

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М. Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В. Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О. В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); V. Bavula (United Kingdom) д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Я. О. Жук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В. В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б. М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю. В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г. Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; N. Leonenko (United Kingdom), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. С. Лимарченко, д-р техн. наук, проф.; Ю. С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л. В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М. О. Перестюк, академік НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А. П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; D. Silvestrov (Sweden), д-р фіз.-мат. наук, проф.; О. М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Sushansky (Poland), д-р фіз.-мат. наук, проф.; S. Trofimchuk (Chile), д-р фіз.-мат. наук, проф.; <u>А. Ф. Улітко</u>, чл.-кор. НАНУ, д-р фіз.-мат. наук, проф.; V. Futorny (Brazil), д-р фіз.-мат. наук, проф.; І. О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 16.06.16 (протокол № 11)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

BULLETIN

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

ISSN 1684-1565

MATHEMATICS. MECHANICS

35/2016

Founded in 1958

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

CHIEF EDITOR	M.Gorodnii, Full Professor, Dr. Hab.
EDITORIAL BOARD	V. Samoylenko, Full Professor, Dr. Hab. (Deputy Editor); A. Zaitsev, PhD (Secretary); V. Bavula (United Kingdom), Full Professor, Dr. Hab.; Y. Drozd, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Zhuk, Full Professor, Dr. Hab.; V. Kirichenko, Full Professor, Dr. Hab.; B. Kiforenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Kozatchenko, Full Professor, Dr. Hab.; G. Kulinich, Full Professor, Dr. Hab.; N. Leonenko (United Kingdom Full Professor, Dr. Hab.); O. Limarchenko, Full Professor, Dr. Hab.; Y. Mishura, Full professor, Dr. Hab.; L. Mol'chenko, Full Professor, Dr. Hab.; I. Parasyuk, Full Professor, Dr. Hab.; M. Perestyuk, Full Professor, Academician of NAS of Ukraine, Dr. Hab.; A. Petravchuk, Full Professor, Dr. Hab.; D. Silvestrov (Sweden), Full Professor, Dr. Hab.; A. Stanzhytskyi, Full Professor, Dr. Hab.; V. Sushansky (Poland), Full Professor, Dr. Hab.; S. Trofimchuk (Chile), Full Professor, Dr. Hab.; A. Ulitko, Acad-Corr of NAS of Ukraine, Full Professor, Dr. Hab.; V. Futorny (Brazil), Full Professor, Dr. Hab.; I. Shevchuk, Full Professor, Dr. Hab.
Address of Editorial board	03127, Kyiv-127, Acad. Glushkova Avenue, 4E, Faculty of Mechanics and Mathematics; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Approved	Academic Council of Faculty of Mechanics and Mathematics 16.06.16 (protocol № 11)
Attested	By Higher Attestation Commission. Decision of Presidium of HAC of Ukraine № 1-05/4 from 26.05.2010
Registered	Ministry of Justice of Ukraine Certificate of state registration KB № 16007-4479P from 11.12.09
Founder and publisher	Taras Shevchenko National University of Kyiv, Publishing and printing center "Kyiv University" The certificate included in the State Register ДК № 1103 from 31.10.02
Address of publisher	01601, Kyiv-601, Taras Shevchenko blv., 14, Off. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; fax 239 31 28

ЗМІСТ

Д. Радченко Наближення відображеннями з додатнім якобіаном у тривимірному просторі.....	6
А. Громик, І. Конет Гіперболічна крайова задача математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі	9
І. Романюк Глобальний атрактор для однієї многозначної імпульсної динамічної системи	14
М. Яременко Квазілінійні параболічні системи з сингулярними коефіцієнтами.....	20
О. Ільченко, Т. Шовкопляс Існування розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу з випередженням.....	27
С. Сербенюк Нега- \tilde{Q} -представлення як узагальнення деяких знакопозитивних представлень дійсних чисел	32
Б. Кіфоренко, І. Васильєв, О. Куценко, О. Харитонов Ефективність дворежимних ракетних двигунів при виконанні навколосемних орбітальних маневрів	39
Л. Мольченко, Л. Федорченко, С. Колесник Магнітопружне деформування гнучкої кільцевої пластини змінної жорсткості з урахуванням джоулевого нагріву.....	47
М. Хашемі, Я. Жук Вплив частоти і амплітуди гармонічного навантаження на комплексні модулі полімерних матеріалів	53
Н. Ободан, Н. Гук, О. Магас Нейромережеві моделі обернених задач для нелінійних еліптичних крайових задач	58
До 70-річчя від дня народження Миколи Олексійовича Перестюка	63

СОДЕРЖАНИЕ

Д. Радченко Приближения отображениями с положительным якобианом в трехмерном пространстве.....	6
А. Громик, И. Конет Гиперболическая краевая задача математической физики для полуограниченной многослойной пространственной среды	9
И. Романюк Глобальный аттрактор для одной многозначной импульсной динамической системы	14
Н. Яременко Квазилинейные параболические системы с сингулярными коэффициентами.....	20
А. Ильченко, Т. Шовкопляс Существование решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с опережением.....	27
С. Сербенюк Нега- \tilde{Q} - представление как обобщение некоторых знакопеременяющихся представлений действительных чисел	32
Б. Кифоренко, И. Васильев, А. Куценко, А. Харитонов Эффективность двухрежимных ракетных двигателей при выполнении околоземных орбитальных маневров	39
Л. Мольченко, Л. Федорченко, С. Колесник Магнитоупругое деформирование гибкой кольцевой пластины переменной жёсткости с учетом джоулевого нагрева	47
М. Хашеми, Я. Жук Влияние частоты и амплитуды гармонического нагружения на комплексные модули полимерных материалов	53
Н. Ободан, Н. Гук, О. Магас Нейросетевые модели обратных задач для нелинейных эллиптических краевых задач.....	58
К 70-летию со дня рождения Николая Алексеевича Перестюка	63

CONTENTS

D. Radchenko Approximation by mappings with positive jacobian in the three-dimensional space	6
A. Gromyk, I. Konet Hyperbolic boundary value problem of mathematical physics for semibounded multilayer homogeneous spatial environment	9
I. Romaniuk Global attractor for one multivalued impulsive dynamical system	14
M. Yaremenko Quasi-linear parabolic system with singular coefficients.....	20
A. Ilchenko, T. Shovkopyas The uniqueness of the solution of anticipating partial stochastic differential equations of parabolic type	27
S. Serbenyuk Nega- \tilde{Q} -representation as a generalization of certain alternating representations of real numbers	32
B. Kiforenko, I. Vasil'ev, O. Kutsenko, O. Kharytonov Bimodal rocket engines efficiency for near-earth orbit-to-orbit transfers carrying out.....	39
L. Mol'chenko, L. Fedorchenko, S. Kolesnik, Magnetoelasticity of deformation flexible annular plate of variable stiffness with the joule heating	47
M. Hashemi, Y. Zhuk Influence of frequency and amplitude of harmonic loading on complex moduli for polymer materials	53
N. Obodan, N. Guk, O. Magas Neural network model of inverse problems for nonlinear elliptic boundary value problems	58
To the 70 anniversary from the date of a birth of Mykola Perestyuk.....	63

**НАБЛИЖЕННЯ ВІДОБРАЖЕННЯМИ
З ДОДАТНІМ ЯКОБІАНОМ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ**

Розглядається задача про наближення неперервних локально однозначних відображень у тривимірному просторі гладкими відображеннями з додатнім якобіаном.

ВСТУП. У статті [1] було доведено наступний результат, що є локальним аналогом теореми про наближення гомеоморфізмів на площині [4].

Теорема 1. Нехай $f : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке гладке відображення $g : [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ із класу C^∞ з додатнім якобіаном на $[0,1]^2$, що $\|f - g\| < \varepsilon$.

Тут і надалі через $\|\cdot\|$ ми позначаємо супремум-норму на просторі неперервних функцій, $\|f\|_K = \sup_{x \in K} |f(x)|$, де K це множина визначення f , яку ми зазвичай не будемо вказувати. Будемо називати відображення $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ локально однозначним, якщо для кожної точки $x \in K$ існує її оточення U такий, що звуження $f|_U$ – ін'єктивне відображення. Нарешті, під збереженням орієнтації розуміється властивість $\deg(f, U, x) > 0$ для всіх $x \in \text{int}(K)$, і всіх достатньо малих відкритих оточень $x \in U$, де $\deg(f, U, x)$ – це так званий топологічний степінь відображення (див. [8]).

Основна мета цієї статті – довести аналогічний результат у тривимірному просторі.

Теорема 2. Нехай $f : [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке гладке відображення $g : [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ із класу C^∞ з додатнім якобіаном на $[0,1]^3$, що $\|f - g\| < \varepsilon$.

З теореми 1, теореми 2, а також простих результатів стосовно наближення поліномами функцій багатьох змінних (див., наприклад, [2]) випливає також наступний простий наслідок стосовно наближення поліноміальними відображеннями з тими самими умовами.

Наслідок 1. Нехай $d \in \{2,3\}$ і $f : [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – неперервне, локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке поліноміальне відображення $p : [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ з додатнім якобіаном на $[0,1]^d$, що $\|f - p\| < \varepsilon$.

Доведення. Нехай $g : [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – таке гладке відображення з додатнім якобіаном, що $\|f - g\| < \varepsilon/2$. З [2, теор. 1] слідує, що для довільного $\delta > 0$ існує таке поліноміальне відображення p , що $\|g - p\| < \delta$ і $\|\partial_i g_j - \partial_j p_i\| < \delta$, $1 \leq i, j \leq d$. Нехай $0 < C_1, C_2$ такі, що $\delta < C_2$, $C_1 < J_g(x)$ і $|\partial_i g_j(x)| < C_2$ для всіх $x \in [0,1]^d$, $1 \leq i, j \leq d$. Тоді, за нерівністю трикутника, маємо

$$J_p(x) > J_g(x) - d! 2^d C_2^{d-1} \delta > C_1 - d! 2^d C_2^{d-1} \delta,$$

тому $J_p(x) > \delta/2$ за умови $\delta < \frac{C_1}{2^d d! C_2^{d-1}}$. Якщо тепер покласти

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2}, \frac{C_1}{2^d d! C_2^{d-1}} \right\},$$

то отримаємо, що відповідне поліноміальне відображення p задовольняє необхідні умови.

ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ. Так само як і у статті [1], доведемо теорему 2 у два кроки. Спочатку ми встановимо існування кусково-лінійного наближення до f (лема 1), а потім наведемо відповідну процедуру для згладження цього відображення (лема 3). Ми вільно користуватимемось поняттями кусково-лінійної топології – симпліціальний d -комплекс, триангуляція, тощо (див. [7, ст. 1–6]).

Лема 1. Нехай $f : [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – неперервне локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке локально однозначне кусково-лінійне відображення $h : [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, що $\|f - h\| < \varepsilon$.

Так само, як і в [1], цю лему можна довести адаптуючи доведення теореми про наближення гомеоморфізмів [7, теор. 33.1]. Наведемо інше доведення, що спирається на результати статті [3].

Лема 2. Нехай C – скінченний 2-комплекс, $g : |C| \rightarrow \mathbb{R}^3$ – неперервне відображення, що є гомеоморфізмом при звуженні на будь-який підкомплекс діаметру $\leq k$, де $k > 3$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке кусково-лінійне відображення $h : |C| \rightarrow \mathbb{R}^3$ з тією самою властивістю, що $\|g - h\| < \varepsilon$.

Доведення. З доведення теореми [3, теор. 5] випливає існування відображення $\tilde{g}:|C| \rightarrow \mathbb{R}^3$, що є гомеоморфізмом при звуженні на будь-який підкомплекс діаметру $\leq k$ і яке задовольняє нерівності $\|g - \tilde{g}|_C\| < \varepsilon/2$ і має таку властивість: під дією \tilde{g} образ кожного ребра в C є ламаною лінією, а образ кожного трикутника – кусково-лінійним 2-диском (за означенням, це образ в \mathbb{R}^3 стандартного трикутника Δ під дією кусково-лінійного ін'єктивного відображення). Залишається знайти кусково-лінійне відображення h , що наближає \tilde{g} і має властивість $h(\sigma) = \tilde{g}(\sigma)$ для кожного симплекса $\delta \in C$.

Для цього покладемо $h(v) = \tilde{g}(v)$ для кожної вершини $v \in C$, і визначимо h на ребрі vw як кусково-лінійну параметризацію ламаної лінії $\tilde{g}(vw)$, за умови $\|h - \tilde{g}|_{vw}\| < \varepsilon/4$. Щоб визначити h на трикутниках залишається скористатися наступним фактом: якщо $f: \Delta \rightarrow \Delta$ – гомеоморфізм, а $l_0: \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta$ – кусково-лінійний гомеоморфізм що задовольняє $\|f - l_0\|_{\partial\Delta} < \delta/2$, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм $l_1: \Delta \rightarrow \Delta$, що $l_1|_{\partial\Delta} = l_0$ і $\|f - l_1\| < \delta$. Цей факт випливає з конструкції використаної у доведенні [7, теор. 6.3]. Лему 2 доведено.

Нам також знадобиться наступний результат (див. [7, теор. 17.12]).

Твердження 1 (Теорема Шенфліса). Якщо $Q = [0,1]^3$ і $f: \partial Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ – кусково-лінійний гомеоморфізм, то існує такий кусково-лінійний гомеоморфізм $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, що $F|_{\partial Q} = f$.

Доведення лема 1. Розглянемо таке відкрите покриття $\cup_i U_i \supset [0,1]^3$, що $f|_{U_i}$ є гомеоморфізмом для всіх i . Нехай L – стала Лебега цього покриття. Розіб'ємо Q на N^3 однакових кубів, $[0,1]^3 = Q_1 \cup \dots \cup Q_{N^3}$, де $\text{int}(Q_i \cup Q_j) = \emptyset$. Виберемо N так, щоб $\text{diam}(f(Q_i)) < \min(\varepsilon/3, L/4)$ і позначимо через C – симпліціальний 2-комплекс з геометричною реалізацією $|C| = \{(x,y,z) \in [0,1]^3: \{x,y,z\} \cap \{0,1,\dots,N\} \neq \emptyset\}$ (об'єднання $(N+1)^3$ площини). Тоді $f|_C$ задовольняє умови лема 2, а отже існує таке кусково-лінійне відображення $h_0: |C| \rightarrow \mathbb{R}^3$, що $\|f - h_0\| < \varepsilon/3$ і яке є однозначним на будь-якому підкомплексі C комбінаторного діаметра ≤ 4 . Залишається лише N^3 разів скористуватися теоремою Шенфліса, щоб побудувати кусково-лінійне продовження $h_1: [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ з умовою $h_1|_C = h_0$ і переконатися, що воно локально однозначне і виконується нерівність $\|f - h\| < \varepsilon$.

Основна складність другого кроку полягає в тому, що, при спробі згладити кусково-лінійне відображення найпростішим чином, наприклад, за допомогою згортки з гладкою фінітною функцією, відображення може втратити властивість локальної однозначності.

Лема 3. Нехай $f: [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – кусково-лінійне локально однозначне відображення, що зберігає орієнтацію. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує гладке відображення $g: [0,1]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ із класу C^∞ з додатнім якобіаном таке, що $\|f - g\| < \varepsilon$.

Доведення. Помітимо, що функція $f_n(x) = f(x_0 + (x - x_0) \cdot (1 - 1/n))$, де $x_0 = (1/2, 1/2, 1/2)$ має ті самі властивості, що й f , визначена на множині $[-1/n, 1 + 1/n]^3$ і $f_n \rightarrow f$ на $Q = [0,1]^3$. Тому, без обмеження загальності, вважатимемо, що f продовжується на деякий відкритий окіл $U_0 \supset Q$. Нехай $\omega: \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty)$ – деяка функція класу C^∞ з носієм в кулі $\overline{B_1(0)}$ така, що $\int_{\mathbb{R}^3} \omega(x) = 1$ і $\int_{\mathbb{R}^3} x\omega(x) = 0$. Покладемо $\omega_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3} \omega(x/\varepsilon)$.

Нехай K – такий симпліціальний комплекс, що $|K| = [-\delta, 1 + \delta]^3 \subset U_0$ і відображення f – лінійне на кожному симплексі $\delta \in K$. Вважатимемо також, що K містить такий підкомплекс K_0 , що $|K_0| = Q$. Вибираючи достатньо дрібне підрозбиття, так само як в доведенні лема 1, можемо гарантувати, що звуження f на будь-який підкомплекс комбінаторного діаметру 4 є однозначним. Ми будемо використовувати стандартне позначення K^i для i -остову комплексу K ($B = N(I, 2\varepsilon) - N(\{-I, I\}, \varepsilon)$) – множина усіх вершин, K^1 – множина усіх вершин і ребер, тощо). Позначатимемо також через $N(A, \eta)$ – η -окіл множини A . Побудуємо згладження $g: Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ у декілька етапів.

1. Задамо $g_1: Q \rightarrow \mathbb{R}^3$ як згортку

$$g_1(x) = f * \omega_\varepsilon(x) = \int f(y) \cdot \omega_\varepsilon(x - y) dy,$$

де значення ε набагато менше за довжину $f(e)$ будь-якого з ребер $e \in K_0$. Відображення g_1 гладке класу C^∞ , рівномірно збігається до f при $\varepsilon > 0$ і співпадає з f на множині $Q \setminus N(K_0^2, \varepsilon)$ (що випливає з того, що при згортці з ω_ε лінійне відображення не змінюється). Нехай Δ – деякий трикутник в K_0 , а σ_1, σ_2 – його суміжні 3-симплекси

в K . У звуженні на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus N(K_0^1, \varepsilon)$, g_1 переводить площини паралельні до Δ у деяке сімейство паралельних площин, g_1 також є монотонним у напрямі ортогональному до Δ . Крім того, g_1 є афінним у напрямі площини Δ . Отже, звуження g_1 на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \setminus N(K_0^1, \varepsilon)$ є дифеоморфізмом.

2. Зафіксуємо тепер $\varepsilon_1 > 3\varepsilon$ і змінимо відображення g_1 на множині $N(|K_0^1|, \varepsilon) \setminus N(|K_0^0|, \varepsilon_1)$, тобто в малому околі кожного з ребер. Наша побудова буде локальною, тому для зручності будемо вважати, що ребро має вигляд $I = \{(0, 0)\} \times [-1, 1]$. З точністю до лінійного перетворення у множині значень, можемо вважати, що $f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ і $f(0, 0, -1) = (0, 0, -1)$. Тоді на множині $B := N(I, 2\varepsilon) \setminus N(\{-1, 1\}, \varepsilon_1)$ відображення f задовольняє $f(x, y, z) = f(x, y, 0) + (0, 0, z)$. З означення g_1 випливає, що g_1 також задовольняє $g_1(x, y, z) = g_1(x, y, 0) + (0, 0, z)$. Таким чином, щоб продовжити g_1 з $A := N(I, 2\varepsilon) \setminus (N(I, \varepsilon) \cup N(\{-1, 1\}, \varepsilon_1))$ до дифеоморфізму на B , достатньо продовжити з $A_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon < |x| < 2\varepsilon\}$ на множину $B_0 = \{x \in \mathbb{Z}^2 : |x| < 2\varepsilon\}$ відображення $(x, y) \mapsto (g_{1,1}(x, y, 0), g_{1,2}(x, y, 0))$ із збереженням однозначності. Це гарантує лема 4. Нехай g_2 – отримане продовження.

3. Побудоване відображення $g_2 : Q \setminus N(|K_0^0|, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ є локальним дифеоморфізмом. При достатньо малому значенні ε_1 , воно також буде однозначним на множині $B_{2\varepsilon_1}(v) - B_{\varepsilon_1}(v)$ для кожної вершини $v \in K_0^0$. Тому, застосовуючи лему 4, ми отримаємо продовження $g_3 : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$, що має всі необхідні властивості. Лему 3 доведено.

Існування продовження у кроках 2 і 3 впливає з наступної леми. Будемо позначати кільце з центром в точці x_0 і радіусами r_1, r_2 через

$$A_{r_1, r_2}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 \leq |x - x_0| \leq r_2\}.$$

Лема 4. Нехай $d \in \{2, 3\}$, $0 < r_1 < 1 < r_2$, а відображення $f : A_{r_1, r_2}(0) \rightarrow \mathbb{R}^d$ – дифеоморфізм на свій образ. Тоді існує такий дифеоморфізм $F : \overline{B_{r_2}(0)} \rightarrow \mathbb{R}^d$, що $F(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in A_{r_1, r_2}(0)$ і $F(x) = x$ для $x \in B_{r_1}(0)$.

Доведення. Нехай $d = 3$, і зафіксуємо $s \in (r_1, 1)$. За теоремою Александера [5, теор. 1.1] існує такий дифеоморфізм $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, що $g(f(x)) = x$ при $|x| = s$. Тому будемо вважати, що $f(x) = x$ при $|x| = s$. Визначимо $F_1(x) = x$, $|x| \leq s$ і $F_1(x) = f(x)$, $|x| > s$. Тоді F_1 – гомеоморфізм, а звуження F_1 на кожну з множин $\overline{B_s(0)}$, $A_{s, r_2}(0)$ є дифеоморфізмом. Застосовуючи теорему про склеювання дифеоморфізмів [6, теор. 2.8] отримаємо шуканий дифеоморфізм $F : B_{r_2}(0) \rightarrow \mathbb{R}^3$, що співпадає з F_1 усюди поза $N(\{x : |x| = s\}, (1-s)/2)$. Випадок $d = 2$ розглядається аналогічно.

Лему 4 доведено.

Основний результат (теорема 2) впливає з леми 1 і леми 5.

Висновок. Доведено, що неперервне, локально однозначне відображення куба, яке зберігає орієнтацію, можна як завгодно добре наблизити гладким відображенням із додатнім якобіаном.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Радченко Д. В. О приближении отображениями с неотрицательным якобианом // Матем. заметки, 93:2 (2013), с. 263–275.
2. Bagby T., Bos L., Levenberg N. Multivariate simultaneous approximation, Constructive Approximation, Vol. 18, No. 4 (2002), p. 569–577.
3. Bing R. H. An Alternative Proof that 3-Manifolds Can be Triangulated, Annals of Mathematics, Vol. 69, No. 1 (1959), p. 37–65.
4. Franklin P., Wiener N. Analytic Approximations to Topological Transformations, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 28, No. 4 (1926), p. 762–785.
5. Hatcher A. Notes on basic 3-manifold topology, www.math.cornell.edu/hatcher/3M/3Mdownloads.html.
6. Matsumoto Y. An Introduction to Morse Theory, Translations of Mathematical Monographs, AMS (2001).
7. Moise E. Geometric Topology in Dimensions 2 and 3, New York, Springer-Verlag (1977).
8. O'Regan D., Cho Y. J., Chen Y. Q. Topological Degree Theory and Applications, Chapman and Hall/CRC, New York (2006).

Стаття надійшла до редколегії 10.05.16

Радченко Д., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,

ПРИБЛИЖЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЯМИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЯКОБИАНОМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматривается задача приближения непрерывных локально однозначных отображений в трёхмерном пространстве гладкими отображениями с положительным якобианом.

Radchenko D., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv

APPROXIMATION BY MAPPINGS WITH POSITIVE JACOBIAN IN THE THREE-DIMENSIONAL SPACE

We consider the problem of approximating continuous locally univalent mappings in three-dimensional Euclidean space by smooth mappings with positive Jacobian determinant.

УДК 517.947

А. Громик, канд. тех. наук, доц.
 Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський
 І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.
 Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський
 e-mail: gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В НАПІВОбМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПРОСТОРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру гіперболічної крайової задачі математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі.

ВСТУП. Відомо, що актуальні задачі теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач математичної фізики не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними, чи, зокрема, кусково-сталими.

Деякі класи подібних крайових задач розглядалися в працях Б. Болі. Дж. Уейнера [1], В. Дейнеки, І. Сергієнка, В. Скопечького [4, 13], Ю. Коляна [5], Я. Підстригача, В. Ломакіна, Ю. Коляна [12], Г. Шиліна [15] та ін., в яких досліджено низку важливих математичних моделей механіки суцільного середовища, механіки деформівного твердого тіла, термомеханіки, тощо. При цьому часто використовувалися методи чисельного аналізу або ж метод зведення задач у кусково-однорідному середовищі до відповідних задач для диференціальних рівнянь із сингулярними коефіцієнтами у вигляді узагальнених функцій (δ -функції Дірака та її похідних) в однорідному середовищі, точний розв'язок яких побудувати практично неможливо.

Водночас для досить широкого класу задач у кусково-однорідних середовищах ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [3, 7-9, 11]. Цей метод дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідних середовищах через їх інтегральне зображення.

У цій статті побудовано методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в напівобмеженому за аплікатною змінною кусково-однорідному просторовому середовищі, координат.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \left\{ (t, x, y, z) : t > 0; (x, y) \in \Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; b); z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j), l_0 \geq 0, l_k < l_{k+1}, l_{n+1} = +\infty \right\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [14]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, x, y, z), z \in I_j, j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(x, y, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(x, y, z), \quad z \in I_j, j = \overline{1, n+1}; \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p \right) u_j \Big|_{x=0} = \theta_j(t, y, z); \quad \frac{\partial^k u_j}{\partial x^k} \Big|_{x=+\infty} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) u_j \Big|_{y=0} = \omega_j^1(t, x, z), \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) u_j \Big|_{y=b} = \omega_j^2(t, x, z), \quad j = \overline{1, n+1}; \quad (4)$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, x, y), \quad \frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad k = 0, 1 \quad (5)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad j = 1, 2, k = \overline{1, n}, \quad (6)$$

де $a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}, \chi_j, p, h, k, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ – деякі невід'ємні сталі, причому $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} c_{2k} > 0; \alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0; |\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0;$

$$f(t, x, y, z) = \{f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), \dots, f_{n+1}(t, x, y, z)\}; \quad g^1(x, y, z) = \{g_1^1(x, y, z), g_2^1(x, y, z), \dots, g_{n+1}^1(x, y, z)\};$$

$$g^2(x, y, z) = \{g_1^2(x, y, z), g_2^2(x, y, z), \dots, g_{n+1}^2(x, y, z)\}; \quad \theta^1(t, y, z) = \{\theta_1^1(t, y, z), \theta_2^1(t, y, z), \dots, \theta_{n+1}^1(t, y, z)\};$$

$$\theta^2(t, y, z) = \{\theta_1^2(t, y, z), \theta_2^2(t, y, z), \dots, \theta_{n+1}^2(t, y, z)\}; \omega^1(t, x, z) = \{\omega_1^1(t, x, z), \omega_2^1(t, x, z), \dots, \omega_{n+1}^1(t, x, z)\};$$

$$\omega^2(t, x, z) = \{\omega_1^2(t, x, z), \omega_2^2(t, x, z), \dots, \omega_{n+1}^2(t, x, z)\}; g_0(t, x, y) - \text{задані обмежені неперервні функції};$$

$$u(t, x, y, z) = \{u_1(t, x, y, z), u_2(t, x, y, z), \dots, u_{n+1}(t, x, y, z)\} - \text{шукана функція.}$$

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j^2 \equiv 0$ рівняння (1) є класичними тривимірними неоднорідними хвильовими рівняннями (рівняннями коливань, рівняннями Даламбера) для ортотропного просторового середовища;

2) у випадку $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k – модулі Юнга, $k = \overline{1, n}$, умови спряження (6) збігаються з умовами ідеального механічного контакту.

Отже, у зазначених випадках розглянута задача є математичною моделлю вимушених коливань процесів у напівобмеженому багат шаровому просторовому середовищі $\Omega_3 = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega_2; z \in I_n^+\}$.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Припустимо, що розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [10, 11].

До задачі (1)–(6) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0; a]$ щодо змінної x [10]:

$$Z_{xm} [g(x)] = \int_0^a g(x) \omega_m(x) dx \equiv g_m, \tag{7}$$

$$Z_{xm}^{-1} [g_m] = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \frac{\omega_m(x)}{\|\omega_m\|} \equiv g(x), \tag{8}$$

$$Z_{xm} \left[\frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\delta_m^2 g_m + \omega_m(0) \left(-\frac{dg}{dx} + p_1 g \right) \Big|_{x=0} + \omega_m(a) \left(\frac{dg}{dx} + p_2 g \right) \Big|_{x=a}, \tag{9}$$

$$\text{де ядро перетворення } \omega_m(x) = \frac{\delta_m \cos(\delta_m x) + p_1 \sin(\delta_m x)}{\sqrt{\delta_m^2 + p_1^2}}, \quad \|\omega_m\|^2 = \int_0^a \omega_m^2(x) dx = \frac{a}{2} + \frac{(p_1 + p_2)(\delta_m^2 + p_1 p_2)}{2(\delta_m^2 + p_1^2)(\delta_m^2 + p_2^2)},$$

$\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\delta a) = \frac{\delta^2 - p_1 p_2}{\delta(p_1 + p_2)}, \text{ які утворюють дискретний спектр.}$$

Інтегральний оператор Z_{xm} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)–(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3 = \{(t, y, z); t > 0; y \in (0; b); z \in I_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial t^2} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm} + (a_{xj}^2 \delta_m^2 + \chi_j^2) u_{jm} = F_{jm}(t, y, z) \tag{10}$$

з початковими умовами

$$u_{jm} \Big|_{t=0} = g_{jm}^1(y, z), \quad \frac{\partial u_{jm}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jm}^2(y, z), \quad z \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) u_{jm} \Big|_{y=0} = \omega_{jm}^1(t, z); \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) u_{jm} \Big|_{y=b} = \omega_{jm}^2(t, z), \tag{12}$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m} \Big|_{z=l_0} = g_{0m}(t, y); \quad \frac{\partial^k u_{jm}}{\partial z^k} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad k = 0, 1, \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1,m} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \tag{14}$$

$$\text{де } F_{jm}(t, y, z) = f_{jm}(t, y, z) + a_{xj}^2 \omega_m(0) \theta_j^1(t, y, z) + a_{xj}^2 \omega_m(a) \theta_j^2(t, y, z), \quad j = \overline{1, n+1}.$$

До задачі (10)–(14) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0; b]$ щодо змінної y [10]:

$$\Lambda_{yk} [g(y)] = \int_0^b g(y) v_k(y) dy \equiv g_k, \tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \quad (16)$$

$$\Lambda_{yk} \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0) \left(-\frac{dg}{dy} + h_1 g \right) \Big|_{y=0} + v_k(b) \left(\frac{dg}{dy} + h_2 g \right) \Big|_{y=b}, \quad (17)$$

де ядро перетворення $v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}}$, $\|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)}$,

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$
 які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)–(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3 = \{(t, z); t > 0; z \in I_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jmk}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 u_{jmk}}{\partial z^2} + (a_{xy}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) u_{jmk} = G_{jmk}(t, z) \quad (18)$$

з початковими умовами

$$u_{jmk} \Big|_{t=0} = g_{jmk}^1(z); \quad \frac{\partial u_{jmk}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jmk}^2(z), \quad z \in I_j, \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_{1mk} \Big|_{z=l_0} = g_{0mk}(t); \quad \frac{\partial^p u_{jmk}}{\partial z^p} \Big|_{z=+\infty} = 0, \quad p = 0, 1, \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^s \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^s \right) u_{smk} - \left(\alpha_{j2}^s \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^s \right) u_{s+1, mk} \right] \Big|_{z=l_s} = 0, \quad j = 1, 2, \quad s = \overline{1, n}, \quad (21)$$

де $G_{jmk}(t, z) = F_{jmk}(t, z) + a_{zj}^2 v_k(0) \omega_{jm}^1(t, z) + a_{zj}^2 v_k(b) \omega_{jm}^2(t, z)$, $j = \overline{1, n+1}$.

