИДУ

Досліджено проблему поглиблення теореми Джессена–Вінтнера для узагальнених згорток Бернуллі спеціального виду. Основну увагу приділено випадку, коли доданки випадкового ряду набувають трьох значень: 0, 1, 2. У випадку, коли ймовірність того, що доданок випадкового ряду набуває значення 2, дорівнює 0, відповідний клас узагальнених згорток Бернуллі представляє собою класичні згортки Бернуллі, які плідно досліджували як вітчизняні науковці (Працьовитий М., Турбін Г., Торбін Г., Гончаренко Я., Барановський О., Савченко І. та ін.), так і зарубіжні (Erdos P., Peres Y., Schlag W., Solomyak B., Albeverio S. та ін.). Проблема поглиблення теореми Джессена–Вінтнера, що полягає в знаходженні необхідних і достатніх умов належності розподілу напевно збіжного випадкового ряду з дискретними доданками до кожного з трьох чистих типів, є надзвичайно складною в загальній постановці і не розв'язана повністю, навіть для класичних згорток Бернуллі. Результати дослідження є поглибленням щодо аналізу лебегівської структури випадкових рядів, що утворені s-ми розкладами дійсних чисел. У випадку, коли відповідна згортка Бернуллі породжена послідовністю Z^n масмо випадкову величину з незалежними трійковими цифрами, яка досліджувалась науковцями в різних напрямках: лебегівська структура (Chaterji S, Marsaglia G.), тополого-метрична структура спектра розподілу (Працьовитий М., Турбін Г.), фрактальний аналіз носія розподілу (Працьовитий М., Турбін Г.), асимптотичні властивості характеристичної функції на нескінченності (Гончаренко Я., Працьовитий М., Торбін Г.). Отримано деякі достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілу, за певних обмежень на стохастичну матрицю розподілу та асимптотику значень випадкових доданків ряду. У випадку, коли міра Лебега множини реалізації узагальненої згортки Бернуллі відмінна від нуля, можливо разом з теоремою П. Леві сформулювати критерії належності розподілу згортки Бернуллі до кожного з трьох чисто лебегівських типів, тобто чисто дискретного, чисто абсолютно неперервного або чисто сингулярного.

Ключові слова: згортки Бернуллі, абсолютно неперервний розподіл, сингулярний розподіл, щільність розподілу, функція розподілу, випадкова величина.

Вступ. Нехай ξ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0, 1, 2 з імовірностями p_{0k}, p_{1k}, p_{2k} відповідно і a_k – послідовність дійсних відмінних від нуля чисел, для якої

$$-\infty < \sum_{k=1}^{\infty} (p_{1k} + 2p_{2k})a_k < +\infty, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (p_{1k} + 2p_{2k})a_k^2 < +\infty. \quad (2)$$

Імовірнісна міра, що породжена випадковою величиною $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, називається узагальненою асиметричною згорткою Бернуллі. Умови (1), (2) за теоремою Колмогорова про два ряди гарантують збіжність з імовірністю 1 випадкового ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$ і тим самим коректність означення випадкової величини ξ .

За теоремою Джессена–Вінтнера [9] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний. За теоремою Леві [7] випадкова величина ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}\} > 0$. Нехай τ_k – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $-1, 1$ з імовірностями $\frac{1}{2}$ відповідно і a_k – послідовність дійсних чисел, для якої виконується нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$.

Імовірнісна міра, породжена випадковою величиною $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k a_k$, називається *узагальненою симетричною згор-ткою Бернуллі*. У випадку, коли для кожного натурального k виконуються рівності $p_{0k} = p_{1k}$ та $p_{2k} = 0$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ є збіжним, то ймовірнісні міри, що породжені випадковими величинами ξ та τ , еквівалентні.

Проблема знаходження критеріїв сингулярності (абсолютної неперервності) розподілу випадкової величини τ є надзвичайно складною і глибокою в історичному плані [8].

Достатні умови сингулярності та абсолютної неперервності розподілу ξ .

Теорема 1. *Якщо виконуються умови $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}\} = 0$, $\prod_{j=1}^{\infty} (\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}}) = 0$ та $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot 3^n| < +\infty$, то випадкова величина ξ має сингулярний розподіл.*

Доведення. Нехай $3^n a_n = b_n$, позначимо

$$\tau_k = \sum_{j=1}^k \xi_k a_k = \sum_{j=1}^k \frac{\xi_k}{3^k},$$

де $\eta_k = \xi_k b_k$ – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, b_k, 2b_k$ з імовірностями p_{0k}, p_{1k}, p_{2k} , відповідно. Нехай $\eta_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\xi_{k+n}}{3^k}$. Зрозуміло, що для кожного $k \in N$ маємо рівність $\xi = \tau_k + \frac{\eta_k}{3^k}$. Очевидно, що випадкова величина τ_k набуває значень c_1, c_2, \dots, c_{3^k} з імовірностями q_1, q_1, \dots, q_{3^k} . Маємо

$$F_{\xi}(x) = P(\tau_k + \frac{\eta_k}{3^k} < x) = \sum_{j=1}^{3^k} q_j \cdot P(c_j + \frac{\eta_k}{3^k} < x) = \sum_{j=1}^{3^k} q_j \cdot P(\eta_k < 3^k(x - c_j)).$$

Припустимо, що $F_{\xi}(x)$ абсолютно неперервна. Тоді $F_{\eta_k}(x)$ також абсолютно неперервна. Враховуючи попередню рівність, маємо рівність $p_{\xi}(x) = \sum_{j=1}^{3^k} 3^k q_j p_{\eta_k}(x)(3^k(x - c_j))$, яка виконується майже скрізь. Позначимо $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p_{\xi}(x)} dx$, $B_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p_{\eta_k}(x)} dx$. Зрозуміло, що виконується нерівність

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{3^k} 3^k q_j p_{\eta_k}(x)(3^k(x - c_j))} dx \leq \sum_{j=1}^{3^k} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{3^k q_j p_{\eta_k}(x)(3^k(x - c_j))} dx = B_k \cdot \prod_{j=1}^k (\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}}).$$

Нехай $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot 3^n| = L$. Тоді для кожного натурального k виконується співвідношення $|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{k+n}}{3^n}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{L}{3^n} = \frac{L}{2}$, тому для спектра S_{η_k} випадкової величини η_k маємо включення $S_{\eta_k} \in [-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}]$, а отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{p_{\eta_k}(x)} dx = \int_{-0.5L}^{0.5L} \sqrt{p_{\eta_k}(x)} dx \leq \int_{-0.5L}^{0.5L} \frac{1 + p_{\eta_k}(x)}{2} dx = \frac{L+1}{2}.$$

Відповідно маємо

$$A \leq \prod_{j=1}^k (\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}}) \cdot \frac{L+1}{2} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty),$$

звідки випливає рівність $A = 0$, оскільки майже скрізь $p_{\xi}(x) = 0$. Маємо протиріччя. Теорему 1 доведено.

Розглянемо множину $M = \{\sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k a_k \mid \varepsilon_k \in \{0; 1; 2\}, k \in N\}$, яка є множиною реалізацій випадкової величини ξ і містить S_{ξ} .

Теорема 2. *Якщо виконуються умови $\prod_{j=1}^{\infty} (\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}}) > 0$, $\lambda(M) > 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot 3^n| < +\infty$, то випадкова величина ξ має абсолютно неперервний розподіл.*

Доведення. З умови теореми випливає абсолютна збіжність ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Розглянемо послідовність $d_n = 1, 5(|a_n| - a_n)$.

Оскільки випадкові величини ξ та $\xi + \sum_{k=1}^{\infty} d_k$ мають однакові лебегівські типи розподілів, то без обмеження загальності можна вважати, що $a_n > 0$ для кожного натурального n .

Розглянемо випадкову величину $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k a_k$, де ψ_k – послідовність незалежних дискретних випадкових величин, які набувають значень 0,1,2 з однаковими ймовірностями. Нехай M^* – підмножина множини M , на якій похідна функції розподілу $F_{\psi}(x)$ існує і має скінченне значення. Зрозуміло, що за теоремою Лебега множина M^* має додатну міру Лебега. За теоремою Леві [7] розподіл ψ неперервний, а за теоремою Джессена–Вінтнера [9] він сингулярний або абсолютно неперервний.

Нехай $M = \{ \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k a_k \mid \varepsilon_k \in \{0;1;2\}, k \in N \}$, $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k a_k \in M$, $b_k = \sum_{j=1}^k \gamma_j a_j$, $c_k = \sum_{j=1}^k \gamma_j a_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} 2a_j$. Зрозуміло, що

$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = x = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$ і для кожного натурального k виконується умова $b_k < x < c_k$, тому $F'_{\psi}(x) = \frac{F_{\psi}(c_k) - F_{\psi}(b_k)}{c_k - b_k}$. Оскільки

$$F_{\psi}(c_k) - F_{\psi}(b_k) = P(\psi \in [b_k; c_k]) \geq P(\psi_1 = \gamma_1) \cdot \dots \cdot P(\psi_k = \gamma_k) \cdot P(\psi_{k+1} \in \{0;1;2\}) \cdot \dots = \frac{1}{3^k}, \quad c_k - b_k = \sum_{j=k+1}^{+\infty} a_j < \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{L}{3^j} = \frac{0,5L}{3^k},$$

То $F'_{\psi}(x) > \frac{1}{3^k} : \frac{0,5L}{3^k} = \frac{2}{L} > 0$.

Отже, на множині додатної міри Лебега функція $F_{\psi}(x)$ має скінченну і строго додатну похідну, тобто $F_{\psi}(x)$ є абсолютно неперервною.

Розглянемо дві послідовності ймовірнісних просторів $\{(\Omega_k, A_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, A_k, \nu_k)\}$: $\Omega_k = \{0,1,2\}$ σ -алгебра A_k визначена на всіх підмножинах Ω_k , значення мір за елементарними подіями визначимо таким чином:

$$\mu_k(0) = p_{0k}, \mu_k(1) = p_{1k}, \mu_k(2) = p_{2k}, \quad \nu_k(0) = \frac{1}{3}, \nu_k(1) = \frac{1}{3}, \nu_k(2) = \frac{1}{3}.$$

Очевидно, що ймовірнісні міри μ_k абсолютно неперервні відносно мір ν_k для будь-яких $k \in N$. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів $(\Omega, A, \mu) = \prod_{k=1}^{+\infty} (\Omega_k, A_k, \mu_k)$, $(\Omega, A, \nu) = \prod_{k=1}^{+\infty} (\Omega_k, A_k, \nu_k)$. Використовуючи теорему Какутані [6], можна зробити висновок про те, що міра μ абсолютно неперервна відносно міри ν тоді і тільки тоді, коли

виконується нерівність $\prod_{k=1}^{+\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0$, яка еквівалентна умові

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}} \right) > 0.$$

Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{\varphi} [0; 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k]$, що задане рівністю $\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a_k$ для кожного $\omega \in \Omega$. Для

довільної борелівської підмножини E визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією відображення φ таким чином:

$\mu^*(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$, $\nu^*(E) = \nu(\varphi^{-1}(E))$. Міра μ^* збігається з ймовірнісною мірою P_{ξ} , а міра ν^* – з ймовірнісною мірою P_{ψ} , що еквівалентна мірі Лебега. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* щодо міри ν^* . Оскільки міри ν^* та λ еквівалентні, то розподіл ξ є абсолютно неперервним. Теорему 2 доведено.

Таким чином, враховуючи теорему Леві та теореми 1, 2 можна сформулювати такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо a_k – послідовність дійсних відмінних від нуля чисел, $\lambda(M) > 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n \cdot 3^n| < +\infty$, то випадкова величина ξ має чистий лебегівський тип розподілу, причому:

1) дискретний тип – лише тоді, коли виконується нерівність $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}\} > 0$;

2) абсолютно неперервний тип – лише, коли справедливе співвідношення $\prod_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}} \right) > 0$;

3) сингулярний тип – лише, коли виконуються умови $\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}\} = 0$, $\prod_{j=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{p_{0j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{1j}}{3}} + \sqrt{\frac{p_{2j}}{3}} \right) = 0$.

Висновки. Отримано достатні умови абсолютної неперервності та сингулярності розподілу узагальненої згортки Бернуллі, за певних обмеженнях на стохастичну матрицю розподілу та асимптотику значень випадкових доданків відповідного випадкового ряду. У випадку, коли міра Лебега множини реалізацій узагальненої згортки Бернуллі відмінна від нуля, сформульовано критерій належності розподілу згортки Бернуллі до кожного з трьох чистих лебегівських типів розподілу.

Список використаних джерел:

- 1 Працьовитий М. В. Розподіл випадкової величин, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами / М. В. Працьовитий, О. П. Макарчук // Науковий часопис НПУ імені Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, 2010. – №11. – С. 160–169.
- 2 Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. – Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
- 3 Працьовитий М. В. Один клас випадкових величин типу Джессена–Вінтнера / М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Доп. НАН України, 1998. – № 4. – С. 48–54.
- 4 Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. – Киев : Наук. думка, 1992. – 208 с.
- 5 Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits / S. Albeverio, Y. Goncharenko, M. Pratsiovyti, G. Torbin // Random Oper. Stochastic Equations, 2007. – 15, № 1. – P. 89–97.
- 6 Kakutani S. Equivalence of infinite product measures / S. Kakutani // Ann. of Math., 1948. – 49. – P. 214–224.
- 7 Levy P. Sur les sries don't les termes sont des variables independantes / P. Levy // Studia Math., 1931. – Vol. 3. – P. 119–155.
- 8 Peres Y. Sixty years of Bernoulli convolutions / Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak // Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability, 2000. – Vol. 46. – P. 39–65.
- 9 Jessen B. Distribution function and Riemann Zeta-function / B. Jessen, A. Wintner // Trans. Amer. Math. Soc., 1935. – Vol. 38. – P. 48–88.

Надійшла до редколегії 10.09.20

O. Makarchuk, PhD, Associate Prof.,
K. Salnik, PhD, Student
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

LEBESGUE STRUCTURE OF DISTRIBUTION OF GENERALIZED BERNOULLI CONVOLUTIONS OF SPECIAL TYPE

The paper deals with the problem of deepening the Jessen-Wintner theorem for generalized Bernoulli convolutions of a special kind. The main attention is paid to the case when the terms of a random series acquire three values: 0, 1, 2. In the case when the probability that the term of a random series becomes 2 is 0, the corresponding generalized Bernoulli convolutions coincide with classic Bernoulli convolutions, which were actively studied domestic scientists (Pratsiovyty M., Turbin G., Torbin G., Honcharenko Ya., Baranovsky O., Savchenko I. and others) as well as foreign researchers (Erdos P., Peres Y., Schlag W, Solomyak B., Albeverio S. and others). The problem of deepening the Jessen-Wintner theorem concerning the necessary and sufficient conditions for the distribution of a probably convergent random series with discrete additions to each of the three pure types, is extremely difficult to formulate and is not completely solved even for classical Bernoulli convolutions. The results of the study are a deepening in relation to the analysis of the Lebesgue structure of random series formed by s-expansions of real numbers. In the case when the corresponding Bernoulli convolution is generated by the sequence 3^n , we have a random variable with independent triple digits, which was studied by scientists in different directions: Lebesgue structure (Chaterji S., Marsaglia G.), topological-metric structure of the distribution spectrum (Pratsiovyty M., Turbin G.), fractal analysis of the distribution carrier (Pratsiovyty M., Torbin G.), asymptotic properties of the characteristic function at infinity (Honcharenko Ya., Pratsiovyty M., Torbin G.). The paper presents certain sufficient conditions for the absolute continuity and singularity of the distribution, with certain restrictions on the stochastic distribution matrix and the asymptotics of the values of the random terms of the series. In the case when the Lebesgue measure of the set of realizations of the generalized Bernoulli convolution is different from zero, it is possible together with Levy's theorem to formulate criteria for belonging of the Bernoulli convolution distribution to each of the three pure Lebesgue types, namely: purely discrete, purely continuous or purely singular.

Keywords: Bernoulli convolutions, absolutely continuous distribution, singular distribution, distribution density, distribution function, random variable.

UDC 512.563

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.05.18-20>

O. Bezushchak, PhD, Associate Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
B. Oliynyk, Dr Hab., Prof.
National University of "Kyiv-Mohyla Academy", Kyiv, Ukraine
E-mail: bezusch@univ.kiev.ua, oliynyk@ukma.edu.ua

ORDINALITY OF ISOMETRY GROUPS OF HAMMING SPACES OF PERIODIC SEQUENCES

We study Hamming spaces (known also as measure algebras). For all Steinitz numbers s , we find cardinalities of the groups of isometries of Hamming spaces of s -periodic sequences and the group of automorphisms of such space and we prove that are both cardinalities equal to 2^{\aleph_0} .

Keywords: measure algebra, Steinitz number, Hamming space, automorphism group, isometry group.

Introduction. A Boolean ring B is an associative commutative ring with 1 satisfying the identities $2x = 0$, $x^2 = x$. Let R denote the field of real numbers and $R^+ = \{\alpha \in R \mid \alpha \geq 0\}$.

A function $r: B \rightarrow R^+$ from a Boolean ring B to R^+ is called a *measure* (see [3]) if:

- 1) $r(a) = 0$, $a \in B$, if and only if $a = 0$,
- 2) $r(a) = 1$, $a \in B$, if and only if $a = 1$,
- 3) if $a, b \in B$ and $ab = 0$ then $r(a + b) = r(a) + r(b)$.

Following [3], a Boolean ring B with a measure $r: B \rightarrow R^+$ is called a *measure algebra*. Each measure algebra is a metric space with respect to the metric $d(a, b) = r(a - b)$. Let $H(n) = (Z/2Z)^n$. The function

$$r_{H(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\},$$

is a measure. The distance $d_{H(n)}(a, b)$ is the number of coordinates in which $a, b \in H(n)$ are distinct. Thus, $(H(n), d_{H(n)})$ is *standard Hamming space*.

Infinite generalizations of standard Hamming spaces introduced in [2, 5, 6] fit nicely in the context of measure algebras. In [1], measure algebras are called *Hamming spaces*.

Let N be the set of all positive integers, and let P be the set of all primes. An infinite formal product of the form

$$s = \prod_{p \in P} p^{r_p}, \text{ where } r_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \text{ for all } p \in P,$$

is called *Steinitz number*; see [7].

The product of two Steinitz numbers

$$\prod_{p \in P} p^{r_p} \text{ and } \prod_{p \in P} p^{k_p}$$

is a Steinitz number

$$\prod_{p \in P} p^{r_p + k_p},$$

where we assume that $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $t + \infty = \infty + t = \infty + \infty = \infty$ for all positive integers t . Denote by SN the set of all Steinitz numbers. Obviously, the set of all positive integers N is a subset of the set of all Steinitz numbers SN .

Denote by $\{0, 1\}^N$ the set of all right-infinite $(0, 1)$ -sequences. Clearly, $\{0, 1\}^N$ is a Boolean ring with coordinate-wise additions modulo 2 and multiplications. An infinite sequence $a = (a_1, a_2, \dots) \in \{0, 1\}^N$ is said to be *periodic* if there exists a natural number k such that the equality $a_i = a_{i+k}$ holds for all $i \in N$. In this case the number k is called a *period* of the sequence a .

Let u be a Steinitz number. A periodic sequence a is called *u -periodic* if its minimal period is a divisor of u . Let $H(u)$ be the set of all u -periodic sequences. Clearly, $H(u)$ is a Boolean subalgebra of $\{0, 1\}^N$. The rang function

$$r_{H(u)}(a_1, a_2, \dots) := (a_1 + \dots + a_k) / k,$$

where k is a period of the sequence (a_1, a_2, \dots) , makes $(H(u), r_{H(u)})$ a Hamming space; see [2, 5, 6].

An automorphism φ of a measure algebra H is an automorphism of a Boolean ring such that $r(\varphi(a)) = r(a)$ for all elements $a \in H$. It is easy to see that an isometry of a metric space H is an automorphism if and only if it fixes 0. Hence, the group $Isom H$ of all isometries of H is a semidirect product $Isom H = H \bullet Aut H$ of the measure algebra H and the automorphism group of H .

The automorphism group $Aut H(u)$ of the standard Hamming space $H(u)$ is isomorphic to the permutation group $S(u)$. The group of isometries $Isom H(u)$ is isomorphic to the permutation wreath product of groups $Z/2Z$ and $S(u)$; see [6]. The paper [6] gives a description of groups of isometries of measure algebras $H(s)$ for all Steinitz numbers s . In this paper we find cardinalities of the groups $Aut H(s)$ and $Isom H(s)$.

Main result

Theorem. For an arbitrary infinite Steinitz number s we have $|Aut H(s)| = |Isom H(s)| = 2^{\aleph_0}$.

The Boolean ring $H(s)$ is countable. Hence, the cardinality of the group $Isom H(s)$ does not exceed the cardinality of the set of all maps $H(s) \rightarrow H(s)$, the latter being equal to $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. In [1], we defined tensor product of measure algebras: for arbitrary measure algebras (B_1, r_1) and (B_2, r_2) there exists a unique measure function $r: B_1 \otimes_Z B_2 \rightarrow R^+$ such that $r(a \otimes b) = r_1(a) r_2(b)$ for arbitrary elements $a \in B_1, b \in B_2$. A measure algebra (H, r) is said to be *locally standard* if each finite subset of H is contained in a subalgebra $H' \subset H$ that is isomorphic to some standard Hamming space $H(m)$. A u -periodic Hamming space $H(u)$ is locally standard for an arbitrary Steinitz number u . Indeed, for any finite collection of elements $\{a_1, \dots, a_n\} \subset H(u)$, there exists a positive integer m , such that all sequences a_1, \dots, a_n are periodic with period m and $m | u$. Then sequences a_1, \dots, a_n are contained in a subspace that is isomorphic to standard Hamming space $H(m)$.

Let H be a locally standard Hamming space. Let $D(H) := \{n \geq 1 \mid H' \subset H, H' \cong H(n)\}$. The least common multiple of the set $D(H)$ is called the Steinitz number of H and denoted as $st(H)$. In [1], we proved the following analog of the theorem of G. Köthe [4]: let H be a countable locally standard measure algebra. Then $H \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} H(p_i)$, where all $H(p_i)$ are standard Hamming spaces and all p_i are prime numbers. In this case

$$st(H) = \prod_{i=1}^{\infty} p_i.$$

Let s be an infinite Steinitz number and let $s = \prod_{i=1}^{\infty} p_i$ is a prime decomposition of s . Since $H(s)$ is a countable locally standard measure algebra it follows that

$$H(s) \cong \bigotimes_{k=1}^{\infty} H(p_k).$$

For each factor $H(p_k) = (Z/2Z)^{p_k}$ fix a non identical permutation π_k on p_k symbols and the nontrivial automorphism

$$\varphi_k(i_1, \dots, i_{p_k}) = (i_{\pi_k(1)}, \dots, i_{\pi_k(p_k)}).$$

Choose a subset $X \subset N$ and define the automorphism φ_X of $\bigotimes_{k=1}^{\infty} H(p_k)$ as follows:

φ_X acts on $H(p_k)$ as φ_k for $k \in X$;

φ_X acts on $H(p_k)$ as the identity map for $k \in N \setminus X$.

It is easy to see that $\varphi_X = \varphi_Y$ if and only if $X = Y$. Hence $|\text{Aut } H(s)| \geq 2^{\aleph_0}$ and therefore,

$$2^{\aleph_0} \leq |\text{Aut } H(s)| \leq |\text{Isom } H(s)| \leq 2^{\aleph_0}.$$

This completes the proof of the theorem.

Conclusions. A Boolean ring B with a measure $r: B \rightarrow R^+$ is a Hamming space. For Steinitz number s , we define Hamming space $H(s)$ of s -periodic sequences. Since $H(s)$ is a countable locally standard measure algebra then $H(s)$ is a tensor product of standard Hamming spaces. So, each automorphism of $H(s)$ acts on factors of such tensor product. Therefore, the order of the group of isometries of $H(s)$ and the order of the group of automorphisms of $H(s)$ are both equal to 2^{\aleph_0} .

References:

1. Bezushchak O. Hamming spaces and locally matrix algebras / O. Bezushchak and B. Oliynyk // J. Algebra Appl., 2021. <https://doi.org/10.1142/S0219498821501474>.
2. Cameron P. J. Limits of cubes / P. J. Cameron, S. Tarzi // Topology and its Applications, 2008. – Vol. 155, iss. 14. – P. 1454–1461.
3. Horn A. Measure in Boolean subalgebras / A. Horn and A. Tarski // Trans. Amer. Math. Soc., 1948. – Vol. 64. – P. 467–497.
4. Köthe G. Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum / G. Köthe // Math. Ann., 1931. – Vol. 105. – P. 15–39.
5. Oliynyk B. The diagonal limits of Hamming spaces / B. Oliynyk // Algebra Discrete Math., 2013. – Vol. 15. – No 2. – P. 229–236.
6. Oliynyk B. V. The isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences / B. V. Oliynyk, V. I. Sushchanskii // Sib. Math. J., 2013. – Vol. 54. – No 1. – P. 124–136.
7. Steinitz E. Algebraische Theorie der Körper / E. Steinitz // J. Reine Angew. Math., 1910. – Vol. 137. – P. 167–309.

Received 15.08.20

О. Безущак, канд. фіз-мат наук, доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Б. Олійник, д-р фіз-мат наук, проф.
Національний університет "Києво-Могилянська Академія", Київ, Україна

ПОТУЖНОСТІ ГРУП ІЗОМЕТРІЙ ПРОСТОРІВ ХЕМІНГА ПЕРІОДИЧНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Вивчено простори Хемінга (відомі також як алгебри з мірою). Доведено, що потужність групи ізометрій простору Хемінга s -періодичних послідовностей збігається з потужністю групи автоморфізмів такого простору і дорівнює 2^{\aleph_0} .

Ключові слова: алгебра з мірою, число Стейніца, простір Хемінга, група автоморфізмів, група ізометрій.

УДК 512.715, 512.554.31

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.06.20-25>

А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Є. Чаповський, асп.,
І. Клименко, асп.,
М. Сидоров, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: safemacc@gmail.com.com

НИЛЬПОТЕНТНІ МОДУЛІ НАД ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Нехай K – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і $K[X]$ – алгебра многочленів від n змінних. Векторний простір $T_n = K[X]$ є, очевидно, $K[X]$ -модулем відносно дії $x_i \cdot v = v_{x_i}'$ для $v \in T_n$. Кожен скінченновимірний підмодуль V із T_n нільпотентний, тобто кожен елемент $f \in K[X]$ з нульовим сталим членом діє нільпотентно (множенням) на V . Доведено, що кожен нільпотентний $K[X]$ -модуль V скінченної розмірності над K з одновимірним цокелем ізоморфно вкладається в модуль T_n . Знайдено групи автоморфізмів модуля T_n і його скінченновимірних номіальних підмодулів. Аналогічні результати отримано для (ненільпотентних) скінченновимірних $K[X]$ -модулів з одновимірним цокелем.

Ключові слова: кільце многочленів, нільпотентний модуль, група автоморфізмів, одновимірний цокель.

Вступ. Нехай K – довільне алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $K[X] := K[x_1, K, x_n]$ – алгебра многочленів від n змінних. Кожен скінченновимірний модуль V над $K[X]$ визначає n попарно комутуючих матриць A_1, K, A_n , які задають дію елементів x_1, K, x_n алгебри $K[X]$ на V у фіксованому базисі простору V . Задача класифікації таких наборів (A_1, K, A_n) квадратних матриць з точністю до подібності є дикою при $n \geq 2$ (див. [2]), і тому задача класифікації скінченновимірних (над K) модулів над алгеброю $K[X]$ також є дикою. Природним обмеженням на модулі V над $K[X]$ є умова одновимірності їхнього цокеля. Це еквівалентно тому, що модуль V містить єдиний мінімальний скінченновимірний підмодуль. Природним прикладом такого модуля є векторний простір $T_n := K[X]$ над

полем K з дією $K[X]$ на T_n вигляду $x_i f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)$ для $f \in T_n$. Цей модуль нескінченновимірний, але всі його

скінченновимірні підмодулі мають одновимірні цокелі. У статті [3] вивчалися скінченновимірні підмодулі модуля T_2 , де вони називалися поліноміально трансляційними. Властивості модулів над поліноміальними кільцями вивчалися в працях [6, 7]. Зазначимо також, що ендоморфізми модулів над кільцем многочленів від однієї змінної вивчалися у [1].

Для зручності модуль V над поліноміальним кільцем $K[X]$ будемо називати нільпотентним, якщо існує таке натуральне число k , що $(K_0[X])^k v = 0$ для всіх $v \in V$, де $K_0[X]$ – ідеал з $K[X]$, який складається із многочленів з нульовим сталим членом. Згадані вище скінченновимірні поліноміальні трансляційні модулі є, очевидно, нільпотентними.

Основні результати статті такі: у теоремі 1 показано, що кожен нільпотентний скінченновимірний модуль з одновимірним цокелем ізоморфний деякому підмодулю із T_n . Цей результат переноситься і на ненільпотентні модулі з одновимірним цокелем. Доведено, що кожен скінченновимірний модуль з одновимірним цокелем ізоморфно вкладається в модуль $D_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ для деяких $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ (див., Наслідок 1). Досліджено групу автоморфізмів

$K[X]$ -модуля T_n і його скінченновимірних підмодулів. Зокрема доведено, що $Aut(T_n)$; $K[[X]]^*$, де $K[[X]]^*$ – мультиплікативна група алгебри $K[[X]]$ формальних степеневих рядів від n змінних (див. Теорема 4). Звідси випливає, що в T_n лежить точно одна ізоморфна копія кожного скінченновимірного нільпотентного $K[X]$ -модуля з одновимірним цокелем (Наслідок 4).

Позначення в роботі стандартні. Основне поле K характеристики нуль, $K_0[X]$ – ідеал із $K[X]$, породжений змінними x_1, K, x_n , $K[[X]] := K[[x_1, K, x_n]]$ – кільце формальних степеневих рядів від n змінних. Нагадаємо, що цокелем $Soc(M)$ модуля M називається сума всіх його мінімальних підмодулів. Модуль V над алгеброю $K[X]$ будемо називати нільпотентним, якщо $(K_0[X])^k V = 0$ для деякого натурального k . Модуль V називається локально нільпотентним, якщо для довільних $a \in K_0[X], v \in V$ існує таке натуральне число $k = k(a, v)$, що виконується рівність $a^k v = 0$. Для нільпотентних скінченновимірних $K[X]$ -модулів цокель складається з перетину ядер $\bigcap_{i=1}^n \ker S_i$, де S_i – лінійний оператор на модулі, індукований множенням на елемент $x_i \in K[X]$. Якщо цокель $Soc(V)$ одновимірний, то це означає, що V містить тільки один одновимірний підмодуль. K -алгебру всіх ендоморфізмів модуля V будемо позначати через $End(V)$. Якщо V – модуль над алгеброю $K[X]$ і θ – автоморфізм алгебри $K[X]$, то через V_θ будемо позначати "підкручений" $K[X]$ -модуль, дія на якому задається за правилом $f \circ v = \theta(f) \cdot v, f \in K[X], v \in V$, де в правій частині крапкою позначено множення елементів із V на елементи із $K[X]$.

1. Універсальний модуль з одновимірним цокелем над поліноміальним кільцем. Нагадаємо, що через T_n позначено $K[X]$ -модуль на векторному просторі $K[X]$ з дією твірних x_i кільця на T_n за правилом $x_i f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f), i=1, K, n, f \in T_n$. Легко бачити, що T_n – локально нільпотентний $K[X]$ -модуль і $Soc(T_n) = K[1]$ – одновимірний підмодуль. Наступне твердження є відомим і далі буде часто використовуватися.

Лема 1 (див. [5], Lemma 2.5.3). *Нехай многочлени $f_1, K, f_k, k \leq n$ із $K[x_1, K, x_n]$ задовольняють умову $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, i, j=1, K, k$. Тоді існує такий многочлен $h \in K[x_1, K, x_n]$, що $\frac{\partial h}{\partial x_i} = f_i, i=1, K, k$ і цей многочлен h визначається многочленами f_1, K, f_k однозначно з точністю до доданка з $K[x_{k+1}, K, x_n]$.*

Наступне твердження показує, що T_n містить ізоморфну копію кожного скінченновимірного нільпотентного модуля з одновимірним цокелем.

Теорема 1. *Нехай V – скінченновимірний нільпотентний $K[X]$ -модуль з одновимірним цокелем. Тоді модуль V ізоморфно вкладається в $K[X]$ -модуль T_n .*

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції і здійснимо індукцію за $k = \dim_K V$. Якщо $k = 1$, то $V = K \langle v \rangle$ для довільного ненульового елементу $v \in V$. Вкладення $\varphi: V \rightarrow T_n$ задаємо за правилом $\varphi(v) = 1$ і далі за лінійністю. Нехай $\dim_K V = k > 1$ і W – який-небудь підмодуль із V ковимірності 1 у V (з огляду на нільпотентність модуля V такий підмодуль існує). Візьмем довільний елемент $v_0 \in V \setminus W$. Тоді $x_i v_0 \neq 0$ для деякого $i, 1 \leq i \leq n$. Дійсно, в іншому випадку $K \langle v_0 \rangle$ – одновимірний підмодуль, який збігається з цокелем модуля V . Цокель $Soc(V)$ модуля V одновимірний, і тому $Soc(V) = K \langle v_0 \rangle$, що неможливо, оскільки $Soc(V)$, очевидно, міститься в W . Отримана суперечність показує, що для деякого $i, 1 \leq i \leq n$ маємо $x_i v_0 \neq 0$.

