ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА **1(37)/2017**

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	**М. Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.**
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	**В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula (United Kingdom) д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. T. Kiguradze, д-р фіз.-мат. наук, акад. АН Грузії (Georgia); Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko (United Kingdom), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, акад. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov (Sweden), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. М. Станжицький, д-р. фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk (Chile), д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Futorny (Brazil), д-р фіз.-мат. наук, проф.; I. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.**

Адреса редколегії	**Механіко-математичний факультет, просп. акад. Глушкова, 4 Е, Київ, Україна, 03127 ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua**

Затверджено	**Вченою радою механіко-математичного факультету 24.04.17 (протокол № 11)**
Атестовано	**Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010**
Зареєстровано	**Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09**
Засновник та видавець	**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"**
	Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	**ВПЦ "Київський університет" (кімн. 43), б-р Т. Шевченка, 14, Київ, Україна, 01601 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28**

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS 1(37)2017

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

CHIEF EDITOR	M. Gorodnii, Full Professor, Dr. Hab.
EDITORIAL BOARD	V. Samoylenko, Full Professor, Dr. Hab. (Deputy Editor); A. Zaitsev, PhD (Secretary); V. Bavula (United Kingdom), Full Professor, Dr. Hab.; Y. Drozd, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Zhuk, Full Professor, Dr. Hab.; V. Kirichenko, Full Professor, Dr. Hab.; I. Kiguradze, Academician of NAS of Georgia, Dr. Hab.; B. Kiforenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Kozatchenko, Full Professor, Dr. Hab.; G. Kulinich, Full Professor, Dr. Hab.; N. Leonenko (United Kingdom Full Professor, Dr. Hab.; O. Limarchenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Mishura, Full professor, Dr. Hab.; L. Molchenko, Full Professor, Dr. Hab.; I .Parasyuk, Full Professor, Dr. Hab.; M. Perestyuk, Full Professor, Academician of NAS of Ukraine, Dr. Hab.; A. Petravchuk, Full Professor, Dr. Hab.; D. Silvestrov (Sweden), Full Professor, Dr. Hab.; A. Stanzhytskyi, Full Professor, Dr. Hab.; S. Trofimchuk (Chile), Full Professor, Dr. Hab; V. Futorny (Brazil), Full Professor, Dr. Hab.; I. Shevchuk, Full Professor, Dr. Hab.

Address of Editorial board	Faculty of Mechanics and Mathematics, 4E Academician Glushkov avenue, Kyiv, 03127, Ukraine; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Approved	Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics 24.04.17 (protocol № 11)
Attested	By Higher Attestation Commission. Decision of Presidium of HAC of Ukraine № 1-05/4 from 26.05.2010
Registered	Ministry of Justice of Ukraine Certificate of state registration КВ № 16007-4479Р from 11.12.09
Founder and publisher	National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv University Publishing and Printing Centre The certificate is added to registry ДК № 1103 from 31.10.02
Publisher's address	Kyiv University Publishing and Printing Center (off. 43), 14 Taras Shevchenko blv., Kyiv, 01601, Ukraine; ☎ (38044) 239 32 22; fax 239 31 28

© National Taras Shevchenko University of Kyiv, Kyiv University Publishing and Printing Centre, 2017

ЗМІСТ

Безкрила С., Нестеренко О., Чайковський А.
Про модулі неперервності дробового порядку, породжені півгрупою операторів 6

Задерей П., Гаєвський М., Веремій М.
Асимптотична формула для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є 10

Петрова Т.
Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій,
що мають дробову похідну довільного порядку $r > 2$ 17

Болілий В., Зеленська І.
Внутрішня точка звороту для диференціального рівняння типу Орра – Зоммерфельда 20

Вакал Є., Вакал Ю., Вакал Л.
Розв'язання крайової задачі для рівняння еліптичного типу зі спеціальними умовами спряження 24

Вовк В.
Сингулярно збурене рівняння Кортевега – де Фріза:
точні й асимптотичні односолітонні розв'язки та їх чисельні наближення 28

Громик А., Конет І., Пилипюк Т.
Гіперболічна крайова задача в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі 31

Мороз В.
Інтегральне зображення розв'язку параболічної крайової задачі з похідною по часу
у крайових умовах та умовах спряження 37

Романюк І.
Глобальний атрактор параболічної системи з багатозначним імпульсним збуренням 44

Мішура Ю., Шатохін М.
Багатовимірний вінерівський процес як дифузійний 48

Пригара Л.
Стохастичне хвильове рівняння зі стійким білим шумом 53

До 60-річчя від дня народження Олександра Георгійовича Кукуша 58

До 70-річчя від дня народження Ігоря Олександровича Шевчука 59

СОДЕРЖАНИЕ

Бескрылая С., Нестеренко А., Чайковский А.
О модулях непрерывности дробного порядка, порожденных полугруппой операторов 6

Задерей П., Гаевский М., Веремий М.
Асимптотическая формула для интеграла от модуля функции, заданной рядом Фурье..... 10

Петрова Т.
Про поточечные интерполяционные оценки монотонного приближения функций,
которые имеют дробную производную порядка $r > 2$..... 17

Болилый В., Зеленская И.
Внутренняя точка поворота для дифференциального уравнения типа Орра – Зоммерфельда 20

Вакал Е., Вакал Ю., Вакал Л.
Решение краевой задачи для уравнения эллиптического типа
со специальными условиями сопряжения 24

Вовк В.
Сингулярно возмущенное уравнение Кортевега – де Фриза:
точные и асимптотические односолитонные решения и их численные приближения..... 28

Громик А., Конет И., Пилипюк Т.
Гиперболическая краевая задача в кусочно-однородном циллиндрически-круговом полупространстве 31

Мороз В.
Интегральное представление решения параболической краевой задачи с производной по времени
в краевых условиях и условиях сопряжения 37

Романюк И.
Глобальный аттрактор параболической системы с многозначным импульсным возмущением 44

Мишура Ю., Шатохин М.
Винеровский процесс как диффузионный 48

Пригара Л.
Стохастическое волновое уравнение с устойчивым белым шумом 53

К 60-летию со дня рождения Александра Георгиевича Кукуша..... 58

К 70-летию со дня рождения Игоря Александровича Шевчука..... 59

CONTENTS

Bezkryla S., Nesterenko O., Chaikovs'kyi A.
On fractional order modulus of continuity generated by semigroups of operators 6

Zaderei P., Gaevskij M., Veremii M.
Asymptotics of the integral of a modul of function given by a Fourier series 10

Petrova T.
Pointwise estimates for monotone polynomial approximation of function
with fractional derivatives of order $r > 2$ 17

Boliliy V., Zelenska I.
Interior turning point for differential equation of the the Orr – Sommerfeld type 20

Vakal E., Vakal Yu., Vakal I.
Solving boundary value problem for equation of elliptic type with special coupling conditions 24

Vovk V.
Singularly pertubed Korteweg – de Vries equation:
exact and asymptotic soliton like solutions and their numerical approximations 28

Gromyk A., Konet I., Pylypiuk T.
Hyperbolic boundary value problem in piecewise homogeneous cylindrical-circular halfspace 31

Moroz V.
The integral representation of the solution of parabolic boundary value problem with derivative by time
in boundary conditions and conditions of contracting 37

Romaniuk I.
Global attractor of parabolic system with multy-valued impulsive perturbation 44

Mishura Y., Shatokhin M.
Diffusion property of Wiener process 48

Pryhara I.
Stochastic wave equation with stable white noise 53

To the 60 anniversary from the date of a birth of Alexander Kukush 58

To the 70 anniversary from the date of a birth of Igor Shevchuk 59

УДК 517.518.2

С. Безкрила, асист.
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ,
О. Нестеренко, канд. фіз.-мат. наук, доц., А. Чайковський, д-р фіз.-мат. наук, доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *sveti1988@gmail.com, NesterenkoON@ukr.net*

ПРО МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ, ПОРОДЖЕНІ ПІВГРУПОЮ ОПЕРАТОРІВ

Отримано узагальнення на випадок не цілого α відомого твердження про те, що не кожна α -мажоранта є модулем неперервності порядку α, породженим півгрупою операторів. Наведено приклад нерівності для модулів неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α.

Вступ. Нехай X – лінійний простір, $\{T_h : h \ge 0\}$ – однопараметрична сім`я лінійних операторів $T_h : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$, $h \ge 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ – одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1}T_{h_2}$ для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$. Нехай також існує лінійна множина $Y \subset X$, на якій введено норму $\|\cdot\|$ відносно якої простір Y є банаховим, причому для всіх $f \in X$ і $h \ge 0$ справедливе включення $(T_h - I)f \in Y$ і $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$. Припустимо також, що для кожного $h \ge 0$ звуження оператора T_h на простір Y, яке ми позначимо $\tilde{T}_h$, є неперервним оператором і його норма $\|\tilde{T}_h\| \le 1$.

У випадку, коли $X = Y$ – банахів простір, то півгрупа $\{T_h : h \ge 0\}$, що задовольняє наведені припущення, називається ***стискуючою півгрупою*** класу (C_0) [4]. Для півгруп класу (C_0) поняття k -го модуля неперервності для натуральних k розглядалось у [6]. Для таких півгруп аналогічно до [11] можна означити поняття модуля неперервності порядку $\alpha > 0$.

Основна частина. Означення 1. Якщо $X = Y$ – банахів простір, $\{T_h : h \ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), число $\alpha > 0$, то функція

$$\omega_\alpha(f,t) := \sup_{h\in[0,t]} \left\|(I - T_h)^\alpha f\right\|, \ t \ge 0, \tag{1}$$

де

$$(I - T_h)^\alpha f := \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_h^j f \tag{2}$$

і

$$C_\alpha^0 := 1, \ C_\alpha^j := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}, \ j \ge 1,$$

називається модулем неперервності елемента $f \in Y$ порядку $\alpha > 0$, породженим півгрупою $\{T_h : h \ge 0\}$.

Відомо [8, пункт 407], що при всіх $x \in [-1,1]$ і $\alpha > 0$ справедливий розклад $(1-x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j x^j$, причому ряд справа збігається абсолютно, зокрема, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left|C_\alpha^j\right|$ збігається. Звідси випливає коректність означення 1, оскільки $\|T_h\| \le 1$. Крім того, при $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ з рівності $(1-x)^{\alpha+\beta} = (1-x)^\alpha (1-x)^\beta$, $x \in [-1,1]$, випливає співвідношення $C_{\alpha+\beta}^j = \sum_{k=0}^{j} C_k^j C_\beta^{j-k}$, $j \ge 0$, з якого отримуємо, що за умов означення 1

$$(I - T_h)^{\alpha+\beta} = (I - T_h)^\alpha (I - T_h)^\beta \tag{3}$$

Нехай тепер $X \ne Y$. Якщо $f \in X$, то за припущенням елемент $g := (I - T_h)f \in Y$. Якщо $\alpha > 1$ і в ряді (2) замінити α на $\alpha - 1$ та f на g, то отриманий ряд збігається в Y і рівність

$$(I - T_h)^\alpha f := (I - T_h)^{\alpha-1} g = (I - T_h)^{\alpha-1}(I - T_h) f$$

визначає елемент з Y. З рівності (3) випливає коректність цього означення, а отже, і наступного означення 2.

Означення 2. У випадку $X \ne Y$ модулем неперервності елемента $f \in X$ порядку $\alpha \ge 1$, породженим півгрупою $\{T_h : h \ge 0\}$, називається функція

$$\omega_\alpha(t) := \omega_\alpha(f,t) := \sup_{h\in[0,t]} \left\|(I - T_h)^\alpha f\right\|, \ t \ge 0.$$

© Безкрила С., Нестеренко О., Чайковський А., 2017

Випадок $X = Y$ реалізується, наприклад, якщо X – це один з наступних банахових просторів: 1) $UC_b(\mathbb{R})$ – простір обмежених рівномірно неперервних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ з рівномірною нормою; 2) $\tilde{C}$ – простір неперервних 2π -періодичних функцій з рівномірною нормою; 3) $L_p(\mathbb{R})$ – простір вимірних інтегровних у p -му степені функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ із нормою $\|f\| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $f\in L_p(\mathbb{R})$; 4) $\tilde{L}_p$ – простір вимірних 2π -періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, інтегровних у p -му степені на $[0,2\pi]$, із нормою $\|f\| := \left(\int\limits_{0}^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $f\in\tilde{L}_p$, $1\le p<+\infty$. Нехай також T_h – оператор зсуву на $h\ge 0$, тобто $(T_h f)(x) := f(x+h)$, $x\in\mathbb{R}$, $f\in X$. Тоді $\{T_h : h\ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0) у кожному з цих просторів X. У випадках 2) і 4) модуль неперервності порядку $\alpha>1$, породжений цією півгрупою, розглядався в [11]. Для всіх $k\in\mathbb{N}$ виконуються рівності

$$\left(T_h^k f\right)(x) = f(x+kh),\ \left((T_h - I)^k f\right)(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j f(x+jh) =: \Delta_h^k(f,x).$$

Остання величина називається k -ю скінченною різницею функції f у точці x із кроком $h>0$ [9]. Тому у випадках 1) і 2), коли $\alpha = k\in\mathbb{N}$, модуль неперервності, породжений цією півгрупою, є рівномірним k -м модулем неперервності функції $f\in X$. У випадках 3) і 4), коли $\alpha = k\in\mathbb{N}$, модуль неперервності, породжений цією півгрупою, є інтегральним k -м модулем гладкості функції $f\in X$ [7].

Випадок $X\ne Y$ реалізується, наприклад, якщо $X = UC(\mathbb{R})$ – лінійний простір рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Y = UC_b(\mathbb{R})$ із рівномірною нормою, а $\{T_h : h\ge 0\}$ – сукупність операторів зсуву на $h>0$. При цьому модуль неперервності, породжений цією півгрупою, при $\alpha=2$, $\alpha=3$ і $\alpha=4$ розглядався в [5], [2], [1] відповідно, а при довільному $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\ge 2$, наводився в [10].

Лема [3]. *Нехай виконується одна з умов: i) $X = Y$ – банахів простір, $\{T_h : h\ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), $\alpha>0$; ii) $X\ne Y$, $\{T_h : h\ge 0\}$ – півгрупа операторів в X, яка є стискуючою півгрупою класу (C_0) в Y, $\alpha\ge 1$. Нехай також $f\in X$, $\omega(\cdot) = \omega_\alpha(f,\cdot)$ – модуль неперервності елемента $f\in X$ порядку α, породжений півгрупою $\{T_h : h\ge 0\}$. Тоді справедливі такі властивості:*

1) $\omega(0) = 0$;

2) функція ω є неспадною на $[0,+\infty)$;

3) функція ω є неперервною на $[0,+\infty)$.

Зауваження з [10]. Якщо виконуються умови леми і $\alpha = k\in\mathbb{N}$, то функція ω задовольняє умову:

4) $\omega(n\delta)\le n^k\omega(\delta)$ для довільних $\delta\ge 0$ і $n\in\mathbb{N}$.

Легко бачити, що умова 4) для невідємних функцій випливає з умови:

5) функція $(0,+\infty)\ni\delta\mapsto\omega(\delta)/\delta^k$ монотонно не зростає на $(0,+\infty)$.

Відзначимо, що в [9] функції, що задовольняють умови 1) – 3) і 5), називаються k *-мажорантами*.

Наступний приклад показує, що нерівність

$$\omega_\alpha(f,nt)\le n^\alpha\omega_\alpha(f,t),\ n\in\mathbb{N},\ t>0, \tag{4}$$

для не цілих α, узагалі кажучи, хибна.

Приклад. Нехай $X = Y$ – банахів простір обмежених рівномірно неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ із рівномірною нормою, $(T_h f)(x) = f(x+h)$, $x\ge 0$, $h\ge 0$. Тоді $\{T_h : h\ge 0\}$ є стискуючою півгрупою в X класу (C_0). Однак, якщо $\alpha = \frac{1}{2}$ і $f(x) = 1-\frac{1}{3}x$, $x\in[0,1]$, $f(x) = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}x$, $x\in(1,2]$, $f(x)=0$, $x>2$, то для породженого півгрупою $\{T_h : h\ge 0\}$ модуля неперервності при $n=2$ і $t=1$ нерівність (4) хибна, тобто

$$\omega_{\frac{1}{2}}(f,2) > \sqrt{2}\,\omega_{\frac{1}{2}}(f,1). \tag{5}$$

Доведемо нерівність (5). Позначимо

$$g(x,h) := \left((I-T_h)^{1/2} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^j (-1)^j \left(T_h^j f\right)(x) = f(x) - \frac{1}{2}f(x+h) - \frac{1}{8}f(x+2h) - \ldots,\ x\ge 0,\ h\ge 0.$$

Зауважимо, що $C_{\frac{1}{2}}^{j}(-1)^{j}<0$, $j\ge 1$. З розкладу $(1-x)^{\alpha}=\sum_{j=0}^{\infty}C_{\alpha}^{j}(-1)^{j}x^{j}$ при $x=1$ отримаємо, що $\sum_{j=1}^{\infty}\left|C_{\frac{1}{2}}^{j}\right|=-\sum_{j=1}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{j}(-1)^{j}=-\left(\sum_{j=0}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{j}(-1)^{j}-1\right)=-\left((1-1)^{\frac{1}{2}}-1\right)=1$. Звідси, враховуючи невідємність функції f, випливає, що $0\le g(x,h)\le f(x)$. Із цієї нерівності та формули (1) отримуємо $\omega_{\frac{1}{2}}(f,t)=\sup_{h\in[0,t],x\ge 0}|g(x,h)|=\sup_{h\in[0,t],x\ge 0}g(x,h)$. Маємо $\omega_{\frac{1}{2}}(f,2)=\sup_{h\in[0,2],x\ge 0}g(x,h)=1$, бо $g(x,h)\le f(x)\le 1$, причому рівність у цій нерівності досягається, наприклад, при $x=0$, $h=2$. Враховуючи, що функція g є неспадною за h, маємо, що якщо $h\in[0,1]$, то $g(x,h)\le g(x,1)=f(x)-\frac{1}{2}f(x+1)=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}(x+1)\right)=\frac{2}{3}$ при $x\in[0,1]$ і $g(x,h)\le f(x)-\frac{1}{2}f(x+1)\le f(1)$ при $x>1$. Тому $\omega_{\frac{1}{2}}(f,1)=\sup_{h\in[0,1],x\ge 0}g(x,h)=\frac{2}{3}$. Оскільки $1>\sqrt{2}\frac{2}{3}$, то нерівність (5) доведено.

Теорема. *Нехай виконується одна з умов: і) $X=Y$ – банахів простір, $\{T_h:h\ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), $\alpha\ge 3$; ii) $X\ne Y$, $\{T_h:h\ge 0\}$ – півгрупа операторів в X, яка є стискуючою півгрупою класу (C_0) в Y, $\alpha\ge 4$. Тоді для довільного числа $\beta>\alpha-\frac{1}{2}$ існує така функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, не тотожно рівна нулю, що задовольняє умови 1)-3) леми, причому функція $(0,+\infty)\ni\delta\mapsto\omega(\delta)/\delta^{\beta}$ є незростаючою на $(0,+\infty)$ і для жодного елемента $f\in X$ не виконується рівність*

$$\lim_{\delta\to 0+}\omega_{\alpha}(f,\delta)/\omega(\delta)=1.$$

Ця теорема узагальнює результати статті [10], в якій за припущень зі вступу до цієї роботи розглядався випадок, коли $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\ge 2$, $\beta>\alpha-1$), та праць [5], [2], [1], в яких розглядався випадок, коли X – простір рівномірно неперервних на осі функцій, T_h – оператор зсуву на h, $\alpha=2$, $\alpha=3$ та $\alpha=4$ відповідно. У цих працях показано, що при $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$, не кожна k-мажоранта є k-м модулем неперервності, породженим півгрупою операторів, для деякого елемента f.

Доведення. У [3] встановлено нерівність

$$2\omega_{\alpha}(f,nt)\le\omega_{\alpha}(f,(n+1)t)+\omega_{\alpha}(f,(n-1)t)+C_n\omega_{\alpha}(f,t),\ t>0, \tag{6}$$

де $C_n>0$ – стала, що не залежить від f, причому $C_n=O\left(n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right)$, $n\to\infty$. З останньої рівності для функції $\varphi(t)=t^{\beta}$, $t\in[0,1/2]$, і $\varphi(t)=(1/2)^{\beta}$, $t\in(1/2,1]$, маємо

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)+C_n\varphi\left(\frac{1}{2n}\right)=-\frac{\beta}{2^{\beta}n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ n\to\infty,$$

тому існують такі числа $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0\ge 2$ і $\eta>0$, що

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0}\right)+C_{n_0}\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right)=-\eta.$$

Позначимо $S=\frac{1}{2n_0}$, $R:=(2S)^{\beta}$. Визначимо тепер функцію ω. Нехай $\omega(0)=0$, а якщо $\delta\in[S^{j+1},S^{j})$ при деякому $j\in\mathbb{Z}$, то покладемо $\omega(\delta)=R^{j}\varphi\left(\delta/S^{j}\right)$. Отримаємо функцію ω, коректно визначену на $[0,+\infty)$, яка задовольняє умови 1)-3), і таку, що функція $(0,+\infty)\ni\delta\mapsto\omega(\delta)/\delta^{\beta}$ є незростаючою на $(0,+\infty)$. Дійсно, ці умови виконуються для функції φ, а також

$$\omega\left(S^{j}+\right)=\omega\left(S^{j}\right)=R^{j-1}\varphi\left(S^{j}/S^{j-1}\right)=\frac{1}{2^{\beta}n_0^{\beta j}},\ \omega\left(S^{j}-\right)=\lim_{\delta\to S^{j}-}R^{j}\varphi\left(\delta/S^{j}\right)=\frac{1}{2^{\beta}n_0^{\beta j}}.$$

Отже, ω неперервна на $(0,+\infty)$; $|\omega(\delta)|\le R^{j}\le(1/2)^{j}$, $\delta\in[0,S^{j})$, тому $\omega(0+)=0=\omega(0)$. Оскільки φ неспадна, то ω неспадна на кожному проміжку $[S^{j+1},S^{j})$, а тому, з огляду на її неперервність на $[0,+\infty)$, є неспадною на $[0,+\infty)$. Аналогічно легко бачити, що функція $(0,+\infty)\ni\delta\mapsto\omega(\delta)/\delta^{\beta}$ є незростаючою на $(0,+\infty)$.

Оскільки $0<S\le 1/4$, то при всіх $j>0$

$$\{S^{j}(S+1/2),\ S^{j}/2,\ S^{j}(-S+1/2),\ S^{j+1}\}\subset[S^{j+1},S^{j}),$$

тому

$$\omega\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)-2\omega\left(S^j/2\right)+\omega\left(S^j\left(-S+1/2\right)\right)+C_{n_0}\omega\left(S^{j+1}\right)=$$

$$=R^j\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0}\right)+C_{n_0}\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right)\right)=-R^j\eta<-R^j\varphi\left(S+1/2\right)\eta=-\omega\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)\eta\,. \qquad (7)$$

Якщо функція $\tilde{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ така, що $\lim\limits_{\delta\to 0+}\tilde{\omega}(\delta)/\omega(\delta)=1$, то існує таке $j\in\mathbb{N}$, що для всіх $\delta\in(0,S^j)$ виконується нерівність

$$\left|\tilde{\omega}(\delta)-\omega(\delta)\right|\le\frac{\eta\omega(\delta)}{C_{n_0}+4}\,.$$

Звідси, враховуючи (7) і те, що функція ω неспадна, отримаємо оцінку

$$\tilde{\omega}\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)-2\tilde{\omega}\left(S^j/2\right)+\tilde{\omega}\left(S^j\left(-S+1/2\right)\right)+C_{n_0}\tilde{\omega}\left(S^{j+1}\right)<-\omega\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)\eta+\left(C_{n_0}+4\right)\frac{\eta\omega\left(S^j\left(S+1/2\right)\right)}{C_{n_0}+4}=0\,,$$

що суперечить нерівності (6), якщо в ній покласти $t=S^{j+1}$ і $n=n_0$. Таким чином, функція $\tilde{\omega}$ не може бути модулем неперервності елемента $f\in Y$ порядку $\alpha>0$, породженим півгрупою $\{T_h:h\ge 0\}$.

Теорему доведено.

Висновки. У цій роботі відоме твердження про те, що для модулів неперервності, породжених півгрупою операторів, не кожна α-мажоранта є модулем неперервності порядку α, узагальнено на випадок не цілих α. Наведено приклад нерівності для модулів неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α.

Список використаних джерел

1. *Безкрила С. І.* Про четвертий модулі неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – № 13 (1). – С. 45–50.
2. *Безкрила С. І.* Про треті модулі неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1420–1424.
3. *Безкрила С. І.* Про одну нерівність для модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 7 – 10 жовтня 2017, Київ. Т.1. – К : НТУУ "КПІ", 2017. – С. 168 – 169.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида . – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 624 с.
5. *Конягин С. В.* О вторых модулях непрерывности / С. В. Конягин // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 150-152.
6. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов / Н. П. Купцов // Успіхи мат. наук – 1968. – Т. XXIII. – Вып. 4 (142). – С. 117-178.
7. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. – М. : Физматгиз, 1960. – 624 с.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2. –М. : Наука, 1968. – 795 с.
9. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – К. : Наук. думка, 1992. – 224 с.
10. *Bezkrula S. I.* On high orders moduli of continuity generated by semigroups of operators / S. I. Bezkrula, O. N. Nesterenko and A. V. Chaikovskyi. // Jaen J. Approx. – 2016. – Vol. 8, № 2 – P. 183 –190.
11. Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschits classes / P. L Butzer, H. Dyckhoff, E. Gorlich, R.L. Stens // Can. J. Math. – 1977. – Vol. XXIX (4). – P. 781 – 793.

Надійшла до редколегії 09.05.17

С. Бескрылая, ассист.
Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, Киев, Украина,
А. Нестеренко, канд. физ.-мат. наук, доц., А. Чайковский д-р физ.-мат. наук, доц.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУГРУППОЙ ОПЕРАТОРОВ

На случай не целого α получено обобщение известного утверждения о том, что не каждая α-мажоранта является модулем непрерывности порядка α, порожденным полугруппой операторов. Приведен пример неравенства для модулей непрерывности порядка α, которое истинно при целых α, но не остается таковым для не целых α.

S. Bezkryla, assistant
Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine,
O. Nesterenko PhD, Associate Professor, A. V.Chaikovskyi, Full Doctor, Associate Professor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON FRACTIONAL ORDER MODULUS OF CONTINUITY GENERATED BY SEMIGROUPS OF OPERATORS

The generalization for the known statement "There exists some α-majorant that is not an order-α modulus of continuity, generated by any semigroup of operators" is obtained for non-integer values of α. An example is provided for inequality that is false for non-integer moduli of continuity and is true for integer moduli.

УДК 517.5

П. Задерей, д-р фіз.-мат. наук
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ,
М. Гаєвський, канд. фіз.-мат. наук
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький,
М. Веремій, асп.
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ

АСИМПТОТИЧНА ФОРМУЛА ДЛЯ ІНТЕГРАЛА ВІД МОДУЛЯ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ФУР'Є

Отримано асимптотичну формулу для інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є із комплексними коефіцієнтами, на які накладаються умови типу Сідона – Теляковського.

Вступ. У цій статті встановлюється асимптотична формула для інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt \tag{1}$$

через коефіцієнти $c_k \in C$, що задовольняють умови типу Сідона – Теляковського [5; 10], які будемо позначати через $S-T^*$. Припускаємо виконання таких умов:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0, \tag{2}$$

існують такі числа A_k, що

$$|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \le A_k, k = 0,1,2...\,, \tag{3}$$

причому

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta A_k\right| < \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k} < \infty\,. \tag{5}$$

Умови (2)-(5) еквівалентні, тобто описують одну й ту ж множину тригонометричних рядів, таким умовам: існують такі числа $A_k \downarrow 0$, що виконуються нерівності (3), збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$, а також виконується умова (5). Ці умови вперше були встановлені С. О. Теляковським [5] при вивченні умов інтегровності тригонометричних рядів:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \tag{7}$$

де $a_k, b_k \in R$, а їх еквівалентність умовам (3) і (4) доведена А. Лейндлером [11].

Зокрема С. О. Теляковським [5] встановлено, що якщо для коефіцієнтів ряду (6) виконуються умови (2)-(4), то цей ряд є рядом Фур'є сумовної функції і виконується нерівність

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\right| dx \le K\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta A_k\,|\,. \tag{8}$$

Тут і далі у статті K – деяка абсолютна стала, можливо, не одна й та ж у різних формулах.

Якщо для коефіцієнтів ряду (7) виконуються умови (2)-(4), то цей ряд є рядом Фур'є сумовної функції тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k}$ і справедлива оцінка

$$\int_{\pi/(m+1)}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\right| dx = \sum_{k=1}^{m}\frac{|b_k|}{k} + O\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,|\,\Delta A_k\,|\right). \tag{9}$$

У цій статті ми розглянемо умови інтегровності S-T*. Якщо покласти $c_k = a_k - ib_k, k = 1,2,...,c_0 = \frac{a_0}{2}$, то $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right) + i\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_k \cos kt + a_k \sin kt\right)$, і врахувавши нерівності $|\Delta a_k| \le |\Delta c_k|, |\Delta b_k| \le |\Delta c_k|$, можна стверджувати, що ряд в (1) при виконанні умов (2)-(5) буде рядом Фур'є деякої функції $f(\cdot) \in L_+ = \{g \in L : c_{-k} = 0, k = 1,2,...\}$.

Добре відомим є результат Харді – Літтвуда [4, с. 454], де для $\forall f \in L_+$ з рядом Фур'є $S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ встановлено оцінку $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k+1} \le K\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt.$ Згодом Л. Фейер [9] показав, що $K = \pi$.

© Задерей П., Гаєвський М., Веремій М., 2017

Г. М. Голузіним [2] покращено цю оцінку $2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k|}{k+\frac{1}{2}} \le \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right|dt.$

У статті О. В. Єфімова [3] доведено, що $\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=o}^{n} c_k e^{ikt}\right|dt \le K\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+1)(n-k)}{n+1}|\Delta^2 c_k| + \sum_{k=1}^{n}\frac{|c_k|+|c_{n-k}|}{k}\right).$

М. В. Гаєвський і П. В. Задерей [1] установили асимптотичну рівність для інтеграла від модуля тригонометричного полінома

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikt}\right|dt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}(|c_k|+|c_{n-k}|)\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-4\frac{|c_k|\cdot|c_{n-k}|}{(|c_k|+|c_{n-k}|)^2}\sin^2 t}\,dt + O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}|\Delta^2 c_{k-1}|\right).$$

Відомі також результати Р. М. Тригуба, де оцінки для інтеграла (1), виражені в термінах коефіцієнтів Фур'є – Лагранжа, інтегровної за Ріманом функції $c(x)$ такої, що $c_k = c\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right)$ [7], або її перетворень Фур'є [8].

Основні результати. Метою роботи є одержання асимптотичної формули типу (9) для інтеграла (1).

Теорема. *Якщо коефіцієнти ряду* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ *задовольняють умови (2)-(5), то для інтеграла* $I = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right|dt$ *рівномірно відносно* $m = 0,1,...$ *справедлива асимптотична рівність*

$$I = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|)\mathcal{I}_{m,k}(c) + 2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k} + O(T_m(A)),$$

де $\mathcal{I}_{m,k}(c) := \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-4\frac{|c_k|\cdot|c_{m-k}-c_{m+k}|}{(|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|)^2}\sin^2 t}\,dt$, а $T_m(A) := \sum_{k=0}^{m}(k+1)|\Delta A_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m+1)|\Delta A_k|$.

Для доведення теореми наведемо деякі допоміжні твердження, які викликають інтерес і як самостійні.

Лема 1. *Нехай* $a,b \in C$. *Тоді справедлива рівність* $\int_{-\pi}^{\pi}\left|a+be^{it}\right|dt = 4(|a|+|b|)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|a|\cdot|b|}{(|a|+|b|)^2}\sin^2 t}\,dt.$

Лема 2. *Для інтеграла* $I_0 = \int_{-\pi}^{\pi}\left|a+be^{it}\right|dt$ *справедливі оцінки* $I_0 \le 2\pi(|a|+|b|), I_0 \ge 4(|a|+|b|)$.

Нехай $m \ge 1, m \in N$, $\mu = [m/3]$ ($[m/3]$ – ціла частина числа $m/3$), $\nu = m - \mu$,

$$d_k = \begin{cases} c_k & k = 0,1,...,m-1, \\ 0, & k \ge m, \end{cases} \tag{10}$$

$$d'_k = \begin{cases} d_k, & k = 0,1,...,\mu, \\ \frac{\nu-k}{\nu-\mu}d_k, & k = \mu+1,...,\nu-1, \\ 0, & k \ge \nu. \end{cases} \tag{11}$$

$$d''_k = \begin{cases} d_{m-k} - d'_{m-k}, & k = 0,1,...,m, \\ 0, & k \ge m+1. \end{cases} \tag{12}$$

Таким чином $c_k = d_k = d'_k + d''_{m-k}$ при $k = 0,1,...,m-1$. Покладемо $q_{k,m} = \min\left(\left[\frac{k}{2}\right],\left[\frac{m-k}{2}\right]\right)$.