До задачі (18)–(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(l_0; +\infty)$ з n точками спряження щодо змінної z [11]:

$$F_{n,+}[g(z)] = \int_{l_0}^{+\infty} g(z) V(z, \beta) \sigma(z) dz \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (22)$$

$$F_{n,+}^{-1}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\beta) V(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \equiv g(z), \quad (23)$$

$$F_{n,+} \left[\sum_{j=1}^n a_{zj}^2 \theta(z - l_{j-1}) \theta(l_j - z) \frac{d^2 g}{dz^2} + a_{z, n+1}^2 \theta(z - l_n) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(z, l_0) \times \\ \times \left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0 \right) \Big|_{z=l_0} - \sum_{j=1}^{n+1} \kappa_j^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz. \quad (24)$$

У формулах (22)–(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \beta) = \sum_{k=1}^n V_k(z, \beta) \theta(z - l_{k-1}) \theta(l_k - z) + V_{n+1}(z, \beta) \theta(z - l_n), \quad \sigma(z) = \sum_{k=1}^n \sigma_k \theta(z - l_{k-1}) \theta(l_k - z) + \sigma_{n+1} \theta(z - l_n),$$

$$\Omega_n(\beta) = \frac{\beta}{b_{n+1}(\beta) \omega_n(\beta)}, \quad V_m(z, \beta) = \prod_{j=m}^n c_{2j} a_{z, j+1}^{-1} b_{j+1}(\beta) G_m(z, \beta), \quad m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \beta) = \omega_{n2}(\beta) \cos\left(\frac{b_{n+1} z}{a_{z, n+1}}\right) - \omega_{n1}(\beta) \sin\left(\frac{b_{n+1} z}{a_{z, n+1}}\right); \quad \sigma_k = \prod_{j=k}^n \frac{c_{1j} \cdot a_{z, n+1}}{c_{2j} \cdot a_{zj}^2}; \quad \sigma_n = \frac{c_{1n} \cdot a_{z, n+1}}{c_{2n} \cdot a_{2n}}; \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{z, n+1}};$$

$$G_k(z, \beta) = \omega_{k-1, 2}(\beta) \cos\left(\frac{b_k z}{a_{zk}}\right) - \omega_{k-1, 1}(\beta) \sin\left(\frac{b_k z}{a_{zk}}\right); \quad k = \overline{1, n}; \quad b_j(\beta) = (\beta^2 + k_j^2)^{1/2}; \quad j = \overline{1, n+1};$$

$$\omega_n(\beta) = \omega_{n1}^2(\beta) + \omega_{n2}^2(\beta); \quad \omega_{01}(q_1 l_0) = -v_{11}^{01}(q_1 l_0); \quad \omega_{02}(q_1 l_0) = -v_{11}^{02}(q_1 l_0);$$

$$\omega_{jm}(\beta) = \omega_{j-1, 2}(\beta) \Psi_{1m}^j(q_j l_j; q_{j+1} l_j) - \omega_{j-1, 1}(\beta) \Psi_{2m}^j(q_j l_j; q_{j+1} l_j);$$

$$\Psi_{jm}^k(q_k l_k; q_{k+1} l_k) = v_{11}^{kj}(q_k l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1} l_k) - v_{21}^{kj}(q_k l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1} l_k);$$

$$v_{ij}^{k1}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k \right) \cos(q_s z) \Big|_{z=l_m} = -\alpha_{ij}^k q_s \sin(q_s l_m) + \beta_{ij}^k \cos(q_s l_m); \quad v_{ij}^{k2}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k \right) \sin(q_s z) \Big|_{z=l_m} =$$

$$= \alpha_{ij}^k q_s \cos(q_s l_m) + \beta_{ij}^k \sin(q_s l_m); \quad m = 1, 2;$$

Запишемо диференціальні рівняння (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\delta_m, \gamma_k) \right) u_{1mk}(t, z) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\delta_m, \gamma_k) \right) u_{2mk}(t, z) \\ \dots \dots \dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\delta_m, \gamma_k) \right) u_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1mk}(t, z) \\ G_{2mk}(t, z) \\ \dots \dots \dots \\ G_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1mk}(t, z) \\ u_{2mk}(t, z) \\ \dots \dots \dots \\ u_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1mk}^1(z) \\ g_{2mk}^1(z) \\ \dots \dots \dots \\ g_{n+1,mk}^1(z) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_{1mk}(t, z) \\ u_{2mk}(t, z) \\ \dots \dots \dots \\ u_{n+1,mk}(t, z) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1mk}^2(z) \\ g_{2mk}^2(z) \\ \dots \dots \dots \\ g_{n+1,mk}^2(z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де $q_j^2(\delta_m, \gamma_k) = a_{xy}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2; \quad j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за формулою (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}[\dots] = \begin{bmatrix} \int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \beta) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \beta) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \beta) \sigma_{n+1} dz \end{bmatrix} \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26).

Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + q_j^2(\delta_m, \gamma_k) + k_j^2 \right) \tilde{u}_{jmk}(t, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{G}_{jmk}(t, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) g_{0mk}(t), \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jmk}(t, \beta) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^1(\beta); \quad \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jmk}(t, \beta) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^2(\beta), \quad (29)$$

де $\tilde{u}_{jmk}(t, \beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} u_{jmk}(t, z) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad \tilde{G}_{jmk}(t, \beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} G_{jmk}(t, \beta) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1};$

$$\tilde{g}_{jmk}^s(\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} g_{jmk}^s(t, \beta) V_j(z, \beta) \sigma_j dz; \quad j = \overline{1, n+1}; \quad s = 1, 2.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2 = q_1^2 - q_j^2, \quad j = \overline{1, n+1}$.

Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{mk}}{dt^2} + \Delta^2(\delta_m, \gamma_k, \beta) \tilde{u}_{mk} = \tilde{G}_{mk}(t, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) g_{0mk}(t), \quad (30)$$

$$\tilde{u}_{mk}(t, \beta) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{mk}^1(\beta), \quad \frac{d \tilde{u}_{mk}}{dt} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{mk}^2(\beta), \quad (31)$$

де

$$\tilde{u}_{mk}(t, \beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jmk}(t, \beta); \quad \Delta^2(\delta_m, \gamma_k, \beta) = \beta^2 + a_{x1}^2 \delta_m^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2; \quad \tilde{g}_{mk}^1(\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^1(\beta); \quad \tilde{g}_{mk}^2(\beta) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jmk}^2(\beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (30), (31) є функція

$$\tilde{u}_{mk}(t, \beta) = \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \tilde{g}_{mk}^2(\beta) + \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \tilde{g}_{mk}^1(\beta) + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)(t-\tau))}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \times$$

$$\times \left[\tilde{G}_{mk}(\tau, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \beta) g_{0mk}(\tau) \right] d\tau. \quad (32)$$

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}^{-1}[\dots] = \frac{2}{\pi} \text{colon} \left(\int_0^{+\infty} \dots V_1(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta, \int_0^{+\infty} \dots V_2(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta, \dots, \int_0^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta \right) \quad (33)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $[\tilde{u}_{mk}(t, \beta)]$, де функція $\tilde{u}_{mk}(t, \beta)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)–(21):

$$u_{jk}(t, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \tilde{g}_{mk}^2(\beta) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \tilde{g}_{mk}^1(\beta) \right] V_j(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta + \int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)(t-\tau))}{\Delta(\delta_m, \gamma_k, \beta)} \left[\tilde{G}_{mk}(\tau, \beta) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0; \beta) g_{0mk}(\tau) \right] V_j(z, \beta) \Omega_n(\beta) d\beta d\tau; \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (34)$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{jmk}(z)$, визначених формулами (34), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та Z_{xm}^{-1} , одержуємо функції

$$u_j(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^a \int_0^b \int_0^{l_k} E_{jk}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_0^{l_k} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) g_k^1(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_0^{l_k} E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) g_k^2(\xi, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\zeta + \int_0^t \int_0^a \int_0^b W_j(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) d\xi d\eta d\tau + a_{xy}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_0^{l_k} [W_{xyk}^1(t-\tau, x, y, \eta, z, \zeta) \theta_k^1(\tau, \eta, \zeta) + W_{xyk}^2(t-\tau, x, y, \eta, z, \zeta) \theta_k^2(\tau, \eta, \zeta)] \sigma_k d\eta d\zeta d\tau + a_{yz}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_0^{l_k} [W_{yzk}^1(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_k^1(\tau, \xi, \zeta) + W_{yzk}^2(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_k^2(\tau, \xi, \zeta)] \sigma_k d\xi d\zeta d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (35)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\delta_m, \gamma_r, \beta)t)}{\Delta(\delta_m, \gamma_r, \beta)} V_j(z, \beta) V_k(\zeta, \beta) \Omega_n(\beta) \frac{w_m(x) w_m(\xi) v_r(y) v_r(\eta)}{\|w_m\|^2 \|v_r\|^2} d\beta; \quad j, k = \overline{1, n+1},$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти $W_j(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$ аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти $W_{xyk}^1(t, x, y, \eta, z, \zeta) = E_{j1}(t, x, 0, y, \eta, z, \zeta)$ лівої абсцисної матриці Гріна, компоненти $W_{xyk}^2(t, x, y, \eta, z, \zeta) = E_{j1}(t, x, a, y, \eta, z, \zeta)$ правої абсцисної матриці Гріна, компоненти $W_{yzk}^1(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$ лівої ординатної матриці Гріна та компоненти $W_{yzk}^2(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{jk}(t, x, \xi, y, b, z, \zeta)$ правої ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_j(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_{xyk}^s(t, x, y, \eta, z, \zeta)$, $W_{yzk}^s(t, x, \xi, y, z, \zeta)$, ($s = 1, 2$) безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (5) та умови спряження (6) в сенсі теорії узагальнених функцій [16].

Єдиність розв'язку (35) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(6).

Методами з [2, 6] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані задачі, формули (35) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої гіперболічної крайової задачі.

Зауваження 1. У випадку $a_{xy}^2 = a_{yz}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 > 0$ формули (35) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(6) в ізотропному $(n+1)$ -шаровому напівобмеженому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри $p_j, h_k (j, k = 1, 2)$ дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач (1)–(6) у випадках задання на поверхнях $x = 0, x = a; y = 0, y = b$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 3. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z = l_0$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1$), 2-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h > 0$).

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_1(t, x, y, z)$, $g_j^1(x, y, z)$, $g_j^2(x, y, z)$, $\theta_j^1(t, y, z)$, $\theta_j^2(t, y, z)$, $\omega_j^1(t, x, z)$, $\omega_j^2(t, x, z)$, $g_0(t, x, y)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в напівобмеженому багатoshаровому просторовому середовищі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964.
2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Дейнека В. С., Сергиенко І. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
5. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992.
6. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2008.
7. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.
8. Конет І. М., Ленюк М. П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001.
9. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут, 2004.
10. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997.
12. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984.
13. Сергиенко І. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
15. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983.
16. Шиллов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965.

Стаття надійшла до редколегії 06.11.15

Громик А., канд. техн. наук, доц.

Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольск

Конет І., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СРЕДЫ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) построено точное аналитическое решение алгоритмического характера гиперболической краевой задачи математической физики для полуограниченной многослойной пространственной среды.

Gromyk A., Ph.D., Associate Professor

Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky

Konet I., Full Doctor, Professor

Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS FOR SEMIBOUNDED MULTILAYER HOMOGENEOUS SPATIAL ENVIRONMENT

By means of method of integral transforms in combination with the method of principal solutions (influence matrices and Green matrices) the exact solution of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in semibounded multilayer homogeneous spatial environment is constructed.

УДК 517.9

І. Романюк, асп.

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

e-mail: romanjuk.iv@gmail.com

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ДЛЯ ОДНІЄЇ МНОГОЗНАЧНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Методами теорії глобальних атракторів досліджено якісну поведінку однієї нескінченновимірної імпульсної динамічної системи без єдиності. Доведено існування глобального атрактора, встановлено його явний вигляд та властивість інваріантності.

Вступ. Автономна еволюційна система називається імпульсною (або розривною) динамічною системою (ДС), якщо її траєкторії зазнають імпульсного впливу в моменти досягнення ними деякої фіксованої гіперповерхні фазового простору [3]. Якісному дослідженню таких систем в скінченновимірному випадку присвячено роботи [2, 4, 6, 8]. Для нескінченновимірних дисипативних ДС однією з найбільш важливих задач якісної теорії є дослідження глобального атрактора [9]. Перенесення класичних результатів теорії глобальних атракторів на імпульсні ДС для різних класів задач здійснено в [1, 5]. В даній роботі, використовуючи методи роботи [7], існування та властивості глобального атрактора досліджено для одного класу нескінченновимірних імпульсних ДС без єдиності.

Побудова многозначної імпульсної динамічної системи. Нехай (X, ρ) – метричний простір, $P(X)$ ($\beta(X)$) – множина непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин X .

Означення 1. Многочисне відображення $G: R_+ \times X \rightarrow P(X)$ називається многочисною динамічною системою (МДС), якщо

- 1) $\forall x \in X \quad G(0, x) = x$;
- 2) $\forall x \in X \quad \forall t, s \geq 0 \quad G(t+s, x) \subseteq G(t, G(s, x))$.

Означення 2. Підмножина $A \subset X$ називається глобальним атрактором МДС G , якщо

- 1) A – компактна множина;
- 2) A – рівномірно притягуюча, тобто $\forall B \in \beta(X) \quad \text{dist}(G(t, B), A) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$;
- 3) A – мінімальна в класі замкнених множин, що задовольняють 2).

Наступний результат гарантує критерій існування глобального атрактора для дисипативної МДС.

Лема. [7] Нехай для МДС G виконується умова дисипативності:

$$\exists B_0 \in \beta(X) \quad \forall B \in \beta(X) \quad \exists T = T(B) > 0 \quad \forall t \geq T \quad G(t, B) \subset B_0. \quad (1)$$

Тоді є еквівалентними наступні умови:

- 1) МДС G має глобальний атрактор;
- 2) МДС G є асимптотично компактною, тобто

$$\forall t_n \rightarrow \infty \quad \forall B \in \beta(X) \quad \forall \xi_n \in G(t_n, B) \text{ послідовність } \{\xi_n\} \text{ є передкомпактною.} \quad (2)$$

Крім того, для глобального атрактора A справедлива формула:

$$A = \omega(B_0) := \bigcap_{t > 0} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} G(t, B)}. \quad (3)$$

У даній статті будемо розглядати МДС G , що породжується наступною імпульсною задачею.

Нехай в фазовому просторі X задана неперервна напівгрупа $V: R_+ \times X \rightarrow X$, траєкторії якої зазнають імпульсного многочисного збурення, що задається відображенням $I: M \rightarrow P(X)$ при зустрічі з замкненою множиною $M \subset X$. Будемо вважати траєкторії неперервними справа.

Тоді для коректного задання імпульсної траєкторії будемо вважати виконаними наступні умови:

$$M \cap I(M) = \emptyset, \quad (4)$$

$$\forall x \in M \quad \exists \tau = \tau(x) \quad \forall t \in (0, \tau) \quad V(t, x) \notin M. \quad (5)$$

Введемо позначення:

$$\forall x \in X \quad M^+(x) = \left(\bigcup_{t > 0} V(t, x) \right) \cap M.$$

Тоді, якщо $M^+(x) \neq \emptyset$, то існує момент часу $s = \phi(x) > 0$, такий що

$$\begin{cases} V(t, x) \notin M \quad \forall t \in (0, s); \\ V(s, x) \in M. \end{cases}$$

Імпульсна траєкторія $\varphi: R_+ \rightarrow X$, що стартує з точки $x \in X$, будується наступним чином.

Якщо $M^+(x) = \emptyset$, то $\varphi(t) = V(t, x) \quad \forall t \geq 0$.

Якщо $M^+(x) \neq \emptyset$, то для $s_0 = \phi(x) > 0$, $x_1 = V(s_0, x) \in M$ і довільного $x_1^+ \in Ix_1$ визначаємо φ на $[0, s_0]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t, x), & t \in [0, s_0]; \\ x_1^+, & t = s_0. \end{cases}$$

Якщо $M^+(x_1^+) = \emptyset$, то $\varphi(t) = V(t - s_0, x_1^+) \quad \forall t \geq s_0$.

Якщо $M^+(x_1^+) \neq \emptyset$, то для $s_1 = \phi(x_1^+) > 0$, $x_2 = V(s_1, x_1^+) \in M$ і довільного $x_2^+ \in Ix_2$ визначаємо φ на $[s_0, s_0 + s_1]$ за наступним правилом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - s_0, x_1^+), & t \in [s_0, s_0 + s_1]; \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1. \end{cases}$$

Міркуючи аналогічно, отримаємо імпульсну траєкторію зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{x_n^+\}_{n \geq 1} \subset X$ та відповідних їм моментів часу $\{s_n\}_{n \geq 0} \subset (0, +\infty)$.

Покладемо $t_0 := 0$, $t_{n+1} := \sum_{k=0}^n s_k$, $n \geq 0$.

Якщо φ має нескінченну кількість імпульсів, тоді $\forall n \geq 0 \quad \forall t \in [t_n, t_{n+1}]$ маємо формулу

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t - t_n, x_n^+), & t \in [t_n, t_{n+1}); \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}. \end{cases}$$

Через K_x позначимо множину всіх імпульсних траєкторій, що стартують з точки x .

Будемо вважати виконаною наступну умову:

$$\forall x \in X \text{ кожна траєкторія } \varphi \in K_x \text{ визначена на } [0, +\infty), \tag{5}$$

тобто для будь-якої імпульсної траєкторії кількість імпульсних точок або не більш як скінчена, або $\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty$.

Покладемо $\forall x \in X \quad \forall t \geq 0 \quad \tilde{V}(t, x) = \{\varphi(t) | \varphi \in K_x\}$.

Легко показати, що $\tilde{V} : R_+ \times X \rightarrow P(X)$ задовольняє умови означення 1, тобто є МДС, яку будемо називати імпульсною МДС.

Основний результат. Розглянемо компактне щільне вкладення трійки гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$. Позначимо $\|\cdot\|$ та (\cdot, \cdot) норму та скалярний добуток в H . Нехай $\|\cdot\|_V$ норма в V та $\exists \alpha > 0 \forall u \in V \|u\|^2 \leq \alpha \|u\|_V^2$.

Розглянемо лінійний неперервний самоспряжений оператор $A : V \rightarrow V^*$ такий, що $\exists \beta > 0 \forall u \in V \langle Au, u \rangle \geq \beta \|u\|_V^2$.

Нехай $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ – повна ортонормована в H система така, що

$$\forall i \geq 1 \quad A\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_i \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty.$$

Нехай неперервна напівгрупа $V : R_+ \times H \rightarrow H$ породжується задачею

$$\frac{dy}{dt} = -Ay, t > 0, \tag{7}$$

тобто для $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in H$

$$V(t, y_0) = y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t} \psi_i.$$

Будемо розглядати імпульсне збурення з такими параметрами:

для фіксованих $p \geq 1, \{\alpha_i\}_{i=1}^p \subset (0, +\infty), a > 0, \mu > 0$ імпульсна множина задається рівністю

$$M = \left\{ y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in H \mid \forall i = \overline{1, p} \quad c_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i = a \right\}. \tag{8}$$

Імпульсне відображення $I : M \rightarrow P(H)$ задається рівністю

$$\text{для } y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i \in M \quad Iy = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c'_i \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \psi_i \mid \forall i = \overline{1, p} \quad c'_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i c'_i = a(1+\mu) \right\}. \tag{9}$$

В [8] було доведено існування глобального атрактору для імпульсної динамічної системи в наступному однозначному випадку: $A = -\Delta, H = L^2(\Omega), p = 1, I : M \rightarrow L^2(\Omega), c'_i = (1+\mu)c_i$,

$$M = \left\{ y \in L^2(\Omega) \mid (y, \psi_1) = a \right\}, \quad Iy = (1+\mu)c_1 \psi_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i \psi_i.$$

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема. Для будь-яких $p \geq 1, \{\alpha_i\}_{i=1}^p \subset (0, +\infty), a > 0, \mu > 0$ задача (7)–(9) породжує многозначну імпульсну динамічну систему \tilde{V} , що задовольняє умови (1), (4)–(6) і має в просторі H глобальний атрактор A , для якого справедлива формула

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \tau} \psi_i \mid \tau \in [0, \bar{\tau}], c_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \tau} = a, \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i = a(1+\mu) \right\} \cup \{0\}. \tag{10}$$

Крім того, A задовольняє наступну властивість інваріантності:

$$\forall t \geq 0 \quad \tilde{V}(t, A \setminus M) = A \setminus M. \tag{11}$$

Доведення. Доведемо виконання умов (4)–(6).

Умова (4) випливає з означення множини M та відображення I . Перевіримо виконання умови (5). В силу (7) для $y(t) = V(t, y_0)$ маємо, що

$$(y(t), \psi_i) = e^{-\lambda_i t} (y_0, \psi_i). \tag{12}$$

Нехай $y_0 \in M$. Розглянемо функцію

$$g(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{-\lambda_i t} (y_0, \psi_i).$$

Так як $g(0) = a$ і $\forall i = \overline{1, p} \quad \alpha_i > 0 \quad (y_0, \psi_i) \geq 0$, то

$$g'(0) = -\sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i (y_0, \psi_i) \leq -\lambda_1 a.$$

Отже, для деякого $\tau_0 = \tau_0(y_0) > 0$ отримаємо, що $\forall t \in (0, \tau_0) g(t) < a - \frac{a\lambda_1}{2}t$. Звідси випливає виконання умови (5). Перевіримо умову (6). Якщо траєкторія не зазнає імпульсних збурень, то (6) виконується. В іншому випадку розглянемо $y_0 \in I(M)$. Оскільки

$$g'(t) = -\sum_{i=1}^p \lambda_i \alpha_i e^{-\lambda_i t} (y_0, \psi_i) < 0,$$

то $\exists s_0 = s_0(y_0) > 0: \forall t \in (0, s_0), V(t, y_0) \notin M, V(s_0, y_0) \in M$.

Тоді

$$a = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} (y_0, \psi_i) \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i e^{-\lambda_1 s_0} \|y_0\|.$$

Отже,

$$s_0 \leq \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{\|y_0\| \cdot \sum_{i=1}^p \alpha_i}{a}. \quad (13)$$

З іншого боку

$$a = \sum_{i=1}^p \alpha_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} (y_0, \psi_i) \geq a(1+\mu) \cdot e^{-\lambda_p s_0}.$$

Отже,

$$s_0 \geq \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu).$$

Після стрибка для $y_1^+ \in I(V(s_0, y_0))$ повторюємо попередні міркування і для s_1 одержуємо вказану оцінку і т.д. Одержимо нескінчену кількість імпульсних моментів $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, причому

$$\forall k \geq 0 \quad s_k \geq \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu), \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^k s_j = t_k \geq \frac{k}{\lambda_p} \ln(1+\mu) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отже, \tilde{V} задовольняє (6). Доведемо існування глобального атратора. Для цього необхідно довести виконання умов дисипативності (1) та асимптотичної компактності (2).

Нехай $\|y_0\| \leq R$. Якщо траєкторія, що стартує з точки y_0 , не зазнає імпульсних збурень, то за час $\tau \leq \frac{1}{\lambda_1} \ln R$ во-

на опиняється в одиничній кулі. Інакше в силу (13) за час $s_0 \leq \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{R \cdot \sum_{i=1}^p \alpha_i}{a}$ фазова точка досягає поверхні M і опиняється в точці $y_1^+ \in I(V(s_0, y_0))$. Отже потрібно довести, що

$$\exists R_0 > 0 \quad \forall R > 0 \quad \exists T = T(R) > 0 \quad \forall y_0 \in I(M) \quad \|y_0\| \leq R \quad \forall y \in K_{y_0} \quad \forall t \geq T \quad \|y(t)\| \leq R_0.$$

З попередніх міркувань $y(\cdot)$ має стрибки в моменти часу $\{s_0, s_0 + s_1, \dots\}$ з імпульсними точками $\{y_j^+\}_{j=1}^{\infty}$ і

$\forall j \geq 0 \quad s_j \geq \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu)$. Нехай $y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i = \sum_{i=1}^p c_i \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \psi_i$. Тоді

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^2 \leq \|y_0\|^2, \quad (15)$$

$$y_1 = V(s_0, y_0) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} \psi_i = \sum_{i=1}^p c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0} \psi_i,$$

$$\|y_1\|^2 \leq e^{-2\lambda_1 s_0} \sum_{i=1}^p c_i^2 + e^{-2\lambda_{p+1} s_0} \|y_0\|^2.$$

Покладемо $\delta = \min_{1 \leq i \leq p} \{\alpha_i\}$, тоді $\sum_{i=1}^p c_i^2 \leq p \frac{a^2}{\delta^2}$. Так як $c_i' \leq \frac{a(1+\mu)}{\delta}$, то $\sum_{i=1}^p (c_i')^2 \leq p \frac{a^2(1+\mu)^2}{\delta^2}$.

Звідси $\|y_1^+\|^2 = \sum_{i=1}^p (c_i')^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty} (c_i \cdot e^{-\lambda_i s_0})^2 \leq p \frac{a^2(1+\mu)^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1} s_0} \cdot \|y_0\|^2,$

$$\|y_2\|^2 = \sum_{i=1}^p \left(c'_i \cdot e^{-\lambda_i s_1} \right)^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty} \left(c_i \cdot e^{-\lambda_i (s_0+s_1)} \right)^2 \leq e^{-2\lambda_1 s_1} \cdot p \frac{a^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1} (s_0+s_1)} \cdot \|y_0\|^2,$$

$$\|y_2^+\|^2 = \sum_{i=1}^p (c'_i)^2 + \sum_{i=p+1}^{\infty} \left(c_i \cdot e^{-\lambda_i (s_0+s_1)} \right)^2 \leq p \frac{a^2 (1+\mu)^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1} (s_0+s_1)} \cdot \|y_0\|^2,$$

Після k кроків отримуємо

$$\|y_{k+1}\|^2 \leq p \frac{a^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1} \sum_{j=0}^k s_j} \cdot \|y_0\|^2, \tag{16}$$

$$\|y_{k+1}^+\|^2 \leq p \frac{a^2 (1+\mu)^2}{\delta^2} + e^{-2\lambda_{p+1} \sum_{j=0}^k s_j} \cdot \|y_0\|^2. \tag{17}$$

Таким чином, використовуючи (14), з (16), (17) отримуємо, що

$$\exists T = T(R) \quad \forall t \geq T \quad \|\tilde{V}(t, y_0)\|^2 \leq p \frac{a^2 (1+\mu)^2}{\delta^2} + \|y_0\|^2 (1+\mu)^{\frac{-2\lambda_{p+1}(k+1)}{\lambda_p}},$$

а отже, виконується умова дисипативності.

Нехай $\left\{ y_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(n)} \psi_i \right\}$ – довільна обмежена послідовність початкових даних. Якщо відповідні траєкторії не перетинають M , то для довільного $t_n \rightarrow \infty$:

$$\tilde{V}(t_n, y_0^{(n)}) = V(t_n, y_0^{(n)}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, будемо розглядати випадок, коли є перетин з M та $\|y_0^{(n)}\| \leq R$.

Тоді

$$\forall i \geq 0 \quad s_i^{(n)} \geq \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu),$$

$$y_1^{(n)+} = \sum_{i=1}^p c'_i{}^{(n)} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^{(n)} \cdot e^{-\lambda_i s_i^{(n)}} \psi_i.$$

Для $t_n \rightarrow \infty \exists k(n) \geq 1, k(n) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$: $\sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)} \leq t_n < \sum_{j=0}^{k(n)+1} s_j^{(n)}$.

Тоді

$$y_{k(n)+1}^{(n)+} = \sum_{i=1}^p c'_i{}^{(n)} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^{(n)} \cdot e^{-\lambda_i \sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)}} \psi_i. \tag{18}$$

Так як $k(n) \rightarrow \infty, 0 \leq c_i^{(n)'} \leq \frac{a(1+\mu)}{\delta}$, то з формули (18) по підпослідовності

$$\eta_n = \sum_{i=1}^p c'_i{}^{(n)} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} c_i^{(n)} \cdot e^{-\lambda_i \sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)}} \psi_i \rightarrow \eta = \sum_{i=1}^p c'_i \psi_i, \quad n \rightarrow \infty$$

де $\sum_{i=1}^p \alpha_i c'_i = a(1+\mu)$. Крім того, оскільки $\tau_n = t_n - \sum_{j=0}^{k(n)} s_j^{(n)} \in \left[0, \frac{1}{\lambda_p} \ln(1+\mu) \right]$, то по підпослідовності $\tau_n \rightarrow \tau \in [0, \bar{\tau}]$,

$n \rightarrow \infty$, де $\bar{\tau}$ визначається з рівності $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a$. Отже, для $\xi_n = \tilde{V}(t_n, y_0^{(n)})$ по підпослідовності

$$\xi_n = V(\tau_n, \eta_n) \rightarrow V(\tau, \eta) = \sum_{i=1}^p e^{-\lambda_i \tau} c'_i \psi_i,$$

що і доводить асимптотичну компактність, а отже, існування глобального атрактора. Крім того, використовуючи формулу (3), отримуємо, що глобальний атрактор складається з граничних точок всіх послідовностей вигляду $\tilde{V}(t_n, y_0^{(n)})$, де $\{y_0^{(n)}\} \subset B_0, t_n \rightarrow \infty$. Отже,

$$A = \bigcup_{\substack{\tau \in [0, \bar{\tau}], \\ c_i \geq 0}} \left\{ \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \tau} \psi_i \right\} \cup \{0\}, \quad \text{де } \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a, \quad \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i = a(1+\mu).$$

При цьому, якщо $c_i \geq 0$ такі, що $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i = a(1+\mu)$, то рівність $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a$ момент $\bar{\tau} > 0$ визначається одно-

значно, для функції $f(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i t} : f(0) = a(1+\mu), f'(t) < 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Доведемо виконання властивості інваріантності (11). Нехай $y_0 \in A \setminus M$. Тоді $y_0 = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \tau} \psi_i$, $\tau \in [0, \bar{\tau})$. Нехай s_0 – момент потрапляння траєкторії, що стартує з y_0 , на множину M . Оскільки $V(s_0, y_0) \in M$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \tau} e^{-\lambda_i s_0} = a$, а $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a$, то $\tau + s_0 = \bar{\tau}$, отже $s_0 = \bar{\tau} - \tau$. Тоді $\forall t \in [0, s_0)$

$$\tilde{V}(t, y_0) = V(t, y_0) = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \tau} e^{-\lambda_i t} \psi_i \in A \setminus M,$$

$$\tilde{V}(s_0, y_0) = \left\{ \sum_{i=1}^p c'_i \psi_i, c'_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \alpha_i c'_i = a(1 + \mu) \right\} \in A \setminus M.$$

Повторюючи попередні міркування на $[s_0, s_0 + s_1)$, $[s_0 + s_1, s_0 + s_1 + s_2)$ і т.д., одержуємо, що $\forall t \geq 0 \tilde{V}(t, A \setminus M) \subset A \setminus M$.