За індуктивним припущенням існує ізоморфізм $\varphi: W \rightarrow M$, де M – деякий підмодуль із T_n . Позначимо через S_i лінійні оператори на V , які індуковані множенням V на x_i , тобто $S_i(v) = x_i v, v \in V, i=1, \dots, n$. Тоді S_1, K, S_n – попарно комутуючі нільпотентні оператори на V і $\bigcap_{i=1}^n \ker S_i$ – одновимірний підмодуль, який збігається з цокелем $Soc(V)$. Оскільки $\dim_K V/W = 1$, то $S_i(v_0) \in W, i=1, K, n$. Як наслідок отримуємо включення $\varphi(S_i(v_0)) \in M, i=1, \dots, n$ і $\varphi(S_i(v_0))$ многочлени від x_1, K, x_n . Позначимо $f_i = \varphi(S_i(v_0))$. Оскільки φ – ізоморфізм $K[X]$ -модулів, то виконуються рівності

$$\varphi(S_i(S_j(v_0))) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi(S_j(v_0))) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \varphi(S_j(S_i(v_0))) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi(S_i(v_0))) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Оскільки $S_i S_j = S_j S_i$, то виконуються рівності

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j=1, K, n. \quad (1)$$

Це означає, що для векторного поля $\vec{v} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + K + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ на K^n виконуються умови існування потенціалу. За Лемою 1 існує такий многочлен $h \in K[X]$, що $\frac{\partial h}{\partial x_i} = f_i, i=1, K, n$. Але тоді, як неважко перекоонатися, $M + K \langle h \rangle -$ підмодуль модуля T_n . Легко бачити, що $h \notin M$. Дійсно, нехай це не так і $h \in M$. Позначимо $v_1 = \varphi^{-1}(h) \in W$ і зауважимо, що φ^{-1} – ізоморфізм $K[X]$ -модулів M і W . Тому виконуються рівності

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) = S_i(\varphi^{-1}(h)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Але з іншого боку, маємо

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) = \varphi^{-1}(f_i) = S_i(v_0),$$

і тому $S_i(v_1 - v_0) = 0, i = 1, K, n$. Останнє означає, що $v_1 - v_0 \in Soc(V) = K \langle v_0 \rangle$, а отже, $v_1 - v_0 \in W$. Оскільки $v_1 \in W$ за попередніми міркуваннями, то і $v_0 \in W$, що суперечить вибору елемента v_0 . Отримана суперечність показує, що $h \notin M$.

Визначимо K -лінійне відображення $\psi : V = W + K \langle v_0 \rangle \rightarrow M + K \langle h \rangle$ за правилом $\psi(w) = \varphi(w), w \in W, \psi(v_0) = h$ і далі за лінійністю. Безпосередньо перевіряється, що ψ – ізоморфізм $K[X]$ -модуля V на підмодуль $M + K \langle h \rangle$ із $K[X]$ -модуля T_n . Теорему доведено.

Теорема 1 легко переноситься і на нільпотентні модулі. Для цього розглянемо векторний простір $P_n := K[[X]]$ алгебри формальних степеневих рядів і визначимо на ньому дію поліноміальної алгебри $K[X]$ таким самим чином, як і для модуля T_n . В отриманому $K[X]$ -модулі P_n позначимо через $D_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ підмодуль вигляду $D_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} = \exp(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) T_n$, де $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – довільні елементи поля K . Легко бачити, що тоді $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – власні числа операторів, що індуковані елементами x_1, K, x_n відповідно на $D_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$.

Наслідок 1. Нехай V – скінченновимірний $K[X]$ -модуль з одновимірним цокелем. Тоді V ізоморфний підмодулю модуля $D_{\alpha_1, K, \alpha_n}$ для деяких $\alpha_1, K, \alpha_n \in K$.

Доведення. Позначимо через $K \langle v_0 \rangle$ цоколь $K[X]$ -модуля V . Тоді $x_i v_0 = \alpha_i v_0$ для деяких $\alpha_i \in K, i=1, K, n$. Розглянемо автоморфізм θ кільця многочленів $K[X]$, що задається згідно з правилом $x_i \mapsto x_i - \alpha_i$. Нехай V_θ – відповідний підкручений $K[X]$ -модуль. Легко бачити, що $K[X]$ -модуль V_θ нільпотентний, оскільки елементи x_1, K, x_n із $K[X]$ індукують на V_θ нільпотентні лінійні оператори. За теоремою 1 $K[X]$ -модуль V_θ ізоморфний деякому підмодулю W із $K[X]$ -модуля T_n .

Розглянемо $K[X]$ -модуль $\exp(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) W$, який є підмодулем модуля $D_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$. Безпосередньо перевіряється, що $\exp(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) W$; W_σ , де σ – автоморфізм кільця $K[X]$, що заданий згідно з правилом $\sigma(x_i) = x_i + \alpha_i, i=1, \dots, n$. Але тоді W_σ ; $(V_\theta)_\sigma$; V_θ ; V . Таким чином, V ; W_σ для автоморфізма σ і W_σ – підмодуль модуля $\exp(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) T_n = D_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$.

Зауваження 1. Використовуючи лему Цорна, можна довести аналогічні твердження для локально нільпотентних модулів над $K[X]$ з одновимірним цокелем, які мають зліченну розмірність над K .

2. Група автоморфізмів модуля T_n

Лема 2. Нехай $\varphi \in End(T_n)$. Тоді $\deg_{x_i}(\varphi(f)) \leq \deg_{x_i} f$ для довільного многочлена $f \in T_n, i = 1, K, n$.

Доведення. Оскільки φ – ендоморфізм модуля T_n , то для довільного $f \in T_n$ маємо $\varphi\left(\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f\right) = \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \varphi(f), i = 1, \dots, n$,

а отже, для довільного $f \in T_n$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} \deg_{x_i} \varphi(f) &= \max \{k \geq 0 : \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \varphi(f) \neq 0\} = \max \{k \geq 0 : \varphi\left(\frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f\right) \neq 0\} \leq \\ &\leq \max \{k \geq 0 : \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} f \neq 0\} = \deg_{x_i} f, \quad i = 1, K, n. \end{aligned}$$

Надалі для мультиіндексів використовуються такі позначення:

$$\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!, x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Теорема 2. Лінійне перетворення φ векторного простору $K[X]$ є ендоморфізмом $K[X]$ -модуля T_n тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд $\varphi = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \alpha_i \geq 0}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in K$ і при цьому виконуються рівності

$$c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = \varphi \left(\frac{x_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{x_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!} \right) (0).$$

Доведення. Необхідність. Нехай лінійне перетворення φ є ендоморфізмом $K[X]$ -модуля T_n . Розглянемо відображення $N: T_n \rightarrow T_n$ задане за правилом $N(f) = \varphi(f) - \sum_{\alpha: \alpha_i \geq 0} \varphi \left(\frac{x^\alpha}{\alpha!} \right) (0) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f$, $f \in T_n$. Це відображення коректно

визначене, що випливає з властивості локальної нільпотентності лінійних операторів $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ на T_n . Покажемо, що це відображення є тотожно нульовим, використовуючи індукцію за тотальним степенем многочлена f . Нехай спочатку $\deg f = 0$. Маємо $N(f) = \varphi(f) - \varphi(f)(0) = 0$, оскільки за Лемою 2 ендоморфізм φ не збільшує степінь многочлена. Нехай тепер $\deg f > 0$. Відображення N є ендоморфізмом $K[X]$ -модуля T_n (як лінійна комбінація ендоморфізмів).

Маємо $\frac{\partial}{\partial x_i} N(f) = N\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) = 0$ $i = 1, K, n$ за припущенням індукції, отже,

$$\begin{aligned} N(f) &= N(f)(0) = \varphi(f)(0) - \sum_{\alpha: \alpha_i \geq 0} \varphi \left(\frac{x^\alpha}{\alpha!} \right) (0) \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} (0) = \\ &= \varphi(f)(0) - \sum_{\alpha: \alpha_i \geq 0} \varphi \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} (0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \right) (0) = \varphi \left(f - \sum_{\alpha: \alpha_i \geq 0} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} (0) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \right) (0). \end{aligned}$$

З останньої тотожності та формули Тейлора для многочлена f випливає рівність $N(f) = 0$, що і потрібно було довести. Достатність очевидна.

Наслідок 2. Лінійне перетворення φ лінійного простору $K[X]$ є автоморфізмом $K[X]$ -модуля T_n тоді і тільки

тоді, коли воно має вигляд $\varphi = \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \alpha_i \geq 0}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\det(c_{(0, \dots, 0)}) \neq 0$.

Наслідок 3. Підмодулі $K[X]$ -модуля T_n інваріантні відносно групи автоморфізмів модуля T_n .

Лема 3. Нехай V – модуль над поліноміальною алгеброю $K[X]$ і θ – автоморфізм алгебри $K[X]$. Тоді $\text{Aut}(V) = \text{Aut}(V_\theta)$, де V_θ – підкручений модуль.

Доведення. Зауважимо, що векторний простір для модулів V , V_θ один і той самий – це V . Тому $\text{Aut}(V)$ і $\text{Aut}(V_\theta)$ – підгрупи повної лінійної групи $GL(V)$. Нехай $\varphi \in \text{Aut}(V_\theta)$ – довільний автоморфізм. Тоді для довільного елементів $a \in K[X]$ і $v \in V_\theta$ виконується рівність: $\varphi(a \circ v) = a \circ \varphi(v)$. Ураховуючи закон множення в модулі V_θ , звідси отримуємо $\varphi(\theta(a) \cdot v) = \theta(a) \cdot \varphi(v)$, де крапкою позначено множення елементів із V на елементи із $K[X]$. Якщо елемент a пробігає всю алгебру $K[X]$, то елемент $\theta(a)$ також пробігає всю алгебру $K[X]$. Тому, позначаючи елемент $\theta(a)$ через b , з останнього співвідношення знаходимо $\varphi(b \cdot v) = b \cdot \varphi(v)$ для довільних $b \in K[X]$ і $v \in V_\theta$. Це означає, що φ – автоморфізм модуля V . Таким чином, $\text{Aut}(V_\theta) \subseteq \text{Aut}(V)$. Аналогічно можна довести, що $\text{Aut}(V) \subseteq \text{Aut}(V_\theta)$. Для зручності будемо записувати мономи із $K[X]$ у вигляді $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$, де $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – мультиіндекс. Наступне твердження добре відоме.

Лема 4. Нехай $K_0[X]$ – адитивна група степеневих рядів з нульовим вільним членом із $K[[X]]$, $K_1[X]^*$ – мультиплікативна група степеневих рядів з вільним членом, що дорівнює 1. Тоді $\exp: K_0[X] \rightarrow K_1[X]^*$ – груповий ізоморфізм, а отже, $K[X]^* = K^* \times \exp\left(\sum_{\lambda, \lambda \neq 0} Kx^\lambda\right)$; $K^* \times \prod_{\lambda} K$.

Лема 5. Нехай M, N – ізоморфні власні підмодулі модуля T_n і $\varphi: M \rightarrow N$ – який-небудь ізоморфізм. Тоді існують такі підмодулі $M_1, N_1 \subset T_n$, що $M_1 \cong M$, $N_1 \cong N$, і існує ізоморфізм $\varphi_1: M_1 \rightarrow N_1$, для якого виконується рівність $\varphi_1|_M = \varphi$.

Доведення. Оскільки $M \neq T_n$, то існують мономи, які не належать M . Виберемо який-небудь моном $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \in T_n \setminus M$ найменшого (тотального) степеня. Нехай $g_i = \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \right)$, $i = 1, \dots, n$. Оскільки φ – ізоморфізм

підмодулів, то за означенням g_i маємо $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, K, n$, а отже, за Лемою 1 про існування потенціалу існує

такий поліном $g \in K[X]$, що $\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_i$, $i = 1, K, n$.

Зауважимо, що $g \notin N$. Дійсно, нехай це не так і $g \in N$. Позначимо $f = \varphi^{-1}(g)$. Тоді $f \in M$ і

$$\varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (f - x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi(f)) - g_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (g) - g_i = 0, i = 1, \dots, n.$$

Це еквівалентно рівностям $\frac{\partial}{\partial x_i} (f - x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = 0, i = 1, \dots, n$, а тому $f = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} + C$, де $C \in K$ – деяка константа.

Оскільки кожен ненульовий підмодуль із T_n містить, очевидно, поле K , то $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} = f - C \in M$, що суперечить вибору цього монома. Отримана суперечність показує, що $g \notin N$.

Покладемо $M_1 = M \oplus K \langle x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \rangle$, $N_1 = N \oplus K \langle g \rangle$. Легко бачити, що M_1, N_1 – підмодулі із T_n . Визначимо лінійне відображення $\varphi_1 : M_1 \rightarrow N_1$ згідно з правилом $\varphi_1(m) = \varphi(m), m \in M, \varphi_1(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = g$ і далі за лінійністю. Безпосередня перевірка показує, що φ_1 – потрібний ізоморфізм модулів.

Теорема 3. Нехай $M \subset T_n$ – власний підмодуль, $\varphi : M \rightarrow T_n$ – який-небудь мономорфізм. Тоді існує такий автоморфізм $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(T_n)$, що виконується рівність $\tilde{\varphi}|_M = \varphi$.

Доведення. Розглянемо множину Ψ всіх пар вигляду (V, ψ) , де $V \supseteq M$ – підмодуль із T_n і мономорфізм $\psi : V \rightarrow T_n$ – такий, що $\psi|_M = \varphi$. Визначимо на цій множині частковий порядок таким чином: $(V_1, \psi_1) \Gamma (V_2, \psi_2) \leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ і $\psi_2|_{V_1} = \psi_1$. Тоді для будь-якого ланцюга $Z \subseteq \Psi$ існує максимальний елемент (V^c, ψ^c) , де $V^* = \bigcup_{(V, \psi) \in Z} V$, і $\psi^c : V^c \rightarrow T_n$ задане за правилом $\psi^c(v) = \psi(v)$, якщо $v \in V$ і $(V, \psi) \in Z$. За лемою Цорна в Ψ існує

максимальний елемент $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$. Припустивши, що $\tilde{V} \neq T_n$ і застосувавши Лему 5, отримаємо суперечність з максимальністю елемента $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$. Тому $\tilde{V} = T_n$. Далі, якщо $\tilde{\psi}$ не є епіморфізмом, то, застосувавши Лему 5 до $(\tilde{\psi})^{-1} : \tilde{\psi}(T_n) \rightarrow T_n$, отримаємо суперечність з тим фактом, що $\tilde{\psi}$ є мономорфізмом. Таким чином, $\tilde{\psi}$ є автоморфізмом модуля T_n і звуження $\tilde{\psi}$ на підмодуль M збігається з мономорфізмом φ .

Наслідок 4. Якщо V_1 і V_2 підмодулі модуля T_n і $V_1 \not\subseteq V_2$, то модулі V_1 і V_2 неізоморфні.

Підмодуль M модуля T_n будемо називати *мономіальним*, якщо він має базис над полем K з одночленів.

Теорема 4. Існують такі твердження для модуля T_n і його підмодулів:

1. Алгебра $\text{End}(T_n)$ всіх ендоморфізмів модуля T_n ізоморфна алгебрі формальних степеневих рядів $K[[X]]$, і тому група автоморфізмів $\text{Aut}(T_n)$ ізоморфна мультиплікативній групі $K[[X]]^c$ алгебри $K[[X]]$.

2. Група автоморфізмів скінченновимірного мономіального підмодуля M із T_n розмірності m над K ізоморфна прямому добутку $K^c \times (K^+)^{m-1}$, де K^+ – адитивна група поля K .

3. Група автоморфізмів довільного скінченновимірного $K[X]$ -модуля V з одновимірним цокелем ізоморфна факторгрупі групи $K^c \times (K^+)^m$, для деякого $m \geq 0$.

Доведення. Твердження 1 теореми 4 випливає із теореми 2.

Доведемо твердження 2. Нехай $\text{Aut}_1(M)$ – група всіх автоморфізмів модуля M , які діють тотожно на підмодулі $K \langle 1 \rangle \subseteq M$, а $\text{Aut}_1 T_n$ – група автоморфізмів, які діють тривіально на підмодулі $K \langle 1 \rangle \subseteq T_n$. Покажемо, що $\text{Aut}_1(M) : (K^+)^{m-1}$, де $m = \dim_K M$. Нехай $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ – мультиіндекс, $M = K \langle x^{\lambda^1}, \dots, x^{\lambda^m} \rangle$, де $\lambda^1, \dots, \lambda^m$ – множина мультиіндексів, яка визначає базис $\{x^{\lambda^1}, \dots, x^{\lambda^m}\}$ мономіального модуля M . Неважко переконатися, що автоморфізм $\varphi = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$ модуля T_n тотожний на M тоді і лише тоді, коли

$$c_{\lambda} = \begin{cases} 1, & \lambda = (0, \dots, 0) \\ 0, & \lambda \in \{\lambda^1, \dots, \lambda^m\} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \end{cases}$$

Бачимо, що кожен такий автоморфізм записується у вигляді $\varphi = \exp\left(\sum_{\lambda \neq \{\lambda^1, \dots, \lambda^m\}} c_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\right)$ і навпаки, автоморфізми такого вигляду тотожні на M . Ці автоморфізми становлять ядро $\text{Ker} \psi$ природного гомоморфізму (звуження) $\psi : \text{Aut}_1(T_n) \rightarrow \text{Aut}_1(M)$.

З огляду на Лему 4 підгрупі $\text{Ker} \psi$ при ізоморфізмі $\log(1-x) : K_1[X]^* \rightarrow K_0[X]$ відповідає підгрупа G адитивної групи $K_0[X]$ з базисом із мономи $x^{\lambda}, \lambda \notin \{\lambda^1, \dots, \lambda^m\}, \lambda \neq (0, \dots, 0)$. Легко бачити, що $K_0[X] / G : (K^+)^{m-1}$. Звідси отримаємо, що $\text{Aut}_1(M) : (K^+)^{m-1}$. Але тоді $\text{Aut}(M) : K^c \times (K^+)^{m-1}$.

Доведемо тепер твердження 3. Бачимо, що кожен скінченновимірний підмодуль W модуля T_n міститься в деякому скінченновимірному мономіальному підмодулі \bar{W} із T_n . Використовуючи Теорему 3, можна показати, що $\text{Aut}(W)$ є фактор-групою групи $\text{Aut}(\bar{W})$. Звідси з урахуваннями Лема 3 і п. 2 теореми 4 випливає п. 3 теореми 4. Теорему 4 доведено.

Висновки. Розглянуто модулі над кільцями многочленів від кількох змінних за умови, що цоколь таких модулів одновимірний, тобто модулі з єдиним мінімальним підмодулем. Показано, що існує універсальний модуль такого роду, який містить точно одну копію кожного скінченновимірного модуля над поліноміальним кільцем. Описано групу автоморфізмів скінченновимірних модулів з одновимірним цоклем.

Список використаних джерел:

1. Best P. Orbits of the centralizer of a linear operator / P. Best, M. Gualtieri, P. Hayden // J. Lie Theory, 2012. – Vol. 4. – P. 1039–1048.
2. Gelfand I. M. Remarks on the classification of a pair of commuting linear transformations in a finite dimensional space / I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev // Funkc. Anal. Prilozhen., 1969. – Vol. 3, No. 4. – P. 81–82.
3. Gonzalez-Lopez A. Lie algebras of differential operators in two complex variables / A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran and P. J. Olver // Amer. Jour. of Math., 1992. – Vol. 114, No. 6. – P. 1163–1185.
4. Goto M. Semisimple Lie algebras / M. Goto, F. Grosshans. – New York and Basel : Marcel Dekker, Inc., 1978. – 334 p.
5. Nowicki A. Polynomial derivations and their rings of constants / A. Nowicki. – Torun : Uniwersytet Mikołaja Kopernika, 1994. – 169 p.
6. Quillen D. Projective modules over polynomial rings / D. Quillen // Invent. Math., 1976. – Vol. 36. – P. 167–171.
7. Suslin A. Projective modules over polynomial rings are free / A. Suslin // Translated in "Soviet Mathematics", 1976. – Vol. 17(4). – P. 1160–1164.

Надійшла до редколегії 18.09.20

A. Petravchuk, Dr Hab., Prof,
Ie. Chapovskyi, PhD Student,
I. Klimenko, PhD Student,
M.Sidorov, PhD Student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

NILPOTENT MODULES OVER POLYNOMIAL RINGS

Let K be an algebraically closed field of characteristic zero, $K[X]$ the polynomial ring in n variables. The vector space $T_n = K[X]$ is a $K[X]$ -module with the action $x_i \cdot v = v_{x_i'}$ for $v \in T_n$. Every finite dimensional submodule V of T_n is nilpotent, i.e. every $f \in K[X]$ acts nilpotently (by multiplication) on V . We prove that every nilpotent $K[X]$ -module V of finite dimension over K with one-dimensional socle can be isomorphically embedded in the module T_n . The groups of automorphisms of the module T_n and its finite dimensional monomial submodules are found. Similar results are obtained for (non-nilpotent) finite dimensional $K[X]$ -modules with one dimensional socle.

Keywords: polynomial rings, nilpotent module, group of automorphisms, one dimensional socle.

УДК 532.59

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.07.25-30>

Ю. Волков, д-р. фіз.-мат. наук, проф.,
В. Наратовий, канд. тех. наук, доц.
Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна
E-mail: naradvova1986@gmail.com

ВИПАДКОВІ ГРАВІТАЦІЙНІ ХВИЛІ У ДВОШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Досліджено поширення випадкових гравітаційних хвиль у тривимірній гідродинамічній системі півпростір–півпростір, а також проаналізовано поширення випадкових хвиль у різних системах. Постановку задачі виконано у безрозмірному вигляді для ідеальної нестисливої рідини. Математична постановка задачі містить рівняння другого порядку відносно потенціалів швидкостей і кінематичні та динамічні умови на поверхні контакту. Враховано умови згасання хвиль при відділенні від поверхні контакту. Для дослідження проблеми поле відхилень і потенціали швидкостей хвиль представлено у вигляді розкладів в інтегралі Фур'є–Стілт'єсса. Стохастичні амплітуди відповідних полів записано через амплітуду поля відхилень у вигляді рекурентних співвідношень. З використанням розв'язання у ряд за малим параметром для стохастичної амплітуди поля відхилень отримано динамічне рівняння в інтегральній формі. Введення малого параметра виконано для контролю внеску нелінійності відповідних доданків. Підінтегральні функції дво- і трихвильової взаємодії отримано в симетризованій формі. На основі отриманого рівняння виведено лінійне дисперсійне співвідношення, яке у двошаровому випадку вироджується в дисперсійне співвідношення, яке отримав А. Найфе при розгляді детермінованих хвильових рухів у двошаровій системі. Використовуючи рівняння для амплітуди поля відхилень, за допомогою процедури осереднення за ансамблем, отримано рівняння для спектра перших гармонік. Достовірність отриманих результатів підтверджено порівнянням з результатами раніше проведеними дослідженнями проблеми про поширення випадкових поверхневих гравітаційних хвиль, які були отримані в наукових працях Масуди та ін. Результати статті можуть бути використані при вивченні поширення випадкових внутрішніх хвиль у Світовому океані.
Ключові слова: випадкові гравітаційні хвилі, дисперсійне співвідношення, динамічне рівняння.

Вступ. Практичний інтерес до дослідження хвильових рухів викликаний сучасними потребами розробки нових методів згасання хвиль, нових способів отримання енергії, а також конструювання нових видів водного транспорту. Експериментальні та теоретичні дослідження хвильових рухів проводяться в багатьох країнах світу, зокрема, у Швеції, Норвегії, Австралії, Данії, США, Японії, Британії та Китаї. Із розвитком сучасних засобів математичного моделювання варто окремо звернути увагу на значний інтерес до вивчення випадкових хвиль при розгляді різних задачах прикладного характеру, зокрема у гідромеханіці. Актуальність дослідження випадкових хвильових рухів обумовлена також тим,

що такі хвилі математично добре наближено описують реальні хвильові процеси, які відбуваються на поверхні та всередині водного шару. Дослідження випадкових хвиль у двошаровій рідині дає можливість глибше зрозуміти механізми поширення внутрішніх хвиль.

1. Аналіз літературних даних і постановка проблеми. У [1] представлено новий чисельний метод дослідження вільних поверхневих хвиль у прибережних районах. Метод базується на варіаційній моделі Буссінеска (VBM) з фазовою здатністю. У цій моделі враховано негідростатичний тиск, що дозволяє правильно описати динаміку коротких хвиль. Як результат запропонована схема здатна з великою точністю математично описувати різні хвилі. Також продемонстровано здатність чисельної схеми моделювати ефекти дисперсії і нелінійності за допомогою моделювання поширення ширококугових хвиль. Окрім того, чисельна модель тестується для моделювання регулярного розбиття хвилі на плоскому пляжі Тинга і Кірбі та для моделювання випадкової хвилі над залитим пляжем Бур.

У [2] описано реалізацію генерації та активного поглинання хвиль для довгих гребнів монохроматичних і випадкових хвиль другого порядку в моделі гідродинаміки на основі WCSPH (слабко стислива згладжена частка). Числовий потік нагадує фізичний хвильовий пристрій, для якого рухомі межі імітують дію генератора хвиль поршневого типу. Система генерації хвиль другого порядку, що здатна генерувати як монохроматичні (регулярні), так і випадкові (нерегулярні) хвилі, реалізується спільно з пасивним і активним поглинанням хвиль. Ці реалізації підтверджуються теоретичними розв'язками та експериментальними результатами щодо висоти поверхні води, орбітальних швидкостей хвиль.

Стаття [3] присвячена вивченню нелінійної взаємодії однорідних випадкових поверхневих хвиль океану. У ній отримано кінетичні рівняння для вивчення еволюції спектральної щільності, для яких використовувалися дещо різні припущення. За допомогою використання аналітичних і чисельних методів та аналізу точних розв'язків продемонстровано, що отримане узагальнене кінетичне рівняння демонструє вибух за скінченний час для деяких вироджених квартетів хвиль.

У [4] теоретично описано інтерферометрію випадкових поверхневих гравітаційних хвиль, що продемонстровано з використанням чисельного моделювання і результатів експериментальних досліджень океанських хвиль. Моделювання та вимірювання хвильового пакета добре узгоджуються з теоретичними результатами, але взаємні кореляції не дають передбаченої структури. Наведено можливі пояснення такого явища.

У дослідженні [5] наведено результати експериментів з CFD на випадкових хвилях для вивчення процесу навантаження хвилеріза з похилим верхом кесона. Чисельні результати показують, що зменшення хвильової сили під гребнем призводить до руйнування структури в бік моря, навіть за відсутності сильного удару. Цей висновок узгоджується з результатами спостережень відмов ряду вертикальних хвилерізів у першій половині ХХ ст. Ці результати також показують, що хвильові тиски під впадиною можуть бути недостатньо враховані, якщо використовувати наявні на цей час розрахункові формули. Для вирішення цієї проблеми пропонується ряд простих альтернативних рівнянь, що базуються на концепції максимального потоку імпульсу.

Авторами дослідження [6] експериментально вивчається поширення у великомасштабному басейні односпрямованих глибоководних гравітаційних хвиль, стохастично модульованих за фазою. Спостерігається поява нелінійних локалізованих структур, які розвиваються на стохастичному хвильовому полі. Таке співіснування розглядалося в межах теорії інтегрованої турбулентності для нелінійного рівняння Шредінгера. Повідомлено про перше експериментальне спостереження в контексті гідродинамічних хвиль. Охарактеризовано формування, властивості і динаміку цих нелінійних когерентних структур (солітонів) на фоні некогерентних хвиль. Екстремальні хвилі виникають у результаті сильного загострення фронтів хвильових цугів і їхня поява відбувається після приблизно однієї нелінійної шкали поширення. Солітони виникають, коли нелінійність і дисперсія слабкі. Охарактеризовано статистичні властивості цього стану. Виявлено, що кількість солітонів і екстремальних хвиль збільшується по всьому поширенню, розподіл хвильового поля має важкий хвіст, а спектр висот поверхні визначається масштабом як степеневий закон частоти з показником степеня $-4,5 (+/-0,5)$. Більшість цих спостережень узгоджуються з теорією інтегрованої турбулентності, хоча деякі відхилення (напр., степеневий спектр, асиметричні екстремальні хвилі) є результатом ефектів, властивих гідродинамічним хвилям.

У [7] на основі експериментальних даних запропоновано і перевірено статистичну теорію хвиль-вбивць, зібраних у довгому резервуарі для води, де механічно генеруються випадкові хвилі з різним ступенем нелінійності, які вільно поширюються вздовж потоку. Наведено переконливі докази того, що хвилі-вбивці, які спостерігаються в акваріумі, є гідродинамічними інстантонами, тобто конфігураціями сідлової точки, які пов'язані зі стохастичною моделлю хвильової системи. Показано, що ці гідродинамічні інстантони являють собою складні просторово-часові конфігурації хвильового поля, які можуть бути визначені з використанням математичної основи теорії великих ухилень і розраховані за допомогою спеціальних чисельних методів. Ці результати показують, що інстантони однаково добре описують хвилі-вбивці, створювані простою лінійною суперпозицією (за слабо нелінійних умов) або нелінійним фокусуванням (за сильно нелінійних умов).

У [8] досліджено вплив сильного і поривчастого поля вітру на океанські хвилі. Для того, щоб отримати уявлення про генерацію хвиль за допомогою вітру, аналізується вплив випадкового вітру на відокремлені хвилі. За допомогою рівняння Ейлера для динаміки рідини і методу багатьох масштабів для випадкових вітрових вимушених нелінійних глибоководних хвиль отримано випадкове нелінійне рівняння Шредінгера і випадкове модифіковане нелінійне рівняння Шредінгера, які вивчаються за допомогою релаксаційної псевдоспектральної схеми. Отримані результати свідчать про те, що вплив поривчастого вітру на відокремлені хвилі призводить до випадкового збільшення поверхні океанської хвилі. Однак у лабораторній установці з набагато меншими амплітудами хвиль і більш високими частотами хвиль вплив в'язкості води набагато вищий. Це приводить до коливань розв'язків, які чутливі до дії вітру.

У [9] вивчено горизонтальну дисперсію частинок пасивного індикатора на вільній поверхні гравітаційних хвиль у глибокій воді. Для випадкових лінійних хвиль зі спектром JONSWAP траєкторії лагранжевих частинок обчислюються з використанням точної нелінійної моделі, відомої як рівняння Джона-Склавуно. Показано, що одночастинкову дисперсію демонструє незвичайна наддифузійна поведінка. Результати показують, що хвильовий рух значно підсилює дисперсію частинок рідини. Також показано, що ця наддифузійна поведінка є результатом тривалої кореляції лагранжевих швидкостей рідких пакетів на вільній поверхні.

У [10] продемонстровано наявність альтернативного і більш простого аналізу випадкових хвильових полів на мілкій воді, який може бути інтерпретований у термінах взаємодіючих солітонів рівняння Кортевега-де Фріза. На основі методу оберненого розсіювання розроблено метод обробки даних випадкового хвильового поля. Визначено солітонну

складову, яка прихована у випадковому хвильовому полі, і побудовано відповідну функцію розподілу кількості солітонів за їхніми амплітудами. Розроблений підхід проілюстровано за допомогою штучно створеного квазівипадкового хвильового поля і застосовано для інтерпретації реальних даних про вітрові хвилі, що генеруються в лабораторному аеродинамічному резервуарі.

У дослідженні [11] було розроблено модель поширення тривимірних хвиль у резервуарі на основі усереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є–Стокса. У цій моделі прийнятий метод рухомих меж для генерації хвиль на воді. Моделюються похилі регулярні хвилі і різноспрямовані випадкові хвилі, що дає гарну узгодженість з теоретичними розв'язками. Результати показують, що ця чисельна модель є ефективним інструментом для отримання більш точних деталей або доповнення даних, недоступних через фізичні умови експерименту з резервуарами.

У [13] вивчено поширення Стокса для глибоководних випадкових хвиль у товщі води на основі статистики вітру, яка може бути оцінена за допомогою простого аналітичного інструменту. Результати проілюстровано з використанням модельних хвильових спектрів Філіпса і Пірсона–Московіца разом з довготривалою статистикою вітру з одного пункту в північній частині Північного моря та з чотирьох пунктів у Північній Атлантиці. Ці результати мають важливе значення, наприклад, для оцінки дрейфу морського сміття в океані на основі глобальної статистики вітру.

У [14] на основі лінійних випадкових хвильових розв'язків рівнянь водної хвилі на скінченній глибині отримано теоретичний статистичний розподіл хвиль, викликаних хвилею дрейфу. Параметри, які беруть участь у розподілі, можуть бути визначені за глибиною води і хвильовим спектром океанських хвиль. Як приклад розглянуто хвилі, що генеруються вітром, для яких параметри розраховують для типових швидкостей вітру і глибини води з використанням спектра Філіпса. Досліджено поведінку водної поверхні і вплив швидкості вітру та глибини води на поверхню.

У [16] запропоновано нову методологію для прогнозування розподілу висоти хвилі і періоду за допомогою модифікованого методу лінійного моделювання. Цей метод лінійного моделювання використовує модель перетворення Ерміта, де як перетворення береться монотонний кубічний поліном, калібрований таким чином, щоб перші чотири моменти перетвореної моделі відповідали моментам істинного процесу. Запропонований новий підхід використовують для розрахунку спільних розподілів висоти моря і періоду хвиль.