Лема 3. *Справедливі такі оцінки:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta d'_k| + \sum_{k=0}^{\infty}|\Delta d''_k| \le K\sum_{k=0}^{m-1}|\Delta c_k|,$$

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \cos kt\right|dt \le K\sum_{k=0}^{m}(k+1)|\Delta A_k| \tag{13}$$

де $\alpha_k = d'_k$, або $\alpha_k = d''_k$,

$$\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}\cos kt\right|dt \le K\sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m+1)|\Delta A_k|. \tag{14}$$

Для встановлення нерівностей (13) і (14) потрібно повторити міркування, які використовуються при доведенні теореми 1 у роботі [5].

Доведення теореми проводиться методом, який використовувався при доведенні теореми 1 в [6]. Для послідовності коефіцієнтів c_k визначимо послідовності $\{d_k\},\{d'_k\}$ і $\{d''_k\}, k=\overline{0,\infty}$, за формулами (10)-(12). Тоді для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$ будемо мати рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=0}^{m-1}(d'_k + d''_{m-k})e^{ikt} + \sum_{k=m}^{\infty} c_k e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} d'_k \cos kt + i\sum_{k=1}^{\infty} d'_k \sin kt + e^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \cos kt - ie^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \sin kt +$$

$$+e^{imt}\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\cos kt + ie^{imt}\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m}\sin kt = \sum_{k=0}^{\infty}(d'_k + e^{imt}c_{k+m})\cos kt + e^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \cos kt + \sum_{k=1}^{\infty}(d'_k + e^{imt}(c_{k+m)} - d''_k))\sin kt.$$

Користуючись одержаною С. О Теляковським [5] оцінкою (8) та нерівностями (13) і (14), знайдемо

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\left(d'_k + e^{imt}c_{k+m}\right)\cos kt + e^{imt}\sum_{k=1}^{\infty} d''_k \cos kt\right| dt \le KT_m(A).$$

Позначимо

$$B_{k,m} := B_{k,m}(t) = d'_k + e^{imt}\left(c_{m+k} - d''_k\right), k=1,2,...,B_0 = 0. \tag{15}$$

Очевидно, що

$$\left|\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt - \int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} B_{k,m}(t)\sin kt\right| dt\right| \le KT_m(A). \tag{16}$$

Оскільки $\sin kt = \dfrac{\cos\frac{2k-1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{\cos\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{k,m}(t)\sin kt = -\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\cos\frac{2k+1}{2}t. \tag{17}$$

Тому для всіх t справедлива оцінка

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta B_{k,m}(t)| \le |c_m| + \sum_{k=0}^{\infty}\left(|\Delta d'_k| + |\Delta c_{k+m}| + |\Delta d''_k|\right) \le KT_m(A). \tag{18}$$

Враховуючи (17) і обмеженість функції $1/2\sin\frac{t}{2} - 1/t$ та оцінку (18), знаходимо, що

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} B_{k,m}(t)\sin kt\right| dt - \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\frac{dt}{|t|}\right| \le KT_m(A).$$

Визначимо функції

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ \cos(2k+1)t, & \text{при } \dfrac{\pi}{2(2k+1)} \le t \le \pi - \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ 0, & \text{при } \pi - \dfrac{\pi}{2(2k+1)} \le t \le \pi, \end{cases} \quad \psi_k(t) = \begin{cases} \cos(2k+1)t, & \text{при } |t| \le \dfrac{\pi}{2(2k+1)}, \\ 0, & \text{при } |t| \ge \dfrac{\pi}{2(2k+1)}. \end{cases} \tag{19}$$

Ясно, що $\forall t \in [\pi,\pi]$ $\cos\frac{2k+1}{2}t = \varphi_k\left(\frac{t}{2}\right) + \psi_k\left(\frac{t}{2}\right)$ та

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\frac{dt}{|t|} - \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_k(t)\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}\right| \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\varphi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|} \le \int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}. \tag{20}$$

Використавши (15), матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|} \le 2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta d'_k\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t} + 2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta c_{k+m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t} + 2\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta d''_{k+m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t}.$$

Лема 4. *Якщо функції* $\varphi_k(t), k=0,1,...$, *визначені рівностями (19), а послідовність* $\{a_k\}, a_k \in C, k=0,1,2,...$, *задовольняє умови типу Сідона – Теляковського (2)-(4), то справедлива оцінка* $\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta a_k\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{t} \le KT_m(A)$.

Ця лема слідує з леми 3 у [6] і теореми 3 у[5].

Оскільки $c_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\forall k \in N$ $|c_k| = |\sum_{l=k}^{\infty}\Delta c_l| \le \sum_{l=k}^{\infty}|\Delta c_l| \le \sum_{l=k}^{\infty} A_l \le KT_k(A)$. З цієї оцінки і леми 4 одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(2t)\varphi_k(t)\right|\frac{dt}{|t|} \le KT_m(A). \tag{21}$$

Тому з (20) та (21) маємо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\cos\frac{2k+1}{2}t\right|\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}\right|\le KT_m(A). \tag{22}$$

З оцінок (16), (20) і (22) знайдемо, що $\left|\int_{\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_k e^{ikt}\right|dt-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}\right|\le KT_m(A).$

Покажемо тепер, що $\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\frac{|c_k|+|c_{m-k}-c_{m+k}|}{k}\mathcal{I}_{m,k}(c)-2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{|c_m|}{k}\right|\le KT_m(A).$

Для цього визначимо функцію $\mu_k(t)=\begin{cases}1, & |t|\le\frac{\pi}{k+1};\\ 0, & |t|>\frac{\pi}{k+1}.\end{cases}$, де $k=0,1,2,...$ Тоді $|\psi_k(\frac{t}{2})-\mu_k(t)|\le\frac{2k+1}{2}|t|$, при $|t|\le\frac{\pi}{k+1}$, а $\psi_k(\frac{t}{2})=\mu_k(t)$ при $|t|>\frac{\pi}{k+1}$.

Використавши (18), знайдемо

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)\right|\frac{dt}{|t|}-\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta B_{k,m}|\left|\psi_k\left(\frac{t}{2}\right)-\mu_k(t)\right|\frac{dt}{|t|}\le\sum_{k=0}^{\infty}A_k\frac{2k+1}{2}\int_{-\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k+1}}dt\le KT_m(A).$$

Для оцінки інтеграла $\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}$ розіб'ємо проміжок інтегрування на декілька частин. Для цього покладемо $m_1=[\sqrt{m}]+1$ і розглянемо спочатку інтеграл

$$\int_{\frac{\pi}{m_1}}^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}=\sum_{l=1}^{m_1-1}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}. \tag{23}$$

Для $t\in\left(\frac{\pi}{l+1},\frac{\pi}{l}\right)$, згідно з означенням функції $\mu_k(t)$, маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)=\sum_{k=0}^{l-1}\Delta B_{k,m}=-B_{l,m}(t), \tag{24}$$

тому

$$\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|\frac{dt}{t}=\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\,dt. \tag{25}$$

Крім того $\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\,dt-\frac{l}{\pi}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}|B_{l,m}(t)|\,dt\right|\le\max_t|B_{l,m}(t)|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\left|\frac{1}{t}-\frac{l}{\pi}\right|dt\le\frac{1}{l^2}\max_t|B_{l,m}(t)|.$

Звідси, згідно з (18)

$$|B_{l,m}(t)|\le\sum_{k=l}^{\infty}|\Delta B_{k,m}|\le KT_m(A), \tag{26}$$

тому

$$\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}\frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\,dt-\frac{l}{\pi}\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}|B_{l,m}(t)|\,dt\right|\le K\frac{1}{l^2}T_m(A). \tag{27}$$

Функція $B_{l,m}(t)=d_l'+e^{imt}(c_{l+m}-d_l'')$ має період $2\pi/m$, а у відрізок $\left[\frac{\pi}{l+1},\frac{\pi}{l}\right]$ повністю вкладається $\left[\frac{\pi m}{l(l+1)2\pi}\right]$ відрізків довжиною $2\pi/m$.

Оскільки, згідно (26) $\left|\int_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}}|B_{l,m}(t)|\,dt-\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]\int_{0}^{\frac{2\pi}{m}}|B_{l,m}(t)|\,dt\right|\le\max_t|B_{l,m}(t)|\frac{2\pi}{m}\le\frac{K}{m}T_m(A)$, то на основі леми 1

$$\int_{0}^{\frac{2\pi}{m}}|B_{l,m}(t)|dt=\frac{1}{m}\int_{0}^{2\pi}\left|d_l'+e^{it}(c_{l+m}-d_l'')\right|dt=\frac{4}{m}\left(|d_l'|+|c_{l+m}-d_l''|\right)\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-4\frac{|d_l'|\cdot|c_{l+m}-d_l''|}{(|d_l'|+|c_{l+m}-d_l''||)^2}\sin^2 t}\,dt. \tag{28}$$

Позначивши $\overline{E}_l(m) := 2\left(|d_l'| + |c_{l+m} - d_l''|\right) \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 4\frac{|d_l'| \cdot |c_{l+m} - d_l''|}{(|d_l'| + |c_{l+m} - d_l''|)^2} \sin^2 t}\, dt$, отримаємо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} B_{l,m}(t)\,|\,dt - \frac{2}{m}\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right]\overline{E}_l(m) \right| \le \frac{K}{m} T_m(A).$$

А звідси, враховуючи нерівність

$$\overline{E}_l(m) \le K T_m(A) \tag{29}$$

та $\left|\frac{2}{m}\left[\frac{m}{2l(l+1)}\right] - \frac{1}{l^2}\right| \le K\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{l^3}\right)$, матимемо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} |B_{l,m}(t)|\,dt - \frac{1}{l^2}\overline{E}_l(m) \right| \le K\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{l^3}\right) T_m(A)\,. \tag{30}$$

Тому з (25), (27) і (30) випливає нерівність

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi l}\overline{E}_l(m) \right| \le K\left(\frac{l}{m} + \frac{1}{l^2}\right) T_m(A). \tag{31}$$

Враховуючи співвідношення (23) і (31), знайдемо

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m_1}}^{\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}(t)\mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m_1-1} \frac{1}{l}\overline{E}_l(m) \right| \le K \sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{l}{m} + \frac{1}{l^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} A_k \le K T_m(A)\,. \tag{32}$$

Тепер розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{j_0} \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} + \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t) \right| \frac{dt}{t}, \tag{33}$$

де j_0 – найбільше натуральне число, для якого

$$\frac{\pi}{m}(2j_0+1) \le \frac{\pi}{m_1}, 2j_0 + 1 \le \sqrt{m}. \tag{34}$$

Візьмемо точку $\frac{\pi}{l}, l \in N$, яка належить проміжку $[\frac{\pi(2j-1)}{m}, \frac{\pi(2j+1)}{m}]$. Тоді справедлива оцінка

$$\left| \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t) \right| \frac{dt}{t} - \frac{l}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(\frac{\pi}{l}) \right| \frac{dt}{t} \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta B_{k,m}\right| \left|\frac{1}{t} - \frac{l}{\pi}\right| dt + \frac{l}{\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta B_{k,m}\right| \left|\mu_k(t) - \mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right| dt. \tag{35}$$

Оскільки

$$\left|\frac{1}{t} - \frac{l}{\pi}\right| \le \frac{m}{\pi(2j-1)} - \frac{m}{\pi(2j-1)} = \frac{2m}{\pi(4j^2-1)},$$

то на основі оцінок (18) будемо мати

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta B_{k,m}\right| \left|\frac{1}{t} - \frac{l}{\pi}\right| dt \le \frac{2m}{\pi(4j^2-1)} \frac{2\pi}{m} K T_m(A) \le \frac{K}{j^2} T_m(A)\,. \tag{36}$$

Згідно з означенням функції $\mu_k(t)$, $\mu_k(t) - \mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right) = 0$ для всіх k таких, що $\frac{\pi}{k+1} < \frac{\pi}{m}(2j-1)$, або $\frac{\pi}{k+1} > \frac{\pi}{m}(2j+1)$.

Якщо $\frac{\pi}{m}(2j-1) < \frac{\pi}{k+1} < \frac{\pi}{m}(2j+1)$, то $\left|\mu_k(t) - \mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right| \le 1$.

Очевидно, що для таких k маємо

$$\frac{m}{2j+1} < k+1 < \frac{m}{2j-1}. \tag{37}$$

Суму по всіх k, що задовольняють нерівність (37), позначатимемо через $\sum_{k} {}_j$. Тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}2j+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta B_{k,m}\right| \left|\mu_k(t) - \mu_k\left(\frac{\pi}{l}\right)\right| dt \le \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \sum_{k} {}_j \left|\Delta B_{k,m}\right| dt = \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{m}} \sum_{k} {}_j \left|\Delta B_{k,m}(t)\right| dt. \tag{38}$$

Згідно з означенням функції $\mu_k(t)$ і леми 1 дістанемо

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(\frac{\pi}{l})\right| dt = \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|B_{l,m}(t)\right| dt = \frac{2}{m} \bar{E}_l(m). \tag{39}$$

На основі співвідношень (35)-(39) одержуємо, що для $\forall l \in \mathbb{N}$ таких, що

$$\frac{\pi}{m}(2j-1) \le \frac{\pi}{l} < \frac{\pi}{m}(2j+1), \tag{40}$$

справедлива оцінка

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{2}{\pi}\frac{l}{m} \bar{E}_l(m)\right| \le \frac{K}{j^2} T_m(A) + \frac{l}{\pi} \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{m}} \sum_{k} {}_j \left|\Delta B_{k,m}\right| dt. \tag{41}$$

На відрізку $[\frac{\pi}{m}(2j-1), \frac{\pi}{m}(2j+1)]$ містяться $\tau = [\frac{m}{2j-1}] - [\frac{m}{2j-1}]$ точок виду $\frac{\pi}{l}$. Додамо нерівності (41) для всіх l, що задовольняють умову (40), і поділимо на число доданків. Тоді одержимо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m} \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{2}{\pi m \tau} \sum_{l} l \bar{E}_l(m)\right| \le \frac{K}{j^2} T_m(A) + m \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{m}} \sum_{k} {}_j \left|\Delta B_{k,m}\right| dt, \tag{42}$$

де $\sum_{l}$ означає підсумовування по тих l, для яких виконується нерівність (40).

Для $j < j_0$, де $2j_0 + 1 \le \sqrt{m}$, справедлива нерівність $\frac{m}{2j-1} - \frac{m}{2j+1} = \frac{2m}{4j^2-1} \ge \frac{2m}{(2j_0+)^2} \ge 2$, то

$$\left|\frac{1}{\tau} - \frac{4j^2-1}{2m}\right| \le \frac{1}{\frac{m}{2j-1} - 1 - \frac{m}{2j+1}} - \frac{1}{\frac{2m}{4j^2-1}} \le \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{2m}{4j^2-1}\frac{2m}{4j^2-1}} \le 2\left(\frac{4j^2-1}{2m}\right)^2 \le K\frac{j^4}{m^2}. \tag{43}$$

Для всіх l, що задовольняють співвідношення (40) має місце оцінка

$$\left|\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{l^2}\right| \le \left|\frac{\sqrt{4j^2-1}}{m} - \frac{2j-1}{m}\right| \cdot \left|\frac{\sqrt{4j^2-1}}{m} + \frac{2j+1}{m}\right| \le \frac{4j}{m^2}. \tag{44}$$

Із (43) і (44), а також співвідношення $\frac{m}{2j+1} \le l \le \frac{m}{2j-1}$, матимемо

$$\left|\frac{l}{m\tau} - \frac{1}{2l}\right| \le \frac{l}{m}\left|\frac{1}{\tau} - \frac{4j^2-1}{2m}\right| + \frac{l}{2}\left(\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{ml}\right) \le K\frac{l}{m}\frac{j^4}{m^2} + \frac{l}{2}\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{2l} \le K\frac{j^3}{m^2} + \frac{l}{2}\left|\frac{4j^2-1}{m^2} - \frac{1}{l^2}\right| \le K\left(\frac{j^3}{m^2} + \frac{1}{m}\right).$$

Оскільки $\tau \le K\frac{m}{j^2}$, то

$$\left|\frac{2}{\pi m \tau} \sum_{l} l \bar{E}_l(m) - \frac{1}{\pi} \sum_{l} \frac{1}{l} \bar{E}_l(m)\right| \le K\left(\frac{j^3}{m^2} + \frac{1}{m}\right) \tau \max_{l} \bar{E}_l(m) \le K\left(\frac{j^3}{m^2} + \frac{1}{j^2}\right) \max_{l} \bar{E}_l(m). \tag{45}$$

Із (42), враховуючи (45) і (29), знайдемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j-1)}^{\frac{\pi}{m}(2j+1)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}(t) \mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi} \sum_{l=[\frac{m}{2j+1}]+1}^{[\frac{m}{2j-1}]} \frac{1}{l} \bar{E}_l(m)\right| \le K\left(\frac{j}{m} + \frac{1}{j^2}\right) T_m(A) + m \int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{m}} \sum_{k} {}_j \left|\Delta B_k\right| dt. \tag{46}$$

Для інтеграла $\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t}$ із (33), унаслідок (18) справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_k\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{m}{\pi(2j_0+1)} \int\limits_{\frac{\pi}{m}(2j_0+1)}^{\frac{\pi}{m_1}} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta B_k(t)| \frac{dt}{t} \le \frac{Km}{(2j_0+1)m} T_m(A)\,. \tag{47}$$

Із співвідношень (46), (47) і (33) знайдемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \sum_{l=[\frac{m}{2j_0+1}]+1}^{m} \frac{1}{l}\overline{E}_l(m)\right| \le K\sum_{j=1}^{j_0}\left(\frac{j}{m}+\frac{1}{j^2}\right)T_m(A) + m\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} \sum_{j=0}^{j_0}\sum_k{}_j\, |\Delta B_{k,m}|\, dt. \tag{48}$$

Оскільки $[\frac{m}{2j_0+1}] - m_1 \le K$ (унаслідок вибору чисел j_0 і m_1), то користуючись оцінкою (47), знайдемо, що $\sum\limits_{l=m_1}^{[\frac{m}{2j_0+1}]} \frac{1}{l}\overline{E}_l(m) \le KT_m(A)$. На основі вибору j_0 (див. (34)) справедлива оцінка $\sum\limits_{j=1}^{j_0}\left(\frac{j}{m}+\frac{1}{j^2}\right) = \frac{1}{m}\sum\limits_{j=1}^{j_0} j + \sum\limits_{j=1}^{j_0}\frac{1}{j^2} \le K$.

Якщо в подвійній сумі $\sum\limits_{j=1}^{j_0}\sum\limits_k{}_j$ поміняємо порядок підсумовування, то для кожного k в сумі по j буде тільки один доданок. Тому $\sum\limits_{j=1}^{j_0}\sum\limits_k{}_j |\Delta B_{k,m}(t)| \le \sum\limits_{k=0}^{m} |\Delta B_{k,m}(t)|$, а внаслідок (37) буде $m\int\limits_0^{\frac{2\pi}{m}} \sum\limits_{j=1}^{j_0}\sum\limits_k{}_j |\Delta B_{k,m}(t)|\, dt \le KT_m(A)$, тому із сказаного вище і нерівності (48) слідує нерівність

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m_1}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\sum_{l=m_1}^{m} \frac{1}{l}\overline{E}_l(m)\right| \le KT_m(A). \tag{49}$$

А з (32) і (49) матимемо

$$\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\overline{E}_l(m)\right| \le KT_m(A). \tag{50}$$

Згідно з означенням d_l, d_l', d_l'' (див. (10)-(12)) і співвідношенням (28) маємо для всіх $l = 1, 2, \ldots, [m/3]$,

$$\overline{E}_l(m) = 2\left(|c_l| + |c_{l+m} - c_{m-l}|\right)\cdot \mathcal{I}_{m,l}(c) =: E_l(m). \tag{51}$$

Крім того, з оцінки (29) і аналогічної їй оцінки $E_l(m) \le KT_m(A)$ знайдемо, що

$$\sum_{l=\left[\frac{m}{3}\right]+1}^{m} \frac{1}{l}\overline{E}_l(m) \le KT_m(A), \quad \sum_{l=\left[\frac{m}{3}\right]+1}^{m} \frac{1}{l}E_l(m) \le KT_m(A) \tag{52}$$

На основі співвідношень (50)-(52) одержуємо нерівність $\left|\int\limits_{\frac{\pi}{m}}^{\pi} \left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} - \frac{1}{\pi}\sum\limits_{l=1}^{m} \frac{1}{l}E_l(m)\right| \le KT_m(A).$

Для інтеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} \left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t}$ внаслідок (24) і (25) матимемо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{m}} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \Delta B_{k,m}\mu_k(t)\right| \frac{dt}{t} = \sum_{l=m}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \frac{1}{l}\, |B_{l,m}(t)|\, dt, \tag{53}$$

але для $l \ge m$ (див. (26)) $B_{l,m}(t) = c_{m+l}e^{imt}$, тому $\int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \frac{1}{t}|B_{l,m}(t)|\, dt = \int\limits_{\frac{\pi}{l+1}}^{\frac{\pi}{l}} \frac{|c_{m+l}|}{t} dt = |c_{m+l}| \ln\frac{l+1}{l}.$

Оскільки при $l \geq m$

$$\ln\left(1+\frac{1}{l}\right)=\frac{1}{l}+O\left(\frac{1}{l^2}\right)=\frac{1}{m+l}+O\left(\frac{m}{l^2}\right) \tag{54}$$

рівномірно відносно m, то з (53) і (54) знайдемо

$$\left|\int_0^{\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} B_{k,m}(t)\mu_k(t)\right|-\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}E_l(m)-\sum_{l=2m+1}^{\infty}\frac{|c_l|}{l}\right| \leq KT_m(A).$$

Для від'ємних t справедлива аналогічна нерівність. Теорему повністю доведено.

Висновки. У роботі отримано асимптотичну формулу для ряду Фур'є, у якого коефіцієнти з відємними індексами рівні 0, що є аналогом відповідних результатів С. О. Теляковського для тригонометричних рядів із дійсними коефіцієнтами [5,6].

Список використаних джерел

1. *Гаєвський М. В.*Оцінки інтеграла від модуля многочлена на одиничному колі / М. В. Гаєвський, П. В. Задерей // Всеукраїнська літня науково-методична мат. шк. "Математичний аналіз та теорія ймовірностей" 4–7 липня 2013 р., с. Плюти, Україна: Тези доповідей. – К. : НТУУ "КПІ", 2013.
2. *Голузин Г. М.* Некоторые неравенства для аналитических функций // Г. М. Голузин // Изв. АН Казахской ССР. Сер. Матем. и мех. – 1949. – № 3. – С. 101–105.
3. *Ефимов А. В.* Оценка интеграла от модуля многочлена единичной окружности / А. В. Ефимов // Успехи мат. наук. – 1980.– Т. 15, № 4. – С. 215–218.
4. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. Т. 1. / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965.
5. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов / С. А. Теляковский // Матем. Заметки. – 1973. – Т14. – № 3. – С. 317–328.
6. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации / С. А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – Т. 109. – С. 65–97.
7. *Тригуб Р. М.* Об интегральных нормах полиномов / Р. М. Тригуб // Мат. сб. – 1976. – Т. 101, № 143. – С. 315–333.
8. Тригуб Р. М. Мультипликаторы Фурье и *K*-функционалы пространств гладких функций / Р. М. Тригуб // Український математичний вісник. – 2005. – Т. 2б, № 2. – С. 236–280.
9. *Fejer L.* Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie / L. Fejer // Math. Ann. – 1926. – Vol. 97. – P. 104–123.
10. *Garrett J. W.* L_1 -convergence of Fourier series with bounded variation /J. W. Garrett, C. S Rees, C. V. Stanojevic // Proc. Amer. Math. Soc. – 1980. – Vol. 80. – P. 423–430.
11. *Leindler ..* On the equivalence of classes of numerical sequences / L. Leindler // Analysis Mathematica. – 2000. – Vol. 26. – P. 227–234.

Надійшла до редколегії 29.03.17

П. Задерей, д-р физ.-мат. наук
Киевский национальный университет технологий и дизайна, Киев, Украина,
М. Гаевский, канд. физ.-мат. наук
Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина,
М. Веремий, асп.
Киевский национальный университет технологий и дизайна, Киев, Украина

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛА ОТ МОДУЛЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ РЯДОМ ФУРЬЕ

Получена асимптотическая формула для интеграла модуля функции, которая задана рядом Фурье с комплексными коэффициентами. Последовательность коэффициентов удовлетворяет условию типа Сидона – Теляковского.

P. Zaderei, Full Doctor
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine,
M. Gaevskij, PhD
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko State Pedagogical University, Kropivnitskyi, Ukraine,
M. Veremii, PhD graduate
Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, Ukraine

ASYMPTOTICS OF THE INTEGRAL OF A MODUL OF FUNCTION GIVEN BY A FOURIER SERIES

We obtain an asymptotic formula for the integral of the function module specified by Fourier series with complex coefficients. The coefficients of the series satisfies conditions of the type Sidon – Telyakovskii.

УДК 517.5

Т. Петрова, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО ПОТОЧКОВІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ОЦІНКИ МОНОТОННОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ ДРОБОВУ ПОХІДНУ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ $r > 2$

Досліджується питання наближення монотонних функцій із простору Соболєва алгебраїчними поліномами. Побудовано контрприклад, який показує, що для монотонних функцій із простору Соболєва оцінка (1) є хибною.

Спочатку введемо основні позначення. Нехай $W^r[0,1]$ клас таких функцій f, що $D_{0+}^{r-1}f$ абсолютно неперервна і $\left|D_{0+}^{r-1}f\right| \leq 1$ майже скрізь, де $D_{0+}^{r-1}f$ – лівостороння дробова похідна [5]. Позначатимемо через Π_n множину всіх алгебраїчних поліномів степеня $\leq n$ і через Δ^1 – множину неспадних на $[0,1]$ функцій.

У [4] доведено, що для апроксимації без обмежень для всіх $r \in \mathbb{N}$, для кожної функції $f \in W^r[0,1]$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$, знайдеться такий поліном $p_n \in \Pi_n$, що виконується оцінка

$$\left|f(x)-p_n(x)\right| \leq c \cdot \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{x(1-x)}\right)^r, x \in [0,1]. \tag{1}$$

© Петрова Т., 2017

DeVore і Yu поставили зокрема питання в [2] про те, чи має місце (1) при $r > 2$ для монотонного наближення. Негативну відповідь на це дали Gonska, Leviatan, Shevchuk, Wenz у [3], довівши теорему GLSW для $r > 2, r \in \mathbb{N}$.

Основним результатом цієї статті є теорема, яка показує, що результат не можна поширити на класи $W^r[0,1] \bigcap \Delta^1$ із $r > 2, r \in R$.

Теорема. *Нехай* $r > 2, r \in R$. *Тоді* $\forall n \in N \ \ \exists f = f_{r,n} \in W^r[0,1] \bigcap \Delta^1$, *така, що* $\forall p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^1$,

$$\text{або} \ \lim_{x \to 0} \sup \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \tag{2}$$

$$\text{або} \ \lim_{x \to 1} \sup \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\varphi^r(x)} = +\infty, \tag{3}$$

де $\varphi(x) = \sqrt{x(1-x)}$.

Доведення. Нехай $r \in (2m, 2m+1), m \in N, m \neq 1$ – фіксоване. Для $r \in (2,3)$ результат теореми доведено в [1]. Тому будемо розглядати випадок $r > 3$. Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{b^{\frac{2}{k}} x}{2!} - \frac{(b^{\frac{1}{k}} - x)^3}{3!} + b^{\frac{1}{k}} \frac{x^2}{2!} + \frac{b^{\frac{3}{k}}}{3!} + \frac{b^{\frac{1}{k}}}{2!}(1 - b^{\frac{1}{k}}) x^{2m + b^{\frac{2}{k}}}, & 0 \le x \le b^{\frac{1}{k}}, \\ -\frac{b^{\frac{2}{k}} x}{2!} + \frac{b^{\frac{1}{k}} x^2}{2!} + \frac{b^{\frac{3}{k}}}{3!} + \frac{b^{\frac{1}{k}}}{2!}(1 - b^{\frac{1}{k}}) x^{2m + b^{\frac{2}{k}}}, & b^{\frac{1}{k}} \le x \le 1, \end{cases},$$

де $b = \frac{1}{(cn^2)^\beta}, \beta = \text{const}, \beta > 0, c = \text{const}$ і $k = \frac{4m - r}{r - 2m} \log_{\frac{1}{2}} b$.

Очевидно, що

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{b^{\frac{2}{k}}}{2!} - \frac{(b^{\frac{1}{k}} - x)^2}{3!} + b^{\frac{1}{k}} x + \frac{b^{\frac{1}{k}}}{2!}(1 - b^{\frac{1}{k}})(2m + b^{\frac{1}{k}}) x^{2m + b^{\frac{2}{k}} - 1}, & 0 \le x \le b^{\frac{1}{k}}, \\ -\frac{b^{\frac{2}{k}} x}{2!} + \frac{b^{\frac{1}{k}} x}{2!} + \frac{b^{\frac{1}{k}}}{2!}(1 - b^{\frac{1}{k}})(2m + b^{\frac{1}{k}}) x^{2m + b^{\frac{2}{k}} - 1}, & b^{\frac{1}{k}} \le x \le 1, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} x + \frac{b^{\frac{1}{k}}}{2!}(1 - b^{\frac{1}{k}})(2m + b^{\frac{2}{k}})(2m - 1 + b^{\frac{2}{k}}) x^{b^{\frac{2}{k}} + 2m - 2}, & 0 \le x \le b^{\frac{1}{k}}, \\ b^{\frac{1}{k}} + \frac{b^{\frac{1}{k}}}{2!}(1 - b^{\frac{1}{k}})(2m + b^{\frac{2}{k}})(2m - 1 + b^{\frac{2}{k}}) x^{b^{\frac{2}{k}} + 2m - 2}, & b^{\frac{1}{k}} \le x \le 1, \end{cases}$$

Отже, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.

1) Доведемо, що f монотонно зростає на $[0,1]$. Очевидно, що $\forall x \in [0,1] f''(x) \ge 0$. Тоді f' зростає на $[0,1]$ і, враховуючи, що $f'(0) = 0$, маємо $f'(x) \ge 0, x \in [0,1]$. Тому функція f монотонно зростає на $[0,1]$.

2) Розглянемо число $y = \frac{2m}{4m - r} \log_b \frac{1}{2}$. Помітимо, що $\frac{1}{k} = \frac{r - 2m}{4m - r} \log_b \frac{1}{2} < \frac{y}{2}$. Дійсно, $\frac{r - 2m}{4m - r} \log_b \frac{1}{2} < \frac{m}{4m - r} \log_b \frac{1}{2} \Leftrightarrow r < 3m$. Остання нерівність виконується, оскільки $r \in (2m, 2m+1)$. Також бачимо, що $y = \frac{1}{k} + \log_b \frac{1}{2}$. Дійсно, $y = \frac{2m}{4m - r} \log_b \frac{1}{2} = (1 + \frac{r - 2m}{3m - r}) \log_b \frac{1}{2} = \frac{1}{k} + \log_b \frac{1}{2}$. Крім того, $\frac{1}{k} = \frac{r - 2m}{2m} y$.