Тепер нехай $t > 0$ – довільне і $\xi \in A \setminus M$. Тоді $\xi = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \tau} \psi_i$, $\tau \in [0, \bar{\tau})$, причому $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i = a(1 + \mu)$ та $\sum_{i=1}^p \alpha_i c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} = a$. Якщо $t \in [0, \tau]$, то для $y_0 = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i (\tau-t)} \psi_i \in A \setminus M$ маємо

$$\tilde{V}(t, y_0) = V(t, y_0) = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i (\tau-t)} e^{-\lambda_i t} \psi_i = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \tau} \psi_i = \xi.$$

Отже,

$$\xi \in \tilde{V}(t, y_0) \subset \tilde{V}(t, A \setminus M).$$

Далі, якщо $t > \tau$, то будемо виходити з рівності $t = t - \tau + \tau$ і по кожному $t > \tau$ вибрати $y_0 \in A \setminus M$ так, щоб $\tilde{V}(t - \tau, y_0) \in I(M)$, вибираючи при цьому весь час одні і ті ж імпульсні точки $\sum_{i=1}^p c_i \psi_i$, де c_i – з визначення ξ . На-

приклад, для $t \in [\tau, \tau + \bar{\tau}]$ покладемо $y_0 = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i (\bar{\tau} - (t - \tau))} \psi_i \in A \setminus M$.

Тоді $V(t - \tau, y_0) = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i (\bar{\tau} - (t - \tau))} e^{-\lambda_i (t - \tau)} \psi_i = \sum_{i=1}^p c_i e^{-\lambda_i \bar{\tau}} \psi_i \in M$. Оскільки для $y_1^+ = \sum_{i=1}^p c_i \psi_i \in IM$ $V(\tau, y_1^+) = \xi$, то

$$\xi \in \tilde{V}(\tau, y_1^+) \subset \tilde{V}(\tau, \tilde{V}(t - \tau, y_0)) = \tilde{V}(t, y_0) \subset \tilde{V}(t, A \setminus M),$$

що й потрібно було довести. **Теорему доведено.**

Висновки. Розглянуто якісну поведінку однієї нескінченновимірної динамічної системи без єдиності. Знайдено явну формулу глобального аттрактору цієї динамічної системи та на основі одержаної формули, доведено виконання властивості інваріантності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Перестюк М. О., Капустян О. В. Існування глобальних аттракторів для імпульсних динамічних систем // Доповіді НАН України. – 2015. – № 12. – С. 13–17
2. Рожко В. Ф. Устойчивость по Ляпунову в разрывных динамических системах // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 6. – С. 1005–1012.
3. Самойленко А. М., Перестюк М. О. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К., 1987.
4. Bonotto E. M. Flows of characteristic $0+$ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol.332. – P. 81–96.
5. Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R. Global attractors for impulsive dynamical systems // J. Diff. Eqn. – 2015. – Vol. 259, № 7. – P. 2602–2625.
6. Kaul S. K. Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems // J. Appl. Stoch. Anal. – 1994. – Vol.7, № 4. – P. 509–523.
7. Perestyuk M. O., Kapustyan O. V. Long-time behaviour of evolution inclusion with non-dumped impulsive effects // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2012. – Vol.56. – P. 89–113.
8. Ciesielski K. On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol.52. – P. 81–91.
9. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics // New York: Springer. – 1988.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.16

Романюк І., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ДЛЯ ОДНОЇ МНОГОЗНАЧНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ ДИНАМІЧЕСЬКОЇ СИСТЕМИ

В роботі методами теорії глобальних аттракторів досліджується якісне поведіння однієї нескінченновимірної імпульсної динамічної системи без єдиності. Доказано існування глобального аттрактора, встановлено його явний вигляд та властивість інваріантності.

Romaniuk I., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv

GLOBAL ATTRACTOR FOR ONE MULTIVALUED IMPULSIVE DYNAMICAL SYSTEM

In this paper, using the theory of global attractors was studied the qualitative behavior of one infinite-dimensional impulsive dynamical system without uniqueness. Was proved existence of the global attractor, found his explicit form and invariance condition.

УДК 517.9

М. Яременко, канд. фіз.-мат. наук
 Міжнародний математичний центр НАН України
 e-mail: math.kiev@gmail.com

КВАЗІЛІНІЙНІ ПАРАБОЛІЧНІ СИСТЕМИ З СИНГУЛЯРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено квазілінійні параболічні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними у всьому евклідовому просторі, встановлено нові більш слабкі умови існування розв'язку таких систем в певному класі (результати нові у випадку лінійних систем та квазілінійного рівняння $N = 1$). Встановлено апріорні оцінки розв'язків квазілінійної системи, розглянуто обмеженість узагальнених розв'язків та неперервність за Гельдером, доведена теорема про існування розв'язку.

Вступ. Стаття присвячена дослідженню умов існування розв'язку квазілінійних параболічних системи диференціальних рівнянь з вимірними коефіцієнтами, тобто встановленню обмежень на нелінійність за яких система буде мати розв'язок, і дослідженню властивостей такого розв'язку в певному класі функцій [5, 7]. Перші результати щодо оцінки фундаментальних розв'язків параболічних рівнянь були отримані математиком Джоном Нешом в 1958 році і Ен. Джоржі, які розв'язали 19-ту проблему Гільберта і одержали апріорні оцінки фундаментальних розв'язків лінійного параболічного рівняння з вимірною матрицею за досить загальних умов. Це дозволило сформулювати відповідні теореми про існування та гладкість розв'язків рівняння, при цьому доведення було проведено лише в найпростіших випадках. Продовжуючи дослідження еволюційних рівнянь Ю. Мозер [7] довів нерівність Гарнака у випадку слабких додатних розв'язків, які були в подальшому розвинені Д. Г. Аронсоном і Дж. Серрином для квазілінійних рівнянь із застосуванням інтегрального принципу максимуму.

Подальший розвиток теорії лінійних і квазілінійних еліптичних диференціальних рівнянь з частинними похідними пов'язаний з працями О. А. Ладженської, Н. Н. Уральцевої, В. А. Солоннікова та Д. Гільберга, Н. Трудінгера [3, 6, 7]. Робота останніх двох авторів цікава тим, що в ній розвиваються методи теорії форм та операторів, але одержані результати суттєво не покращують класичні. На сучасному етапі розвитку теорії квазілінійних диференціальних систем пов'язаний з розвитком методів функціонального аналізу та застосуванням слабких граничних переходів, при цьому основна проблема полягає в одержанні певних апріорних оцінок, які потім застосовуються для доведення збіжності апроксимуючої послідовності розв'язків. З сучасних праць можна відзначити П. Солін (2013), Т. Рубісек (2013), І. Долезел, А. М. Вазваз, І. М. Стейна та інші.

1. Постановка задачі. Розглянемо в усьому евклідовому просторі R^l параболічну систему вигляду:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^k + \lambda u^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} u^k \right) + b^k(t, x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) = f^k(t, x), \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

і початкові умови – значення елемента, що шукається в нулі $u^k(0, x) = (u^1_0, \dots, u^N_0)$, де невідомою є вектор-функція $u^k(t, x) = (u^1, \dots, u^N)$, $\lambda > 0$ – дійсне число і $f(t, x) = (f^1, \dots, f^N)$ – деяка задана вектор-функція. $b(t, x, u, \nabla u) = b^k(t, x, \bar{u}, \nabla \bar{u})$ – вектор-функція довжини N чотирьох змінних: скаляра, вектора розмірності l , вектора розмірності N , матриці розмірності $l \times N$.

Вимірна матриця $a_{ij}(t, x, u)$ розмірності $l \times l$ задовольняє умову еліптичності: якщо $\exists v: 0 < v < \infty$ і виконується наступна нерівність $vI \leq a(t, x, u)$, для майже всіх $t \in [t, T]$, $x \in R^l$, тобто

$$v \sum_{i=1}^l \xi_i^2 \leq \sum_{ij=1, \dots, l} a_{ij}(t, x, u) \xi_i \xi_j \quad \forall \xi \in R^l. \quad (2)$$

Узагальненим (слабким) розв'язком в $W_1^p(R^l, d^l x)$ (під розв'язком завжди, коли не вказано інше, розуміємо узагальнений або слабкий розв'язок) будемо називати елемент $u(t, x)$ який майже для всіх $t \in [0, T]$ задовольняє інтегральну тотожність:

$$\langle u(\tau), v(\tau) \rangle \Big|_0^t + \int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \right) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1, \dots, l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, v \rangle d\tau = \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau, \quad (3)$$

для будь-якого елемента $v \in W_{1,0}^q(R^l, d^l x)$.

Крім слабого існують і інші поняття розв'язку, наприклад, власним розв'язком системи (1) називається функція $u(t, x)$, якщо ця функція тотожно задовольняє систему рівнянь (1).

Основний об'єкт дослідження – існування розв'язку параболічних систем, тобто встановлення належності узагальненого розв'язку певному функціональному простору за умов, що коефіцієнти рівняння належать до певних функціональних класів і просторів.

2. Умови на функції, в системі (1). Нехай матриця $a_{ij}(t, x, u)$ розмірності $l \times l$ є вимірною і задовольняє умову еліптичності, тобто $\exists v: 0 < v < \infty$ і виконується наступна нерівність $vI \leq a(t, x, u)$, для майже всіх $t \in [t, T]$, $x \in R^l$. Для порівняння результатів даної роботи наведемо умови, за яких раніше встановлено теореми про існування розв'язку систем типу (1), а саме:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x, u^k, \frac{\partial}{\partial x_j} u^k) \right) + a^k(t, x, u^k, \nabla u^k) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1a)$$

Систему (1a) розглядали за умов:

$$a_{ij}(t, x, u^k, p) p_j \geq v(u) p^2 - \varphi_0(t, x), \quad |a_{ij}(t, x, u^k, p)| \leq \mu(u) |p| - \varphi_1(t, x), \quad |a_i(t, x, u^k, p)| \leq \mu_1(u) p^2 - \varphi_2(t, x),$$

де $v(u)$, $\mu_1(u)$, $\mu_2(u)$ – додатні монотонні неперервні функції, функції $\varphi_0(t, x)$, $\varphi_1(t, x)$, $\varphi_2(t, x)$ – невід’ємні зі скінченними нормами $\|\varphi_0, \varphi_2\|_{q,r,Q}$, $\|\varphi_1\|_{2q,2r,Q}$, отже всі теореми про властивості розв’язків систем типу (1a) формулювалися в термінах p, q просторів Лебега, Соболева, навіть у випадку обмеженої області.

Розглянемо умови за яких досліджується параболічна системи (1). Нехай

1. $b(t, x, y, z)$ є вимірною векторною функцією своїх аргументів і $b \in L^1_{loc}$;

2. вектор-функція $b(t, x, y, z)$ майже скрізь задовольняє нерівності майже для всіх $t \in [0, T]$:

$$|b(t, x, u, \nabla u)| \leq \mu_1(t, x) |\nabla u| + \mu_2(t, x) |u| + \mu_3(t, x). \quad (4)$$

Введемо клас функцій для майже всіх $t \in [0, T]$:

$$PK_\beta(A) = \left\{ f \in L^1_{loc}(R \times R^l, d^l x) : \left| \langle h f h \rangle \right| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2 \right\}, \text{ де } \beta > 0, \quad c(\beta) \in R^1.$$

В умові (4) функції $\mu_1^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_1^2 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$, $\left| \langle h \mu_1^2 h \rangle \right| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$, $\mu_2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_2 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$, $\left| \langle h \mu_2 h \rangle \right| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$; функція $\mu_3 \in L^p(R^l)$. Всі рівності розуміються для майже всіх $t \in [0, T]$.

3. приріст вектор-функції $b(t, x, y, z)$ майже скрізь задовольняє умову майже для всіх $t \in [0, T]$ (вектор-функції $b(t, x, y, z)$ майже скрізь є неперервною по y, z):

$$|b(t, x, u, \nabla u) - b(t, x, v, \nabla v)| \leq \mu_4(t, x) |\nabla(u - v)| + \mu_5(t, x) |u - v|, \quad (5)$$

де $\mu_4^2 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_4^2 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ і $\left| \langle h \mu_4^2 h \rangle \right| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$; $\mu_5 \in PK_\beta(A)$, тобто $\mu_5 \in L^1_{loc}(R^l, d^l x)$ і $\left| \langle h \mu_5 h \rangle \right| \leq \beta \langle \nabla h \circ a \circ \nabla h \rangle + c(\beta) \|h\|_2^2$.

Зауваження. Наведені вище умови на нелінійність є більш слабкі ніж ті, за яких раніше розглянуто дану систему в науковій літературі. Даній умові, наприклад, задовольняють функції типу потенціалу Кулона.

3. Енергетична нерівність. Для всіх $u(t, x) \in W^p_{1,0}$ розглянемо наступну інтегральну тотожність

$$\langle u(\tau), v(\tau) \rangle \Big|_0^t + \int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \right) d\tau + \int_0^t \left(\sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) d\tau + \int_0^t \langle b, v \rangle d\tau = \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau, \quad (6)$$

для всіх $t \in [0, T]$ і для довільної функції $v \in W^q_{1,0}$. Для $t \in [0, T]$ тотожність (6) запишемо у вигляді

$$\langle u(\tau), v(\tau) \rangle \Big|_0^t + \int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle \right) d\tau = \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau - \int_0^t \left(\lambda \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \right) d\tau - \int_0^t \langle b, v \rangle d\tau.$$

Покладемо елемент $v(\tau) = u|u|^{p-2}(\tau)$ і оцінімо

$$\begin{aligned} & \left\langle u(\tau), u|u|^{p-2}(\tau) \right\rangle \Big|_0^t + \lambda \int_0^t \left\langle u(\tau), u|u|^{p-2}(\tau) \right\rangle d\tau + \int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau (u|u|^{p-2}(\tau)) \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} (u|u|^{p-2}(\tau)) \right\rangle \right) d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t \left\langle f, (u|u|^{p-2}(\tau)) \right\rangle d\tau + \int_0^t \left(\mu_1(\tau, x) |\nabla u| + \mu_2(\tau, x) |u| + \mu_3(\tau, x), u|u|^{p-2}(\tau) \right) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Отже для системи (1) за умов (4) одержано нерівність (6). Далі оцінімо кожний доданок правої частини окремо:

$$\left\langle f, u|u|^{p-2}(\tau) \right\rangle \leq \|f\| \left\| u|u|^{p-2}(\tau) \right\| \leq \frac{\sigma^p}{p} \|f\|^p + \frac{1}{q\sigma^q} \left\| u|u|^{p-2}(\tau) \right\|^q,$$

$$\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} (u|u|^{p-2}(\tau)) \right\rangle = \frac{4(p-1)}{p^2} \left\langle \nabla \left(u|u|^{\frac{p-2}{2}}(\tau) \right) \circ a \circ \nabla \left(u|u|^{\frac{p-2}{2}}(\tau) \right) \right\rangle.$$

Використаємо позначення вектор-функції $w = u|u|^{\frac{p-2}{2}}(\tau)$, тоді відповідно матриця $\nabla w = \frac{p}{2} |u|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u$.

$$\left\langle \mu_1 |\nabla u|, |u|^{p-1} \right\rangle = \left\langle \mu_1 |u|^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u|, |u|^{\frac{p}{2}} \right\rangle \leq \frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle,$$

$$\langle \mu_2, w^2 \rangle \leq \beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2, \quad \langle \mu_3, |u|^{p-1} \rangle \leq \|\mu_3\| \| |u|^{p-1} \| = \|\mu_3\| \|u\|^{p-1},$$

де використано позначення $|u|^{p-1} = \left(\sum_{i=1, \dots, l} |u_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$.

Таким чином $|u| \|u\|^{p-1} = \left(\sum_{i=1, \dots, l} |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1, \dots, l} |u_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left(\sum_{i=1, \dots, l} |u_i|^p \right) = |u|^p$. Далі використаємо оцінки Гельдера та

Юнга $\frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle \leq \frac{2}{p} \|\mu_1 w\| \|\nabla w\|$, $\|\mu_1 w\| = \langle (\mu_1 w)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Отже

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} \langle \mu_1 |\nabla w|, |w| \rangle &\leq \frac{2}{p} \|\mu_1 w\| \|\nabla w\| = \frac{2}{p} \|\nabla w\| \langle (\mu_1 w)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{p} \|\nabla w\| \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Таким чином одержимо оцінку

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\langle \partial_\tau u(\tau), (u|u|^{p-2}(\tau)) \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1, \dots, l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} (u|u|^{p-2}(\tau)) \right\rangle \right) d\tau + \lambda \int_0^t \langle u(\tau), u|u|^{p-2}(\tau) \rangle d\tau + \int_0^t \left(\frac{\sigma^p}{p} \|f\|^p + \frac{1}{q\sigma^q} \|u|u|^{p-2}(\tau)\|^q \right) d\tau + \\ + \int_0^t \left(\frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right) (\tau) \right) d\tau + \int_0^t \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 + \frac{1}{\gamma^q q} \|w\|^2 + \frac{\gamma^p}{p} \|\mu_3\|^p \right) d\tau. \end{aligned}$$

Використаємо рівність $\langle u(\tau), u|u|^{p-2}(\tau) \rangle|_0^t = p \int_0^t \langle \partial_\tau u(\tau), (u|u|^{p-2}(\tau)) \rangle d\tau$, яка виконується для майже всіх дійсних значень t , маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \|w\|^2|_0^t + 4 \frac{p-1}{p^2} \int_0^t \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle d\tau + \lambda \int_0^t \|w\|^2 d\tau \leq \int_0^t \left(\frac{\sigma^p}{p} \|f\|^p + \frac{1}{q\sigma^q} \|u|u|^{p-2}(\tau)\|^q \right) d\tau + \\ + \int_0^t \left(\frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \|\nabla w\|^2 + \varepsilon^2 \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 \right) \right) (\tau) \right) d\tau + \int_0^t \left(\beta \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle + c(\beta) \|w\|^2 + \frac{1}{\gamma^q q} \|w\|^2 + \frac{\gamma^p}{p} \|\mu_3\|^p \right) d\tau. \end{aligned}$$

Оскільки $\|u|u|^{p-2}(\tau)\|^q = \langle |u|^{(p-1)q} \rangle = \|u\|^p = \|w\|^2$, то одержуємо нерівність

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \|w\|^2|_0^t + 4 \frac{p-1}{p^2} \int_0^t \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle d\tau + \lambda \int_0^t \|w\|^2 d\tau \leq \\ \leq \left(\frac{1}{q\sigma^q} + \frac{c(\beta)}{p} \varepsilon^2 + c(\beta) + \frac{1}{q\gamma^q} \right) \int_0^t \|w\|^2 d\tau + \left(\frac{1}{p} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \beta \varepsilon^2 \right) + \beta \right) \int_0^t \langle \nabla w \circ a \circ \nabla w \rangle d\tau + \int_0^t \frac{\sigma^p}{p} \|f\|^p d\tau + \int_0^t \frac{\gamma^p}{p} \|\mu_3\|^p d\tau. \end{aligned}$$

Нехай $p = 2$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u\|^2|_0^t + \int_0^t \langle \nabla u \circ a \circ \nabla u \rangle d\tau + \lambda \int_0^t \|u\|^2 d\tau \leq \left(\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{c(\beta)}{2} \varepsilon^2 + c(\beta) + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \\ + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \beta \varepsilon^2 \right) + \beta \right) \int_0^t \langle \nabla u \circ a \circ \nabla u \rangle d\tau + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} \|f\|^2 d\tau + \int_0^t \frac{\gamma^2}{2} \|\mu_3\|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Якщо покласти, що $\varepsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, то $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \beta \varepsilon^2 \right) + \beta = \sqrt{\beta} + \beta = \sqrt{\beta} (1 + \sqrt{\beta})$ і тоді

$$\frac{1}{2} \|u\|^2|_0^t + \int_0^t \langle \nabla u \circ a \circ \nabla u \rangle d\tau + \lambda \int_0^t \|u\|^2 d\tau \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + c(\beta) \right) \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \sqrt{\beta} (1 + \sqrt{\beta}) \int_0^t \langle \nabla u \circ a \circ \nabla u \rangle d\tau + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^t \|\mu_3\|^2 d\tau.$$

4. Обмеженість узагальнених розв'язків системи (1) та неперервність за Гельдером. Узагальнений розв'язок системи (1) – елемент $u(t, x) \in V_{1,0}^2$ назвемо обмеженим *vrai* $\max |u(t, x)| < \infty$ і цей елемент задовольняє інтегральну тотожність

$$\langle u(\tau), v(\tau) \rangle|_0^t + \int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \right) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1, \dots, l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, v \rangle d\tau = \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau \quad (6)$$

для всіх $t \in [0, T]$ і такої довільної функції $v \in W_{1,0}^2$, що *vrai* $\max |v(t, x)| < \infty$, $t \in [0, T]$.

Одержимо оцінку для всіх $t \in [0, T]$ і такої довільної функції $v \in W_{1,0}^2$, що $\forall t \max |v(t, x)| < \infty$, $t \in [0, T]$. Маємо

$$\begin{aligned} & \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \Big|_0^t + \int_0^t \left(-\langle u(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle \right) d\tau \leq \\ & \leq \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau - \int_0^t \langle \lambda \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \rangle d\tau + \int_0^t \langle \mu_1(\tau, x) |\nabla u| + \mu_2(\tau, x) |u| + \mu_3(\tau, x), v(\tau) \rangle d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Нехай $u(t, x)$ – узагальнений розв'язок, позначимо через $v_h(t, x)$ усереднення функції $v(t, x)$ за Стекловим за t згідно формули $v_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t v(\tau, x) d\tau$, $u_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\tau, x) d\tau$, тоді

$$-\int_0^T \langle u \partial_t v_h \rangle dt = -\int_0^T \langle u_h \partial_t v \rangle dt = \int_0^T \langle \partial_t u_h v \rangle dt,$$

оскільки

$$\int_0^T u(t) v_h(t) dt = \int_0^{T-h} u_h(t) v(t) dt,$$

де функція $v(t, x)$ тотожно рівна нулеві на інтервалах $t \leq 0$ і $T \geq t \geq T-h$.

Зауважимо, що порядок усереднення і диференціювання за x можна змінювати.

Перепишемо (6) у вигляді

$$\int_0^{T-h} (\langle \partial_\tau u_h, v \rangle + \lambda \langle u_h, v \rangle) d\tau + \int_0^{T-h} \left(\left\langle \left(\sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right)_h, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle + \langle b_h, v \rangle \right) d\tau = \int_0^{T-h} \langle f_h, v \rangle d\tau.$$

Остання рівність виконується для будь-якого елемента $v \in W_{1,0}^2$, тому покладемо $v = u_h$, інтегруємо за t і перейдемо до границі при $h \rightarrow 0$. Тоді отримаємо

$$\frac{1}{2} \langle u, u \rangle \Big|_0^t + \int_0^t \left(\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\rangle + \langle b, u \rangle \right) d\tau + \lambda \int_0^t \|u\|^2 d\tau = \int_0^t \langle f, u \rangle d\tau.$$

Оскільки для будь-якого елемента $v \in V_{1,0}^2$ інтеграли $\int_0^{T-h} \left(\left\langle \left(\sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right)_h, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle + \langle b_h, v \rangle \right) d\tau$, $\int_0^{T-h} \langle f_h, v \rangle d\tau$

при $h \rightarrow 0$ прямують до $\int_0^T \left(\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle + \langle b, v \rangle \right) d\tau$, $\int_0^T \langle f, v \rangle d\tau$, то ця властивість виконується і для $v = u$.

Використовуючи (6) і введені позначення для довільних $t_1, t_2 \in [h, T-h]$ можна записати наступну рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} (\langle \partial_\tau u_h, v \rangle + \lambda \langle u_h, v \rangle) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \left(\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v_h \right\rangle + \langle b, v_h \rangle \right) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \langle f_h, v \rangle d\tau,$$

якщо покласти $v = u_h^k$, де $u^k(t, x) = \max[u(t, x) - k, 0]$ і позначити множину точок простору R^l , $l > 2$, $P_k(t) = \{x \in R^l : u(t, x) > k, t \in [0, T]\}$, множину точок $P_k(t) = \{(t, x) \in [0, T] \times R^l : u(\tau, x) > k, \tau \in [0, T], l > 2\}$, звідси отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u^k(t)\|_{P_k(t)}^2 + \int_0^t \langle \nabla u^k \circ a \circ \nabla u^k \rangle_{P_k(t)} d\tau + \lambda \int_0^t \|u^k\|_{P_k(t)}^2 d\tau \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + c(\beta) \right) \int_0^t \|u\|_{P_k(t)}^2 d\tau + \\ & + \sqrt{\beta} (1 + \sqrt{\beta}) \int_0^t \langle \nabla u \circ a \circ \nabla u \rangle_{P_k(t)} d\tau + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^t \|f\|_{P_k(t)}^2 d\tau + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^t \|\mu_3\|_{P_k(t)}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, знаходимо $\int_0^t \|u\|_{P_k(t)}^2 d\tau \leq 2 \left(\|u-k\|_{P_k(t)}^2 + k^2 \int_0^t \text{mes } P_k(\tau) d\tau \right)$.

Лема 1. Нехай елемент $u \in V_0^2$ задовольняє наступну тотожність

$$\int_0^T (-\langle u, \partial_\tau \varphi \rangle + \lambda \langle u, \varphi \rangle) d\tau + \int_0^T \left(\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle + \langle b, \varphi \rangle \right) d\tau = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle d\tau, f \in L^2,$$

де φ – довільний елемент з простору $W_{1,0}^2([0, T] \times R^l)$. Тоді елемент $u \in V_0^2$ належить простору $V_{1,2}^2([0, T] \times R^l)$.

Простір $V_{1,2}^2([0, T] \times R^l)$ – підмножина банахового простору $W_{1,0}^2([0, T] \times R^l)$, яка складається з усіх елементів неперервних за t в нормі $L^2(R^l)$ з нормою $\|u\|_V = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\| + \|\nabla_t u\|_{[0, T] \times R^l}$, для яких виконується

$$\int_0^{T-h} \left\langle \frac{1}{h} |u(t+h, \cdot) - u(t, \cdot)|^2 \right\rangle dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

5. Існування розв'язку системи (1). Покажемо, що за вказаних вище умов та з одержаних апріорних оцінок впливає існування розв'язку параболічної системи.

Теорема 1. Якщо виконуються умови (4), (5) то у просторі $W_1^2([0, T] \times R^l)$ існує розв'язок системи (1).

Доведення. Доведення теореми існування розв'язку квазілінійної параболічної системи можна проводити за допомогою різних міркувань, по-перше за допомогою продовження за параметром з використанням принципу про нерухому точку (Лере-Шаудера); по-друге можна побудувати послідовність наближених розв'язків, довести існування границі і довести, що елемент до якого збігається послідовність наближених розв'язків, є розв'язком системи в заданому просторі. Нижче наведено схему доведення.

Побудуємо послідовність наближених розв'язків $\{u_m^k(t, x)\} = \{(u_m^1, \dots, u_m^N)\}$, $m = 1, 2, \dots$, системи

$$\frac{\partial}{\partial t} u^k + \lambda u^k - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(t, x, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x_j} u^k \right) + b^k(t, x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) = f^k, \quad k = 1, \dots, N$$

яку будемо шукати у вигляді $\{u_m^k(t, x)\} = \{(u_m^1, \dots, u_m^N)\} = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i^{mk}(t) \varphi_i^k(x) \right\}$, де елементи $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$, утворюють базис у векторному функціональному просторі $W_1^2(R^l)$ з властивостями: $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, $\max_{R^l} |\varphi_i, \varphi_{ix}| \leq c_i < \infty$.

Тут і далі індекс вектору k пропускається для спрощення позначень, скалярний добуток розуміється в наступному сенсі $(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{k=1}^N (\varphi_i^k, \varphi_j^k)$, де $(\varphi_i^k, \varphi_j^k)$ – скалярний добуток у скалярному функціональному просторі $W_1^2(R^l)$.

Функціональні коефіцієнти $c_n^{mk}(t) \equiv c_n^m(t)$ визначаються з системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою підстановки

$$\{u_m^k(t, x)\} = \{(u_m^1, \dots, u_m^N)\} = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i^{mk}(t) \varphi_i^k(x) \right\}$$

$$\left\langle \partial_t u_m^k, \varphi_n^k \right\rangle + \lambda \langle u_m^k, \varphi_n^k \rangle + \left\langle \sum_{i,j=1, \dots, l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m^k, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_n^k \right\rangle + \langle b, \varphi_n^k \rangle = \langle f, \varphi_n^k \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

і початкових умов $c_n^{mk}(0) = (u_m^k, \varphi_n^k(x))$, $n = 1, 2, \dots, m$.

Оскільки, для $t \in [0, T]$ з умов задачі випливає, що $|c_n^{mk}| \leq const$, $n = 1, 2, \dots, m$, покажемо, розв'язки рівномірно обмежені на $t \in [0, T]$, це випливає з обмеженості з низу еліптичної матриці і умов щодо нелінійного збурення, а саме помножимо n -не рівняння на c_n^{mk} і просумуємо по n від 1 до m , тоді отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2} \|u_m(t)\|^2 + \int_0^t \langle \nabla u_m \circ a \circ \nabla u_m \rangle d\tau + \lambda \int_0^t \|u_m\|^2 d\tau \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{c(\beta)}{2\sqrt{\beta}} + c(\beta) \right) \int_0^t \|u_m\|^2 d\tau + \sqrt{\beta} (1 + \sqrt{\beta}) \int_0^t \langle \nabla u_m \circ a \circ \nabla u_m \rangle d\tau + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \int_0^t \|\mu_3\|^2 d\tau.$$

Далі використовуємо відому лему.