2. Цілі та задачі дослідження. Метою проведеної роботи є дослідження поширення внутрішніх випадкових хвиль у гідродинамічній системі півпростір–півпростір. Для досягнення цієї мети були поставлені такі завдання:

- виконати математичну постановку задачі в безрозмірному вигляді;
- застосувати до поставленої задачі метод випадкових амплітуд;
- отримати рівняння для випадкових амплітуд.

3. Постановка задачі та метод дослідження. Досліджується задача про поширення внутрішніх хвиль у гідродинамічній системі півпростір–півпростір з рідким шаром $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, |z| < \infty, -\infty < z < 0\}$ і густиною ρ_1 та з рідким шаром $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, |z| < \infty, 0 \leq z < +\infty\}$ і густиною ρ_2 . Шари Ω_1 та Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, y, t)$. Сила тяжіння напрямлена перпендикулярно до поверхні розподілу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаються нестисливими. Математична постановка задачі має такий вигляд:

– швидкість поширення пакетів у відповідних областях виражаються через градієнти потенціалів і мають задовольняти рівняння

$$\varphi_{1,xx} + \varphi_{1,yy} + \varphi_{1,zz} = 0 \text{ у } \Omega_1, \quad (1)$$

$$\varphi_{2,xx} + \varphi_{2,yy} + \varphi_{2,zz} = 0 \text{ у } \Omega_2, \quad (2)$$

– кінематичні умови на поверхні контакту

$$\eta_{,t} + \alpha \varphi_{1,x} \eta_{,x} + \alpha \varphi_{1,y} \eta_{,y} = \varphi_{1,z} \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t), \quad (3)$$

$$\eta_{,t} + \alpha \varphi_{2,x} \eta_{,x} + \alpha \varphi_{2,y} \eta_{,y} = \varphi_{2,z} \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t); \quad (4)$$

– динамічна умова на поверхні контакту

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{\alpha}{2} \rho (\nabla \varphi_2)^2 - (\eta_{,xx} + \eta_{,yy}) = 0 \text{ при } z = \alpha \eta(x, y, t); \quad (5)$$

– граничні умови

$$\varphi_{1,z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty, \quad (6)$$

$$\varphi_{2,z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Тут φ_j ($j = 1, 2$) – потенціали швидкості частинок у Ω_j , η – відхилення поверхні контакту, ρ – відношення густини верхнього шару до густини нижнього шару. Зауважимо, що ця постановка задачі використовує безрозмірні зміни. Зазначимо також, що параметр α є нечисловим параметром, який введено для врахування внеску нелінійних доданків у подальших перетвореннях.

Розв'язки задачі (1) – (7) будемо шукати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int A(q) \exp(i\theta + |\bar{k}|z) dq, \\ \varphi_2 &= \int B(q) \exp(i\theta - |\bar{k}|z) dq, \\ \eta &= \int C(q) \exp(i\theta) dq, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\bar{k} = (k_x, k_y)$ – хвильовий вектор, $\theta = k_x x + k_y y - \omega t$ – фаза, $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$ – випадкові амплітуди відповідних полів, що залежать від $q = (\bar{k}, \omega)$. Інтегрування в (8) і наступних формулах відбувається в межах $(-\infty; +\infty)$. Далі наша завдання полягає в тому, щоб, використовуючи (8) і постановку (1) – (7), отримати рівняння для випадкової амплітуди $C(q)$.

Підставимо (8) у рівняння (3) – (5) і при цьому врахуємо такий розклад до другого порядку нелінійності при $z = \alpha \eta$:

$$\exp(|\bar{k}|z) = 1 + \alpha |\bar{k}| \int C(q_1) \exp(i\theta_1) dq_1 + \frac{\alpha^2 |\bar{k}|^2}{2} \iint C(q_1) C(q_2) \exp(i(\theta_1 + \theta_2)) dq_1 dq_2 + \dots$$

Таким чином, підстановка (8) у рівняння (3) з урахуванням доданків до другого порядку α і використанням наведеного вище розкладу приводить до такого рівняння:

$$\begin{aligned} & \int -i\omega C(q) \exp(i\theta) dq - \int |\bar{k}| A(q) \exp(i\theta) dq = \\ & = \alpha \iint [|\bar{k}|^2 + (\bar{k}, \bar{k}_1)] A(q) C(q_1) \exp(\theta + \theta_1) dq dq_1 + \alpha^2 \iiint \left[\frac{|\bar{k}|^3}{2} + |\bar{k}| (\bar{k}, \bar{k}_1) \right] A(q) C(q_1) C(q_2) \exp(\theta + \theta_1 + \theta_2) dq dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Рівняння (9) домножимо на $\exp(-i\theta_0)$ та проінтегруємо за q_0 , використавши рівність

$$\int \exp(i(\theta - \theta_0)) dq_0 = \delta(q - q_0),$$

де $\delta(q)$ – це дельта-функція. Отримаємо

$$\begin{aligned} & \int -i\omega C(q) \delta(q - q_0) dq - \int |\bar{k}| A(q) \delta(q - q_0) dq = \\ & = \alpha \iint [|\bar{k}|^2 + (\bar{k}, \bar{k}_1)] A(q) C(q_1) \delta(q - (q_0 - q_1)) dq dq_1 + \alpha^2 \iiint \left[\frac{|\bar{k}|^3}{2} + |\bar{k}| (\bar{k}, \bar{k}_1) \right] A(q) C(q_1) C(q_2) \delta(q - (q_0 - q_1 - q_2)) dq dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Використовуючи властивість, що згортка дельта-функції з іншою функцією повертає цю ж функцію, (10) можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} -i\omega C(q) - |\bar{k}| A(q) & = \alpha \int (\bar{k} - \bar{k}_1, \bar{k}) A(q - q_1) C(q_1) dq_1 + \alpha^2 \iint \frac{|\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2|}{2} (\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2, \bar{k} + \bar{k}_1 - \bar{k}_2) A(q - q_1 - q_2) C(q_1) C(q_2) dq_1 dq_2 + \\ & + \alpha^2 \iiint \left[\frac{|\bar{k}|^3}{2} + |\bar{k}| (\bar{k}, \bar{k}_1) \right] A(q) C(q_1) C(q_2) \delta(q - (q_0 - q_1 - q_2)) dq dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Для подальшого дослідження розкладемо $A(q)$ у ряд

$$A(q) = A_1(q) + \alpha A_2(q) + \alpha^2 A_3(q) + \dots \quad (12)$$

Підстановка (12) у (11) і прирівнювання коефіцієнтів за однакових степенів α дає такі рівності:

$$\begin{aligned} A_1(q) & = -\frac{i\omega}{|\bar{k}|} C(q), \\ A_2(q) & = \int \frac{i(\omega - \omega_1)}{|\bar{k}| \|\bar{k} - \bar{k}_1\|} (\bar{k} - \bar{k}_1, \bar{k}) C(q - q_1) C(q_1) dq_1, \\ A_3(q) & = \iint \frac{i(\omega - \omega_1 - \omega_2)}{|\bar{k}|} \left[\frac{(\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2, \bar{k} + \bar{k}_1 - \bar{k}_2)}{2} \right] C(q - q_1 - q_2) C(q_1) C(q_2) dq_1 dq_2 - \\ & - \frac{i(\omega - \omega_1 - \omega_2)}{|\bar{k}|} \left[\frac{(\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2, \bar{k} - \bar{k}_1)(\bar{k} - \bar{k}_1, \bar{k})}{|\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2| \|\bar{k} - \bar{k}_1\|} \right] C(q - q_1 - q_2) C(q_1) C(q_2) dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (13)$$

З урахуванням рівності (12) та ряду рівностей (13) нам вдалося отримати вирази $A(q)$ через $C(q)$. Використовуючи (8) і рівняння (4), можемо аналогічно записати $B(q)$ через $C(q)$. Маємо

$$\begin{aligned} B(q) & = B_1(q) + \alpha B_2(q) + \alpha^2 B_3(q) + \dots \{ \}, \\ B_1(q) & = \frac{i\omega}{|\bar{k}|} C(q), \\ B_2(q) & = \int \frac{i(\omega - \omega_1)}{|\bar{k}| \|\bar{k} - \bar{k}_1\|} (\bar{k} - \bar{k}_1, \bar{k}) C(q - q_1) C(q_1) dq_1, \\ B_3(q) & = -\iint \frac{i(\omega - \omega_1 - \omega_2)}{|\bar{k}|} \left[\frac{(\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2, \bar{k} + \bar{k}_1 - \bar{k}_2)}{2} \right] C(q - q_1 - q_2) C(q_1) C(q_2) dq_1 dq_2 + \\ & + \frac{i(\omega - \omega_1 - \omega_2)}{|\bar{k}|} \left[\frac{(\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2, \bar{k} - \bar{k}_1)(\bar{k} - \bar{k}_1, \bar{k})}{|\bar{k} - \bar{k}_1 - \bar{k}_2| \|\bar{k} - \bar{k}_1\|} \right] C(q - q_1 - q_2) C(q_1) C(q_2) dq_1 dq_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Підстановка (8) у рівняння (5) з урахуванням (13) і (14) приводить до рівняння для випадкової амплітуди $C(q)$:

$$-W(q)C(q) = \alpha \int f_2(q, q_1) C(q - q_1) C(q_1) dq_1 + \alpha^2 \iint f_3(q, q_1, q_2) C(q - q_1 - q_2) C(q_1) C(q_2) dq_1 dq_2. \quad (15)$$

де

$$W(q) = -\frac{\omega^2}{|\bar{k}|} (1 + \rho) + (1 - \rho + |\bar{k}|^2), \quad (16)$$

$$f_2(q, q_1) = \frac{(1-\rho)}{2} \left[\omega(\omega - \omega_1) < \bar{k}, \bar{k} - \bar{k}_1 > + \omega\omega_1 < \bar{k}, \bar{k}_1 > + \omega_1(\omega_1 - \omega) < \bar{k}_1, \bar{k} - \bar{k}_1 > \right] - \frac{(1-\rho)}{2} (\omega^2 + \omega_1^2 - \omega\omega_1), \quad (17)$$

$$f_3(q, q_1, q_2) = \frac{(1+\rho)\omega\omega_2}{2|\bar{k}|} \left[\frac{(\bar{k}_2, \bar{k}_2 + 2\bar{k}_1)}{2} - (\bar{k}, \bar{k} - \bar{k}_1) < \bar{k}_2, \bar{k} - \bar{k}_1 > \right] + \frac{(1+\rho)\omega\omega_1}{2|\bar{k}|} \left[\frac{(\bar{k}_1, \bar{k}_1 + 2\bar{k}_2)}{2} - (\bar{k}, \bar{k} - \bar{k}_2) < \bar{k}_1, \bar{k} - \bar{k}_2 > \right] + \frac{(1+\rho)}{2} \left[\frac{(\omega - \omega_1)\omega_2}{|\bar{k}_2|} (\bar{k}_2, \bar{k} - \bar{k}_1) + \frac{(\omega - \omega_2)\omega_1}{|\bar{k}_1|} (\bar{k}_1, \bar{k} - \bar{k}_2) \right] + \frac{(1+\rho)\omega_1\omega_2}{2} \left[(1 - < \bar{k}_1, \bar{k} - \bar{k}_1 >) \frac{(\bar{k}_2, \bar{k} - \bar{k}_1)}{|\bar{k}_2|} + (1 - < \bar{k}_2, \bar{k} - \bar{k}_2 >) \frac{(\bar{k}_1, \bar{k} - \bar{k}_2)}{|\bar{k}_1|} \right] - \frac{(1+\rho)\omega_1\omega_2}{2} (1 - < \bar{k}_1, \bar{k}_2 >) (|\bar{k}_1| + |\bar{k}_2|) - \frac{(1+\rho)}{2} (\omega_1^2 |\bar{k}_1| + \omega_2^2 |\bar{k}_2|). \quad (18)$$

У виразах (17) та (18) $< \bar{k}, \bar{k}_1 >$ означає косинус кута між вказаними векторами.

Функції $f_2(q, q_1)$ та $f_3(q, q_1, q_2)$ задовольняють такі умови:

$$f_2(q, q_1) = f_2(q_1, q), \quad f_2(q, q - q_1) = f_2(q, q_1), \quad f_2(q, 0) = 0, \quad (19)$$

$$f_2(q, q_1, q_2) = f_2(q, q_2, q_1), \quad (20)$$

що збігається з раніше отриманим результатом для задачі дослідження випадкових поверхневих хвиль [12].

Для подальшого аналізу рівняння (15) використаємо процедуру усереднення за ансамблем згідно з методикою, описаною в [12, 15]. Для цього запишемо розклад $C(q)$ у вигляді

$$C(q) = C_1(q) + \alpha C_2(q) + \alpha^2 C_3(q) + \dots \quad (21)$$

Процедуру усереднення будемо проводити за такими правилами:

$$[C_1(q)C_1(q_1)] = S_{11}\delta(q + q_1),$$

$$[C_1(q)C_1(q_1)C_1(q_2)] = 0, \quad (22)$$

$$[C_1(q)C_1(q_1)C_1(q_2)C_1(q_3)] = S_{11}(q)S_{11}(q_2)\delta(q + q_1)\delta(q_2 + q_3) + S_{11}(q)S_{11}(q_2)\delta(q + q_3)\delta(q_1 + q_2) + S_{11}(q)S_{11}(q_1)\delta(q + q_2)\delta(q_1 + q_3).$$

Підставляючи (21) у (15), помножене на спряжене $\bar{C}(q)$, і використовуючи (22), отримаємо рівняння

$$W(q)S(q) = \int \frac{G(q, q_1)}{W(q)} S_{11}(q_1)S_{11}(q - q_1) dq_1 - S_{11}(q) \int F(q, q_1) S_{11}(q_1) dq_1, \quad (23)$$

де

$$G(q, q_1) = 2(f_2(q, q_1))^2, \quad (24)$$

$$F(q, q_1) = -\frac{4(f_2(q, q_1))^2}{W(q - q_1)} - f_3(q, q_1, -q_1) - 2f_3(q, q, q_1), \quad (25)$$

що збігається з результатами, отриманими в [12] для задачі про рух випадкових поверхневих гравітаційних хвиль. У (23) за допомогою S_{11} позначено спектр перших гармонік випадкових хвиль. Далі на основі (23) можна отримати рівняння, які описують вільні та захоплені випадкові внутрішні гравітаційні хвилі.

Висновки. Розглянуто задачу про поширення випадкових внутрішніх хвиль у гідродинамічній системі півпростір–півпростір, для вивчення якої виконано математичну постановку задачі в безрозмірному вигляді для тривимірного випадку. Розв'язки шукалися з використанням методу випадкових амплітуд. Отримано рівняння відносно випадкової амплітуди відхилення поверхні контакту. У подальшому отримане рівняння буде використано для дослідження поширення випадкових хвиль різних типів у розглядуваній гідродинамічній системі. Отримані результати узгоджуються з результатами попередніх дослідників, що відображено в тексті статті. Дослідження такого типу дають можливість якісно аналізувати поширення внутрішніх хвиль у двошарових водоймах.

Список використаних джерел:

- 1 Adytia D. Modeling of wave run-up by using staggered grid scheme implementation in 1D Boussinesq model / D. Adytia, S. R. Pudjaprasetya, D. Tarwidi // Computational Geosciences, 2019. – Vol. 23, Iss. 4. – P. 793–811. doi: 10.1007/s10596-019-9821-5.
- 2 Long-crested wave generation and absorption for SPH-based DualSPHysics model / C. Altomare, J. M. Dominguez, A. J. C. Crespo et al. // Coastal Engineering, 2017. – Vol. 127. – P. 37–54. doi: 10.1016/j.coastaleng.2017.06.004.
- 3 Andrade D. On the Generalized Kinetic Equation for Surface Gravity Waves, Blow-Up and Its Restraint / D. Andrade, R. Stuhlmeier, M. Stiassnie // Fluids, 2018. – Vol. 4, Iss. 1. doi: 10.3390/fluids4010002.
- 4 Brown M. G. Green's function retrieval in a field of random water waves / M. G. Brown, C. Lu // Wave Motion, 2016. – Vol. 60. – P. 8–19. doi: 10.1016/j.wamot.2015.08.003.
- 5 Buccino M. CFD experiments on a low crested sloping top caisson breakwater. Part 1. Nature of loadings and global stability / M. Buccino, M. Daliri, F. Dentale et al. // Ocean Engineering. – 2019. – Vol. 182. – P. 259–282. doi: 10.1016/j.oceaneng.2019.04.017.
- 6 Coexistence of solitons and extreme events in deep water surface waves / A. Cazaubiel, G. Michel, S. Lepot et al. // Phys. rev. fluids, 2018. – Vol. 3, Iss. 11. doi: 10.1103/PhysRevFluids.3.114802.
- 7 Experimental Evidence of Hydrodynamic Instantons: The Universal Route to Rogue Waves / G. Dematteis, T. Grafke, M. Onorato, E. Vanden-Eijnden // Phys. rev. X, 2019. – Vol. 9, Iss. 4. doi: 10.1103/doi: 10.1103/PhysRevX.9.041057.
- 8 Dostal L. The Effect of Random Wind Forcing in the Nonlinear Schrodinger Equation / L. Dostal // Fluids, 2019. – Vol. 4, Iss. 3. doi: 10.3390/fluids4030121.
- 9 Farazmand M., Sapsis T. Surface Waves Enhance Particle Dispersion / M. Farazmand, T. Sapsis // Fluids, 2019. – Vol. 4, Iss. 1. doi: 10.3390/fluids4010055.
- 10 Giovanangeli J-P. Soliton spectra of random water waves in shallow basins / J-P. Giovanangeli, C. Kharif, Y. A. Stepanyants // Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2018. – Vol. 13, Iss. 4. doi: 10.1051/mmnp/2018018.

- 11 A Three-Dimensional Numerical Model with an L-Type Wave-Maker System for Water Wave Simulations by the Moving Boundary Method / W. Jia, S. Liu, J. Li, Y. Fan // *Water*, 2020. – Vol. 12, Iss. 1. doi: 10.3390/w12010161.
- 12 Masuda A. On the dispersion relation of random gravity waves. Part1. Theoretical framework / A. Masuda, Y. Kyo, M. Hisashi // *J. Fluid Mech.*, 1977. – Vol. 92, Iss. 4. – P. 717–730.
- 13 Myrhaug D. Stokes transport in layers in the water column based on long-term wind statistics / D. Myrhaug, H. Wang, L. E. Holmedal // *Oceanologia*, 2018. – Vol. 60, Iss. 3. – P. 305–311. doi: 10.1016/j.oceano.2017.12.004.
- 14 Song J. Statistical distribution of wave-induced drift for random ocean waves in finite water depth / J. Song, H. He, A. Cao // *Coastal Engineering*, 2018. – Vol. 135. – P. 31–38. doi: 10.1016/j.coastaleng.2018.01.002.
- 15 Tick L. J. A non-linear random model of gravity waves I / L. J. Tick // *J. Math. Mech.*, 1959. – Vol. 8, Iss. 5. – P. 643–651.
- 16 Wang Y. G. Prediction of height and period joint distributions for stochastic ocean waves / Y. G. Wang // *China Ocean Engineering*, 2017. – Vol. 31, Iss. 3. – P. 291–298. doi: 10.1007/s13344-017-0034-1.

Надійшла до редколегії 08.09.20

Y. Volkov, Dr Hab., Prof.,
V. Naradovyi, PhD., Associate Prof.
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

RANDOM GRAVITY WAVES IN TWO-LAYER GIDRODYNAMIC SYSTEM

The article is devoted to the study of the propagation of random gravitational waves in a three-dimensional hydrodynamic system half-space-half-space. An overview of studies on the analysis of the propagation of random waves in different systems is given. Mathematical statement of the problem contains second-order differential equations with respect to velocity potentials, kinematic and dynamic conditions on the contact surface. To study the problem, the field of deviations and the potentials of the wave velocities are presented in the form of expansions in Fourier-Stieltjes integrals. Stochastic amplitudes of the corresponding fields are expressed through the amplitude of the deviation field in the form of recurrent relations. Using the expansion in series in a small parameter for the stochastic field amplitude variations, the dynamic equation in integral form has been received. It should be noted that the use of a small parameter makes it possible to control the contribution of the nonlinearity of the corresponding terms. Subintegral functions of two- and three-wave interaction are obtained in symmetrized form. Based on the obtained equation, a linear dispersion relationship is derived. In the two-dimensional case, it degenerates into the dispersion relationship obtained by A. Naifeh for deterministic wave motions in a two-layer system. Using the equations for the amplitude of the deviation field and the ensemble averaging procedure, the equation for the spectrum of the first harmonics is obtained. The reliability of the obtained results is confirmed by a comparison with previous studies of the problem of propagation of random surface gravitational waves performed in the works of Masuda and others. The obtained results can be used in the study of the propagation of random internal waves in the oceans.

Keywords: random gravitational waves, dispersion relationship, dynamic equation.

УДК 532.59

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.08.30-37>

Ю. Гуртовий, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
О. Кухаренко, асп.
Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, м. Кропивницький, Україна
E-mail: hurtovyy@gmail.com

ШВИДКОСТІ І ТРАЄКТОРІЇ ХВИЛЬОВОГО РУХУ У ДВОШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Проведено дослідження щодо вивчення траєкторій руху окремих частинок рідини у двошаровій гідродинамічній системі з кінцевою товщиною шарів, а також аналізу фазової і групової швидкостей внутрішніх хвиль у цій системі. Змодельовано задачу для невязкої нестисливої рідини під впливом сили тяжіння та сил поверхневого натягу в безрозмірному вигляді. Розв'язки знайдено у вигляді прогресивних хвиль за допомогою методу багатьох масштабів. Розв'язання розв'язків здійснено за коефіцієнтом нелінійності. Досліджено залежність дисперсійного співвідношення від хвильового числа для різних значень коефіцієнта поверхневого натягу та відношення густин шарів. Отримано формули для групової і фазової швидкості для внутрішніх гравітаційно-капілярних хвиль, а також у граничному випадку для капілярних хвиль. Здійснено порівняння величин фазової та групової швидкості внутрішніх хвиль для різних значень хвильового числа. Доведено, що зі збільшенням хвильового числа групова швидкість починає випереджати фазову, причому стають рівними одна одній на мінімумі фазової швидкості. Показано, що траєкторіями є еліпси, у яких горизонтальні півосі більші за вертикальні. Одержано формули для півосей еліптичних траєкторій для кожного із шарів. Проаналізовано характер зміни півосей еліптичних траєкторій залежно від відстані до поверхні контакту двох рідких шарів, а також від значень хвильового числа. Доведено, що півосі еліпсів зменшуються зі збільшенням відстані до поверхні контакту нерівномірно. Показано асиметричність траєкторій частинок кожного із шарів для випадку, коли товщина нижнього шару відрізняється від товщин нижнього шару. Отримані результати з дослідження кінематичних характеристик руху частинок можна використати при математичному моделюванні хвильових процесів у Світовому океані, а також для проведення теоретичних розрахунків при підготовці експериментів.

Ключові слова: двошарова рідина, внутрішні хвилі, фазова швидкість, групова швидкість, траєкторії руху.

Вступ. Системи із шаруватою структурою охоплюють особливий клас об'єктів і процесів. Вивчення внутрішніх хвиль у таких системах має значний теоретичний і прикладний інтерес і є предметом багатьох досліджень. Аналіз кінематичних характеристик внутрішніх хвиль у рідких системах різної густини актуальний при вивченні хвильових процесів у водних середовищах, а також при розробці екологічних технологій та пристроїв, що використовують енергію внутрішніх хвиль. Теоретичне дослідження внутрішніх хвиль кінцевої амплітуди отримало значну увагу численних дослідників, зокрема таких, як: Бенні [3], Бенджамін [1–3], Оно [10], Девіс та Акрівос [6], Кубота [7]. Багато праць присвячено вивченню слабо нелінійних довгих хвиль і пов'язано з рівнянням Кортевега–де Фріза. На сьогодні це рівняння досить добре вивчено і для нього розроблено методи, що дають його точні розв'язки для довільно визначених початкових умов (Сегур [14]).

Інший підхід до аналізу хвильових рухів розвинено для слабко нелінійних сильно диспергуючих хвиль, які описуються нелінійним рівнянням Шредінгера. Такий підхід використовується, наприклад у [16], де проведено достатньо повний і розгорнутий аналіз хвильового руху в гідродинамічній системі шар–шар. У [16] розглянуто слабко нелінійні хвилі, які малі порівняно з товщиною шарів. Методом багатомасштабних розвинень до третього порядку було знайдено розв'язки у вигляді прогресивних хвиль та виведено еволюційне рівняння Шредінгера. Аналогічні дослідження про поширення хвильових пакетів у двошарових гідродинамічних системах представлені для випадку шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею у [15].

Із сучасних досліджень варто згадати статтю [5], де за допомогою методу збурень вивчено гравітаційно-капілярні водні хвилі в тришаровій стратифікованій рідині. Рішення Стокса другого порядку та асимптотичні рішення потенціалів швидкості другого порядку, які представлені на основі теорії малих амплітуд, пов'язані з висотами гравітаційно-капілярних хвиль води. Отримані розв'язки першого та другого порядків, які залежать не лише від глибини і щільності тришарової рідини, але й від поверхневого натягу.

У дослідженні [8] напіваналітично розглядається проблема внутрішніх хвиль у слабко стратифікованій двошаровій рідині. Наведено розгляд шарових потоків рідини з експоненціальною стратифікацією обох шарів. Встановлено, що режим одиночної хвилі може впливати на нестабільність Кельвіна–Гельмгольца, що утворюється через міжфазний зсув швидкості в потоці вгору. Довгохвильова модель, яка описує прогресивні хвилі, будується за допомогою процедури масштабування з невеликим параметром Буссінеска.

У статті [9] розглянуто збереження потоку енергії для внутрішніх хвиль, що поширюються в неоднорідній мілкій воді. Акцентовано застосування розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза у формі кноідалних і відокремлених хвиль. Для вивчення математичної моделі, що описує рух хвиль у південній частині Балтійського моря (уздовж розрізу від басейну Борнхольм, через Слупський поріг до Гданського басейну) використано методи чисельного моделювання.

У праці [17] вивчено рух внутрішніх хвиль та виявлено їхню роль у змішуванні океану, розглянуто метод розрахунку збурень густини і потоку енергії внутрішніх хвиль лише з використанням поля швидкостей, що базується на використанні лінеаризованих рівнянь для внутрішніх хвиль. Цей метод протестовано за допомогою чисельного моделювання внутрішніх хвиль, згенерованих приливним потоком по гауссовій топографії у стратифікованій глибині. За допомогою цього методу також визначено щільність збурень і потоків енергії з використанням лише даних про швидкість, що узгоджені зі збуреннями густини та потоками енергії, які визначаються рівнянням стану за певної температури.

У [4] досліджено крайові хвилі, що поширюються в двошаровій рідині вздовж періодичної берегової лінії. Розглянуто явище захоплення енергії хвиль уздовж періодичних берегових ліній у двошаровій рідині та акцентовано увагу на питаннях про захоплення енергії хвиль уздовж періодичних берегових ліній у двошаровій рідині. Отримано умови, які показують шельфові, скелясті береги та похилі пляжі, а також підтримують крайові хвилі та гарантують їхнє існування.

У статті [11] розглянуто трансформацію енергії водної хвилі у двошаровій рідині з нерегулярним дном, включаючи вплив поверхневого натягу. Для вивчення явищ відбиття та передачі використовують методи теорії збурень і перетворення Фур'є. Коефіцієнти оцінюють до першого порядку та демонструють графічно з метою проілюструвати вплив деяких фізичних параметрів, наприклад, впливу кількості пульсацій та поверхневого натягу на перетворення хвильової енергії між хвилями двох різних мод.

У [12] наведено явища відбиття і передачі водних хвиль через хвилеподібне проникне дно в двошаровій рідинній системі з використанням двовимірної лінеаризованої теорії, досліджено вплив поверхневого натягу на вільну поверхню. Показано залежність коефіцієнтів відбиття і пропускання, що отримані в термінах інтегралів, від функції форми хвилеподібного дна.

У праці [13] вивчено двошарову систему, що вкрита кригою, для якої проаналізовано явище відбиття і передачі водяних хвиль у ній. Дно нижнього шару хвилеподібне і проникне, а верхній шар покритий крижаним листом. Коефіцієнти відображення і передачі першого порядку визначаються за допомогою регулярного аналізу збурень та методу перетворень. Вони також залежать від проникності та форми хвилеподібного дна.

Отже, аналіз проблеми про дослідження поширення потоку енергії внутрішніх хвиль у двошарових гідродинамічних системах шар з твердим дном–шар з кришкою актуальний і відображений у численних публікаціях.

Модель задачі та розв'язки. Досліджується задача про поширення двовимірних хвиль на поверхні нев'язкої нестисливої рідини під впливом сили тяжіння та сил поверхневого натягу. Вважається, що хвилі поширюються вздовж осі x , а вертикальна вісь z спрямована в напрямку, протилежному до напрямку дії сили тяжіння (рис. 1). Математична модель задачі про поширення хвильових пакетів уздовж поверхні контакту двох рідких шарів $\Omega_1 = \{(x, z), |x| < \infty, -h_1 < z < 0\}$ і $\Omega_2 = \{(x, y), |x| < \infty, 0 < z < h_2\}$ у безрозмірних величинах, введених за допомогою товщини в шарі h_2 , характерної довжини хвилі L , максимального відхилення a нижньої поверхні контакту та прискорення вільного падіння g має вигляд

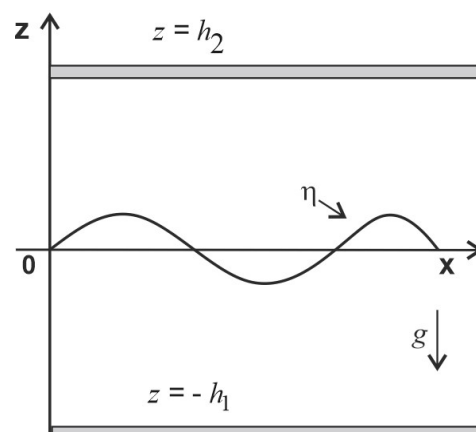


Рис. 1. Двошарова гідродинамічна система

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_j &\equiv \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_j (j=1,2), \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} &= -\alpha \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z = -h_1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = h_2, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2}\alpha[(\bar{\nabla}\varphi_1)^2 - (\bar{\nabla}\varphi_2)^2] - T \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} &= 0 \quad \text{при } z = \alpha \eta(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\alpha = a/h_2$ – коефіцієнт нелінійності, $\varphi_i (i = 1,2)$ – потенціали швидкостей у рідких середовищах, η – відхилення поверхні контакту, $\rho = \rho_2 / \rho_1$ – відношення густин рідин верхнього і нижнього шарів, T – поверхневий натяг поверхні контакту.

З використанням методу багатомасштабних розвинень до третього порядку

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad \varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2,$$

де $x_k = \alpha^k x$ та $t_k = \alpha^k t$ ($k = 0, 1, 2$), отримано постановки для трьох перших наближень задачі та проведено дослідження у перших двох наближеннях [15].

Наведемо потрібні для подальшого дослідження співвідношення. У першому (лінійному) наближенні маємо розв'язки, які відповідають прогресивним хвилям:

$$\eta_1 = A \cos(kx - \omega t), \quad (2)$$

$$\varphi_{11} = \frac{A \omega \operatorname{ch}(k(h_1 + z))}{k \operatorname{sh}(kh_1)} \sin(kx - \omega t), \quad (3)$$

$$\varphi_{21} = -\frac{A \omega \operatorname{ch}(k(h_2 - z))}{k \operatorname{sh}(kh_2)} \sin(kx - \omega t), \quad (4)$$

де A – обвідна хвильового пакета, $\theta = kx_0 - \omega t_0$, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число центра хвильового пакета та ω – частота центра хвильового пакета.

Дисперсійне співвідношення та фазова і групова швидкості. Підставляючи розв'язки (2) – (4) у рівняння динамічної рівноваги (1), отримуємо дисперсійне рівняння для внутрішніх хвиль

$$\omega^2 = \frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2)} \quad \text{або} \quad \omega = \sqrt{\frac{(1 - \rho + Tk^2)k}{\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2)}}.$$

На рис. 2 зображено графік залежності $\omega = \omega(k)$ для таких параметрів гідродинамічної системи: $h_2 = 1, h_1 = 2$. Усі величини наведено в безрозмірному вигляді. Як видно з характеру дисперсійної діаграми, спочатку крива веде себе подібно $k^{1/2}$, а потім перегинається і змінює закон залежності на $k^{3/2}$. Це вказує на те, що при достатньо великих довжинах хвиль визначальними є гравітаційні ефекти, а при малих довжинах основну роль відіграють капілярні сили. Причому, чим більший коефіцієнт поверхневого натягу, тим ближче точка перегину до початку координат (ліва діаграма). Також значний вплив на баланс гравітаційних і капілярних ефектів створює відношення густин шарів: збільшення відношення густин посилює дисперсію, яка є наслідком впливу сил поверхневого натягу.