Нехай $x = b^{\frac{1}{k}}$. Тоді $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} b^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} b^{y - \log_b \frac{1}{2}} = b^y$. Нехай (2) не виконується. Тоді $\exists A = \text{const} : |f(x) - p_n(x)| \le A x^{\frac{r}{m}}, x \in [0, b^{\frac{1}{k}}]$, де $p_n \in \Pi_n \bigcap \Delta^1$. Отже, за теоремою Лагранжа

$$\exists \mu \in (\frac{x}{2}; x) : \frac{x}{2} |f'(\mu) - p_n'(\mu)| = \left| f(x) - p_n(x) - f(\frac{x}{2}) + p_n(\frac{x}{2}) \right| \le A x^{\frac{r}{m}} + \frac{A}{2^{\frac{r}{m}}} x^{\frac{r}{m}} = A x^{\frac{r}{m}} (1 + \frac{1}{2^{\frac{r}{m}}}) \le 2 A x^{\frac{r}{m}}, \text{ звідки}$$

$$|f'(\mu) - p_n'(\mu)| \le 4 A x^{\frac{r-m}{m}} = 4 A (b^{\frac{1}{k}})^{\frac{r-m}{m}} = 4 A (b^{y - \log_b \frac{1}{2}})^{\frac{r-m}{m}} = 4 A b^{y \frac{r-m}{m}} 2^{\frac{r-m}{m}} < 16 A b^{y \frac{r-m}{m}} < 16 A b^{\frac{y}{2} \frac{r-m}{m}}. \tag{4}$$

Із (4) і нерівності Маркова випливає

$$2n^2 p_n(1) \ge p_n'(\mu) \ge f'(\mu) - 16 A b^{\frac{y}{2} \frac{r-m}{m}}. \tag{5}$$

Зауважимо, що $\exists z : \mu = b^z, \frac{1}{k} < z < y.$ Розглянемо

$$f'(\mu) = f'(b^z) = \frac{b^{2z}}{2} + \frac{b^{\frac{1}{k}}(1-b^{\frac{1}{k}})(2m+b^{\frac{2}{k}})}{2} b^{z(2m-1+b^{\frac{2}{k}})} \geq \frac{b^{2z}}{2} \geq \frac{1}{3} b^{2z} f(1).$$

З останньої нерівності та нерівності (5) випливає оцінка

$$2n^2 p_n(1) \geq \frac{1}{3} b^{2z} f(1) - 16Ab^{\frac{y}{2}\frac{r-m}{m}}. \tag{6}$$

Оскільки $2z < y$ і $\frac{r-m}{m} > 1,$ то $2z < y\frac{r-m}{m}$ й оцінка (6) зумовлює

$$2n^2 p_n(1) \geq A_1 b^{2z} f(1), A_1 = \text{const}. \tag{7}$$

Тоді $p_n(1) \geq \frac{A_1 b^{2z}}{2n^2} f(1).$ Звідси маємо

$$p_n(1) \geq A_1 \frac{c}{2} b^{2z+\frac{1}{\beta}} f(1) \geq A_1 \frac{c}{2} b^{y+\frac{1}{\beta}} f(1) = A_1 \frac{c}{2} b^{\frac{1}{\beta}} b^{\frac{2m}{4m-r}\log_b \frac{1}{2}} f(1) = A_1 \frac{c}{2} b^{\frac{1}{\beta}} (\frac{1}{2})^{\frac{2m}{4m-r}} f(1) \overset{\beta=k}{=}$$

$$\overset{\beta=k}{=} A_1 \frac{c}{2} b^{\frac{r-2m}{4m-r}\log_b \frac{1}{2}} f(1)(\frac{1}{2})^{\frac{2m}{4m-r}} = A_1 \frac{c}{2}(\frac{1}{2})^{\frac{r}{4m-r}} > A_1 \frac{c}{2} f(1)(\frac{1}{2})^{\frac{m}{m+1}} = A_1 c 2^{\frac{1}{m+1}} f(1) > A_1 c f(1).$$

Візьмемо c в означенні b таким чином, що $A_1 c > 1$. Остання нерівність означає, що $p_n(1) > f(1)$.

3) Доведемо, що $D_{0+}^r f$ обмежена майже скрізь. За теоремою 2.2 із [2] маємо

$$D_{0+}^r f(x) = \frac{1}{\Gamma(2m+1-r)} \int_0^x \frac{f^{(2m+1)}(t)}{(x-t)^{r-2m}} dt + \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(2m+1-r+k)} x^{k-r}, x > 0.$$

Тому $D_{0+}^r f(x) = \frac{1}{\Gamma(2m+1-r)} \int_0^x \frac{c_1}{(x-t)^{r-2m} x^{1-b^{\frac{2}{k}}}} dt + \frac{1}{\Gamma(2m+4-r)} x^{3-r}, x > 0,$ де $c_1 = \text{const}$.

Умови $r - 2m < 1$ і $1 - b^{\frac{2}{k}} < 1$ обумовлюють збіжність інтеграла у правій частині рівності. Тому $D_{0+}^r f$ обмежена майже скрізь. Таким чином, $f \in W^r[0,1] \cap \Delta^1$ і теорему повністю доведено.

Аналогічно розглядається випадок $r \in (2m-1, 2m), m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

Висновки. Побудовано контрприклад, який показує, що результат, доведений у [4], не може бути поширеним на класи $W^r[0,1] \cap \Delta^1$.

Список використаних джерел

1. *Петрова Т.О.* Про поточкові інтерполяційні оцінки монотонного наближення функцій, що мають дробову похідну / Т. О. Петрова // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2003. – № 9–10. – С. 125–127.
2.. *DeVore R. A.* Pointwise estimates for monotone polynomial approximation / P. A. DeVore, X. M. Yu // Constr. Approx. – 1985. – № 1. – P. 323-331.
3.. Interpolatory pointwise estimates for polynomial approximation / H. H. Gonska, D. Leviatan., I. A. Shevchuk, H. J. Wenz // Constr. Approx. – 2000. – № 16. – P. 603–629.
4. *Gopengauz A. I.* Pointwise estimates of Hermitian interpolation / A. I. Gopengauz // J. Approx. Theoty. – 1994. – Vol. 77. – P. 31–41.
5. *Samko S. G.* Fractional integrals and derivatives: theory and applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev // Sci. Publ. – London, 1987.

Надійшла до редколегії 04.12.16

Т. Петрова, канд. физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ПРО ПОТОЧЕЧНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ОЦЕНКИ МОНОТОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПОРЯДКА $r > 2$

Исследуется вопрос приближения монотонных функций из пространства Соболева алгебраическими полиномами. Построен контр-пример, который показывает, что для монотонных функций из пространства Соболева оценка (1) является неверной.

T. Petrova, PhD
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

POINTWISE ESTIMATES FOR MONOTONE POLYNOMIAL APPROXIMATION OF FUNCTION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES OF ORDER $r > 2$

The problem of approximation of monotonic functions from Sobolev' space by algebraic polynomials is researched. The counterexample is built which displays, that for monotonic functions from Sobolev' space the estimation (1) is insecure.

УДК 517.9

В. Болілий, канд. фіз.-мат. наук, доц., І. Зеленська, асп.
Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький
E-mail: *basilb@kspu.kr.ua, kopchuk@gmail.com*

ВНУТРІШНЯ ТОЧКА ЗВОРОТУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь із малим параметром при старшій похідній і точкою звороту, одержано умови для побудови рівномірної асимптотики розвязку. Асимптотику побудовано методом істотно-особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі – Лангера. Доведено існування розвязку системи за умови, що точка звороту міститься всередині розглядуваного відрізка $[-l,l]$.

Вступ. У цій роботі буде розглянута система сингулярно збурених диференціальних рівнянь виду

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon)+A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon)=0, \tag{1}$$

де $\varepsilon>0$ – малий параметр, $Y(x,\varepsilon)=colon(y_1(x,\varepsilon),y_2(x,\varepsilon),y_3(x,\varepsilon),y_4(x,\varepsilon))$ – шукана вектор-функція, $A(x,\varepsilon)=A_0(x)+\varepsilon A_1$ – задана матриця

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

де $a(x)=x\cdot\tilde{a}(x),\quad \tilde{a}(x)>0,\quad b(x)\neq 0,\quad c(x)\neq 0\in C^{\infty}[-l,l]$, причому $x=0$ – внутрішня точка звороту II роду [3, 5].

Ця система відповідає скалярному сингулярно збуреному диференціальному рівнянню

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x,\varepsilon)+a(x)y''(x,\varepsilon)+b(x)y'(x,\varepsilon)+c(x)y(x,\varepsilon)=0.$$

Таке рівняння є однією з модифікацій рівняння Орра – Зоммерфельда гідродинамічної стабільності, яке відіграє центральну роль у динаміці вязкої рідини. У спеціальній літературі розглянуто різні модифікації цього рівняння, у тому числі й задачі з точками звороту. Особливо ми б хотіли відмітити роботи Вазова [10], Лангера [7], Нішімото [9], Ліна [8]. Теорії, запропоновані у згаданих вище роботах, частково розділяють загальні ідеї, але при цьому мають істотні відмінності. Теорія Лангера базується на його ранніх роботах, присвячених диференціальному рівнянню третього порядку. Метод Вазова складається із двох частин: перша – "споріднені функції", які можна побудувати у вигляді формальних апроксимацій для фундаментальної системи розвязків розглядуваного диференціального рівняння, або ж можна знайти безпосередньо зі "спорідненого диференціального рівняння"; у другій частині виконується процедура порівняння двох рівнянь (вихідного і "спорідненого") шляхом перетворення заданого на інтегральне рівняння Вольтера, в якому права частина формально розглядається як однорідний член. Робота Ліна більше наслідує ідеї Лангера, а головна відмінність із методом Вазова полягає у манері побудови розвязків заданого рівняння. Головна ідея роботи Нішімото полягає у визначенні так званих канонічних областей. За допомогою певних деформацій цих областей, можна отримати регіони, в яких будуть справедливі асимптотичні розкладання. Ці регіони називаються областями впливу, які стискаються до точок звороту, коли $\varepsilon\to 0$. Але дана теорія не дає відповіді на питання про природу розвязків у точках звороту, тому в роботі використано поєднання запропонованої ідеї і методу зшивання внутрішньої і зовнішньої асимптотик.

Головною метою цієї роботи є побудова рівномірної асимптотики розвязку, включаючи і точку звороту. Внутрішність точки звороту вносить певні труднощі і проблеми порівняно з випадком односторонніх точок звороту. Випадки, коли точка звороту була крайньою, розглянуто в [4, 6]. Метод, який буде використано, розроблено для рівнянь та систем диференціальних рівнянь із алгебраїчною точкою звороту [1, 2]. Складність при побудові асимптотики розвязку рівнянь або систем рівнянь із диференціальною точкою звороту полягає в тому, що вироджене рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку.

Характеристичним рівнянням, що відповідає системі (1), є рівняння

$$\left|A(x,0)-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2\left(\lambda^2-x\tilde{a}(x)\right). \tag{2}$$

Коренями цього рівняння є

$$\lambda_{1,2}=0,\qquad \lambda_{3,4}=\pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}\,. \tag{3}$$

Регуляризація системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Із метою виділення всіх істотно особливих функцій (ІОФ), що виникають у розвязку системи (1) за рахунок особливої точки $\varepsilon=0$, уведемо регуляризуючу змінну $t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)\equiv\Phi(x,\varepsilon)$, де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Розширення проводитимемо таким чином, щоб виконувалась тотожність

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\Phi(x,\varepsilon)}\equiv Y(x,\varepsilon)\,.$$

Для визначення "розширеної" функції одержимо "розширене" векторне рівняння

$$\tilde{L}_\varepsilon\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)\equiv\varepsilon^{1-p}\varphi'(x)\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x}-A(x,\varepsilon)\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)=0. \tag{4}$$

© Болілий В., Зеленська І., 2017

Асимптотику розвязку розширеного рівняння (4) будуємо у вигляді

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}D_i(x,t,\varepsilon)+\omega_k(x,\varepsilon). \tag{5}$$

де $D_k(x,t,\varepsilon)=\alpha_k(x,\varepsilon)U_k(t)+\varepsilon^{\gamma}\beta_k(x,\varepsilon)U_k'(t)\equiv$

$$\equiv\begin{pmatrix}\alpha_{i1}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{i2}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{i3}(x,\varepsilon)\\ \alpha_{i4}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_i(t)+\varepsilon^{\gamma}\begin{pmatrix}\beta_{i1}(x,\varepsilon)\\ \beta_{i2}(x,\varepsilon)\\ \beta_{i3}(x,\varepsilon)\\ \beta_{i4}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_i'(t), \tag{6}$$

де компоненти $\alpha_{ik}(x,\varepsilon),\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $k=\overline{1;4}$ є аналітичними функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$ і нескінченно диференційовні за змінною $x\in[-l;l]$, які необхідно визначити, $U_i(t)$, $k=1,2$ – функції Ейрі – Лангера: $U_1(t)=\mathrm{Ai}\,(t)$, $U_2(t)=\mathrm{Bi}\,(t)$.

Спочатку вивчимо дію розширеного оператора $\tilde{L}_{\varepsilon}$ на вектор-функцію $D(x,t,\varepsilon)$ і підставимо результат цієї дії в однорідне розширене рівняння (4). Отримаємо рівність

$$\begin{aligned}&\tilde{L}_{\varepsilon}\left(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)+\varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)\right)=\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_i'(t)-\\&-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)U_i(t)-A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)-\\&-\varepsilon^{\gamma}A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)+\varepsilon\alpha_{ik}'(x)U_i(t)+\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x)U_i'(t)=0.\end{aligned}$$

Зрівняємо коефіцієнти біля ІОФ $U(t)$, $i=1,2$ та їх похідних. Маємо наступні векторні рівняння $(i=1,2)$:

$$U_i'(t):\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\varepsilon^{\gamma}\left[A_0(x)+\varepsilon A_1\right]\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \tag{7}$$

$$U_i(t):\varepsilon\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+\left[A_0(x)+\varepsilon A_1\right]\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon). \tag{8}$$

Для того, щоб $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $i=1,2$, були аналітичними вектор-функціями відносно малого параметра $\varepsilon>0$, необхідно, щоб одержані алгебраїчні системи рівнянь (7) і (8) були регулярно збуреними відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Указані умови будуть виконані, якщо показники степенів малого параметра в лівих частинах цих рівнянь будуть однакові. Після певних перетворень отримаємо

$$p=\frac{2}{3},\quad \gamma=\frac{1}{3}. \tag{9}$$

Із (9) матимемо

$$U_i'(t):\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-A_0(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{ik}'(x,\varepsilon)+\mu^3A_1\beta_{ik}(x,\varepsilon), \tag{10}$$

$$U_i(t):\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+A_0(x)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{ik}'(x,\varepsilon)-\mu^3A_1\alpha_{ik}(x,\varepsilon). \tag{11}$$

Тоді векторні рівняння (10), (11) можна записати у вигляді такої системи алгебраїчних рівнянь $(i=1;2)$:

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\beta_{i2}(x,\varepsilon)-\beta_{i1}'(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\beta_{i3}(x,\varepsilon)-\beta_{i2}'(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon)-\beta_{i4}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{i3}'(x,\varepsilon),\\ \varphi'(x)\alpha_{i4}(x,\varepsilon)+c(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)+b(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)+a(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{k4}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\alpha_{i1}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i2}(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)=\mu^3\left[\alpha_{i2}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i3}(x,\varepsilon)\right],\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon)+\alpha_{i4}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{i3}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i4}(x,\varepsilon)-c(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)-b(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon)-a(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{i4}'(x,\varepsilon).\end{cases} \tag{12}$$

Ця система рівнянь уже є регулярно збуреною.

Побудова формальних розвязків однорідної розширеної системи. Асимптотику розвязку розширеної системи (12) будуватимемо у вигляді рядів:

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\alpha_{ikr}(x),\qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\beta_{ikr}(x). \tag{13}$$

Для визначення коефіцієнтів цих рядів отримаємо такі рекурентні системи рівнянь:

$$\Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=0,\ r=0,1,2\qquad \Phi(x)\cdot Z_{kr}(x)=F\cdot Z_{k(r-3)}(x),\quad r\ge 3. \tag{14}$$

Тут $Z_{kr}(x) = colon\left(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \alpha_{i4r}(x), \beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x), \beta_{i4r}(x)\right)$, а

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi'(x) & c(x) & b(x) & x\tilde{a}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 \\ -c(x) & -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$F \cdot Z_{k(r-3)}(x) = colon\begin{pmatrix} \left[\beta_{i2(r-3)}(x) - \beta'_{i1(r-3)}(x)\right], \left[\beta_{i3(r-3)}(x) - \beta'_{i2(r-3)}(x)\right], \beta'_{i3(r-3)}(x), \beta'_{i4(r-3)}(x), \\ \left[\alpha'_{i1(r-3)}(x) - \alpha_{i2(r-3)}(x)\right], \left[\alpha'_{i2(r-3)}(x) - \alpha_{k3(r-3)}(x)\right], -\alpha'_{i3(r-3)}(x), -\alpha'_{i4(r-3)}(x) \end{pmatrix}$. Обчислимо визначник цієї системи. Маємо

$$\det\Phi(x) = \left[\varphi(x)\varphi'(x)\right]^2 \cdot \left[\varphi(x)\varphi'^4(x) - a(x)\right] \cdot \left[\varphi(x)\varphi'^2(x) - a(x)\right] = 0.$$

На даний момент регуляризуюча функція $\varphi(x)$ ще не визначена. Тому знайдемо її як розвязок задачі

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0) = 0. \tag{16}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), x \le 0, \\ \varphi_2(x), x \ge 0, \end{cases} \tag{17}$$

де

$$\varphi_1(x) = -\left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \varphi_2(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{18}$$

Оскільки регуляризуюча функція визначена однозначно, то однозначно визначено і регуляризуючу змінну t.

При такому виборі регуляризуючої функції $\varphi(x)$ визначник матриці (15) дорівнює нулю, тобто $\det\Phi(x) \equiv 0$. Тоді існує нетривіальний розвязок однорідної системи рівнянь $\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = 0$, при $r = \overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon\left(0,\ 0,\ \frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i4r}(x), \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, 0, \beta_{i3r}(x), \beta_{i4r}(x)\right), \tag{19}$$

де $\beta_{isr}(x)$, $i = 1;2$, $s = 3;4$, – до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [-l; l]$.

Перейдемо до розвязуванням неоднорідних систем (12). Спочатку розглянемо ці системи, коли $r = 3$. Врахувавши одержаний розвязок однорідної системи (19) коли $r = 0$, неоднорідну систему (14) запишемо у вигляді двох систем вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i13}(x) = \beta_{i20}(x) - \beta'_{i10}(x) \equiv 0, \\ \varphi'(x)\alpha_{i23}(x) = \beta_{i30}(x) - \beta'_{i20}(x) \equiv \beta_{k30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) - \beta_{i43}(x) = -\beta'_{i30}(x), \\ \varphi'(x)\alpha_{i43}(x) + a(x)\beta_{i33}(x) = -\beta'_{i40}(x), \end{cases} \tag{20}$$

та

$$\begin{cases} \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i13}(x) = \alpha'_{i10}(x) - \alpha_{i20}(x) \equiv 0, \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i23}(x) = \alpha'_{i20}(x) - \alpha_{i30}(x) \equiv -\alpha_{i30}(x) \equiv -\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x), \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x) + \alpha_{i43}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv \left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x)\right)', \\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i43}(x) - a(x)\alpha_{i33}(x) = \alpha'_{i40}(x) \equiv \left(-\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}\right)', \end{cases} \tag{21}$$

Із першого і другого рівнянь систем (20) і (21) визначимо функції $\alpha_{i13}(x) \equiv 0$, $\beta_{i13}(x) \equiv 0$ та $\alpha_{i23}(x) = \left[\varphi'(x)\right]^{-1} \cdot \beta_{i30}(x)$ та $\beta_{i23}(x) = -\left[\varphi'(x)\right]^{-2}\left[\varphi(x)\right]^{-1}\alpha_{i30}(x)$. Тоді системи (20) і (21) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \varphi'(x)\alpha_{i33}(x) - \beta_{i43}(x) = -\beta'_{i30}(x), \\ -a(x)\alpha_{i33}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i43}(x) = -\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i30}(x)\right) - b(x)\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i30}(x), \end{cases} \tag{22}$$

та

$$\begin{cases} -\alpha_{i43}(x) + \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}(x) = \alpha'_{i30}(x) \equiv -\frac{d}{dx}\left(\left[\varphi'(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x)\right), \\ \varphi'(x)\alpha_{i43}(x) - a(x)\beta_{i33}(x) = -\beta'_{i40}(x) - b(x)\left[\varphi(x)\varphi'^2(x)\right]^{-1}\beta_{i40}(x), \end{cases} \tag{23}$$

Із систем (22) та (23) однозначно визначимо функції $\beta_{i30}(x) \equiv \beta_{i30}^{0} \cdot x^{M(0)}$ і $\beta_{i40}(x) \equiv \beta_{i40}^{0} \cdot x^{N(0)}$, де $M(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi'^3(0) + \varphi(0)\cdot\varphi'(0)\cdot\varphi''(0) + b(0)}{-\tilde{a}(0)}\right]$, $N(0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(0)\cdot\varphi'(0)\cdot\varphi''(0) - b(0)}{-\tilde{a}(0)}\right]$, $\beta_{ik0}^{0}\ (i = 3, 4)$ – довільні сталі.

При такому визначенні вектор-функцій $Z_{k0}(x)$, $k = 1, 2$, існують розвязки неоднорідних систем алгебраїчних рівнянь (22) та (23) вигляду

$$Z_{k3} \equiv colon\left(0, \frac{\beta_{i30}(x)}{\varphi'(x)}, \frac{\beta_{i43}(x) - \beta'_{i30}(x)}{\varphi'(x)}, \left(\frac{\beta_{i40}(x)}{\varphi'(x)}\right)' - \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i33}, 0, \frac{\beta_{i40}(x)}{\varphi(x)\varphi'^2(x)}, \beta_{i33}, \beta_{i43}\right),$$ де β_{ikr}^{0}, $i = 1, 2$, $k = 3, 4$,

до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x \in [-l, l]$.

Продовжуючи далі розвязувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь (22) і (23) при $r \geq 3$, можна показати, що ці системи рівнянь асимптотично коректні в такому смислі. Якщо вимагати існування розвязків систем рівнянь (22) і (23) при $r = \overline{0; q}$, то кожна із цих систем при $r = \overline{0; q-1}$ і фіксованому $i = 1; 2$ визначається з точністю до двох довільних скалярних множників $\beta_{i3r}^{0}(x)$ і $\beta_{i4r}^{0}(x)$, які утворюють довільний вектор $\beta_{ikr}^{0} = \left(\beta_{i1r}^{0}, \beta_{i2r}^{0}, \beta_{i3r}^{0}, \beta_{i4r}^{0}\right)$.

Третій і четвертий формальні розвязки одержимо в результаті дії розширеного оператора (4) на елемент ПБР $\omega(x, \varepsilon)$. Матимемо таке векторне рівняння:

$$\mu^3 \cdot \omega'_k(x,\varepsilon) - A_0(x,\varepsilon) \cdot \omega_k(x,\varepsilon) = \mu^3 \cdot A_1 \cdot \omega_k(x,\varepsilon), \tag{24}$$

де $\omega_k(x,\varepsilon) = \mathrm{colon}(\omega_1(x,\varepsilon), \omega_2(x,\varepsilon), \omega_3(x,\varepsilon), \omega_4(x,\varepsilon))$. Із векторного рівняння одержимо систему вигляду

$$\begin{cases} \omega'_1(x,\varepsilon) = \omega_2(x,\varepsilon), \\ \omega'_2(x,\varepsilon) = \omega_3(x,\varepsilon), \\ \mu^3\omega'_3(x,\varepsilon) - \omega_4(x,\varepsilon) = 0, \\ \mu^3\omega'_4(x,\varepsilon) + c(x)\omega_1(x,\varepsilon) + b(x)\omega_2(x,\varepsilon) + a(x)\omega_3(x,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Для того, щоб знайти компоненти невідомих функцій у (25), підставимо ряд

$$\omega_k(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \omega_{kr}(x,\varepsilon)$$

у систему (25). Матимемо такі рекурентні рівності. При $r = 0$ дістаємо

$$\begin{cases} \omega'_{10}(x,\varepsilon) = \omega_{20}(x,\varepsilon), \\ \omega'_{20}(x,\varepsilon) = \omega_{30}(x,\varepsilon), \\ -\omega_{40}(x,\varepsilon) = 0, \\ c(x)\omega_{10}(x,\varepsilon) + b(x)\omega_{20}(x,\varepsilon) + a(x)\omega_{30}(x,\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Випишемо окремо останнє рівняння системи. З урахуванням (26) отримуємо

$$a(x)\omega''_{10}(x) + b(x)\omega'_{10}(x) + c(x)\omega_{10}(x) = 0. \tag{27}$$

Шляхом зведення рівняння (27) до самоспряженого вигляду, одержимо загальний розвязок вигляду

$$\omega_{10}(x) = \omega_{10}^{01} \cdot \exp\{k_1 \cdot x\} + \omega_{10}^{02} \cdot \exp\{k_2 \cdot x\}, \tag{28}$$

де $k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c(x)}{\tilde{a}(x)} \cdot x^{\frac{2b(0)}{\tilde{a}(0)} - 1}}$. Таким чином нами побудовано нульове наближення, яке містить дві довільні сталі:

$$\omega_0(x) = \mathrm{colon}(\omega_{10}^{01} \cdot \exp\{k_1 \cdot x\} + \omega_{10}^{02} \cdot \exp\{k_2 \times x\};\ \frac{d}{dx}[\omega_{10}^{01} \cdot \exp\{k_1 \times x\} + \omega_{10}^{02} \cdot \exp\{k_2 \times x\}];$$
$$\frac{d^2x}{dx^2}[\omega_{10}^{01} \cdot \exp\{k_1 \cdot x\} + \omega_{10}^{02} \cdot \exp\{k_2 \cdot x\}]; 0). \tag{29}$$

На наступному кроці отримаємо неоднорідну систему рівнянь, при розвязуванні якої знову знайдемо розвязок, який міститиме одну довільну сталу ω_{11}^{01} і ω_{11}^{02}. Продовжуючи далі розвязувати системи рівнянь (25), поступово визначимо всі розвязки $\omega_r(x)$, тобто отримаємо третій і четвертий розвязки системи (1).

Таким чином, нами одержано загальний розвязок системи (1) у вигляді формального ряду

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{1/3}\beta_{ikr}(x)U'_i(t)\right]\right] + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_{kr}(x).$$

Звуження цього розвязку при $t = \varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\tilde{Y}(x, \varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_i\left(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x)\right) + \varepsilon^{1/3}\beta_{ikr}(x)\frac{dU_i(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-2/3} \cdot \varphi(x))}\right]\right] + \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r \omega_{kr}(x) \tag{30}$$

є формальним розвязком ССЗДР (1).

Висновки. Таким чином встановлено таке твердження:

Теорема. *Нехай* $a(x), b(x), c(x) \in C^{\infty}[-l;l]$ *та виконуються умови* $a(x) = x \cdot \tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) > 0, b(x) \neq 0,\ c(x) \neq 0.$ *Тоді на відрізку* $[-l,l]$ *можна побудувати загальний розвязок сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді асимптотичного ряду (5), коефіцієнти якого є досить гладкі функції на відрізку* $[-l,l]$.

Список використаних джерел

1. *Бобочко В. М.* Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту / В. М. Бобочко, М. О. Перестюк. – К. : Наук. думка, 2002. – 310 с.
2. *Бобочко В.Н.* Равномерная асимптотика решения неоднородной системы двух дифференциальных уравнений с точкой поворота В. Н. Бобочко // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 5(528). – С. 8–18.
3. Бобочко В. Н. Внутренняя точка поворота в теории ингулярных возмущений / В. Н. Бобочко // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
4. Болилый В. А. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с дифференциальной точкой поворота II рода / В. А. Болилый, И. А. Зеленская // Междунар. науч. журн. «Спектральные и эволюционные задачи». – 2013. – Т. 23. – С. 21–31.
5. *Болілий В. О.* Внутрішня точка звороту в диференціальному рівнянні третього порядку / В. О. Болілий // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 44–50.
6. *Зеленская И. А.* Система сингулярно возмущенных уравнений с дифференциальной точкой поворота I рода / И. А. Зеленская // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 3. – С. 63–74.
7. *Langer R. E.* On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order, with special reference to an equation of hydrodynamics / R. E. Langer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 84. – P. 144–191.
8. *Lin C.C.* On the asymptotic solutions of a class of ordinary differential equations of the fourth order / C. C. Lin, A. L. Rabenstein // Trans. Amer. Math. Soc. – 1960. – Vol. 94. – P., 24–57.
9. *Nishimoto T.* On the Orr-Sommerfeld type equations, I; W.K.B. Approximation / T. Nishimoto // KODAI. Math. Sem. Rep. – 1972. – Vol. 24 – P. 281–307.
10. *Wasow W.* Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point / W. Wasow // Annals of mathematics. – 1958. – Vol. 58, № 2. – 222–252.

Надійшла до редколегії 02.12.16

В. Болилый, канд. физ.-мат. наук, доц., И. Зеленская, асп.
Кировоградский государственный педагогический университет имени Владимира Винниченко, Кропивницкий, Украина

ВНУТРЕННЯЯ ТОЧКА ПОВОРОТА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Для системы сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной и точкой поворота, получены условия для построения равномерной асимптотики решения. Асимптотика построена методом существенно-особых функций, который позволяет в окрестности точки поворота применить модельный оператор Эйри – Лангера. Доказано существование решения системы при условии, что точка поворота расположена внутри рассматриваемого отрезка.

V. Boliliy, PhD, I. Zelenska, PhD graduate
Kirovohrad Volodymyr Vynnychenko state pedagogical university, Kropivnitskyi, Ukraine

INTERIOR TURNING POINT FOR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THE ORR – SOMMERFELD TYPE

For system of singularly perturbed differential equations with a small parameter at the higher derivative and with turning point the conditions are obtained for the construction of a uniform asymptotic of solution. Asymptotic forms of solutions are constructed using the method of essential singular functions, which allows to apply the Airy – Langer model operator. It has been proven the existence of solutions of the system when turning point is in the middle of the interval $[-l,l]$.

УДК 517.95:519.63

Є. Вакал, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ,
Л. Вакал, канд. техн. наук
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова, Київ
E-mail*: jvakal@gmail.com*

РОЗВЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Розглянуто математичну модель руху рідини для неоднорідних середовищ із тонкими слабко проникними включеннями. Запропоновано ефективний числовий алгоритм розвязування сформульованої крайової задачі для еліптичного рівняння зі спеціальними умовами спряження типу неідеального контакту. Здійснено числовий експеримент із розвязання задачі фільтрації рідини в основі гідротехнічної споруди. Проаналізовано отримані результати та зроблено висновки щодо застосування запропонованого підходу для визначення фільтраційної стійкості ґрунтів.

Вступ. Крайові задачі математичної фізики для рівнянь зі спеціальними умовами спряження типу неідеального контакту можуть виникати при моделюванні різноманітних фізичних процесів в областях, що містять тонкі (порівняно з геометричними розмірами області) слабко проникні прошарки. Так, наприклад, при фільтраційних розрахунках гідротехнічних споруд слабко проникними включеннями можна вважати тонкі шпунти та протифільтраційні завіси [1, 6, 9]. Специфіка подібних задач вимагає застосування спеціального підходу для їх розвязування. Доцільність такого підходу обумовлена кількома обставинами. По-перше, часто неможливо точно виміряти окремі фізичні характеристики прошарку і доводиться використовувати його інтегральні, або усереднені, характеристики. По-друге, при числовому розвязанні таких задач у прошарку необхідно розташувати певну кількість вузлів сітки, що вимагає її невиправданого подрібнення в основній частині області розвязку і приводить до ускладнення обчислювальної роботи, зниження ефективності застосованих методів. З урахуванням цих обставин для розвязування крайових задач в областях з указаними особливостями пропонується підхід [2–5], згідно з яким при розробці математичної моделі прошарки виключаються з розвязку, а створювані ними ефекти враховуються формулюванням спеціальних умов спряження типу неідеального контакту на внутрішніх межах поділу середовищ.

© Вакал Є., Вакал Ю., Вакал Л., 2017

Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу, що описує фільтрацію при напірних рухах рідини в основі гідротехнічної споруди (ГС). Дослідимо усталену напірну фільтрацію рідини під ГС, що протікає під впливом різниці напорів у верхньому та нижньому бєфах. Прикладом такого руху є обтікання незаглибленого плоского флютбету зі шпунтом у ґрунті скінченної глибини, що лежить на непроникній основі. Флютбет поділяється шпунтом малої товщини δ на відрізки довжиною $l_{\text{ф}}^1$ і $l_{\text{ф}}^2$. Глибину проникного шару вважаємо рівною M. Розглянемо переріз ґрунту під ГС площиною, перпендикулярною поверхні землі (рис. 1).

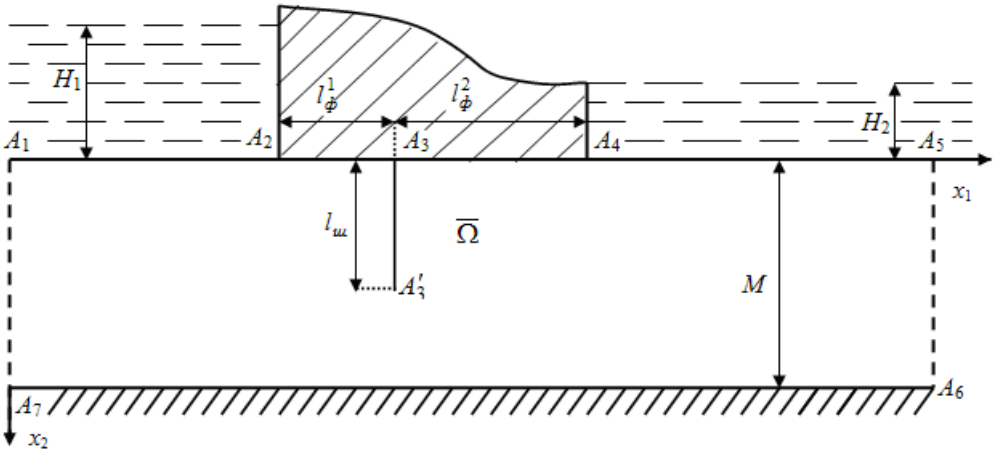

Рис. 1. Незаглиблений плоский флютбет зі шпунтом

Областю фільтрації $\overline{\Omega}$ є прямокутник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Заміна нескінченної області на скінченну правомірна, якщо лінії току A_1A_7 і A_5A_6 вважати віддаленими від центра флютбету на три і більше його ширини. На рис. 1 лінія A_6A_7 моделює водонепроникний шар, $A_2A_3A_4$ – водонепроникну основу греблі, A_1A_2, A_4A_5 – еквіпотенціальні лінії із заданими на них сталими напорами H_1 і H_2, A_3A_3' – тонкий шпунт завдовжки $l_{\text{ш}}$ із коефіцієнтом фільтрації k_1. Коефіцієнт фільтрації ґрунту приймається рівним k_2. Таким чином, для дослідження процесів усталеної напірної фільтрації в основі ГС необхідно знайти розвязок диференціального рівняння

$$\sum_{\gamma=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_\gamma}\right)=0 \tag{1}$$

в області Ω із граничними умовами

$$u(x)\big|_{A_1A_2}=H_1,\quad u(x)\big|_{A_4A_5}=H_2, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_1A_7}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_5A_6}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{A_2A_4}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{A_6A_7} \tag{3}$$

і умовами спряження у вигляді неперервності напорів і потоків вологи на лініях контакту шпунта з ґрунтом.