Лема 2. Нехай абсолютно неперервна на $t \in [0, T]$ невід'ємна функція $\psi(t)$ така, що $\psi(0) = 0$ і майже для всіх $t \in [0, T]$ задовольняє наступну нерівність $\frac{d}{dt} \psi(t) \leq c(t)\psi(t) + F(t)$, де функції $c(t)$ і $F(t)$ невід'ємні інтегровані за

$$t \in [0, T]. \text{ Тоді } \psi(t) \leq \exp\left(\int_0^t c(\tau) d\tau\right) \int_0^t F(\tau) d\tau, \text{ виконується } \frac{d}{dt} \psi(t) \leq c(t) \exp\left(\int_0^t c(\tau) d\tau\right) \int_0^t F(\tau) d\tau + F(t).$$

Отже, за умови, що $u_0 \in L^2(R^l)$ виконується наступна апріорна оцінка $\max_{t \in [0, T]} \dots \sum_{n=1}^m (c_n^{mk}(t))^2 = \max_{t \in [0, T]} \|u_m\|^2 \leq const$.

Функції $c_n^{mk}(t) \equiv c_n^m(t) = (u_m^m(t, x), \varphi_n(x))$, $m, n = 1, 2, \dots$ є неперервними на $t \in [0, T]$. Дослідимо функції $c_n^m(t) = (u_m^m(t, x), \varphi_n(x))$, $m, n = 1, 2, \dots$ на абсолютну неперервність на $t \in [0, T]$. Для цього розглянемо інтеграли від n до $t + \Delta t$ і використаємо оцінки, що одержані вище, маємо

$$\begin{aligned} \langle |u_m(t + \Delta t, x) - u_m(t, x)|, \varphi_n \rangle &\leq \int_t^{t+\Delta t} \left(\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_n \right\rangle \right) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \langle f, \varphi_n \rangle d\tau + \lambda \int_t^{t+\Delta t} \langle u_m, \varphi_n \rangle d\tau + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \langle \mu_1(\tau, x) |\nabla u_m| + \mu_2(\tau, x) |u_m| + \mu_3(\tau, x), \varphi_n \rangle d\tau \leq \\ &\leq c_n \int_t^{t+\Delta t} \left(\left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m \right\rangle \right) d\tau - \lambda c_n \int_t^{t+\Delta t} \|u_m\| d\tau + c_n \text{const}(\beta) \int_t^{t+\Delta t} \|u_m\|^2 d\tau + c_n \text{const}(\beta) \int_t^{t+\Delta t} \langle \nabla u_m \circ a \circ \nabla u_m \rangle d\tau + \\ &+ c_n \text{const}(\beta) \left(\int_t^{t+\Delta t} \|f\|^2 d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \|\mu_3\|^2 d\tau \right) \leq \text{Const}(n, \varphi, l) \Delta t. \end{aligned}$$

Отже, сталі $\text{Const}(n, \varphi, l)$ залежать від n, φ, l , але не залежать від m за умови $m \geq n$, тобто виконується нерівність $|c_n^m(t + \Delta t) - c_n^m(t)| \leq \varepsilon(\Delta t) \|\varphi_n\| \rightarrow 0$.

Діагональним способом побудуємо підпослідовність $c_n^{m(i)}, i = 1, 2, \dots$, що збігається рівномірно на $[0, T]$ до деякої неперервної функції $c_n(t), n = 1, 2, \dots$ для кожного n . Послідовність функцій $c_n(t), n = 1, 2, \dots$ визначає функцію

$u(t, x)$ за правилом $u^k(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^k(t) \varphi_i^k(x)$, до якої послідовність функцій

$\{u_m^k(t, x)\} = \{(u_m^1, \dots, u_m^N)\} = \left\{ \sum_{i=1}^m c_i^{mk}(t) \varphi_i^k(x) \right\}$ збігається слабо в $L^2(R^l)$ і рівномірно відносно $t \in [0, T]$ тут ми ви-

бираємо збіжну підпослідовність і позначаємо її так само, як початкову послідовність. Покажемо слабку в $L^2(R^l)$

рівномірну по $t \in [0, T]$ збіжність послідовності $\{u_{m(i)}^k\}$. Для будь якого елементу $v \in L^2(R^l)$ виконується рівність

$$\left(u_{m(i)}^k - u^k, v^k \right) = \sum_{n=1}^s \left(v^k, \varphi_n^k \right) \left(u_{m(i)}^k - u^k, \varphi_n^k \right) + \left(u_{m(i)}^k - u^k, \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(v^k, \varphi_n^k \right) \varphi_n^k \right),$$

використовуємо оцінку

$$\left| \left(u_{m(i)}^k - u^k, \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(v^k, \varphi_n^k \right) \varphi_n^k \right) \right| \leq \text{const} \left(\sum_{n=s+1}^{\infty} \left(v^k, \varphi_n^k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай число s достатньо велике. Тоді для довільного наперед заданого додатного числа ε виконується нерів-

ність $\text{const} \left(\sum_{n=s+1}^{\infty} \left(v^k, \varphi_n^k \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Далі для всіх $t \in [0, T]$ при достатньо великому $m(i)$ перша сума також менша

$\frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $t \in [0, T]$, тобто доведено, що рівномірно для всіх $t \in [0, T]$ послідовність $\{u_{m(i)}\}$ збігається слабо в

$L^2(R^l)$ відносно $t \in [0, T]$. Існує підпослідовність послідовності $\{u_{m(i)}\}$, яка збігається до u слабо в $L^2(R^l)$ зі сво-

їми похідними $\{\partial_j u_{m(i)}\}$ – її знову позначимо як $\{u_m\}$, оскільки, із послідовності, яка збігається до функції u слабо

в $L^2(R^l)$, можна вибрати таку підпослідовність, що її похідні $\{\partial_j u_{m(i)}\}$ збігаються u слабо в $L^2(R^l)$ до похідних

функції u). Для граничної функції u зберігаються апріорні оцінки.

Покажемо, що гранична функція u є розв'язком задачі Коші для системи (1). Складемо інтегральні тотожності $t \in [0, T]$:

$$\langle u_m(\tau), v(\tau) \rangle \Big|_0^t + \int_0^t \left(-\langle u_m(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \lambda \langle u_m(\tau), v(\tau) \rangle \right) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, v \rangle d\tau = \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau,$$

остання рівність виконується для довільної функції $v^k = \sum_{i=1}^m d_i^{mk}(t) \varphi_i^k(x)$, де $d_i^{mk}(t)$ – довільні неперервні функції

змінного аргументу $t \in [0, T]$, узагальнені похідних яких обмежені на $[0, T]$. Множину таких функцій позначимо \wp_m

зауважимо, що функція u_m належить \wp_m . Множина \wp , яка утворюється об'єднанням за m множин \wp_m є щільною в W_1^2 (множини \wp_m в свою чергу є щільними в \wp).

Для довільної функції $v^k = \sum_{i=1}^m d_i^{mk}(t) \varphi_i^k(x)$, завдяки слабкій в $L^2(R^l)$ збіжності рівномірно по $t \in [0, T]$ послідо-

вності $\{u_m\}$ до функції u , послідовність $\{u_m\}$ збігається до функції u сильно в нормі $L^2([0, T] \times R^l)$. Звідси слідує

збіжність в $L^2(R^l)$ майже для всіх $t \in [0, T]$ і майже скрізь. Використовуючи оцінки, які одержано вище, переходимо до границі і одержуємо тотожність

$$\int_0^t (-\langle u(\tau), \partial_\tau v(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), v(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} v \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, v \rangle d\tau + \langle u(\tau), v(\tau) \rangle \Big|_0^t = \int_0^t \langle f, v \rangle d\tau, \quad (8)$$

яка виконується для довільного v елементу з множини \wp .

Далі використовуємо нерівність типу монотонності, тобто, для довільного φ елементу з множини \wp_m , необхідно довести наступну нерівність

$$\int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij}(\tau, x, u_m) \frac{\partial}{\partial x_j} u_m - a_{ij}(\tau, x, \varphi) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi, \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m(\tau) - \varphi(\tau)) \right\rangle d\tau + function(\|u_m - \varphi\|) \geq 0.$$

Дійсно, нехай покладемо $v = u_m - \varphi$, тоді маємо

$$\begin{aligned} & \langle u_m(\tau), u_m - \varphi \rangle \Big|_0^t + \int_0^t (-\langle u_m(\tau), \partial_\tau (u_m - \varphi)(\tau) \rangle + \lambda \langle u_m(\tau), (u_m - \varphi)(\tau) \rangle) d\tau + \\ & + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m, \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m - \varphi) \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, (u_m - \varphi) \rangle d\tau = \int_0^t \langle f, (u_m - \varphi) \rangle d\tau, \end{aligned}$$

а отже

$$\int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m, \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m - \varphi) \right\rangle d\tau =$$

$$= - \left(\langle u_m(\tau), u_m - \varphi \rangle \Big|_0^t + \int_0^t (-\langle u_m(\tau), \partial_\tau (u_m - \varphi)(\tau) \rangle + \lambda \langle u_m(\tau), (u_m - \varphi)(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \langle b, (u_m - \varphi) \rangle d\tau \right) + \int_0^t \langle f, (u_m - \varphi) \rangle d\tau,$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^t (-\langle u_m(\tau), \partial_\tau (u_m - \varphi)(\tau) \rangle + \lambda \langle u_m(\tau), (u_m - \varphi)(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u_m, \frac{\partial}{\partial x_i} (u_m - \varphi) \right\rangle d\tau + \\ & + \int_0^t \langle b, (u_m - \varphi) \rangle d\tau - \int_0^t \langle f, (u_m - \varphi) \rangle d\tau - \frac{1}{2} \|u_m\|^2 \Big|_{t=0}^{t=t} + (u_m, \varphi) \Big|_{t=0}^{t=t} + function(\|u_m - \varphi\|) \geq 0. \end{aligned}$$

В останній нерівності при фіксованій функції φ , майже для всіх $t \in [0, T]$ можна перейти до границі при $m \rightarrow \infty$.

Тоді отримаємо наступну нерівність

$$\begin{aligned} & \int_0^t (-\langle u(\tau), \partial_\tau (u - \varphi)(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), (u - \varphi)(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} (u - \varphi) \right\rangle d\tau + \\ & + \int_0^t \langle b, (u - \varphi) \rangle d\tau - \int_0^t \langle f, (u - \varphi) \rangle d\tau - \frac{1}{2} \|u\|^2 \Big|_{t=0}^{t=t} + (u, \varphi) \Big|_{t=0}^{t=t} + function(\|u - \varphi\|) \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Якщо в (8) прийняти $v = u$, то отримаємо

$$\frac{1}{2} \|u\|^2 \Big|_0^t + \lambda \int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} u \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, u \rangle d\tau = \int_0^t \langle f, u \rangle d\tau. \quad (10)$$

Використовуючи (8), (9), (10), для довільної функції $v \in \wp_m$, і довільного m , а отже і для довільного елемента

$v \in \wp = \bigcup_{m=1}^{\infty} \wp_m$, одержимо

$$\begin{aligned} & \int_0^t (-\langle u(\tau), \partial_\tau (u - v)(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), (u - v)(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} (u - v) \right\rangle d\tau + \\ & + \int_0^t \langle b, (u - v) \rangle d\tau - \int_0^t \langle f, u - v \rangle d\tau + function(\|u - v\|) \geq 0 \end{aligned}$$

Оскільки множина \wp , яка утворена об'єднанням по m множин \wp_m , є щільною в W_1^2 , то для довільного $\varepsilon > 0$ і довільної функції $\varphi \in \wp$ можна покласти $v = u - \varepsilon\varphi$. Тоді

$$\varepsilon \int_0^t (-\langle u(\tau), \partial_\tau \varphi(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), \varphi(\tau) \rangle) d\tau + \varepsilon \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle d\tau + \varepsilon \int_0^t \langle b, \varphi \rangle d\tau - \varepsilon \int_0^t \langle f, \varphi \rangle d\tau + function(\varepsilon\|\varphi\|) \geq 0.$$

перейдемо до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$. Маємо

$$\int_0^t (-\langle u(\tau), \partial_\tau \varphi(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), \varphi(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, \varphi \rangle d\tau - \int_0^t \langle f, \varphi \rangle d\tau \geq 0.$$

Оскільки множина φ , є щільною в W_1^2 , то з останньої нерівності випливає, що для довільного $\varphi \in W_1^2$ виконується рівність

$$\int_0^t (-\langle u(\tau), \partial_\tau \varphi(\tau) \rangle + \lambda \langle u(\tau), \varphi(\tau) \rangle) d\tau + \int_0^t \left\langle \sum_{i,j=1,\dots,l} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right\rangle d\tau + \int_0^t \langle b, \varphi \rangle d\tau - \int_0^t \langle f, \varphi \rangle d\tau = 0,$$

яка означає, що елемент $u \in W_1^2$ є розв'язком системи (1). Теорему 1 доведено.

Висновки. Одержано априорні оцінки розв'язків квазілінійної параболічної системи з сингулярними коефіцієнтами за умов форм обмеженості збурюючих коефіцієнтів. Встановлено умови неперервності за Гельдером розв'язків параболічної системи. Доведено існування розв'язку квазілінійної параболічної системи рівнянь (1) в усюму евклідовому просторі R^l за досить загальних умов щодо нелінійності, а саме за умов форм-обмеженості модуля вектор-функцій (4), (5), що входять в параболічну систему.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вишик М. Й. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М. Й. Вишик // Матем. сб. – 1951. – Т. 29(71), №3. – С. 615–676.
2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. Гильберг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гильберг, Н. Трудингер. – М.: Наука, 1989. – 463 с.
4. Дубинский Ю. А., Похожаев С. И. Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений / Ю. А. Дубинский, С. И. Похожаев // Матем. сб. – 1967. – Т. 72(114), №2. – С. 226–236.
5. Коваленко В. Ф., Кухарчук Н. М., Семенов Ю. А. К теории диффузионных процессов, порождаемых оператором $\frac{1}{2} \Delta + d \nabla$ / В. Ф. Коваленко, Н. М. Кухарчук, Ю. А. Семенов. – Деп. в УкрНИИТИ. – Киев, 1985. – №2380-Ук 85.
6. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1973. – 579 с.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 735 с.
8. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М: Мир, 1972. – 587 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.11.15

Яременко Н., канд. физ.-мат. наук
Международный математический центр НАН Украины

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЕФИЦИЕНТАМИ

Исследованы квазилинейные параболические системы дифференциальных уравнений в частных производных во всем евклидовом пространстве, установлены новые более слабые условия существования решения таких систем в определенном классе (результаты новые в случае линейных систем и квазилинейного уравнения $N = 1$). Установлено априорные оценки решений квазилинейной системы, рассмотрены ограниченность обобщенных решений и непрерывность по Гельдера, доказана теорема о существовании решения.

Yaremenko M., Ph.D
International Mathematical Centre of National Academy of Science of Ukraine

QUASI-LINEAR PARABOLIC SYSTEM WITH SINGULAR COEFFICIENTS

In this paper studied quasi-linear parabolic systems of differential equations in whole Euclidean space, we consider new conditions of existence of a weak solution of such systems in some class (this results are new results in the case of linear systems and quasi-linear equations $N = 1$). We obtained a priori estimates of solutions of quasi-linear systems we considered limited generalized solutions and Holder continuity of this solutions, we proved theorem on the existence of the solution.

УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук, Т. Шовкопляс, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
e-mail: from_Tatyana@ukr.net

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

В роботі наведені умови існування узагальненого розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних параболічного типу з випередженням.

1. Вступ. Початковим етапом дослідження стохастичних диференціальних рівнянь є вирішення проблеми існування розв'язків цих рівнянь. Дана проблема є актуальною і становить інтерес для широкого кола науковців. Дослідженню цієї проблематики присвячено багато праць різних авторів. Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними параболічного типу з невідповідною початковою умовою досліджувалися Б. Л. Розовським [3]. Задачі з початковою умовою, залежною від вінерівського процесу, потребують розширеного стохастичного інтегрування. Різні підходи дослідження питання існування розв'язку запропоновані, наприклад, в [6]. У даній статті доведено існування розв'язку методом Гальоркіна для початкової умови, яка має скінчений розклад Вінера-Іто.

2. Основні позначення. Нехай $t \in [0, T]$, $T < \infty$; λ – міра Лебега на відрізку $[0, T]$, $x \in R^d$, $|\cdot|$ – норма вектора з R^d . Через G будемо позначати обмежену область (відкриту зв'язну множину в R^d) з кусково-гладкою межею [5], ∂G – межа області G , λ_d – міра Лебега на G :

$$G_T = \{ (x, t) : x \in G, t \in (0, T) \}, \quad \partial G_T = \{ (x, t) : x \in \partial G, t \in [0, T] \}.$$

Надалі в цій статті по парам однакових індексів здійснюється підсумовування в межах від 1 до d . Позначимо, $u_{x_i} = du/dx_i, i = \overline{1, \dots, d}, u_s = du/ds, u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_d})$. Всі похідні розглядаються в узагальненому сенсі [2].

Через $(\cdot, \cdot)_0$ і $(\cdot, \cdot)_{0,0}$ позначено скалярні добутки в $L^2(G)$ і в $L^2(G_T)$ відповідно: $\|f\|_0 = (f, f)_0^{1/2}, W_1^2(G)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G)$, які мають похідну $f_x \in L^2(G)$; $(f, g)_1 = (f, g)_0 + (f_{x_k}, g_{x_k})_0, \|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2}$ – скалярний добуток і норма елементів в $W_1^2(G)$; $\overset{\circ}{W}_1^2(G) = W_{1,0}^2(G) \cap \{f : f|_{\partial G_T} = 0\}$.

$W_{1,0}^2(G_T)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G_T)$ з похідними $f_x \in L^2(G_T)$ і скалярним добутком $(f, g)_{1,0} = (f, g)_{0,0} + (f_{x_k}, g_{x_k})_{0,0}$; $\overset{\circ}{W}_{1,0}^2(G_T) = W_{1,0}^2(G_T) \cap \{f : f|_{\partial G_T} = 0\}$.

$W_{1,1}^2(G_T)$ – простір Соболева функцій $f \in L^2(G_T)$, що мають похідні $f_x \in L^2(G_T)$ та $f_s \in L^2(G_T)$, та скалярний добуток в $W_{1,1}^2(G_T)$: $(f, g)_{1,1} = (f_s, g_s)_{0,0} + (f, g)_{1,0}$; $\overset{\circ}{W}_{1,1}^2(G_T) = W_{1,1}^2(G_T) \cap \{f : f|_{\partial G_T} = 0\}$.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ – канонічний ймовірностний простір; $w(t), t \in [0, T]$ – вінерівський процес, заданий на ньому. Це означає, що $\Omega = C_0([0, T]), \mathfrak{F} = \overline{B}^P(\Omega), P$ – вінерівська міра на \mathfrak{F} , а $W(t, \omega) = \omega(t); \|F\|_2 = (E|F|^2)^{1/2}$.

Позначимо через $I_n(f_n), f_n \in L^2([0, T]^n)$ – кратний стохастичний інтеграл Вінера-Іто; $D_s F, s \in [0, T]$, – стохастична похідна випадкової величини $F = F(W); D_{s_1, s_2, \dots, s_k}^k F = D_{s_1} D_{s_2} \dots D_{s_k} F, k \in \mathbb{N}$.

$D^{k,p}, k \in \mathbb{N}, p > 1$, – банахів простір тих випадкових величин F , для яких існує і скінченна норма

$$\|F\|_{k,p} = \left(E(|F|^p) + \sum_{j=1}^k E \|D^j F\|_{L^2([0,T]^j)}^p \right)^{1/p}$$

$$L^{k,p} = (L^p([0,T]; D^{k,p}), k \in \mathbb{N}, p > 1; \|u\|_{L^{k,p}} = \left(\int_0^T \|u(s)\|_{k,p}^p ds \right)^{1/p}$$

Через $\overset{\circ}{SV}$ будемо позначати банахів простір, який складається з таких елементів $L^2\left([0,T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}_1^2(G)\right)$, що мають скінченну норму: $\|f\|_{\overset{\circ}{SV}} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \left(E \|f(\cdot, t, \cdot)\|_0^2 \right)^{1/2} + \left(E \int_{G_T} |f_x(x, s, \cdot)|^2 dx ds \right)^{1/2}$. Під $\int_0^t u(s) dw(s), 0 \leq t \leq T$ розуміємо невизначений розширений стохастичний інтеграл Скорохода [4, 7].

Нехай $a_{ij}(x, t), b_i(x, t), (x, t) \in G_T, i, j = \overline{1, d}$; $\phi(x, \omega), (x, \omega) \in G \times \Omega$ – задані функції. Надалі, з метою спрощення записів, аргументи функцій можуть опускаються, якщо це не призводить до неоднозначності, наприклад, $a_{ij} \equiv a_{ij}(x, t), b_i \equiv b_i(x, t), \phi \equiv \phi(x) \equiv \phi(x, \omega), u \equiv u(t) \equiv u(x, t) \equiv u(x, t, \omega), u_{x_i} \equiv u_{x_i}(x, t, \omega), i, j = \overline{1, d}, i$ т. п.

3. Формулювання задачі. Розглянемо рівняння

$$u(x, t) = \phi(x) + \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i} \right)_{x_j} ds + \int_0^t b_i u_{x_i} dw(s). \tag{1}$$

Означення. Узагальненим розв'язком першої крайової задачі для рівняння (1) в циліндрі G_T з умовами $u|_{t=0} = \phi, u|_{\partial G_T} = 0$, називається такий елемент $u \in \overset{\circ}{SV}$, що для всіх $\eta \in \overset{\circ}{W}_1^2(G)$ співвідношення

$$(u(t), \eta)_0 = (\phi, \eta)_0 - \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}, \eta_{x_j} \right)_0 ds + \int_0^t \left(b_i u_{x_i}, \eta \right)_0 dw(s) \tag{2}$$

виконується $(\lambda \times P)$ – майже напевно на $[0, T] \times \Omega$.

Знайдемо умови існування розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1).

4. Припущення. Сформулюємо припущення, які будуть використані у подальшому.

- A) $|a_{ij}(x, t)| + |b_i(x, t)| \leq K < \infty, (x, t) \in G_T$;
- B) $\delta |\xi|^2 \leq 2a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j - \left| \sum_{i=1}^d b_i(x, t) \xi_i \right|^2, \xi \in R^d, \delta > 0, (x, t) \in G_T$;
- C) $\phi(x, \omega) = \sum_{n=0}^M I_n(\phi_n(x, \cdot)), \phi_n \in L^2(G \times [0, T]^n) M < \infty$.

5. Основний результат. Узагальнений розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1) будемо шукати наближеним методом Гальоркіна. Нехай $\{\psi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ складає таку фундаментальну систему в $W_1^2(G)$, що $(\psi^k, \psi^l)_0 = \delta_{kl}$ [1, 2]. Покладемо $u^N(x, t, \omega) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t, \omega) \psi^k(x)$. Функції $c_k^N(t, \omega) = (u^N(t), \psi^k)_0$, $k = \overline{1, N}$, знаходяться з системи

$$(u^N(t), \psi^k)_0 = (\phi, \psi^k)_0 - \int_0^t (a_{ij} u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k)_0 ds + \int_0^t (b_i u_{x_i}^N, \psi^k)_0 dw(s). \quad (3)$$

Система (3) становить систему лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} dC_N(t) = A_N(t) C_N(t) dt + B_N(t) C_N(t) d\omega(t), \\ C_N(0) = \phi_N, \end{cases}$$

де $C_N(t) = (c_1^N(t), \dots, c_N^N(t))^T$ – вектор-стовпчик розв'язку; $A_N(t) = \{\tilde{a}_{kl}(t)\}_{k,l=1}^N$, $\tilde{a}_{kl}(t) = (a_{ij}(t) \psi_{x_i}^l \psi_{x_j}^k)_0$; $B_N(t) = \{\tilde{b}_{kl}(t)\}_{k,l=1}^N$, $\tilde{b}_{kl}(t) = (b_i(t) \psi_{x_i}^l, \psi^k)_0$ – матриці коефіцієнтів; $\phi_N = ((\phi, \psi^1)_0, \dots, (\phi, \psi^N)_0)^T$ – вектор-стовпчик початкових умов. Покажемо, що $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|u^N\|_{SV}^{\circ} < \infty$.

Лема. Нехай виконуються умови А), В) і С). Тоді існує така стала $L_M < \infty$, що

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E \|u^N(t)\|_0^2 + \int_0^T E \|u^N(s)\|_1^2 ds \leq L_M \left(E \|\phi\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(T)} E \|D_{s_1 \dots s_k}^k \phi\|_0^2 ds_1 \dots ds_k \right), \quad (4)$$

де за $\Delta_k(T) = \{(s_1, \dots, s_k) : 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k \leq T\}$ позначено симплекс розмірності k , $k = \overline{1, M}$.

Зауваження. Для $M = 0$ в правій частині (4) залишається лише перший доданок.

Доведення. Доведення леми проведемо індукцією за порядком хаосу M . При $M = 0$ початкова умова $\phi(x)$ не випадкова. Для цього випадку в [3] встановлено таку нерівність:

$$E \|u^N(t)\|_0^2 + \delta_1 \int_0^t E \|u^N(s)\|_1^2 ds \leq E \|\phi\|_0^2 + \delta_1 \int_0^t E \|u^N(s)\|_0^2 ds + \varepsilon^{-1} \int_0^t E \|D_s^- u^N(s)\|_0^2 ds.$$

Отже, для $M = 0$ твердження леми справедливе. Припустимо, що оцінка (4) справедлива у випадку, коли порядок хаосу у розкладі $\phi(x)$ не більший за M . Покажемо, що (4) має місце і для $M + 1$, тобто, для

$\phi(x) = \sum_{n=0}^{M+1} I_n(\phi_n(x, \cdot))$. З цією метою покажемо спочатку, що

$$\|\tilde{u}\|_{SV}^{\circ} < \infty. \quad (5)$$

Для цього застосуємо до процесу $\|u^N(t)\|_0^2 = |C_N(t)|^2 = \sum_{k=1}^N (c_k^N(t))^2$ формулу Іто [7]. Це можливо, оскільки

$C_N \in L^{k,p}$ для $k, N \in \mathbb{N}$, $p > 1$ [5, 8].

За формулою Іто маємо рівність:

$$\begin{aligned} \|u^N(t)\|_0^2 &= \|\phi^N\|_0^2 + \int_0^t \left\{ -2(a_{ij} u_{x_i}^N, u_{x_j}^N)_0 + \|b_i u_{x_i}^N\|_0^2 + 2(D_s^- u^N(s), \psi^k)_0 (b_i u_{x_i}^N, \psi^k)_0 \right\} ds + \\ &+ \int_0^t (u^N(s), \psi^k)_0 (b_i u_{x_i}^N, \psi^k)_0 dw(s), \end{aligned}$$

де $\phi^N = \sum_{k=1}^N (\phi, \psi^k)_0 \psi^k$, а $D_t^- u^N(t)$, $t \in [0, T]$, визначається так:

$$(D_t^- u^N(t), \psi^k)_0 = (D_t \phi, \psi^k)_0 - \int_0^t (a_{ij}(s) D_s u_{x_i}^N(s), \psi_{x_j}^k)_0 ds + \int_0^t (b_i(s) D_s u_{x_i}^N(s), \psi^k)_0 dw(s), t \in [0, T]. \quad (6)$$

Враховуючи те, що $2ab \leq \varepsilon^{-1} a^2 + \varepsilon b^2$ для $\varepsilon > 0$, будемо мати:

$$E \|u^N(t)\|_0^2 \leq E \|\phi\|_0^2 + E \int_0^t \left\{ -2(a_{ij} u_{x_i}^N, u_{x_j}^N)_0 + (1 + \varepsilon) \|b_i u_{x_i}^N\|_0^2 + \varepsilon^{-1} \|D_s^- u^N(s)\|_0^2 \right\} ds.$$

Звідси, за рахунок умови В), впливає існування таких $\varepsilon_0 > 0$ і $\delta_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ виконується нерівність:

$$E \|u^N(t)\|_0^2 \leq E \|\phi\|_0^2 + E \int_0^t \left\{ -2(a_{ij} u_{x_i}^N, u_{x_j}^N)_0 + (1 + \varepsilon) \|b_i u_{x_i}^N\|_0^2 + \varepsilon^{-1} \|D_s^- u^N(s)\|_0^2 \right\} ds. \quad (7)$$

Нерівність (5) випливає з нерівності (7) та леми Гронуолла-Беллмана [3]. Оцінимо $E \left\| D_t^- u_N(t) \right\|_0^2$. Для цього покладемо

$$\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k \right)_0 = \left(D_t u_N(\tau), \psi^k \right)_0 - I_0^\tau(t) \left(b_i(t) u_{x_i}^N(t), \psi^k \right)_0, \quad \tau \in [0, t]. \tag{8}$$

Враховуючи властивості інтегралу Скорохода [7], маємо:

$$\left(D_t u_N(\tau), \psi^k \right)_0 = \left(D_t \phi, \psi^k \right)_0 + I_0^\tau(t) \left(b_i(t) u_{x_i}^N(t), \psi^k \right)_0 - \int_0^\tau \left(a_{ij} D_t u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k \right)_0 ds + \int_0^\tau \left(b_i D_t u_{x_i}^N, \psi^k \right)_0 dw(s), \quad \tau \in [0, t],$$

для $\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k \right)_0, k \in \overline{1, N}, \tau \in [0, t]$, отримуємо рівняння

$$\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k \right)_0 = \left(D_t \phi, \psi^k \right)_0 - \int_0^\tau \left(a_{ij} D_t^- u_{x_i}^N(s), \psi_{x_j}^k \right)_0 ds + \int_0^\tau \left(b_i D_t^- u_{x_i}^N(s), \psi^k \right)_0 dw(s), \quad \tau \in [0, t]. \tag{9}$$

Враховуючи, що в силу (8) праві частини (6) та (9) при $t = \tau$ співпадають, ми прийшли до того, що $\left(D_t^- u_N(\tau), \psi^k \right)_0 = \left(D_t^- u_N(t), \psi^k \right)_0 \Big|_{t=\tau}$. Але форма рівняння (9) співпадає з (3), а порядок хаосу дорівнює M , оскільки $D_t^- u_N(\tau), \tau \in [0, t]$, справедлива оцінка (4), а відтак

$$\begin{aligned} E \left\| D_t^- u^N(t) \right\|_0^2 &\leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} E \left\| D_t^- u^N(\tau) \right\|_0^2 \leq L_M \left(E \left\| D_t \phi \right\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(t)} E \left\| D_{s_1 \dots s_k}^k D_t \phi \right\|_0^2 ds_1 \dots ds_k \right) = \\ &= L_M \left(E \left\| D_t \phi \right\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(t)} E \left\| D_{s_1 \dots s_k}^{k+1} D_t \phi \right\|_0^2 ds_1 \dots ds_k \right). \end{aligned} \tag{10}$$

З (5) і (10) випливає

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E \left\| u^N(t) \right\|_0^2 + \int_0^T E \left\| u^N(s) \right\|_1^2 ds &\leq K \left(E \left\| \phi \right\|_0^2 + \int_0^T L_M \left(E \left\| D_t \phi \right\|_0^2 + \sum_{k=1}^M \int_{\Delta_k(t)} E \left\| D_{s_1 \dots s_k}^{k+1} \phi \right\|_0^2 ds_1 \dots ds_k \right) dt \right) \leq \\ &\leq L_{M+1} \left(E \left\| \phi \right\|_0^2 + \sum_{k=1}^{M+1} \int_{\Delta_k(t)} E \left\| D_{s_1 \dots s_k}^k D_t \phi \right\|_0^2 ds_1 \dots ds_k \right). \end{aligned}$$

Лему доведено.