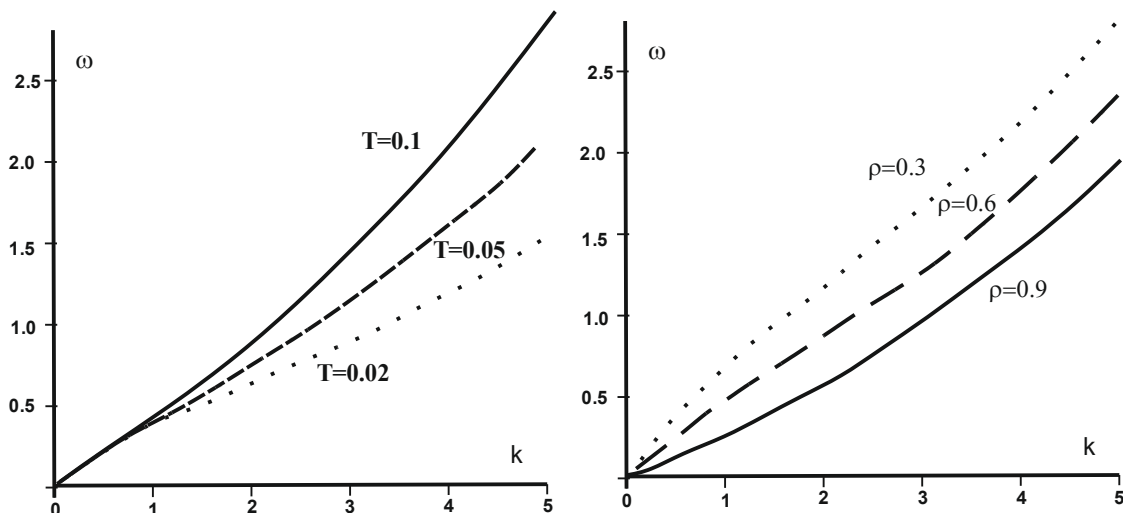


Рис. 2. Дисперсійні діаграми для двошарової гідродинамічної системи

Фазова і групові швидкості капілярно-гравітаційних хвиль відповідно дорівнюють

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1 - \rho + Tk^2}{k(\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2))}}, \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2Tk^2 + \frac{\omega^2}{k} \left[\operatorname{cth} kh_1 - kh_1(1 - \operatorname{cth}^2 kh_1) + \rho \left(\operatorname{cth} kh_2 - kh_2(1 - \operatorname{cth}^2 kh_2) \right) \right]}{2\omega(\operatorname{cth} kh_1 + \rho \operatorname{cth} kh_2)}.$$

Саме з груповою швидкістю переноситься енергія хвильового руху внутрішніх хвиль. Якщо проаналізувати графіки залежності фазової і групової швидкості від хвильового числа (рис. 3), отримаємо декілька цікавих висновків. Для малих хвильових чисел, тобто для великих довжин хвиль, фазова швидкість більша за групову, що характерно для гравітаційних хвиль.

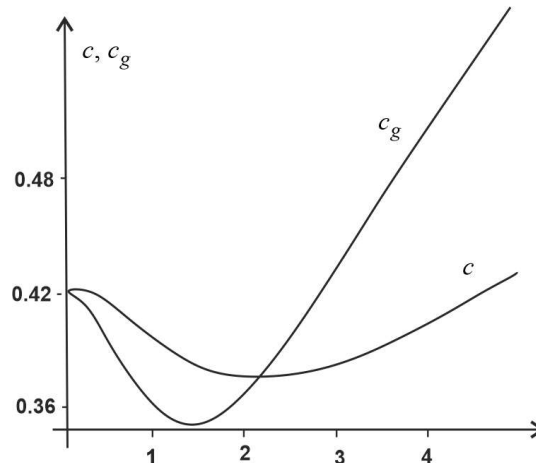


Рис. 3. Графіки залежності фазової і групової швидкостей від хвильового числа

Зі збільшенням хвильового числа швидкості зменшуються до певного мінімуму, після якого починають зростати, причому групову швидкість спадає і зростає більш інтенсивно. Характерно, що перетин графіків відбувається на локальному мінімумі фазової швидкості. Якщо хвильове число досить велике, то тоді дисперсійне співвідношення можна записати у вигляді, яке справедливе для капілярних хвиль

$$\omega^2 = Tk^3 / (\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2)).$$

Відповідно фазова та групові швидкості для капілярних хвиль у двошаровій рідині визначаються формулами

$$c = \sqrt{Tk / (\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2))},$$

$$c_g = \omega'_k = \frac{1}{2\omega} \left[\frac{3Tk^2 (\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2)) + Tk^3 \left(\frac{h_1}{\operatorname{sh}^2(kh_1)} + \frac{\rho h_2}{\operatorname{sh}^2(kh_2)} \right)}{(\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2))^2} \right].$$

Звідси можна отримати співвідношення, яке пов'язує фазову та групову швидкості капілярних хвиль

$$c_g = \frac{3}{2}c + \frac{\sqrt{Tk^3 \left(\frac{h_1}{\operatorname{sh}^2(kh_1)} + \frac{\rho h_2}{\operatorname{sh}^2(kh_2)} \right)}}{2(\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2))^{3/2}}.$$

Отже, капілярним хвилям властива аномальна дисперсія. Таким чином, на відміну від гравітаційних хвиль, енергія, що переноситься капілярними хвилями, передається швидше, ніж фазова швидкість цих хвиль.

Швидкості та траєкторії хвиль окремих частинок. Прогресивні хвилі вздовж поверхні двох рідких середовищ переміщуються горизонтально з деякою фазовою швидкістю. Водночас траєкторії руху окремих частинок рідини мають зовсім інший характер. Для визначення швидкостей окремих частинок у нижньому і верхньому шарах продиференціюємо розв'язки (3) та (4) за просторовими координатами. Маємо

$$\begin{cases} v_{1x} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} \\ v_{1z} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{2x} = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} \\ v_{2z} = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} \end{cases}.$$

Отже, для нижнього і верхнього шарів горизонтальна та вертикальна складові вектора швидкості окремих частинок відповідно дорівнюють

$$\begin{cases} v_{1x} = \frac{A\omega \operatorname{ch}(k(h_1 + z))}{\operatorname{sh}(kh_1)} \cos(kx - \omega t) \\ v_{1z} = \frac{A\omega \operatorname{sh}(k(h_1 + z))}{\operatorname{sh}(kh_1)} \sin(kx - \omega t) \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{2x} = -\frac{A\omega \operatorname{ch}(k(h_2 - z))}{\operatorname{sh}(kh_2)} \cos(kx - \omega t) \\ v_{2z} = \frac{A\omega \operatorname{sh}(k(h_2 - z))}{\operatorname{sh}(kh_2)} \sin(kx - \omega t) \end{cases}.$$

Траєкторії будемо шукати з урахуванням співвідношень

$$\begin{cases} v_{ix} = \frac{dx}{dt}, \\ v_{iz} = \frac{dz}{dt}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = \int v_{ix} dt \\ y = \int v_{iy} dt \end{cases}$$

Припустимо, що (x_0, z_0) – незбурений рівноважний стан частинки рідини. Якщо (x, z) – координати збуреного стану частинки $(x \sim x_0, z \sim z_0)$, то інтегрування в цих межах дає параметричне рівняння траєкторій частинок рідини нижнього шару

$$\begin{cases} x = -\frac{A \operatorname{ch}(k(h_1 + z_0))}{\operatorname{sh}(kh_1)} \sin(kx_0 - \omega t) + x_0 \\ z = \frac{A \operatorname{sh}(k(h_1 + z_0))}{\operatorname{sh}(kh_1)} \cos(kx_0 - \omega t) + z_0 \end{cases}$$

Як параметр виступає час t . Аналогічне інтегрування для частинок рідини верхнього шару дає їхні траєкторії у вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{A \operatorname{ch}(k(h_2 - z_0))}{\operatorname{sh}(kh_2)} \sin(kx_0 - \omega t) + x_0 \\ z = \frac{A \operatorname{sh}(k(h_2 - z_0))}{\operatorname{sh}(kh_2)} \cos(kx_0 - \omega t) + z_0 \end{cases}$$

Ці системи легко можна звести до співвідношення $\frac{(x - x_0)^2}{a_i^2} + \frac{(z - z_0)^2}{b_i^2} = 1 \quad (i = 1, 2)$, що є рівнянням еліпса, де півосі еліпса визначаються співвідношеннями

$$\begin{cases} a_1 = \frac{A \operatorname{ch}(k(h_1 + z_0))}{\operatorname{sh}(kh_1)} \\ b_1 = \frac{A \operatorname{sh}(k(h_1 + z_0))}{\operatorname{sh}(kh_1)} \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = \frac{A \operatorname{ch}(k(h_2 - z_0))}{\operatorname{sh}(kh_2)} \\ b_2 = \frac{A \operatorname{sh}(k(h_2 - z_0))}{\operatorname{sh}(kh_2)} \end{cases}$$

На рис. 4 зображено залежність значень півосей еліпсів для нижнього (a_1, b_1) і верхнього шарів (a_2, b_2) двошарової гідродинамічної системи для параметрів $A = 0.1, h_1 = h_2 = 1, \rho = 0.9, T = 0.1$. Рис. 4, а показує таку залежність для малих хвильових чисел $k = 0.5$, тобто для гравітаційних хвиль. Збільшення відстані частинок від поверхні розділу двох шарів дещо зменшує значення горизонтальних півосей, які наближаються до деякого граничного значення. Проте вертикальні півосі вдвічі менші за горизонтальні і зменшуються досить швидко: за лінійним законом. Біля верхньої і нижньої меж еліпси стискаються так, що рух частинок рідини стає майже горизонтальним. Рис. 4, б ілюструє такі залежності для хвиль із хвильовим числом $k = 1$. З віддаленням від меж розділу зменшення значень горизонтальних півосей стає більш відчутним. Однак вертикальні півосі зменшуються ще швидше. При цьому різниця значень горизонтальної і вертикальної півосей не є такою значною, особливо біля меж розділу. Для більших хвильових чисел $k = 2$ значення півосей стають досить близькими, що ілюструє рис. 4, в. Отже, траєкторії руху частинок майже колові. Значення горизонтальних і вертикальних півосей майже однакові й їх різниця стає значною біля верхньої та нижньої меж. Тут горизонтальні півосі набувають деякого граничного значення, а вертикальні півосі зменшуються до нуля. Також слід зазначити, що всі графіки для однакових товщин шарів симетричні відносно вертикальної осі.

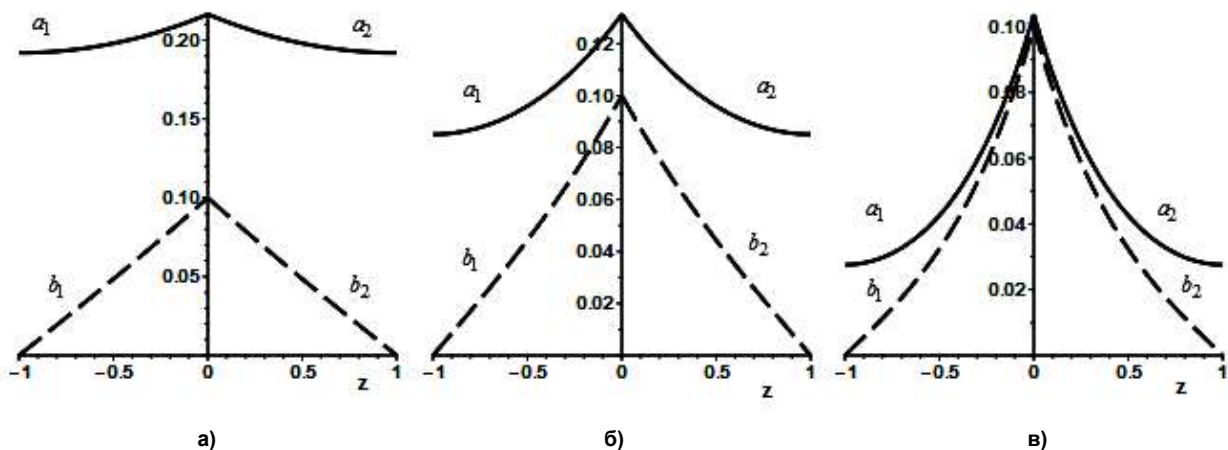


Рис. 4. Значення півосей еліпсів для нижнього (a_1, b_1) і верхнього шарів (a_2, b_2) для параметрів $A = 0.1, h_1 = h_2 = 1$: а) $k = 0.5$, б) $k = 1$, в) $k = 2$

На рис. 5 зображено траєкторії руху частинок двошарової рідини для параметрів $A = 0.1, h_1 = h_2 = 1, \rho = 0.9, T = 0.1, k = 0.1$. Вони показують по три випадки траєкторій руху частинок: біля межі розділу, посередині шарів і біля верхньої та нижньої меж. Ці траєкторії відповідають параметрам двошарової рідини, що були використані вище для рис. 4, б. Із рівнянь (5) та (6) випливає, що при русі внутрішніх хвиль вправо частинки нижнього шару обертаються по еліпсах за годинниковою стрілкою, а частинки верхнього шару – проти годинникової стрілки.

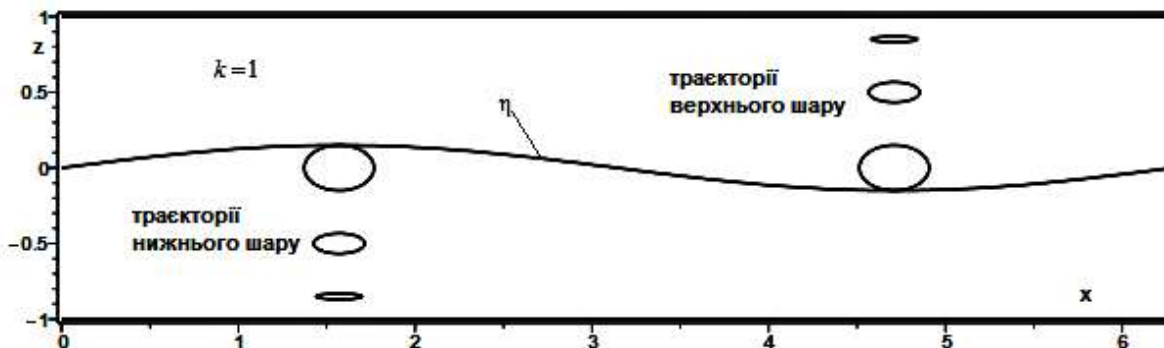


Рис. 5. Траєкторії руху частинок двошарової рідини для параметрів $A = 0.1, h_1 = h_2 = 1, \rho = 0.9, T = 0.1, k = 1$

Рис. 6 показує залежність значень півосей еліпсів для нижнього (a_1, b_1) та верхнього шарів (a_2, b_2) двошарової гідродинамічної системи для параметрів $A = 0.1, h_1 = 2, h_2 = 1, \rho = 0.9, T = 0.1$. Тут товщина нижнього шару вдвічі більша за товщину верхнього шару. Це приводить до того, що графіки значень горизонтальних півосей несиметричні. Рис. 6, а показує таку залежність для хвильових чисел $k = 0.5$. Збільшення відстані від поверхні розділу двох шарів приводить до зменшення значення горизонтальних півосей еліпсів. Потім вони наближаються до деякого граничного значення, причому їх різниця досить відчутна. Піввісь верхнього шару a_2 удвічі більша за вертикальну b_2 , а піввісь $a_1 > b_1$ – на третину. Вертикальні півосі знову зменшуються досить істотно за лінійним законом до нульового значення. Тому біля верхньої і нижньої меж еліпси стискаються так, що рух частинок рідини стає майже горизонтальним. Рис. 6, б ілюструє такі залежності для хвиль із хвильовим числом $k = 1$. З віддаленням від межі розділу характер зменшення значень вертикальних півосей втрачає ознаки лінійності, що особливо видно для нижнього шару. Для хвильових чисел $k \geq 2$ (рис. 6, в) значення півосей досить близькі, і лише на межах шарів проявляється деяка різниця. Слід також зауважити, що в цьому випадку нелінійний характер графіків проявляється більш яскраво.

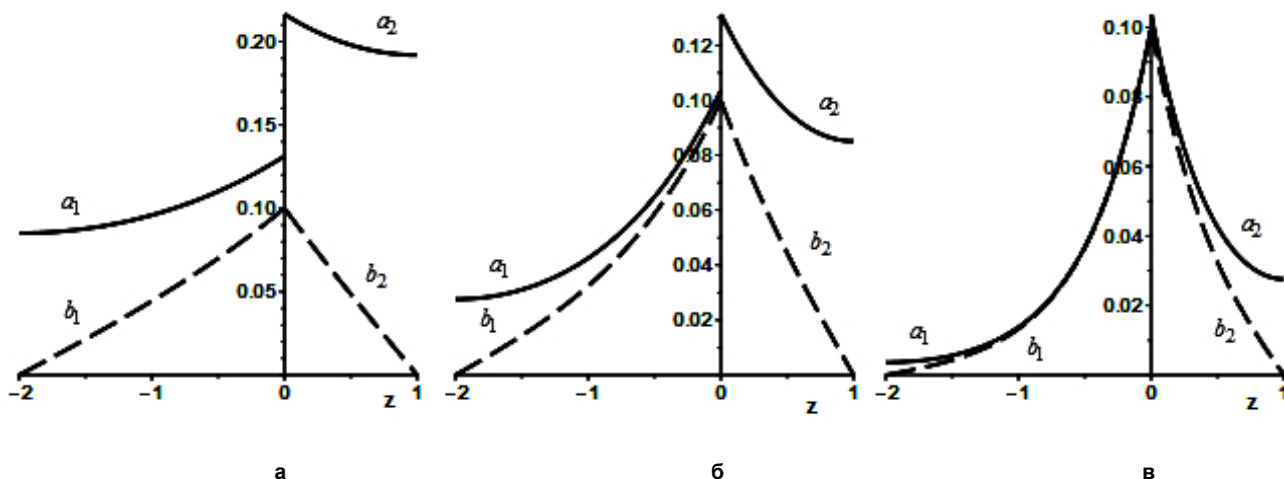


Рис. 6 Значення півосей еліпсів для нижнього (a_1, b_1) та верхнього шарів (a_2, b_2) для параметрів $A = 0.1, h_1 = 2, h_2 = 1$ а) $k = 0.5$, б) $k = 1$, в) $k = 2$

На рис. 7 зображено траєкторії руху частинок двошарової рідини для параметрів $A = 0.1, h_1 = 2, h_2 = 1, \rho = 0.9, T = 0.1, k = 1$. Вони показують траєкторії руху частинок верхнього шару при $z \in \{0, 0.5, 0.85\}$ і для нижнього шару при $z \in \{0, -0.5, -1, -1.5, -1.85\}$.

Ці траєкторії також відповідають параметрам двошарової рідини, що були використані вище для рис. 6, б. Стиснення еліпсів по вертикалі характерне для всіх трьох випадків, стиснення по горизонталі відчутніше для більших хвильових чисел, тобто для менших довжин хвиль. Слід також вказати на асиметричність траєкторій частинок кожного із шарів для випадку, коли товщина нижнього шару відрізняється від товщини верхнього шару.

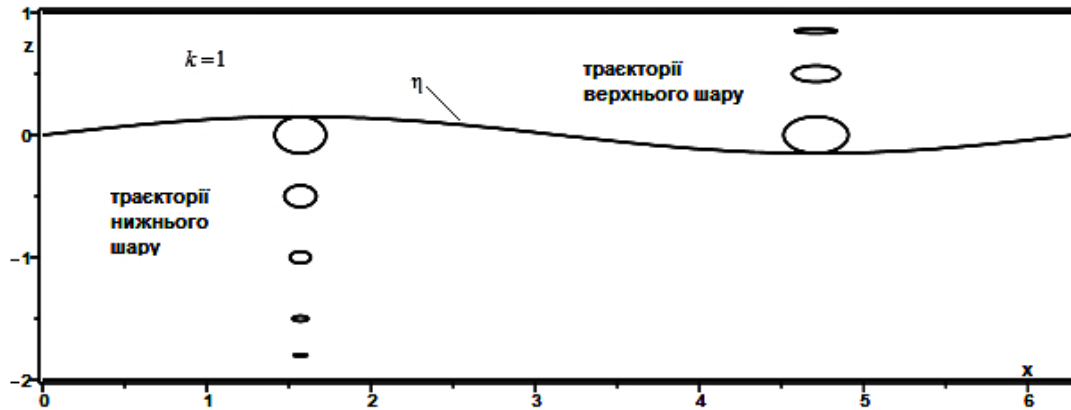


Рис. 7. Траєкторії руху частинок двошарової рідини для параметрів $A = 0.1, h_1 = 2, h_2 = 1, \rho = 0.9, T = 0.1, k = 1$

Висновки. У результаті можна сформулювати декілька висновків.

1. Дослідження дисперсії внутрішніх хвиль у двошаровій системі показує, що при достатньо великих довжинах хвиль визначальними є гравітаційні ефекти (закон дисперсії пропорційний $k^{1/2}$), а при малих довжинах основну роль відіграють капілярні сили. Причому, чим більший коефіцієнт поверхневого натягу, тим для більших довжин хвиль закон дисперсії веде себе пропорційно $k^{3/2}$. Також значний вплив на баланс гравітаційних і капілярних ефектів створює відношення густин шарів: збільшення відношення густин посилює дисперсію, яка є наслідком впливу сил поверхневого натягу.

2. Якщо проаналізувати залежності фазової і групової швидкості від хвильового числа, то отримаємо, що для малих хвильових чисел фазова швидкість більша за групову, що характеризує саме гравітаційні хвилі. Із збільшенням хвильового числа швидкості зменшуються до певного мінімуму, після якого починають зростати, причому групова швидкість починає випереджати фазову. Таким чином виникає аномальна дисперсія внутрішніх хвильових пакетів.

3. Показано, що траєкторіями руху окремих частинок двошарової рідини є еліпси, у яких горизонтальні півосі більші за вертикальні. Одержано формули для півосей еліптичних траєкторій для кожного з шарів. Також виявлено, що при русі внутрішніх хвиль вправо, частинки нижнього шару обертаються по еліпсах за напрямком руху годинникової стрілки, а частинки верхнього шару – у протилежному напрямку (проти годинникової стрілки).

4. Проаналізовано характер зміни півосей еліптичних траєкторій залежно від відстані до межі розділу двох рідких шарів, а також від значень хвильового числа. Доведено, що півосі еліпсів зменшуються зі зростанням відстані від межі нерівномірно. Стиснення еліпсів по вертикалі характерне для всіх довжин хвиль, стиснення по горизонталі відчутніше для більших хвильових чисел, тобто для менших довжин хвиль. Показано асиметричність траєкторій частинок кожного із шарів для випадку, коли товщина нижнього шару відрізняється від товщин нижнього шару.

Слід зауважити, що в цьому дослідженні розглядається ідеальна рідина, тому тут не враховані ефекти, що пов'язані з в'язкістю і дисипацією енергії. Але результати аналізу цілком можна застосовувати до реальних рідин, як для проведення якісного аналізу, так і використовувати як теоретичні засади при підготовці і проведенні експериментів. Дослідження кінематичних характеристик руху частинок також дозволяють моделювати реальні фізичні хвильові процеси у Світовому океані.

Список використаних джерел:

1. Benjamin T. B. Internal waves of finite amplitude and permanent form / T. B. Benjamin // Jour. Fluid Mech., 1966. – 25. – P. 241–270.
2. Benjamin T. B. Internal waves of permanent form of great depth / T. B. Benjamin // Jour. Fluid Mech., 1967. – 29. – P. 559–592.
3. Benney C. J. Long nonlinear waves in fluid flows / C. J. Benney // Jour. Maths. Phys., 1966. – 45. – P. 52.
4. Edge waves propagating in a two-layer fluid along a periodic coastline / F. S. Cal, G. A. S. Dias, B. M. M. Pereira and J. H. Videman. // Jour. of engineering math., 2014. – 85(1). – P. 1–17.
5. Cui W. Second-order Stokes wave solutions for gravity capillary water waves in three-layer density-stratified fluid / W. Cui, Z. Z. Yan and R. Mu // Acta physica sinica, 2014. – 63(14). – 140301.
6. Davis R. E. Solitary internal waves in deep water / R. E. Davis, A. Acrivos // Jour. Fluid Mech., 1967. – 29. – P. 593–607.
7. Kubota T. Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth / T. Kubota, D. R. S. Ko, L. D. Dobbs // AIAA Jour. Hydrodyn., 1978. – 12. – P. 157–165.
8. Makarenko N. Internal waves in marginally stable abyssal stratified flows / N. Makarenko, J. Maltseva, E. Morozov et al. // Nonlinear processes in geophysics, 2018. – 25(3). – P. 659–669.
9. Massel S. R. On the nonlinear internal waves propagating in an inhomogeneous shallow sea / S. R. Massel // Oceanologia, 2016. – 58(2). – P. 59–70.
10. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids / H. Ono // Jour. Phys. Soc., Japan., 1975. – 39. – P. 1082.
11. Panda S. Oblique Wave Scattering by An Undulating Porous Bottom in A Two-Layer Ice-Covered Fluid / S. Panda // China ocean engineering, 2016. – 30(3). – P. 431–446.
12. Panda S. Transformation of Water-wave Energy in Two-layer Ocean in the Presence of Surface Tension / S. Panda and S. C. Martha // In Conf. on Recent Advances in Engineering and Computational Sci., Chandigarh, India, 2014, March.
13. Panda S. Water-waves Scattering by Permeable Bottom in Two-layer Fluid in the Presence of Surface Tension / Panda S. and S. C. Martha // Math. modelling and analysis, 2017. – 22(6). – P. 827–851.
14. Segur H. The Korteweg-de Vries equation and gravity waves. Solutions of the equations. Part 1 / H. Segur // Jour. Fluid Mech., 1973. – 59. – P. 721.
15. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface / I. T. Selezov, O. V. Avramenko, Yu. V. Gurtovyi and V. V. Naradovyi // Jour. of Math. Sci., 2010. – 168(4). – P. 590–602.
16. Selezov I. T. Features of wave-packet propagation in two-layer fluid of finite depth / I. T. Selezov, O. V. Avramenko, Yu. V. Gurtovyi // Internat. Jour. of Fluid Mech. Res., 2007. – 34(5). – P. 475–491.
17. Tarapov I. E. Continuum Mechanics. Vol. 3. Mechanics of Inviscid Liquid [in Rus.]. – Kharkov : Zoloty Stranitsy, 2005 – 332 c.

Y. Hurtovyi, PhD, Associate Prof.,
O. Kuharenko, PhD Student
Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State Pedagogical University, Kropyvnytskyi, Ukraine

VELOCITIES AND TRAJECTORIES OF WAVE MOTION IN A TWO-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM

The paper deals with studying trajectories of motion of individual liquid particles in a two-layer hydrodynamic system with a finite layer thickness as well as analyzing phase and group velocities of internal waves in the system. The problem is modeled for an inviscid incompressible fluid under action of the gravity and surface tension forces in a dimensionless form. Solutions of the problem are sought in the form of progressive waves using the multi-scale method. The solutions are expanded in terms of the nonlinearity coefficient. Dependence of the dispersion ratio of the wavenumber is investigated for different values of the surface tension coefficient and the ratio of the layer densities. Formulas are obtained for the group and phase velocities for internal gravity-capillary waves as well as in the limiting case for capillary waves. A comparison of the values of the phase and group velocities of internal waves for different values of the wave number is carried out. It is proved that with an increase in the wave number, the group velocity begins to outstrip the phase velocity, and their equality occurs at the minimum phase velocity. It is shown that the trajectories are ellipses in which the horizontal semi axes are larger than the vertical ones. Formulas are obtained for the semi axes of elliptic trajectories for each of the layers. The character of the change in the semi axes of elliptical trajectories is analyzed depending on the distance from the interface between two liquid layers as well as on the values of the wave number. It is proved that the semi axes of ellipses decrease unevenly with increasing distance from the boundary. The asymmetry of the particle trajectories of each of the layers is shown for the case when the thickness of the lower layer differs from the thickness of the upper layer. The study of the kinematic characteristics of the particle motion makes it possible to simulate real physical wave processes in the World Ocean. The results are also relevant for creating a theoretical basis for experiments.

Keywords: two-layer liquid, internal waves, phase velocity, group velocity, trajectories of motion.

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.09.37-42>

Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
О. Остос, асп.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: y.zhuk@i.ua

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ТЕРМОМЕХАНІЧНУ ПОВЕДІНКУ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ КРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

Розглянуто задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів шарнірно опертої в'язкопружної еластомерної кругової циліндричної оболонки. Постановка задачі ґрунтується на використанні гіпотез Кірґхофа–Лява та концепції комплексних модулів, які застосовуються для опису циклічної реакції в'язкопружного матеріалу на гармонічне навантаження. В осесиметричній постановці вважається, що існуюче мембранне зусилля є наслідком прикладеного розтягувального або попереднього навантаження. Задача розв'язується у два етапи: спочатку розв'язується задача механіки, а потім для знайдених амплітуд кінематичних і силових характеристик будується дисипативна функція і розв'язується задача стаціонарної теплопровідності. У результаті розв'язання стаціонарної теплової задачі будуються АЧХ і ТЧХ.

Ключові слова: попереднє зусилля, резонансні коливання, комплексні модулі, дисипативний розігрів, циліндрична оболонка.

Вступ. Швидкий розвиток таких галузей, як машинобудування, проектування авто- та аерокосмічної техніки, суднобудування та розробка різноманітних елементів енергетичних установок спонукає необхідність розробки зв'язаної теорії термов'язкопружності, оскільки при тривалих багаточислових навантаженнях за умови інтенсивних режимів роботи може спостерігатися істотний розігрів елементів конструкцій унаслідок дисипації механічної енергії в теплову і відповідно втрата працездатності внаслідок не тільки механічного, але й теплового руйнування [3–5]. Це зумовлює необхідність розвинення адекватних моделей поведінки матеріалів і конструкцій при інтенсивному, зокрема циклічному навантаженні [1, 6]. Детальне вивчення задач із циклічним навантаженням елементів конструкцій, у яких попередні напруження виникли внаслідок виробництва, дозволяє дослідити термін експлуатації цих структур [2, 7].

У статті досліджується вплив попереднього напруження на вимушені резонансні коливання та дисипативний розігрів еластомерної кругової циліндричної оболонки. Торці оболонки вважаються шарнірно опертими і теплоізольованими, а на внутрішній та зовнішній бічних поверхнях відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури.

Постановка задачі. Розглядається кругова циліндрична оболонка довжини L , радіуса R і товщини h , що складається з еластомерного ізотропного матеріалу густини ρ . Циліндрична оболонка стосується ортогональної системи координат x, φ, z (рис. 1).

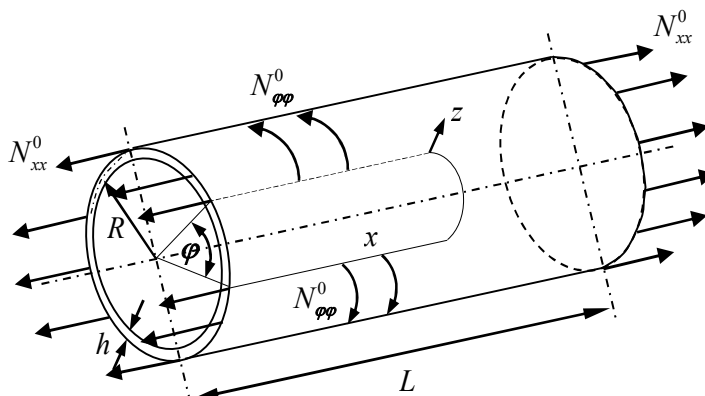


Рис. 1

Механічні коливання оболонки збуджуються поверхневим тиском $q(x, \varphi, t) = q'(x, \varphi) \cos \omega t - q''(x, \varphi) \sin \omega t$, що змінюється в часі за гармонічним законом з круговою частотою ω , близькою до резонансної. При цьому амплітуда, у свою чергу, є розподіленою по поверхні за певним законом. Попередній напружений стан оболонки сталий. Позначимо, що N_{xx}^0 – осьове попереднє зусилля, $N_{\varphi\varphi}^0$ – окружне попереднє зусилля, а $N_{x\varphi}^0$ – зсувне попереднє зусилля. Прогин середньої лінії циліндричної оболонки позначається w . Поведінка оболонки описується двома наборами рівнянь: статичними (для початкового стану) і коливальними, у яких наявність початкових напружень враховується додатковими членами. Вплив початкових напружень на коливання оболонки описується за допомогою теорії Доннелла–Муштарі–Власова. Рівняння коливань оболонки являють собою систему двох рівнянь, одне з яких – рівняння руху, а друге рівняння отримується з умов сумісності деформацій.