Згідно із запропонованим у роботі підходом, ураховуючи незначну товщину шпунта порівняно з розмірами області фільтрації, а також малу проникність матеріалу, з якого він будується ($k_1 << k_2$), виключимо шпунт із розгляду, а його вплив на фільтрацію рідини в основі ГС врахуємо шляхом задання умов неідеального контакту на лінії A_3A_3', що моделює шпунт, тобто

$$k_2\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{A_3A_3'-0}=\alpha[u]\big|_{A_3A'},\qquad \left.\left[k_2\frac{\partial u}{\partial x_1}\right]\right|_{A_3A_3'}=0, \tag{4}$$

де $\alpha=k_1/\delta$ назвемо коефіцієнтом вологопередачі через шпунт.

Зазначена модель дозволяє вивчити вплив на фільтрацію проникності шпунтових стінок. Очевидно, що напори і тиски фільтраційного потоку на споруду та швидкості фільтраційних вод при їхньому виході у нижній бєф будуть відрізнятися від відповідних значень напорів, тисків і швидкостей, отриманих за допомогою числових і чисельно-аналітичних методів, що використовують стандартні підходи у припущенні непроникності шпунтів для областей із вирізами і розрізами [1, 6, 9]. Ця обставина може позначитися на стійкості споруд і має враховуватись при проектуванні ГС і розробці заходів щодо зниження фільтраційних потоків.

Числове розвязання задачі. Нехай основа греблі $A_2A_3A_4$ моделюється лінією $x_2=0,\ \ 0<l_6<x_1<l_7<l_1$; водопроникні ділянки межі A_1A_2 і A_4A_5 – лініями $x_2=0,\ 0\le x_1\le l_6$ і $x_2=0,\ l_7\le x_1\le l_1$ відповідно; шпунт A_3A_3' – лінією $x_1=l_5\in(l_6,l_7)$, $0\le x_2\le l_8<l_2$; лінії току A_1A_7 і A_5A_6 – лініями $x_1=0,\ 0<x_2\le l_2$ і $x_1=l_1,\ 0<x_2\le l_2$ відповідно; водонепроникний шар A_6A_7 – лінією $x_2=l_2,\ 0\le x_1\le l_1$.

Для розвязання крайової задачі (1)–(4) використано метод скінченних різниць. За допомогою інтегро-інтерполяційного методу [7] на сітці $\overline{\omega}_{h_1h_2}$ із кроками h_1 і h_2 у напрямках x_1 і x_2 відповідно побудовано різницеву схему для рівняння (1):

$$\sum_{\gamma=1}^{2}\left(a_\gamma y_{x_\gamma}\right)_{x_\gamma}=0\ . \tag{5}$$

Тут і надалі використовуються позначення, прийняті в теорії різницевих схем [7], $y,\ a$ – сіткові аналоги функцій u і k відповідно.

Похибка апроксимації схеми (5) дорівнює $O\left(h_1^2+h_2^2\right)$. Крайові умови (2)–(3) й умови спряження (4) апроксимуються із другим порядком по просторових змінних аналогічно [7; 9] і записуються у вигляді:

$$\frac{2}{h_1}a_1^+y_{x_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}=0\ ,\ \ x_1=0,\ \ 0<x_2<l_2\ ; \tag{6}$$

$$-\frac{2}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}=0,\ \ x_1=l_1,\ \ 0<x_2<l_2\ ; \tag{7}$$

$$\frac{2}{h_2}a_2^+y_{x_2}+\left(a_1y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1}=0,\ \ x_2=0,\ \ l_6<x_1<l_7,\ \ x_1\ne l_5\ ; \tag{8}$$

$$-\frac{2}{h_2}a_2y_{\bar{x}_2}+\left(a_1y_{\bar{x}_1}\right)_{x_1}=0,\ \ x_2=l_2,\ \ 0<x_1<l_1\ ; \tag{9}$$

$$-\frac{2}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}+\frac{2}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y^+-y\right)=0,\ \ x_1=l_5-0,\ \ 0<x_2<l_8\ ; \tag{10}$$

$$\frac{2}{h_1}a_1^+y_{x_1}+\left(a_2y_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}-\frac{2}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y-y^-\right)=0,\ \ x_1=l_5+0,\ \ 0<x_2<l_8\ ; \tag{11}$$

$$\frac{1}{h_1}a_1^+y_{x_1}-\frac{1}{h_2}a_2y_{\bar{x}_2}=0,\ \ x_1=0,\ \ x_2=l_2\ ; \tag{12}$$

$$\frac{1}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\frac{1}{h_2}a_2y_{\bar{x}_2}=0,\ \ x_1=l_1,\ x_2=l_2\ ; \tag{13}$$

$$-\frac{1}{h_1}a_1y_{\bar{x}_1}+\frac{1}{h_2}a_2^+y_{x_2}+\frac{1}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y^+-y\right)=0,\ \ x_2=0,\ \ x_1=l_5-0\ ; \tag{14}$$

$$\frac{1}{h_1}a_1^+y_{x_1}+\frac{1}{h_2}a_2^+y_{x_2}-\frac{1}{h_1}\tilde{\alpha}\left(y-y^-\right)=0,\ \ x_2=0,\ \ x_1=l_5+0\ ; \tag{15}$$

$$y=H_1,\ \ x_2=0,\ \ 0\le x_1\le l_6\ ; \tag{16}$$

$$y=H_2,\ x_2=0,\ \ l_7\le x_1\le l_1\ . \tag{17}$$

Таким чином, різницева схема (5)–(17) апроксимує вихідну диференціальну задачу (1)–(4).

Запишемо отриману систему різницевих рівнянь у вигляді операторного рівняння

$$Ay=G, \tag{18}$$

де y містить розвязок різницевої задачі (6)–(17). Матриця A має блочну структуру. Подамо її у вигляді суми діагональної, строго нижньої трикутної і строго верхньої трикутної матриць

$$A=D-L-U.$$

Тоді ітераційний метод верхньої релаксації для рівняння (18) запишеться таким способом [8]:

$$\left(D-\omega L\right)\frac{y^{s+1}-y^s}{\omega}+Ay^s=G\ . \tag{19}$$

Тут ω – релаксаційний параметр, y^0 – деяке початкове наближення до розвязку задачі.

Обчислювальні експерименти. Запропонований підхід використано для розвязання задачі обтікання плоского незаглибленого флютбету завдовжки $l_ф$ із тонким шпунтом (рис. 1) із застосуванням системи комп'ютерної математики MATLAB 7.6.0. Розвязок задачі для шпунта, симетрично розташованого вздовж флютбету ($l_ф^1=l_ф^2=l_ф/2$), при $M=l_ф$, $H_2=0$ отримано в [6] за допомогою чисельно-аналітичного методу для області з розрізом (шпунт вважається непроникним) і подано на рис. 2 у вигляді розподілу напору вздовж флютбету для різних значень відношення $l_ш/l_ф$ (для наочності початок системи координат розміщено в точці A_3).

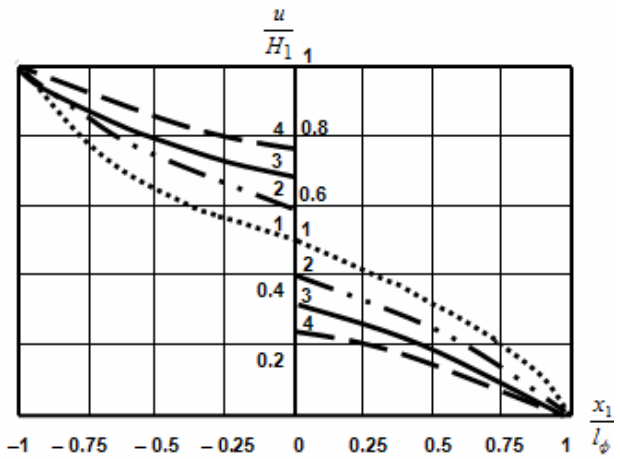

Рис. 2. Розподіл напору вздовж флютбету (лінія 1 – $l_ш/l_ф = 0$, **лінія 2 –** $l_ш/l_ф = 0.3$, **лінія 3 –** $l_ш/l_ф = 0.5$, **лінія 4 –** $l_ш/l_ф = 0.7$ **)**

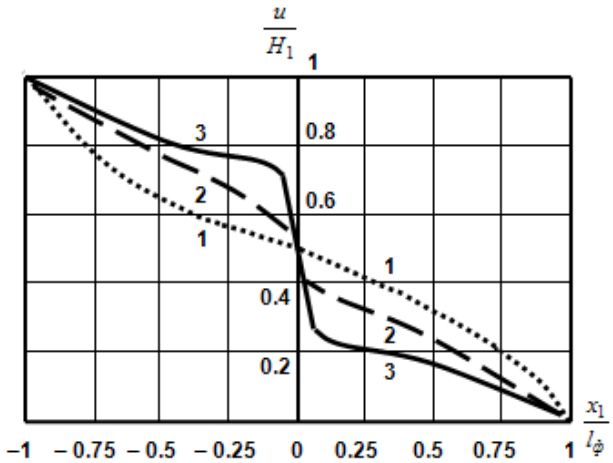

Рис. 3. Розподіл напору вздовж флютбету при $l_ш/l_ф = 0.7$ **(лінія 1 –** $k_2/k_1 = 1$, **лінія 2 –** $k_2/k_1 = 200$, **лінія 3 –** $k_2/k_1 = 20000$**)**

За допомогою моделі, що використовує спеціальні умови спряження (4), знайдено числовий розвязок цієї задачі. При числових розрахунках величини k_1, k_2, δ приймались рівними 0.0002 м/добу, 0.2 м/добу і 0.2 м відповідно, тобто α в умовах (4) дорівнювало 0.001 1/добу. Отримана похибка в результатах не перевищує 2–3 %. Проведені дослідження показали, що тиск перед флютбетом підвищується, а за ним сильно знижується. Завдяки врахуванню проникності шпунта отримано напори перед флютбетом дещо менші, а за ним, при виході фільтраційних вод у нижній бєф, дещо більші, ніж відповідні значення напорів, обчислені в [6] для непроникного шпунта. На рис. 3 наведено розподіл напору вздовж флютбету при $l_ш/l_ф = 0.7$ і різних співвідношеннях між коефіцієнтами фільтрації ґрунту k_2 і шпунта k_1.

Випадок $k_2/k_1 = 1$ відповідає обтіканню плоского флютбету за відсутності в його основі будь-яких включень (лінія 1), а $k_2/k_1 = 20000$ – за наявності практично водонепроникного симетрично розташованого шпунта (лінія 3). При $1 < k_2/k_1 < 20000$ лінії, що зображують розподіл напорів, розташовуються між лініями 1 і 3. Так, наприклад, лінія 2 відповідає випадку $k_2/k_1 = 200$.

Висновки. Результати досліджень свідчать, що при значеннях коефіцієнтів фільтрації шпунта k_1 менших деякої малої величини $\bar{k}$ його проникність мало впливає на характер руху рідини в основі ГС, і шпунт можна вважати водонепроникним. Урахування цієї обставини дозволяє при проектуванні ГС використовувати для виготовлення шпунта матеріали з коефіцієнтом фільтрації $k_1 \approx \bar{k}$. Якщо ж $k_1 > \bar{k}$, то вплив проникності шпунта на фільтрацію під спорудою стає помітним, що може відбитися на стійкості ГС і має враховуватись при проектуванні та будівництві ГС.

Таким чином, проведені дослідження показали, що при фільтраційних розрахунках ГС велике значення має правильне відображення в розрахункових схемах гідрогеологічних умов основи споруди, а також умов роботи протифільтраційних пристроїв (проникність шпунтів, екранів, завіс, бетону та ін.).

Список використаних джерел

1. *Аравин В. И.* Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. – Л. : Госстройиздат, 1955. – 291 с.
2. *Вакал Е. С.* Об одном подходе к численному решению задач массопереноса в неоднородно-слоистых средах. – Киев, 1985. – 16 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 20.04.1985, № 781–85.
3. *Дейнека В. С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1998. – 615 с.
4. *Демченко В. Ф.* Разностная схема сквозного счета для стационарного уравнения теплопроводности в многослойных средах с неидеальным тепловым контактом / В. Ф. Демченко, Л. И. Демченко, А. Т. Зельниченко // Вычислительная и прикладная математика. – 1980. – Вып. 40. – С. 122–130.
5. *Демченко Л. И.* Численное решение нелинейного уравнения теплопроводности в средах с тонкими слабо проницаемыми включениями / Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий, Е. С. Вакал // Прикладные задачи математической физики. – Рига : ЛУ, 1990. – Вып. 1. – С. 140–150.
6. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина . – М. : Наука, 1977. – 664 с.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.
8. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М. : Наука, 1978.– 592 с.
9. *Фильчаков П. Ф.* Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями / П. Ф. Фильчаков. Т. 2. – К. : Изд-во АН УССР, 1960. – 256 с.

Надійшла до редколегії 30.05.17

Е. Вакал, канд. физ.-мат. наук, Ю. Вакал, канд. физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,
Л. Вакал, канд. техн. наук
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова, Киев, Украина

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрена математическая модель движения жидкости для неоднородных сред с тонкими слабо проницаемыми включениями. Предложен эффективный численный алгоритм решения сформулированной краевой задачи для эллиптического уравнения со специальными условиями сопряжения типа неидеального контакта. Проведен численный эксперимент по решению задачи фильтрации в основании гидротехнического сооружения. Проанализированы полученные результаты и сделаны выводы по использованию предложенного подхода для определения фильтрационной устойчивости грунтов.

E. Vakal, PhD, Yu. Vakal , PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
L . Vakal, PhD
V. M. Glushkov Institute of Cybernetics, Kyiv, Ukraine

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF ELLIPTIC TYPE WITH SPECIAL COUPLING CONDITIONS

A mathematical model of fluid flow for heterogeneous environments with thin weakly permeable inclusions is considered. An efficient numerical algorithm for solving the formulated boundary value problem for elliptic equation with special coupling conditions such as imperfect contact is proposed. A numeric experiment of solving the problem of filtration of fluid on the base of a hydraulic structure is done. Obtained results are analyzed and the conclusions on the application of the proposed approach for determining the filtration resistance of soils are made.

УДК 517.9

В. С. Вовк, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *vovkvitali@gmail.com*

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНЕ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА: ТОЧНІ Й АСИМПТОТИЧНІ ОДНОСОЛІТОННІ РОЗВЯЗКИ ТА ЇХ ЧИСЕЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ

Отримано чисельні розвязки сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами при різних значенням малого параметра. Із використанням формули для солітонного розвязку цього рівняння, проведено порівняння формул для точних і асимптотичних солітонноподібних розвязків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза зі сталими коефіцієнтами та здійснено порівняльний аналіз аналітичного і чисельного описів розвязків рівняння Кортевега – де Фріза при різних значеннях малого параметра.

Вступ. Історія дослідження явищ, що повязані із солітонними розвязками рівняння Кортевега – де Фріза (КдФ), розпочалася у 1834 р., ще задовго до відкриття цього рівняння. Саме тоді шотландський інженер Рассел Джон Скотт зафіксував нове явище, яке ним було названо хвилею трансляції, яку зараз зазвичай називають усамітненою або відокремленою хвилею [5].

Повідомлення про відкриття нового виду хвиль привернуло увагу багатьох учених і мало великий резонанс серед фахівців із гідромеханіки. Цим явищем зацікавилися такі відомі вчені: Стокс Дж., Буссінеск Дж., Релей Л. та багато інших [3], які намагалися знайти диференціальне рівняння для аналітичного опису відокремленої хвилі. Із цією метою для математичного опису таких хвиль Релей і Буссінеск запропонували використовувати квадрат гіперболічного синуса.

Як математичну модель явища, яке спостерігав Рассел, нідерландські дослідники Кортевег Д. і де Фріз Дж. у 1895 р. запропонували рівняння

$$u_{xxx} + 6uu_x + u_t = 0, \tag{1}$$

що описує рух рідини в каналі невеликої глибини і яке зараз названо їхніми іменами.

Розвязок рівняння КдФ у вигляді відокремленої хвилі $u(x,t) = f(x - at)$ записується за допомогою формули

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sech}^2\left[\frac{a(x - a^2 t)}{2}\right], \tag{2}$$

де *a* – довільна стала.

Наприкінці 60-х рр. минулого століття рівняння Кортевега – де Фріза привернуло увагу багатьох дослідників. Причиною стало відкриття низки цікавих властивостей частинних розвязків рівняння КдФ: Крускал М. і Забускі Н. чисельно показали, що відокремленні хвилі, які описуються рівнянням КдФ, при взаємодії між собою не втрачають своєї форми, тобто їх взаємодія подібна до взаємодії частинок. Такі хвилі й відповідно розвязки рівняння КдФ ними названо солітонами [8].

Із того часу дослідженню рівняння КдФ і його розвязків присвячено багато праць. Зокрема, для знаходження його точних розвязків застосовувалися різні методи, серед яких варто окремо згадати метод оберненої задачі розсіяння, за допомогою якого знайдено точні розвязки багатьох рівнянь із частинними похідними математичної і теоретичної фізики [4].

Різноманітні числові та асимптотичні методи також використовуються для пошуку наближених розвязків цього рівняння. Вибір методу розвязку залишається за дослідником. Зазвичай надається перевага якомусь одному способу, при цьому рідко проводиться порівняльний аналіз розвязків, що отримані за допомогою різних методів. У цій статті здійснено порівняльний аналіз точного і (відповідного) асимптотичного односолітонного розвязку сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{3}$$

де ε – малий параметр.

Основна частина. У подальшому використовуються такі означення [2, 6].

Означення 1. Простором $G_1 = G_1(R \times [0;T] \times R)$ називається лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f(x,t,\tau), (x,t,\tau) \in R \times [0:T] \times R,$ що для довільних невідємних цілих n, p, q, r рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset R \times [0;T]$ виконуються умови:

1) справджується співвідношення $\lim\limits_{\tau \to +\infty} \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0, (x,t) \in K;$

© Вовк В.С., 2017

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^{-}(x,t,\tau)$, що $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial\tau^r}f(x,t,\tau)-f^{-}(x,t)=0,\ (x,t)\in K.$

Нехай $G_1^0=G_1^0(R\times[0;T]\times R)\subset G_1$ – простір функцій, для яких рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K\subset R\times[0;T]$ виконується умова: $\lim\limits_{\tau\to\infty}f(x,t,\tau)=0.$

Означення 2. Функція $u=u(x,t,\varepsilon)$, де ε – малий параметр, називається однофазовою солітоноподібною, якщо ця функція для довільного цілого $N\ge 0$ зображується у вигляді асимптотичного розкладу:

$$u(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)]+O(\varepsilon^{N+1}),\ \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon}, \tag{4}$$

де $\varphi(t)\in C^{\infty}([0;T])$ – скалярна дійсна функція, функції $u_j(x,t),\ j=\overline{1,N}$ – нескінченно диференційовні (у точках $t=0,\ t=T$ розглядаються відповідно ліва та права похідні); $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0, V_j(x,t,\tau)\in G_1, j=\overline{1,N}.$

Функція $x-\varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x,t,\varepsilon).$

Функція $V_N(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^jV_j(x,t,\tau)$ називається сингулярною частиною асимптотики, а функція $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^ju_j(x,t)$ – регулярною. Зауважимо, що регулярна частина асимптотики в (4) відповідає за так званий фон (або пєдестал солітонного розвязку), а сингулярна частина математично відображає якісні властивості частинного розвязку сингулярно збуреного рівняння, що проявляються при зміні малого параметра.

а) Порівняння точного й асимптотичного розвязків рівняння (3). З урахуванням (2) точний розвязок рівняння КдФ із малим параметром вигляду (3) можна записати таким чином:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}a^2\operatorname{sech}^2\left[\frac{a(x-a^2t)}{2\varepsilon}\right]. \tag{5}$$

У [6] із використанням нелінійного методу Вентцеля – Крамерса – Бріллюена (ВКБ) побудовано асимптотичні солітоноподібні розвязки рівняння Кортевега – де Фріза з малим параметром і змінними коефіцієнтами в загальному випадку. Для реалізації запропонованого у [6] алгоритму побудови асимптотичного розвязку для випадку рівняння вигляду (3) запишемо це рівняння таким чином:

$$\varepsilon^2u_{xxx}=-u_t-6uu_x.$$

Візьмемо до уваги, що коефіцієнти при похідних u_t та u_{xx}, які позначаються літерами a та b відповідно, є сталими, при цьому $a=-1, b=-6.$ З урахуванням цієї обставини розглянемо випадок нульового фону, тобто вважатимемо, що функції $u_j(x,t)=0$ для всіх $j=\overline{0,N}.$

Згідно з алгоритмом статті [6] асимптотичний розвязок рівняння (3) має вигляд

$$V_0(x,t,\tau)=-3\frac{A(\varphi,t)}{b}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{A(\varphi,t)}}{2}(\tau+c_0(t))\right),$$

де $A(\varphi,t)=-a\varphi'(t)=\varphi'(t),\quad \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},\quad \varphi=\varphi(t)$ – деяка скалярна функція, що задає так звану криву розриву і яка визначається з диференціального рівняння вигляду $\varphi''(t)=0,$ при цьому $\varphi(t)=C_1t+C_2$, C_1,C_2 – сталі інтегрування, величина c_0 – довільна стала. Надалі покладемо $C_2=0$ і вважаємо, що $C_1>0.$ Тоді асимптотичний солітоноподібний розвязок рівняння (3) набуває вигляду

$$u(x,t)=\frac{C_1}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{C_1}(x-C_1)}{2\varepsilon}\right). \tag{6}$$

Порівнявши точний розвязок рівняння (3) – формулу (5) та асимптотичний солітоноподібний розвязок цього ж рівняння – формулу (6), бачимо, що ці формули повністю збігаються. При цьому асимптотичний солітоноподібний розвязок рівняння (3) містить лише головний член сингулярної частини асимптотичного ряду, а інші члени асимптотичного розкладу рівні нулеві.

б) Порівняння точного і чисельного розвязків. Розглянемо чисельний розвязок сингулярно збуреного рівняння КдФ вигляду (3) при різних значеннях малого параметра. Оскільки точний і асимптотичний розвязки, що побудовані за допомогою нелінійного методу ВКБ, збігаються, то чисельний розвязок рівняння КдФ порівняємо з точним розвязком цього рівняння при відповідних значеннях малого параметра.

Для знаходження чисельного розвязку рівняння (3) застосуємо метод прямих [1] або, як його ще називають, метод ліній. У літературі цей метод іноді ще називається методом Роте. Але частіше так називають варіант методу прямих, для якого розбиття відбувається по часовій змінній.

На відміну від кінцево-різницевих методів, які використовували, наприклад, Крускал і Забускі, у методі прямих дискретизація проводиться лише по одній змінній. Перевагу цьому методу надано через його привабливий і простий підхід до знаходження шуканого чисельного розвязку.

Уведемо рівномірну сітку

$$\overline{\omega_h}=\{x_i=(i-1)h,\ i=1,2,...,N,\ h=1/(N-1)\}$$

і позначимо на прямих x_i невідому функцію $u(x_i,t)=Y_i(t).$

У результаті дискретизації отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dY_2}{dt}+3\frac{Y_3^2-Y_2^2}{h}=0;$$

$$\frac{dY_i}{dt}+3\frac{Y_{i+1}^2-Y_{i-1}^2}{2h}+\varepsilon^2\frac{-Y_{i-2}+2Y_{i-1}-2Y_{i+1}+Y_{i+2}}{h^3}=0,\ i=3,...,N-2;$$

$$\frac{dY_{N-1}}{dt}+3\frac{Y_{N-1}^2-Y_{N-2}^2}{h}=0;$$

$$Y_1=Y_N=0;\ \ Y_i(0)=2\,\mathrm{sech}^2\frac{x_i}{\varepsilon},i=2,...,N-1.$$

У подальшому ця система розвязується за допомогою вбудованих бібліотечних функцій математичного пакета Матлаб. На відміну від [7], де метод прямих застосовано до класичного рівняння КдФ, тобто без малого параметра, рівняння (1) представимо в такій дивергентній формі:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-3\frac{\partial(u^2)}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

при цьому малому параметру було надано значень 1; 0,2; 0,05.

Оскільки наведене рівняння визначене на всій дійсній прямій, то для його чисельного розвязання необхідно обмежитися певним скінченним відрізком, кінці якого умовно відіграють роль нескінченно віддалених точок. Припускається, що в цих точках функція u рівна нулеві.

Різницева апроксимація диференціальних операторів здійснюється за просторовою змінною x. При цьому використовується центральна різницева перша похідна у всіх внутрішніх точках, а в точках, що сусідні до точок межі, – ліві та праві різницеві похідні.

Початкову умову знайдено з формули для точного розвязку рівняння (3) при $a=2,\ t=0$ при відповідному значенні малого параметра. Розрахунки також проведено при різних різницевих наближеннях першої похідної з використанням центральних та лівих різницевих схем зі вказаними граничними і початковими умовами.

Розвязання системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) здійснювалося за допомогою вбудованих функцій MATLAB ode45, в якій використовується явний метод Рунге – Кутти четвертого та пятого порядків, та ode23s, в якій реалізовано модифікований метод Розенброка другого порядку.

Графіки отриманих чисельних розвязків рівняння (3) при різних значеннях малого параметра наведено на рис. 1–4.

При зменшенні малого параметра ширина солітона також зменшується, тому потрібно збільшувати за необхідності кількість точок розбиття.

На рис. 1–3 показано чисельні розвязки при різних значеннях часової змінної *t*.

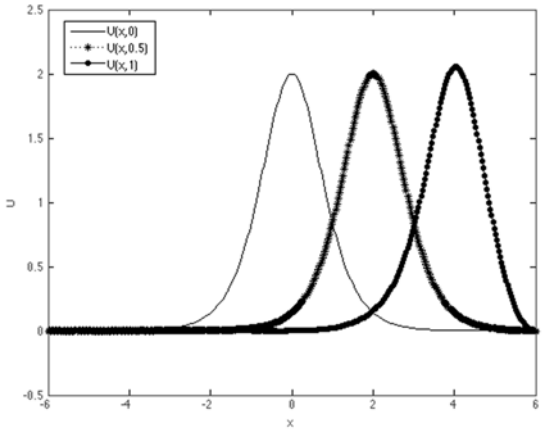

Рис. 1. Розв'язки при $\varepsilon=1$ (N=401)

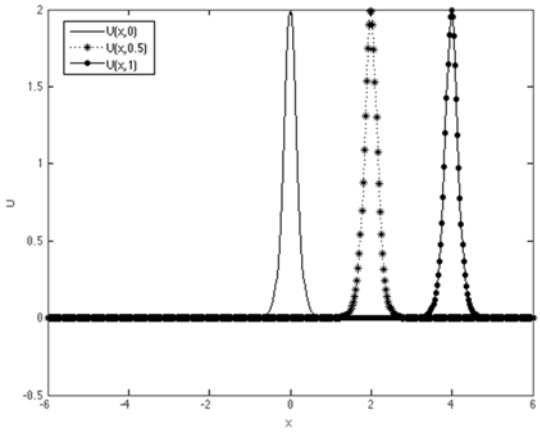

Рис. 2. Розв'язки при $\varepsilon=0{,}2$ (N=401)

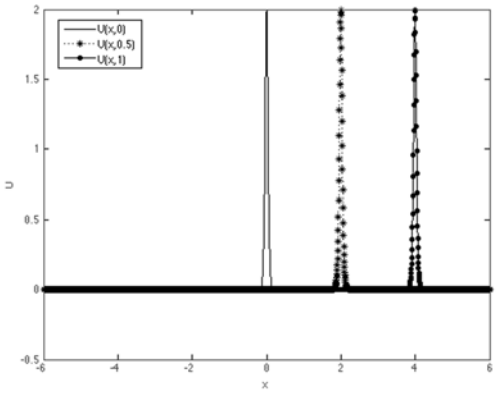

Рис. 3. Розв'язки при $\varepsilon=0.05$ (N=2001)

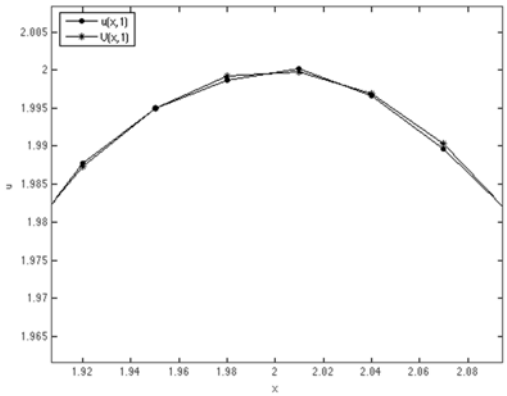

Рис. 4. Графік наближеного $u(x,t)$ **і точного розв'язків** $U(x,t)$ **для** t=0.5 **в околі** x=2

Висновки. Порівняння формул для точного і асимптотичного солітонноподібного розвязків сингулярно збуреного рівняння Кортевега – де Фріза у випадку сталих коефіцієнтів показало збігання цих формул. При цьому виявилося, що головний член сингулярної частини асимптотичного ряду повністю збігається з точним аналітичним розвязком цього рівняння. За допомогою методу прямих побудовано чисельні розв'язки досліджуваного рівняння при різних значеннях малого параметра. Застосовано різні схеми наближення похідних першого і другого порядків точності. Проведений порівняльний аналіз точного і чисельного розвязків рівняння КдФ із малим параметром показав, що найкраще наближення забезпечують чисельні схеми другого порядку точності. При застосуванні функції ode45 для розвязування системи звичайних диференціальних рівнянь виконується порівняно небагато обчислювальних операцій і, як наслідок, витрачається незначна кількість часу.

Список використаних джерел

1. *Ляшко И. И.* Методы вычислений / И. И. Ляшко, А. А. Скоробогатько. – К. : Вища шк., 1977. – С. 243–245.
2. *Маслов В. П.* Асимптотические солитоноподобные решения уравнений с малой дисперсией / В. П. Маслов, Г. А. Омельянов // Успехи мат. наук. –1981. – Т. 36. – Вып. 3 (219). – С. 63 – 124.
3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис; пер. с англ. В. П. Гурария, В. И. Мацаева. – М. : Мир, 1988. – 696 с.
4. Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 320 с.
5. *Russel J. Scott.* Report on waves / J. Scott. Russel // Reports Fourteenth Meeting of the British Association. – London : John Murray, 1844. – P. 311.
6. *Samoylenko V. Hr.* Asymptotic expansion for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg – de Vries equation with variable coefficients / V. Hr. Samoylenko, Yu. Samoylenko // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – Vol. 57, № 1. – P. 132–148.
7. *Shiesser W. E.* Method of lines solution of the Korteweg – de Vries equation / W. E. Shiesser // Computers & Mathematics with Applications. – 1994. – Vol. 28. – № 10–12. – P. 147–154.
8. *Zabusky N. J.* Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states / N. J. Zabusky, M. D. Kruskal // Phys. Review Lett. – 1965. – Vol. 15. – P. 147–154.

Надійшла до редколегії 29.05.17

В. С. Вовк, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА: ТОЧНЫЕ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОДНОСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ И ИХ ЧИСЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Получено численные решения сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с постоянными коэффициентами при разных значениях малого параметра. С использованием формулы для солитонного решения данного уравнения, проведено сравнение формул для точных и асимптотических солитоноподобных решений сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с постоянными коэффициентами и выполнен сравнительный анализ аналитического и численного описаний решений уравнения Кортевега – де Фриза при разных значениях малого параметра.

V. S. Vovk, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

SINGULARLY PERTUBED KORTEWEG – DE VRIES EQUATION: EXACT AND ASYMPTOTIC SOLITON LIKE SOLUTIONS AND THEIR NUMERICAL APPROXIMATIONS

Numerical solutions of singularly pertubed Korteweg – de Vries equation with constant coefficients were obtained for different values of the small parameter. Comparison of exact and asymptotic formulas for soliton like solutions of singularly pertubed Korteweg – de Vries equation and comparison analysis of analytical and numerical description were done using formula of soliton solution of this equation for different values of the small parameter.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, Камянець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук
Камянець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Камянець-Подільський
E-mail: *gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net, t-myh@i.ua*

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПІВПРОСТОРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розвязків (матриць впливу та матриць Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розвязку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Вступ. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ природи, механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [3], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Громяка М. І. [9], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [11], Смирнова М. М. [13], Чернятина В. А. [16] та інших вітчизняних і зарубіжних математиків.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розвязків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

© Громик А., Конет І., Пилипюк Т., 2017

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [5, 12].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розвязків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [4, 6, 7].