Теорема. Нехай виконуються умови А), В) і С). Тоді перша крайова задача для рівняння (1) має узагальнений розв'язок.

Доведення. З леми випливає, що елементи послідовності $\left\{ u^N \right\}_{N=1}^\infty$ належать простору $\overset{\circ}{S}V$ і при цьому

$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| u^N \right\|_{\overset{\circ}{S}V} < \infty$. Враховуючи властивості простору $\overset{\circ}{S}V$, з послідовності $\left\{ u^N \right\}_{N=1}^\infty$ можна виділити підпослідовність

$\left\{ u^{N_m} \right\}_{m=1}^\infty$, яка буде слабо збігатися в $L^2 \left([0, T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}_1^2(G) \right)$ до деякого граничного елемента $\tilde{u} \in L^2 \left([0, T] \times \Omega; \overset{\circ}{W}_1^2(G) \right)$

такого, що $\left\| \tilde{u} \right\|_{\overset{\circ}{S}V} < \infty$. Надалі, для спрощення записів, будемо цю послідовність також позначати $\left\{ u^N \right\}_{N=1}^\infty$.

Покажемо, що граничний елемент \tilde{u} буде задовольняти означенню узагальненого розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1). Обґрунтуємо граничний перехід в (3) $(P \times \lambda)$ – майже напевно.

Нехай $\alpha \in L^\infty([0, T]) \cap L^1([0, T])$; $f \in C_b^\infty(R^n)$, $h_k \in C_0^\infty([0, T])$, $k = \overline{1, n}, n \in N$,

$$F = f \left(\int_0^T h_1(s) dw(s), \dots, \int_0^T h_n(s) dw(s) \right).$$

Множина таких F щільна в $D^{1,2}$, а відтак і в $L^2(\Omega)$. Враховуючи властивість стохастичного інтегралу, з (3) випливає:

$$\begin{aligned} E \int_0^T \alpha(t) F \left(u^N(t), \psi^k \right)_0 dt &= E \int_0^T \alpha(t) F(\phi, \psi^k)_0 dt - E \int_0^T \alpha(t) F \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k \right)_0 ds dt + \\ &+ E \int_0^T \alpha(t) \int_0^t (D_s F) \left(b_i u_{x_i}^N, \psi^k \right)_0 ds dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Зі слабкої збіжності $\left\{ u^N \right\}_{N=1}^\infty$ до \tilde{u} випливає: $\lim_{N \rightarrow \infty} E \int_0^T \alpha(t) F \left(u^N(t), \psi^k \right)_0 dt = E \int_0^T \alpha(t) F(\tilde{u}(t), \psi^k)_0 dt$.

Оскільки $\sup_{0 \leq t \leq T} \left| E F \int_0^t (a_{ij} u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k)_0 ds dt \right| < M$ для деякого $M < \infty$ і $\lim_{N \rightarrow \infty} E \int_0^t (a_{ij} u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k)_0 ds = E \int_0^t (a_{ij} \tilde{u}_{x_i}, \psi_{x_j}^k)_0 ds$, то,

враховуючи теорему Лебега і Фубіні, маємо:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \int_0^T \alpha(t) F \int_0^t (a_{ij} u_{x_i}^N, \psi_{x_j}^k)_0 ds dt = E \int_0^T \alpha(t) F \int_0^t (a_{ij} \tilde{u}_{x_i}, \psi_{x_j}^k)_0 ds dt.$$

З аналогічних міркувань маємо: $\lim_{N \rightarrow \infty} E \int_0^T \alpha(t) \int_0^t (D_s F)(b_i u_{x_i}^N, \psi^k)_0 ds dt = E \int_0^T \alpha(t) \int_0^t (D_s F)(b_i \tilde{u}_{x_i}, \psi^k)_0 ds dt$. Остаточно

отримаємо:

$$E \int_0^T \alpha(t) F(\tilde{u}(t), \psi^k)_0 dt = E \int_0^T \alpha(t) F(\phi, \psi^k)_0 dt - E \int_0^T \alpha(t) F \int_0^t (a_{ij} \tilde{u}_{x_i}, \psi_{x_j}^k)_0 ds dt + E \int_0^T \alpha(t) \int_0^t (D_s F)(b_i \tilde{u}_{x_i}, \psi^k)_0 ds dt. \quad (12)$$

Покажемо тепер, що процес $\left\{ I_{[0,t]}(s)(b_i \tilde{u}_{x_i}(s), \psi^k)_0, 0 \leq s \leq T \right\}$ належить області визначення стохастичного інтегралу для майже всіх $t \in [0, T]$ по мірі Лебега. З (12) випливає, що майже для всіх $t \in [0, T]$ виконується рівність:

$$E \int_0^t (D_s F)(b_i \tilde{u}_{x_i}, \psi^k)_0 ds = EF(\tilde{u}(t), \psi^k)_0 - EF(\phi, \psi^k)_0 + EF \int_0^t (a_{ij} \tilde{u}_{x_i}, \psi_{x_j}^k)_0 ds. \quad (13)$$

Враховуючи нерівність Коші і те, що $\tilde{u} \in \overset{\circ}{S}V$, легко отримати оцінки:

$$\left| EF(\phi, \psi^k)_0 \right| \leq L \|F\|_2, \quad ess \sup_{0 \leq t \leq T} \left| EF(\tilde{u}(t), \psi^k)_0 \right| \leq L \|F\|_2, \quad ess \sup_{0 \leq t \leq T} \left| EF \int_0^t (a_{ij} \tilde{u}_{x_i}, \psi_{x_j}^k)_0 ds \right| \leq L \|F\|_2.$$

Звідси, враховуючи (13), маємо:

$$ess \sup_{0 \leq t \leq T} \left| E \int_0^t (D_s F)(b_i \tilde{u}_{x_i}, \psi^k)_0 ds \right| \leq L \|F\|_2. \quad (14)$$

Нерівність (14) означає, що майже для всіх $t \in [0, T]$ по мірі Лебега процес $\left\{ I_{[0,t]}(s)(b_i \tilde{u}_{x_i}(s), \psi^k)_0, 0 \leq s \leq T \right\}$ належить області визначення стохастичного інтегралу Скорохода, тому, звідси (12) можна записати у вигляді

$$E \int_0^T \alpha(t) F \left\{ (\tilde{u}(t), \psi^k)_0 - (\phi, \psi^k)_0 - \int_0^t (a_{ij} \tilde{u}_{x_i}, \psi_{x_j}^k)_0 ds + \int_0^t (b_i \tilde{u}_{x_i}, \psi^k)_0 dw(s) \right\} dt = 0. \quad (15)$$

Для закінчення доведення того, що \tilde{u} задовольняє означенню, залишається зробити два зауваження. По-перше, ψ^k можна замінити на $\eta^M = \sum_{k=1}^M c_k \psi^k$, $c_k = const$, $k = 1, \dots, M$. По-друге, кожний елемент $\eta \in \overset{\circ}{W}_1^2(G)$ може бути наближений в нормі $\|\cdot\|_1$ послідовністю виду $\left\{ \eta^M \right\}_{M=1}^{\infty}$. При цьому граничний перехід в співвідношенні (12) в результаті заміни ψ^k на η^M при $M \rightarrow \infty$, обґрунтовується цілком аналогічно тому, як це було зроблено в (11) при $N \rightarrow \infty$. В результаті будемо мати (15), де ψ^k буде замінено на довільний елемент $\eta \in \overset{\circ}{W}_1^2(G)$. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ. В статті доведено існування узагальненого розв'язку першої крайової задачі для стохастичного диференціального рівняння в частинних похідних параболічного типу. Початкова умова задачі становить випадковий елемент, який має скінченний розклад Вінера-Іто. Стохастичним інтегралом обрано інтеграл Скорохода. Доведення проводиться методом Гальоркіна. Основне припущення щодо коефіцієнтів рівняння складає сильна параболічність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.: Наука, 1967. - 736 с.
2. Никольский С. М.. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. - М.: Наука, 1969. - 480с.
3. Розовский . Б. Л.. Эволюционные стохастические системы. - М.: Наука, 1983. - 208с.
4. Скороход А. В. Об одном обобщении стохастического интеграла. - Теория вероятностей и применение, № 2, вып. 20, 1975. - С. 223-237.
5. Buckdahn R., Nualart D. Linear stochastic differential equations and Wick products // Probab. Theory Relat. Fields, 99, 501-526, 1994.
6. Mohammed S.-E. A., Zhang T. The substitution theorem for semilinear stochastic partial differential equations // Journal of Functional Analysis, 253:1, 2007. - P. 122-157.
7. Nualart D. The Malliavin calculus and related topics, Springer, 1995. - 266 p.
8. Watanabe S. Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin calculus. - Tata Institute of Fundamental Research, 1984. - 448 p.

Стаття надійшла до редколегії 05.11.15

Ильченко А., канд. физ.-мат. наук, Шовкопляс Т., канд. физ.-мат. наук, КНУ имени Тараса Шевченко

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТИЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

В данной работе сформулированы условия существования обобщенного решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с опережением.

Ilchenko A., PhD, Shovkoplyas T., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION

OF ANTICIPATING PARTIAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

In this paper, conditions for existence of the generalized solution of anticipating partial stochastic differential equations of parabolic type are offered.

УДК 517.5+517.13+511.72

С. Сербенюк, мол. наук. співр.,
Інститут математики НАН України
e-mail:simon6@ukr.net

НЕГА- \tilde{Q} -ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЯК УЗАГАЛЬНЕННЯ ДЕЯКИХ
ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

У даній статті побудовано нега- \tilde{Q} -представлення дійсних чисел, яке є узагальненням представлення чисел знакопозичеревними рядами Кантора. Для моделювання нега- \tilde{Q} -представлення використовується аналітичний та геометричний підходи. Недоліки та переваги кожного із способів досліджено, шукане представлення змодельовано.

1. Вступ. Нехай заданою є матриця $\tilde{Q} = \|q_{i,j}\|$, де $i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in N_\infty^0 = N \cup \{0, \infty\}$, $j = 1, 2, \dots$, для якої справедливою є наступна система властивостей:

$$\begin{cases} 1. 0 < q_{i,j} \in R; \\ 2. \forall j \in N : \sum_{i=0}^{m_j} q_{i,j} = 1; \\ 3. \forall (i_j), i_j \in N \cup \{0\} : \prod_{j=1}^{\infty} q_{i_j,j} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Лема 1 [1, с. 88]. Для будь-якого $x \in [0;1)$ існує послідовність $(i_k(x))$, $i_k(x) \in N_{m_k}^0 \equiv \{0, 1, \dots, m_k\}$, така, що

$$x = a_{i_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_{i_k(x),k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x),j} \right], \tag{2}$$

де

$$a_{i_k(x),k} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{i_k-1} q_{i,k}, \text{ якщо } i_k \neq 0; \\ 0, \text{ якщо } i_k = 0. \end{cases}$$

Означення 1. Подання числа $x \in [0;1)$ у вигляді розкладу (2) називають [1, с.89] \tilde{Q} -представленням (або \tilde{Q} -розкладом) числа $x \in [0;1)$ і позначають $x = \Delta_{i_1(x)i_2(x)\dots i_k(x)\dots}^{\tilde{Q}}$. Останній запис називають \tilde{Q} -зображенням числа x .

\tilde{Q} -представлення дійсних чисел, очевидно, є узагальненням представлення дійсних чисел знакододатними рядами Кантора [4, 10]

$$x = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^D \equiv \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} + \dots,$$

де (d_n) – фіксована послідовність натуральних чисел d_n , більших 1, (A_{d_n}) – послідовність алфавітів $A_{d_n} \equiv \{0, 1, \dots, d_n - 1\}$, $\varepsilon_n \in A_{d_n}$. Останні ряди, в свою чергу, є узагальненням класичного s -го представлення

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n}, \alpha_n \in A \equiv \{0, 1, \dots, s - 1\},$$

де $1 < s$ – фіксоване натуральне число. Взагалі кажучи, поняття про s -ві розклади дійсних чисел, де $1 < s$ – довільне фіксоване, було введено в [10] Rényi як частинний випадок f -зображення дійсних чисел, а саме: зображення чисел нескінченним ітеруванням додатної функції $f(x) = x/s$ при $0 \leq x \leq s$ та $f(x) = 1$ при $s < x$. Подібними до властивостей s -розкладів є властивості $(-s)$ -розкладів, які, здається, вперше [6] зустрічаються у роботі [8], де розглядається випадок фіксованої основи $-2 \geq -s \in Z$. Загалом, дослідженням властивостей s -і $(-s)$ -розкладів (з довільною фіксованою основою $(-s) < -1$) дійсних чисел займалося чимало математиків [1, 3, 4, 6–10]. Серед них: Ambrož P., Frougny Ch., Masáková Z., Pelantová E., Ito S., Sadahiro T., Rényi A., Solomyak B., Lai A. Ch. Деякі з їх робіт

(наприклад, [6, 9]) присвячені порівняльному аналізу властивостей цих розкладів. Чималу увагу було приділено вивченню арифметичних операцій на таких розкладах, їх операторів зсуву, властивостей множин спеціального виду, на s – чи $(-s)$ – розклади елементів яких накладалися певні умови, і т. д.

З метою побудови нових об'єктів теорій неперервних ніде недиференційовних функцій, сингулярних функцій, теорії ймовірностей та фрактального аналізу змодельюємо представлення, яке є узагальненням нега- s -го представлення

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{-s} = x \in \left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1} \right], \alpha_n \in A,$$

і представлення дійсних чисел знакопозадовим рядом Кантора (нега-D-представлення) [3, 11]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \equiv \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-D} = x \in \left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k-1}}; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \dots d_{2k}} \right], \varepsilon_n \in A_{d_n},$$

та дослідимо основні властивості як системи числення побудованого представлення.

У даній статті досліджуються наступні розклади дійсних чисел

$$-a_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n a_{i,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{i,j} \right] \quad (3)$$

та

$$\sum_{i=0}^{i_n-1} q_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \tilde{\delta}_{i,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{i,j} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{q}_{i,j} \right), \quad (4)$$

де

$$\tilde{q}_{i,n} = \begin{cases} q_{i,n}, & \text{якщо } n - \text{непарне}; \\ q_{m_n - i_n, n}, & \text{якщо } n - \text{парне}, \end{cases}, \quad \tilde{\delta}_{i,n} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i_n = 0 \text{ та } n - \text{непарне}; \\ \sum_{i=0}^{i_n-1} q_{i,n}, & \text{якщо } i_n \neq 0 \text{ та } n - \text{непарне}; \\ \sum_{i=m_n - i_n}^{m_n} q_{i,n}, & \text{якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$$

2. Дослідження ряду (3) як представлення дійсних чисел. Ряд (3) можна побудувати, використовуючи аналітичний підхід до побудови системи числення. Суть аналітичного підходу до побудови знакопозадового \tilde{Q} -представлення дійсних чисел полягає в тому, що якщо основою нега- s -го представлення є фіксоване число $(-s)$, де $1 < s \in \mathbb{N}$, та за основу представлення чисел знакопозадовим рядом Кантора приймається фіксована послідовність $(-d_n)$, де $1 < d_n \in \mathbb{N}$, то знакопозадове \tilde{Q} -представлення можна побудувати, прийнявши за основу системи числення (представлення дійсних чисел) фіксовану матрицю $(-1) \cdot \tilde{Q} = (-1) \cdot \|q_{i,j}\|$, $i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $j = 1, 2, \dots$, для елементів $|q_{i,j}|$ якої справедливою є система умов (1). Отже, розглянемо суму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^{i_n-1} (-q_{i,n}) \right) \prod_{j=1}^{n-1} (-q_{i,j}) \right] = -a_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n a_{i,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{i,j} \right].$$

Очевидно, що останній знакопозадовий ряд є абсолютно збіжним, причому його сума належить відрізьку $[t_0'; t_0'']$, де

$$t_0' = -a_{m_1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \tilde{a}_{m_n, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{m_j, j} \right] = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \tilde{q}_{m_j, j} \right],$$

$$t_0'' = \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^n \tilde{a}_{0, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{0, j} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \prod_{j=1}^n \tilde{q}_{0, j} \right], \quad \tilde{a}_{i,n} = \begin{cases} a_{i,n}, & \text{якщо } n - \text{непарне}; \\ a_{m_n - i_n, n}, & \text{якщо } n - \text{парне}. \end{cases}$$

$$t_0'' - t_0' = a_{m_1,1} + a_{m_2,2} q_{0,1} + a_{m_3,3} q_{m_1,1} q_{0,2} + a_{m_4,4} q_{0,1} q_{m_2,2} q_{0,3} + a_{m_5,5} q_{m_1,1} q_{0,2} q_{m_3,3} q_{0,4} + \dots$$

Факт представлення числа x у вигляді розкладу (3) позначатимемо $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}^{(-\tilde{Q})}$.

Очевидно, при $q_{i,j} = \frac{1}{s}$ для всіх $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, s-1}$, ряд (3) набуває виду нега- s -го представлення, а для випадку

$q_{i,j} = \frac{1}{d_j}$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, d_j-1}$, – знакопозадового ряду Кантора (нега-D-представлення).

Введемо допоміжне для подальшого дослідження поняття циліндричної множини.

Означення 2. Циліндричною множиною (або циліндром) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\tilde{Q})}$ рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ називається множина виду

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\tilde{Q})} \equiv \left\{ x : x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i_{n+1} i_{n+2} \dots i_{n+k}}^{(-\tilde{Q})}, x \in [t_0'; t_0''] \right\},$$

де c_1, c_2, \dots, c_n – фіксовані числа, $i_{n+k} \in N_{m_{n+k}}^0 \equiv \{0, 1, \dots, m_{n+k}\}, k = 1, 2, \dots$

Дослідимо, чи можна вважати ряд (3) системою числення та проведемо короткий порівняльний аналіз даного розкладу дійсних чисел і згаданих вище знакопочерезних представлень.

2.1. Основне метричне відношення. В нега- s -му, нега- D -представленнях для відповідних циліндрів $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-s}$, $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-D}$ рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$ для довільного $n \in N$ справедливими є наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-s} \right| &= \frac{1}{s^n} \hat{\phi}^n \left(\Delta_{(s-1)}^s \right) = \frac{1}{s^n} \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} - \inf_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} \right) = \\ &= \frac{1}{s^n} \left| \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} \right) - \hat{\phi}^n \left(\inf_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} \right) \right| = \frac{1}{s^n} \left| \hat{\phi}^n \left(\Delta_{(0[s-1])}^{-s} \right) - \hat{\phi}^n \left(\Delta_{([s-1]0)}^{-s} \right) \right|, \end{aligned}$$

де $\hat{\phi}$ – оператор зсуву цифр. Отже,

$$\left| \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} \right) - \hat{\phi}^n \left(\inf_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} \right) \right| = \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} - \inf_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} \right) = const = \sup_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s} - \inf_x \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{-s}.$$

Подібним чином

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-D} \right| &= \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_n} \hat{\phi}^n \left(\Delta_{[d_1-1][d_2-1] \dots [d_n-1]}^D \right) = \\ &= \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_n} \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} - \inf_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} \right) = \\ &= \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_n} \left| \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} \right) - \hat{\phi}^n \left(\inf_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_n} \left| \hat{\phi}^n \left(\Delta_{0[d_2-1]0[d_4-1] \dots 0[d_{2k}-1]}^{-D} \right) - \hat{\phi}^n \left(\Delta_{[d_1-1]0[d_3-1]0 \dots [d_{2k-1}-1]0}^{-D} \right) \right|, \end{aligned}$$

де $k = 1, 2, \dots, \hat{\phi}$ – оператор зсуву цифр відповідного представлення. Таким чином,

$$\hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} - \inf_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} \right) = \left| \hat{\phi}^n \left(\sup_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} \right) - \hat{\phi}^n \left(\inf_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} \right) \right| = const = \sup_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D} - \inf_x \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}^{-D}.$$

Розглянемо розклад (3). Позначатимемо символом $d(\cdot)$ діаметр множини. Розглянемо випадок, коли $n = 1$. В такому разі

$$\begin{aligned} d \left(\Delta_{c_1}^{(-\tilde{Q})} \right) &= \Delta_{c_1 m_2 0 m_4 \dots 0 m_{2k} \dots}^{(-\tilde{Q})} - \Delta_{c_1 0 m_3 0 m_5 \dots 0 m_{2k-1} \dots}^{(-\tilde{Q})} = q_{c_1,1} \left(a_{m_2,2} + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,k} \prod_{j=2}^{k-1} \tilde{q}_{0,j} \right] + \sum_{k=3}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_k,k} \prod_{j=2}^{k-1} \tilde{q}_{m_j,j} \right] \right) = \\ &= q_{c_1,1} \left(\frac{t_0'' - t_0' + a_{m_1,1}}{q_{0,1} q_{m_1,1}} \right) = \frac{q_{m_1,1} t_0'' - q_{0,1} t_0' - a_{m_1,1} q_{0,1}}{q_{0,1} q_{m_1,1}} q_{c_1,1} = q_{c_1,1} (t_0'' - t_0'), \end{aligned}$$

якщо справедливою є умова

$$t_0'' = \frac{q_{0,1} (1 - q_{m_1,1})}{q_{m_1,1} (1 - q_{0,1})} (1 + t_0').$$

Очевидно, остання умова справджується не у всіх випадках залежно від матриці \tilde{Q} . Наприклад, розглянемо випадок, коли для всіх натуральних значень n справедливо $m_n < \infty$ та для всіх $n > 1$ $q_{0,n} = const = q_0$, $q_{m,n} = const = q_m$, $q_0 \neq q_m$, $q_{0,1} = q_1$, $q_{m,1} = q_2$, $q_1 \neq q_2$. Тоді

$$\begin{aligned} t_0' &= \Delta_{m_1 0 m_3 0 m_5 \dots}^{(-\tilde{Q})} \equiv - \left(1 - q_2 + q_2 \sum_{k=1}^{\infty} \left((1 - q_m) q_0^k q_m^{k-1} \right) \right) = q_2 \left(1 - \frac{(1 - q_m) q_0}{1 - q_0 q_m} \right) - 1, \\ t_0'' &= \Delta_{0 m_2 0 m_4 0 m_6 \dots}^{(-\tilde{Q})} \equiv q_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - q_m) q_0^{k-1} q_m^{k-1} \right) = \frac{1 - q_m}{1 - q_0 q_m} q_1. \end{aligned}$$

Отож, $\frac{q_{0,1} (1 - q_{m_1,1})}{q_{m_1,1} (1 - q_{0,1})} (1 + t_0') = \frac{q_1 (1 - q_2)}{q_2 (1 - q_1)} q_2 \left(1 - \frac{(1 - q_m) q_0}{1 - q_0 q_m} \right) = \frac{q_1 (1 - q_2) (1 - q_0)}{(1 - q_1) (1 - q_0 q_m)} = t_0''$, якщо $\frac{1 - q_m}{1 - q_0} = \frac{1 - q_2}{1 - q_1}$.

Цілком очевидно, що останнє співвідношення справедливе не завжди. Тобто, метричне відношення

$$\frac{d\left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{(-\tilde{Q})}\right)}{d\left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}\right)},$$

де $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, при $k = 0$ циліндричною множиною вважатимемо відрізок $[t_0'; t_0'']$, залежно від матриці \tilde{Q} не завжди дорівнює $q_{c, k+1}$. В загальному випадку

$$\frac{d\left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}^{(-\tilde{Q})}\right)}{d\left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_k}\right)} = q_{c, k+1} \frac{a_{m_{k+2}, k+2} + \sum_{t=k+3}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_t, t} \prod_{r=k+2}^{t-1} \tilde{q}_{m_r, r} \right] + \sum_{t=k+3}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0, t} \prod_{r=k+2}^{t-1} \tilde{q}_{0, r} \right]}{a_{m_{k+1}, k+1} + \sum_{t=k+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_t, t} \prod_{r=k+1}^{t-1} \tilde{q}_{m_r, r} \right] + \sum_{t=k+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0, t} \prod_{r=k+1}^{t-1} \tilde{q}_{0, r} \right]}.$$

2.2. Представлення чисел, що мають два різних зображення. Лише числа із зліченної множини можуть мати два різних нега-D-зображення. Аналогічна властивість справедлива і для нега-s-го зображення. Зокрема,

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n}^{-s}([s-1]0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}^{-s}[\alpha_n - 1]([s-1]), \alpha_n \neq 0,$$

$$\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n}^{-D}[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]0[d_{n+5}-1] \dots = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{n-1}}^{-D}[\varepsilon_n - 1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1] \dots, \varepsilon_n \neq 0.$$

Для ряду (3) справедливим є наступне твердження.

Лема 2. Якщо $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \dots}^{(-\tilde{Q})} = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c_n - 1] 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \dots}^{(-\tilde{Q})}$, $c_n \neq 0$, тоді при парному n справедливою є наступна рівність

$$\frac{t_0'' - \sum_{k=2}^{n-2} \left[\tilde{a}_{0, k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{0, j} \right] - \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{0, j}}{t_0' + a_{m_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\tilde{a}_{m_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{m_j, j} \right]} = \frac{q_{c_n, n} \prod_{j=1}^n \tilde{q}_{0, j}}{q_{c_n-1, n} \prod_{j=1}^n \tilde{q}_{m_j, j}}$$

та

$$\frac{t_0'' - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\tilde{a}_{0, k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{0, j} \right]}{t_0' + a_{m_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-2} \left[\tilde{a}_{m_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{m_j, j} \right] + \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{m_j, j}} = \frac{q_{c_n-1, n} \prod_{j=1}^n \tilde{q}_{0, j}}{q_{c_n, n} \prod_{j=1}^n \tilde{q}_{m_j, j}}$$

при непарному n .

Доведення. Нехай $x_1 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \dots}^{(-\tilde{Q})}$, $x_2 = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c_n - 1] 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \dots}^{(-\tilde{Q})}$, $c_n \neq 0$. Якщо n - парне число, тоді

$$\begin{aligned} x_1 &= -a_{c_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[(-1)^k a_{c_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j, j} \right] + (-1)^n \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j, j} \right) \times \left(a_{c_n, n} - q_{c_n, n} \left(a_{m_{n+1}, n+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_{m_{n+2k-1}, n+2k-1} \prod_{j=n+1}^{n+2k-2} \tilde{q}_{m_j, j} \right] \right) \right) \\ &= -a_{c_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[(-1)^k a_{c_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j, j} \right] + \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j, j} \right) \times \left(a_{c_n, n} + q_{c_n, n} \left(t_0' + a_{m_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[\tilde{a}_{m_k, k} \prod_{j=n+1}^{k-1} \tilde{q}_{m_j, j} \right] \right) \prod_{j=1}^n (\tilde{q}_{m_j, j})^{-1} \right). \\ x_2 &= -a_{c_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[(-1)^k a_{c_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j, j} \right] + (-1)^n \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j, j} \right) \times \left(a_{c_n-1, n} + q_{c_n-1, n} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{m_{n+2k}, n+2k} \prod_{j=n+1}^{n+2k-1} \tilde{q}_{0, j} \right] \right) \\ &= -a_{c_1, 1} + \sum_{k=2}^{n-1} \left[(-1)^k a_{c_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j, j} \right] + \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j, j} \right) \times \left(a_{c_n-1, n} + q_{c_n-1, n} \left(t_0'' - \sum_{k=2}^n \left[\tilde{a}_{0, k} \prod_{j=n+1}^{k-1} \tilde{q}_{0, j} \right] \right) \prod_{j=1}^n (\tilde{q}_{0, j})^{-1} \right). \end{aligned}$$

З умови $x_1 = x_2$ й слідує перша рівність в умові леми.

Нехай n – непарне число. Тоді при умові, що $x_1 = x_2$ отримаємо

$$-q_{c_n-1, n} + q_{c_n, n} \left(t_0'' - \sum_{k=2}^{n-1} \left[\tilde{a}_{0, k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{0, j} \right] \right) \prod_{j=1}^n (\tilde{q}_{0, j})^{-1} = q_{c_n-1, n} \left(t_0' + a_{m_1, 1} + \sum_{k=2}^n \left[\tilde{a}_{m_k, k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{m_j, j} \right] \right) \prod_{j=1}^n (\tilde{q}_{m_j, j})^{-1},$$

звідки й слідує друга рівність в умові леми.

Додатково розглянемо ще деякі властивості циліндрів $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\tilde{Q})}$ рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$.

Лема 3. Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\tilde{Q})}$ є відрізком.

Доведення. Доведення проведемо для парного n . Нехай $x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\tilde{Q})}$. Тобто,

$$x = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^n \left[(-1)^k a_{c_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j} \right] + \left(\prod_{j=1}^n q_{c_j,j} \right) \left(-a_{i_{n+1},n+1} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \left[(-1)^l a_{i_l,l} \prod_{r=n+1}^{l-1} q_{i_r,r} \right] \right).$$

Звідси,

$$\begin{aligned} x' &= -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^n \left[(-1)^k a_{c_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j} \right] - \left(\prod_{j=1}^n q_{c_j,j} \right) \left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_{n+t},n+t} \prod_{r=n+1}^{n+t-1} \tilde{q}_{m_r,r} \right] \right) \leq \\ &\leq x \leq -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^n \left[(-1)^k a_{c_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j} \right] + \left(\prod_{j=1}^n q_{c_j,j} \right) \sum_{t=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,n+t} \prod_{r=n+1}^{n+t-1} \tilde{q}_{0,r} \right] = x''. \end{aligned}$$

Отже, $x \in [x'; x''] \supseteq \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\bar{Q})}$. Оскільки

$$\begin{aligned} x' &= -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^n \left[(-1)^k a_{c_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j} \right] + \left(\prod_{j=1}^n q_{c_j,j} \right) \inf \left\{ -a_{i_{n+1},n+1} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \left[(-1)^l a_{i_l,l} \prod_{r=n+1}^{l-1} q_{i_r,r} \right] \right\}, \\ x'' &= -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^n \left[(-1)^k a_{c_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j} \right] + \left(\prod_{j=1}^n q_{c_j,j} \right) \sup \left\{ -a_{i_{n+1},n+1} + \sum_{l=n+2}^{\infty} \left[(-1)^l a_{i_l,l} \prod_{r=n+1}^{l-1} q_{i_r,r} \right] \right\}, \end{aligned}$$

то x', x'', x належать $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\bar{Q})}$. Лему доведено.