Оскільки матеріал оболонки вважається лінійно в'язкопружним, то використання концепції комплексних модулів та амплітуд дозволяє сформулювати постановку задачі в комплексному вигляді. Тоді, зводячи систему рівнянь коливань оболонки до одного рівняння, отримуємо розв'язувальне рівняння коливань оболонки

$$\tilde{D} \nabla^8 \tilde{w} + \tilde{E} h \nabla_k^4 \tilde{w} - \nabla^4 \nabla_r^2 \tilde{w} + \rho h \nabla^4 \tilde{w} = \nabla^4 \tilde{q}, \quad (1)$$

де тильдою позначається комплексна величина $(\cdot) = (\cdot)' + i(\cdot)''$, де $(\cdot)'$ – дійсна частина, а $(\cdot)''$ – уявна частина; $\tilde{D} = D' + iD''$ – згинна жорсткість, $\tilde{E} = E' + iE''$ – модуль Юнга, $\tilde{w}(x, \varphi) = w'(x, \varphi) + iw''(x, \varphi)$ – прогин та $\tilde{q}(x, \varphi) = q'(x, \varphi) + iq''(x, \varphi)$ – нормальне навантаження. Оператори визначаються таким чином:

$$\nabla_k^4 \tilde{w} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4}, \quad \nabla_r^2 w = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} N_{\varphi\varphi}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{R} N_{x\varphi}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}. \quad (2)$$

Закон зміни переміщень і зовнішнього навантаження в часі визначаються формулами:

$$w(x, \varphi, t) = w'(x, \varphi) \cos \omega t - w''(x, \varphi) \sin \omega t, \quad (3)$$

$$q(x, \varphi, t) = q'(x, \varphi) \cos \omega t - q''(x, \varphi) \sin \omega t. \quad (4)$$

Оскільки розглядаються осесиметричні коливання циліндричної оболонки під дією нормального зовнішнього навантаження \tilde{q} , розподіленого вздовж твірної та в часі за гармонічним законом за наявності лише осьового попереднього розтягувального зусилля N_{xx}^0 , то в цьому випадку прогин є функцією однієї просторової координати x , $\tilde{w} = \tilde{w}(x)$, а рівняння коливань оболонки (1) з урахуванням рівності нулю похідних за окружною координатою, набуває вигляду

$$\tilde{D} \frac{\partial^8 \tilde{w}}{\partial x^8} + \frac{\tilde{E} h}{R^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} - \rho h \omega^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial x^4} = N_{xx}^0 \frac{\partial^6 \tilde{w}}{\partial x^6} + \frac{\partial^4 \tilde{q}}{\partial x^4}. \quad (5)$$

Для заданої оболонки приймаються умови шарнірного опирання на її торцях

$$\tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L. \quad (6)$$

Власна частота коливань циліндричної оболонки є класичним результатом і з урахуванням попереднього розтягувального зусилля набуває вигляду

$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{\rho h} \left[D_0 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E_0 h}{R^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]}. \quad (7)$$

Стационарне температурне поле циліндричної оболонки описується усередненим за період коливань і по товщині оболонки рівнянням стаціонарної теплопровідності

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_S}{h} (T - T_C) + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{h} = 0, \quad (8)$$

де λ і α_S – коефіцієнти теплопровідності та тепловіддачі з бічних поверхонь оболонки, T – температура оболонки, T_C – температура навколишнього середовища. Позначивши $\theta = T - T_C$, де θ – температура вібророзігріву, $\langle \bar{W}_D \rangle$ – осереднена за період коливань та по товщині дисипативна функція, рівняння (8) можна записати у вигляді

$$\lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{2\alpha_S}{h} \theta + \frac{\langle \bar{W}_D \rangle}{h} = 0. \quad (9)$$

На торцях оболонки задаються умови теплоізоляції

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = L. \quad (10)$$

На внутрішній та зовнішній бічних поверхнях оболонки спостерігається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем згідно з законом

$$-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n} = \alpha_S \theta. \quad (11)$$

Таким чином, рівняння (9) разом з граничними умовами (10), (11) описують постановку стаціонарної теплової задачі коливань циліндричної оболонки.

Побудова розв'язання задачі. Задача розв'язується у два етапи. На першому етапі розглядається задача механіки. Задача про вимушені коливання циліндричної оболонки описується рівнянням (5) із граничними умовами (6). Комплексне рівняння (5) записується у такому вигляді:

$$(D' + iD'') \left(\frac{d^8 w'}{dx^8} + i \frac{d^8 w''}{dx^8} \right) + \left(\frac{E'h}{R^2} + i \frac{E''h}{R^2} \right) \left(\frac{d^4 w'}{dx^4} + i \frac{d^4 w''}{dx^4} \right) - \rho h \omega^2 \left(\frac{d^4 w'}{dx^4} + i \frac{d^4 w''}{dx^4} \right) = N_{xx}^0 \left(\frac{d^6 w'}{dx^6} + i \frac{d^6 w''}{dx^6} \right) + \left(\frac{d^4 q'}{dx^4} + i \frac{d^4 q''}{dx^4} \right), \quad (12)$$

де w' , w'' – амплітуди прогинів.

Виділяючи дійсну та уявну частини, отримуємо систему двох дійсних алгебраїчних рівнянь відносно дійсної та уявної частин амплітуди переміщення

$$\begin{cases} D' \frac{d^8 w'}{dx^8} + D'' \frac{d^8 w''}{dx^8} + \frac{E'h}{R^2} \frac{d^4 w'}{dx^4} + \frac{E''h}{R^2} \frac{d^4 w''}{dx^4} - \rho h \omega^2 \frac{d^4 w'}{dx^4} = N_{xx}^0 \frac{d^6 w'}{dx^6} + \frac{d^4 q'}{dx^4} \\ D' \frac{d^8 w''}{dx^8} - D'' \frac{d^8 w'}{dx^8} + \frac{E'h}{R^2} \frac{d^4 w''}{dx^4} - \frac{E''h}{R^2} \frac{d^4 w'}{dx^4} - \rho h \omega^2 \frac{d^4 w''}{dx^4} = N_{xx}^0 \frac{d^6 w''}{dx^6} + \frac{d^4 q''}{dx^4}. \end{cases} \quad (13)$$

Граничні умови (6) у термінах амплітуд прогинів набувають вигляду

$$w' = w'' = 0, \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = L. \quad (14)$$

Розв'язок системи (13) шукаємо у вигляді, який задовольняє граничні умови (14):

$$w'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w'_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad w''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w''_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (15)$$

де w'_m , w''_m – амплітуди прогинів (невідомі величини) для m -ї власної форми коливань, що відповідають власній частоті ω_m , яка визначається за формулою (7).

Реакція оболонки визначається резонансною модою m , а іншими доданками рядів у (15) нехтуємо:

$$w'(x) = w'_m \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad w''(x) = w''_m \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (16)$$

Для таких коливань вважаємо, що зовнішнє навантаження, що виражається формулою (4), розподілене по поверхні оболонки за відповідним цій моді законом

$$q'(x) = q' \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad q''(x) = q'' \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (17)$$

Підставляючи розв'язок (16) і вирази (17) у систему (13) та прирівнюючи коефіцієнти при синусах, отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь для w'_m та w''_m , звідки одержуємо розв'язок

$$\begin{aligned} w'_m &= \frac{q' \left[D' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] + q'' \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]}{\left[D' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 + \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]^2}, \\ w''_m &= \frac{q'' \left[D' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] - q' \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]}{\left[D' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 - \rho h \omega^2 + \frac{E'h}{R^2} + N_{xx}^0 \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right]^2 + \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином, розв'язок в околі власної частоти ω_m при резонансних коливаннях записується у формі

$$w_m(x, t) = w'_m \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \omega t - w''_m \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \omega t. \quad (19)$$

Тоді розподіл амплітуд прогинів уздовж твірної оболонки набуває вигляду

$$w_m(x) = \sqrt{(w'_m)^2 + (w''_m)^2} \sin \frac{m\pi x}{L}, \quad (20)$$

де квадрат амплітуди прогину визначається формулою $|\tilde{w}_m|^2 = (w'_m)^2 + (w''_m)^2$, а величини w'_m , w''_m – формулою (18).

Розв'язок стаціонарної задачі (9), (10), (11) шукається у вигляді

$$\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 \cos \frac{2m\pi x}{L}, \quad (21)$$

де θ_0, θ_1 – константи, що підлягають визначенню. У цій термомеханічній задачі про коливання оболонки механічна та теплова задача пов'язані лише дисипативною функцією, яка в осесиметричній постановці коливань оболонки після алгебраїчних перетворень набуває вигляду

$$\langle \bar{W}_D \rangle = \frac{\omega}{4} |\tilde{w}_m|^2 \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right] \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{L} \right). \tag{22}$$

Тоді, підставляючи вираз (22) і розв'язок (21) у рівняння (9), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь з двома невідомими θ_0, θ_1 , після розв'язання якої одержуємо такі вирази для констант:

$$\theta_0 = \frac{\omega}{8} \frac{|\tilde{w}_m|^2}{\alpha_S} \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right], \quad \theta_1 = -\frac{\omega}{8} \frac{|\tilde{w}_m|^2}{\left\{ 2\lambda h \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \alpha_S \right\}} \left[D'' \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \frac{E''h}{R^2} \right]. \tag{23}$$

Таким чином, підставляючи коефіцієнти (23) у (21), отримуємо температурне поле в оболонці, що коливається на частоті, близькій до m -ї резонансної.

Результати розрахунків та їхній аналіз. Досліджуються коливання кругової циліндричної оболонки довжини $L = 0,09$ м, радіуса $R = 0,015$ м і товщини $h = 0,001$ м. Числові розрахунки проводяться для випадку поліетилену, що характеризується такими значеннями комплексних модулів накопичення і втрат: $E' = 8,0 \cdot 10^8$ Н/м², $E'' = 6,3 \cdot 10^6$ Н/м². Коефіцієнт Пуассона і густина матеріалу дорівнюють $\nu = 0,46$ та $\rho = 953$ кг/м³, відповідно. У статті вибрано варіант теорії циклічної в'язкопружності, у якому коефіцієнт Пуассона вважається дійсним, а об'ємний модуль – комплексною величиною. Коефіцієнт тепловіддачі на зовнішній і внутрішній поверхнях оболонки вважаються однаковими і дорівнюють $\alpha_S = 4$ Вт/(м² · °С), а коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 0,36$ Вт/(м · °С).

Коливання оболонки розраховуються за наявності попереднього навантаження $N_{xx}^0 = 20$ кН/м, тоді на основній формі коливань ($m = 1$) власна частота коливань дорівнює $f_1 = 9754,9$ Гц. Розрахунки проводяться в околі цієї частоти. На рис. 2 показано розподіли прогину та температури вздовж осевої координати. Під дією зовнішнього тиску на оболонку з амплітудою $q' = 880$ Н/м² (при $q'' = 0$) максимальний прогин на першій формі коливань досягається в центрі оболонки і становить $w_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-5}$ м, що приблизно дорівнює 0,03 від товщини оболонки. Максимальна температура вібророзігріву також досягається в цій точці й дорівнює $\theta_{\max} = 96,41$ °С.

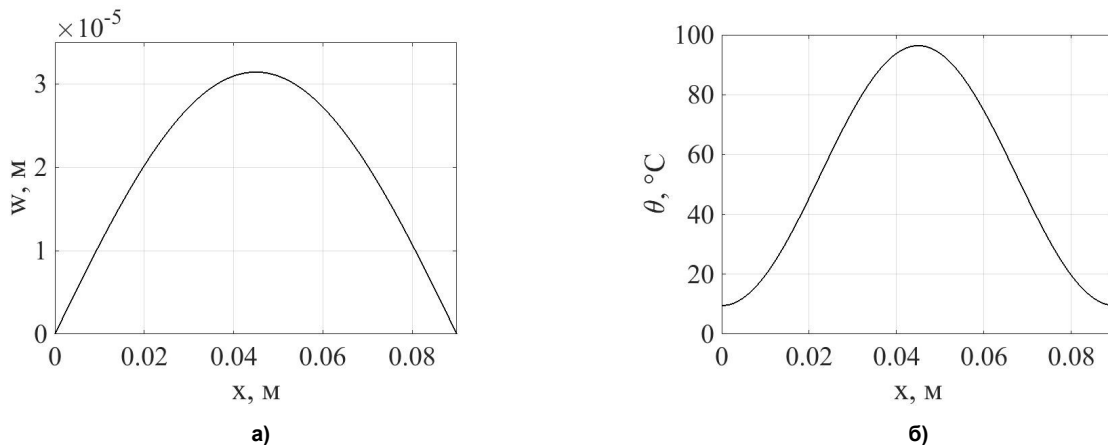


Рис. 2

Для поліетилену, який обрано як матеріал оболонки, температура плавлення становить 120°С. Тому в роботі критична величина температури розігріву θ_{cr} обирається такою, що дорівнює 100°С, при цьому спостерігається помітне розм'якшення даного еластомерного матеріалу.

На рис. 3 побудовано амплітудно- і температурно-частотні характеристики коливань оболонки для точки з координатою $x = L/2$ на першій моді коливань в околі першої резонансної частоти за наявності попереднього зусилля $N_{xx}^0 = 20$ кН/м під дією наступних значень амплітуд зовнішнього тиску $q' = 500$ Н/м² (штрих-пунктирна лінія), $q' = 700$ Н/м² (суцільна лінія) та $q' = 880$ Н/м² (штрихована лінія), відповідно. Рис. 3, а ілюструє зростання амплітуди прогину при зростанні амплітуди зовнішнього навантаження при фіксованому значенні попередніх напружень. Поведінка типова для конструкцій з в'язкопружних еластомерних матеріалів. Із рис. 3, б видно, що на резонансі зі збільшенням амплітуди зовнішнього тиску температура різко зростає, а критичне значення зовнішнього навантаження q_{cr} визначається як навантаження, при якому температура вібророзігріву досягає значення θ_{cr} .

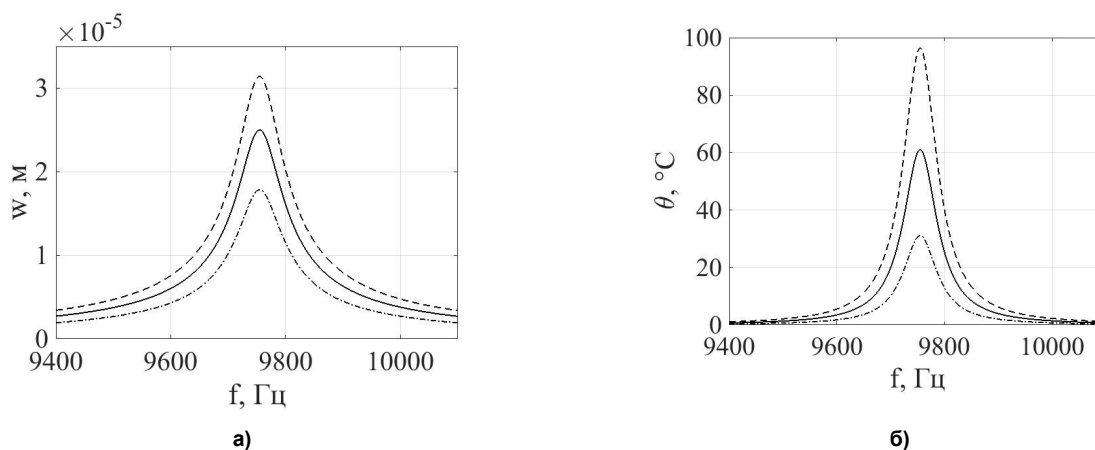


Рис. 3

На рис. 4 зображено амплітудно- і температурно-частотні характеристики коливань оболонки в точці максимальних переміщень і температур, тобто при $x = L/2$, в околі першої резонансної частоти при амплітуді зовнішнього навантаження $q' = 880 \text{ Н/м}^2$ за наступних значень попереднього навантаження $N_{xx}^0 = 0$ (штрих-пунктирна лінія), $N_{xx}^0 = 20 \text{ кН/м}$ (суцільна лінія) та $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$ (штрихована лінія), відповідно.

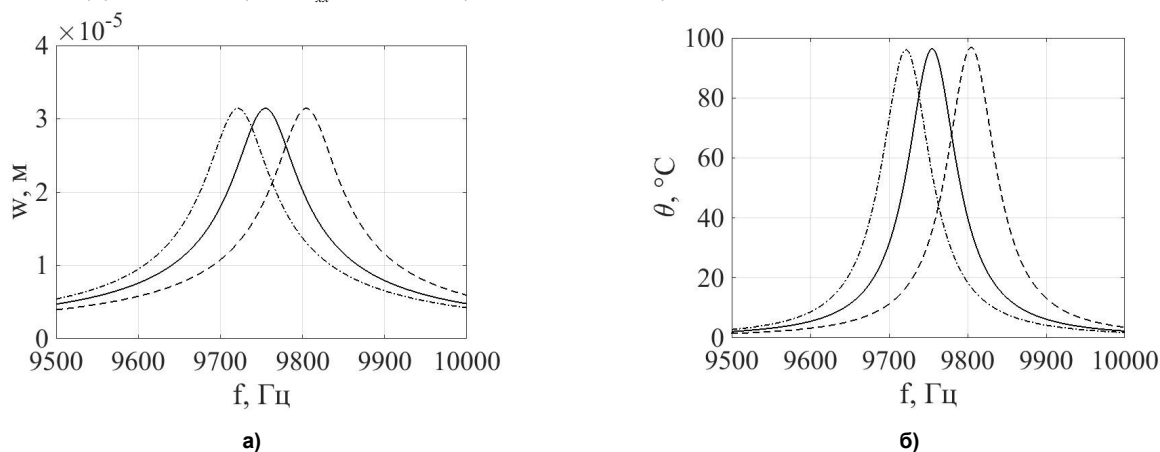


Рис. 4

На рис. 4, а спостерігається ефект зсуву резонансної частоти вправо при збільшенні величини попереднього напруження в оболонці, але при цьому амплітуда прогину не змінюється ($w_{\max} = 3,14 \cdot 10^{-5} \text{ м}$), що відповідає відомому теоретичному та експериментальному результату. Аналогічна ситуація спостерігається і для ТЧХ (рис. 4, б). Зсув частотної кривої вправо при збільшенні попереднього зусилля не супроводжується значним підвищенням температури. Максимальна температура досягається при $N_{xx}^0 = 50 \text{ кН/м}$ і становить $\theta_{\max} = 96,91^\circ\text{C}$.

Висновки. Представлено постановку та аналітичний розв'язок зв'язаної термомеханічної задачі про вимушені осесиметричні резонансні коливання в'язкопружної еластомерної кругової циліндричної оболонки при попередньому навантаженні. Отримано розв'язок стаціонарної задачі механіки та задачі теплопровідності для кругової циліндричної оболонки шарнірно закріпленої по контуру, що перебуває під дією зовнішнього моногармонічного навантаження.

Для першої (найбільш енергоємної) моди згинних коливань досліджено вплив попередніх напружень, а також рівня зовнішнього тиску на амплітудно- та температурно-частотні характеристики. Дослідження проведені для широких інтервалів значень попередніх зусиль та амплітуд зовнішнього тиску. Вивчено вплив попереднього напруженого стану на розподіли прогину та температури для циліндричної оболонки.

Список використаних джерел:

1. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки / Л. Г. Доннелл. – Москва : Наука, 1982. – 568 с.
2. Карнаухов В. Г. Термомеханика предварительно деформированных вязкоупругих тел / В. Г. Карнаухов, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1990. – 304 с.
3. Карнаухов В. Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – Киев : Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В. Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, Б. П. Гуменюк. – Киев : Наук. думка, 1985. – 288 с.
5. Карнаухов В. Г. Влияние предварительного деформирования на резонансные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругого цилиндра конечной длины / В. Г. Карнаухов, И. К. Сенченков, О. П. Червинко // Прикл. механика, 1997. – Т. 33, № 1. – С. 39–42.
6. Потураев В. Н. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / В. Н. Потураев, В. И. Дырда, В. Г. Карнаухов. – Киев : Наук. думка, 1987. – 288 с.
7. Zhuk Y. O. Monoharmonic approach to investigation of the vibrations and self-heating of thin-wall inelastic members / Y. O. Zhuk, I. K. Senchenkov // Jour. of Civil Engineering and Management, 2009. – Vol. 15. – P. 67–75.

Y. Zhuk, Dr Hab., Prof.,
O. Ostos, Associate Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

PRESTRESS EFFECT ON THE THERMOMECHANICAL RESPONSE OF VISCOELASTIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL UNDER HARMONIC LOADING

The problem of forced resonant vibrations and dissipative heating of a hinged viscoelastic elastomeric circular cylindrical shell is considered. The problem statement is based on the use of Kirchhoff–Love hypotheses and the concept of complex modules used to describe the cyclic reaction of a viscoelastic material to a harmonic loading. In the axisymmetric setting, it is assumed that there is a membrane force as a consequence of the applied tensile or prestress. The problem is solved in two stages: first the problem of mechanics is solved, and then for the found amplitudes of kinematic and force characteristics the dissipative function is constructed and both the steady-state and transient thermal problem is solved. As a result of solving the steady-state thermal problem, the amplitude-frequency and temperature-frequency curves are built.

Keywords: prestress, resonant vibrations, complex modules, dissipative heating, cylindrical shell.

УДК 539.3

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.10.42-46>

Я. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
А. Тарасов, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: y.zhuk@i.ua

КОМПЕНСАЦІЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ І ВІБРОРОЗІГРІВУ ПОДАТЛИВОЇ НА ЗСУВ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ НЕПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОАКТУАТОРАМИ

Розглянуто задачу про компенсацію осесиметричних резонансних коливань податливої на зсув непружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні. Задача розв'язується в уточненій постановці з урахуванням деформації поперечного зсуву, інерції повороту нормального елемента та температурної залежності властивостей матеріалу. Постановка задачі ґрунтується на використанні амплітудних визначальних співвідношень для циклічно деформованого матеріалу та концепції комплексних модулів. Ці модулі для п'єзопасивного та п'єзоактивного матеріалів вважаються функціями температури. Нелінійна задача розв'язується чисельно за допомогою ітераційного підходу. Досліджується можливість активного демпфірування вимушених коливань шляхом використання п'єзоактуатора з урахуванням деформації зсуву.

Ключові слова: резонансні коливання, дисипативний розігрів, циліндрична оболонка, п'єзоактуатор, зсув.

Вступ. Шаруваті пластини й оболонки, що містять шари активного (напр., п'єзоактивного) матеріалу, широко використовуються в сучасних високотехнологічних застосуваннях, композитних, мікро- і наномеханічних елементах конструкцій. Мета введення шарів п'єзоактивних сенсорів і актуаторів полягає в можливості активно вливати на режими функціонування конструкцій, забезпечувати найбільш ефективне використання ресурсу і запобігати небажаним режимам роботи, що можуть призводити до її руйнування. Такі елементи часто перебувають під дією інтенсивних циклічних, зокрема, гармонічних навантажень у білярезонансній області, унаслідок чого в конструкції встановлюється режим високоінтенсивних гармонічних коливань на частоті зовнішнього збудження. При цьому внаслідок гістерезисних втрат частина механічної енергії незворотно переходить у тепло, що за певних умов може викликати істотні рівні розігріву. Це явище дисипативного розігріву несе додаткову загрозу втрати роботоздатності елемента конструкції (особливо п'єзоактивного), оскільки при розігріві вище температури Кюрі відбувається деполяризація п'єзоелектрика і п'єзоэффект зникає. Для якнайточнішого опису складної механічної, електричної і теплової поведінки тонкостінних елементів конструкцій необхідно залучати моделі зв'язаної термоелектромеханіки при гармонічному деформуванні [3, 4, 7]. При цьому важливо враховувати деформації зсуву, оскільки така уточнена постановка задачі дозволяє точніше визначати механічний, тепловий і електричний стан шаруватого елемента конструкції [5].

У статті досліджується вплив урахування деформації зсуву і температури вібророзігріву на амплітудно- і температурно-частотні характеристики та активне демпфірування резонансних коливань оболонки за допомогою п'єзоактуаторів. У випадку жорстко закріпленої оболонки вивчається можливість компенсації зовнішнього механічного збудження шляхом подачі відповідного електричного потенціалу, що змінюється за гармонічним законом, на електроди п'єзоактуатора визначених геометричних розмірів.

Постановка задачі. Розглядається тришарова циліндрична оболонка, яка складається з пасивного (без п'єзоэффекту) трансверсально ізотропного в'язкопружного шару товщиною h_0 і жорстко скріплених з його поверхнею п'єзоелектричних шарів товщиною h_1 . Оболонка довжини ℓ , віднесена до ортогональної системи координат α, θ, z з координатою $z = 0$ на серединній поверхні радіуса R пасивного шару. П'єзошари (актуатори) виготовлені з протилежно поляризованої по товщині в'язкопружної п'єзокераміки з однаковими властивостями, за винятком п'єзомодулів, які містять протилежні знаки. Для конкретності вважаємо, що внутрішній п'єзошар ($z \leq -h_0/2$) характеризується п'єзомодулем $+d_{31}$, а зовнішній ($z \geq -h_0/2$) п'єзошар $-d_{31}$. На поверхнях п'єзошарів нанесені суцільні електроди, які нескінченно тонкими коловими розрізами з повздовжніми координатами α_1, α_2 розділені на ділянки. Електроди, що контактують з поверхнями пасивного шару, підтримуються при нульовому електричному потенціалі $\varphi(\pm h_0/2) = 0$.

Оболонка навантажена поверхневим тиском $q_z = q_0(a) \cos \omega t$, що гармонічно змінюється за часом t з коловою частотою ω , близькою до резонансної. Для нейтралізації дії цього навантаження до електродованих колових ділянок на поверхнях $z = \pm(h_1 + h_0/2)$ шириною $\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ з тією ж частотою ω і протилежною фазою підводиться різниця

потенціалів з амплітудою $\pm V_\alpha$. На ділянках $\alpha < \alpha_1$ і $\alpha > \alpha_2$ електроди закорочені ($V_\alpha = 0$). Торці оболонки вільні в тангенціальному і жорстко закріплені в поперечному напрямках. На її граничних поверхнях реалізуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем температури \dot{O}_n . В'язкопружна поведінка пасивного та п'єзоактивного матеріалів моделюється з використанням концепції комплексних модулів, складові яких залежать від температури вібророзігріву.

Повна постановка досліджуваної задачі розвинута, зокрема, у працях [4, 5, 7], тому наведемо тут постановку в скороченому вигляді. Застосуємо теорію шаруватих оболонок типу С. П. Тимошенка, у якій враховується не тільки деформації поперечного зсуву, а й інерція повороту нормального елемента. Вважаємо, що при описі електричної поведінки п'єзошарів складовими вектора індукції D_α і D_θ можна знехтувати, а нормальна складова $D_z = \text{const}$ у п'єзошарах не залежить від товщинної координати z [4, 7]. Унаслідок малої товщини оболонки температуру вважаємо сталою за товщинною координатою.

Використовуючи концепцію комплексних модулів і записуючи визначальні співвідношення для гармонічно деформованого матеріалу в термінах комплексних амплітуд, приходимо до постановки задачі, що складається із рівнянь:

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} + \rho_* \omega^2 u = 0; \quad \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \rho_{**} \omega^2 w + q_z = 0; \quad \frac{dM_\alpha}{d\alpha} - Q_\alpha + \rho_{**} \omega^2 \psi_\alpha = 0, \quad (1)$$

визначальних співвідношень для зусиль і моментів

$$N_\alpha = C_{11} \varepsilon_\alpha + C_{12} \varepsilon_\theta; \quad N_\theta = C_{12} \varepsilon_\alpha + C_{11} \varepsilon_\theta; \quad Q_\alpha = k_S C_{44} \varepsilon_{\alpha z}; \\ M_\alpha = D_{11} \kappa_\alpha + M_E; \quad M_\theta = D_{12} \kappa_\alpha + M_E, \quad (2)$$

залежностей між амплітудними значеннями деформацій і переміщень

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}; \quad \kappa_\alpha = \frac{d\psi_\alpha}{d\alpha}; \quad \chi_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha}; \quad \varepsilon_{\alpha z} = \psi_\alpha - \chi_\alpha, \quad (3)$$

виразів для електричної індукції відповідно у внутрішньому і зовнішньому п'єзошарах

$${}^{1,2}D_z = -b_{33} \frac{V_\alpha}{h_1} \pm b_{31} (\varepsilon \mp h_1 \kappa_\alpha) \quad (z \leq -h_0/2, z \geq h_0/2), \quad (4)$$

усередненого за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_S}{\lambda H} (T - T_c) + \frac{\omega}{2\lambda H} \langle W \rangle, \quad (5)$$

з дисипативною функцією

$$\langle W \rangle = N'_\alpha \varepsilon'_\alpha - N'_\alpha \varepsilon''_\alpha + N'_\theta \varepsilon'_\theta - N'_\theta \varepsilon''_\theta + M'_\alpha \kappa'_\alpha - M'_\alpha \kappa''_\alpha + Q'_\alpha \varepsilon'_{\alpha z} - Q'_\alpha \varepsilon''_{\alpha z} + \\ + ({}^1D_z'' + {}^2D_z'') V'_\alpha - ({}^1D_z' + {}^2D_z') V''_\alpha. \quad (6)$$

Механічні граничні умови мають вигляд

$$N_\alpha = 0; \quad w = 0; \quad \psi_\alpha = 0. \quad (7)$$

Граничні й початкові умови для рівняння теплопровідності такі:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \alpha_{0,t} (T - T_c) \quad (\alpha = 0, l); \quad T = T_0 \quad (t = 0). \quad (8)$$

У співвідношеннях (1) – (8) використано позначення, що відповідають вищевведеним:

$$C_{1n} = c_{1n} h_0 + 2c_{1n}^E h_1; \quad C_{44} = G_{\alpha z} h_0 + 2c_{44}^E h_1; \quad D_{1n} = (c_{1n} h_0^3 + 2c_{1n}^E \bar{h}_{13} + 2\gamma_{33} h_1^3) / 12; \quad c_{11} = E / (1 - \nu^2); \\ c_{12} = \nu c_{11}; \quad c_{11}^E = 1 / [s_{11}^E (1 - \nu_E^2)]; \quad c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E; \quad \nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E; \quad c_{44}^E = 1 / (s_{44}^E - d_{15}^2 / \varepsilon_{11}^T); \quad b_{31} = d_{31} / [s_{11}^E (1 - \nu_E)]; \\ b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2); \quad k_p^2 = 2d_{31} b_{31} / \varepsilon_{33}^T; \quad \gamma_{33} = b_{31}^2 / b_{33}; \quad \rho_* = 2\rho_1 h_1 + \rho_0 h_0; \quad \rho_{**} = (2\rho_1 \bar{h}_{13} + \rho_0 h_0^3) / 12; \\ \bar{h}_{13} = 4h_1^3 + 6h_1^2 h_0 + 3h_1 h_0^2; \quad \bar{h}_1 = (h_0 + h_1) / 2; \quad H = 2h_1 + h_0; \quad M_E = -2h_1 b_{31} V_\alpha; \quad \varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta.$$

Тут $s_{kk}^E = s_{kk}^s (1 - i\delta_{kk}^s)$, $d_{ik} = d'_{ik} (1 - i\delta_{ik}^d)$, $\varepsilon_{kk}^T = \varepsilon'_{kk} (1 - i\delta_{kk}^e)$ – залежні від температури комплексні податливості, п'єзомодулі та діелектричні проникності п'єзокераміки; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона, а $E = E' + iE''$ та $G_{\alpha z} = G'_{\alpha z} + iG''_{\alpha z}$ – температурнозалежні комплексні модулі Юнга і поперечного зсуву пасивного матеріалу; k_S – коефіцієнт поперечного зсуву; $w = w' + iw''$, $u = u' + iu''$ і $\psi_\alpha = \psi'_\alpha + i\psi''_\alpha$ – комплексні амплітуди прогину, поздовжнього переміщення і кута повороту недеформованого нормального елемента; N_α , N_θ , Q_α і M_α , M_θ – аналогічні амплітуди зусиль і згинальних моментів; ρ_0 і ρ_1 – питомі густини пасивного шару і п'єзоактуторів; λ і a – усереднені коефіцієнти тепло- і температуропровідності; $\alpha_s = (\alpha_+ + \alpha_-) / 2$; α_\pm , $\alpha_{0,t}$ – коефіцієнти теплообміну на відповідних поверхнях і торцях оболонки; T_0 – початкова температура оболонки. Тут і далі застосовуються стандартні позначення комплексних величин $a = a' + ia''$, $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$, $i = \sqrt{-1}$.

Побудова розв'язання задачі. Оскільки після перехідного періоду в системі встановлюється режим коливань, що близький до гармонічного із частотою зовнішнього збудження, то далі будемо будувати стаціонарний коливальний

розв'язок задачі. Сама задача є суттєво нелінійною, тому можливе тільки чисельне розв'язання поставленої задачі. Підстановка рівнянь (2) і (3) у рівняння коливань (1) приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду (9) відносно невідомих комплексних величин $N_\alpha, Q_\alpha, M_\alpha, u, w, \Psi_\alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{dN_\alpha}{d\alpha} &= -\rho_* \omega^2 u; \\ \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} &= \frac{1}{R} \left(\tilde{C}_{12} N_\alpha - \tilde{C}_{11} \frac{W}{R} \right) - q_z - \rho_* \omega^2 w; \\ \frac{dM_\alpha}{d\alpha} &= Q_\alpha - \rho_{**} \omega^2 \Psi_\alpha; \\ \frac{d\Psi_\alpha}{d\alpha} &= \tilde{J}_D (M_\alpha - M_E); \\ \frac{du}{d\alpha} &= \tilde{J}_C N_\alpha - \tilde{C}_{12} \frac{W}{R}; \\ \frac{dw}{d\alpha} &= -\Psi_\alpha + J_{SD} Q_\alpha; \end{aligned} \tag{9}$$

де $J_C = 1/C_{11}$, $J_D = 1/D_{11}$, $\nu_C = C_{12}/C_{11}$, $\tilde{C}_{11} = C(1 - \nu^2)$, $J_{SD} = 1/(k_s C_{44})$.