У цій статті методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D=\{(t,r,\varphi,z): t>0; r\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1};R_j),\ R_0=0,\ R_{n+1}=R<+\infty;\ \varphi\in[0;2\pi); z\in(0;+\infty)\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу другого порядку [10].

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+\chi_j^2 u_j=f_j(t,r,\varphi,z),\ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{1}$$

із початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0}=g_j^1(r,\varphi,z);\ \ \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_j^2(r,\varphi,z),\ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial^s u_1}{\partial r^s}\right|_{r=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\right|_{r=+\infty}=0,\quad s=0,1, \tag{3}$$

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial z}+h\right)u_j\right|_{z=0}=g_j(t,r,\varphi),\ \ \left.\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\right|_{z=+\infty}=0,\quad s=0,1,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\right|_{r=R_k}=0,\ j=1,2,\ k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі;

$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$,

$f(t,r,\varphi,z)=\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$, $g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\}$,

$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\}$, $g(t,r,\varphi)=\{g_1(t,r,\varphi),g_2(t,r,\varphi),\ldots,g_{n+1}(t,r,\varphi)\}$ – задані обмежені неперервні функції; $u(t,r,\varphi,z)=\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$ – шукана функція.

Основна частина. Припустимо, що розвязок задачі (1)-(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [14, 15, 8].

До задачі (1)-(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F_+\left[f(z)\right]=\int_0^{+\infty} f(z)K(z,\sigma)dz\equiv\tilde f(\sigma), \tag{6}$$

$$F_+^{-1}\left[\tilde f(\sigma)\right]=\int_0^{+\infty}\tilde f(\sigma)K(z,\sigma)d\sigma\equiv f(z), \tag{7}$$

$$F_+\left[\frac{d^2 f}{dz^2}\right]=-\sigma^2\tilde f(\sigma)+K(0,\sigma)\left.\left(-\frac{df}{dz}+hf\right)\right|_{z=0}, \tag{8}$$

де ядро перетворення $K(z,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos(\sigma z)+h\sin(\sigma z)}{\sqrt{\sigma^2+h^2}}$.

Інтегральний оператор F_+ за формулою (6) унаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \left\{(t,r,\varphi); t>0; r\in I_n^+; \varphi\in[0;2\pi)\right\}$, 2π-періодичного щодо кутової змінної φ розвязку диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\tilde{u}_j + \left(a_{zj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_j = \tilde{F}_j(t,r,\varphi,\sigma),\ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{9}$$

із початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(r,\varphi,\sigma),\ \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(r,\varphi,\sigma),\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s\tilde{u}_1}{\partial r^s}\Big|_{r=0} = 0,\ \frac{\partial^s\tilde{u}_{n+1}}{\partial r^s}\Big|_{r=+\infty} = 0,\ s=0,1, \tag{11}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0,\ j=1,2;\ \ k=\overline{1,n}, \tag{12}$$

де $\tilde{F}_j(t,r,\varphi,\sigma) = \tilde{f}_j(t,r,\varphi,\sigma) + a_{zj}^2K(0,\sigma)g_j(t,r,\varphi)$, $j=\overline{1,n+1}$.

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m\left[g(\varphi)\right] = \int_0^{2\pi} g(\varphi)\exp(-im\varphi)d\varphi \equiv g_m, \tag{13}$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}(\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m\exp(im\varphi)\equiv g(\varphi)), \tag{14}$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right] = -m^2F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2g_m, \tag{15}$$

де i – уявна одиниця, $\mathrm{Re}(\cdots)$ – дійсна частина виразу $(\cdots)$, $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_k=2$, $k=1,2,3,\ldots$

Інтегральний оператор F_m за формулою (13) унаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \left\{(t,r); t>0; r\in I_n^+\right\}$ розвязку одновимірних диференціальних рівнянь гіперболічного типу другого порядку

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm}^2}{r^2}\right)\tilde{u}_{jm} + \left(a_{zj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm} = \tilde{F}_{jm}(t,r,\sigma),\ \ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1},\ \ \nu_{jm} = a_{\varphi j}m/a_{rj}, \tag{16}$$

із початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(r,\sigma),\ \ \frac{\partial\tilde{u}_{jm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(r,\sigma),\ \ r\in I_j,\ j=\overline{1,n+1}, \tag{17}$$

крайовими умовами

$$\frac{\partial^s\tilde{u}_{1m}}{\partial r^s}\Big|_{r=0} = 0,\ \ \frac{\partial^s\tilde{u}_{n+1,m}}{\partial r^s}\Big|_{r=+\infty} = 0,\ \ s=0,1, \tag{18}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1,m}\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0,\ \ j=1,2,\ \ k=\overline{1,n}. \tag{19}$$

До задачі (16)–(19) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є – Бесселя на полярній осі I_n^+ із n точками спряження щодо радіальної змінної r [8]:

$$H_{(n)}\left[f(r)\right] = \int_0^{+\infty} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr \equiv \tilde{f}(\lambda), \tag{20}$$

$$H_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right] = \int_0^{+\infty}\tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \equiv f(r), \tag{21}$$

$$H_{(n)}\left[B_{(m)}[f(r)]\right] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda) - \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda)\sigma_k rdr. \tag{22}$$

У формулах (20)–(22) беруть участь, виписані у [8] спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя:

$B_{(m)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{rk}^2 \theta(r-R_{k-1})\theta(R_k - r) B_{\nu_{km}} + a_{r,n+1}^2 \Theta(r-R_n) B_{\nu_{n+1,m}}$, де $B_{\nu_{km}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{km}^2}{r^2}$ – класичний диференціальний оператор Бесселя, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда.

Запишемо диференціальні рівняння (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m}} + q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m}} + q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m}} + q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{F}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots \\ \tilde{F}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^1(r,\sigma) \\ \dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(r,\sigma) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(r,\sigma) \\ \tilde{g}_{2m}^2(r,\sigma) \\ \dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2, \quad j = \overline{1,n+1}.$

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\cdots] = \left[\int_0^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr \quad \int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \quad \int_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr \right] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Унаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{F}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \tag{26}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^1(\lambda,\sigma), \quad \left.\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^2(\lambda,\sigma), \tag{27}$$

де $\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \; j = \overline{1,n+1}, \; \tilde{\tilde{F}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{F}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \; j = \overline{1,n+1},$

$\tilde{\tilde{g}}_{jm}^s(\lambda,\sigma) = \int_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{g}_{jm}^s(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr, \quad s = 1,2, \; j = \overline{1,n+1}.$

Припустимо, не зменшуючи загальності розвязку задачі, що $\max\left\{q_1^2, q_2^2, ..., q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_j^2 = q_1^2 - q_j^2, \; j = \overline{1,n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_m}{dt^2} + \Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_m = \tilde{\tilde{F}}_m(t,\lambda,\sigma), \tag{28}$$

$$\left.\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\right|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma); \quad \left.\frac{d\tilde{\tilde{u}}_m}{dt}\right|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma), \tag{29}$$

де

$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \quad \tilde{\tilde{F}}_m(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{F}}_{jm}(t,\lambda,\sigma), \quad \tilde{\tilde{g}}_m^s(\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jm}^s(\lambda,\sigma), \quad s = 1,2, \; \Delta^2(\lambda,\sigma) = \lambda^2 + a_{z1}^2\sigma^2 + \chi_1^2.$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розвязком задачі (28), (29) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma) = G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma) + \frac{d}{dt}G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma) + \int_0^t G(t-\tau,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{F}}_m(\tau,\lambda,\sigma)d\tau, \tag{30}$$

де $G(t,\lambda,\sigma) = \dfrac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}$.

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $H_{(n)}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}[\cdots] = \begin{bmatrix} \int_0^{+\infty} \cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \int_0^{+\infty} \cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розвязок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma) = \int_0^{+\infty} [G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma) + \frac{\partial}{\partial t}G(t,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma) + \int_0^t G(t-\tau,\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{F}}_m(\tau,\lambda,\sigma)d\tau]V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda, \ j=\overline{1,n+1}. \tag{32}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (32), обернені оператори F_+^{-1} та F_m^{-1}, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} u_j(t,r,\varphi,z) = &\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\times \\ &\times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho + \\ &+\sum_{k=1}^{n+1} a_{zk}^2\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_2^{2\pi} W_{jk}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z)g_k(\tau,\rho,\alpha)\sigma_k\rho d\alpha d\rho d\tau, \quad j=\overline{1,n+1}, \end{aligned} \tag{33}$$

які визначають єдиний розвязок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} G(t,\lambda,\sigma)K(z,\sigma)K(\xi,\sigma)V_j(r,\lambda)V_k(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\sigma\right)\cos(m\varphi)$ матриці впливу (функції впливу) та компоненти $W_{jk}(t,r,\varphi,z) = E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,0)$ тангенціальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі.

Із використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) у сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розвязку (33) випливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розвязків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)–(5).

Методами із [2, 17] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розвязок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. *Якщо функції* $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$, $g_j(t,r,\varphi)$ *задовольняють умови:*

1) *двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;*
2) *мають обмежену варіацію за геометричними змінними;*
3) *абсолютно сумовні за змінною* z *на* $(0;+\infty)$*;*
4) *абсолютно сумовні з ваговою функцією* $\rho(r) = r\sigma(r)$ *на* I_n^+;
5) *справджують умови спряження,*

то гіперболічна початково-крайова задача (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розвязок, який визначається за формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розвязку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Зауваження 2. Параметр h дозволяє виділяти з формул (33) розвязки початково-крайових задач у випадках задання на площині $z = 0$ крайової умови 1-го роду $(h \to \infty)$ та 2-го роду $(h \to 0)$.

Зауваження 3. Аналіз розвязку (33) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^s(r,\varphi,z)$, $g_j(t,r,\varphi)$, $s = 1,2;\ \ j = \overline{1,n+1}$, проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 4. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища в циліндричній системі координат.

Зауваження 5. У випадку $\alpha_{11}^k = 0,\ \beta_{11}^k = 1;\ \alpha_{12}^k = 0,\ \beta_{12}^k = 1;\ \alpha_{21}^k = E_1^k,\ \beta_{21}^k = 0;\ \alpha_{22}^k = E_2^k,\ \beta_{22}^k = 0,$ де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга ($k = \overline{1,n},$) умови спряження (5) збігаються із класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю вимушених коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розвязків (функцій впливу та функцій Гріна) уперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розвязку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому півпросторі. Одержаний розвязок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може використовуватися як у подальших теоретичних дослідженнях, так і у практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. – М. : Наука. 1978.
2. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1958.
3. *Гординг Л.* Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. – М. : ИЛ, 1961.
4. *Громик А. П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Камянець-Подільський : Абетка-Світ, 2011.
5. *Дейнека В.С.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К. : Наук. думка, 1998.
6. *Конет І. М.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. – Чернівці : Прут, 2004.
7. *Конет І. М.* Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. – Камянець-Подільський : Абетка-Світ, 2013.
8. *Ленюк М.П.* Узагальнення інтегралу Фур'є – Бесселя / М. П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. пр. – К. : Ін-т математики АН України, 1993. – Вип. 2, ч. 1. – С. 89–101.
9. *Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. – К. : Наук. думка. 1991.
10. *Перестюк М. О.* Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2006.
11. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными / А. М. Самойленко, Б. П. Ткач. – К. : Наук. думка, 1992.
12. *Сергиенко И. В.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наук. думка, 1991.
13. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1962.
14. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М. : ИЛ, 1955.
15. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. – М. : Гостехтеориздат, 1956.
16. *Чернятин В. А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. – М. : Изд-во МГУ, 1991.
17. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 05.12.16

А. Громик, канд. техн. наук, доц.
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольский, Украина,
И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, канд. физ.-мат. наук, Украина,
Каменец-Подольский национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ ЦИЛЛИНДРИЧЕСКИ-КРУГОВОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Методом интегральных и гибридных интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) впервые построено интегральное представление единственного точного аналитического решения гиперболической краевой задачи математической физики в кусочно-однородном цилиндрически-круговом полупространстве.

A. Gromyk, PhD
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky, Ukraine,
I. Konet, Full Doctor, Prof., T. Pylypiuk, PhD
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky, Ukraine

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDRICAL-CIRCULAR HALFSPACE

By means of method of integral and hybrid integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrix and Green's matrix) the integral image of the only exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise-homogeneous cylindrically-circular halfspace is constructed for the first time.

УДК 517.9

В. Мороз, старш. викл.
Хмельницький національний університет, Хмельницький
E-mail: *morozvv2008@yandex.ua*

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВЯЗКУ ПАРАБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З ПОХІДНОЮ ПО ЧАСУ У КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) на полярній осі із двома точками спряження побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розвязку мішаної крайової задачі для рівнянь параболічного типу у припущенні, що крайові умови та умови спряження містять похідну по часовій змінній.

Вступ. Композитні матеріали широко застосовують у різноманітних технологічних процесах, будівництві, енергозбереженні, у звязку з чим виникає необхідність постановки і розвязування задач теплопровідності в середовищах, неоднорідних по своїй структурі (багатошарові тіла). При цьому неоднорідність середовища приводить до розгляду крайових і мішаних задач із кусково-неперервними або кусково-сталими коефіцієнтами [2; 8].

В усіх випадках процеси поширення теплоти вивчались у припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Однак, якщо припустити, що на межі середовища може відбуватись поглинання хвиль (мяка межа), одержимо крайову задачу, що містить похідну по часу в операторах крайових умов та умов спряження виду $L_{jk}=\left(\alpha_{jk}+\delta_{jk}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\dfrac{\partial}{\partial x}+\beta_{jk}+\gamma_{jk}\dfrac{\partial}{\partial t}$, $k=1,2$, j – номер точки спряження.

Для розвязування таких задач, як правило, застосовувався метод інтегрального перетворення Лапласа. Це приводило до крайової задачі на кусково-однорідному сегменті для сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з відповідними крайовими умовами та умовами спряження, залежними від комплексного параметра перетворення Лапласа. Маємо дві нелегкі задачі: розвязання крайової задачі в зображеннях за Лапласом та знаходження оригіналу одержаного розвязку. Виявляється, що можна отримати інтегральні перетворення зі спектральним параметром, які спрацьовують для задач із мякими межами за такою самою логічною схемою, як інтегральні перетворення без спектрального параметра в задачах із жорсткими межами. Побудові одного класу таких гібридних інтегральних перетворень, породжених гібридним диференціальним оператором Ейлера – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) на полярній осі, присвячено цю роботу.

Основна частина. Розглянемо диференціальний оператор Ейлера $B^*_{\alpha_1}=r^2\dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_1+1)\,r\dfrac{d}{dr}+\alpha_1^2$ [5], Фур'є $F=\dfrac{d^2}{dr^2}$ [6] та Конторовича – Лєбєдєва $B_{\alpha_2}=r^2\dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha_2+1)\,r\dfrac{d}{dr}+\alpha_2^2-\lambda^2r^2$ [7]. Нехай $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [10]. Утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\mathrm{M}_{(\alpha)}=\theta(r)\theta(R_1-r)\,B^*_{\alpha_1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\,F+\theta(r-R_2)\,B_{\alpha_2}\,. \tag{1}$$

У цих рівностях $2\alpha_j+1>0$, $\lambda\in(0;\infty)$, $r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)$, $(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2)$.

Означення. Областю визначення ГДО $\mathrm{M}_{(\alpha)}$ назвемо множину G функцій $g(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)g_1(r)+\theta(r-R_1)\times$ $\times\theta(R_2-r)\,g_2(r)+g_3(r)\,\theta(r-R_2)$ із такими властивостями:

1) функція $\mathrm{M}_{(\alpha)}[g(r)]$ неперервна на множині $I_2^+=\{r:r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[(\tilde\alpha^k_{j1}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j1})\,g_k(r)-(\tilde\alpha^k_{j2}\frac{d}{dr}+\tilde\beta^k_{j2})g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=0\,,\quad j,k=1,2\,; \tag{2}$$

3) існують такі числа γ_1 та γ_2, що справедливі умови обмеження

$$\lim_{r\to0}\left[r^{\gamma_1}g_1(r)\right]=0\,,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma_2}g_3(r)\right]=0\,. \tag{3}$$

У рівності (2) беруть участь величини

$$\tilde\alpha^k_{jm}=\alpha^k_{jm}-(\beta^2+\gamma^2)\,\delta^k_{jm}\,,\ \tilde\beta^k_{jm}=\beta^k_{jm}-(\beta^2+\gamma^2)\gamma^k_{jm}\,,\ \gamma^2\ge0\,,\ \beta\in(0,\infty)\,,\ \beta \text{ – спектральний параметр.}$$

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^k_{jm}\ge0$, $\beta^k_{jm}\ge0$, $\delta^k_{jm}\ge0$, $\gamma^k_{jm}\ge0$, $c_{11,k}\,c_{21,k}>0$;

$$c_{j1,k}=\alpha^k_{2j}\beta^k_{1j}-\alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}\,;\ c_{j2,k}\equiv\delta^k_{2j}\gamma^k_{1j}-\delta^k_{1j}\gamma^k_{2j}=0\,,\ \alpha^k_{1j}\gamma^k_{2j}-\alpha^k_{2j}\gamma^k_{1j}=\beta^k_{1j}\delta^k_{2j}-\beta^k_{2j}\delta^k_{1j}\,,\ j,m,k=1,2\,.$$

Якщо визначити числа

$$\tilde a^k_{11}=\tilde\alpha^k_{11}\tilde\alpha^k_{22}-\tilde\alpha^k_{21}\tilde\alpha^k_{12}\,;\ \tilde a^k_{11}=\tilde\beta^k_{11}\tilde\alpha^k_{22}-\tilde\beta^k_{21}\tilde\alpha^k_{12}\,;$$
$$\tilde a^k_{12}=\tilde\alpha^k_{11}\tilde\beta^k_{22}-\tilde\alpha^k_{21}\tilde\beta^k_{12}\,;\ \tilde a^k_{22}=\tilde\beta^k_{11}\tilde\beta^k_{22}-\tilde\beta^k_{21}\tilde\beta^k_{12}\,,$$

то безпосередньо встановлюємо, що

$$\tilde\alpha^k_{11}\tilde\beta^k_{21}-\tilde\alpha^k_{21}\tilde\beta^k_{11}=-c_{11,k}\,;\ \tilde\alpha^k_{12}\tilde\beta^k_{22}-\tilde\alpha^k_{22}\tilde\beta^k_{12}=-c_{21,k}\,;\ \tilde a^k_{22}\tilde a^k_{11}-\tilde a^k_{12}\tilde a^k_{21}=c_{11,k}\,c_{21,k}\,.$$

Унаслідок умов спряження для $u(r)\in G$ та $v(r)\in G$ маємо базову тотожність:

$$\left[u_k(r)v'_k(r)-u'_k(r)v_k(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}(r)v'_{k+1}(r)-u'_{k+1}(r)v_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}\,. \tag{4}$$

© Мороз В., 2017

Уведемо до розгляду величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}\, c_{11,2}}{c_{21,1}\, c_{21,2}} \frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\,,\ \ \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} R_2^{2\alpha_2+1}\,,\ \ \sigma_3 = 1\,,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 - 1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1}\,, \tag{5}$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r), v(r)\big) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)\,dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1\, r^{2\alpha_1-1}\,dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2\,dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3\, r^{2\alpha_2-1}\,dr\,. \tag{6}$$

Покажемо, що ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений. Згідно із правилом (6) маємо

$$\big(M_{(\alpha)}[u(r)], v(r)\big) = \int_0^\infty M_{(\alpha)}[u(r)]v(r)\sigma(r)\,dr = \int_0^{R_1} B^*_{\alpha_1}[u_1]v_1\,\sigma_1\, r^{2\alpha_1-1}dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{d^2u_2}{dr^2} v_2\,\sigma_2\,dr + \int_{R_2}^{\infty} B_{\alpha_2}[u_3]v_3\,\sigma_3\, r^{2\alpha_2-1}\,dr\,. \tag{7}$$

Інтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами:

$$\big(M_{(\alpha)}[u], v\big) = \sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{du_1}{dr}v_1 - u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_0^{R_1} + \sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2 - u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} + \tag{8}$$

$$+\,\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{R_2}^{\infty} + \int_0^\infty u(r)\, M_\alpha[v(r)]\sigma(r)\,dr\,.$$

У силу умов обмеження (3) вирази в точці $r = 0$ та в точці $r = \infty$ перетворюються на нуль:

$$\lim_{r\to 0}\Big[r^{2\alpha_1+1}(u_1'v_1 - u_1v_1')\Big] = 0\,,\ \ \lim_{r\to\infty}\Big[r^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3 - u_3v_3')\Big] = 0\,.$$

На підставі базової тотожності (4) маємо таке:

1) $\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(u_1'v_1 - u_1v_1')\big|_{r=R_1} - \sigma_2(u_2'v_2 - u_2v_2')\big|_{r=R_1} = (\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\dfrac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \sigma_2)(u_2'v_2 - u_2v_2')\big|_{r=R_1} =$

$$= \left(\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\right)(u_2'v_2 - u_2v_2')\big|_{r=R_1} =$$

$$= \left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}} - \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\right)R_2^{2\alpha_2+1}\big[u_2'(r)v_2(r) - u_2(r)v_2'(r)\big]\big|_{r=R_1} = 0\,;$$

2) $\sigma_2\left(\dfrac{du_2}{dr}v_2 - u_2\dfrac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\left(\dfrac{du_3}{dr}v_3 - u_3\dfrac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2} =$

$$= \left(\sigma_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\right)(u_3'v_3 - u_3v_3')\big|_{r=R_2} = \left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - \sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\right)\times$$

$$\times\,(u_3'v_3 - u_3v_3')\big|_{r=R_2} = (1-1)\,R_2^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3 - u_3v_3')\big|_{r=R_2} = 0\,.$$

Рівність (8) набуває вигляду

$$\big(M_{(\alpha)}[u], v\big) = \big(u(r), M_{(\alpha)}[v(r)]\big). \tag{9}$$

Рівність (9) означає, що ГДО $M_{(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний згідно з [1]. Оскільки ГДО $M_{(\alpha)}$ має на множині I_2^+ одну особливу точку $r = 0$, то його спектр неперервний. Вважаємо, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна функція

$$V_{(\alpha)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{(\alpha);1}(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{(\alpha);2}(r,\beta) + \theta(r - R_2)V_{(\alpha);3}(r,\beta)\,. \tag{10}$$

При цьому функції $V_{(\alpha);j}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}
&(B^*_{\alpha_1} + b_1^2)\,V_{(\alpha);1}(r,\beta) = 0\,,\ \ r \in (0, R_1)\,,\\
&(F + b_2^2)\,V_{(\alpha);2}(r,\beta) = 0\,,\ \ r \in (R_1, R_2)\,,\\
&(B_{\alpha_2} + b_3^2)\,V_{(\alpha);3}(r,\beta) = 0\,,\ \ r \in (R_2, \infty)\,,
\end{aligned} \tag{11}$$

умови спряження (2) та умови обмеження (3); $b_j^2 = (\beta^2 + k_j^2)$, $k_j^2 \ge 0$, $j = \overline{1,3}$, $\beta \in (0,\infty)$.

Фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ складають функції $v_1 = r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r)$ та $v_2 = r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)$ [5]; фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Фур'є $(F + b_2^2)v = 0$ складають тригонометричні функції $v_1 = \cos b_2 r$ та $v_2 = \sin b_2 r$ [6]; фундаментальну систему для диференціального рівняння Конторовича – Лєбєдєва $(B_{\alpha_2} + b_3^2)v = 0$ складають функції $v_1 = C_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ та $v_2 = D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)$ [7].

Якщо покласти

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 r^{-\alpha_1}\cos(b_1 \ln r) + B_1 r^{-\alpha_1}\sin(b_1 \ln r)\,,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 \cos b_2 r + B_2 \sin b_2 r\,, \tag{12}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r, b_3)\,,$$

то умови спряження (2) дають для визначення величини A_j ($j=1,2$) та B_k ($k=\overline{1,3}$) алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$A_1 Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1) + B_1 Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1) - A_2 v^{11}_{j2}(b_2R_1) - B_2 v^{12}_{j2}(b_2R_1) = 0\,, \tag{13}$$
$$A_2 v^{21}_{j1}(b_2R_2) + B_2 v^{22}_{j1}(b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)B_3 = 0\,,\ \ j=1,2\,.$$

Алгебраїчна система (13) завжди сумісна [3]. При $B_3 \neq 0$ розглянемо алгебраїчну систему відносно A_2, B_2:

$$v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2 = X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)B_3\,,\ \ j=1,2\,. \tag{14}$$

Визначник алгебраїчної системи (14)

$$v^{21}_{11}(b_2R_2)\,v^{22}_{21}(b_2R_2) - v^{22}_{21}(b_2R_2)\,v^{21}_{11}(b_2R_2) = c_{11,2}\,b_2 \neq 0\,.$$

Алгебраїчна система (14) має єдиний розвязок [3]:

$$A_2 = B_3\left[b_2\,c_{11,2}\right]^{-1}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\,v^{22}_{21}(b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\,v^{22}_{11}(b_2R_2)\right], \tag{15}$$
$$B_2 = -B_3\left[b_2\,c_{11,2}\right]^{-1}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\,v^{21}_{21}(b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\,v^{21}_{11}(b_2R_2)\right].$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему відносно A_1, B_1:

$$Y^{11}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)A_1 + Y^{12}_{\alpha_1;j1}(b_1,R_1)B_1 = B_3\left[b_2\,c_{11,2}\right]^{-1}\Big\{X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\left[v^{22}_{21}(b_2R_2)\,v^{11}_{j2}(b_2R_1) - v^{21}_{21}(b_2R_2)\,v^{12}_{j2}(b_2R_1)\right] -$$
$$- X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\left[v^{22}_{11}(b_2R_2)\,v^{11}_{j2}(b_2R_2) - v^{21}_{11}(b_2R_2)\,v^{12}_{j2}(b_2R_1)\right]\Big\} \equiv \tag{16}$$
$$\equiv B_3\left[b_2\,c_{11,2}\right]^{-1}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\,\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\,\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)\right] \equiv B_3\left[b_2\,c_{11,2}\right]^{-1} b_{\alpha_2;j}(\beta)\,.$$

Визначник алгебраїчної системи (16)

$$Y^{11}_{\alpha_1;11}\,Y^{12}_{\alpha_1;21} - Y^{11}_{\alpha_1;21}\,Y^{12}_{\alpha_1;11}(b_1R_1) = c_{11,1}\,b_1\,R_1^{-(2\alpha_1+1)} \neq 0\,.$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розвязок [3]:

$$A_1 = \omega_{(\alpha);2}(\beta)\,,\ \ B_1 = -\omega_{(\alpha);1}(\beta)\,;\ \ B_3 = c_{11,1}\,b_1\,c_{11,2}\,b_2\,R_1^{-(2\alpha_1+1)}\,, \tag{17}$$
$$\omega_{(\alpha);j}(\beta) = b_{\alpha_2;1}(\beta)\,Y^{1j}_{\alpha_1;21}(b_1,R_1) - b_{\alpha_2;2}(\beta)\,Y^{1j}_{\alpha_1;11}(b_1,R_1)\,.$$

Підставивши згідно з формулами (15) та (17) визначені величини A_j та B_k у рівності (11), отримаємо:

$$V_{(\alpha);1}(r,\beta) = \omega_{(\alpha);2}(\beta)r^{-\alpha_1}\cos(b_1\ln r) - \omega_{(\alpha);1}(\beta)r^{-\alpha}\sin(b_1\ln r)\,,$$
$$V_{(\alpha);2}(r,\beta) = c_{11,1}b_1R_1^{-(2\alpha_1+1)}\left[X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,b_3)\,\varphi^2_{21}(b_2R_2,b_2r) - X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,b_3)\,\varphi^2_{11}(b_2R_2,b_2r)\right],$$
$$\varphi^2_{j1}(b_2R_2,b_2r) = v^{21}_{j1}(b_2R_2)\cos b_2r - v^{21}_{j1}(b_2R_2)\sin b_2r\,, \tag{18}$$
$$V_{(\alpha);3}(r,\beta) = c_{11,1}\,b_1\,c_{11,2}\,R_1^{-(2\alpha_1+1)}\,D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)\,.$$

Унаслідок співвідношень (18) спектральна вектор-функція $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ стає відомою.

Наявність вагової $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{(\alpha)}(r,\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{(\alpha)}(\beta) = \beta\left[b_1(\beta)\right]^{-1}\left(\left[\omega_{(\alpha);1}(\beta)\right]^2 + \left[\omega_{(\alpha);2}(\beta)\right]^2\right)^{-1}$$

дозволяє побудувати пряме $H_{(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), які породжені на множині I_2^+ ГДО $M_{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1):

$$H_{(\alpha)}\left[g(r)\right] = \int_0^\infty g(r)\,V_{(\alpha)}(r,\beta)\,\sigma(r)\,dr \equiv \widetilde{g}(\beta)\,, \tag{19}$$

$$H^{-1}_{(\alpha)}\left[\widetilde{g}(\beta)\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \widetilde{g}(\beta)\,V_{(\alpha)}(r,\beta)\,\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta \equiv g(r)\,. \tag{20}$$

Математичним обґрунтуванням формул (19), (20) є твердження.

Теорема 1. *Якщо функція*

$$f(r) = \left[\theta(r)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)1 + \theta(r-R_2)r^{\alpha_2-1/2}\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна і має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, *то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(\rho)V_{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)\,d\rho\right)V_{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,. \tag{21}$$

Доведення. Застосуємо метод дельтаподібної послідовності – ядро Коші як фундаментальна матриця розвязків задачі Коші для системи рівнянь із частинними похідними параболічного типу, породженої ГДО $M_{(\alpha)}$.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+ = \left\{(t,r): t\in(0,\infty), r\in I_2^+\right\}$ розвязку диференціальних рівнянь параболічного типу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2 u_1 - B^*_{\alpha_1}[u_1]=0\,,\ r\in(0,R_1)\,,\\ &\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2 u_2 - F[u_2]=0\,,\ r\in(R_1,R_2)\,,\\ &\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2 u_3 - B_{\alpha_3}[u_3]=0\,,\ r\in(R_2,\infty) \end{aligned} \tag{22}$$

із початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0}=g_j(r)\,,\ r\in I_2^+\,,\ j=\overline{1,3} \tag{23}$$

та умовами спряження

$$\left(L^k_{j1}\left[u_k(t,r)\right]-L^k_{j2}\left[u_{k+1}(t,r)\right]\right)\Big|_{r=R_k}=0\,,\ k=1,2\,. \tag{24}$$

У рівності (24) беруть участь диференціальні оператори

$$L^k_{jm}=\left(\alpha^k_{jm}+\delta^k_{jm}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta^k_{jm}+\gamma^k_{jm}\frac{\partial}{\partial t}\,;\ j,m,k=1,2\,.$$

Припустимо, що функція $u(t,r)=\left\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\right\}$ є оригіналом за Лапласом щодо t [4]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (22)–(24) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розвязок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера, Фур'є та Конторовича – Лєбєдєва для модифікованих функцій:

$$\begin{aligned} &(B^*_{\alpha_1}-q_1^2)u_1^*(p,r)=-g_1(r)\,,\ r\in(0,R_1)\,,\\ &(F-q_2^2)\,u_2^*(p,r)=-g_2(r)\,,\ r\in(R_1,R_2)\,,\\ &(B_{\alpha_2}-q_3^2)\,u_3^*(p,r)=-g_3(r)\,,\ r\in(R_2,\infty)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

За умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr}+\overline{\beta}^k_{j1}\right)u_k^*(p,r)-\left(\overline{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr}+\overline{\beta}^k_{j2}\right)u_{k+1}^*(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0\,;\ j,k=1,2\,. \tag{26}$$

Тут $q_1=(p+\gamma_j^2)^{1/2}$, $u_j^*(p,r)=\int\limits_0^\infty u_j(t,r)\,e^{-pt}dt$, $\overline{\alpha}^k_{jm}=\overline{\alpha}^k_{jm}+p\,\delta^k_{jm}$, $\overline{\beta}^k_{jm}=\beta^k_{jm}+p\,\gamma^k_{jm}$, $\mathrm{Re}\,q_j>0$.

Ми вважаємо, що числа

$$\psi_{jk}\equiv\delta^k_{j1}g'_k(R_k)+\gamma^k_{j1}g_k(R_k)-\left[\delta^k_{j1}g'_{k+1}(R_k)+\gamma^k_{j2}g_{k+1}(R_k)\right]=0\,.$$

У протилежному випадку переходимо до нових початкових даних $\overline{g}_1(r)=g_1(r)-b_1$, $\overline{g}_2(r)=g_2(r)-(a_2r+b_2)$, $\overline{g}_3(r)=g_3(r)-b_3$ і числа b_1, b_2, b_3 та a_2 знаходимо із алгебраїчної системи

$$(\gamma^k_{j1}R_k+\delta^k_{j1})\,a_k+\gamma^k_{j1}b_k-(\gamma^k_{j2}R_k+\delta^k_{j2})\,a_{k+1}-\gamma^k_{j2}b_{k+1}=\psi_{jk}\,;\ a_1=a_3=0\,.$$

При виконанні умов на коефіцієнти ця система має єдиний розвязок. Фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_1}-q_1^2)\,v=0$ утворюють функції $v_1=r^{-\alpha_1-q_1}$ та $v_2=r^{-\alpha_1+q_1}$ [5]; фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Фур'є $(F-q_2^2)\,v=0$ утворюють функції $v_1=\mathrm{ch}\,q_2r$ та $v_2=\mathrm{sh}\,q_2r$ [6], фундаментальну систему розвязків для диференціального рівняння Конторовича – Лєбєдєва $(B_{\alpha_2}-q_3^2)\,v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ та $K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)$ [7].