2.3. Розташування циліндрів однакового рангу. Оскільки у згаданих вище нега-S-му та нега-D-представленнях циліндричні множини є відрізками, що розташовані "зліва направо" при парному n та "справа наліво", якщо n - непарне, то "щось подібне" мало б справджуватися і для рядів (3).

Розглянемо необхідні для подальшого дослідження розташування циліндрів $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{(-\bar{Q})}$ співвідношення.

Нехай n – деяке фіксоване натуральне число. Якщо циліндри $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})}$, $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})}$ перекриваються і розташовані:

- "зліва направо", тоді $\kappa_1 = \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} - \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} > 0$;
- "справа наліво", тоді $\kappa_2 = \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} - \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} > 0$.

Причому, у першому випадку $\kappa_1 < \kappa_2 = \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} \right| + \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} \right| - \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} \cap \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} \right| = W$.

У другому ж випадку $\kappa_2 < \kappa_1 = W$.

Якщо ж циліндри $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})}$, $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})}$ не перекриваються і розташовані:

- "зліва направо", тоді $\upsilon_1 = \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} - \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} = -\kappa_1 > 0$;
- "справа наліво", тоді $\upsilon_2 = \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} - \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} = -\kappa_2 > 0$.

Проте, в такому разі у першому випадку $\upsilon_1 > \upsilon_2 = V = \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} \right| - \left| \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} \right| = \varpi$, де ϖ – міра Лебега спільного суміжного з циліндрами $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})}$, $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})}$ інтервала. У другому випадку $V = \upsilon_1 < \upsilon_2$.

Перевіримо, які ж із наведених вище співвідношень є справедливими. Нехай n - парне. Розглянемо різницю

$$\begin{aligned} \kappa_1 &\equiv \sup \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} c}^{(-\bar{Q})} - \inf \Delta_{c_1 c_2 \dots c_{n-1} [c+1]}^{(-\bar{Q})} = \\ &= a_{c_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} + q_{c,n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} \right) \left(a_{0,n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{0,r} \right] \right) - \\ &- a_{c+1,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} + q_{c+1,n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} \right) \left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_t,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{m_r,r} \right] \right) = \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} \right) \left(q_{c+1,n} \left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_t,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{m_r,r} \right] \right) + q_{c,n} \left(-1 + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{0,r} \right] \right) \right). \end{aligned}$$

Позначивши $\omega_1 = a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_t,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{m_r,r} \right]$, $\omega_2 = \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{0,r} \right]$, отримаємо

$$\kappa_1 = (q_{c+1,n} \omega_1 - q_{c,n} + q_{c,n} \omega_2) q_{c_1,1} q_{c_2,2} \dots q_{c_{n-1},n-1}.$$

Таким чином, справедливими є подвійна нерівність $-q_{c,n} < \frac{\kappa_1}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\dots q_{c_{n-1},n-1}} \leq -q_{c,n} + \max\{q_{c,n}, q_{c+1,n}\}$

та умови

$$\kappa_1 < 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 < (1-\omega_2)q_{c,n},$$

$$\kappa_1 = 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 = (1-\omega_2)q_{c,n},$$

$$\kappa_1 > 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 > (1-\omega_2)q_{c,n}.$$

Крім того $\kappa_2 \equiv \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}[c+1]}^{(-\tilde{Q})} - \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}c}^{(-\tilde{Q})} = (q_{c,n} + q_{c+1,n}\omega_2 + q_{c,n}\omega_1) \prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} > 0,$

$$\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\dots q_{c_{n-1},n-1}} = (2-\omega_2)q_{c,n} + (q_{c,n} - q_{c+1,n})\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2 = (2-\omega_2)q_{c,n} - (\omega_1 - \omega_2)q_{c+1,n} + q_{c,n}\omega_1 > 0,$$

де $\omega_1 > \omega_2$.

Отже, у випадку парного n циліндри розташовані "зліва направо", але залежно від матриці \tilde{Q} суміжні циліндри $\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{(-\tilde{Q})}$ можуть або перекриватися, або не перетинатися, або перетинатися в одній точці.

Аналогічно, якщо n – непарне число, тоді

$$\begin{aligned} \kappa_2 \equiv \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}[c+1]}^{(-\tilde{Q})} - \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}c}^{(-\tilde{Q})} &= -q_{c,n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} + q_{c+1,n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} \right) \left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{0,r} \right] \right) \\ &+ q_{c,n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} \right) \left(\sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{m,r} \right] \right). \end{aligned}$$

Позначивши $\omega_1 = a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{0,r} \right], \omega_2 = \sum_{t=n+2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m,t} \prod_{r=n+1}^{t-1} \tilde{q}_{m,r} \right],$

отримаємо

$$\kappa_2 = (-q_{c,n} + q_{c+1,n}\omega_1 + q_{c,n}\omega_2) q_{c_1,1}q_{c_2,2}\dots q_{c_{n-1},n-1}.$$

Отже,

$$-q_{c,n} < \frac{\kappa_2}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\dots q_{c_{n-1},n-1}} \leq -q_{c,n} + \max\{q_{c,n}, q_{c+1,n}\},$$

причому $\kappa_2 < 0$, якщо $q_{c+1,n}\omega_1 < (1-\omega_2)q_{c,n}$, $\kappa_2 = 0$, якщо $q_{c+1,n}\omega_1 = (1-\omega_2)q_{c,n}$, $\kappa_2 > 0$, якщо $q_{c+1,n}\omega_1 > (1-\omega_2)q_{c,n}$.

Оскільки $\kappa_1 \equiv \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}c}^{(-\tilde{Q})} - \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_{n-1}[c+1]}^{(-\tilde{Q})} = (q_{c,n} + q_{c,n}\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2) \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} \right) > 0$

та

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\dots q_{c_{n-1},n-1}} = (2-\omega_2)q_{c,n} + (q_{c,n} - q_{c+1,n})\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2 > 0,$$

то у випадку непарного n циліндри розташовані "справа наліво", але залежно від матриці \tilde{Q} суміжні циліндри можуть або перекриватися, або не перетинатися, або перетинатися в одній точці.

Із наведених вище міркувань слідує наступне твердження.

Теорема 1. Для довільного числа $x \in [t_0'; t_0'']$ існує послідовність (i_k) , $i_k \in N_{m_k}^0 \equiv \{0, 1, \dots, m_k\}$, така, що

$$x = -a_{i_1,1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^k a_{i_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j,j} \right],$$

якщо для всіх $k \in N$ справедливою є наступна система умов

$$\begin{cases} q_{c+1,2k} \left(a_{m_{2k+1},2k+1} + \sum_{t=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_{2k+t},2k+t} \prod_{r=2k+1}^{2k+t-1} \tilde{q}_{m_r,r} \right] \right) \geq q_{c,2k} \left(1 - \sum_{t=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,2k+t} \prod_{r=2k+1}^{2k+t-1} \tilde{q}_{0,r} \right] \right); \\ q_{c+1,2k-1} \left(a_{m_{2k},2k} + \sum_{t=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{0,2k+t-1} \prod_{r=2k}^{2k+t-2} \tilde{q}_{0,r} \right] \right) \geq q_{c,2k-1} \left(1 - \sum_{t=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{m_{2k+t-1},2k+t-1} \prod_{r=2k}^{2k+t-2} \tilde{q}_{m_r,r} \right] \right). \end{cases}$$

3. Побудова та дослідження ряду (4). Нехай маємо деяку матрицю $Q' = \|\tilde{q}_{i,n}\|$ (де $i = \overline{0, m_n}$, $m_n \in N \cup \{0, \infty\}$, $n = 1, 2, \dots$), яка має ті ж самі властивості та розмірність, що й матриця \tilde{Q} .

Розіб'ємо відрізок $[0; 1]$ точками $\tilde{a}_{0,1}, \tilde{a}_{1,1}, \dots, \tilde{a}_{m_1,1}$ на відрізки (які назвемо відрізками першого рангу), слідуєчи "зліва направо", і, які позначимо відповідно $\Delta_0^{-\tilde{Q}}, \Delta_1^{-\tilde{Q}}, \dots, \Delta_{m_1}^{-\tilde{Q}}$. Для довільного $i_1 \in N_{m_1}^0$ очевидним є той факт, що $|\Delta_{i_1}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i_1,1}$. Кожен з відрізків $\Delta_{i_1}^{-\tilde{Q}}$ першого рангу розіб'ємо, слідуєчи "справа наліво", точками $\tilde{a}_{i_1+1,1}, \tilde{a}_{0,2}, \tilde{a}_{1,2}, \dots$, на

відрізки $\Delta_{i_1 i}^{-\tilde{Q}}, i = \overline{0, m_2}$, другого рангу, де $|\Delta_{i_1 i}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i_1,1} \tilde{q}_{i_1,2}$ і т. д.. Кожен відрізок $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1}}^{-\tilde{Q}}$ $(2k-1)$ -го рангу розіб'ємо на відрізки $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i}^{-\tilde{Q}}, i = \overline{0, m_{2k}}$, $2k$ -го рангу, слідуючи "справа наліво", причому таким чином, щоб

$$|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i_1,2k} \prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{q}_{i_1,j}, \text{ а кожний відрізок } \Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k} i}^{-\tilde{Q}} \text{ } 2k\text{-го рангу, слідуючи "зліва направо", розіб'ємо на відрізки}$$

$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k} i}^{-\tilde{Q}}, i = \overline{0, m_{2k+1}}$, $(2k+1)$ -го рангу таким чином, що $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k} i}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i_1,2k+1} \prod_{j=1}^{2k} \tilde{q}_{i_1,j}$, і т. д. Цілком очевидно, що

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k i}^{-\tilde{Q}} \subset \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{-\tilde{Q}} \text{ для всіх } i \in N_{m_{k+1}}^0 \text{ та } \lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{-\tilde{Q}}| = 0. \text{ Як наслідок, } x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{-\tilde{Q}} = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}^{-\tilde{Q}}.$$

Накладемо умови, щоб $Q' = \tilde{Q}$. Тобто, $\tilde{q}_{i_n,n} = \begin{cases} q_{i_n,n}, \text{ якщо } n - \text{непарне;} \\ q_{m_n - i_n, n}, \text{ якщо } n - \text{парне.} \end{cases}$

Рівність $x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_n(x) \dots}^{-\tilde{Q}}$ називатимемо неге- \tilde{Q} -зображенням числа x .

Нехай $x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_n(x) \dots}^{-\tilde{Q}}$. Тоді лівіше точки x міститься i_1 відрізків першого рангу; $m_2 - i_2$ відрізків другого рангу, які належать $\Delta_{i_1(x)}^{-\tilde{Q}}$; i_{2k-1} відрізків $(2k-1)$ -го рангу, які належать $\Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_{2k-2}(x)}^{-\tilde{Q}}$ і мають сумарну довжину

$a_{i_{2k-1}, 2k-1} \prod_{j=1}^{2k-2} \tilde{q}_{i_1,j}$; $m_{2k} - i_{2k}$ відрізків $2k$ -го рангу, які належать $\Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_{2k-1}(x)}^{-\tilde{Q}}$ і мають сумарну довжину

$a_{m_{2k} - i_{2k}, 2k} \prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{q}_{i_1,j}$, і т. д. Таким чином, для довільного $x \in [0; 1)$ існує послідовність $(i_n(x)), i_n(x) \in N_{m_n}^0$, така, що

$$x = a_{i_1(x), 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{i_n(x), n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{i_j(x), j} \right]. \tag{5}$$

Слід відмітити, що $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}^{-\tilde{Q}} \equiv \Delta_{i_1 [m_2 - i_2] \dots [i_{2n-1} - i_{2n}] \dots}^{-\tilde{Q}}$, і навпаки $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}^{-\tilde{Q}} \equiv \Delta_{i_1 [m_2 - i_2] \dots [i_{2n-1} - i_{2n}] \dots}^{-\tilde{Q}}$.

Оскільки $a_{m_{2n} - i_{2n}, 2n} = q_{0, 2n} + q_{1, 2n} + \dots + q_{m_{2n} - i_{2n} - 1, 2n} = 1 - q_{m_{2n} - i_{2n}, 2n} - q_{m_{2n} - i_{2n} + 1, 2n} - \dots - q_{m_{2n}, 2n}$, то

$$\Delta_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}^{-\tilde{Q}} \equiv \sum_{i=0}^{i_1-1} q_{i, 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \tilde{\delta}_{i_n, n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{i_j, j} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{q}_{i_j, j} \right).$$

4. Висновки. У роботі проведено порівняльний аналіз представлення чисел у вигляді розкладу в ряд (3) та неге- s -им представленням і розкладом в знакопочерезний ряд Кантора, які є частинними випадками досліджуваного ряду. Зокрема, із наведених вище міркувань слідує, що на відміну від s - та $(-s)$ -розкладів, \tilde{Q} - та неге- \tilde{Q} -розклади (розклади в ряди (2) і (3) відповідно) володіють суттєво відмінними властивостями в залежності від нескінченнопараметричної матриці \tilde{Q} : задають числа з різних інтервалів, володіють абсолютно неподібними метричними та геометричними властивостями, закономірності у властивостях операторів зсуву для розкладів, що є їх частинними випадками, не збігаються для \tilde{Q} - та неге- \tilde{Q} -розкладів. Встановлено умови приналежності розкладу (3) до систем числення.

Описано геометрію представлення чисел у вигляді розкладу в ряд (4), взаємозв'язок даного розкладу із знакододатним поліосновним \tilde{Q} -представленням.

В проведеному дослідженні використано аналітичний та геометричний підходи до побудови систем числення, для доведення основних результатів використано допоміжні поняття оператора зсуву цифр представлення та циліндричної множини (циліндра) рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / Працьовитий М. В.. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. Сербенюк С. О. Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел / Сербенюк С. О. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2013, №14. – С. 253–267. Режим доступу: <https://www.researchgate.net/publication/283909906>
3. Сербенюк С. О. Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах неге- S -кового та канторівського неге- S -кового зображень / Сербенюк С. О. // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2013, №15. – С. 168–187. Режим доступу: <https://www.researchgate.net/publication/292970280>
4. Ambrož P. Arithmetics on number systems with irrational bases / Ambrož P., Frougny Ch., Masáková Z., Pelantová E. // Bull. Belg. Math. Soc. – 2003. – 10. – P. 641–659.
5. Cantor G. Ueber die einfachen Zahlensysteme / Cantor G. // Z. Math. Phys. – 1869. – Bd. 14. – S. 121–128.
6. Frougny Ch. Negative bases and automata / Frougny Ch., Lai A. Ch. // arXiv: 1012.3721v1.
7. Frougny Ch. Finite beta-expansions / Frougny Ch., Solomyak B. // Ergod. Th. & Dynam. Sys. – 1992. – 12. – P. 713–723.
8. Grünwald V. Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale) / Grünwald V. // Giornale di Matematiche di Battaglini. – 1885. – 367. – 203–221.
9. Ito S. Beta-expansions with negative bases / Ito S., Sadahiro T. // INTEGERS. – 2009. – 9. – P. 239–259.

10. Rényi A. Representations for real numbers and their ergodic properties / Rényi A. // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. – 1957. – 8. – P. 477–493.
 11. Serbenyuk S. Representation of real numbers by the alternating Cantor series / Serbenyuk S. // arXiv:1602.00743v1.
 Режим доступу: <http://arxiv.org/pdf/1602.00743v1.pdf>

Стаття надійшла до редколегії 22.11.15

Сербенюк С., мл. научн. сотр
 Институт математики НАН Украины

НЕГА- \tilde{Q} -ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАК ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В статье построено нега- \tilde{Q} -представление действительных чисел, которое является обобщением представления чисел знакопередающимися рядами Кантора. Для моделирования нега- \tilde{Q} -представления используется аналитический и геометрический подходы. Недостатки и преимущества каждого из способов исследованы, искомое представление смоделировано.

Serbenyuk S., junior researcher
 Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

NEGA- \tilde{Q} -REPRESENTATION AS A GENERALIZATION OF CERTAIN ALTERNATING REPRESENTATIONS OF REAL NUMBERS

The article is devoted to modeling of the nega- \tilde{Q} -representation of real numbers. The representation is a generalization of representation by alternating Cantor series. Analytic and geometric approaches are used for modeling of nega- \tilde{Q} -representation. Advantages and disadvantages of these approaches are investigated, the representation is modeled.

УДК 629.195

Б. Кіфоренко, д-р. фіз.-мат. наук, проф., І. Васильєв, канд. фіз.-мат. наук,
 О. Куценко, канд. фіз.-мат. наук, О. Харитонов, канд. фіз.-мат. наук
 КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
 e-mail: kifor@univ.kiev.ua

ЭФЕКТИВНІСТЬ ДВОРЕЖИМНИХ РАКЕТНИХ ДВИГУНІВ ПРИ ВИКОНАННІ НАВКОЛОЗЕМНИХ ОРБІТАЛЬНИХ МАНЕВРІВ

В рамках вирішення основної задачі механіки космічного польоту отримано і початкові оцінки ефективності комбінованих ракетних двигунів великої і малої тяги порівняно з традиційними двигунами при виконанні практично цікавих навколосеземних орбітальних маневрів космічних апаратів.

ВСТУП. Як вказується у публікаціях, в яких аналізуються перспективи та тенденції розвитку космічної техніки [1, 3], для успішного виконання сучасних задач навколосеземної космонавтики необхідне використання енергорушійних установок (ЕРУ) космічних апаратів (КА), що мають підвищену електричну потужність та забезпечують в режимі двигуна великої тяги величини питомого імпульсу порядку 900–1000 сек. Такі характеристики мають ядерні енергорушійні установок (ЯЕРУ), що забезпечують за рахунок одного джерела потужності як виконання заданих динамічних маневрів КА, так і енергоспоживання його цільових систем. Найперспективнішою уявляється можливість побудови багаторежимної ядерної енергетичної рушійної установки, що припускає роботу як у режимі ядерного ракетного двигуна великої тяги (ЯРД) так і в режимі ядерного електричного ракетного двигуна малої тяги (ЯЕРД). Відомою перевагою двигунів великої тяги є порівняно мала тривалість динамічних маневрів при їх використанні, зокрема, скорочення тривалості навколосеземних та міжпланетних перельотів, що досить суттєво для пілотованих експедицій. З іншого боку, використання двигунів малої тяги, що мають на порядок більшу швидкість витікання реактивного струменя призводить до зменшення масових витрат на виконання заданого динамічного маневру і, отже, до збільшення маси корисного навантаження КА, що є найважливішим показником ефективності обраної схеми перельоту. Можливість оптимального сполучення ракетних двигунів великої та малої тяги, що дозволяє використовувати переваги двигунів обох типів, диктує інтерес до розробки багаторежимної ЯЕРУ. Зауважимо, що розробка багаторежимних ЕРУ, які оптимізують схему міжорбітальних перельотів, можлива на базі реалізованих робочих процесів та розроблених технологій перспективних рушійних та енергетичних установок космічних апаратів [1].

Таким чином значний практичний інтерес являє собою задача визначення діапазонів параметрів, режимів роботи космічних ракетних двигунів та траєкторних схем міжорбітальних перельотів, що забезпечують вираш для багаторежимних РУ порівняно із традиційним використанням двигунів лише одного типу. Математично ця варіаційна проблема може бути сформульована у вигляді основної задачі механіки космічного польоту про виконання заданого динамічного маневру заданої тривалості з максимальною масою корисного навантаження при фіксованій стартовій масі КА [2]. В термінах теорії оптимальних динамічних систем основна задача механіки космічного польоту є задачею Майєра оптимального керування, розв'язання якої включає визначення оптимальних функцій керування РУ, оптимальної траєкторії та оптимального розподілу масових компонент КА, а також визначення оптимальних значень конструктивних параметрів РУ та КА, що забезпечують виконання заданого динамічного маневру з найліпшим значенням критерію якості. Варто зауважити, що через істотні ускладнення, що зазвичай виникають під час розв'язання практично цікавих задач механіки космічного польоту, які обумовлені, наприклад, нелінійністю та/або нестійкістю відповідних динамічних систем, для ефективного їх розв'язання часто доводиться вводити додаткові припущення, що спрощують постановку вихідної задачі при максимально можливому збереженні її адекватності.

© Кіфоренко Б., Васильєв І., Куценко О., Харитонов О., 2016

Новизна підходу, що розглянуто у даній роботі, полягає у використанні масової моделі ЯЕРД малої тяги, більш реалістичної у порівнянні з класичними у механіці космічного польоту, а також, у використанні аналітичних розв'язків осереднених рівнянь оптимального руху КА в режимі малої тяги [5–6].

АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ КОМБІНОВАНОЮ РАКЕТНОЮ РУШІЙНОЮ УСТАНОВКОЮ. У якості математичної моделі КА, обладнаного дворежимною ЕРУ обрано систему диференціальних рівнянь руху центру мас апарату, що розглядається як матеріальна точка змінної маси:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) F_{jk} w e_k \sigma, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3} \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) F_{6k} w e_k \sigma \\ \frac{dm}{dt} = -q\sigma \end{cases} \quad (1)$$

При записі (1) припускалося, що $\vec{x} = (\chi, h, k, p, q)$ – вектор рівноденних змінних, $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – орт реактивної тяги апарату, w – величина реактивного прискорення ракетного двигуна КА, F – величина ексцентричної аномалії, що визначає положення апарату на оскулюючому еліпсі, m – поточна маса КА, q – секундна масова витрата робочого тіла ракетного двигуна, функціональні залежності $F_{jk}(\vec{x}, F)$, $F_{60}(\vec{x}, F)$ задані аналогічно до того, як це зроблено у [5]. Система (1) обезрозмірена традиційним у механіці космічного польоту з малою тягою способом, при цьому узгоджено додавання по індексах, що повторюються.

Поточна маса апарату записується у вигляді:

$$m(t) = m_\pi + m_\mu^l(t) + m_\mu^b(t) + m_\kappa^l + m_\kappa^b, \quad (2)$$

де m_π – маса корисного навантаження, $m_\mu^l(t)$ та $m_\mu^b(t)$ – поточні запаси робочого тіла двигунів малої та великої тяги, m_κ^l та m_κ^b – маси відповідних рушіїв. Відповідно до [2] припускалось, що маса рушія великої тяги є функцією максимально можливої тяги P_{\max}^b , тоді як маса рушія малої тяги – функція максимальної вживаної потужності N_{\max}^l : $m_\kappa^b = m_\kappa^b(P_{\max}^b)$, $m_\kappa^l = m_\kappa^l(N_{\max}^l)$.

Надалі припускається можливість лише почергового використання двигунів великої та малої тяги, виключивши таким чином режим їх сумісного використання із розгляду. Припускається також, що величини великої та малої тяги сталі, а напрям вектора тяги може змінюватися довільно, при цьому траєкторія заданого динамічного маневру може містити пасивні дуги. Розташування апарату на початковій та кінцевій орбітах не фіксується.

В силу зроблених припущень система (1) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) F_{jk} \frac{P^b \delta + P^l (1-\delta)}{m} \sigma e_k, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}, \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) F_{6k} \frac{P^b \delta + P^l (1-\delta)}{m} \sigma e_k, \\ \frac{dm}{dt} = -\sigma \left(\frac{P^b}{V^b} \delta + \frac{P^l}{V^l} (1-\delta) \right), \end{cases} \quad (3)$$

де P^b , V^b , P^l , V^l – величини тяги та швидкостей витікання ракетних двигунів, $\delta(t) = \{0,1\}$ – функція керування переключення між режимами руху з великою та малою тягою, $\sigma(t) = \{0,1\}$ – функція керування ввімкненням-вимкненням ракетних двигунів.

Основна задача механіки космічного польоту у даному випадку формулюється так: необхідно визначити закон зміни напрямку реактивної тяги $\vec{e}(t)$, функції керування комбінованого ракетного дигуна $\delta(t)$ та $\sigma(t)$, а також значення параметрів P_{\max}^b та N_{\max}^l , котрі забезпечують перехід між заданими еліптичними орбітами у центральному Ньютонівському гравітаційному полі за фіксований час T з максимальним корисним навантаженням m_π при фіксованій початковій масі КА m_0 , тобто виконання умов:

$$t = 0, \quad x_j = x_{j0}, \quad m(0) = m_0 = \text{fix}, \quad t = T, \quad x_j = x_{jf}, \quad m_\pi \rightarrow \max \quad (4)$$

Процедура принципу максимуму Понтрягіна, застосована до задач Майєра (2)–(4), дозволила отримати наступні вирази для оптимальних функцій керування

$$\begin{aligned} e_k(t) &= \frac{\lambda_{vk}}{\lambda_v}, \quad \lambda_v = \sqrt{\lambda_{vk} \lambda_{vk}}, \quad k = \overline{1,3}, \quad \lambda_{vk} = \lambda_j F_{jk} + \lambda_6 F_{6k}, \quad j = \overline{1,5}, \quad k = \overline{1,3}, \\ \sigma_{opt}(t) &= \begin{cases} 1, & \psi_\sigma \geq 0 \\ 0, & \psi_\sigma < 0 \end{cases}, \quad \psi_\sigma = \exp(\chi) \frac{P^b \delta + P^l (1-\delta)}{m} \lambda_v - \lambda_m (q^b \delta + q^l (1-\delta)), \\ \delta_{opt}(t) &= \begin{cases} 1, & \psi_\delta \geq 0 \\ 0, & \psi_\delta < 0 \end{cases}, \quad \psi_\delta = \exp(\chi) \frac{(P^b - P)}{m} \lambda_v - \lambda_m \left(\frac{P^b}{V^b} + \frac{P^l}{V^l} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Із врахуванням (5) рівняння оптимального руху КА записуються у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \exp(\chi) \frac{1}{\lambda_v} \frac{P_{opt}}{m} \lambda_i f_{ji} \sigma_{opt}, & j = \overline{1,5}, i = \overline{1,6}, \\ \frac{dF}{dt} = F_{60} + \exp(\chi) \frac{1}{\lambda_v} \frac{P_{opt}}{m} \lambda_i f_{6i} \sigma_{opt}, \\ \frac{dm}{dt} = -\sigma_{opt} q_{opt}, \end{cases} \quad (6)$$

де $\lambda_i, i = \overline{1,6}, \lambda_m$ – спряжені функції,

$$P_{opt} = P^b \delta_{opt} + P^l (1 - \delta_{opt}), \quad q_{opt} = \frac{P^b}{V_b} \delta_{opt} + \frac{P^l}{V_l} (1 - \delta_{opt}), \quad f_{ji} = F_{jk} F_{ik}, \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,6}.$$

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОРЕЖИМНОЇ ЯЕРУ ДЛЯ ВИКОНАННЯ ПЕРЕЛЬОТУ З ОПОРНОЇ КРУГОВОЇ ОРБИТИ НА ГЕОСТАЦІОНАР. У даній статті ефективність використання комбінованої ракетної рушійної системи КА досліджується для найбільш практично цікавих динамічних маневрів навколосемних КА – перельотів з опорної кругової орбіти на геостационарну орбіту, котра в нашому сьогоденні інтенсивно використовується для розміщення штучних супутників (комунікаційних, телетрансляційних і т. ін.).

Застосування процедури принципу максимуму Понтрягіна зводить вихідну задачу оптимального керування до крайової задачі для системи рівнянь оптимального руху КА, що містить у собі рівняння для спряжених функцій. Загальновідоме ускладнення розв'язку задач подібного типу, обумовлене як необхідністю підбору початкових значень спряжених функцій, так і складною топологією оптимального розв'язку у просторі параметрів крайової задачі, призводить до відмови або нестійкості чисельних методів її розв'язання [7]. Тому природним є застосування певних спрощень вихідної математичної моделі міжорбітального перельоту, які дозволяють ефективно долати вказані ускладнення. Зокрема, класичним при розгляді міжорбітальних перельотів з малою тягою, що характеризуються малістю реактивного прискорення та великою тривалістю, є метод осереднення рівнянь оптимального руху КА, який дозволяє зменшити їх нестійкість по відношенню до варіацій початкових значень спряжених змінних. Крім того, при розгляді перельотів з опорної кругової орбіти на геостационар у даному дослідженні використовувалися завдані априорі схеми перельотів, які представляються доцільними з технічної точки зору. При цьому зарані задавалися як траєкторні схеми, так і режим керування роботою дворежимної ЯЕРУ КА. Також використовувалась імпульсна апроксимація руху КА на дугах великої тяги, що дозволило у рамках класичного екстремального підходу звести вихідну оптимізаційну задачу до задачі кінцевовимірною пошуку екстремуму у просторі траєкторних та конструктивних параметрів КА. Як вказується у [4], при використанні екстремального підходу схема перельоту (кількість імпульсів та точки їх прикладання) задається з деяких априорних раціональних міркувань, при цьому питання про строгу оптимальність обраної схеми залишається відкритим. Тим не менш, застосування замість строгих методів інтуїтивних підходів, заснованих на завданні ряду визначаючих умов, як правило дозволяє одержати наближений розв'язок, що містить необхідну для практичних цілей інформацію [4]. У даній роботі розглянуто дві схеми перельоту – одноімпульсна та двоімпульсна. В обох випадках припускалося, що імпульси великої тяги прикладаються у апсидальних точках вихідної або результуючої еліптичної орбіти – апогеї або перигеї, при цьому радіальна складова приросту швидкості КА дорівнює 0, що дозволяє уникнути необхідності врахування гравітаційних витрат. Доцільність подібного вибору точок прикладання та напряму імпульсів вказана у [4], де стверджується, що "при виході на кругову орбіту, при сходженні з неї в оптимальній точці на орбіті, вектор швидкості КА ортогональний до радіус-вектору апарату, перехід між будь-якою кеплерівською дугою та круговою орбітою, що входить до складу оптимальної траєкторії КА, при оптимальному виборі точки переходу може здійснюватися лише в апсидальній точці кеплерової".