У досліджуваній задачі враховуються залежності електромеханічних властивостей матеріалів п'єзоактивних і п'єзопасивних шарів від температури, яка постійно зростає внаслідок дисипативного розігріву. Тому рівняння вимушених коливань оболонки (9) і теплопровідності (5) будуть пов'язаними залежностями матеріалу від температури і за дисипативною функцією (6). Як результат отримуємо зв'язану нелінійну постановку задачі, яка розв'язується чисельно. Для цього ми застосовували модифікований у [4, 5] для задач зв'язаної циклічної термоелектромеханіки метод покорокового інтегрування за часом. Згідно з цим методом на кожному кроці за часом система рівнянь електромеханіки (9) з граничними умовами (7) інтегрується чисельним методом дискретної ортогоналізації [2] за просторовими координатами. Для розв'язання системи звичайних диференціальних рівнянь застосовується бібліотечна програма мовою програмування Fortran. Стандартною частиною методики є те, що на першому кроці за часом розв'язується задача при ізотермічних характеристиках матеріалів. На другому кроці обчислюється дисипативна функція (6) і задача теплопровідності (5), (8) розв'язується методом скінченних різниць з використанням явної схеми. Далі, на основі отриманого розподілу температури, обчислюються фізико-механічні характеристики матеріалів, за якими визначаються відповідні жорсткісні характеристики оболонки, і процес повторюється на наступному кроці за часом. Для кращої числової збіжності при формулюванні рівнянь задачі для чисельної реалізації використовувались безрозмірні просторова $x = \alpha/\ell$ і часова $\tau = at/\ell^2$ координати та параметри теплообміну $(\gamma_s)_{0,\ell} = (a_s)_{0,\ell}/\lambda$.

Результати розрахунків та їхній аналіз. Для розв'язання питання про принципову можливість компенсації коливань, що викликані механічним гармонічним навантаженням, досліджувалась модельна задача гармонічного навантаження оболонки постійним тиском амплітуди $q_z(\alpha) = q_0$. У цьому випадку, як показано в [5], амплітуду компенсаційного електричного потенціалу для амплітуди зовнішнього тиску q_0 визначають за формулою

$$V_\alpha = \kappa_\alpha (\Delta_\alpha) q_0, \tag{10}$$

у якій κ_α – коефіцієнт керування. Значення κ_α знаходять за формулою

$$\kappa_\alpha = \left| w_{q \max}^1 \right| / \left| w_{E \max}^1 \right|,$$

де $\left| w_{q \max}^1 \right|$ і $\left| w_{E \max}^1 \right|$ – максимальні амплітуди прогину, розраховані на частоті лінійного резонансу, отримані на основі розв'язання еталонних задач при $q_0 = 1$ Па, $V_\alpha = 0$ і $q_0 = 0$, $V_\alpha = 1$ В, відповідно. Отримане у такий спосіб значення коефіцієнта керування відповідає максимальному значенню амплітуди механічних коливань.

Для ефективного згасання механічно збуджуваних коливань необхідно забезпечити протифазність електричного потенціалу, що підводиться до електродів актуатора. Це враховується зсувом фази $V_\alpha \cos(\omega t + \pi) = -V_\alpha \cos(\omega t)$. Числові розрахунки проводились в околі основної частоти, оскільки вона є найбільш енергоємною згинною модою коливань оболонки. Пасивний шар виготовлено з полімерного композиту [6], а п'єзоактуатори – із в'язкопружної п'єзокераміки ЦТСтБС-2 [1]. Експериментальні залежності їхніх електромеханічних характеристик від температури апроксимуються такими виразами [1]:

$$\begin{aligned} E' &= (1672 - 118,6T) \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad E'' = (15,01 - 1,205T) \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad G_{\alpha z} = E/2(1 + \nu); \\ s'_{11} &= 12,5(1 + 0,377 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad s'_{44} = 39,7(1 + 0,5458 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \\ \delta_{11}^s &= 0,16(1 + 0,6155 \cdot 10^{-3} \bar{T} + 0,4158 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2); \quad \bar{T} = T - T_0; \quad \nu_E = 0,37; \\ \delta_{44}^s &= 0,14(1 + 8,33 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-2}; \quad d'_{31} = -1,6(1 + 0,219 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \\ \delta_{31}^d &= 0,4(1 + 1,198 \cdot 10^2 \bar{T} + 1,823 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2}; \quad \nu = 0,3636; \end{aligned}$$

$$d'_{15} = 4,5(1 + 0,9722 \cdot 10^{-3} \bar{T}) \cdot 10^{-10} \text{ Кл/м}; \quad \delta'_{15} = 0,35(1 + 0,3571 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^{-2};$$

$$\varepsilon'_{11} = 18,5\varepsilon_0(1 + 0,4505 \cdot 10^{-2} \bar{T}) \cdot 10^2; \quad \delta^{\varepsilon}_{11} = 0,5(1 + 0,015 \bar{T}) \cdot 10^{-2};$$

$$\varepsilon'_{33} = 21\varepsilon_0(1 + 0,111 \cdot 10^{-3} \bar{T} + 0,8426 \cdot 10^{-4} \bar{T}^2) \cdot 10^2; \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\delta'_{33} = 0,35(1 + 0,0119 \cdot \bar{T} + 0,119 \cdot 10^{-3} \bar{T}^2) \cdot 10^{-2}; \quad \rho_0 = 929 \text{ кг/м}^3; \quad \rho_1 = 7520 \text{ кг/м}^3;$$

$$\lambda = 0,45 \text{ Вт/(м}^\circ\text{C)}.$$

Коефіцієнт поперечного зсуву вибирався, виходячи з міркувань найкращої апроксимації згину $k_s = 5/6$ [2]. Геометричні параметри оболонки такі: $R = \ell = 0,2 \text{ м}$; $h_0 = 0,04 \text{ м}$; $h_1 = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$.

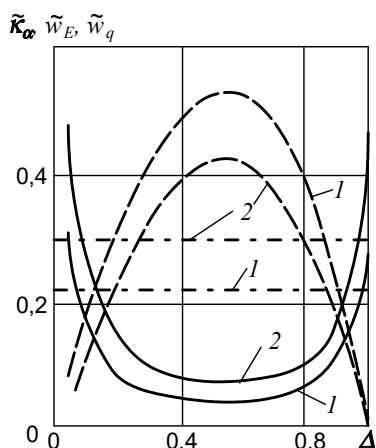


Рис. 1

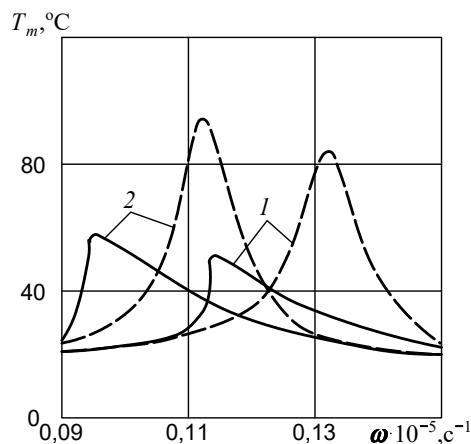


Рис. 2

На рис.1 кривими 1, 2 показано залежності максимальних амплітуд прогину від відносного параметра ширини кільцевого актуатора Δ , $\Delta = \Delta_x / \ell$, де Δ_x – фізична ширина актуатора. Штрих-пунктирні лінії відповідають прогину в середній точці оболонки $\tilde{w}_q = |w_q^1(0,5)| \cdot 10^8 \text{ м}$ при механічному навантаженні з амплітудою $q_0 = 1 \text{ Па}$ при $V_\alpha = 0$, а штрихові лінії – прогину $\tilde{w}_E = w_E^1(0,5) \cdot 10^6 \text{ м}$ при підведенні до актуатора електричного потенціалу $V'_\alpha = 1 \text{ В}$, $V''_\alpha = 0$ при $q_0 = 0$, тобто випадку суто електричного збудження коливань за законом косинуса в часі. Суцільними лініями показано криві при коефіцієнті керування $\kappa_\alpha = 10$. З практичних міркувань і міркувань симетрії розташування актуатора вибиралась таким чином, щоб його середина збігалась з координатою ($x = 0,5$) максимальних нормальних прогинів оболонки.

Слід зазначити, що врахування деформації зсуву приводить до зсуву амплітудно-частотної характеристики коливань в область менших частот. Тому для дослідження впливу врахування цього фактора розрахунки проводились на резонансній частоті в обох випадках. Наприклад, у випадку класичної постановки задачі частота зовнішнього збудження вибиралась такою, що дорівнює першій резонансній частоті $\omega_p = 0,132 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ (залежності для цього випадку показано кривими 1 всюди далі по тексту статті), а при врахуванні деформації поперечного зсуву вибиралась відповідно частота $\omega_p = 0,113 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ (тут і далі результати позначено кривими 2).

Контроль коливань оболонки за температурою вібророзігріву при стаціонарних коливаннях здійснювався за допомогою температурно-частотних характеристик, показаних на рис. 2 для точки максимальної температури $T_m = T(0,5)$. Як і раніше, криві 1 відповідають розв'язку задачі в класичній постановці, а криві 2 – постановці з урахуванням деформації поперечного зсуву для механічно навантаженої оболонки з амплітудою $q_0 = 0,4 \cdot 10^4 \text{ Па}$ і коефіцієнтом теплообміну $\gamma_3 = 0,4$. Видно, що максимальна температура, розрахована в межах класичної постановки задачі, виявляється завищеною.

Ефекти врахування термомеханічної зв'язаності, деформації поперечних зсувів і компенсації механічно збуджуваних коливань показано на рис. 3. Для збудження на відповідних резонансних частотах на рисунку показано розподіл амплітуди прогинів $\tilde{w} = |w| \cdot 10^5 \text{ м}$ уздовж твірної оболонки при розв'язанні задачі в класичній (рис. 3, а) та уточненій (урахування деформацій зсуву) (рис. 3, б) постановках. Тут штрихові криві розраховані при ізотермічних електромеханічних характеристиках, а суцільні – при врахуванні температурної залежності фізико-механічних властивостей матеріалів. Штрих-пунктирні криві розраховані для режиму компенсації (згасання) механічно збуджуваних коливань при сумісній протифазній дії механічного навантаження $q_0 = 0,4 \cdot 10^4 \text{ Па}$ та електричних потенціалів $V'_\alpha = 16,7 \text{ В}$ (рис. 3, а) $V'_\alpha = 28 \text{ В}$ (рис. 3, б).

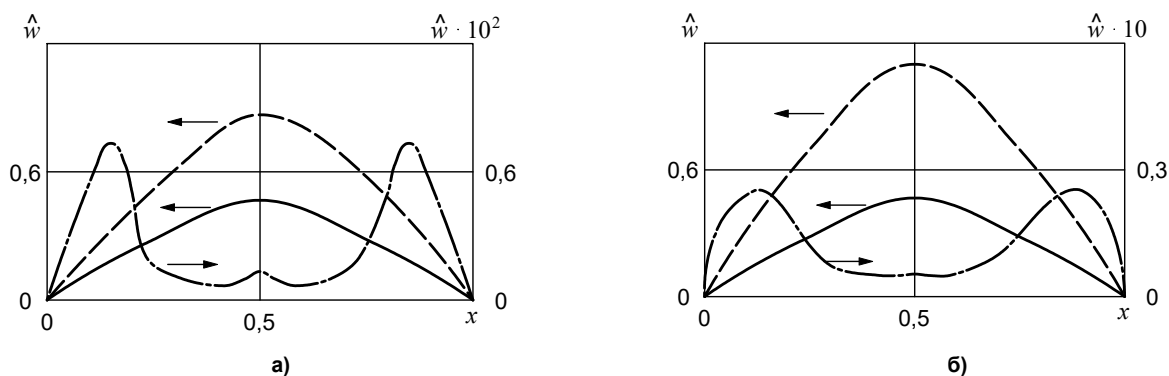


Рис. 3

Аналіз кривих, наведених на рис. 1–3, і проведені числові розрахунки дозволяють зробити декілька висновків теоретичного і практичного характеру. *По-перше*, урахування зв'язаності механічних і теплових полів, а також деформацій поперечного зсуву дозволяє набагато точніше описати характер поведінки багат шарових елементів конструкцій, які складаються з п'єзоактивних і п'єзопасивних шарів. Зокрема, урахування деформацій поперечного зсуву і температурної залежності електромеханічних характеристик пасивного і п'єзоактивного матеріалу (криві 2) призводить до зміщення амплітудних і температурних частотних характеристик в бік зменшення резонансної частоти, а також до збільшення прогинів і температури вібророзігріву на цій уточненій резонансній частоті згинних механічних коливань оболонки. *По-друге*, при жорсткому закріпленні країв досліджуваної оболонки існує актуатор оптимальних розмірів ($\Delta = 0,5$; $a_1 = 0,215\ell$; $a_2 = 0,785\ell$), який реалізує максимальні прогини згинної моди коливань при мінімальній різниці електричних потенціалів на електродах актуатора. Такий актуатор найефективніший при компенсації вимушених механічних коливань оболонки, оскільки він при подачі на його електроди відповідної різниці потенціалів у протифазі до збудження викликає однакові за амплітудою та протилежні за знаком прогини оболонки, загасаючи прогини, зумовлені механічним збудженням. *По-третє*, у результаті сумісної протифазної дії поверхневого тиску і компенсуючої для нього різниці електричних потенціалів на частотах класичного (рис. 3, а) та уточненого (рис. 3, б) резонансів амплітуди механічних прогинів недемпфрованої оболонки зменшуються майже на два порядки. При цьому температура вібророзігріву залишається близькою до початкової. Цей результат дозволяє здійснювати активний контроль вимушених коливань тонкостінних елементів конструкцій шляхом введення додаткових п'єзоактивних шарів і керування електромеханічною поведінкою активного шару, подаючи на його електроди компенсуючу різницю потенціалів, що змінюється за відповідним законом.

Висновки. Представлено постановку і числове розв'язання задачі про вимушені осесиметричні резонансні коливання податливої на зсув непружної циліндричної оболонки з п'єзоактуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні. Розроблено методику розв'язання задачі в уточненій постановці з урахуванням деформації поперечного зсуву, інерції повороту нормального елемента та температурної залежності властивостей матеріалу. Нелінійна задача розв'язується чисельно за допомогою ітераційного підходу. Показано, що врахування зв'язаності механічних і теплових полів, а також деформацій поперечного зсуву дозволяє набагато точніше розрахувати амплітудно- і температурно-частотні характеристики коливань шаруватої оболонки. Встановлено, що при жорсткому закріпленні країв досліджуваної оболонки існує актуатор оптимальних розмірів, який реалізує максимальні прогини згинної моди коливань при мінімальній різниці електричних потенціалів на електродах актуатора. Такий актуатор є найефективнішим при компенсації вимушених механічних коливань оболонки. У такий спосіб показана можливість активного демпфування вимушених коливань шляхом використання п'єзоактуатора із урахуванням деформації зсуву. У результаті сумісної протифазної дії поверхневого тиску і компенсуючої для нього різниці електричних потенціалів на частотах класичного й уточненого резонансів амплітуди механічних прогинів недемпфрованої оболонки зменшуються майже на два порядки.

Список використаних джерел:

1. Болкисев А. М. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры / А. М. Болкисев, В. Л. Карлаш, Н. А. Шульга // Прикл. механика, 1984. – Т. 20, № 7. – С. 70–74.
2. Григоренко Я. М. Теория оболочек переменной жесткости / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – К.: Наук. думка, 1981. – 516 с.
3. Карнаухов В. Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
4. Карнаухов В. Г., Михайленко В. В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. Осесиметричні резонансні коливання і вібророзігрів податливої на зсув в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами / І. Ф. Киричок, Я. О. Жук, О. А. Чернюшок, А. П. Тарасов // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2019. – Т. 62, № 2. – С. 53–61.
6. Стивенс К. Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы / К. Стивенс // Прикл. механика, сер. Е. Тр. Америк. об-ва инженеров-механиков. – М.: Мир, 1969. – № 4. – С. 168–173.
7. Karnaukhov V. G. Thermomechanics of Inelastic Thin-Wall Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Rev.) / V. G. Karnaukhov, I. F. Kyrychok, V. I. Kozlov // Int. App. Mech., 2017. – Vol. 53, No 1. – P. 9–74.

Надійшла до редколегії 20.09.20

Y. Zhuk, Dr Hab., Prof.,
A. Tarasov, PhD Student.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

DAMPING OF THE AXISYMMETRIC RESONANT VIBRATION AND DISSIPATIVE HEATING OF THE FIXED SHEAR COMPLIANT INELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH PIEZOACTUATOR

Damping problem for axisymmetric resonant vibration of the shear compliant inelastic cylindrical shell with piezoactuator under electromechanical monoharmonic excitation is considered. The problem is solved for the refined problem statement accounting for shear strain, rotation inertia and thermal dependence of the material properties. Problem statement is based on the application of the amplitude constitutive relations for cyclically deformed material and complex moduli concept. The moduli for both piezoactive and piezopassive material are considered to be the functions of temperature. The nonlinear problem is solved numerically with the use of the iterative approach. The possibility of active damping of the forced vibration by means of the piezoactuator with account of shear strain is studied.

Keywords: resonant oscillations, dissipative heating, cylindrical shell, piezoactuator, displacement

УДК 539.595

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.11.47-50>

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,
О. Кліменков, асп.,
О. Нефьодов, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: olelim2010@yahoo.com
О. Константінов, канд. фіз.-мат. наук
Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна

ХАРАКТЕР ПРОЯВУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ ПРИ ВІБРАЦІЙНОМУ ЗБУДЖЕННІ РУХУ ЕЛІПСОЇДАЛЬНОГО РЕЗЕРВУАРА З РІДИНОЮ ІЗ ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Розглянуто задачу про вібраційне збудження руху резервуара еліпсоїдальної форми, частково заповненого рідиною. Для побудови моделі використано раніше розроблений метод, що базується на використанні недекартової параметризації області, яку займає рідина, і методи допоміжної області для врахування граничних умов на стінках резервуара над незбуреною вільною поверхнею рідини, куди може потрапляти рідина при збуреному русі. Досліджено ідеальну, нестисливу рідину. Математична модель системи будується на основі варіаційного формулювання задачі у вигляді принципу Гамільтона–Остроградського. Рух вільної поверхні рідини зображено у вигляді розкладу за формами вільних коливань. Амплітудні параметри коливань вільної поверхні рідини разом з параметрами поступального руху резервуара утворюють повну незалежну систему параметрів, для яких знайдено розв'язувальну систему звичайних диференціальних рівнянь. Побудована модель дозволяє враховувати нелінійні властивості системи і відповідає моделі сумісного руху рідини та резервуара, а за своєю структурою в певному сенсі подібна аналогічній моделі для випадку циліндричного резервуара. Практичну реалізацію методу виконано для вібраційного збудження руху системи в горизонтальній площині для випадків розтягнутого і стисненого еліпсоїдальних резервуарів. Аналіз динамічної поведінки системи в різних діапазонах частот збудження руху показав, що така система має властивості системи з м'яким типом нелінійності. Вихід системи на режим усталених коливань не спостерігається. У більшості режимів істотно проявляється модуляція коливань вільної поверхні рідини. Значну увагу приділено вивченню закономірностей зміни періоду модуляції коливань. Встановлено, що через ущільнення спектра коливань рідини зі зростанням хвильових чисел у системі резервуар–рідина для більшості частот спостерігається одночасний істотний вплив декількох частот, що призводить до складних модуляційних обвідних ліній.

Ключові слова: конструкція з рідиною, еліпсоїдальний резервуар, вібраційне збудження, сумісний рух, особливості прояву нелінійностей.

Вступ. Дослідження задач механіки тіл з порожнинами, що частково заповнені рідиною, інтенсивно розвивається, що обумовлене широким використанням подібних конструкцій в інженерних системах. Це насамперед аерокосмічні системи, системи транспортування екологічно і пожежонебезпечних рідин, до яких насамперед належить скраплений газ і радіаційно забруднені рідини. Розвиток нових теоретичних підходів дозволив вивчити багато явищ, які супроводжують формування динамічних властивостей поведінки тіл з рідиною. Проте наявні публікації свідчать про обмеженість досліджень за такими напрямками:

перший, урахування фактора сумісності при зв'язаному русі конструкції і рідини, Переважна більшість досліджень ґрунтується на моделі заданого руху конструкції. Проте при зв'язаному русі найбільш важливим є те, що в системі змінюються частоти коливань, а тому області прояву резонансів стають іншими. Більше того, можливі випадки, коли розташування форм коливань при їхньому розташуванні в порядку зростання частот зміниться [2, 6, 7]. Це докорінно змінює прояв нелінійних властивостей;

другий є продовженням першого і пов'язане зі способом закріплення резервуара. При поступальному чи кутовому русі резервуара в режимі сумісного руху резервуара і рідини розподіл частот може змінитися. Особливо це стосується випадку, коли резервуар здійснює кутові рухи. Наприклад, частота, що відповідає першій антисиметричній формі коливань вільної поверхні рідини в круговому циліндричному резервуарі, залежно від довжин маятникового підвісу може бути за величиною першою, другою або третьою за значенням серед частот коливань вільної поверхні рідини [6, 7];

третій, дослідження нелінійних задач для випадків порожнин нециліндричної форми дотепер супроводжується значними проблемами. Справа в тому, що, на відміну від циліндричної, область при підйомі рідини вище рівня незбуреної вільної поверхні рідини не здійснює рух уздовж стінки, а може значно відійти від неї чи перетинати її. Це відбувається через те, що при формулюванні задачі відповідна інформація про форму стінок над незбуреною вільною поверхнею взагалі не враховується. Водночас це призводить до того, що для збуреного руху рідини починають порушуватися умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа [3–5], що згодом проявляється в нестійкості обчислювальних процедур;

четвертий, в околі можливого прояву резонансних явищ, навіть малі зміни частот збурення призводять до суттєвих змін характеру коливань. З одного боку, це майже завжди призводить до прояву модуляції, з другого боку, частота модуляції коливань значною мірою характеризується наближенням до різних власних частот. Слід також зазначити, що, оскільки розташування частот зі зростанням номера n має характер типу \sqrt{n} , то зі зростанням номера форми частоти все більше ущільнюються. Окрім того, ущільненню сприяє врахування фактора сумісності (це впливає на зростання зазвичай нижчих частот з коловим номером $m = 1$). Оскільки прояв нелінійностей призводить до виникнення коливань за декількома частотами, між якими існує

трансцендентний зв'язок типу \sqrt{n} , то через такий зв'язок між частотами суто усталені коливання в системі стають неможливими. Це підтверджується як практичними результатами, так і теоретичними [8] та експериментальними дослідженнями [1, 9].

Виходячи з такого стану досліджень метою роботи є аналіз прояву нелінійностей для двох різних геометричних форм резервуарів з рідиною (розтягнутого і стисненого по вертикалі еліпсоїдів обертання) при силовому вібраційному збудженні їхнього руху в горизонтальній площині.

Математична модель. Розглядаються нелінійні коливання рідини з вільною поверхнею в резервуарі у формі еліпсоїда обертання. Використовуються такі позначення: τ – область, яку займає рідина; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її незбуреному і збуреному русі; Σ_0 і Σ – границі контакту рідини зі стінками резервуара у збуреному та незбуреному станах ($\Delta\Sigma = \Sigma - \Sigma_0$); $\xi(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини; $\bar{\varepsilon}$ – вектор, що описує поступальний рух резервуара, $r = f(z)$ – рівняння твірної тіла обертання. У недекартовій параметризації використовуються нові змінні $\alpha = r/f(z)$, θ , $\beta = z/H$. Рідина вважається ідеальною, однорідною, нестисловою і в початковий момент часу її рух безвихоровий. Вплив поверхневого натягу на коливання рідини вважається незначним. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками.

Математичне формулювання задачі:

1) умова нерозривності потоку в об'ємі рідини τ :

$$\Delta\varphi = 0 \text{ у } \tau;$$

2) умова неперетікання на межі контакту тіло–рідина Σ з ортом зовнішньої нормалі \bar{n} :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{n} \text{ на } \Sigma;$$

3) умова неперетікання на вільній поверхні рідини S :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial\xi}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial\xi}{\partial\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ на } S;$$

4) динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\bar{\nabla}\varphi)^2 - \bar{\nabla}\varphi \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} - \bar{g} \cdot \bar{r} = 0 \text{ на } S.$$

Отже, задача складається з кінематичних умов 1) – 3) і динамічної граничної умови 4), яка природна для варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського.

Для знаходження розв'язку задачі використовуються розклади невідомих змінних за формами коливань вільної поверхні рідини [5] вигляду

$$\xi = \bar{\xi}(t) + \sum_i a_i \bar{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta); \quad \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha, \beta) T_i(\theta), \quad \text{де } \bar{\psi}_i(\alpha) = \left. \frac{\partial\psi_i}{\partial z} \right|_{\beta=0} = \left(\frac{1}{H} \frac{\partial\psi_i}{\partial\beta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha} \right) \Big|_{\beta=0}.$$

Умова розв'язності цієї задачі для випадку нелінійних збурень записується у вигляді

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_{\Delta\Sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0.$$

При цьому, порівняно з класичною задачею для малих збурень (лінійна задача) у формулюванні задачі ще міститься умова неперетікання на продовженні бічної поверхні $\Delta\Sigma$, куди можуть потрапити гребені поверхневих хвиль. Для виконання цієї умови використовується метод допоміжної області [3–5], за яким спочатку умовно додається рідина до рівня $\Delta\Sigma$, розв'язується задача про визначення форм коливань для збільшеного об'єму, а потім за розв'язання береться значення на перерізі, який відповідає справжньому положенню незбуреної вільно поверхні рідини. Ефективність такого прийому проаналізовано в [5].

Згідно з варіаційним принципом Гамільтона–Остроградського кінематичні граничні умови і вимогу збереження об'єму рідини в її збуреному русі необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу. Це робиться за методикою [4, 5]. Після того, як досягнуто виконання кінематичних умов з варіаційної задачі для вільної системи записуються рівняння Лагранжа другого роду. Нелінійна дискретна модель динаміки сумісного руху тіла із рідиною з вільною поверхнею в амплітудних параметрах a_i набуває такої узагальненої форми:

$$\sum_{n=1}^N p_{mn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{mn}(a_k, t) \ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t), r = \overline{1, N+3},$$

де ε_i – параметри поступального руху резервуара, p_{mn} – квадратна матриця, q_r – вектор розмірності N (кількість ступенів вільності руху вільної поверхні рідини). Вирази для p_{mn} та q_r записуються через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від амплітудних параметрів a_i та узагальнених швидкостей \dot{a}_j .

Аналіз чисельних результатів. Розглянемо сумісний рух еліпсоїдального резервуара обертання з рідиною під дією зовнішньої періодичної сили $Y = A \sin(\omega t)$. Розглядається два варіанти еліпсоїдів: розтягнутий по вертикалі зі співвідношенням півосей $a/b = 0,5$ і стиснений по вертикалі зі співвідношенням півосей $a/b = 2$.

Рух резервуара відбувається лише в горизонтальній площині. Проаналізуємо загальні закономірності поверхневого хвилеутворення. Поведінка системи досліджується за частот $0.5\omega_N$, $0.9\omega_N$, $0.98\omega_N$, $1.0\omega_N$, $1.02\omega_N$ та $1.1\omega_N$, де ω_N – власна частота сумісного руху рідини та резервуара за першою антисиметричною формою, яка залежить від співвідношення їхніх мас. Силкові амплітуди вибрані так, щоб максимальні амплітуди коливань вільної поверхні були в діапазоні $0.15R - 0.2R$, де R – радіус незбуреної вільної поверхні. Під час чисельних розрахунків використано, що маса резервуара становить 0.2 маси рідини. Рівень заповнення резервуара рідиною становить $H = R$ для випадку розтягнутого по вертикалі резервуара і $H = 0.75R$ для випадку стисненого по вертикалі резервуара. Для чисельних розрахунків використовується припущення про те, що довжини мінімальних півосей дорівнюють 1 м.

На рис. 1, 2 показано зміну в часі збурення вільної поверхні рідини на стінці еліпсоїдального резервуара в часі для різних частот силового збудження руху. На рисунках також наведено значення амплітуди сили A , для якої спостерігається таке поверхневе хвилеутворення. Горизонтальна вісь відповідає часу в секундах, вертикальна вісь – збуренню вільної поверхні рідини, віднесеного до радіуса вільної поверхні рідини.

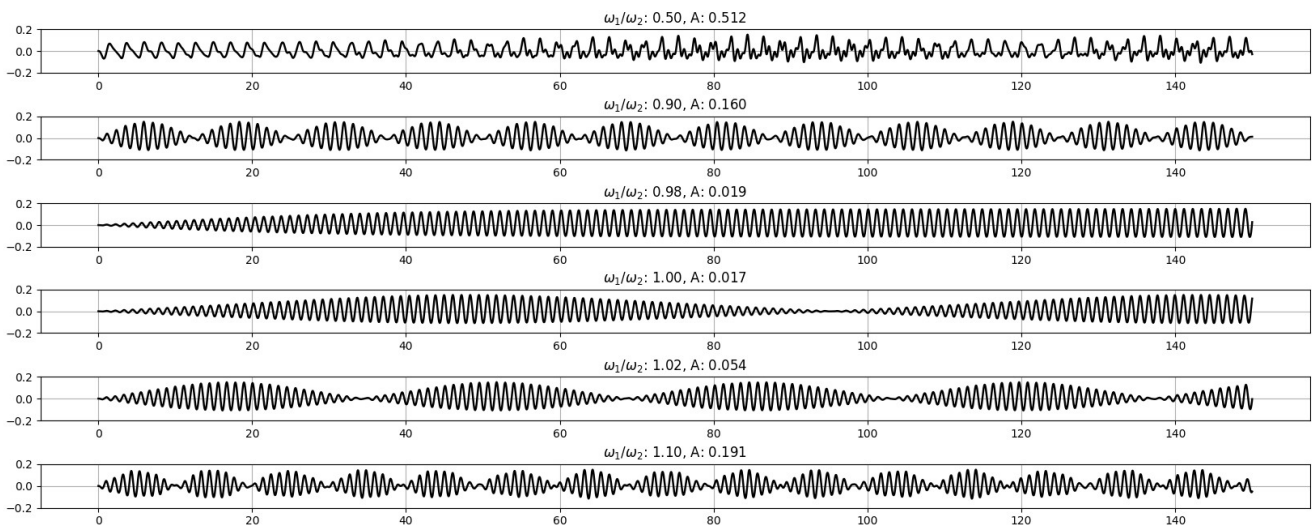


Рис. 1. Збурення рідини на стінці розтягнутого по вертикалі еліпсоїдального резервуара

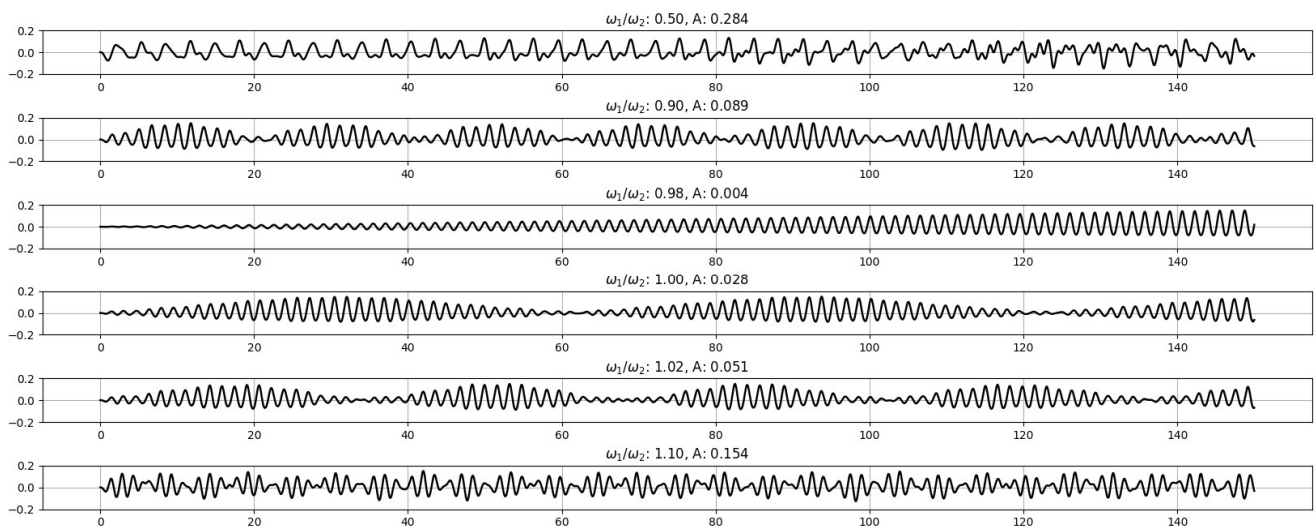


Рис. 2. Збурення рідини на стінці стисненого по вертикалі еліпсоїдального резервуара

Як видно з рис. 1, 2, поведінка зміни амплітуд коливань від часу суттєво відрізняється навіть при малих змінах часу (особливо це помітно для значень співвідношень частот 0,98; 1,0; 1,02). Основні зміни відбуваються (за виключенням співвідношення частот 0,5) через різний прояв модуляції. Ще однією ознакою змін є значення амплітуд силового збудження руху, які надають системі збурення вільної поверхні рідини на рівні 0,2. За цими значеннями можна зробити висновок про те, що найбільші збурення в системі при мінімальних значеннях амплітуд вібраційної

сили спостерігаються для співвідношень частоти 0,98, що свідчить про прояв м'якого типу нелінійності для попережного руху резервуара з рідиною.