Наявність фундаментальної системи розвязків дозволяє побудувати розвязок крайової задачі (25), (26) методом функцій Коші [9]:

$$\begin{aligned} &u_1^*(p,r)=A_1r^{-\alpha_1+q_1}+\int\limits_0^{R_1}E_1^*(p,r,\rho)\,g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\,,\\ &u_2^*(p,r)=A_2\,\mathrm{ch}\,q_2r+B_2\,\mathrm{sh}\,q_2r+\int\limits_{R_1}^{R_2}E_2^*(p,r,\rho)\,g_2(\rho)\,d\rho\,,\\ &u_3^*(p,r)=B_3K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+\int\limits_{R_2}^{\infty}E_3^*(p,r,\rho)\,g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}\,d\rho\,. \end{aligned} \tag{27}$$

У рівностях (27) $E_j^*(p,r,\rho)$ – функції Коші:

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_1Z_{\alpha_1;11}^{12}(q_1,R_1)}\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}\psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,\rho),\ 0<r<\rho<R_1,\\ \rho^{-\alpha_1+q_1}\psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,r),\ 0<\rho<r<R_1,\end{cases} \tag{28}$$

$$E_2^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases} \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2r)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho),\ R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r),\ R_1<\rho<r<R_2,\end{cases} \tag{29}$$

$$E_3^*(p,r,\rho)=-\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)}\begin{cases} K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\psi_{q_3,\alpha_2;12}^{2*}(\lambda R_2,\lambda r),\ R_2<r<\rho<\infty,\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\psi_{q_3,\alpha_2;12}^{2*}(\lambda R_2,\lambda\rho),\ R_2<\rho<r<\infty.\end{cases} \tag{30}$$

У рівностях (28)–(30) беруть участь функції:

$$Z_{\alpha_1,j1}^{11}(q_1,R_1)=\left[\left(\overline{\beta}_{j1}^1-\alpha_1R_1^{-1}\overline{\alpha}_{j1}^1\right)-\overline{\alpha}_{j1}^1R_1^{-1}q_1\right]R_1^{-\alpha_1-q_1},$$

$$Z_{\alpha_1,j1}^{12}(q_1,R_1)=\left[\left(\overline{\beta}_{j1}^1-\alpha_1R_1^{-1}\overline{\alpha}_{j1}^1\right)+\overline{\alpha}_{j1}^1R_1^{-1}q_1\right]R_1^{-\alpha_1+q_1},$$

$$\psi_{\alpha_1j1}^{1*}(q_1,r)=Z_{\alpha_1j1}^{12}(q_1,R_1)r^{-\alpha_1-q_1}-Z_{\alpha_1j1}^{11}(q_1,R_1)r^{-\alpha_1+q_1},$$

$$V_{jk}^{m1}(q_sR_m)=\overline{\alpha}_{jk}^mq_s\operatorname{sh}q_sR_m+\overline{\beta}_{jk}^m\operatorname{ch}q_sR_m\equiv(\overline{\alpha}_{jk}^md/dr+\overline{\beta}_{jk}^m)\operatorname{ch}q_sr\Big|_{r=R_m},$$

$$V_{jk}^{m2}(q_sR_m)=\overline{\alpha}_{jk}^mq_s\operatorname{ch}q_sR_m+\overline{\beta}_{jk}^m\operatorname{sh}q_sR_m\equiv(\overline{\alpha}_{jk}^md/dr+\overline{\beta}_{jk}^m)\operatorname{ch}q_sr\Big|_{r=R_m},$$

$$\Phi_{jk}^m(q_sR_m,q_sr)=V_{jk}^{m2}(q_sR_m)\operatorname{ch}q_sr-V_{jk}^{m1}(q_sR_m)\operatorname{sh}q_sr,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V_{j2}^{11}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2)-V_{j2}^{12}(q_2R_1)V_{k1}^{22}(q_2R_2);\ \ j,k=1,2,$$

$$U_{q_3,\alpha_2;jk}^{m1}(\lambda R_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^m\frac{q_3-\alpha_2}{R_m}+\overline{\beta}_{jk}^m\right)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_m)+\overline{\alpha}_{jk}^m\lambda^2R_m\,I_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$U_{q_3,\alpha_2;jk}^{m2}(\lambda R_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^m\frac{q_3-\alpha_2}{R_m}+\overline{\beta}_{jk}^m\right)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda R_m)+\overline{\alpha}_{jk}^m\lambda^2R_m\,K_{q_3+1,\alpha_2+1}(\lambda R_m),$$

$$\psi_{q_3,\alpha_2;jk}^{m*}(\lambda R_m)=U_{q_3,\alpha_2;jk}^{m1}(\lambda R_m)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)-U_{q_3,\alpha_2;jk}^{m2}(\lambda R_m)I_{q_3,\alpha_2}(\lambda r).$$

Умови спряження (26) для визначення величин A_1, A_2, B_2, B_3 дають неоднорідну алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z_{\alpha_1jk}^{12}(q_1,R_1)A_1-V_{j2}^{11}(q_2R_1)A_2-V_{j2}^{12}(q_2R_1)B_2=\delta_{j2}G_{12}^*,\ \ j=1,2; \tag{31}$$

$$V_{j1}^{21}(q_2R_2)A_2+V_{j1}^{22}(q_2R_2)B_2-U_{q_3,\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2)B_3=\delta_{j2}G_{23}^*.$$

У системі (31) беруть участь функції

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\rho^{-\alpha_1+q_1}}{Z_{\alpha_1,11}^{12}(q_1,R_1)}g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+c_{21}^*(p)\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho,$$

$$G_{23}^*=-c_{12}^*\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^1(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}g_2(\rho)d\rho+\frac{c_{22}^*(p)}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int_{R_3}^{\infty}\frac{K_{q_3,\alpha_2}(q_3\rho)}{U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)}g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12}=0$, $\delta_{22}=1$) [3].

Уведемо до розгляду функції:

$$A_{\alpha_1,j}(p)=Z_{\alpha_1,11}^{12}(q_1R_1)\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-Z_{\alpha_1,21}^{12}(q_1,R_1)\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{q_3,\alpha_2;j}(p)=U_{q_3,\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2)\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$\theta_{\alpha_1,1}^*(r,p)=Z_{\alpha_1,11}^{12}(q_1,R_1)\Phi_{22}^1(q_2R_2,q_2r)-Z_{\alpha_1,21}^{12}(q_1,R_1)\Phi_{12}^1(q_2R_2,q_2r),$$

$$\theta_{q_3,\alpha_2,2}^*(r,p)=U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)\Phi_{21}^2(q_2R_2,q_2r)-U_{q_3,\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2)\Phi_{11}^2(q_2R_2,q_2r).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розвязності крайової задачі (25), (26): для $p=\sigma+is$ із $\operatorname{Re}p=\sigma\ge\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа та $\operatorname{Im}p=s\in(-\infty,+\infty)$ – визначник алгебраїчної системи (31)

$$\Delta_{(\alpha)}^*(p)\equiv Z_{\alpha_1,11}^{12}(q_1,R_1)B_{q_3,\alpha_2;2}(p)-Z_{\alpha_1,21}^{12}(q_1,R_1)B_{q_3,\alpha_2;1}(p)=$$
$$=U_{q_3,\alpha_2;22}^{22}(\lambda R_2)A_{\alpha_1,1}(p)-U_{q_3,\alpha_2;12}^{22}(\lambda R_2)A_{\alpha_1,2}(p)\ne0. \tag{32}$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (25) функції впливу:

$$H_{(\alpha);11}^*(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_1\Delta_{(\alpha)}^*(p)}\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}\left[B_{q_3,\alpha_2;2}(p)\psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,\rho)-B_{q_3,\alpha_2;1}\psi_{\alpha_1;21}^{1*}(q_1,\rho)\right],\ 0<r<\rho<R_1;\\ \rho^{-\alpha_1+q_1}\left[B_{q_3,\alpha_2;2}(p)\psi_{\alpha_1;11}^{1*}(q_1,r)-B_{q_3,\alpha_2;1}\psi_{\alpha_1;21}^{1*}(q_1,r)\right],\ 0<\rho<r<R_1;\end{cases}$$

$$H_{(\alpha);12}^*(p,r,\rho)=\frac{c_{21}^*}{\Delta_{(\alpha)}^*(p)}r^{-\alpha_1+q_1}\theta_{q_3,\alpha_2;2}^*(\rho,p);$$

$$H^*_{(\alpha);13}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{21}c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}q_2r^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\,;$$

$$H^*_{(\alpha);21}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}(p)}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{1}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\rho^{-\alpha_1+q_1}\theta_{q_3,\alpha_2;2}(r,p)\,;$$

$$H^*_{(\alpha);22}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_2\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases}\theta^*_{\alpha_1;1}(r,p)\theta_{q_3,\alpha_2;2}(\rho,p),\ R_1<r<\rho<R_2;\\ \theta^*_{\alpha_1;1}(\rho,p)\theta_{q_3,\alpha_2;2}(r,p),\ R_1<\rho<r<R_2;\end{cases}$$

$$H^*_{(\alpha);23}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{22}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\theta^*_{\alpha_1;1}(r,p)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)\,; \tag{33}$$

$$H^*_{(\alpha);31}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{11}c^*_{12}q_2}{R_1^{2\alpha_1+1}\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\rho^{-\alpha_1+q_1}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\,;$$

$$H^*_{(\alpha);32}(p,r,\rho)=\frac{c^*_{12}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\theta^*_{\alpha_1;1}(\rho,p)K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)\,;$$

$$H^*_{q_3,\alpha_2;33}(p,r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_2}}{\Delta^*_{(\alpha)}(p)}\begin{cases}K_{q_3,\alpha_2}(\lambda\rho)[A_{\alpha_2;2}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda r)-A_{\alpha_1;1}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda r)],\ R_2<r<\rho<\infty;\\ K_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)[A_{\alpha_2;2}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda\rho)-A_{\alpha_1;1}(p)\psi^{2*}_{q_3,\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda\rho)],\ R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}$$

У результаті однозначної розвязності алгебраїчної системи (31), підстановки отриманих значень A_j та B_k у формули (27) і низки елементарних перетворень маємо єдиний розвязок крайової задачі (25), (26):

$$u^*_j(p,r)=\int_0^{R_1}H^*_{(\alpha);j1}(p,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H^*_{(\alpha);j2}(p,r,\rho)g_2(\rho)d\rho+ \tag{34}$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}H^*_{(\alpha);j3}(p,r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\,,\ \ j=\overline{1,3}\,.$$

Повертаючись у (34) до оригіналу, отримуємо єдиний розвязок параболічної задачі (22)–(24):

$$u_j(t,r)=\int_0^{R_1}H_{(\alpha);j1}(t,r,\rho)g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{(\alpha);j2}(t,r,\rho)g_2(\rho)d\rho+ \tag{35}$$

$$+\int_{R_2}^{\infty}H^*_{(\alpha);j3}(t,r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\,,\ \ j=\overline{1,3}\,.$$

У рівностях (35) за означенням [4]

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}H^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp\,,\ \ j,k=\overline{1,3}\,. \tag{36}$$

Особливими точками функцій $H^*_{(\alpha);jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2$ та $p=\infty$.

Нехай $\gamma^2=\max\{\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_3^2\}$. Покладемо $\gamma^2-\gamma_j^2=k_j^2\ge 0$. Тоді при $\sqrt{p+\gamma_j^2}=i\sqrt{\beta^2+k_j^2}$ маємо, що $p+\gamma_j^2=-(\beta^2+k_j^2)$. Звідси випливає, що $p=-(\beta^2+k_j^2+\gamma_j^2)=-(\beta^2+\gamma^2)\equiv(\beta^2+\gamma^2)\exp(\pi i)$; $dp=-2\beta d\beta$.

Якщо скористатися методом контурного інтеграла, лемою Жордана і теоремою Коші [4], то формули (36) можна перетворити майже на розрахункові:

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Im}\left\{H^*_{(\alpha);jk}(e^{\pi i}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho)\right\}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\,\beta d\beta\,;\ \ j,k=\overline{1,3}\,. \tag{37}$$

Тут $\mathrm{Im}(...)$ означає уявну частину виразу (…).

Виконавши зазначені у формулі (37) операції, знаходимо

$$H_{(\alpha);jk}(t,r,\rho)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\,V_{(\alpha);k}(\rho,\beta)\,\Omega_{(\alpha)}(\beta)\sigma_k\,d\beta\,;\ \ j,k=\overline{1,3}\,. \tag{38}$$

Розвязок (35) параболічної задачі (22)–(24) набуває вигляду

$$u_j(t,r)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{(\alpha);j}(r,\beta)\left(\int_0^{R_1}g_1(\rho)\,V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\,V_{(\alpha);j}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\sigma_2d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta+ \tag{39}$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{(\beta^2+\gamma^2)t}\,V_{(\alpha);j}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)V_{(\alpha);3}(p,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)d\beta\,;\ \ j=\overline{1,3}\,.$$

Унаслідок властивостей ядра Коші як дельтаподібної послідовності та початкових умов (23) одержуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);1}(r,\beta)\left(\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{(\alpha);1}(\rho,\beta)\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,, \tag{40}$$

$$g_2(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);2}(r,\beta)\left(\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{(\alpha);2}(\rho,\beta)\sigma_2 d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,, \tag{41}$$

$$g_3(r)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty V_{(\alpha);3}(r,\beta)\left(\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)V_{(\alpha);3}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha_2-1}d\rho\right)\Omega_{(\alpha)}(\beta)\,d\beta\,. \tag{42}$$

Помножимо рівність (40) на $\theta(r)\theta(R_1-r)$, рівність (41) – на $\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)$, а рівність (42) помножимо на $\theta(r-R_2)$ і додамо. У результаті приходимо до інтегрального зображення (21). Теорему доведено.

Застосування запровадженого формулами (19), (20) гібридного інтегрального перетворення (ГІП) базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{(\alpha)}$.

Теорема 2. *Якщо функція $M_{(\alpha)}[g(r)]$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження*

$$\left[(\tilde{\alpha}_{j1}^k d/dr+\tilde{\beta}_{j1}^k)g_k(r)-(\tilde{\alpha}_{j2}^k d/dr+\tilde{\beta}_{j2}^k)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,;\;\; j,k=1,2\,, \tag{43}$$

та умови обмеження (3), то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{(\alpha)}$:

$$H_\alpha\left[M_{(\alpha)}[g(r)]\right]=-\beta^2\bar{g}(\beta)-\sum_{j=1}^{3}k_j^2\bar{g}_j(\beta)+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{(\alpha);12}^k(\beta)\omega_{2k}-Z_{(\alpha);22}^k(\beta)\omega_{1k}\right]. \tag{44}$$

Доведення тотожності (44) здійснюється за відомою логічною схемою [5; 7].

Висновки. Наявність інтегрального зображення (21) дозволяє побудувати пряме (19) та обернене (20) ГІП, породжені ГДО Ейлера – Фур'є – (Конторовича – Лєбєдєва) $M_{(\alpha)}$ на полярній осі із двома точками спряження. Отримані ГІП можна застосовувати для знаходження точних аналітичних розвязків мішаних крайових задач як із мякими, так і з жорсткими межами (у цьому випадку коефіцієнти $\delta_{jm}^k=0$, $\gamma_{jm}^k=0$). Одержані розвязки неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть використовуватись у теоретичних дослідженнях і в компютерному моделюванні процесів поширення теплоти в кусково-неоднорідному середовищі.

Список використаних джерел

1. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. – К. : Наук. думка, 1965. – 798 с.
2. *Конет І. М.* Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах / І. М. Конет, Т. М. Пилипюк. – Камянець-Подільський : Абетка-Світ, 2016. – 244 с.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М. : Наука, 1971. – 432 с.
4. *Лаврентьев М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1987. – 688 с.
5. *Ленюк М. П.* Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку / М. П. Ленюк. – Чернівці : Прут. – 2012 – 224 с.
6. *Ленюк М. П.* Интегральные преобразования Фурье для кусочно-однородных неограниченных и полуограниченных сред / М. П. Ленюк. – К., 1985. – 60 с. (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; N 85).
7. *Ленюк М. П.* Інтегральні перетворення типу Конторовича – Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. – Чернівці : Прут, 2002. – 280 с.
8. *Мороз В. В.* Моделювання нестаціонарного температурного поля в багатошаровій кусково-однорідній пластині методом інтегрального перетворення Фур'є зі спектральним параметром у крайових умовах та умовах спряження / В. В. Мороз // Зб. наук. пр. ф-ту прикладної математики та компютерних технологій ХНУ. – 2009. № 1(2). – С. 89–94.
9. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М. : Физматгиз, 1959. – 428 с.
10. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. – М. : Наука, 1965. – 328 с.

Надійшла до редколегії 14.05.17

В. Мороз, старш. препод.
Хмельницкий национальный университет, Хмельницкий, Украина

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ И УСЛОВИЯХ СОПРЯЖЕНИЯ

Методом гибридного интегрального преобразования типа Эйлера – Фурьє – (Конторовича – Лебедева) на полярной оси с двумя точками сопряжения получено интегральное представление точного аналитического решения смешанной краевой задачи для уравнений параболического типа в предположении, что краевые условия и условия сопряжения содержат производную по времени.

V. Moroz, senior lecturer
Khmelnitsky National University, Khmelnitsky, Ukraine

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DERIVATIVE BY TIME IN BOUNDARY CONDITIONS AND CONDITIONS OF CONTRACTING

Using the hybrid integral transformation type Euler – Fourier – (Kontorovich – Lebedev) on a polar axis with two conjugation points, it was obtained the integral representation of exact analytical solution of the mixed parabolic boundary value problem equations of parabolic type in supposition that the boundary conditions and conjugation conditions contain the time derivative.

УДК 517.9

І. Романюк, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *romanjuk.iv@gmail.com*

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ З БАГАТОЗНАЧНИМ ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

Доведено існування глобального атрактора для імпульсної динамічної системи, що породжується двовимірною параболічною системою, розвязки якої зазнають багатозначного імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини фазового простору.

Вступ. Для нескінченновимірних дисипативних еволюційних систем одним з основних обєктів вивчення є глобальний атрактор [15]. Для розподілених систем з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу [6] існування та властивості глобальних атракторів установлено в [1, 11, 14]. Важливим класом систем з імпульсним впливом у нефіксовані моменти часу є розривні (або імпульсні) динамічні системи (ДС) [6, 12]. Різним аспектам якісної теорії імпульсних ДС в скінченновимірному випадку присвячено роботи [4, 9, 10, 13]. Глобальні атрактори для класу імпульсних ДС зі скінченною кількістю стрибків уздовж траєкторії вивчались у [7, 8]. Більш загальний підхід розроблено в [2, 3]. Його реалізацію для скалярного параболічного рівняння з багатозначним імпульсним збуренням здійснено в [5]. У цій статті такий підхід застосовується до імпульсної ДС, що породжується двовимірною параболічною системою, розвязки якої зазнають багатозначного імпульсного збурення при досягненні фіксованої підмножини фазового простору.

Постановка задачі. В обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, розглядається параболічна система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = 2b\Delta u + a\Delta v, \\ u\big|_{\partial\Omega} = v\big|_{\partial\Omega} = 0; \end{cases} \tag{55}$$

де

$$a > 0, |b| < a \ . \tag{56}$$

Система (1) у фазовому просторі $H = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ породжує півгрупу $V : \mathbb{R}_+ \times H \to H$, для якої згідно з (2)

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t \geq 0 \ \ \forall\, z_0 \in H \ \ \left\| V(t, z_0) \right\|_H \leq e^{-\delta t} \left\| z_0 \right\|_H . \tag{57}$$

Тут і далі для $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$, $\|z\|_H := \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$, де $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ – норма та скалярний добуток в $L^2(\Omega)$.

Для (1) будемо розглядати імпульсну множину [3]

$$M = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H \,\middle|\, |(u,\psi)| \leq \gamma, \ \alpha u + \beta v = 1 \right\}, \tag{58}$$

де $\gamma > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \psi \in L^2(\Omega)$ – фіксовані.

Коли фазова точка z досягає множини M, імпульсне багатозначне віображення I переводить її в нове положення $z^+ \in Iz \subset M'$, де

$$M' = \left\{ z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H \,\middle|\, |(u,\psi)| \leq \gamma, \ \alpha u + \beta v = 1 + \mu \right\}, \ \mu > 0 . \tag{59}$$

У цій статті для певного класу відображень I доведено, що імпульсна задача (1), (4), (5) породжує імпульсну багатозначну ДС, для якої у фазовому просторі H існує глобальний атрактор.

Основні результати. Для півгрупи V справедлива формула

$$\forall t \geq 0 \ \ \forall z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in H \ \ V(t, z_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (u_0, \psi_i) \\ (v_0, \psi_i) - 2b\lambda_i (u_0, \psi_i) t \end{pmatrix} e^{-a\lambda_i t} \psi_i, \tag{60}$$

де $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ – розвязки спектральної задачі

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\lambda\psi, \\ \psi\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{61}$$

Як функцію ψ в означенні імпульсної множини M, ураховуючи [3], розглядатимемо розвязок (7): $\psi := \psi_1$, $\lambda := \lambda_1$.

За побудовою $M \cap M' = \varnothing$. Крім того, для довільного $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in M$ для $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = V(t, z_0)$ згідно із (6)

$$\forall t \geq 0 \ \ \alpha(u(t), \psi) + \beta(v(t), \psi) = e^{-a\lambda t} \left(1 - 2b\lambda t \beta(u_0, \psi)\right).$$

Отже, $\exists \tau = \tau(z_0) > 0 \ \ \forall t \in (0, \tau) \ \ V(t, z_0) \notin M$.

© Романюк І., 2017

Уведемо позначення: $\forall z \in H \;\; M^+(z) = \left(\bigcup_{t>0} V(t,z) \right) \cap M$. Тоді, якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то існує такий момент часу $s = \phi(z)$, що $\forall t \in (0,s) \;\; V(t,z) \notin M$ та $V(s,z) \in M$.

Тоді імпульсна траєкторія $\varphi : R_+ \to X$, що стартує з точки $z \in H$, будується таким чином:

якщо $M^+(z) = \varnothing$, то $\varphi(t) = V(t,z) \;\; \forall t \geq 0$;

якщо $M^+(z) \neq \varnothing$, то для $s_0 = \phi(z)$, $z_1 = V(s_0, z)$ і $z_1^+ \in Iz_1$ визначаємо φ на $[0, s_0]$ за правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t,z), t \in [0, s_0), \\ z_1^+, t = s_0, \end{cases}$$

якщо $M^+(z_1^+) = \varnothing$, то $\varphi(t) = V(t - s_0, z_1^+) \;\; \forall t \geq s_0$;

якщо $M^+(z_1^+) \neq \varnothing$, то для $s_1 = \phi(z_1^+)$, $z_2 = V(s_1, z_1^+)$ і $z_2^+ \in Iz_2$ визначаємо φ на $[s_0, s_0 + s_1]$ за правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - s_0, z_1^+), t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ z_2^+, t = s_0 + s_1. \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо імпульсну траєкторію зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{z_n^+\}_{n \geq 1}$ та відповідних їм моментів часу $\{s_n\}_{n \geq 0}$.

Покладемо

$$t_0 := 0, \;\; t_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} s_k, \, n \geq 0.$$

Якщо φ має нескінченну кількість імпульсних збурень, то

$$\forall n \geq 0 \;\; \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \;\; \varphi(t) = \begin{cases} V(t - t_n, z_n^+), t \in [t_n, t_{n+1}), \\ z_{n+1}^+, t = t_{n+1}. \end{cases} \tag{62}$$

Через K_z позначимо множину всіх імпульсних траєкторій, що стартують із точки z.

Лема. $\forall z \in H$ кожна $\varphi \in K_z$ визначена на $[0, +\infty)$.

Доведення. У силу (3) лему достатньо довести для $z_0 \in M'$. Для $z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = V(t, z_0)$ розглянемо функцію

$$g(t) = \alpha(u(t), \psi) + \beta(v(t), \psi) = e^{-a\lambda t}(1 + \mu - 2\beta b \lambda t (u_0, \psi)).$$

Згідно із (6) $\forall t \geq 0 \;\; |(u(t), \psi)| \leq \gamma$. Крім того, $g(0) = 1 + \mu$, $\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$. Отже, $\exists s_0 > 0$ – момент першого потрапляння фазової точки на множину M, тобто

$$\exists s_0 > 0 : |(u(s_0), \psi)| \leq \gamma, \;\; g(s_0) = 1.$$

Зі співвідношень

$$\begin{cases} e^{a\lambda s_0} = 1 + \mu - 2\beta b \lambda s_0 (u_0, \psi), \\ |(u_0, \psi)| \leq \gamma, \end{cases}$$

одержуємо, що

$$s_0 \geq \overline{s}, \tag{63}$$

де $\overline{s} > 0$ є коренем рівняння $e^{a\lambda s} = 1 + \mu - 2\beta\lambda |b| \gamma s$. Зокрема $\overline{s}$ не залежить від z_0.

Отже, для $\forall z_0 \in M'$ кожна імпульсна траєкторія $\varphi \in K_{z_0}$ має нескінченну кількість імпульсних точок і $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty$. Отже, φ визначена на $[0, +\infty)$. Лему доведено.

Таким чином, коректно означена багатозначна динамічна система $G : \mathbb{R}_+ \times H \to 2^H$:

$$\forall t \geq 0 \;\; \forall z \in H \;\; G(t,z) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K_z\}. \tag{64}$$

Означення [3]. Компактна множина $A \subset X$ називається глобальним атрактором багатозначної ДС G, якщо

1) A – рівномірно притягувальна множина, тобто для будь-якої обмеженої $B \subset H$ $\operatorname{dist}(G(t,B), A) \to 0, t \to \infty$;

2) A – мінімальна у класі замкнених множин, що задовольняють 1).

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема. *Нехай імпульсне відображення* I *має вигляд*

$$\text{для } z=\sum_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix}c_i\\ d_i\end{pmatrix}\psi_i\in M$$

$$Iz=\left\{\begin{pmatrix}c_1'\\ d_1'\end{pmatrix}\psi_1+\sum_{i=2}^{\infty}\begin{pmatrix}c_i\\ d_i\end{pmatrix}\psi_i \;\middle|\; |c_1'|\le\gamma,\ \alpha c_1'+\beta d_1'=1+\mu\right\}. \tag{65}$$

Тоді багатозначна ДС G, *задана формулою (10), має в фазовому просторі* H *глобальний атрактор* A, *причому*

$$A=\bigcup_{\substack{t\in[0,\overline{\tau}]\\ |c_1|\le\gamma}}\left\{\begin{pmatrix}c_1\\ d_1-2b\lambda c_1 t\end{pmatrix}e^{-a\lambda t}\psi_1 \;\middle|\; \begin{matrix}\alpha c_1+\beta d_1=1+\mu\\ (1+\mu-2b\beta\lambda c_1\overline{\tau})e^{-a\lambda\overline{\tau}}=1\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}. \tag{66}$$

Доведення. Згідно з [11], [14] для існування глобального атрактора потрібно перевірити такі умови:

1) дисипативність:

$$\exists R_0>0\ \ \forall r>0\ \ \exists T=T(r)\ \ \forall t\ge T\ \ \forall z_0\in H\ \ \|z_0\|_H\le r\ ,$$
$$\forall\varphi\in K_{z_0}\ \ \|\varphi(t)\|_H\le R_0; \tag{67}$$

2) асимптотичну компактність:

$$\forall t_n\to\infty \text{ будь-яка обмежена } \{z_n^0\}\subset H\ \ \forall\xi_n\in G(t_n,z_n^0) \text{ послідовність } \{\xi_n\} \text{ передкомпактна в } H\ . \tag{68}$$

Доведемо (13). Нехай $\|z_0\|_H\le r$, де $r>0$ достатньо велике. Якщо траєкторія $\varphi\in K_{z_0}$ не зазнає імпульсних збурень, то згідно із (3)

$$\forall t\ge\frac{1}{\delta}\ln r\ \ \|\varphi(t)\|_H\le 1\,. \tag{69}$$

Інакше для моменту $s_0>0$ маємо рівняння

$$e^{-a\lambda s_0}\left(\alpha(u_0,\psi)+\beta(v_0,\psi)-2\beta b\lambda(u_0,\psi)s_0\right)=1,$$

з якого виводимо, що $s_0\le s(r)$, де $s(r)>0$ – корінь рівняння $e^{a\lambda s}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}r+2\beta\lambda|b|rs.$

Після цього фазова точка опиняється в положенні $z_1^+\in I\left(V(s_0,z_0)\right)$. Із (11) виводимо оцінку

$$\forall z\in H\ \ \forall z^+\in I(z)\ \ \|z^+\|_H^2\le\zeta^2+\|z\|_H^2, \tag{70}$$

де $\zeta^2:=\gamma^2+\left(\dfrac{1+\mu+\alpha\gamma}{\beta}\right)^2$.

Зокрема, $\|z_1^+\|_H^2\le\zeta^2+\|V(s_0,z_0)\|_H^2\le\zeta^2+r^2$. Таким чином, властивість (13) достатньо довести для $z_0\in M'$, $\|z_0\|_H\le r$.

Нехай $\varphi\in K_{z_0}$ має стрибки в моменти $\{s_0,\ s_0+s_1,\ldots\}$ з імпульсними точками $\{z_i^+\}_{i=1}^{\infty}$. Із (9) маємо $\forall i\ge 0\ \ s_i\ge\overline{s}$.

Тоді з (3) і (16) одержуємо

$$\|\varphi(s_0)\|_H^2\le e^{-2\delta\overline{s}}r^2+\zeta^2,\quad \|\varphi(s_0+s_1)\|_H^2\le e^{-4\delta\overline{s}}r^2+e^{-2\delta\overline{s}}\zeta^2+\zeta^2.$$

Після $k\ge 1$ кроків отримуємо

$$\left\|\varphi\left(\sum_{i=0}^{k}s_i\right)\right\|_H^2\le e^{-2\delta(k+1)\overline{s}}r^2+\frac{\zeta^2}{1-e^{-2\delta\overline{s}}}. \tag{71}$$

Із (3) і (17) одержуємо шукану дисипативність.

Доведемо (14). Нехай $z_n^0=\sum_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix}c_i^{(n)}\\ d_i^{(n)}\end{pmatrix}\cdot\psi_i$, $\|z_n^0\|_H\le R$ – обмежена послідовність початкових даних і $t_n\nearrow\infty$.

Якщо для нескінченно багатьох $n\ge 1$ $M^+(z_n^0)=\varnothing$, то згідно із (3) маємо $G(t_n,z_n^0)=V(t_n,z_n^0)\to 0,\ n\to\infty.$

Інакше для моментів імпульсів $\{s_i^{(n)}\}_{i=0}^{\infty}$ та імпульсних точок $\{z_i^{(n)+}\}_{i=1}^{\infty}$ дістаємо

$$\forall i\ge 0\ \ t_{i+1}^{(n)}:=\sum_{k=0}^{i}s_k^{(n)}\ge(i+1)\overline{s}, \tag{72}$$

$$z_i^{(n)+}=\begin{pmatrix}\overline{c}_1^{(n)}\\ \overline{d}_1^{(n)}\end{pmatrix}\cdot\psi_1+\sum_{j=2}^{\infty}\begin{pmatrix}c_j^{(n)}\\ d_j^{(n)}-2bc_j^{(n)}\lambda_j t_{j+1}^{(n)}\end{pmatrix}\cdot e^{-a\lambda_j t_{j+1}^{(n)}}, \tag{73}$$

де $\left|\overline{c}_1^{(n)}\right|\le\gamma,\ \alpha\overline{c}_1^{(n)}+\beta\overline{d}_1^{(n)}=1+\mu.$

Оскільки $\forall n \geq 1 \ \exists k(n) \geq n$ таке, що $t_{k(n)-1}^{(n)} \leq t_n < t_{k(n)}^{(n)}$, то для $\xi_n = G\left(t_n, z_n^0\right)$ маємо

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n), \tag{74}$$

де $\eta_n = z_{k(n)}^{(n)+}$, $\tau_n = t_n - t_{k(n)-1}^{(n)} \in [0, \bar{s}]$.

Тоді з (19) по підпослідовності

$$\eta_n \to \eta = \left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{d}_1}\right)\psi_1, n \to \infty, \tag{75}$$

де $|\bar{c}_1| \leq \gamma$, $\alpha\bar{c}_1 + \beta\bar{d}_1 = 1 + \mu$.

Оскільки по підпослідовності $\tau_n \to \tau$, то з (20) і властивостей півгрупи V виводимо передкомпактність $\{\xi_n\}$, що і доводить існування глобального атрактора A.