ОДНОІМПУЛЬСНА СХЕМА ПЕРЕЛЬОТУ. Як вказується в [1], для забезпечення прискореного доставлення корисного навантаження на геостационарну орбіту оптимальний наступний порядок роботи комбінованої рушійної системи КА (в нашому випадку ЯРД + ЯЕРД). Спочатку працює двигун великої тяги – ЯРД, потім КА з проміжної орбіти за необхідності доводиться на геостационар з використанням ЯЕРД – двигуна малої тяги. Приймаючи цей режим роботи ЯЕДУ, тим самим ми априорі задаємо керування $\delta(t)$, яке відповідає за вибір між розглядуваними двигунами.

Для траєкторної схеми перельоту вважаються виконаними наступні умови:

- Довгота висхідного вузла початкової кругової орбіти КА дорівнює 0.
- Робота ЯРД апроксимується імпульсним режимом. Початковий імпульс великої тяги прикладено у висхідному вузлі таким чином, щоб, змінивши нахил початкової орбіти та відійшовши від нульового ексцентриситету, не змінювати положення лінії вузлів, тобто для одержаного проміжного еліпса величини довготи висхідного вузла Ω та аргументу перигею ω приймають нульові значення і точка прикладання імпульсу тяги на круговій орбіті збігається з перигеєм отриманої еліптичної орбіти.

▪ Перехід з проміжної еліптичної орбіти на геостационар забезпечується роботою двигуна малої тяги, робочі процеси якого моделюються з використанням концепції ідеального двигуна обмеженої потужності [2]. При цьому припущення про вид крайових умов динамічного маневру, зроблені раніше, дозволяють використати аналітичний розв'язок для так званої задачі АЕІ в осередненій постановці [6], який для ідеального двигуна досить близький по функціоналу до точного розв'язку [9].

З використанням імпульсної апроксимації в межах екстремального підходу задача про доставлення максимального корисного навантаження з опорної кругової орбіти на геостационар зводиться до ієрархічної структури "внутрішньої" та "зовнішньої" задач. "Внутрішня" полягає у визначенні величини корисного навантаження m_π по заданих значеннях імпульсу швидкості $d\vec{v}$ на дузі великої тяги, а також, величин швидкості витікання двигуна великої тяги

V_i^b та максимальної потужності двигуна малої тяги N_0 , що забезпечує виконання заданого маневру за фіксований час T . "Зовнішня" в свою чергу полягає у кінцевовимірному пошуку максимуму m_π на множині припустимих значень параметрів $d\bar{v}$, N_0 . Зауважимо, що величина V_i^b не входить в число змінних параметрів при пошуку максимуму корисного навантаження через прийняту імпульсну апроксимацію режиму великої тяги. При цьому маса двигуна великої тяги m_κ^b вважається або фіксованою, або функціонально пов'язаною з масою двигуна малої тяги, тоді як оптимальна маса двигуна малої тяги $m_\kappa^l = m_\kappa^l(N_0)$ визначається під час розв'язання "зовнішньої" задачі.

Крайові умови виконання імпульсу великої тяги мають вигляд

$$(a_0, e_0, \omega_0, i_0, \Omega_0) \rightarrow (a_1, e_1, \omega_1, i_1, \Omega_1), \quad (7)$$

де a_0 – велика напіввісь початкової орбіти, що дорівнює у нашому випадку радіусу початкового круга r_0 , на початковій орбіті значення ексцентриситету, аргументу перигея та довготи висхідного вузла приймають нульові значення: $e_0 = \omega_0 = \Omega_0 = 0$.

Імпульс тяги $d\bar{v}$ дається у трансверсальному та нормальному до площині орбіти напрямках у висхідному вузлі з нульовою довготою, тому результуючий еліпс також має нульові значення аргументу перигея та довготи висхідного вузла: $\omega_1 = \Omega_1 = 0$.

За величиною початкової швидкості v_0 , яка для кругової орбіти дорівнює $\sqrt{1/r_0}$, швидкості в перигеї результуючого еліпса v_1 та зміні нахилу початкової орбіти di_1 , можна обчислити величину $d\bar{v}$

$$dv = \sqrt{v_1^2 + v_0^2 - 2v_1v_0 \cos di_1} \quad (8)$$

На вибір v_1 та di_1 введені наступні обмеження, що гарантують перебування КА на еліптичній орбіті

$$v_0 \leq v_1 \leq \sqrt{2}v_0, \quad -\pi/2 \leq di_1 \leq \pi/2 \quad (9)$$

Для визначення елементів проміжної еліптичної орбіти після імпульсу великої тяги маємо наступні співвідношення

$$a_1 = \frac{1}{2/r_0 - v_1^2}, \quad e_1 = r_0v_1^2 - 1, \quad i_1 = i_0 + di_1, \quad \omega_1 = \Omega_1 = 0 \quad (10)$$

З використанням формули Ціолковського маса КА після імпульсу записується таким чином

$$m_1 = m_0 \exp(-dv/V^b) \quad (11)$$

Крайові умови другого етапу виведення КА на кругову геостационарну орбіту, на якому використовується двигун малої тяги, мають вигляд

$$(a_1, e_1, \omega_1, i_1, \Omega_1) \rightarrow (a_f = r_{geo}, e_f = 0, \omega_f = 0, i_f = 0, \Omega_f = 0), \quad (12)$$

де $r_{geo} = 42160 \text{ km}$ – радіус геостационарної орбіти.

Так як режим роботи двигуна малої тяги моделюється з допомогою концепції ідеального двигуна обмеженої потужності, задача про виконання другої дуги розділяється на динамічну та параметричну частини [2]. Динамічна полягає у визначенні величини та напрямку вектора реактивного прискорення $\bar{w}(t)$, що доставляє мінімум інтегрального функціоналу J :

$$J = 1/2 \int_0^T w^2(t) dt \rightarrow \min, \quad (13)$$

де T – заданий час виконання маневру.

Параметрична частина полягає у визначенні значення максимальної потужності двигуна малої тяги, що доставляє максимум величини корисного навантаження та оптимальне значення маси двигуна m_κ^l

$$N_{\max}^{opt} = \arg \max [m_1 (1 + \frac{m_1}{N_{\max}} J)^{-1} - m_\kappa(N_{\max})] \quad (14)$$

Згідно зроблених раніше припущень розв'язання динамічної частини задачі дається аналітичним розв'язком в осередненій постановці [6], а, саме, точне значення функціоналу J , що мінімізується, замінюється його осередненим значенням $J_{av} = \frac{\tau_f^2}{2T}$, де τ_f – характеристична швидкість динамічного маневру на 2-ій дузі виведення, що залежить лише від крайових умов маневру.

Відомо [2], що якщо маса ідеального двигуна малої тяги та максимальна потужність пов'язані лінійно

$$m_\kappa^l = \alpha N_{\max}, \quad \alpha = const \quad (15)$$

то маса корисного навантаження та маса двигуна обчислюється за формулами

$$m_\pi = m_1 (1 - \sqrt{\Phi})^2, \quad m_\kappa^l = m_1 (\sqrt{\Phi} - \Phi), \quad \Phi = \alpha J \quad (16)$$

Крім моделі (15) в даній роботі використовувалася більш реалістична масова модель ЯЕРД малої тяги, запропонована у [8], в якій питома потужність α задається наступною функціональною залежністю

$$\alpha(N_{\max}) = k \left(\frac{A}{BN_{\max} + C} + D \right) \quad (17)$$

де k, A, B, C, D – деякі задані розмірні коефіцієнти.

При використанні моделі (17) після відповідного нормування, вираз для обчислення m_π та m_k^l записується у вигляді

$$m_\pi = n_{\max} \left(\frac{1}{J + n_{\max}} - \frac{a}{bn_{\max} + c} - d \right) - m_k^b, \quad m_k^l = \alpha(n_{\max})n_{\max} \quad (18)$$

Зауважимо, що для обох масових моделей ідеального двигуна питання про оптимальне значення максимальної потужності n_{\max} розв'язується в межах "внутрішньої" задачі, тому при розв'язанні "зовнішньої" задачі цей параметр виключається з числа змінних.

Дійсно, аналіз функціональної залежності (18) показує, що оптимальне значення n_{\max} є елементом кінцевої множини $\{0, n_{\max}^0, \arg \frac{dm_\pi}{dn_{\max}} = 0\}$, де n_{\max}^0 – верхня межа значень n_{\max} .

Нескладно побачити, що згідно (18) рівняння $\frac{dm_\pi}{dn_{\max}} = 0$ є поліномом 4-ого ступеня відносно n_{\max} , тому якщо оптимальне значення максимальної потужності лежить всередині інтервалу $(0, n_{\max}^0)$, то слід обирати той з 4-х коренів цього поліному, котрий відповідає максимуму корисного навантаження.

ДВОІМПУЛЬСНА СХЕМА ПЕРЕЛЬОТУ. На відміну від одноімпульсної схеми, розглянутої раніше, двоімпульсна схема перельоту припускає включення до складу оптимальної траєкторії КА другого імпульсу тяги, який завершує виконання переходу на геостационар. Таким чином, припускається, що виконується після початкового імпульсу великої тяги дуга малої тяги закінчується не на геостационарі, а на деякій другій проміжній еліптичній орбіті, в апогеї якої прикладається другий імпульс, що переводить КА на кінцеву орбіту. При цьому вважається, що друга проміжна орбіта така, що радіус апогею збігається з радіусом кругової геостационарної орбіти. Введення до розгляду схеми перельоту з додатковим імпульсом тяги було засновано на інтуїтивному припущенні про те, що вона виявиться ефективною від одноімпульсної для малих часів виконання заданого маневру.

Для перших двох дуг траєкторії припускаються виконаними ті самі припущення, що і у випадку одноімпульсної схеми. Також співпадає і вигляд крайових умов переходу з початкового круга на першу проміжну еліптичну орбіту. Крайові умови другої дуги – що виконується з використанням двигуна малої тяги перельоту між двома проміжними еліптичними орбітами – мають вигляд

$$(a_1, e_1, \omega_1, i_1, \Omega_1) \rightarrow (a_2, e_2, \omega_2, i_2, \Omega_2) \quad (19)$$

Параметри другої проміжної орбіти повинні задовольняти умовам, необхідним для можливості застосування аналітичного розв'язку задачі АЕІ та припущенню про рівність апогея другого еліпса радіусу геостационара:

$$\omega_2 = \Omega_2 = 0, \quad a_2 = r_{geo} / (1 + e_2) \quad (20)$$

Як і для випадку одноімпульсної схеми масові вирати на виконання другої дуги перельоту визначаються величиною функціоналу (13), що визначається аналітичним розв'язком задачі в осередненій постановці. При цьому маса КА в кінці другої дуги m_2 записується так

$$m_2 = m_1 \left(1 + \frac{m_1}{n_{\max}} J \right)^{-1}, \quad (21)$$

де m_1 – маса КА після 1-го імпульсу великої тяги.

Завершуючою дугою траєкторії є імпульсний перехід з другого проміжного еліпса на геостационарну орбіту:

$$(a_2, e_2, \omega_2, i_2, \Omega_2) \rightarrow (a_f = r_{geo}, e_f = 0, \omega_f = 0, i_f = 0, \Omega_f = 0) \quad (22)$$

При цьому величина 2-го імпульсу dv_2 обчислюється за формулою

$$dv_2 = \sqrt{v_2^2 + v_{geo}^2 - 2v_2 v_{geo} \cos i_2}, \quad (23)$$

де $v_2 = \sqrt{(1 - e_2) / r_{geo}}$ – швидкість в апогеї другого проміжного еліпса, $v_{geo} = \sqrt{1 / r_{geo}}$ – кругова швидкість апарату на геостационарі.

Кінцева маса КА обчислюється за формулою Ціолковського: $m_f = m_2 \exp(-dv_2 / V^b)$, маса корисного навантаження маневру задається наступним співвідношенням

$$m_\pi = m_f - m_k^l(n_{\max}) - m_k^b \quad (24)$$

Як і для одноімпульсної схеми знаходження максимуму m_π зводиться до задачі кінцевовимірної оптимізації. При цьому до числа змінних параметрів додаються вільні для вибору орбітальні елементи другого проміжного еліпса i_2, e_2 а також максимальне значення потужності ракетного двигуна малої тяги n_{\max} , оптимальне значення якого на відміну від одноімпульсної схеми тепер не може бути визначено в межах розв'язання "внутрішньої" задачі.

$$m_\pi^{opt} = \max m_\pi(v_1, di_1, i_2, e_2, n_{\max}) \quad (25)$$

ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ. Чисельний аналіз ефективності використання комбінації ракетних двигунів великої та малої тяги проводився на прикладі виконання динамічного маневру КА по переходу з опорної кругової орбіти висотою 800 км та нахилом $62,8^\circ$ на геостационарну орбіту радіусом 42160 км. Початкова маса апарату припускалася рівною 20170 кг, маса ЯРД, якщо вважалася фіксованою, – 2200 кг, питомий імпульс ЯРД – 900 сек. Крайові умови даного маневру та параметри двигуна великої тяги запозичені в [1]. Розмірні коефіцієнти ма-

сової моделі двигуна малої тяги (30) приймали наступні приведені в [8] значення $A = 72 \text{ kg}$, $B = 0.01$, $C = 1050 \text{ wt}$, $D = 2.83 \times 10^{-3} \text{ kg / wt}$. Чисельний аналіз ефективності оптимального сполучення великої (ЯРД) та малої (ЯЕРД) тяги проводився шляхом порівняння з 2 режимами використання лише двигунів малої тяги, а саме: 1) ідеального двигуна обмеженої потужності з масовою моделлю (17), та 2) ідеального двигуна обмеженої потужності з масовою моделлю (15). При цьому величина фіксованої питомої потужності обиралася рівною величині оптимальної питомої потужності для режиму (17). Для трьох розглядуваних режимів використання ракетних двигунів досліджувались залежності цільової функції варіаційної задачі – маси корисного навантаження m_{π} – від тривалості виконання заданого динамічного маневру при виконанні перельоту по одноімпульсній або двоімпульсній схемі. Варіювалися також конструктивні параметри ДУ КА, такі, наприклад, як маса двигуна великої тяги та к.к.д рушія малої тяги. Найбільш цікаві результати чисельного експерименту представлені нижче.

На рис. 1, 2 представлені залежності мас корисного навантаження та ракетних двигунів КА відповідно для трьох розглядуваних режимів роботи ЯЕРУ. При цьому припускалося використання одноімпульсної схеми перельоту, маса ЯРД вважалася фіксованою. Нескладно бачити, що виконання розглянутого маневру для обраних параметрів рушійної системи при тривалості перельоту менше 1,5 діб неможливо для будь-якого режиму використання двигунів. Виконання маневру при тривалості до 6 діб можливе лише з допомогою комбінованої рушійної системи, тобто неможливе без початкового імпульсу великої тяги. При цьому комбінація двигунів великої та малої тяги ефективніше ідеального двигуна зі спрощеною масовою моделлю (15) при тривалостях перельоту до 9 діб і продовжує бути ефективніше ідеального двигуна з більш реалістичною масовою моделлю (17) при тривалостях перельоту до 30 діб. Ідеальний двигун (15) завжди ефективніше ідеального двигуна (17), оскільки, як видно з Рис. 2, він виявляється завжди легше. Тим самим осереднено підтверджується висновок про те, що концепція ідеального двигуна (15) розкриває граничні можливості двигунів даного класу [2]. Зауважимо, що аналіз одноімпульсних схем перельоту був пов'язаний зі значними ускладненнями знаходження максимуму цільової функції у двовимірному просторі параметрів оптимізації v_1 та di_1 , оскільки стандартні обчислювальні процедури нелінійного програмування, такі як метод Нелдера-Міда та метод градієнтного спуску виявились у нашому випадку нестійкі до варіації початкових значень. Для подолання цієї нестійкості, обумовленої "пагорбитсістю" цільової функції, поряд зі вказаними раніше застосовувався візуально-графічний метод знаходження двовимірного максимуму. Приблизний вигляд цільової функції над площиною параметрів оптимізації для одноімпульсної схеми при тривалості перельоту T рівної 50 добам приведено на рис. 3.

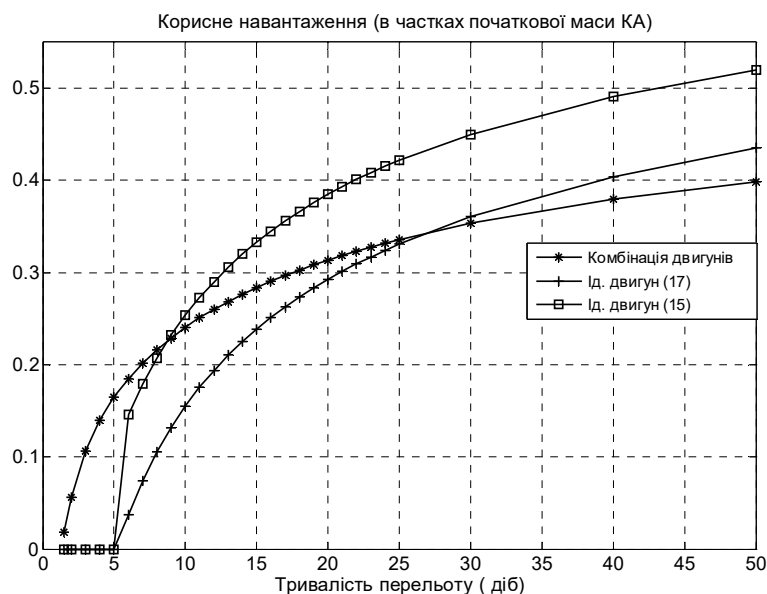


Рис. 1. Залежність маси корисного навантаження КА від тривалості перельоту для одноімпульсної схеми

На рис. 1, 2 представлені залежності мас корисного навантаження та ракетних двигунів КА відповідно для трьох розглядуваних режимів роботи ЯЕРУ. При цьому припускалося використання одноімпульсної схеми перельоту, маса ЯРД вважалася фіксованою. Нескладно бачити, що виконання розглянутого маневру для обраних параметрів рушійної системи при тривалості перельоту менше 1,5 діб неможливо для будь-якого режиму використання двигунів. Виконання маневру при тривалості до 6 діб можливе лише з допомогою комбінованої рушійної системи, тобто неможливе без початкового імпульсу великої тяги. При цьому комбінація двигунів великої та малої тяги ефективніше ідеального двигуна зі спрощеною масовою моделлю (15) при тривалостях перельоту до 9 діб і продовжує бути ефективніше ідеального двигуна з більш реалістичною масовою моделлю (17) при тривалостях перельоту до 30 діб. Ідеальний двигун (15) завжди ефективніше ідеального двигуна (17), оскільки, як видно з Рис. 2, він виявляється завжди легше. Тим самим осереднено підтверджується висновок про те, що концепція ідеального двигуна (15) розкриває граничні можливості двигунів даного класу [2]. Зауважимо, що аналіз одноімпульсних схем перельоту був пов'язаний зі значними ускладненнями знаходження максимуму цільової функції у двовимірному просторі параметрів оптимізації v_1 та di_1 , оскільки стандартні обчислювальні процедури нелінійного програмування, такі як метод Нелдера-Міда та метод градієнтного спуску виявились у нашому випадку нестійкі до варіації початкових значень. Для подолання цієї нестійкості, обумовленої "пагорбитсістю" цільової функції, поряд зі вказаними раніше застосовувався візуально-графічний метод знаходження двови-

мірного максимуму. Приблизний вигляд цільової функції над площиною параметрів оптимізації для одноімпульсної схеми при тривалості перельоту T рівної 50 добам приведено на рис. 3.

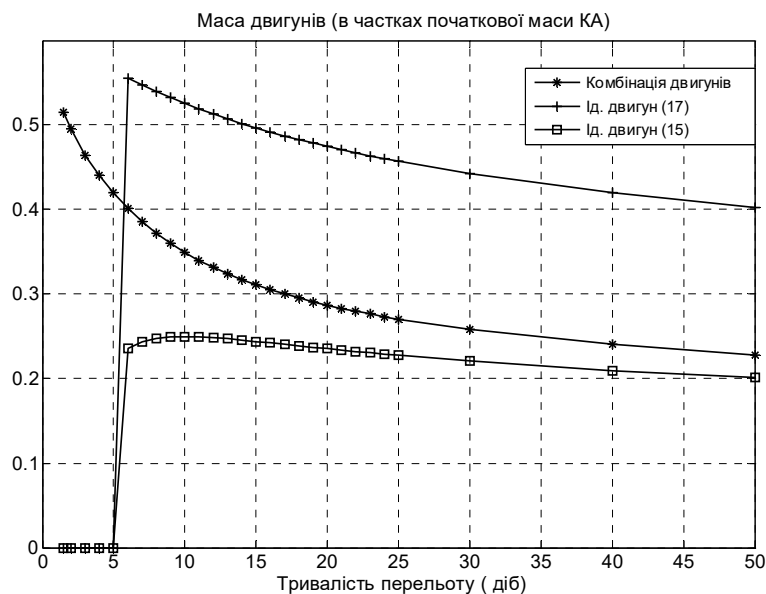


Рис. 2. Залежність маси ракетних двигунів КА від тривалості перельоту для одноімпульсної схеми

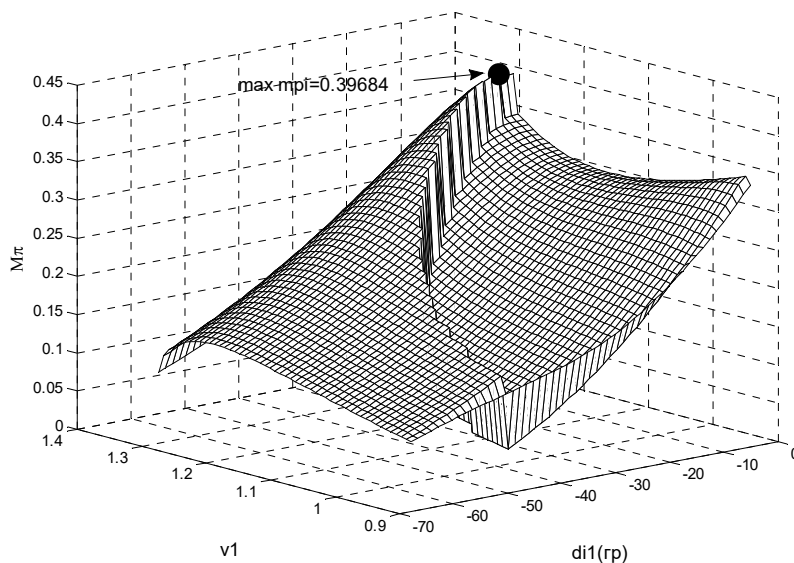


Рис. 3. Маса корисного навантаження m_{π} як функція параметрів v_1 і di_1

Відповідно до [8] чисельний аналіз ефективності застосування комбінованої рушійної установки КА для двоімпульсних схем проводився у припущенні про те, що маса рушія великої тяги складає $2/3$ від маси двигуна малої тяги. Отже, оптимальне значення маси двигуна великої тяги, як і двигуна малої тяги визначалось у межах розв'язання загальної варіаційної задачі про виконання заданого динамічного маневру з максимальним корисним навантаженням. Зазначені раніше для одноімпульсної схеми перельоту обчислювальні ускладнення наявні і для двоімпульсних, при цьому візуально-графічний метод пошуку максимуму цільової функції в даному випадку незастосовний зважаючи на те, що розмірність множини параметрів оптимізації більше 2. Тим не менш застосування стандартних машинних обчислювальних методів дозволяє у першому наближенні визначити діапазон тривалостей перельоту, при якому використання комбінації ракетних двигунів великої та малої тяги більш ефективне ніж використання лише двигунів малої тяги. Порівняльна ефективність комбінації ЯРД+ЯЕРД для двоімпульсної схеми перельоту відносно використання лише двигунів малої тяги (15) і (17), а також ЯРД+ЯЕРД при одноімпульсній схемі проілюстровано на Рис. 4.

Як видно з приведених залежностей комбінований режим ЯРД+ЯЕРД при використанні двоімпульсної схеми ефективніше ніж ідеальний двигун (15) при тривалості перельоту аж до 90 діб, ідеального двигуна (17) – до 181 діб, сполучення ЯРД+ЯЕРД при одноімпульсній схемі – до 288 діб. Таким чином, для двоімпульсних схем перельоту як і для одноімпульсних підтверджується ефективність комбінованих рушійних систем для порівняно нетривалих перельотів, крім того, для обраних крайових умов маневру та конструктивних параметрів рушійної системи КА включення 2 го імпульсу великої тяги до схеми перельоту виявилось доцільним.

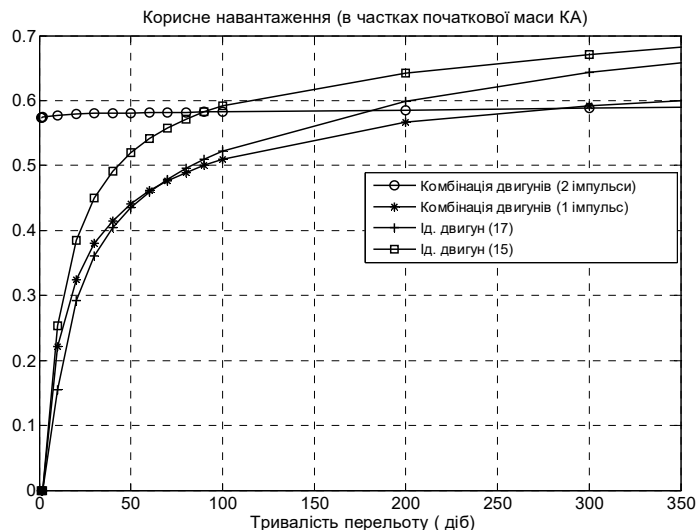


Рис. 4. Залежність маси корисного навантаження від тривалості перельоту для різних режимів використання рушійної системи КА

ВИСНОВКИ. Проведено початковий аналіз ефективності використання дворежимної енергорушійної установки космічного апарату, що містить у своєму складі ракетні двигуни великої та малої тяги, при маневруванні у навколоземному просторі. Проведений з використанням принцип максимуму Л. С. Понтрягіна аналіз оптимальних функцій керування показав, що чисельне розв'язання вихідної варіаційної задачі можливе лише шляхом традиційного при використанні принципу максимуму зведення задачі оптимального керування до двоточкової крайової задачі з добре відомими ускладненнями в підборі початкових даних для спряжених функцій. Зважаючи на це при чисельному дослідженні ефективності дворежимної ЯЕРУ КА при виконанні практично цікавого навколоземного маневру до доставляння корисного навантаження з низької опорної кругової орбіти на геостаціонарну орбіту було зроблено спрощуючі припущення, що стосуються як режиму роботи ракетних двигунів та траєкторної схеми перельоту, так і математичної моделі руху КА на дугах великої та малої тяги. Традиційно застосовна в механіці космічного польоту імпульсна апроксимація дуг прикладання великої тяги поряд з використанням аналітичного розв'язку варіаційної задачі в осередненій постановці на дугах малої тяги дозволили у межах екстремального підходу звести вихідну задачу оптимального керування до задачі пошуку максимуму цільової функції – величини маси корисного навантаження КА – в кінцевовимірному просторі параметрів рушійної системи та перехідної траєкторії. В межах екстремального підходу було отримано початкові оцінки ефективності використання комбінованого ракетного двигуна при використанні однопіпульсної та двоімпульсної траєкторної схеми для модельного маневру КА, обладнаного ЯРД та ЯЕДД. Як і очікувалось, режим сполучення великої та малої тяги виявився ефективнішим від двох обраних для порівняння режимів використання лише малої тяги при порівняно малих величинах заданої тривалості маневру КА. Крім того, для обраних крайових умов маневру та параметрів рушійної установки КА була встановлена перевага включення до траєкторної схеми перельоту другого імпульсу великої тяги.

Необхідно зауважити, що проведені в межах даної роботи дослідження дозволили одержати лише початкові оцінки ефективності дворежимних ЕРУ, зроблені при істотних спрощеннях вихідної варіаційної задачі. Тому уявляється доцільним продовжити дослідження по цій темі з використанням більш реалістичних математичних моделей як робочих процесів у ракетних двигунах великої та малої тяги, так і руху КА на дугах великої та малої тяги.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Акимов В. Н., Конохов В. Г., Коротеев А. А. Эффективность применения космических многорежимных ядерных энергодвигательных установок с машинным преобразованием энергии // Известия РАН, Энергетика, 2008, №3, с. 20–27.
2. Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975, – 700 с.
3. Демянюк Ю. Г., Конохов Г. В., Коротеев А. С. и др. Ядерные ракетные двигатели. М.: Норма-Информ, 2001.
4. Ильин, В. А. Оптимальные перелёты космических аппаратов с двигателями большой тяги / В. А. Ильин, Г. Е. Кузмак. – М.: Наука, 1976. 744 с.
5. Кифоренко Б. Н., Пасечник З. В., Васильев И. Ю. Использование равноденственных орбитальных элементов как переменных в задаче быстрого действия при межорбитальном переходе с постоянной по величине тягой в сильном гравитационном поле // Проблемы управления и информатики, №4, 2003, с. 102–114.
6. Кифоренко Б. Н., Пасечник З. В., Васильев И. Ю. Аналитические решения усредненных уравнений оптимального межорбитального перехода с постоянной по величине тягой в сильном гравитационном поле. // Проблемы управления и информатики, 2002, № 2, с.126–139.
7. Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования, 2004, т. 42, №3, с.260–279.
8. Kharytonov O. M., Kiforenko B. M., Finite-thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion // Acta Astronautica, v.69, 2011, pp. 223–233.
9. Kiforenko B. M., Vasil'ev I. Yu., Quasi Optimal Interorbit Transfers Of A Low-Thrust Spacecraft In Strong Central Newtonian Gravity Field // Acta Astronautica, v.65, 2009, pp.82–94.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.16

Кифоренко Б., д-р физ.-мат. наук, Васильев И., канд. физ.-мат. наук,
Куценко А., канд. физ.-мат. наук, Харитонов А., канд. физ.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДВУХРЕЖИМНЫХ РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ОКОЛОЗЕМНЫХ ОРБИТАЛЬНЫХ МАНЕВРОВ

В рамках решения основной задачи механики космического полета получены начальные оценки эффективности комбинированных ракетных двигателей большой и малой тяги сравнительно с традиционными двигателями при выполнении практически интересных околоземных орбитальных маневров космических аппаратов.

Kiforenko B., Full Doctor,, Vasil'ev I., PhD, Kutsenko O., PhD, O. Kharytonov, PhD.
Taras Shevchenko National university of Kyiv

BIMODAL ROCKET ENGINES EFFICIENCY FOR NEAR-EARTH ORBIT-TO-ORBIT TRANSFERS CARRYING OUT

The initial efficiency estimation is taken in terms of the general problem of spaceflight mechanics of the bimodal rocket engines comparing to the traditional ones in the case of the near-earth orbital transfers.