Як зазначено в [10], період модуляції насамперед визначається як різниця між частотою збудження і власною частотою. Це більш-менш точно проявляється в дорезонансній зоні. Проте в зарезонансній зоні через ущільнення розміщення частот модуляція коливань набуває більш складної форми, оскільки в її формуванні проявляється внесок більше ніж двох частот. При порівнянні розвитку процесів для розтягнутого і стисненого еліпсоїдів помітно, що впорядкованість коливань для розтягнутого резервуара менша. Наприклад, згідно з [10] характер модуляції коливань при співвідношенні частот 0,9 і 1,1 достатньо подібний, проте для стисненого резервуара ця подібність вже не відображається. Це відбувається через те, що для випадку стисненого резервуара значення частот менші і їхнє розташування більш щільне порівняно з випадком розтягнутого резервуара. Зазначимо також, що при співвідношенні частот 0,5 модуляція майже не спостерігається. Для всіх режимів коливань очевидно, що вихід на усталений режим коливань не спостерігається.

Висновки. У статті проаналізовано особливості прояву нелінійностей в задачі про вимушені коливання еліпсоїдального резервуара обертання, частково заповненого рідиною, під дією гармонічної сили. Для розтягнутого і стисненого по вертикалі резервуарів показано, що головним механізмом формування процесів є модуляція. Проте через ущільнення в розташуванні частот унаслідок сумісності руху компонент системи модуляція в чистій формі проявляється більше в дорезонансних режимах, а в зарезонансних режимах у формуванні модуляції, окрім частоти збудження, беруть участь дві і більше форми коливань. Отримані режими повністю узгоджуються за своїм характером з експериментальними даними, наведеними в [1, 9, 10]. Вихід на усталені режими коливань не спостерігається в жодному з розглянутих режимів.

Список використаних джерел:

- 1 Faltinsen O. M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. M. Faltinsen, O. F. Rognebakke, A. N. Timokha // *Physics of fluids*, 2006. – Vol. 18, № 1. – P. 012103.
- 2 Konstantinov O. Effect of combine motion on variation of resonance properties in liquid sloshing problems / O. Konstantinov, O. Limarchenko, K. Semenovich // *Math. Model. Comput.*, 2015. – 2(1). – P. 48–57.
- 3 Konstantinov A. V. Generalizing the Faraday Problem of the Parametric Oscillations of a Cylindrical Tank Partially Filled with a Fluid / A. V. Konstantinov, O. S. Limarchenko, V. N. Mel'nik, I. Yu. Semenova // *Int. Appl. Mech.*, 2017. – Vol. 53, N 1. – P. 59–66.
- 4 Limarchenko O. S. Dynamics of rotating structures with liquid / O. S. Limarchenko, G. Matarazzo, V. V. Yasinsky // *Gnoziz, Kyiv*, 2002. – 304 p.
- 5 Limarchenko O. S. Specific features of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape / O. S. Limarchenko // *Ukr. Math. Jour.*, 2007. – Vol. 59. – № 1. – P. 44–70.
- 6 Limarchenko O. Resonant modes of the motion of a cylindrical reservoir on a movable pendulum suspension with a free-surface liquid / O. Limarchenko, A. Nefedov // *Math. modeling and computing*, 2018. – Vol. 5, N 2. – P. 178–183.
- 7 Limarchenko O. S. Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system / O. S. Limarchenko, K. O. Semenovich // *J. of Math. Sci.*, 2017. – Vol. 222, N 3. – P. 296–303.
- 8 Onorato M. Route to thermalization in the α -Fermi–Pasta–Ulam system / M. Onorato, L. Vozella, D. Proment, V. Lvov // *PNAS*, 2015. – Vol. 112, N 14. – P. 4208–4213.
- 9 Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // *Internat. Jour. of Recent Trends in Engineering*, 2009. – Vol. 1, № 6. – P. 1–5
- 10 Zhao W. Coupled analysis of nonlinear sloshing and ship motions / W. Zhao, J. Yang, Z. Hu, L. Tao // *Applied Ocean Research*, 2014. – 47. – August. – P. 85–97.

Надійшла до редколегії 19.09.20

O. Limarchenko, Dr Hab., Prof.,
O. Klimenkov, PhD Student.,
O. Nefedov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
O. Konstantinov, PhD
Institute of Mathematics of National Academy Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

CHARACTER OF MANIFESTATION OF NONLINEARITIES FOR VIBRATION DISTURBANCE OF MOTION OF ELLIPSOIDAL RESERVOIR WITH LIQUID WITH A FREE SURFACE

The problem with vibration disturbance of the reservoir of ellipsoidal shape, partially filled with a liquid, is under consideration. For the construction of the model, we use the before developed method, based on the use of non-Cartesian parametrization of the domain, occupied by a liquid. And the method of the auxiliary domain for satisfying boundary conditions on tank walls above the unperturbed free surface of a liquid, where the liquid can pass in its perturbed motion. The liquid is considered as ideal incompressible. The mathematical model of the system is constructed based on the variational formulation of the problem in the form of the Hamilton–Ostrogradskiy principle. The motion of a liquid free surface is given in the form of decomposition with respect to normal modes of oscillations. Amplitude parameters of oscillations of a liquid free surface together with parameters of the translational motion of the reservoir form a complete independent system of parameters, for which the resolving system of ordinary differential equations is constructed. The constructed model includes nonlinear properties of the system and corresponds to the model of the combined motion of the liquid with the reservoir. According to its structure, the model has considerable similarities with the case of the cylindrical reservoir. The practical implementation of the method is done for vibration disturbance of the system motion in the horizontal plane for the case of extended and compressed ellipsoidal reservoirs. The analysis of the character of manifestation of the dynamical behavior of the system in different ranges of frequencies of motion disturbance shows that mainly this system behaves as a system with the soft type of nonlinearities. The system output to the steady mode of oscillations is not observed. Modulation of oscillations of a liquid free surface is considerably manifested for most modes. Increased attention is paid to the study of regularities of variation of a period of the oscillation modulation. It was ascertained that due to compression of the spectrum of liquid oscillations with the increase of the wavenumber, the simultaneous considerable effect of several frequencies is manifested in the system reservoir–liquid, which leads to complex modulation envelope lines.

Keywords: structure with liquid, ellipsoidal reservoir, vibration disturbance, combined motion, specific features of the manifestation of nonlinearities.

УДК 539.595

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.12.51-56>

О. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.,
О. Нефьодов, канд. фіз.-мат. наук,
О. Сіренко, здобувач
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: olelim2010@yahoo.com

ВЕРИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМУ КЕРУВАННЯ РЕЗЕРВУАРАМИ З РІДИНОЮ НА ОСНОВІ КОМПЕНСАЦІЇ СИЛОВОГО ВІДГУКУ В РІЗНИХ ДІАПАЗОНАХ ПРОЯВУ НЕЛІНІЙНОСТЕЙ

Розглянуто задачу про керування рухом резервуара з рідиною з вільною поверхнею на основі компенсації силового відгуку рідини на стінки резервуара. Звичайні методи керування рухом механічних систем орієнтовані переважно на лінійні системи порівняно малої розмірності, а задачі динаміки сумісного руху резервуарів з рідиною описуються нелінійними системами диференціальних рівнянь досить високої розмірності. Для одержання математичної моделі сумісного руху резервуара з рідиною з вільною поверхнею використано варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського, для якого можна всі внутрішні сили взаємодії складових системи визначити аналітично. Саме за таким алгоритмом визначається головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара (силовий відгук рідини). В основу алгоритму керування рухом резервуара з рідиною покладено включення компенсації силового відгуку рідини до керування, що зводить рух системи резервуар–рідина до руху системи, у якій виключено вплив сил рідини, що коливається, на рух резервуара. Такий алгоритм уже було перевірено для задач імпульсного і вібраційного збудження поступального руху системи в горизонтальній площині. Досліджено збудження руху системи силовим імпульсом у вигляді прямокутного імпульсу, прикладеного до стінки циліндричного резервуара, а тривалість імпульсу вважається меншою за чверть періоду вільних коливань системи. З метою аналізу поведінки керованої системи амплітуди імпульсу обрано в різних діапазонах прояву нелінійностей. Розглянуто задачу про точність запропонованого алгоритму для трьох діапазонів прояву нелінійних властивостей у системі: для лінійного діапазону (амплітуди хвиль на вільній поверхні h не перевершують $0,1$ радіуса вільної поверхні ($\xi < 0,1 R$); для слабо нелінійного діапазону ($\xi < 0,2 R$) і для сильно нелінійного діапазону з максимальними амплітудами хвиль на рівні ($\xi = 0,32 R$). Чисельне моделювання дозволило встановити, що похибки такого алгоритму для всіх діапазонів прояву нелінійностей не перевершують $0,5\%$, хоча і збільшуються при зростанні амплітуд коливань на вільній поверхні рідини. Водночас збурення коливань вільної поверхні рідини для керованого руху спостерігаються завжди більшими, ніж для не керованого.

Ключові слова: резервуар з рідиною, сумісний рух, керування, силовий відгук рідини, компенсація.

Вступ. Задачі про керування сумісним рухом конструкцій, які мають багатокomпонентну структуру, досить складні. Внутрішні ступені вільності системи (відносний рух складових компонент системи) значно ускладнює як реальну поведінку таких систем, так і формулювання відповідних математичних задач. Особливо значні труднощі виникають при суттєвому прояві нелінійних властивостей системи. У такому випадку фактично неможливо виконати ідентифікацію подібних систем на основі спостережень. Одним із найбільш яскравих прикладів таких систем є задача керування рухом резервуарів з рідиною для випадків, коли відносна маса рідини істотна, а вплив рухомості рідини на динаміку системи значний. Така задача має розглядатися в межах сумісної задачі нелінійної динаміки циліндричного резервуара з рідиною. Відносно висока розмірність системи та її нелінійність не дозволяють застосувати добре відомі математичні методи дослідження задач керування рухом [1, 2].

Зазначимо, що задачі високоточного маневрування конструкцій з рідиною надважливі в сучасній техніці, зокрема в аерокосмічній і енергетичних галузях. Математична модель задачі будується на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з подальшим використанням методу модальної декомпозиції [6]. Відомо, що складовою частиною використання варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського є можливість аналітичного визначення сил взаємодії між компонентами. Для задачі про динаміку резервуара з рідиною це дозволяє в аналітичному вигляді визначити головний вектор сил тиску рідини на стінки резервуара (силовий відгук рідини). На основі даних силової взаємодії конструкції з рідиною розглянуто алгоритм керування рухом, основною ідеєю якого є принцип компенсації силового відгуку рідини. Такий алгоритм дозволив побудувати керування, яке виключає вплив рухомості рідини на рух твердого тіла, що вкрай важливо для високоточного виконання програмних рухів конструкцій з рідиною. Хоча це керування не оптимальне, проте воно дозволяє ефективно провести вивчення нелінійної задачі у випадку її досить високої розмірності.

Математична модель системи. Розглянемо задачу про рух системи "конструкція–рідина з вільною поверхнею". Вважається, що конструкція має порожнину, частково заповнену рідиною. Конструкцію розглядаємо як абсолютно тверде тіло, яке здійснює поступальний і обертальний рух під дією активних зовнішніх сил та моментів, а також за наявності кінематичних збурень. Вважається, що рідина ідеальна, нестислива, однорідна, а її початковий рух безвихровий. Оскільки для більшості практичних задач число Рейнольдса задовольняє умову $10^4 \leq Re \leq 10^6$, то при моделюванні властивостей в'язкості можна обмежитися припущенням теорії примежового шару і звести дію сил в'язкості до узагальненої дисипації згідно з методикою [7]. Для числових прикладів у статті розглянуто циліндричний резервуар кругового перерізу. Розв'язання задачі будується за методом [6], який пройшов багатобічну апробацію, включаючи порівняння з якісними результатами теоретичних робіт і експериментів [3, 4, 7, 8].

Математична модель системи є об'єктом неоднорідної математичної структури. Рідина описується диференціальними рівняннями з частинними похідними, а рух конструкції – системою звичайних диференціальних рівнянь. Перехід до математичного об'єкта однорідної структури здійснено методом модальної декомпозиції. З цієї метою збурення вільної поверхні рідини ξ задаються у вигляді розкладу за формами вільних коливань

$$\xi = \sum a_n(t) \psi_n(r, \theta).$$

Тут $\psi_n(r, \theta)$ – форми вільних коливань рідини з вільною поверхнею; $a_n(t)$ – амплітуда коливань вільної поверхні рідини за n -ю формою. Рух рідини в усьому об'ємі описується потенціалом швидкостей Φ :

$$\Phi = \varphi_0 + \dot{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \bar{\omega} \cdot \vec{\Omega} ,$$

де φ_0 – потенціал швидкостей хвильового руху рідини; $\dot{\varepsilon} \cdot \vec{r}$ – потенціал швидкостей поступального руху системи. Тут $\dot{\varepsilon}$ – вектор швидкості поступального руху системи, \vec{r} – радіус-вектор довільної точки області рідини, якщо за початок відліку прийняти центр незбуреної вільної поверхні рідини; $\bar{\omega} \cdot \vec{\Omega}$ – складова потенціалу швидкостей, обертального руху конструкції з рідиною, $\bar{\omega}$ – кутова швидкість руху резервуара, а $\vec{\Omega}$ – потенціал Стокса–Жуковського. Для скалярного і векторного потенціалів швидкостей приймалися такі розклади за власними формами коливань задачі $\psi_n(r, \theta)$:

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}; \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\text{ch } \kappa_n(z+H)}{\kappa_n \text{sh } \kappa_n H}.$$

У цих розкладах $\vec{\Omega}_0$ – лінійна частина потенціалу Стокса–Жуковського; $b_n(t)$ і $\vec{q}_n(t)$ – амплітудні параметри потенціалів, які за методикою [12] записуються через амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини $a_n(t)$. Можливість описувати рух рідини лише через рух її меж, тобто через параметри руху вільної границі і рух стінок резервуара, визначаються теоремою про те, що безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її меж. Саме це дозволяє як незалежні змінні обрати амплітудні параметри збурення форм коливань вільної поверхні рідини a_i (визначають рух вільної поверхні) і параметри поступального ε_i та обертального α_i рухів конструкції, які визначають рух твердих границь області рідини. Обрані параметри повністю характеризують динаміку системи, оскільки за їхніми значеннями можна відновити характеристики руху вільної поверхні рідини ξ , поле швидкостей рідини, поле тисків, кутову швидкість руху резервуара ω_i .

Систему рівнянь руху виведено на основі формулювання вихідної задачі у вигляді варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського з використанням методів аналітичної і нелінійної механіки та варіаційних методів математичної фізики [12]. Така система рівнянь руху є нелінійною системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, у якій другі похідні невідомих входять лінійно. Це створює передумови для аналітичного зведення цієї системи рівнянь до форми Коші, яка зручна для чисельного інтегрування.

Система рівнянь руху має такий вигляд:

$$\begin{aligned} & \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\alpha_r^v} \left\{ \vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_s} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] \right\} = \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} + E_{pirj}^{3*} - E_{prij}^{3*} + E_{prji}^{3*}) \right] + \\ & + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left[E_{psr}^2 + \sum_i a_i (E_{psir}^3 + E_{psri}^3) \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left[E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right] + \\ & + \dot{\varepsilon} \cdot \left[\sum_i a_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_i \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_i \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right] + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\vec{F}_{pr}^2 + \sum_i a_i (\vec{F}_{pir}^3 + \vec{F}_{pri}^3) + \sum_{i,j} a_i a_j (\vec{F}_{pijr}^4 + \vec{F}_{pirj}^4 + \vec{F}_{prij}^4) \right] + \\ & + g \frac{N_r}{\alpha_r^v} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 a_r + g \frac{\alpha_r^c}{\alpha_r^v} (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) + g \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_s} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_j a_k \vec{F}_{pij}^3 \right) \right] = \\ & = \frac{\vec{F}}{M_F + M_T} + \vec{g} + \frac{\rho}{M_F + M_T} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) - \\ & - \frac{\rho}{M_F + M_T} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} + 2\ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left[\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 + \sum_i a_i a_j a_k \bar{F}_{pijk}^4 \right] + \\
& + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] = \\
& = 2 \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} + A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \\
& + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\bar{F}_p^1 + \sum_i a_i \bar{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \\
& + 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \bar{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \bar{F}_{pij}^3 \right) + \frac{2g}{\rho} (M_T h_T + M_F h_F) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \\
& + 2g \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right] + \\
& + (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \left. \right] + \frac{2}{\rho} M_{ex}^r. \tag{3}
\end{aligned}$$

Система рівнянь руху складається з $N + 6$ рівнянь, де N – кількість форм коливань вільної поверхні рідини, що розглядаються, і описує сумісний рух нелінійної системи конструкція–рідина. У рівняння руху (1) – (3) входять коефіцієнти (індексні вирази), які характеризують динамічну взаємодію в системі, інерціальні та статичні характеристики конструкції, а також зовнішні сили і моменти, що діють на конструкцію. Усі ці коефіцієнти визначаються у квадратурах від форм коливань вільної поверхні рідини і лінійних потенціалів Стокса–Жуковського [12]. У рівняння також входять механічні характеристики рідини (густина ρ і загальна маса рідини M_F) і резервуара (маса M_T і момент інерції J_{res}^{ps}), а також параметри розташування центрів мас резервуара і рідини відносно центра незбуреної вільної поверхні рідини.

Якщо записати систему рівнянь руху у вигляді

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\bar{F} + \bar{R}}{M_F + M_T} + \bar{g} : \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{ps} \right) \right] = \frac{1}{\rho} (M_R^r + M_{ex}^r),$$

де \bar{F} і M_{ex}^r – відповідно зовнішня сила і момент, що діють на конструкцію, а \bar{R} і M_R^r – головні вектори сил і моментів тиску рідини на стінки конструкції, які за варіаційним підходом визначаються автоматично як складові частини техніки варіювання. Тоді з рівнянь руху (1) – (3) можна вивести аналітичні вирази для цих параметрів силової і моментної взаємодії рідини з конструкцією. Зауважимо, що в літературі з динаміки конструкцій з рідиною така силова взаємодія зазвичай визначається шляхом інтегрування сил тиску на стінках резервуара, що значно складніше, і лише для частинних випадків. Тут цей результат одержується автоматично як складова частина техніки варіювання і для більш загального випадку:

$$\begin{aligned}
& \bar{R} = \rho \left[\left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) - \sum_i \ddot{a}_i \left(\bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right) \right]; \tag{4} \\
& M_R^r = -\frac{\rho}{2} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{j,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right\} - \rho \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[\sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] + \\
& + \rho \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \left(A_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) + \\
& + \rho \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \omega_s \left(\sum_i \dot{a}_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 \right) + \frac{\rho}{2} \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right). \tag{5}
\end{aligned}$$

Визначення параметрів силової і моментної взаємодії конструкції з рідиною в аналітичній формі дозволяє не лише оцінити таку взаємодію кількісно, але й запропонувати нові алгоритми керування рухом конструкцій з рідиною, у яких виключено чи значно послаблено вплив коливань рідини на динаміку руху конструкції.

Приклад. На прикладі руху конструкції з рідиною покажемо, що якщо до керування додати компенсацію силової взаємодії рідини з резервуаром, то з високою точністю подальший рух конструкції буде відбуватися так, як би рухалася система з рідиною, яка б "затверділа" [5]. Для аналізу ефективності такого алгоритму вивчимо рух системи в трьох діапазонах прояву нелінійних властивостей поверхневого хвилеутворення. Проаналізуємо збудження руху системи силовим імпульсом у вигляді прямокутного імпульсу, прикладеного до стінки циліндричного резервуара, тривалість імпульсу вважається меншою за чверть періоду вільних коливань системи ($\tau = 0.25$ с). Ставиться задача: перевірити точність алгоритму для трьох діапазонів прояву нелінійних властивостей у системі: для лінійного діапазону (амплітуди хвиль на вільній поверхні h не перевершують $0,1$ радіуса вільної поверхні ($\xi < 0,1 R$); для слабо нелінійного діапазону ($\xi < 0,2 R$) і для сильно нелінійного діапазону з максимальними амплітудами хвиль на рівні ($\xi = 0,32 R$).

Розглянемо випадок поступального руху конструкції з рідиною в горизонтальній площині. У цьому випадку рух конструкції повністю задається одним параметром поступального руху ε_x . Відповідно два рівняння, які відповідають руху за напрямками y і z з системи рівнянь (2), а також три рівняння системи (3), які відповідають кутовому руху конструкції, виключаються з розгляду. Вивчається нелінійна модель сумісного руху конструкції з рідиною, коли враховується $N = 12$ форм коливань вільної поверхні рідини. Числові результати отримано для вертикально розташованого кругового циліндричного резервуара радіуса $R = 1$ м з глибиною заповнення $H = 1$ м, заповненого водою, маса резервуара приймалась як 10 % від маси рідини (випадок суттєвого впливу рухомості рідини).

Результати числових розрахунків зображені на рис. 1–3, де ліворуч (рис. а)), показано зміну в часі швидкості руху конструкції під дією прямокутного імпульсу сили, а праворуч (рис. б)) показано збурення вільної поверхні рідини на стінці резервуара у площині руху системи. Усі лінійні розміри стосуються радіуса резервуара. Суцільні криві відповідають випадку, коли рух системи розглядається з компенсацією силового відгуку рідини, а штрихові криві відповідають випадку без компенсації. Рис. 1 відповідає випадку лінійного діапазону збурень на вільній поверхні рідини, рис. 2 – випадку слабого прояву нелінійностей, а рис. 3 – значному прояву нелінійностей. Зауважимо, що у цьому випадку суцільні криві на рисунках для зміни швидкостей з високою точністю збігаються з відповідними кривими у випадку руху системи для "затверділої" рідини.

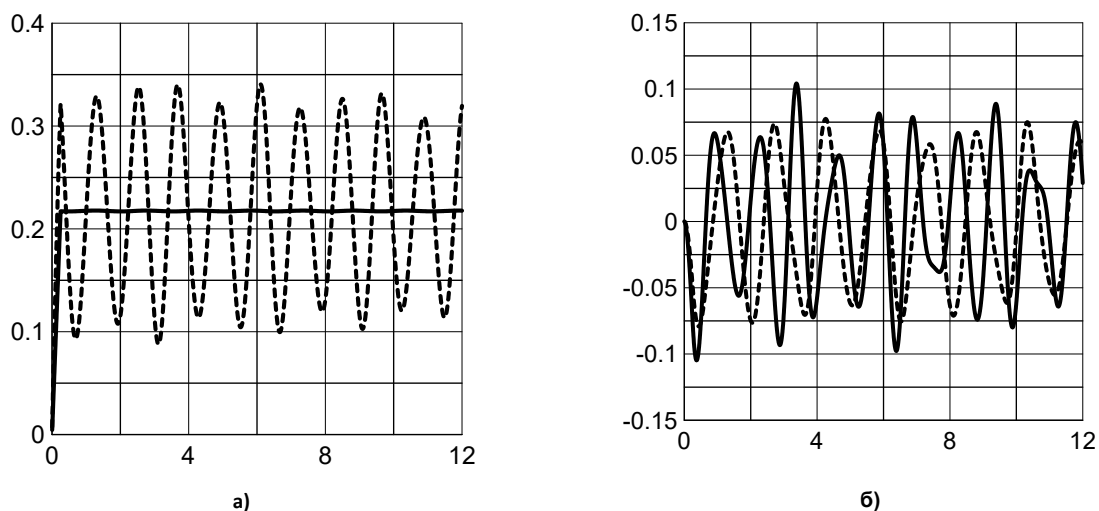


Рис. 1. Зміна швидкості руху резервуара (а) і збурень на вільній поверхні (б) у часі в лінійному діапазоні збурень на вільній поверхні рідини

Числове моделювання дозволило встановити, що похибки алгоритму для всіх діапазонів прояву нелінійностей не перевершують $0,5$ %, хоча і збільшуються при зростанні амплітуд коливань на вільній поверхні рідини. У той же час збурення коливань вільної поверхні рідини для керованого руху завжди більші, ніж для не керованого. Характер зміни амплітуд збурень рідини свідчить про наявність ознак амплітудної і частотної модуляції коливань, що підтверджується експериментальними даними [3, 7, 8]. Як бачимо з рис. 1–3, спостерігається помітне істотне зменшення періоду коливань вільної поверхні рідини в межах моделі сумісного руху рідини і резервуара порівняно з випадком заданого руху резервуара (приблизно на 25 – 30 %). Зазначимо також, що у випадку руху системи з компенсацією силового відгуку рідини зростання частоти стає ще більшим.

Запропонована схема керування фактично є керуванням з оберненим зв'язком стосовно прискорень амплітуд збурень форм коливань вільної поверхні рідини з їхнім нормуванням за законом формування силового відгуку рідини.

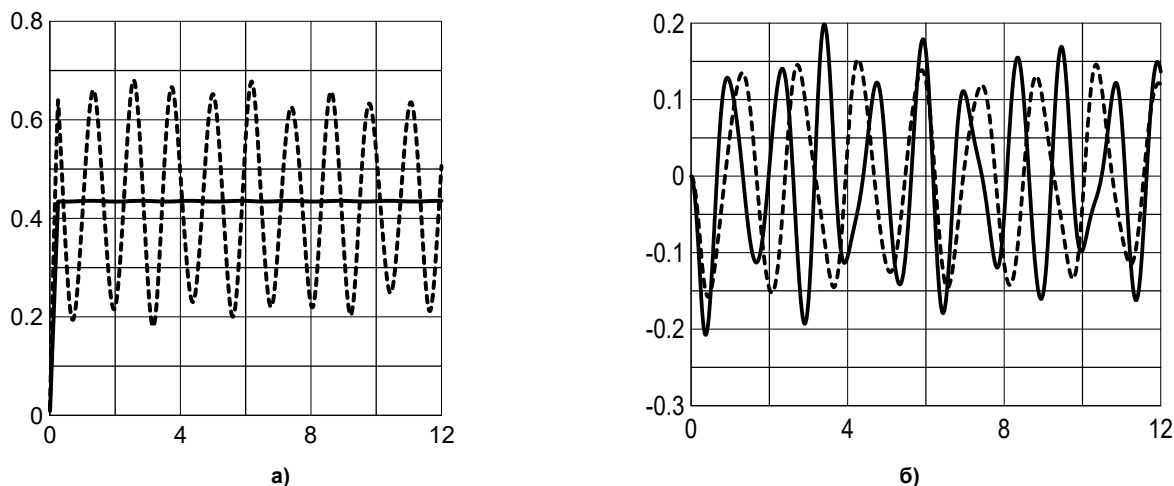


Рис. 2. Зміна швидкості руху резервуара (а) і збурень на вільній поверхні (б) у часі в слабо нелінійному діапазоні збурень на вільній поверхні рідини

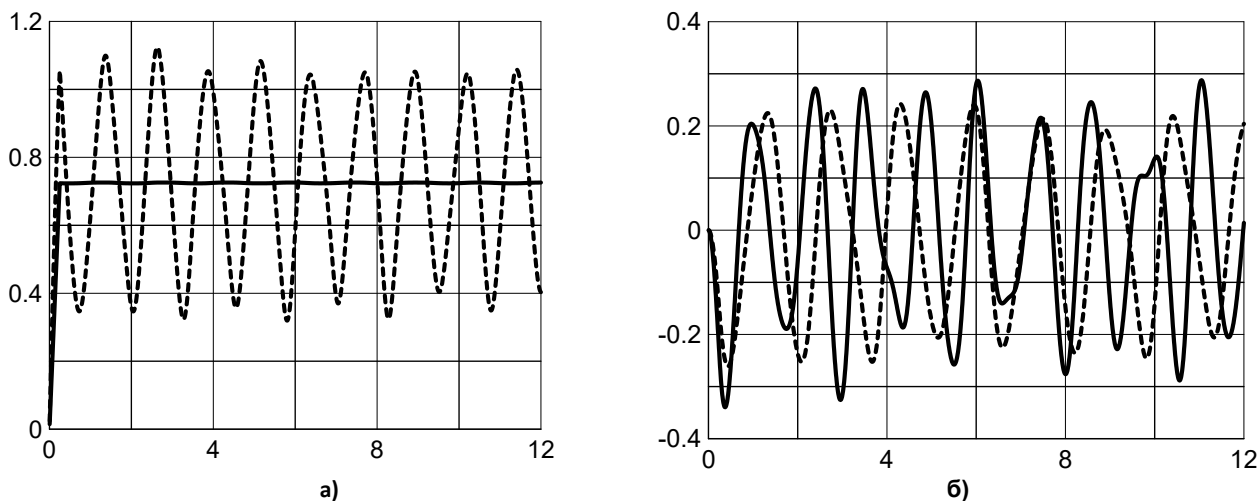


Рис. 3. Зміна швидкості руху резервуара (а) і збурень на вільній поверхні (б) у часі в сильно нелінійному діапазоні збурень на вільній поверхні рідини

Висновки. Розглянуто задачу керування рухом конструкції з рідиною із вільною поверхнею в режимі руху з різним ступенем прояву нелінійних властивостей взаємодії резервуарів з рідиною. Для реалізації високоточного маневрування запропоновано алгоритм керування рухом конструкцій з рідиною, в основі якого лежить принцип компенсації силової взаємодії рідини зі стінками резервуара. Продемонстровано ефективність такого підходу для побудови законів керування рухом для випадку імпульсного збудження руху силовим прямокутним короткотривалим імпульсом. Встановлено, що для різних діапазонів прояву нелінійних властивостей рідини похибки відповідають майже одному порядку і малі. Запропонований підхід базується на аналітичних властивостях вихідної нелінійної динамічної моделі сумісного руху конструкції з рідиною і застосовується для вивчення нелінійної динамічної моделі високої розмірності, де використання традиційних підходів до розв'язання задач керування рухом складний.

Список використаних джерел:

- 1 Chernousko F. L. Methods for control of nonlinear mechanical systems / F. L. Chernousko, I. M. Ananyevskiy, S. A. Reshmin. – Moscow : Fizmatlit, 2006. – 328 p.
- 2 Dickmanns E. D. Dynamic vision for perception and control of motion / E. D. Dickmanns. – London : Springer-Verlag Limited, 2007. – 474 p.
- 3 Faltinsen O. M. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth / O. M. Faltinsen, O. M. Rognebakke, A. N. Timokha // *Physics of Fluids*, 2006. – Vol. 1, N 18. – P. 1–14. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2160522>.
- 4 Konstantinov A. V. Effect of the viscosity and capillarity of fluid on the nonlinear dynamics of a tank partially filled with a fluid / A. V. Konstantinov, O. S. Limarchenko // *Internat. Applied Mechanics* // 2017. – Vol. 53, N 2. – P. 130–138. URL: <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0798-2>.
- 5 Konstantinov A. V. Motion control for structure with liquid based on compensation of the liquid hydrodynamic response / A. V. Konstantinov, V. O. Limarchenko, O. S. Limarchenko // *Problems of control and informatics*, 2020. – N 3. – P. 68–79.
- 6 Limarchenko O. S., Matarazzo G., Yasinsky V. V. Dynamics of rotating structures with liquid / O. S. Limarchenko, G. Matarazzo, V. V. Yasinsky. – Kiev : Gnozis, 2013. – 286 p.
- 7 Mikishev G. N. Experimental methods in dynamics of spacecraft / G. N. Mikishev. – Moscow : Mashinostroyeniye, 1978. – 247 p.
- 8 Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / P. Pal // *Internat. Jour. of Recent Trends in Engineering*. – 2009. – Vol. 1, N 6. – P. 1–5.

O. Limarchenko, Dr Hab., Prof.
 O. Nefedov, PhD,
 O. Sirenko, Applicant
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

VERIFICATION OF THE CONTROL ALGORITHM FOR RESERVOIRS WITH LIQUID BASED ON THE COMPENSATION OF THE FORCE RESPONSE IN DIFFERENT RANGES OF MANIFESTATION OF NONLINEARITIES

Problem about motion of a reservoir with liquid with a free surface is considered based on the compensation of a force response of the liquid on reservoir walls. Such an approach is selected since usual methods of control of mechanical system motion are mostly intended for linear systems of relatively small dimension. However, models of dynamics of the combined motion of reservoirs with liquid are described with relatively high-dimensional nonlinear systems ordinary differential equations. For obtaining the mathematical model of combined motion of a reservoir with liquid with a free surface we use the Hamilton–Ostrogradskiy variational principle, for which it is possible to determine analytically all internal forces of interaction of system component parts. Namely using this algorithm, we determine the main vector of forces of the liquid pressure on reservoir walls (force response of liquid). The algorithm of the motion control of the reservoir with liquid is based on the inclusion of the compensation of the liquid force response to controlling actions, this reduces the motion of the system reservoir–liquid, where the effect of forces from oscillating liquid on the reservoir motion is eliminated. This algorithm was tested for problems of impulse and vibration disturbance of the translational motion of the system in the horizontal plain. We consider the disturbance of the system motion by a force rectangular impulse applied to the reservoir wall, the duration of the impulse is lesser than a quarter of the period of a liquid free oscillations according to the first normal mode. Amplitudes of the impulse were selected with the purpose of analysis of the behavior of the controlled system in different ranges of manifestation of nonlinearities. We state the problem to verify the accuracy of this algorithm for three ranges of manifestation of nonlinear properties in the system, namely, for the linear range (amplitudes of waves on a free surface h do not exceed 0,1 of the radius of a free surface ($\xi < 0,1R$); for the weakly nonlinear range ($\xi < 0,2R$) and for the strongly nonlinear range with maximum amplitudes of waves about $\xi = 0,32R$. Numerical modeling enables the determination of errors of developed algorithm, which does not exceed 0,5 %, although they insignificantly increase with the increase of amplitudes of oscillations on a free surface of liquid. At the same time perturbations on a free surface of liquid for the controlled motion are always greater than for the uncontrolled motion.