Оскільки за побудовою [11] A складається з часткових границь усіх послідовностей виду $\xi_n \in G\left(t_n, B_{R_0}\right)$, де $t_n \nearrow \infty$, $B_{R_0} = \left\{z \mid \|z\|_H \leq R_0\right\}$, то або $\xi_n \to 0$, або з (20), (21)

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \to \xi = V(\tau, \eta),$$

де $\tau \in [0, \bar{\tau}]$, $\bar{\tau} > 0$, однозначно визначається з рівності

$$e^{-a\lambda\bar{\tau}}\left(1 + \mu - 2\beta b\bar{c}_1\bar{\tau}\right) = 1,$$

де $|\bar{c}_1| \leq \gamma$, $\alpha\bar{c}_1 + \beta\bar{d}_1 = 1 + \mu$.

Звідси виводимо (12). Теорему доведено.

Зауваження. Аналогічно міркуванням з роботи [5] можна показати виконання такої властивості:

$$\forall t \geq 0 \ \ G(t, A \setminus M) = A \setminus M.$$

Висновки. У роботі для імпульсної динамічної системи, що породжена двовимірною параболічною системою з багатозначним імпульсним збуренням у нефіксовані моменти часу, доведено існування глобального атрактора.

Список використаних джерел

1. *Капустян О. В.* Глобальний атрактор еволюційного включення з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу / О. В. Капустян, М. О. Перестюк // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 8. – С. 1283–1294.
2. *Капустян О. В.* Існування глобальних атракторів для імпульсних динамічних систем / О. В. Капустян, М. О. Перестюк // Доповіді НАН України .– 2015. – № 12. – С.13–17.
3. *Капустян О. В.* Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем / О. В. Капустян, М. О. Перестюк // Укр. мат. журн. – 2016. – Т. 68. – № 4. – С. 517–528.
4. *Перестюк Ю. М.* Розривні коливання в одній імпульсній системі / Ю. М. Перестюк // Нелінійні коливання. – 2012. – Т. 15, № 4. – С. 494–503.
5. *Романюк І.* Глобальний атрактор для однієї многозначної імпульсної динамічної системи / І. Романюк // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2016. – № 35. – С. 14–19.
6. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк. – К. : Вища шк., 1987. – 288 с.
7. *Bonotto E. M.* Global attractors for impulsive dynamical systems / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho, R. Czaja // J. Diff. Eqn.. – 2015. – Vol. 259, № 7. – P. 2602–2625.
8. *Bonotto E. M.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems / E. M. Bonotto, D. P. Demuner // Bull. Sci. Math. – 2013. – Vol. 137. – P. 617–642.
9. *Bonotto E. M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems / E. M. Bonotto // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 332. – P. 81–96.
10. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems / K. Ciesielski // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol. 52. – P. 81–91.
11. *Iovane G.* Asymptotic behaviour of reactiondifusion equations with non-damped impulsive effects / G. Iovane, O. V. Kapustyan, J. Valero // Nonlinear Analysis, – 2008. – Vol. 68. – P. 2516–2530.
12. *Kaul S. K.* On impulsive semidynamical system / S. K. Kaul // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – Vol. 150, № 1. – P. 120–128.
13. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems / S. K. Kaul // J. Appl. Stoch. Anal. – 1994. – Vol. 7, № 4. – P. 509–523.
14. *Perestyuk M. O.* Long-time behaviour of evolution inclusion with non-dumped impulsive effects / M. O. Perestyuk, O. V. Kapustyan // Memoirs on Differ. Equat.and Math. Physics. – 2012. – Vol. 56. – P. 89–113.
15. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics / R. Temam // New York : Springer. – 1988.

Надійшла до редколегії 23.11.16

И. Романюк, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МНОГОЗНАЧНЫМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

В работе доказано существование глобального аттрактора для импульсной динамической системы, порождаемой двумерной параболической системой, решения которой подвергаются многозначным импульсным возмущениям при достижении фиксированного подмножества фазового пространства.

I. Romaniuk, PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

GLOBAL ATTRACTOR OF PARABOLIC SYSTEM WITH MULTY-VALUED IMPULSIVE PERTURBATION

In this paper was proved existence of the global attractor for impulsive dynamical system, generated by the two-dimensional parabolic system. Solutions of this system have multi-valued impulsive perturbations at the moments of intersection with given subset of the phase space.

УДК: 519.21

Ю. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф., М. Шатохін, студ.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
Email: *myus@univ.kiev.ua, mike@mbox.in.ua*

БАГАТОВИМІРНИЙ ВІНЕРІВСЬКИЙ ПРОЦЕС ЯК ДИФУЗІЙНИЙ

Докладно показано застосування теореми Колмогорова для доведення того факту, що багатовимірний вінерівський процес є дифузійним з одиничною матрицею дифузії.

Вступ. Усе, що нас оточує, розвивається і змінюється в часі – природа, люди, технічні засоби, економічні та фінансові інструменти. Може, лише вічні гори стоять непохитно, але і для них був період утворення, і зараз теж вони зазнають повільних змін. Проте не будемо загострювати свою увагу на вічному і розглянемо такі обєкти та явища, які змінюються за доступний для огляду і не дуже великий період часу. Нехай, наприклад, це ціни фінансових активів (той, хто любить техніку, а не просто бавиться з гаджетами, може, наприклад, розглянути процес проходження сигналу каналами сотового зв'язку). І ціни на фінансових ринках, і процес проходження сигналу, розвиваючись у часі, утворюють динамічну систему. Нема аксіоматичного визначення динамічної системи, але зміст цього поняття доступний кожній людині. Далі, оскільки ми є математиками, наша задача – дати математичний опис динамічної системи. Математична мова для опису динамічних систем – це, як правило, мова рівнянь. Оскільки рівняння повинно пов'язати координати системи та її швидкість, воно має бути диференціальним. А тепер увага – ви можете заздалегідь назвати ціни активів або передбачити швидкість плину ріки протягом весняних місяців? Мабуть, це неможливо зробити точно, оскільки і те й інше залежить від дії великої кількості випадкових чинників – це і якість, і кількість врожаю зернових, і розміри добутку нафти, і температура повітря, що впливає на швидкість танення снігів, і багато інших. Отже, у диференціальне рівняння, яким ми хочемо описати нашу динамічну систему, треба включити щонайменше два доданки – один відповідатиме за регулярну передбачувану і прогнозовану зміну, а другий має бути вельми нерегулярним, щоб відобразити певний хаос, притаманний динаміці багатьох явищ. Перший із цих доданків називається зносом, або зсувом, або трендом, а от друга випадкова компонента називається дифузією, і сума цих двох доданків називається дифузійним процесом. Тепер ми спробуємо описати найпростіший дифузійний процес, який взагалі не має тренду, тобто опишемо дифузію в чистому вигляді, та ще й із найпростішими коефіцієнтами. Ця дифузія, або що те саме, цей дифузійний процес, називається вінерівським процесом. Справа дещо ускладнюється тим, що ми знаходимось у багатовимірному просторі, і тому нам доведеться займатися диференціюванням функцій багатьох змінних. Нащо багато вимірів, – спитає читач, – якщо знайомий нам простір, у якому ми живемо, є тривимірним, і уявити собі більш високу розмірність важко? Задайте це питання Марині Вязовській, видатній дослідниці, яка була студенткою мехмату Київського національного університету імені Тараса Шевченка і яка зробила справжній прорив у теорії оптимального пакування куль у 24-вимірному просторі. Вона розкаже, зокрема, що літальний апарат Вояджер розкадровує сигнал на 24 незалежні компоненти, тому що це допомагає оптимальним чином відновити сигнал за умови втрати деякої компоненти або деякої кількості компонент. Узагалі, багато цікавих речей можна розповісти про багатовимірні простори, але перейдемо до математичного опису задачі. Ми зробимо це таким чином: спочатку дамо загальне означення багатовимірного дифузійного процесу, паралельно дамо означення багатовимірного вінерівського процесу, а потім доведемо, що вінерівський процес є дифузійним і знайдемо його дифузійну матрицю, точніше, покажемо, що вона є одиничною. Паралельно ми окреслимо зв'язок теорії дифузійних процесів із теорією диференціальних операторів у частинних похідних другого порядку.

Необхідні означення. Випадкова величина – це результат деякого стохастичного експерименту, і цей результат, зазвичай, є дійсним або комплексним вектором. Якщо ж результат є функцією деякого параметра, то це вже маємо випадковий процес.

Означення 1. Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{F},P)$, фазовий простір $(G,\mathcal{G})$ і деяку параметричну множину T. Випадковим процесом з фазовим простором G називається функція

$$\xi=\xi(\omega,t):\Omega\times T\mapsto G,$$

що є $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-вимірною для кожного значення параметра.

Зрозуміло, що не завжди треба розглядати випадковий процес як функцію обох змінних. Наприклад, якщо зафіксувати $t\in T$, то одержимо випадкову величину $\xi(t)$ – значення процесу ξ в точці t. Як і кожна випадкова величина, вона має свій імовірнісний розподіл. Звісно, цікавіше знати сумісний розподіл значень процесу для деякого набору параметрів. Так отримаємо вектор $(\xi(t_1),\xi(t_2),\ldots,\xi(t_n))$, розподіл якого називають скінченновимірним розподілом випадкового процесу. Незважаючи на те, що параметрична множина може бути як завгодно великою, ці розподіли вже містять доволі багато інформації та в певному розумінні однозначно визначають весь процес. З іншого боку, можна також розглядати при фіксованому $\omega\in\Omega$ відображення $\xi_t(\omega),t\in T$, яке ставить у відповідність елементарній події деяку функцію, яка діє з параметричної множини у фазовий простір. Цей об'єкт називають реалізацією або траєкторією випадкового процесу.

Зазвичай параметричну множину розглядають як аналог часу й покладають підмножиною $\mathbb{R}$, такою як промінь або відрізок, тож вважатимемо надалі, що $T=\mathbb{R}^+$. У такій інтерпретації природно прийняти, що в кожний момент часу t відомі значення процесу в минулому, але не в майбутньому. Це можна зрозуміти так, що існує деяка σ-алгебра, відносно якої процес до моменту t є вимірним, а після – ні, що веде до означення фільтрації.

Означення 2. Фільтрацією ймовірнісного простору $(\Omega,\mathcal{F},P)$ називають набір σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$, причому

$$\forall s,t\in T, s<t:\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}.$$

Як правило, ще вимагають від фільтрації неперервності справа, але зараз не будемо на цьому зупинятись детально. Імовірнісний простір із заданою на ньому фільтрацією називають фільтрованим простором. Випадковий процес ξ з параметричною множиною T називається адаптованим до фільтрації, якщо

$$\sigma(\xi(t))\subset\mathcal{F}_t.$$

© Мішура Ю., Шатохін М., 2017

Натуральною фільтрацією називають таку найменшу фільтрацію, до якої процес адаптований, тобто

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{\xi(s), s \le t\}.$$

Інколи природно вважати, що еволюція випадкового процесу в майбутньому залежить від його стану в теперішньому, і за умови, що цей стан відомий, не залежить від історії, як наприклад, для броунівського руху. У теорії випадкових процесів це називається марковською властивістю.

Означення 3. Нехай задано фільтрований простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ та адаптований процес ξ. Кажуть, що він має марковську властивість, якщо

$$\forall t \in T \, \forall A \in \mathcal{F}_t, B \in \sigma\{\xi(s), s \ge t\} : P(A \cap B \mid \xi(t)) = P(A \mid \xi(t)) P(B \mid \xi(t)).$$

Процес при цьому називають марковським.

Для випадкового процесу може бути відома основна тенденція його розвитку, проте він може також зазнавати впливів випадкових факторів. Наприклад, ціна акцій на біржі дуже часто змінюється, але для прибуткової компанії вона має в середньому зростати. Отже, незважаючи на те, що еволюція процесу не детермінована, щодо неї можна зробити певні висновки. Так виникає поняття перехідної ймовірності, або перехідної функції.

Означення 4. Перехідною функцією марковського процесу ξ із фазовим простором $(G, \mathcal{G})$ називають таку функцію $P(s, x, t, A)$, де $s, t \in T, x \in G, A \in \mathcal{G}$, що

1) за фіксованих s, x, t функція $P(s, x, t, \cdot)$ є ймовірнісною мірою на $\mathcal{G}$;

2) за фіксованих s, t, A функція $P(s, \cdot, t, A)$ вимірна відносно $\mathcal{G}$;

3) $P(s, x, s, A) = \delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$;

4) виконується тотожність Колмогорова – Чепмена:

$$0 \le s \le u \le t : P(s, x, t, A) = \int_G P(u, y, t, A) P(s, x, u, dy).$$

Якщо відомо, як процес еволюціонує з кожного можливого стану, але ймовірнісний розподіл станів невідомий, то для його опису треба розглянути загальніший об'єкт.

Означення 5. Нехай задано фільтрований імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T})$ та адаптований випадковий процес $\xi(\omega, t)$, фазовий простір $(G, \mathcal{G})$ і перехідну функцію $P(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$. Нехай також для всіх $s \in T, x \in G$ на $\mathcal{F}_{\ge s}$ визначена ймовірнісна міра $P_{s,x}$. Тоді $(\xi(\omega, t), P_{s,x})$ називається маркоівською сім'єю випадкових величин із перехідною функцією P, якщо для довільних s, x

1) $\xi(\omega, t)$ – марковський на просторі $(\Omega, \mathcal{F}_{\ge s}, P_{s,x})$ і має відповідну перехідну функцію;

2) $P_{s,x}(\xi(\omega, s) = x) = 1$.

Це можна уявити як набір марковських процесів, які стартують у час s із різних точок простору, що особливо корисно й точно, якщо параметрична множина має найменший елемент, як у випадку $T = \mathbb{R}^+$.

Якщо параметрична множина допускає зсув, тобто $\forall h \in T : T + h \subset T$, то можна досліджувати однорідність, або незмінність, об'єктів відносно цього зсуву.

Означення 6. Перехідна функція P називається однорідною, якщо

$$\forall s, t, h \in \mathbb{R}^+, x \in G, A \in \mathcal{G} : P(s + h, x, t + h, A) = P(s, x, t, A).$$

У разі однорідності можна прибрати один аргумент функції P, якщо покласти

$$P(x, t, A) = P(0, x, t, A) = P(s, x, t + s, A).$$

Марковська сім'я з такою перехідною ймовірністю також називається однорідною.

Нехай G – банахів простір. Розглянемо G_b – простір обмежених вимірних дійснозначних функцій із рівномірною нормою, який також буде банаховим. Надалі буде необхідний такий об'єкт для побудови інфінітезимального оператора.

Означення 7. Нехай $f \in G_b$. Оператором зсуву називають відображення із G_b на себе, що задане співвідношенням

$$\mathcal{P}^t f(x) = \int_G P(x, t, dy) f(y), t \ge 0.$$

Неважко помітити, що оператор зсуву є лінійним неперервним оператором на G_b, який задовольняє такі співвідношення:

1) $\mathcal{P}^t 1 = 1$;

2) $\mathcal{P}^0 = E$ – тотожній оператор;

3) $\mathcal{P}^{t+s} = \mathcal{P}^t \mathcal{P}^s$.

Тож, $\{\mathcal{P}^t\}_{t \in T}$ – півгрупа. Тепер можна означити інфінітезимальний оператор, який є аналогом правої (однобічної) похідної для дійснозначних функцій.

Означення 8. Нехай у банаховому просторі X задано півгрупу $\{\mathcal{P}^t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$. Інфінітезимальним оператором півгрупи називається оператор L, заданий співвідношенням

$$Lf = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{P}^t f - f}{t}.$$

Узагалі кажучи, оператор L не буде визначений на всьому просторі X і не буде обмеженим. Природно визначається інфінітезимальний оператор для однорідної марковської сім'ї як такий для відповідних операторів зсуву.

Тепер ми нарешті маємо всі необхідні інструменти для означення дифузійності. Дифузійні процеси походять, зокрема, від математичних моделей хаотичного руху частинок у речовині. Як відомо з механіки, якщо знати всі сили, що діють на частинку, то такий рух описується диференціальним оператором другого порядку (у частинних похідних для

багатовимірного випадку). Природно, він матиме неперервну траєкторію та для нього виконуватиметься принцип максимуму: якщо в деякій точці досягається максимум, то там оператор не додатний. Такі міркування інтуїтивно обґрунтовують умови дифузійності для випадкового процесу.

Означення 9. Однорідна марковська сім'я називається дифузійною, якщо

1) усі її траєкторії неперервні.

2) її інфінітезимальний оператор визначений для всіх фінітних двічі неперервно диференційовних функцій і на них є таким:

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

де $b_{ij}(x), a_i(x)$ – неперервні функції, а матриця $A = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – невід'ємно визначена.

Вінерівський процес як дифузійний. Тепер необхідно означити власне вінерівський процес.

Означення 10. Процес $\xi(t), t \in T = \mathbb{R}^+$ називається процесом із незалежними приростами, якщо для довільних $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ його прирости $(\xi(t_1) - \xi(t_0), \ldots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1}))$ незалежні.

Означення 11. Вінерівським процесом називають такий процес W_t, де $t \in \mathbb{R}^+$, що

1) $W_0 = 0$;

2) W_t має незалежні прирости;

3) $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Вінерівський процес також часто називають броунівським рухом. Відомо, що його траєкторії можна вважати неперервними, що важливо для дифузійності. Нехай тепер $n \geq 1$.

Означення 12. n-вимірним вінерівським процесом називається вектор

$$W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \\ \vdots \\ W_n(t) \end{pmatrix},$$

де $\{W_i(t) \mid i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$ – набір вінерівських незалежних процесів, тобто таких вінерівських процесів, що породжені їхніми значеннями σ-алгебри $\sigma(W_i), i \in \{1,2,\ldots,n\}$ – незалежні в сукупності.

Відмітимо, що W – однорідна марковська сім'я. Дійсно, це процес із незалежними приростами, тому він є марковським процессом, а отже і сім'єю. Враховуючи те, що розподіл приростів не змінюється зі зсувом, маємо, що процес є однорідний.

Перейдемо власне до основної мети нашої статті – доведення того факту, що вінерівський процес є дифузійним і знаходження виду його інфінітезимального оператора. Оскільки траєкторії кожної координати вінерівського процесу є неперервними, що випливає із властивостей вінерівського процесу, такими є й траєкторії нашого векторного вінерівського процесу. Для доведення другої властивості, наведеної в означенні 9, застосуємо такий факт.

Теорема 1 (Колмогорова). *Нехай на $\mathbb{R}^n$ задано неперервні функції $b_{ij}(x), a_i(x)$, де $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Позначимо*

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Нехай (ξ_t, P_x) – марковська сім'я на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ така, що для довільного $\epsilon > 0$ рівномірно відносно x виконуються властивості

(i) $P(t, x, V_\epsilon(x)) = o(t)$,

(ii) $\int_{U_\epsilon(x)} (y_i - x_i) P(t, x, dy) = a_i(x)t + o(t), \forall i \in \overline{1,n}$,

(iii) $\int_{U_\epsilon(x)} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(t, x, dy) = b_{ij}(x)t + o(t), \forall i, j \in \overline{1,n}$,

якщо $t \to 0$, де $\overline{1,n} = \{1,\ldots,n\}$ та

$$\begin{cases} V_\epsilon(x) = \{y \mid \| y - x \| > \epsilon\}, \\ U_\epsilon(x) = \{y \mid \| y - x \| \leq \epsilon\}. \end{cases}$$

Тоді інфінітезимальний оператор цієї сім'ї збігається з L і визначений для довільної $f \in C^{(2)}_{\text{unif}}(\mathbb{R}^n)$, де останнє позначення символізує простір обмежених двічі неперервно диференційовних функцій, рівномірно неперервних разом з усіма своїми похідними до другого порядку включно.

Доведення цієї теореми можна знайти в [1, с. 209]. У теоремі 1 норму вважають декартовою, але використаємо твердження, що властивості *(i)–(iii)* не порушуються за заміни норми еквівалентною. Це твердження зацікавлений читач легко може довести самостійно. Тож покладемо

$$\| x \|_\infty = \max_{i \in \overline{1,n}} | x_i |.$$

Декартову норму надалі позначимо $\|\cdot\|_2$. Варто згадати, що перехідна ймовірність для вінерівського процесу така:

$$P(t,x,A)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right)^n\int_A e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy.$$

Для зручності надалі відповідний множник при інтегралі позначимо просто $C(t)$, тобто

$$C(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}},$$

$$P(t,x,A)=(C(t))^n\int_A e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy.$$

Теорема 2. *Багатовимірний вінерівський процес є дифузійним з одиничною коваріаційною матрицею. Його інфінітезимальний оператор є оператором Лапласа.*

Для доведення по черзі перевіримо виконання властивостей *(i)–(iii)* для багатовимірного вінерівського процесу *(i)*. Враховуючи, що в обраній нормі

$$V_\epsilon(x)=\left((-\infty,x-\epsilon)\cup(x+\epsilon,\infty)\right)^n,$$

маємо

$$\frac{1}{t}P\left(t,x,V_\epsilon(x)\right)=\frac{1}{t}(C(t))^n\int_{V_\epsilon(x)}e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy=\frac{1}{t}(C(t))^n\int_{V_\epsilon(0)}e^{-\frac{\|u\|_2^2}{2t}}du=$$

$$=\frac{1}{t}(C(t))^n\prod_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i=\frac{C(t)}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\left(C(t)\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1}, \tag{1}$$

де спочатку зробили заміну $u=y-x$, а потім поміняли її на німу змінну інтегрування v. З огляду на те, що отриманий інтеграл не залежить від x, властивість за цією змінною буде рівномірною. Тепер можна помітити, що вираз у дужках у правій частині рівності (1) не перевищує 1, адже

$$C(t)\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv<C(t)\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=1.$$

Тож

$$\frac{1}{t}P(t,x,V_\epsilon(x))\le\frac{C(t)}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\epsilon,\epsilon]}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=\frac{C(1)}{t}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}},\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}]}e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \tag{2}$$

де в останній рівності виконано заміну змінної $z=\frac{v}{\sqrt{t}}$. Тепер використаємо відому оцінку

$$\forall a>0:\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx\le a^{-1}e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Тоді справедлива така нерівність:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}},\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}]}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=2\int_{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}dz\le 2\frac{\sqrt{t}}{\epsilon}e^{-\frac{\epsilon^2}{t}}.$$

Підставимо цю оцінку в рівність (2) і отримаємо

$$\frac{1}{t}P(t,x,V_\epsilon(x))\le 2C(1)\frac{1}{\epsilon\sqrt{t}}e^{-\frac{\epsilon^2}{t}}=\frac{2C(1)}{\epsilon^2}\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\epsilon^2}{t}}.$$

Із курсу математичного аналізу відомо, що

$$\forall\alpha>0:\frac{x^\alpha}{e^x}\to 0,x\to+\infty.$$

У нашому випадку $a=\frac{1}{2},x=\frac{\epsilon^2}{t}$, і цей вираз прямує до нескінченності, коли t прямує до нуля. Отже, отримали

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}P(t,x,V_\epsilon(x))=0\Rightarrow P(t,x,V_\epsilon(x))=o(t).$$

(ii). В обраній нормі

$$U_\epsilon(x)=[x-\epsilon,x+\epsilon]^n.$$

Тоді

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)P(t,x,dy)=C(t)^n\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy=$$

$$=C(t)^n\int_{U_\epsilon(0)}u_ie^{-\frac{\|u\|_2^2}{2t}}du=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_ie^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\prod_{j=1,j\neq i}^{n}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{u_j^2}{2t}}du_j= \tag{3}$$

$$=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_ie^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1},$$

де зроблено заміну $u=y-x$. Аналогічно до попереднього, із незалежності отриманого інтеграла від x у кінцевому підсумку отримаємо рівномірність виконання даної властивості за цією змінною. Тепер можна без обмеження загальності покласти $i=1$. Тоді

$$C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}xe^{-\frac{x^2}{2t}}dx=0,$$

адже інтегрується непарна функція $xe^{-\frac{x^2}{2}}$ по симетричному інтервалу $[-\epsilon,\epsilon]$. Вираз у дужках у правій частині рівності (3) обмежений, адже

$$C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\le C(t)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=1.$$

Тоді

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)P(t,x,dy)=0,$$

що задовольняє умову *(ii)*

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)P(t,x,dy)=a_i(x)t+o(t),$$

якщо покласти $a_i(x)\equiv 0$. Зрозуміло, що тотожний нуль – неперервна функція.

(iii). Якщо $i\neq j$, то можна стверджувати, аналогічно до другої властивості, таке:

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)(y_j-x_j)P(t,x,dy)=0,$$

що задовольняє умову *(iii)*

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)(y_j-x_j)P(t,x,dy)=b_{ij}(x)t+o(t),$$

якщо покласти $b_{ij}(x)\equiv 0$. У випадку, коли $i=j$, то

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2P(t,x,dy)=C(t)^n\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2e^{-\frac{\|y-x\|_2^2}{2t}}dy=C(t)^n\int_{U_\epsilon(0)}u_i^2e^{-\frac{\|u\|_2^2}{2t}}du=$$

$$=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\prod_{j=1,j\neq i}^{n}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{u_j^2}{2t}}du_j=C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv\right)^{n-1},$$

де зроблено заміну $u=y-x$. Аналогічно до попередніх пунктів, якщо доведено виконання властивості для одного x, то властивість виконується рівномірно для всіх x. Вираз у дужках прямує до одиниці, адже

$$C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}dv=C(1)\int_{-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}^{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\to C(1)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1,t\to 0+,$$

де зроблено заміну $x=\frac{v}{\sqrt{t}}$. Для іншого множника зазначимо, що

$$\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}du_i=C(1)\int_{-\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}^{\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx\to C(1)\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1,t\to\infty,$$

де замінено $x=\frac{u_i}{\sqrt{t}}$ і використано те, що як дисперсія, так і другий нецентральний момент стандартної нормальної випадкової величини дорівнює 1. Із властивості границі, а саме: границя добутку збіжних послідовностей рівна добутку границь, маємо

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2\,P(t,x,dy)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}\,du_i\left(C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}\,dv\right)^{n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}u_i^2e^{-\frac{u_i^2}{2t}}\,du_i\left(\lim_{t\to 0+}C(t)\int_{-\epsilon}^{\epsilon}e^{-\frac{v^2}{2t}}\,dv\right)^{n-1}=1.$$

Із цього робимо висновок про те, що

$$\int_{U_\epsilon(x)}(y_i-x_i)^2\,P(t,x,dy)=t+o(t)=b_{ii}(x)t+o(t),\quad b_{ii}\equiv 1.$$

Матриця, що складена з b_{ij}, є одиничною, а така матриця додатно визначена.

Отже, до *n*-вимірного вінерівського процесу W застосовна теорема Колмогорова, тому він має інфінітезимальний оператор, який, у свою чергу, має зображення

$$Lf=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$\forall i,j: a_i(x)\equiv 0, b_{ij}(x)=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j,\end{cases}$$

тобто – це оператор Лапласа, або лапласіан: $Lf=\Delta f=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$

Цей оператор визначений для усіх двічі рівномірно неперервно диференційовних функцій, зокрема фінітних, тому W є дифузійним процесом.Теорему повністю доведено.

Висновки. Продемонстровано застосування теореми Колмогорова для доведення дифузійності багатовимірного вінерівського процесу. Знайдено інфінітезимальний оператор півгрупи операторів зсуву, що породжені перехідною ймовірністю цього процесу, та показано, що цей оператор буде лапласіаном.

Список використаних джерел

1. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. – М. : Главная редакция физ.-мат. л-ры изд-ва "Наука", 1975. – 320 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М. : Успехи математических наук (УМН), 1938. – Вып. 5. – С. 5–41.

Надійшла до редколегії 11.05.17

Ю. Мишура, д-р физ.-мат. наук, проф., М. Шатохин, студ.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС КАК ДИФФУЗИОННЫЙ

Теорема Колмогорова применена для доказательства того, что многомерный винеровский процесс является диффузионным с единичной матрицей диффузии.

Y. Mishura, Full Doctor, M. Shatokhin, undergraduate student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

DIFFUSION PROPERTY OF WIENER PROCESS

Kolmogorov theorem is applied to prove the fact that the multidimensional Wiener process is a diffusion with identity diffusion matrix.

УДК 519.21

Л. Пригара, асп.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
E-mail: *pruhara7@gmail.com*

СТОХАСТИЧНЕ ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ЗІ СТІЙКИМ БІЛИМ ШУМОМ

Розглянуто хвильове рівняння на площині зі стійким білим шумом. Визначено потенційний розвязок рівняння за допомогою формули Пуассона – Парсеваля. Установлено локальні властивості реалізацій потенційного розвязку та доведено, що він є узагальненим розвязком рівняння.

Вступ. Рівняння математичної фізики з випадковою правою частиною відіграють значну роль у моделюванні. Більшість літератури з тематики присвячено або випадку загальних стохастичних мір [6, 7], або випадку гауссівських чи субгауссівських розподілів випадковості [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10]. Тому наявні результати непридатні в ситуації, коли випадковість має важкі хвости розподілу. Саме таким результатам присвячено цю статтю, яка є продовженням роботи [6], де розглядалося хвильове рівняння на площині із просторовим α -стійким білим шумом. У цій роботі також розглянуто хвильове рівняння на площині, але випадковий шум є часово-просторовим.

У статті наведено основні відомості щодо стійких величин та мір, формула Пуассона – Парсеваля для хвильового рівняння зі стійким білим шумом та короткі відомості щодо зображення Лепажа. Міститься формулювання та доведення основного результату статті.

Попередні відомості. Стійкі величини та їх розподіли. У цій статті розглядатимуться лише симетричні α -стійкі $(S\alpha S)$ випадкові величини з $\alpha \in (0,2)$. Докладнішу інформацію про стійкі величини можна знайти у [6]. Випадкова величина ξ є $S\alpha S$ із параметром масштабу $\sigma^{\alpha}, \sigma > 0$, якщо її характеристична функція

$$E\left[e^{i\lambda\xi}\right] = e^{-|\sigma\lambda|^{\alpha}}.$$

Для стійкої величини ξ визначимо $\|\xi\|_{\alpha}^{\alpha} = -\ln E\left[e^{i\xi}\right]$.

Розглядатиметься $S\alpha S$ міра на $R^2 \times R^+$ із незалежними приростами. За означенням це функція $M : B_f\left(R^2 \times R^+\right) \times \Omega \to R$, де $B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ – сім'я борелевих підмножин скінченної міри Лебега, із властивостями:

1) для будь-якої борелевої множини $A \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ випадкова величина $M(A)$ є $S\alpha S$ із параметром масштабу, що дорівнює $\lambda(A)$, – мірі Лебега множини A;

2) для неперетинних множин $A_1,...,A_n \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ значення $M\left(A_1\right),...,M\left(A_n\right)$ є незалежними;

3) для неперетинних множин $A_1,...,A_n,... \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$ таких, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B_f\left(R^2 \times R^+\right)$, виконано $M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(A_n\right)$ майже напевно.

Для функцій $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(R^2 \times R^+\right)$ інтеграл $I(f) = \int_0^{\infty} \iint_{R^2} f(x,t) M(dx,dt)$ визначено як границю за ймовірністю інтегралів від простих функцій з обмеженим носієм. Справедлива ізометрична властивість

$$\|I(f)\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_0^{\infty} \iint_{R^2} |f(x,t)|^{\alpha} dxdt.$$

Для M виконується зображення Лепажа. Нехай φ – довільна неперервна додатна щільність розподілу на $R^2 \times R^+$. Незалежні набори $\{\Gamma_k, k \ge 1\}, \{(\xi_k, \zeta_k), k \ge 1\}, \{g_k, k \ge 1\}$ задовольняють такі умови:

1) $\{\Gamma_k, k \ge 1\}$ – послідовність моментів стрибків пуассонівського процесу з одиничною інтенсивністю;

2) $\{(\xi_k, \zeta_k), k \ge 1\}$ – незалежні випадкові вектори зі щільністю φ ;

3) $\{g_k, k \ge 1\}$ – незалежні центровані нормально розподілені величини з $E\left[|g_k|^{\alpha}\right] = 1$.

Тоді M має такий самий розподіл, що й

$$M'(dx,dt) = C_{\alpha} \sum_{k \ge 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k, \zeta_k)^{-1/\alpha} \delta_{(\xi_k, \zeta_k)} g_k(dx,dt), \tag{1}$$

де $C_{\alpha} = \left(\dfrac{\Gamma(2-\alpha)\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}}{1-\alpha}\right)^{1/\alpha}$, причому ряд майже напевно збігається.

Рівність (1) потрібно розуміти в такому сенсі: для довільних $f_1,...,f_n \in L^{\alpha}\left(R^2 \times R^+\right)$ вектор $\left(I\left(f_1\right),...,I\left(f_n\right)\right)$ має такий самий розподіл, що й вектор $\left(I'\left(f_1\right),...,I'\left(f_n\right)\right)$, де

$$I'\left(f_n\right) = C_{\alpha} \sum_{k \ge 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \varphi(\xi_k, \zeta_k)^{-1/\alpha} f\left(\xi_k, \zeta_k\right) g_k. \tag{2}$$

Надалі без обмеження загальності вважатимемо, що M задається формулою (1), а для функції $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(R^2 \times R^+\right)$ інтеграл $I(f) = \int_0^{\infty} \iint_{R^2} f(x,t) M(dx,dt)$ задається формулою (2), причому ряд є збіжним майже напевно.