Keywords: reservoir with liquid, combined motion, control, force response of liquid, compensation.

УДК 517.9

DOI <https://doi.org/10.17721/1684-1565.2020.01-41.13.56-59>

K. Elgondiyev, PhD., Associate Prof.,
 S. Matmuratova, Student

Karakalpak State University, Nukus city, Respublic of Karakalpakstan, Uzbekistan,
 E-mail: elgondiev.61@gmail.com

V. Borodin, PhD, Associate Prof.,
 E-mail: viktorborodinmm@gmail.com; borodin@univ.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
 L. Vovk, PhD, Associate Prof.
 E-mail: ludmylavera@gmail.com

Kyiv National University of Culture and Arts, Kyiv, Ukraine

TOTAL ENERGY OF HARMONIC OSCILLATOR WITH IMPULSE ACTION

The problem of finding the total energy of a harmonic oscillator with pulsed action at fixed moments of time is considered. Both for the case of the homogeneous equation of harmonic oscillations and for the case of the equation of harmonic oscillations in the presence of external perturbation, formulas for the total energy of the oscillatory system are obtained. The case of periodic impulse effects is analyzed. The conditions under which in this oscillatory system there are periodic modes are specified. It is shown that under the fulfillment of these conditions on the values of impulse action and external perturbation, the total energy of the vibrational system is also a periodic function of the time variable.

Keywords: harmonic oscillator, systems with pulsed action, total energy, external perturbation, periodic oscillations.

1. Introduction. Harmonic vibrations are of great importance in the study of many different problems of physics, since the motion of any system in the vicinity of the minimum of its potential energy can be described using the equation of harmonic vibrations

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Harmonic oscillations are one of their simplest types. Well-known examples of harmonic oscillations are small vibrations of a mathematical pendulum, oscillations in molecules, small oscillations of a finite string (with appropriate initial conditions), oscillations in various electrical engineering, for example, in RLC circuits, and other systems. If we take into account that an arbitrary periodic function under rather general conditions can be represented in the form of its Fourier series, it can also be noted that almost any periodic motion is a superposition of harmonic oscillations.

Mathematically, harmonic oscillations can be described using the formula [7, 8] of the following form $x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0)$, where x_0, \dot{x}_0 are initial state of the system (1), t_0 is an initial moment of time. In the case of a material particle of unit mass, its total energy is represented by the formula

$$E = E(t) = \frac{1}{2} \left[\omega^2 x^2(t) + \dot{x}^2(t) \right] \quad (2)$$

and is a constant, i.e., $E = E(t_0) = \frac{1}{2} (\omega^2 x_0^2 + \dot{x}_0^2)$.

In the presence of an external disturbance $f(t)$, i.e. when the motion of a material particle is described by a differential equation of the form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \tag{3}$$

the energy introduced into a given oscillatory system by an external disturbance can be represented [3] as

$$E(t) = \frac{1}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \text{ where it is assumed that at the initial moment of time the system is in the state } x_0 = \dot{x}_0 = 0.$$

On the other hand, many oscillatory systems, phenomena and processes are impulsive in nature, when certain characteristics of the system change over a very short period of time, that is, instantly [5, 6, 11]. Differential equations with impulse action are most often used as mathematical models of such systems [4]. There are systems with fixed moments of impulse action, when the moments of time of impulse action are determined a priori, and systems with non-fixed moments of impulse action, when moments of impulse action are determined from some (additional) conditions.

It is known [4–8, 10] that the qualitative behavior of solutions of differential equations with impulsive action has, generally speaking, a rather non-trivial character and is nonlinear. While studying such systems, qualitative methods of the theory of differential equations are often applied, based on the using expressions for the total energy of the system.

In this article, using the example of a harmonic oscillator, we study the problem of finding the total energy of an oscillatory system with an impulse effect. The case of impulse action at fixed times is considered.

2. Oscillator with impulse action. Let us firstly consider the case when the external force in (3) is of an impulsive nature and its action occurs in a very short period of time. We assume that the duration of the action of the force is much less than

$\frac{1}{\omega}$. Then the energy introduced by an external force into this system can be calculated using formula $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right|^2$, where it is

taken into account that in this case $e^{-i\omega t} \approx 1$. These arguments are used further in the study of a more general case.

Let $t = t_0$ be initial moment of time and x_0, \dot{x}_0 be initial state of the system. The total energy of the oscillatory system for values $t \in [t_0, \infty)$ in the case when the external force $f(t), t \in [t_0, \infty)$, has an impulsive character and acts according to the law

$$F(t) = \begin{cases} f_1(t), & \text{if } t \in [t_1 - \delta, t_1], \\ 0, & \text{if } t \notin [t_1 - \delta, t_1], \end{cases} \tag{4}$$

can be calculated by formula (2), where one should put $x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0) + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) dt$.

Assuming the value $\delta > 0$ to be sufficiently small and taking into account formula (4), for $t > t_1$ we find

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \int_{t_1 - \delta}^{t_1} f_1(\tau) \cos \omega(t - \tau) dt \right)^2 + \omega^2 \left(x_0 + \frac{1}{\omega} \int_{t_1 - \delta}^{t_1} f_1(\tau) \sin \omega(t - \tau) dt \right)^2 \right].$$

From this it follows that with an external disturbance of a pulse type, the total energy of a harmonic oscillator is expressed by a formula similar to (2) but with slightly different (corrected) initial data. In other words, we can assume that during the action of external forces of an impulsive nature, some correction of the initial data occurs. This conclusion also follows from the formula for the difference in the total energy of a harmonic oscillator after the end and before the beginning of the impulse force, namely:

$$E(t_1) - E(t_0) = 2 \sin \frac{\omega(t_1 - t_0)}{2} \int_{t_1 - \delta}^{t_1} f(\tau) \left[\omega x_0 \cos \frac{\omega(t_1 + t_0 - 2\tau)}{2} - \dot{x}_0 \sin \frac{\omega(t_1 + t_0 - 2\tau)}{2} \right] dt.$$

While studying the influence of impulsive forces on oscillatory systems the assumption of an instantaneous change in the momentum of the system at the moment of impulse action $t = \tau_1$ is also often used. In similar cases, in addition to considering differential equation (1) at $t \neq \tau_1$, an additional condition of the form $\Delta \dot{x}|_{t=\tau_1} = \dot{x}(\tau_1 + 0) - \dot{x}(\tau_1 - 0) = I_1$ is used, which is called the impulse action condition [4]. For the general case, for example, in the presence of an infinite number of moments of impulse action $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$, where $\tau_k \rightarrow +\infty$, the problem is formulated as follows: it is necessary to study the dynamics of the system, the behavior of which at $t \neq \tau_k$ is described by the differential equation (1), and at $t = \tau_k$ it is regulated by the conditions of impulse action [4, 7, 8]

$$\Delta \dot{x}|_{t=\tau_k} = \dot{x}(\tau_k + 0) - \dot{x}(\tau_k - 0) = I_k, \tag{5}$$

where $I_k, k \in N$, are some given values.

Equation (1) with conditions (5) is called the differential equation of a harmonic oscillator with impulse action. Oscillations in such a system occur according to the law [7, 10]

$$x(t) = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0) + \frac{1}{\omega} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_p \sin \omega(t - \tau_k). \tag{6}$$

This formula gives an explicit solution $x(t)$ to problem (1), (5) for an arbitrary (fixed) moment of time t and takes into account the effect of forces of an impulsive nature of the form (5).

Taking into account (6), the total energy of system (1), (5) can be written using the following formula:

$$E(t) = \frac{1}{2} [\dot{x}^2(t) - \omega^2 x^2(t)] = E(t_0) = \frac{1}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos \omega(t_0 - \tau_k) \right)^2 + \omega^2 \left(x_0 - \frac{1}{\omega} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin \omega(t_0 - \tau_k) \right)^2 \right].$$

Putting $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ (to simplify the corresponding expressions) one can analyze the effect of one impulse action on the change in the total energy of the system. We find:

$$E(\tau_1) - E(t_0) = \frac{1}{2} I_1^2, \quad E(\tau_2) - E(\tau_1) = \frac{1}{2} I_2^2 + I_1 \cdot I_2 \cos \omega(\tau_2 - \tau_1), \quad \dots, \quad E(\tau_k) - E(\tau_{k-1}) = \frac{1}{2} I_k^2 + I_k \cdot \sum_{p=1}^{k-1} I_p \cos \omega(\tau_k - \tau_p).$$

The question naturally arises: is the equality $E(\tau_k) - E(\tau_{k-1}) = \frac{1}{2} I_k^2$ possible? Obviously, a necessary condition for this equality to hold is a condition of the form $\omega \cdot (\tau_k - \tau_p) = \frac{\pi}{2} + r_{kp} \cdot \pi$, where r_{kp} , $p = \overline{1, k-1}$, are some integers. However, it is easy to show that the last condition cannot be satisfied.

If, in addition to impulse forces of the form (5), an external force $f(t)$ of impulsive nature of the form (4) acts on the harmonic oscillator (1), then for $t > t_1$ the total energy of system (3), (5) is calculated by the formula

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\omega^2 x^2(t) + \dot{x}^2(t) \right] = \frac{1}{2} \left[\omega^2 \left(x_0 \cos \omega(t-t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t-t_0) + \frac{1}{\omega} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin \omega(t-\tau_k) + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t f_1(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right)^2 + \left(-x_0 \omega \sin \omega(t-t_0) + \dot{x}_0 \cos \omega(t-t_0) + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos \omega(t-\tau_k) + \int_{t_0}^t f_1(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right)^2 \right] = E(t_0) = \frac{1}{2} \left[\left(\omega x_0 + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin \omega(t_0 - \tau_k) + \int_{t_0}^t f_1(\tau) \sin \omega(t_0 - \tau) d\tau \right)^2 + \left(\dot{x}_0 + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos \omega(t_0 - \tau_k) + \int_{t_0}^t f_1(\tau) \cos \omega(t_0 - \tau) d\tau \right)^2 \right].$$

For various practical problems, the case of periodic oscillations is often important [7, 10, 11]. A number of conditions are required for the existence of periodic modes in system (3). Let system (1), (5) satisfy the following conditions [9, 12, 13]:

- a) $\omega T = 2\pi q_0$ for some natural number q_0 ;
- b) $I_{n+k} = I_k$, $t_{n+k} = t_k + T$ for some natural number $n \in N$ and all $k \in N$ (periodicity conditions);
- c) $\sum_{k=1}^n I_k \cos \omega(t_0 - t_k) = 0$, $\sum_{k=1}^n I_k \sin \omega(t_0 - t_k) = 0$.

Then problem (1), (5) has a two-parameter family of periodic solutions, and the initial values of the problem can be considered as parameters. Note that otherwise, when condition a) is not satisfied, problem (1), (5) will have a quasiperiodic solution [7]. Under conditions a), b), c), the total energy of system (1), (5) is determined by the formula

$$E(t) = \frac{1}{2} [\dot{x}^2(t) + \omega^2 x^2(t)] = \frac{1}{2} \left[\left(\dot{x}_0 + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos \omega(t_0 - \tau_k) \right)^2 + \omega^2 \left(x_0 - \frac{1}{\omega} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin \omega(\tau_k - t_0) \right)^2 \right].$$

Similarly, for harmonic oscillator (3) with impulsive action (5) under assumptions a), b) and conditions

d) $f(t+T) = f(t)$ for all $t \in [t_0, \infty)$;

$$e) \sum_{k=1}^n I_k \cos \omega(t_0 - t_k) + \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) \cos \omega(t_0 - \tau) d\tau = 0, \quad \sum_{k=1}^n I_k \sin \omega(t_0 - t_k) + \int_{t_0}^{t_0+T} f(\tau) \sin \omega(t_0 - \tau) d\tau = 0$$

the total energy of system (3), (5) is determined by the formula

$$E(t) = \frac{1}{2} \left[\omega^2 x^2(t) + \dot{x}^2(t) \right] = \frac{1}{2} \left[\omega^2 \left(x_0 \cos \omega(t-t_0) + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega(t-t_0) + \frac{1}{\omega} \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \sin \omega(t-\tau_k) + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \right)^2 + \left(-x_0 \omega \sin \omega(t-t_0) + \dot{x}_0 \cos \omega(t-t_0) + \sum_{t_0 < \tau_k \leq t} I_k \cos \omega(t-\tau_k) + \int_{t_0}^t f(\tau) \cos \omega(t-\tau) d\tau \right)^2 \right].$$

It is easy to show that under conditions a), b), c) in the case of system (1), (5) or conditions a), b) d), e) in the case of system (3), (5), the total energy of the corresponding oscillatory system is a periodic function of the time variable, i.e., $E(t+T) = E(t)$ for all $t \in [t_0, \infty)$.

3. Conclusions. In this article, expressions are obtained for the total energy of a harmonic oscillator with an impulse action at fixed times. Both the case of the homogeneous equation of harmonic oscillations and the case of the equation of harmonic oscillations in the presence of an external disturbance, including an impulse one, are considered. The case of periodic impulse influences is analyzed. Conditions are given under which periodic modes are present in the considered oscillatory system. It is shown that under the conditions of periodicity on the values of the impulse action and external disturbance, the total energy of the oscillatory system is also a periodic function of the time variable. The results obtained can be used in the study of problems of mathematical physics [1, 2, 14].

References:

1. Елгондиев К. К., Пильтяй М. М., Хомченко Л. В. Распространение тепла в однородном стержне с импульсным воздействием // Краевые задачи для дифференциальных уравнений. – 2003. – Вып. 10. – С. 59–65.
2. Елгондиев К. К., Пильтяй М. М., Хомченко Л. В. Распространение тепла в прямоугольной пластинке с импульсным воздействием // Вест. Киев. нац. ун-та имени Тараса Шевченко. Сер. : физико-математические науки, 2003. – Вып. 1. – С. 69–72.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. 4-е изд. – М. : Наука, 1988. – 216 с.
4. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев : Вища шк., 1987. – 287 с.
5. Самойленко В. Г., Бородин В. А. Вплив імпульсної дії на асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, 2004. – Вип. 11-12. – С. 30–35.
6. Самойленко В. Г., Бородин В. А. Асимптотичні властивості розв'язків диференціального рівняння n -го порядку з імпульсною дією // Математичні методи та фізико-механічні поля, 2004. – Т. 47, № 4. – С. 76–81.
7. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в R^2 . – Препринт. № 89.59. – Киев : Ин-т математики АН УССР. – 32 с.
8. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. О решениях дифференциального уравнения, описывающего движение осциллятора под воздействием мгновенных сил // Асимптотические методы в уравнениях математической физики. – Киев: Институт математики АН УССР, 1989. – С. 145–148.
9. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. Периодические и почти-периодические решения линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Математична фізика та нелінійна механіка. – 1991. – Вып. 15. – С. 13–19.
10. Самойленко В. Г., Елгондиев К. К. Качественное поведение решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения, 1999. – Т. 35, № 6. – С. 852.
11. Samoilenko V. H., Borodin V. A. Asymptotic properties of solutions of a differential equation of order n with almost constant coefficients and an impulsive effect // Nonlinear Oscillations, 2005. – Vol. 8, No. 4. – P. 444–455.
12. Samoilenko V. G., Elgondiyev K. K. On periodic solutions of linear differential equations with pulsed influence // Ukr. Math. Jour., 1997. – Vol. 49, No. 1. – P. 156–164.
13. Samoilenko V. G., Elgondiyev K. K. On existence of periodical solutions of differential equations with impulse effects // Facta Universitatis. Ser.: Mechanics, Autonomic Control and Robotics, 1998. – Vol. 2, № 8. – P. 635–640.
14. Samoilenko V. H., Khomchenko L. V. A von Neumann boundary-value problem for a singularly perturbed heat equation with an impulsive effect // Nonlinear Oscillations, 2005. – Vol. 8, No. 1. – P. 89–122.

Надійшла до редколегії 20.09.20

К. Елгондієв, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
С. Матмуратова, студ.

Каракалпакський державний університет ім. Бердаха, Республіка Каракалпакія, Узбекистан,
В. Бородин, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
Л. Вовк, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна

ПОВНА ЕНЕРГІЯ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглянуто задачу про знаходження повної енергії гармонічного осцилятора з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Як для випадку однорідного рівняння гармонічних коливань, так і для випадку рівняння гармонічних коливань за наявності зовнішнього збурення отримано формули для повної енергії коливальної системи. Проаналізовано випадок періодичних імпульсних впливів. Вказано умови, при виконанні яких у цій коливальній системі наявні періодичні режими. Показано, що при виконанні цих умов на величини імпульсного впливу і зовнішнього збурення, повна енергія коливальної системи також є періодичною функцією часової змінної.

Ключові слова: гармонічний осцилятор, системи з імпульсною дією, повна енергія, зовнішнє збурення, періодичні коливання.

Дмитро Юрійович Садовий (16.07.1988 – 30.08.2020)



30 серпня 2020 р. після тривалої підступної хвороби не стало асистента кафедри математичної фізики (2011–2016), співробітника науково-дослідної частини механіко-математичного факультету (2017–2019), кандидата фізико-математичних наук Садового Дмитра Юрійовича.

Садовий Д. Ю. народився у місті Ізюм Харківської області. Після здобуття середньої освіти в 2005 році за програмою "Стань студентом з АІФ", яку проводила редакція газети "Аргументы и Факты", він пройшов конкурс з-понад 5 000 претендентів і вступив на механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а згодом спеціалізувався на кафедрі математичної фізики. Викладачі факультету пам'ятають Дмитра як старанного і сумлінного студента – він вважався одним із кращих студентів курсу.

Ще в студентські роки, у бакалавраті, він почав займатися науковими дослідженнями під керівництвом професора Т. А. Мельника. Тематика наукових досліджень Дмитра стосувалася асимптотичної поведінки розв'язків крайових задач в області складної структури – у так званих густих багаторівневих з'єднаннях. Подібні математичні задачі є актуальними і пов'язані з численними проблемами практики, оскільки значна кількість сучасних інженерних конструкцій та біологічних систем мають складні геометричні форми. Оскільки на деякі фізичні властивості матеріалів впливає їхня геометрична будова, то вивчення впливу геометричної структури матеріалу на фізичні процеси може допомогти

покращити його корисні фізичні властивості та зменшити небажані ефекти. Саме такі проблеми, які належать до сучасного розділу математики – теорії усереднення, досліджував Дмитро. Підсумком його досліджень стали дві наукові статті, які він опублікував ще під час навчання в магістратурі. У 2011 р. за свої досягнення він був удостоєний стипендії програми "Завтра.UA" Фонду Віктора Пінчука – першої приватної загальнонаціональної програми з підтримки талановитої молоді.

Після закінчення з відзнакою механіко-математичного факультету Дмитро восени 2011 року був зарахований на посаду асистента кафедри математичної фізики. У тому ж році він вступив до заочної аспірантури кафедри математичної фізики, де під керівництвом професора Т. А. Мельника продовжив свої наукові дослідження. Д. Ю. Садовий досліджував як лінійні, так і квазілінійні еліптичні та параболічні крайові задачі в густих дворівневих з'єднаннях із частою періодичною зміною різних типів сингулярно збурених крайових умов, включаючи і нелінійні, які задаються на поверхнях тонких областей густого з'єднання. Він довів теореми збіжності, побудував асимптотичні розв'язки та наближення для розв'язків таких задач з отриманням відповідних асимптотичних оцінок у просторах Соболева для випадку, коли кількість приєднаних тонких областей необмежено зростає, а їхня товщина прямує до нуля. Дмитро опублікував ряд наукових статей у провідних англійських наукових виданнях, достроково підготував і навесні 2014 року успішно захистив дисертацію "Асимптотичний аналіз крайових задач в густих багаторівневих з'єднаннях типу 3:2:2" на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Вінцем цих досліджень стала спілункова з науковим керівником монографія "Multiple-Scale Analysis of Boundary-Value Problems in Thick Multi-Level Junctions of Type 3:2:2" (<https://doi.org/10.1007/978-3-030-35537-1>), яка опублікована у престижному видавництві Springer на початку 2020 року.

У 2012–2016 роках Дмитро Садовий брав участь у виконанні міжнародного наукового проекту Marie Curie project "EU-Ukrainian Mathematicians for Life Science" (<http://www.math.uniluebeck.de/EUMLS/>) спільно з дослідницькими групами з Німеччини, Норвегії, Італії, Австрії та України. Зокрема, Д. Ю. Садовий проводив наукові дослідження в наукових центрах університетів Любека (Німеччина) та Осло (Норвегія).

За час роботи на факультеті проявився яскравий талант і здібності до викладацької роботи Дмитра. Він проводив практичні заняття з нормативних курсів "Інформатика і програмування", "Комплексний аналіз", "Рівняння математичної фізики". Саме Дмитро висловив ідею викладати курс програмування на основі Python та неодноразово надавав слушні зауваження і пропозиції з приводу розробки програми цієї навчальної дисципліни та її викладання. Студенти поважали і любили Дмитра Юрійовича за його вимогливість, принциповість, чесність, справедливість, дружелюбність. На жаль, через хворобу він був змушений залишити викладацьку роботу і перейти в 2017 р. до науково-дослідної частини факультету, де він працював над виконанням теми НДР "Якісний аналіз та керування еволюційними системами складної структури".

Дмитро завжди був уважним і ввічливим у спілкуванні, надійним товаришем. Він сумлінно виконував громадські обов'язки, зокрема, протягом тривалого часу був вченим секретарем наукового семінару "Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики".

Хвороба не дала здійснитися всім планам і мріям Дмитра Юрійовича та обірвала його молоде життя.

Пам'ять про Дмитра вічно житиме в наших серцях.

О. О. Безущак, М. Ф. Городній, М. О. Перестюк, Т. А. Мельник, В. Г. Самойленко, Є. С. Вакал, В. А. Бородін, Г. В. Верьовкіна, І. В. Гап'як, Б. П. Довгий, А. П. Крєневич, А. В. Ловейкін, О. В. Обвінцев, А. В. Клевцовський

НАУКОВА ХРОНІКА

МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ З АЛГЕБРИ, ПРИСВЯЧЕНА 60-РІЧЧЮ КАФЕДРИ "АЛГЕБРА ТА МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА" КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка з 14 по 18 липня 2020 року відбулася Міжнародна математична конференція, присвячена 60-річчю кафедри "Алгебра та математична логіка". Організаторами конференції виступили: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Інститут математики Національної академії наук України та Національний університет "Киево-Могилянська Академія". Зважаючи на пандемію коронавірусної хвороби, конференція проходила в режимі відеозв'язку. Такий формат проведення наукового спілкування в 2020 р. поступово став звичним і майже єдино можливим, проте вимагав ретельного планування, постійної уваги та злагоджених дій програмного та організаційного комітетів, очільниками яких були: завідувач відділу "Алгебра і топологія" Інституту математики НАН України, член-кореспондент НАН України Дрозд Юрій Анатолійович, деканка механіко-математичного факультету, кандидат фізико-математичних наук, доцент Безущак Оксана Омелянівна і завідувач кафедри "Алгебра і комп'ютерна математика", доктор фізико-математичних наук, професор Петравчук Анатолій Петрович.

Алгебричні дослідження в Київському університеті розпочалися на початку ХХ ст., коли був організований знаменитий семінар Дмитра Олександровича Граве. Його активними учасниками були такі видатні математики, як Борис Миколайович Делоне, Михайло Пилипович Кравчук, Олександр Маркович Островський, Микола Григорович Чеботарьов та Отто Юлійович Шмідт. Але наприкінці 30-х років минулого сторіччя Київська алгебрична школа була майже знищена внаслідок політичних репресій, а її провідний представник академік М. П. Кравчук помер у концтаборі. Перед війною в Києві не залишилося алгебристів і дослідження з алгебри не проводилися.

Своїм другим народженням алгебрична школа Київського університету багато в чому завдячує професору Льву Аркадійовичу Калужніну, який у 1956 р. переїхав з Берліна до Києва, принісши з собою традиції і математичну культуру кращих університетів Франції та Німеччини. У 1959 р. було засновано кафедру "Алгебра та математична логіка", ініціатором створення якої і першим завідувачем був Лев Аркадійович – видатний вчений, людина складної долі, засновник кількох напрямів досліджень в алгебрі, комп'ютерній лінгвістиці та теоретичній кібернетиці. Він сам та його учні відомі своїми результатами з теорії груп, теорії напівгруп, теорії автоматів, теорії графів та їхніх груп автоморфізмів. Лев Аркадійович був великим популяризатором математики, автором ряду підручників, монографій та науково-популярних посібників, на яких виросло не одне покоління молодших математиків. Першими співробітниками кафедри "Алгебра та математична логіка" були Циля Олександрівна Шуб та Володимир Андрійович Вишеньський. Педагогічний талант і непересічна людська харизма Володимира Андрійовича не залишали байдужими як його студентів, так і колеги по механіко-математичному факультету. Володимир Андрійовичу, серед іншого, належала ідея створення телевізійної фізико-математичної школи, яка задовго до появи інтернету і відеоуроків була надзвичайно популярним та ефективним методом навчання й популяризації математики для школярів.

У середині 60-х років на кафедрі "Алгебра та математична логіка" працював науковий семінар під керівництвом доктора фізико-математичних наук, професора Андрія Володимировича Ройтера. Його активними учасниками, а в подальшому співробітниками кафедри, були Юрій Анатолійович Дрозд та Володимир Васильович Кириченко. Своїми дослідженнями з теорії цілочисельних зображень кілець вони заклали основи одного з найбільш відомого у світі напрямку алгебричних досліджень, які проводилися на кафедрі. Метод матричних задач у теорії зображень, дихотомія "ручність–дикість", топологічні та категорні методи в теорії зображень груп та алгебр Лі, теорія модулів Коена–Маколея, теорія похідних категорій – це далеко неповний перелік напрямів досліджень Юрія Анатолійовича Дрозда та його численних учнів, внесок у які робить його живим класиком сучасної математики. Спільна з Володимиром Васильовичем Кириченком монографія "Скінченновимірні алгебри" є надзвичайно популярним підручником, який перекладено і перевидано кількома мовами. Наукові праці Володимира Васильовича Кириченка зі структурної теорії кілець, теорії зображень порядків, його фундаментальні монографії з теорії кілець стали класичними і впізнаваними у світі.

На початку 70-х років на кафедрі починає працювати Віталій Іванович Суцанський. Продовжуючи дослідження, започатковані своїм вчителем Львом Аркадійовичем Калужніним, він отримує ряд результатів з теорії нескінченних груп підстановок, які вже стали класичними, застосовує конструкції вінцевого добутку груп підстановок до побудови груп бернсайдового типу та до теорії факторизованих груп. Наукові інтереси Віталія Івановича Суцанського в подальшому охопили теорію напівгруп, дискретну геометрію, алгебри Лі, групи автоморфізмів кореневих дерев, групи нескінченних матриць, теорію локально скінченних груп і універсальні алгебри. Результати, отримані ним та його численними учнями, давно характеризують кафедру як відомий у світі центр з комбінаторної та геометричної теорії груп і напівгруп.

В останні три десятиріччя на кафедрі викладали та проводили наукові дослідження доктори фізико-математичних наук, професори Віталій Михайлович Бондаренко, Сергій Адамович Овсієнко, Ігор Володимирович Протасов, Юрій Стефанович Самойленко, Володимир Васильович Сергейчук, Ярослав Прокопович Сисак, Володимир Васильович Любашенко, Василь Олександрович Устименко. Свої перші наукові та педагогічні кроки на кафедрі робили Володимир Володимирович Бавула, Ганна Кудрявцева, Володимир Мазорчук, Володимир Некрашевич та В'ячеслав Футорний. У різні роки кафедрою завідували Лев Аркадійович Калужнін, Сергій Трохимович Завало, Юрій Анатолійович Дрозд, Віталій Іванович Суцанський. З 2004 року завідувачем кафедри "Алгебра та математична логіка" є Анатолій Петрович Петравчук. Дослідження з теорії асоціативних алгебр та алгебр Лі диференціювань, які він проводить разом зі своїми учнями, лягли в основу ще одного наукового напрямку, за яким у світі впізнають школу алгебри Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Кафедра "Алгебра та математична логіка" традиційно відзначає свої ювілеї проведенням наукових конференцій. У 1999 р. проводилася наукова конференція молодих математиків до 40-річчя кафедри, а в 2009 р. – наукова конференція до 50-річчя кафедри. Не став винятком і теперішній 60-річний ювілей. Вітаючи учасників конференції, ректор Університету академік Леонід Губерський відзначив внесок Д. О. Граве і Л. А. Калужніна в розвиток алгебри і математики в цілому не тільки в Київському університеті, але й у всій Україні. Він побажав учасникам конференції плідної роботи і подальших наукових результатів.

Завідувач відділу "Алгебра і топологія" Інституту математики НАН України, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, один із засновників Київської алгебричної школи, у своєму виступі вказав на важливу роль кафедри у розвитку алгебричної науки в Україні та за її межами в підготовці наукових і науково-педагогічних кадрів для наукових установ та закладів вищої освіти. Також виступила з вітальною промовою проректорка з наукової роботи О. І. Жилінська, яка зазначила про важливість фундаментальних наук для розвитку держави, великий внесок як факультету, так і кафедри "Алгебра та математична логіка" у розвиток математики в Україні.

Деканка механіко-математичного факультету О. О. Безущак у своєму вітальному виступі подякувала всім учасникам конференції та запрошеним лекторам за згоду виступити з доповідями і побажала плідної роботи конференції.

Із доповіддю про історію кафедри, її розвиток і сучасний стан наукових досліджень виступив завідувач кафедри професор А. П. Петравчук.

Серед понад 100 учасників конференції були як колишні, так і нинішні співробітники кафедри, багато її випускників. З пленарними доповідями виступили запрошені доповідачі, серед яких цілий ряд всесвітньо відомих і знаних алгебристів: Володимир Бавула, Тарас Банах, Оксана Безущак, Агнешка Бір, Ігор Бурбан, Ярослав Воробець, Роман Голловко, Вольдемар Голубовський, Ростислав Григорчук, Михайло Докучаєв, Юрій Дрозд, Анатолій Жучок, Юхим Зельманов, Августин Канадас, Ганна Кудрявцева, Леонід Курдаченко, Олександр Марцинковський, Олів'є Мат'є, Володимир Некрашевич, Богдана Олійник, Олександр Ольшанський, Артем Пулеметов, Миколай Решетіхін, Дмитро Савчук, Людмила Туровська, Василь Устименко, Едвард Френкель, В'ячеслав Футорний. Доповідачі представляли Австралію, Бразилію, Великобританію, Колумбію, Польщу, Словенію, США, Україну, ФРН, Францію, Чехію, Швецію (найбільша кількість пленарних доповідачів була з України та США).

Кафедра продовжує активно розвиватися як у науковому, так і в освітньому напрямках. Реагуючи на сучасні потреби науки і освіти, у 2020 р. вона змінила назву кафедри на "Алгебра і комп'ютерна математика". Незважаючи на невелику кількість співробітників (2 професори, доктори наук – А. П. Петравчук і А. С. Олійник; 2 доценти, доктори наук – Є. В. Бондаренко, Я. В. Лавренюк, 3 доценти, кандидати наук – О. О. Безущак, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська та 1 асистент – О. О. Десятерик), кафедра залишається осередком алгебричних досліджень в Університеті та в Україні. Реагуючи на виклики часу, кафедра розширює сферу своїх науково-освітніх інтересів і прагне залишатись одним із провідних центрів сучасної науки.

Ю. А. Дрозд, О. О. Безущак, А. П. Петравчук, Є. В. Бондаренко, О. Г. Ганюшкін, Є. А. Кочубінська, А. С. Олійник.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі – "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць (первинна дата надходження не зберігається). Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

Загальні вимоги

До Редакційної колегії "Вісника" подаються

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкovanого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються однією на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися таких умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

- текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS Office WORD 2003, не новіше, (*.doc) без застосування стильової розмітки**;
- поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
- комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
 - шрифт статті – Arial, розмір 9;
 - інтервал між рядками – одинарний;
 - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
 - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріал статті має бути поданий у такій послідовності:
 - класифікаційний індекс Універсальної десятикової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
 - відомості про авторів, що містять такі елементи: перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
 - назва статті (українською, 5–9 слів, що відповідає змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо і стисло відображає зміст, і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку (Arial Black, 10 pt, звичайний);
 - анотація, резюме (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."; анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, окрім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; окрім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища й ініціали авторів;
 - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
 - список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
 - дата надходження до редколегії, наприклад, "Стаття надійшла до редколегії 09.11.05". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 pt, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

- кожну аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;
- джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
- усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;
- не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
- на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
- усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
- усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відділків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
- формули у статтях, як такі, що розміщені в окремому рядку, так і розміщені у тексті, набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:			Define Size:		
Text	Times New Roman		Full		9 pt
Function	Times New Roman		Subscript/Superscript		7 pt
Variable	Times New Roman	italic	Sub-Subscript/Superscript		6 pt
L.C.Greek	Symbol		Symbol		14 pt
UC.Greek	Symbol		Sub-Symbol		9 pt
Vector-matrix	Times New Roman	bold			
Number	Times New Roman				

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Bio), Ki (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (°C), Фаренгейта (°F), Реомюра (°R);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці вимірювання величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовок бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передуює рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів;
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті таким чином:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Назва**, **Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність дотримання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**МАТЕМАТИКА
МЕХАНІКА**

Випуск 1(41)

Оригінал-макет виготовлено ПВЦ "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,6. Наклад 300. Зам. № 220-
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
Б-р Тараса Шевченка 14, м. Київ, 01030
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02