Формула Пуассона – Парсеваля для хвильового рівняння з білим шумом. Ми розглядаємо хвильове рівняння з випадковим збуренням:

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta\right) U(x,t) = f(x,t), \\ U(x,0) = 0, \\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

У цьому рівнянні випадкове збурення є просторово-часовим шумом, тобто $f(x,t)=\sigma(x,t)\dot{M}(x,t)$, де $\dot{M}(x,t)$ – " α -стійкий білий шум" у R^2, що є щільністю Радона – Нікодима (в узагальненому сенсі) міри M, $\sigma: R^2\times R^+\to R$ – неперервна обмежена функція.

Як потенційний розв'язок рівняння (3) варто розглянути функцію, що задана формулою Пуассона – Парсеваля:

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\iint_{y:|x-y|<a(t-\tau)}\frac{\sigma(y_1,y_2,\tau)M(dy_1,dy_2,d\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}. \tag{4}$$

Основні результати. Існування розвязку хвильового рівняння (3). Розвязок рівняння, заданий за допомогою формули Пуассона – Парсеваля, існує з імовірністю 1, про що говорить наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо функція* $\sigma(x,t)$ *є обмеженою, то інтеграл у (4) визначено майже напевно для всіх* $(x,t)\in R^2\times R^+$.

Доведення. Інтеграл у (4) є визначеним, якщо виконується така умова:

$$\int_0^t\iint_{y:|x-y<a(t-\tau)|}\left|\frac{\sigma(y_1,y_2,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}\right|^\alpha dy_1dy_2d\tau<\infty. \tag{5}$$

Перевіримо її.

$$\int_0^t\iint_{y:|x-y<a(t-\tau)|}\left|\frac{\sigma(y_1,y_2,\tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-|x-y|^2}}\right|^\alpha dy_1dy_2d\tau\le C^\alpha\int_0^t\iint_{y:|x-y<a(t-\tau)|}\frac{dy_1dy_2d\tau}{\left(a^2(t-\tau)^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2\right)^{\alpha/2}}=$$

$$=\left|\begin{array}{c}y_1=\rho\cos\varphi\\ y_2=\rho\sin\varphi\\ \varphi\in[0,2\pi]\\ \rho:|x-y|<a(t-\tau)\end{array}\right|=C^\alpha\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{\rho:|x-y|<a(t-\tau)}\frac{\rho d\tau d\rho d\varphi}{\left(a^2(t-\tau)^2-(\rho\cos\varphi-x_1)^2-(\rho\sin\varphi-x_2)^2\right)^{\alpha/2}}=\left|\begin{array}{c}y_i=x_i+z_i, i=1,2\\ x_1=x_2=0\end{array}\right|=$$

$$=C^\alpha\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^{a(t-\tau)}\frac{\rho d\tau d\rho d\varphi}{\left(a^2(t-\tau)^2-\rho^2\right)^{\alpha/2}}=-C^\alpha\pi\int_0^t\int_0^{a(t-\tau)}\frac{-2\rho d\tau d\rho}{\left(a^2(t-\tau)^2-\rho^2\right)^{\alpha/2}}=-C^\alpha\pi\int_0^t\frac{\left(a^2(t-\tau)^2-\rho^2\right)^{-\alpha/2+1}}{1-\alpha/2}\Big|_0^{a(t-\tau)}d\tau=$$

$$=\frac{C^\alpha\pi}{1-\alpha/2}\int_0^t\left(a^2(t-\tau)^2\right)^{1-\alpha/2}d\tau=\frac{C^\alpha\pi a^{2-\alpha}}{1-\alpha/2}\int_0^t(t-\tau)^{2-\alpha}d\tau=\frac{-C^\alpha\pi a^{2-\alpha}}{1-\alpha/2}\frac{(t-\tau)^{3-\alpha}}{3-\alpha}\Big|_0^t=\frac{C^\alpha\pi a^{2-\alpha}t^{3-\alpha}}{(1-\alpha/2)(3-\alpha)}.$$

Оскільки інтеграл скінченний, тобто виконується умова (5), то згідно з визначенням інтеграла α -стійкою мірою, у випадку просторового шуму існує розв'язок хвильового рівняння (3), що має вигляд (4). Теорему доведено.

Поведінка розвязку за просторовою змінною. Виникає природне питання: Чи можна виняткову подію ймовірності нуль у теоремі 1 вибрати одну й ту саму для всіх *x*? Для того, щоб дати відповідь на це запитання, згадаємо розклад Лепажа функції $U(x,t)$:

$$U(x,t)=C_\alpha\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}\frac{\sigma(\xi_k,\zeta_k)}{\sqrt{a^2(t-\zeta_k)^2-|x-\xi_k|^2}}g_kI_{\{|x-\xi_k|<a(t-\zeta_k)\}}.$$

Виявляється, що відповідь на питання негативна, більше того, функція $U(x,t)$ є необмеженою в околі кожної точки, в якій σ не обертається на нуль.

Теорема 2. *Для будь-яких* $t\ge0$ *та* $x\in R^2$ *таких, що* $\sigma(x,t)\ne0$, *та для* $\forall\delta>0$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|=+\infty;\quad \sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|=+\infty.$$

Доведення. Для зручності вважатимемо, не обмежуючи загальності, що

$$(\Omega,F,P)=\left(\Omega_\Gamma\otimes\Omega_{(\xi,\zeta)}\otimes\Omega_g,F_\Gamma\otimes F_{(\xi,\zeta)}\otimes F_g,P_\Gamma\otimes P_{(\xi,\zeta)}\otimes P_g\right)$$

для всіх $\omega=\left(\omega_\Gamma,\omega_{(\xi,\zeta)},\omega_g\right), k\ge1:\Gamma_k(\omega)=\Gamma_k(\omega_\Gamma),(\xi_k,\zeta_k)(\omega)=(\xi_k,\zeta_k)\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right), g_k(\omega)=g_k(\omega_g)$. Оскільки при фіксованих $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$ $U(x,t)$ має гауссівський розподіл, то за законом 0 та 1 для гауссівських мір одержимо

1) $P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)\in\{0,1\}$;

2) $P_g\left(\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|<+\infty\right)\in\{0,1\}$.

Спочатку доведемо, що у (1) імовірність дорівнює нулю для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$. Припустимо, що

$$P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)=1. \tag{6}$$

Тоді за властивістю гауссівських полів дістанемо

$$E_g\left[\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|^2\right]<\infty., \quad E_g\left[\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|^2\right]\geq \sup_{y:|x-y|<\delta}E_g\left[|U(y,t)|^2\right]=$$

$$=\sup_{y:|x-y|<\delta}E_gC_\alpha^2\sum_{k\geq 1}\Gamma_k^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_k,\zeta_k)}{a^2(t-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}I_{\{|y-\xi_k|<a(t-\zeta_k)\}}I_{\{|y-\xi_k|<\delta\}}I_{\{|t-\zeta_k|<\delta\}}\geq$$

$$\geq C_\alpha^2\sup_{y:|x-y|<\delta}\Gamma_{k_0}^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})}{a^2(t-\zeta_{k_0})^2-|y-\xi_{k_0}|^2}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<a(t-\zeta_{k_0})\}}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<\delta\}}I_{\{|t-\zeta_{k_0}|<\delta\}}.$$

З іншого боку, для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$ знайдеться таке $k_0=k\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right)$, що $\frac{\delta}{4a}<|t-\zeta_k|<\frac{\delta}{2a}$; $|x-\xi_k|<\frac{\delta}{2}$. Оскільки $\{y:|y-\xi_k|<a(t-\zeta_k)\}\subset\{y:|x-y|<\delta\}$, то $\sup_{y:|x-y|<\delta}\frac{1}{a^2(t-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}=+\infty$. Звідки випливає, що $E_g\left[\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|^2\right]=+\infty.$ Ми отримали суперечність із (6). Таким чином, $P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)=0,$ а отже,

$$P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)=\int_{\Omega_{(\xi,\zeta)}}\int_{\Omega_\Gamma}P_g\left(\sup_{y:|x-y|<\delta}|U(y,t)|<+\infty\right)dP_g\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right)dP_\Gamma(\omega_\Gamma)=0,$$

що й потрібно було довести.

Доведемо, що у (2) імовірність дорівнює нулю для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$. Аналогічно до попереднього маємо

$$E_g\left[\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|^2\right]\geq\sup_{s:|t-s|<\delta}E_g\left[|U(x,s)|^2\right]=$$

$$=\sup_{s:|t-s|<\delta}E_gC_\alpha^2\sum_{k\geq 1}\Gamma_k^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_k,\zeta_k)}{a^2(s-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}I_{\{|y-\xi_k|<a(s-\zeta_k)\}}I_{\{|y-\xi_k|<\delta\}}I_{\{|s-\zeta_k|<\delta\}}\geq$$

$$\geq C_\alpha^2\sup_{s:|t-s|<\delta}\Gamma_{k_0}^{-2/\alpha}\frac{\varphi(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})^{-2/\alpha}\sigma^2(\xi_{k_0},\zeta_{k_0})}{a^2(s-\zeta_{k_0})^2-|y-\xi_{k_0}|^2}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<a(s-\zeta_{k_0})\}}I_{\{|y-\xi_{k_0}|<\delta\}}I_{\{|s-\zeta_{k_0}|<\delta\}},$$

де $k_0=k\left(\omega_{(\xi,\zeta)}\right)$ таке, що $|x-\xi_k|<\frac{a\delta}{2};|t-\zeta_k|<\frac{\delta}{2}$. Тоді $\zeta_k+\frac{|x-\xi_k|}{a}\in\{s:|t-s|<\delta\}$ і $\sup_{s:|t-s|<\delta}\frac{1}{a^2(s-\zeta_k)^2-|y-\xi_k|^2}=+\infty$.

Отже, для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)}$ маємо $E_g\left[\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|^2\right]=+\infty.$ Звідси, як вище, $P_g\left(\sup_{s:|t-s|<\delta}|U(x,s)|<+\infty\right)=0.$

Теорему доведено.

Доведемо, що функція $U(x,t)$ задовольняє рівняння (3) в узагальненому сенсі.

Теорема 3. *Для довільної функції* $\theta(x,t)\in C_{fin}^\infty\left(R^2\times R^+\right)$ *з імовірністю 1 виконано рівність*

$$\int_0^\infty\iint_{R^2}U(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t)-a^2\Delta\theta(x,t)\right)dxdt=\int_0^\infty\iint_{R^2}\theta(x,t)\sigma(x,t)M(dx,dt). \tag{7}$$

Зауваження. Виняткова подія ймовірності нуль може залежати від θ.

Доведення. Уведемо позначення:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(x,t)-a^2\Delta\theta(x,t)=\psi(x,t),$$

$$K(y,s)=\int_s^\infty\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{\varphi(y,s)^{-1/\alpha}\sigma(y,s)\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt; \tag{8}$$

$$L(\psi)=\int_0^\infty\iint_{R^2}U(x,t)\psi(x,t)dxdt=C_\alpha\sum_{k=1}^\infty\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}K(\xi_k,\zeta_k)g_k,$$

$$R(\theta)=C_\alpha\sum_{k=1}^\infty\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}\sigma(\xi_k,\zeta_k)\theta(\xi_k,\zeta_k)g_k.$$

Тоді рівність (7) можна записати у вигляді $L(\psi)=R(\theta)$.

Нехай $\operatorname{supp}\theta\subset B(0,R)\times[0,R)$. Тоді

$$K(y,s)=\varphi(y,s)^{-1/\alpha}\sigma(y,s)\int_s^R \iint_{x:|x-y|<a(t-s)} \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt,$$

для $s\le R, K(y,s)=0$, та для $s>R, K(y,s)=0$, якщо $|y|>(a+1)R$. Справді, у такому випадку множина інтегрування $\{x:|x-y|\le a(t-s)\}\subset\{x:|x-y|\le aR\}$ має порожній перетин із $B(0,R)$, тому інтеграл дорівнює 0. Для $|y|\le(a+1)R$ матимемо

$$|K(y,s)|\le\left(\inf_{\substack{|y|\le(a+1)R\\ s\in[0,R]}}\varphi(y,s)\right)^{-1/\alpha}\sup_{\substack{|y|\le(a+1)R\\ s\in[0,R]}}|\sigma(y,s)|\sup_{\substack{|y|\le(a+1)R\\ s\in[0,R]}}|\psi(y,s)|\int_s^R\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{dxdt}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\le C_{R,\psi,\sigma}.$$

З іншого боку, із посиленого закону великих чисел та властивостей нормальних величин випливає, що знайдеться така $\Omega_0\in F, P(\Omega_0)=1$, що для довільних $\omega\in\Omega_0$ та будь-яких $k\ge1$: маємо $\Gamma_k\ge C_1(\omega)k,\ |g_k|\le C_2(\omega)|\log k+1|$, де C_1, C_2 – деякі додатні випадкові величини.

Таким чином, доданок у рівності для $L(\psi)$ обмежений: $|K(y,s)|\le C(\omega)\ C_{R,\psi,\sigma}k^{-1/\alpha}|\log k+1|$, де $C(\omega)$ – деяка скінченна випадкова величина. При фіксованих $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)},\omega_\Gamma\in\Omega_\Gamma$ маємо $E_g\left[L(\psi)^2\right]=C_\alpha^2\sum_{k\ge1}\Gamma_k^{-2/\alpha}K^2(y,s)$. З оцінки (8) випливає, що $E_g\left[L(\psi)^2\right]<\infty$ для майже всіх $\omega_{(\xi,\zeta)}\in\Omega_{(\xi,\zeta)},\omega_\Gamma\in\Omega_\Gamma$.

Отже, за теоремою Колмогорова про три ряди для довільної функції $\psi(x,t)\in C_{fin}^\infty\left(R^2\times R^+\right)$ ряд $L(\psi)$ збіжний майже напевно. Аналогічно для ряду $R(\theta)$. Отже, достатньо перевірити рівність відповідних часткових сум, тобто довести, що

$$C_\alpha\sum_{k=1}^N\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}g_k\int_s^\infty\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{\sigma(y,s)\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt=C_\alpha\sum_{k=1}^N\Gamma_k^{-1/\alpha}\varphi(\xi_k,\zeta_k)^{-1/\alpha}\theta(y,s)\sigma(y,s)g_kI_{\{x:|x-y|<a(t-s)\}}.$$

Щоб довести останню рівність, досить перевірити рівність відповідних доданків, тобто достатньо перевірити, що для довільного $x:|x-y|<a(t-s)$ виконується рівність

$$\int_s^\infty\iint_{x:|x-y|<a(t-s)}\frac{\psi(x,t)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dxdt=\theta(y,s)I_{\{x:|x-y|<a(t-s)\}}.$$

Ця тотожність є стандартною (див., наприклад, [5, теорема 3]). Теорему доведено.

Висновки. У статті розглянуто хвильове рівняння з α-стійким збуренням. Доведено, що існує майже напевно розвязок рівняння, який задається формулою Пуассона – Парсеваля. Також доведено, що він є узагальненим розязком рівняння.

Список використаних джерел

1. *Balan R. M.* The stochastic wave equation with fractional noise: a random field approach / R. M. Balan, C. A. Tudor // Stochastic Process. Appl. – 2010. – № 120(12). – P. 2468–2494.
2. *Dalang R. C.* The stochastic wave equation in two spatial dimensions / R. C. Dalang, N. E. Frangos. // Ann. Probab. – 1998. – № 26(1). – P. 87–212.
3. *Dalang R. C.* Hölder-Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three / R. C. Dalang, M. Sanz-Solé //. Mem. Amer. Math. Soc. – 2009. – № 199(931). – P. 70.
4. *Millet A.* On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density / A. Millet, P.-L. Morien // Stochastic Process., Appl. – 2010. – № 86(1). – P. 141–162.
5. *Pryhara L.* Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise / L. Pryhara, G. Shevchenko // Modern Stochastics: Theory and Applications. – 2016. – Vol. 3(3). – P. 237–248.
6. *Radchenko V.* Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Stud. Math. –2009. – №. 194(3). – P. 231–251.
7. *Radchenko V.* Properties of integrals with respect to a general stochastic measure in a stochastic heat equation / V. Radchenko // Theory Probab. Math. Stat. – 2011. – № 82. – P. 103–114.
8. *Quer-Sardanyons L.* The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet / L. Quer-Sardanyons, S. Tindel // Stochastic Process. Appl. –2007. – № 117(10). – P. 1448–1472.
9. *Samorodnitsky G.* Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance / G .Samorodnitsky, M. S Taqqu // Chapman & Hall, New York, 1994.
10. *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations. In: École Dété de Probabilités de Saint-Flour, XIV—1984. – J. B. Walsh, Lecture Notes in Math. – Springer, Berlin. – 1986.– Vol. 1180. – P. 265–439.

Надійшла до редколегії 22.11.16

Л. Пригара, асп.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С УСТОЙЧИВЫМ БЕЛЫМ ШУМОМ

Рассмотрено волновое уравнение на плоскости с устойчивым белым шумом. Потенциальное решение уравнения определено формулой Пуассона – Парсеваля. Установлены локальные свойства реализаций потенциального решения. Доказано, что оно является обобщенным решением уравнения.

L. Pryhara, PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv, Ukraine

STOCHASTIC WAVE EQUATION WITH STABLE WHITE NOISE

A planar wave equation with stable white noise is considered. One potential solution to the equation is defined of Poisson – Parseval formula. Local sample properties of the candidate solution are studied. It is shown that the candidate solution is a generalized solution to the equation.

ДО 60-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ОЛЕКСАНДРА ГЕОРГІЙОВИЧА КУКУША

Виповнилося 60 років із дня народження відомого математика, знаного фахівця з математичної статистики Олександра Георгійовича Кукуша.

Олександр Георгійович народився 23 травня 1957 р. в Києві в родині службовців. Його мати працювала вчителькою у школі. Саме від неї Олександр Георгійович успадкував хист до наукової і педагогічної роботи. Навчання у відомій своїми традиціями фізико-математичній школі № 145 м. Києва під керівництвом молодої вчительки Л. Ю. Дольної остаточно визначило його життєвий шлях. У 1974 р. Олександр Георгійович став студентом механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Тараса Шевченка, з яким і повязав усе своє подальше життя. У той час на факультеті працювали видатні вчені й талановиті педагоги. О. Г. Кукушу пощастило слухати лекції професорів Л. А. Калужніна, М. І. Кованцова, А. М. Самойленка, М. Л. Горбачука. Спеціальні курси читали фахівці з Інституту математики Академії наук України – члени-кореспонденти В. С. Королюк, Ю. М. Березанський. Не менш впливовим було й молодше покоління викладачів, на той час доцентів: М. Й. Ядренко, В. М. Гончаренко, В. І. Сущанський. Визначальну роль у науковому житті О. Г. Кукуша, його становленні як викладача відіграв Анатолій Якович Дороговцев. Він був не лише лектором з математичного аналізу, керівником студентського математичного гуртка й організатором студентських олімпіад. Як завідувач кафедри А. Я. Дороговцев постійно турбувався про долю своїх учнів.

Після закінчення з відзнакою механіко-математичного факультету О. Г. Кукуш залишився тут працювати в науково-дослідній частині та на кафедрі математичного аналізу, а згодом став старшим науковим співробітником і професором (з 1998 р.). Одночасно з роботою у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, у 2000 р. О. Г. Кукуш працював у Інституті статистики Мюнхенського університету (Німеччина), у 2002–2011 рр. – дослідником на факультеті бізнесу та економіки Левенського католицького університету (Бельгія). Зараз він також працює старшим науковим співробітником у Національному науковому центрі радіаційної медицини Національної академії медичних наук України та в Національному авіаційному університеті.

Наукові дослідження О. Г. Кукуш розпочав на першому курсі мехмату під керівництвом А. Я. Дороговцева. Уже в 1975 р. він опублікував першу наукову статтю у "Віснику Київського університету". У цей час А. Я. Дороговцев готував до захисту докторську дисертацію, присвячену оцінюванню параметрів випадкових процесів. Ця тематика захопила й Кукуша. Він у 1982 р. захистив кандидатську дисертацію "Деякі проблеми слабкої збіжності мір у просторах нескінченної розмірності" і в 1995 р. докторську дисертацію "Асимптотичні властивості оцінок нескінченновимірних параметрів випадкових процесів".

Олександр Георгійович є автором понад 170 наукових праць. Більшість із них належить до сучасного розділу математичної статистики – теорії моделей регресії з похибками у змінних. Ці моделі широко застосовуються в економетриці, метеорології, у задачах ідентифікації динамічних систем, при обробці біометричної інформації. О. Г. Кукуш є співавтором монографії "Моделі регресії з похибками вимірювання та їх застосування до радіаційних ризиків" (Київ, 2015), друге видання якої вийшло друком у Німеччині в 2017 р. Інші праці О. Г. Кукуша належать до фінансової математики (спільні дослідження з проф. Д. С. Сильвестровим, Швеція) та актуарної математики (спільні публікації з проф. Яном Даене, Бельгія). У німецькому видавництві Springer Олександр Георгійович видав задачник із теорії випадкових процесів (у співавторстві).

Зараз О. Г. Кукуш активно вивчає не лише суто теоретичні аспекти статистики випадкових процесів, а й плідно займається застосуваннями теорії до специфічних задач радіаційної медицини, задач організації диспетчерської служби та оцінювання ризиків безпечного руху літальних апаратів.

Наукові результати О. Г. Кукуша добре відомі й високо цінуються фахівцями з математичної статистики та її застосувань не тільки в Україні, але й у світі. Його часто запрошують із пленарними доповідями на престижні міжнародні конференції. Із доповідями на конференціях та наукових семінарах як запрошений професор він виступав у наукових центрах Європи, Північної Америки, Нової Зеландії і Тайваню. Він неодноразово виступав членом організаційних та програмних комітетів різних наукових конференцій в Україні та за кордоном.

О. Г. Кукуш є членом кількох поважних математичних організацій – Міжнародного статистичного інституту, Київського та Американського математичних товариств, членом різних вчених рад. Входить до складу редколегії міжнародних наукових журналів "Modern Stochastics: Theory and Methods", "Теорія ймовірностей та математична статистика".

Із науковою нерозривно повязана педагогічна діяльність ювіляра, яка не обмежується викладанням нормативних курсів із теорії міри, функціонального аналізу та спеціальних курсів студентам факультету. Велику увагу він приділяє вихованню професійних математиків – серед його учнів 10 кандидатів наук. Не забуває він і про вчителів та учнів середніх шкіл. Для школярів О. Г. Кукуш написав кілька книжок: "Монотонные последовательности и функции" (1989 р.), "Планиметрия. Геометрия на плоскости" (у співавторстві з О. В. Нікуліним, 1998 р.), "На допомогу керівникам математичних гуртків" (дві частини у співавторстві з Р. П. Ушаковим, 2010, 2011 рр.). Протягом багатьох років О. Г. Кукуш плідно співпрацює з популярним журналом "У світі математики" як член редакційної колегії і заступник головного редактора.

Велику роль у популяризації математики відіграє олімпіадний рух. Зі шкільних років О. Г. Кукуш успішно виступав у математичних олімпіадах різних рівнів. Зараз він є одним із організаторів, активних членів журі та авторів задач Всеукраїнських шкільних і студентських олімпіад.

За свою багаторічну сумлінну працю О. Г. Кукуш нагороджений Грамотами та Почесною Грамотою (2012 р.) Київського національного університету імені Тараса Шевченка. За цикл наукових праць удостоєний Премії Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2006 р.). О. Г. Кукуш нагороджений Грамотою Президента України за внесок у розвиток національної освіти (2004), почесним знаком Міністерства освіти "Відмінник освіти України" (2008 р.) та пам'ятною медаллю імені М. М. Боголюбова (2009 р.).

Сьогодні О. Г. Кукуш сповнений сил і творчих планів. Колектив механіко-математичного факультету щиро вітає Олександра Георгійовича зі славним ювілеєм і бажає йому міцного здоровя, наснаги та нових успіхів.

М. Городній, М. Денисьєвський, О. Нестеренко, І. Шевчук

ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ІГОРЯ ОЛЕКСАНДРОВИЧА ШЕВЧУКА

29 квітня 2017 р. виповнилось 70 років видатному українському математику, завідувачу кафедри математичного аналізу, доктору фізико-математичних наук, професору Ігорю Олександровичу Шевчуку.

І. О. Шевчук народився у Києві в родині педагогів. Під час війни його батько пройшов з боями від Сталінграда до Берліна. Останні роки життя був директором школи № 32 у Києві. Мати в останні роки життя працювала начальником управління кінофікації м. Києва. Перші 7 років життя маленький Ігор жив із батьками і сестрою у класній кімнаті школи № 136, в якій його батько був директором.

У 1963 р. Шевчук І. О. вступив до 10 класу щойно відкритої Республіканської спеціалізованої школи-інтернату фізико-математичного профілю при Київському державному університеті імені Тараса Шевченка. У 1964 р. став переможцем XIX Київської міської олімпіади з математики, закінчив 11-й клас школи № 92 і вступив на механіко-математичний факультет КДУ імені Тараса Шевченка, який закінчив у 1969 р. Під час навчання в університеті визначальний вплив на нього справили лекції і практичні заняття з математичного аналізу, які вів доцент Володимир Олексійович Панасович. Він, зокрема, і познайомив студента І. Шевчука з тодішнім завідувачем кафедри математичного аналізу, членом-кореспондентом НАН України Владиславом Кириловичем Дзядиком, під керівництвом якого Ігор Олександрович пізніше навчався в аспірантурі і згодом працював в очолюваному ним відділі теорії функцій Інституту математики НАН України. Саме під впливом В. К. Дзядика і сформувалися наукові інтереси І. О. Шевчука як майбутнього вченого.

З 1969 по 1998 роки наукова діяльність І. О. Шевчука проходила в Інституті математики НАН України, де він навчався в аспірантурі (1969–1972) і згодом працював на посадах молодшого наукового співробітника (1972–1977), вченого секретаря Інституту (1977–1979), старшого наукового співробітника (1979–1986) та провідного наукового співробітника (1986–1998). За сумісництвом з 1986 р. Ігор Олександрович працює професором кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Тут у 1996 р. він отримав вчене звання професора.

У 1973 р. І. О. Шевчук захистив кандидатську дисертацію "Про теорему Племеля – Привалова та конструктивну характеристику функцій класу Зигмунда", а в 1985 р. – докторську дисертацію "Продовження та наближення гладких функцій однієї змінної".

Наукові праці І. О. Шевчука присвячені широкому колу питань теорії функцій, головним чином, теорії наближень. Основними напрямками його наукової діяльності є наближення функцій комплексної змінної (у цьому напрямку для функцій високої гладкості ним побудовано теорію наближення алгебраїчними поліномами на множинах комплексної площини, що мають кусково-гладку межу), продовження функцій із довільної підмножини дійсної прямої (тут він знайшов умову на значення функції, визначеної на довільній фіксованій підмножині числової прямої, яка є необхідною і достатньою для того, щоб ця функція допускала продовження на всю числову вісь, що належить класу Соболєва, Гельдера чи узагальненому класу Гельдера) та формозберігаюче наближення. Формозберігаюче наближення розглядає задачі наближення монотонних функцій монотонними поліномами (монотонне наближення), опуклих функцій опуклими поліномами (опукле наближення), наближення функцій, які змінюють свій напрямок монотонності у фіксованих точках, поліномами, що змінюють напрямок монотонності у тих самих точках, (комонотонне наближення) та інші. І. О. Шевчуком (разом із учнями і співавторами) зясовано, у яких випадках для монотонного, опуклого, комонотонного, коопуклого наближення функцій на відрізку справедливі аналоги класичних оцінок похибки наближення (типу оцінок Джексона, поточкових, Дітзіана – Тотіка та ін.); у всіх випадках, коли відповідні аналоги класичних оцінок хибні, побудовано контрприклади. Серед інших результатів вченого варто згадати доведення гіпотез Сьюелла (про контурно-тілесні властивості аналітичних функцій), Хассона (про апроксимаційний критерій гладкості), Де-Вора і Ю (про поточкову оцінку монотонного наближення функцій класів Соболєва з $r > 2$), знаходження точного значення сталої Лебега ядра Рогозинського, істотне покращення оцінки інтерполяційної сталої Уїтні. Наукові результати І. О. Шевчука добре відомі й високо цінуються фахівцями з теорії функцій не лише в Україні, але й у світі. Його регулярно запрошують із пленарними доповідями на престижні міжнародні конференції. Із доповідями як запрошений професор він виступав у багатьох наукових центрах Європи, Північної Америки, Ізраїлю та Китаю.

І. О. Шевчук – автор двох монографій, одна з яких видана за кордоном, більш ніж 100 наукових праць, з яких близько половини опубліковані за кордоном, учасник більше 90 міжнародних конференцій.

Яскравою, багатогранною і продуктивною є й педагогічна діяльність І. О. Шевчука. Чудові лекції ювіляра приваблюють своєю інформативністю та вмінням за відведений час доступними для слухачів засобами чітко й дохідливо викласти основне, при цьому подаючи надзвичайно широку картину і захоплюючи здібних студентів перспективою подальших досліджень. Уміння підібрати посильну й водночас перспективну задачу, надати потрібну допомогу при її розвязанні, уважне й по-батьківському турботливе ставлення – ці риси характеризують Ігоря Олександровича як наукового керівника й високо цінуються його учнями. Під його керівництвом захищено одну докторську, 15 кандидатських дисертацій та 5 дисертацій на здобуття ступеня PhD. Більшість його учнів і після захисту дисертацій продовжують активні наукові дослідження, працюючи у провідних університетах України, Італії, Канади, Німеччини, Норвегії, Росії, Туреччини, Франції, Швейцарії. Визначні математичні досягнення Марини Вязовської відзначено премією імені Салема за 2016 рік (перший лауреат цієї премії серед математиків з України), Андрія Бондаренка – призом імені Васіла Попова за 2013 рік (перший лауреат цієї премії серед математиків Східної Європи). Цими престижними міжнародними нагородами своїх вихованців може по праву пишатись не лише ювіляр і механіко-математичний факультет, а й уся українська математична спільнота.

І. О. Шевчук проводить значну науково-організаційну роботу. Протягом багатьох років він був головою методичної комісії Міністерства освіти і науки України, членом експертної ради ВАК, головою (або співголовою) оргкомітетів восьми міжнародних наукових конференцій, членом вченої ради із захисту докторських дисертацій. Нині він голова журі Відкритої олімпіади механіко-математичного факультету з математики, член редколегій "Українського математичного журналу", "Journal of Concrete and Applicable Mathematics" (USA), наукового видання "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка", науково-популярного видання "У світі математики" та інших. І. О. Шевчук є відповідальним за договори про співробітництво між Київським національним університетом імені Тараса Шевченка та університетами міст Тулона (Франція) і Тель-Авіва (Ізраїль).

З 1998 р. Шевчук І. О. – завідувач кафедри математичного аналізу Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Очоливши кафедру математичного аналізу, Ігор Олександрович не лише дбайливо зберігає її найкращі традиції, а і примножує їх. Завдяки йому значно розширилися наукові звязки кафедри й факультету із провідними вченими Інституту математики, університетів України та далекого зарубіжжя. Генеруючи багато власних продуктивних ідей, він із великою увагою ставиться до думки кожного співробітника, підтримуючи їх пропозиції. Незважаючи на свою повсякчасну зайнятість, І. О. Шевчук завжди готовий до співпраці як із колегами, так і з аспірантами і студентами. Вирішуючи виробничі питання оперативно і з максимальною користю для справи, він завжди знаходить час і можливості для простого спілкування з колегами та учнями, обовязково запропонувавши кожному, хто заходить до його кабінету, горнятко запашної кави. Чудові людські якості, глибокі знання, широка ерудиція, житейська мудрість у поєднанні з невянучим оптимізмом Ігоря Олександровича роблять спілкування з ним незабутнім.

За свою багаторічну працю І. О. Шевчук нагороджений Почесними Грамотами Кабінету Міністрів України (2003) і Верховної Ради України (2009), знаком Міністерства освіти і науки України "Відмінник освіти України" (2003), Грамотою (2007) і Почесною Грамотою (2012) Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Ігор Олександрович – лауреат Республіканської премії імені М. Островського (1980), премій НАН України імені М. М. Крилова (1991) і М. В. Остроградського (2015). У 1993 та 1998 рр. він виборов гранти Сороса. У 2000 р. його визнано кращим викладачем року.

Колектив механіко-математичного факультету щиро вітає Ігоря Олександровича зі славним ювілеєм і бажає йому міцного здоровя, наснаги та нових творчих успіхів.

А. Самойленко, М. Перестюк, М. Городній, Я. Жук, О. Лимарченко,
Ю. Мішура, І. Парасюк, А. Петравчук, В. Самойленко, О. Станжицький,
О. Кукуш, О. Курченко, В. Радченко, А. Чайковський, О. Нестеренко

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА
МЕХАНІКА

Випуск 1(37)

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Формат 60x84$^{1/8}$. Ум. друк. арк. 7,1. Наклад 300. Зам. № 217-8479
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку 04.12.17

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02