УДК 539.3

Л. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухолинського, Миколаїв
Л. Федорченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
С. Колесник, інж.
Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухолинського, Миколаїв
e-mail: l.molchenko@gmail.com, fedorchenko555@gmail.com

МАГНІТОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ГНУЧКОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ З УРАХУВАННЯМ ДЖОУЛЕВОГО НАГРІВУ

Запропоновано методику розв'язання нелінійної задачі магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості. Наведено постановку задачі та отримано розв'язувальну систему гнучкої кільцевої пластини з урахуванням джоулевого нагріву.

ВСТУП. Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої пов'язана з навантаженням в умовах взаємодії різних фізичних факторів, обумовлює необхідність створення і розробки теорії та методів розрахунку спряжених полів. Фізичні основи цієї теорії детально висвітлюються в ряді курсів з класичної електродинаміки і фізики твердого тіла [6,7,10–12]. З класичної фізики відомо, що ефекти зв'язності динамічних переміщень електропровідних тіл обумовлені в основному пондеромоторними силами Лоренца. Відмітимо також, що врахування конвективних членів в рівняннях електродинаміки (нелінійна теорія) дозволяє враховувати вплив джоулевого тепла на фізико-механічні властивості матеріалу. Сили Лоренца залежать від швидкості руху електропровідних елементів і зовнішнього магнітного поля, а для струмонесучих елементів – від величини і напрямку стороннього електричного струму відносно зовнішнього магнітного поля. Тому, в першу чергу необхідно розвивати математичні основи магнітопружності і прикладні методи розв'язання подібних класів задач. Серед цих задач в першу чергу відмітимо задачі для тонкостінних гнучких струмонесучих кільцевих пластин, які знаходяться в зовнішньому магнітному полі.

При вивченні питань нелінійної магнітопружності значний інтерес становить визначення напружено-деформованого стану струмонесучих кільцевих пластин, які знаходяться під дією нестационарних механічних і електромагнітних полів.

У даній статті запропоновано нову модель та методику розв'язання нелінійних крайових задач магнітопружності струмонесучих кільцевих пластин, на які діють нестационарні механічні та електромагнітні поля з урахуванням джоулевого тепла.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ДВОВИМІРНІ НЕЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ МАГНІТОПРУЖНОСТІ ОБОЛОНОК. Нехай електропровідна оболонка знаходиться в магнітному полі, яке утворене як електричним струмом в самому тілі (власне магнітне поле), так і джерелом, яке знаходиться на віддалі від тіла (зовнішнє магнітне поле). Вважаємо також, що сторонній електричний струм у незбуреному стані рівномірно розподілений по тілу (густина струму не залежить від координат). Тіло має скінчену електропровідність σ і не має властивості самовільної поляризації та намагнічування (діа-та парамагнітні матеріали).

Використовуючи гіпотезу Кірхгофа–Лява і адекватні їй електромагнітні гіпотези [1, 3], за допомогою принципу віртуальних переміщень, отримуємо наближену систему зв'язаних нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності оболонок.

Пропонована двовимірна модель магнітопружності гнучких оболонок будуються в квадратичному наближенні, а в виразах для сил Лоренца враховується кубічна нелінійність. Це пояснюється тим, що в таких задачах при скінченних переміщеннях нелінійні ефекти цих сил є визначальними і взаємодія електромагнітного поля з полем деформацій відбувається в основному через ці сили.

Просторові рівняння магнітопружності в диференціальній формі в змінних Лагранжа записуються у вигляді [3, 12]

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}; \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho (\vec{f} + \vec{f}^{\wedge}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}; \quad (2)$$

де \vec{E} – напруженість електричного поля; \vec{H} – напруженість магнітного поля; \vec{B} – магнітна індукція; \vec{J} – густина електричного струму; ρ – густина матеріалу; \vec{f} – об'ємна механічна сила; \vec{f}^{\wedge} – об'ємна сила Лоренца; $\hat{\sigma}$ – тензор внутрішніх напружень.

Закон Ома і сила Лоренца, з урахуванням стороннього струму \vec{J}_{cm} , відповідно, мають вигляд

$$\vec{J} = \vec{J}_{cm} + \sigma [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}], \quad (3)$$

$$\rho \vec{f}^{\wedge} = \vec{J}_{cm} \times \vec{B} + \sigma [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \times \vec{B}. \quad (4)$$

Зауважимо також, що в рівняннях Максвелла нехтуємо струмами зміщення, вектором електричної індукції та об'ємною густиною електричних зарядів (квазістатичні рівняння) [3].

При побудові наближених рівнянь руху та рівнянь електродинаміки теорії тонких оболонок в геометрично-нелінійній постановці використовуються гіпотези Кірхгофа-Лява та гіпотези про характер розподілу електромагнітного поля за товщиною оболонки у випадку відомого розподілу стороннього струму.

У [1] показано, що нормальна компонента збудженого магнітного поля і тангенціальні компоненти індукованого поля не залежать від товщини оболонки. Спираючись на результати [1] і використовуючи граничні умови на поверхнях оболонки, приймаємо в ортогональній криволінійній системі координат (α, β, γ) (підхід Лагранжа)

$$H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t), J_\alpha = J_\alpha(\alpha, \beta, t), J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t), J_\gamma = 0. \quad (5)$$

Для отримання гіпотез розподілу тангенціальних складових напруженості магнітного поля за товщиною оболонки, скористаємося операторним методом, вважаючи, що нам відомий закон розподілу магнітного поля на поверхнях оболонки. Після відповідних перетворень вирази для тангенціальних складових напруженості магнітного поля отримуємо у вигляді [3]

$$\begin{aligned} H_\alpha &= \cos P\gamma \sec \frac{Ph}{2} \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \sin P\gamma \cos ec \frac{Ph}{2} \frac{H_\alpha^+ - H_\alpha^-}{2}; \\ H_\beta &= \cos P_1\gamma \sec \frac{P_1h}{2} \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \sin P_1\gamma \cos ec \frac{P_1h}{2} \frac{H_\beta^+ - H_\beta^-}{2}; \end{aligned} \quad (6)$$

де $P^2 = [(K_\beta - K_\alpha)K_\alpha - K^2] - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}$, $P_1^2 = [(K_\beta - K_\alpha)K_\beta - K^2] - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}$ – оператори; K_α, K_β – головні кривизни;

H_i^\pm – відомі компоненти напруженості магнітного поля на поверхнях оболонки; μ – магнітна проникність; h – товщина оболонки.

Залежності (6) визначають розподіл тангенціальних складових магнітного поля за товщиною оболонки у вигляді рядів. Наближені залежності для визначення H_α, H_β можна отримати, обмежуючись тією чи іншою скінченною кількістю членів розвинення. Надалі, обмежуючись одним членом розвинення, лінійним за γ , отримаємо

$$H_\alpha = \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\alpha^+ - H_\alpha^-), H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\beta^+ - H_\beta^-), \quad (7)$$

що відповідає припущенням [1].

Таким чином, при побудові наближених рівнянь магнітопружності гнучких струмонесучих оболонок, які перебувають у магнітному полі, скористаємося групою гіпотез

$$\begin{aligned} E_\alpha &= E_\alpha(\alpha, \beta, t), E_\beta = E_\beta(\alpha, \beta, t), E_\gamma = \frac{\partial u_\beta}{\partial t} B_\alpha - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0, J_\alpha = J_\alpha(\alpha, \beta, t), J_\beta = J_\beta(\alpha, \beta, t), J_\gamma = 0; \\ H_\alpha &= \frac{H_\alpha^+ + H_\alpha^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\alpha^+ - H_\alpha^-), H_\beta = \frac{H_\beta^+ + H_\beta^-}{2} + \frac{\gamma}{h}(H_\beta^+ - H_\beta^-), H_\gamma = H_\gamma(\alpha, \beta, t), \end{aligned} \quad (8)$$

Зауважимо, що група електродинамічних гіпотез (8) є відповідним аналогом групи механічних гіпотез Кірхгофа-Лява теорії оболонок.

Використовуючи варіаційний принцип, з урахуванням гіпотези Кірхгофа-Лява та електродинамічних гіпотез, отримуємо рівняння магнітопружності гнучких оболонок [3, 4, 12]:

- рівняння руху

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_\alpha) - N_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2S) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A\tilde{H}}{R_\alpha} \right) + \frac{1}{R_\beta} \frac{\partial A}{\partial \beta} \tilde{H} + \frac{AB}{R_\alpha} Q_\alpha + AB(f_\alpha + \rho f_\alpha^\wedge) &= AB\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_\beta) - N_\alpha \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2S) + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B\tilde{H}}{R_\beta} \right) + \frac{1}{R_\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tilde{H} + \frac{AB}{R_\beta} Q_\beta + AB(f_\beta + \rho f_\beta^\wedge) &= AB\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AQ_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A\tilde{H}}{R_\alpha} \right) - AB \left(\frac{N_\alpha}{R_\alpha} + \frac{N_\beta}{R_\beta} \right) + AB(f_\gamma + \rho f_\gamma^\wedge) &= AB\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(BM_\alpha) - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2\tilde{H}) - ABQ_\alpha - AB \left(N_\alpha - \frac{M_\beta}{R_\beta} \right) \vartheta_\alpha - ABS\vartheta_\beta &= AB\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_\alpha}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(AM_\beta) - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2\tilde{H}) - ABQ_\beta - AB \left(N_\beta - \frac{M_\alpha}{R_\alpha} \right) \vartheta_\beta - ABS\vartheta_\alpha &= AB\rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \vartheta_\beta}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (9)$$

- рівняння електродинаміки

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} &= \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial(BE_\beta)}{\partial \alpha} - \frac{\partial(AE_\alpha)}{\partial \beta} \right); \\ \sigma \left[E_\alpha + \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_\beta^+ + B_\beta^-)}{2} \right] &= \frac{1}{B} \left(\frac{\partial H_\gamma}{\partial \beta} - \frac{B(H_\beta^+ - H_\beta^-)}{h} \right); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sigma \left[E_\beta - \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_\beta^+ + B_\beta^-)}{2} \right] = \frac{1}{A} \left(-\frac{\partial H_\gamma}{\partial \alpha} + \frac{A(H_\alpha^+ - H_\alpha^-)}{h} \right).$$

Тут через $\rho f_\alpha^\wedge, \rho f_\beta^\wedge, \rho f_\gamma^\wedge$ позначено проєкції пондеромоторної сили на координатні осі, які визначаються таким чином

$$\begin{aligned} \rho f_\alpha^\wedge &= -h J_{\beta cm} B_\gamma + \sigma h \left[E_\beta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_\beta^+ + B_\beta^-)}{2} B_\gamma \right]; \\ \rho f_\beta^\wedge &= h J_{\alpha cm} B_\gamma + \sigma h \left[-E_\alpha B_\gamma - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_\beta^+ + B_\beta^-)}{2} B_\gamma \right]; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \rho f_\gamma^\wedge &= \frac{h}{2} [-J_{\alpha cm} (B_\beta^+ + B_\beta^-) + J_{\beta cm} (B_\alpha^+ + B_\alpha^-)] + \frac{\sigma h}{2} [E_\alpha (B_\beta^+ + B_\beta^-) - E_\beta (B_\alpha^+ + B_\alpha^-)] + \\ &+ \frac{\sigma h}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial t} (B_\beta^+ + B_\beta^-) B_\gamma + \frac{\partial u}{\partial t} (B_\alpha^+ + B_\alpha^-) B_\gamma \right] - \frac{\sigma h}{4} \frac{\partial w}{\partial t} [(B_\beta^+ + B_\beta^-)^2 + (B_\alpha^+ + B_\alpha^-)^2] \end{aligned}$$

Складові сили Лоренца визначаються в залежності від швидкості деформацій оболонки, від величини, густини і орієнтації струму провідності відносно магнітного поля.

У виразах (9–11) введені наступні позначення:

N_α, S, Q_α – нормальне, дотичне та поперечне зусилля в перерізі $\alpha = const$; N_β, S, Q_β – аналогічні фактори в перерізі $\beta = const$; $M_\alpha, M_\beta, \tilde{H}$ – згинальні та скручувальний моменти в перерізі $\alpha = const, \beta = const$ відповідно; u, v, w – компоненти переміщень; $\vartheta_\alpha, \vartheta_\beta$ – кути повороту нормалі; R_α, R_β – головні радіуси кривизни оболонки; E, v – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона; A, B – коефіцієнти Ламе серединної поверхні оболонки; E_α, E_β – компоненти вектора напружень електричного поля; H_γ – нормальна складова напруженості магнітного поля; $B_\alpha^\pm, B_\beta^\pm$ – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки.

При отриманні рівнянь магнітопружності використано геометричні співвідношення у вигляді

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha} + \frac{1}{2} \vartheta_\alpha^2; \quad \epsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta} + \frac{1}{2} \vartheta_\beta^2; \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \vartheta_\alpha \vartheta_\beta; \quad \chi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_\beta; \quad \chi_{\beta\beta} = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_\alpha; \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \vartheta_\beta}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta_\alpha + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \vartheta_\beta \right) + \frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) + \frac{1}{R_\beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right); \\ \vartheta_\alpha &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha}; \quad \vartheta_\beta = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta}. \end{aligned} \tag{12}$$

НЕЛІНІЙНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ МАГНІТОПРУЖНОСТІ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ. Розглянемо осесиметричну нелінійну задачу магнітопружності про напружено-деформівний стан кільцевої пластини змінної жорсткості вздовж радіуса, яка знаходиться під дією нестационарного магнітного поля та механічного навантаження з урахуванням джоулевого тепла. Пластина пружна ізотропна, виготовлена з матеріалу скінченної провідності. Пластина є провідником рівномірно розподіленого стороннього електричного струму густини \vec{J}_{cm} .

Нехай задача магнітостатики для збуреного стану розв'язана, тобто відомі вектори магнітної індукції вихідного стану для зовнішньої і внутрішньої областей. За координатну площину вибираємо серединну поверхню пластини, віднесено до полярної системи координат r, θ , координата γ відраховується по нормалі до серединної площини (рис. 1).

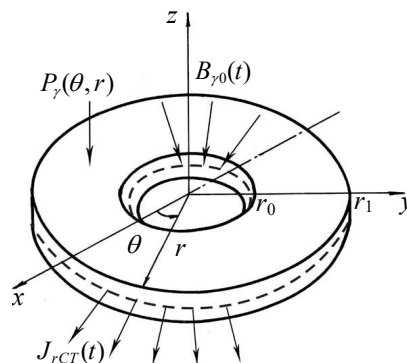


Рис. 1. Кільцева пластина

Припускаючи, що всі шукані компоненти збуреного електромагнітного поля й поля переміщень не залежить від координати β (осесиметрична задача), покладемо

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = 0, \quad v = 0, \quad E_\alpha = 0, \quad B_\beta = 0, \quad f_\beta = 0, \quad \hat{f}_\beta = 0, \quad A = 1, \quad B = r. \quad (13)$$

Крім того враховуємо, що для пластини $\frac{1}{R_\alpha} = \frac{1}{R_\beta} = 0$, а також покладемо $\alpha = r, \beta = \theta$.

Враховуючи (13), з рівнянь (9–12) отримуємо вихідні рівняння в одновимірній за радіальною координатою постановці [3, 8, 9, 13]:

- рівняння руху

$$\frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + r(f_r + \rho \hat{f}_r) = r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + r(f_r + \rho \hat{f}_r) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta - rQ_r - rN_r \vartheta_r = 0; \quad (14)$$

- рівняння електродинаміки

$$-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}; \quad \sigma \left[E_\theta + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_\gamma}{\partial r} + \frac{B_r^+ - B_r^-}{\mu h}; \quad (15)$$

- вирази для деформацій

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\vartheta_r^2}{2}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \chi_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}, \quad \chi_\theta = \frac{\vartheta_r}{r}, \quad \vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}; \quad (16)$$

- співвідношення пружності

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - (1+\nu) \varepsilon_T]; \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r - (1+\nu) \varepsilon_T]; \quad M_r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_r + \nu \chi_\theta - (1+\nu) \chi_T];$$

$$M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\chi_\theta + \nu \chi_r - (1+\nu) \chi_T]; \quad \varepsilon_T = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T(r, \gamma, t) d\gamma, \quad \chi_T = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_T T(r, \gamma, t) \gamma d\gamma; \quad (17)$$

- компоненти об'ємної сили Лоренца

$$\rho \hat{f}_r = h J_{\theta cm} r B_\gamma + \sigma h \left[E_\theta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} B_\gamma \right]; \quad (18)$$

$$\rho \hat{f}_\gamma = -\frac{h}{2} J_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\sigma h}{2} \left[\left(E_\theta + \frac{\partial u}{\partial t} \right) (B_r^+ + B_r^-) + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)^2}{2} \right].$$

Тут ε_T, χ_T – інтегральні характеристики температурного поля $T(r, \gamma, t)$, α_T – коефіцієнт лінійного температурно-го розширення.

ЕЛЕКТРОМАГНІТНИЙ ДЖОУЛЕВИЙ НАГРІВ. При розрахунку температури $T(r, \gamma, t)$ будемо використовувати рівняння балансу тепла у вигляді

$$C_v = \frac{\partial Q}{\partial t} = Q_{дж}, \quad (19)$$

де $Q_{дж}$ – джоулеве тепло, яке виділяється в результаті циркуляції в пластині вихрових струмів; C_v – питома теплоємність. При цьому використовуючи граничні умови (6), з рівняння (19) випливає, що температура буде сталою за товщиною пластини.

Слідуючи [5], рівняння (19) перетворюється у відоме рівняння теплопровідності з джерелом джоулевого тепла для гнучких пластин

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{C_\varepsilon^{сеп}} Q_{дж} + \lambda_T \Delta T, \quad (20)$$

де $C_\varepsilon^{сеп}$ – середнє значення питомої теплоємності при сталій деформації; λ_T – коефіцієнт теплової дифузії.

Густина магнітної енергії на одиницю об'єму описується функцією $W = \frac{(\vec{B}\vec{H})}{2}$, а кількість тепла, що виділяється густиною стороннього струму \vec{J} за одиницю часу (потужність джоулевого тепла на одиницю маси) дорівнює $Q_{дж} = \frac{\vec{J}\vec{E}}{\rho}$.

Використовуючи вираз для підрахунку джоулевого тепла, а також рівняння $rot\vec{H} = \sigma\vec{E}$, з міркувань теорії розмірності і на основі (20) можемо записати

$$T \approx T_0 + \frac{2\tilde{W}}{\rho C_\varepsilon^{сеп}} + \frac{\lambda_T}{\alpha_D} \tilde{T}, \quad \tilde{W} = \frac{\tilde{B}^2}{2\mu}, \quad (21)$$

де α_D – коефіцієнт дифузії магнітного поля.

Тут за характерний час прийнято час дифузії магнітного поля на віддаль \tilde{L} , тобто $\tilde{t} = \frac{\tilde{L}}{\alpha_D}$.

Так як для металів $\frac{\lambda_T}{\alpha_D} \ll 1$ (наприклад, для нержавіючої сталі $\frac{\lambda_T}{\alpha_D} \approx 0.8 \cdot 10^{-5}$), то з рівняння (21) випливає, що процесом теплопровідності в перехідному режимі можна знехтувати.

Таким чином, для кільцевої пластини маємо

$$T = T_0 + \frac{1}{\rho \mu C_{\varepsilon}^{cep}} \left[\frac{(B_r^+ + B_r^-)^2}{4} + B_{\gamma}^2 \right], \quad (22)$$

У подальшому, при розв'язанні конкретних задач магнітопружності будемо оцінювати напружено-деформівний стан пластини з урахуванням джоулевого тепла в залежності від величини магнітної індукції.

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ У ФОРМІ КОШІ. Припустимо, що шукані компоненти електромагнітного поля і поля переміщень не залежать від колової координати. У цьому випадку за розв'язувальні функції виберемо

$$u, w, \vartheta_r, N_r, Q_r, M_r, B_{\gamma}, E_{\theta}. \quad (23)$$

Використовуючи рівняння та співвідношення (14–18, 22, 23), після перетворень (див. [3, 8, 9, 13]) отримуємо повну систему нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності, яка описує напружено-деформівний стан струннесучих оболонок з урахуванням джоулевого тепла.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1-\nu^2}{Eh} N_r - \frac{\nu}{r} u - \frac{\vartheta_r^2}{2} + (1+\nu) \alpha_T T; & \frac{\partial w}{\partial r} &= -\vartheta_r; \\ \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} M_r - \frac{\nu}{r} \vartheta_r + (1+\nu) \alpha_T T; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= -J_{\theta cm} B_{\gamma} - \frac{1-\nu}{r} N_r + \frac{Eh}{r^2} u - f_r - \sigma h \left[E_{\theta} B_{\gamma} - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} B_{\gamma} \right] + \frac{Eh}{r} \alpha_T T + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} &= -\frac{Q_r}{r} + \sigma h \left[E_{\theta} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{(B_r^+ + B_r^-)^2}{4} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} B_{\gamma} \right] - f_{\gamma} + h J_{\theta cm} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &= -\frac{1-\nu}{r} M_r + \frac{Eh^3}{12r^2} \vartheta_r + Q_r + N_r \vartheta_r - \frac{Eh}{2} \alpha_T T; & \frac{\partial E_{\theta}}{\partial r} &= -\frac{\partial B_{\gamma}}{\partial t} - \frac{E_{\theta}}{r}; \\ \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial r} &= -\sigma \mu \left[E_{\theta} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{(B_r^+ + B_r^-)}{2} - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

тут $T(r, t)$ – обчислюється за виразом (22).

Розв'язувальна система рівнянь (24) є нелінійною гіперболічно-параболічною системою рівнянь восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Для визначення невідомих сталих, які з'являються в загальному розв'язку системи рівнянь після інтегрування, мають ставитися граничні умови на контурах пластини та доповнюватися початковими умовами. Граничні умови для функцій, що характеризують механічну частину задачі, задаються так само, як і у звичайній теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних функцій можуть задаватись через компоненти електромагнітного поля або комбінацію компонент магнітних і електричних полів.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ГНУЧКИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ДЖОУЛЕВОГО ТЕПЛА. Запропонована методика чисельного розв'язання нелінійних задач магнітопружності кільцевих пластин базується на послідовному використанні скінченно-різницевої схеми Ньюмарка [14], методів квазілінеаризації [2] та дискретної ортогоналізації [3, 4].

Представимо у векторному вигляді розв'язувальну систему кільцевої пластини (24)

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial r} = \vec{F}_1 \left(r, t, \vec{N}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \vec{N}}{\partial t^2} \right), \quad (25)$$

з граничними умовами

$$g_1 \vec{N}(r_0, t) = \vec{b}_1, \quad g_2 \vec{N}(r_N, t) = \vec{b}_2 \quad (26)$$

і початковими умовами

$$\vec{N} = 0, \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t = 0, \quad (27)$$

де $\vec{N} = \{u, w, \vartheta_r, N_r, Q_r, M_r, E_{\theta}, B_{\gamma}\}^T$ – вектор-стовпець шуканих функцій; \vec{F}_1 – в загальному випадку нелінійна вектор-функція; g_1, g_2 – прямокутні матриці; \vec{b}_1, \vec{b}_2 – відомі вектори.

Використання схеми Ньюмарка дозволяє весь часовий інтервал розбити на окремі малі інтервали і відслідковувати деформування пластини на кожному часовому інтервалі.

Після застосування цієї схеми розв'язувальну систему магнітопружності (24) для відповідного часового проміжку можна записати у такому вигляді

$$\frac{d\vec{N}}{dr} = F(r, \vec{N}). \quad (28)$$

Граничні умови на контурі $r = const$ мають вигляд

$$D_1 \vec{N} \Big|_{r=r_0} = \vec{d}_1, D_2 \vec{N} \Big|_{r=r_N} = \vec{d}_2, \quad (29)$$

де D_1, D_2 – задані прямокутні матриці відповідно порядків $k \times 8$ та $(8-k) \times 8, k < 8$; \vec{d}_1, \vec{d}_2 – задані вектори; k – число граничних умов на контурі $r = r_0$.

За допомогою метода квазілінеаризації вихідна крайова задача (28), (29) зводиться до послідовності лінійних крайових задач на кожному часовому інтервалі

$$\frac{d\vec{N}^{k+1}}{dr} = \vec{G}_1(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k), \quad B_1(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(r_0) = \vec{b}_1(\vec{N}^k), \quad B_2(\vec{N}^k) \vec{N}^{k+1}(r_N) = \vec{b}_2(\vec{N}^k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

де $\vec{N}^{k+1} = \{u^{k+1}, w^{k+1}, \vartheta_r^{k+1}, N_r^{k+1}, Q_r^{k+1}, M_r^{k+1}, E_\theta^{k+1}, B_\gamma^{k+1}\}^T$; \vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k – розв'язки відповідно на $(k+1)$ -й та k -й ітерації; $\vec{G}(\vec{N}^{k+1}, \vec{N}^k)$ – вектор правої частини системи рівнянь; $B_1(\vec{N}^k), B_2(\vec{N}^k), \vec{b}_1(\vec{N}^k), \vec{b}_2(\vec{N}^k)$ – відповідно матриці та праві частини граничних умов.

Кожна з лінійних крайових задач послідовності на відповідному часовому інтервалі розв'язується чисельно за допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації. На першому за часом кроці за початкове наближення в ітераційному процесі вибирається розв'язок крайової задачі в лінеаризованій постановці, на послідовних кроках – розв'язок отриманий на попередньому кроці. Вибір такої схеми значно зменшує кількість ітерацій необхідних для розв'язання задачі.

ВИСНОВКИ. Запропоновано нову фізичну модель і методику розрахунку нелінійної магнітопружної крайової задачі гнучкої кільцевої пластини з урахуванням джоулевого тепла. Побудовано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості. Запропонована методика розрахунку крайових задач магнітопружності кільцевих пластин, які знаходяться під дією нестационарних механічного та магнітного полів, дозволить визначити напружено-деформівний стан пластини змінної жорсткості при довільних крайових умовах, включаючи і нелінійні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – 272 с.
2. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
3. Григоренко Я. М., Мольченко Л. В. Основы теории пластин та оболонок з елементами магнітопружності. Підручник.-К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 403 с.
4. Григоренко Я. М., Мукоед А. П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. К.: Вышш. Школа, –1983. – 286 с.
5. Дресвянников В. И. О нестационарных задачах механики упруго-пластических проводящих тел при действии сильных импульсных магнитных полей //Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 19. – С. 32–47.
6. Зоммерфельд А. Электродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968.– 501 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
8. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Федорченко Л. Н. Исследование влияния стороннего тока на напряженное состояние ортотропной кольцевой пластины с ортотропной электропроводностью //Прикл. мех. – 2014. – Т. 50. № 6. С. 90–96.
9. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Федорченко Л. Н. //Прикл. мех.-2016. – Т. 52. №1 С. 86–94.
10. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. – М.: Л.: ГТТИ, 1948. – 624 с.
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – Наука, 1976. – 616 с.
12. Green A. E., Naghdi P. M. On electromagnetic effects in the theory of shells and plates //Phil. Trans. Roy. Soc. – London. – 1983, – A309, P. 559–610.
13. Mol'chenko L. V. Influence of an Extraneous Electric Current on the Stress of an Annular Plate of Variable Rigidity // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37. № 12. – P. 1607–1611.
14. Newmark N. M. Method of Computation for Structural Dynamics //J. end Mech. Div. Proc. ASCE. – 1959. – 85, № 7. – P. 67–97.

Стаття надійшла до редколегії 23.02.16

Мольченко Л., д-р. физ.-мат. наук, проф.,

Николаевский национальный университет им. В. А. Сухолинского, Николаев

Федорченко Л., асп., КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

Колесник С., инж., Николаевский национальный университет им. В. А. Сухолинского, Николаев

МАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТИ С УЧЕТОМ ДЖОУЛЕВОГО НАГРЕВА

Приведена постановка задачи и получена разрешающая система гибкой кольцевой пластины с учетом джоулевого нагрева. Предложена методика решения нелинейной задачи магнитоупругости кольцевой пластины переменной жёсткости.

Mol'chenko L., Full Doctor, Prof, V. O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv

Fedorchenko L., PhD graduate, Taras Shevchenko National university of Kyiv

Kolesnik S., Engineer, V.O. Sukhomlinsky Mykolaiv National University, Mykolaiv

MAGNETOELASTICITY OF DEFORMATION FLEXIBLE ANNULAR PLATE OF VARIABLE STIFFNESS WITH THE JOULE HEATING

The problem statement is given. The resolving system of flexible annular plates taking into account the Joule heating is obtained. The offered technique for solving the nonlinear problem of magnetoelasticity annular plate of variable stiffness is proposed.

УДК 539.3

M. Hashemi, Postgraduate Student,
Y. Zhuk, Dr. Sci., Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv
y.zhuk@i.ua, moh.hashemi2013@gmail.com

INFLUENCE OF FREQUENCY AND AMPLITUDE OF HARMONIC LOADING ON COMPLEX MODULI FOR POLYMER MATERIALS

This paper is devoted to the modeling and characterization of cyclic response of polymers subjected to monoharmonic kinematic loading. To predict the time dependent behavior of the polymeric materials, the Goldberg constitutive model is used. To simulate the response in terms of amplitudes, the relations between the amplitudes of main field variables are established with making use of complex moduli concept. Characterization of the complex moduli dependence on frequency as well as amplitude of strain intensity is performed. Results demonstrate a weak dependence of loss moduli on the frequency of the loading within the wide interval of it.

Introduction. Harmonic loading of a viscoelastic or elasto-plastic material (beyond the elastic domain) yields a hysteresis loop in the stress-strain relationship. Such a loop indicates that part of the strain energy is not recovered but dissipated during the cycle. This phenomenon is usually called the "dissipative heating" [1, 11]. Their viscoelastic responses become more significant under high loading levels and severe environmental conditions and are often accompanied by inelastic deformations. This self-heating effect caused by mechanical energy dissipation in polymer materials subjected to harmonic loads is considered to have a great influence on the residual life of the component. Therefore taking account of this effect is important for characterization of a material response at different excitation frequencies and temperatures. Concerning polymeric materials, the effect of hysteretic heating has been clearly shown to dramatically affect the mechanical response of the material [3].

There are currently two approaches to address this issue. In the first approach, the complex set of constitutive equations governing response of numerous internal parameters is introduced. The relationship between these parameters and the strain and temperature history yields evolution equations, which account for both dynamic recovery, and also creep. For polymers, the constitutive modeling utilizes, either directly or with some modifications, viscoplastic constitutive equations which have been developed for metals. The generalized yield theories of Schapery, Perzyna, Frank and Brockman, Goldberg and others [2, 4, 6, 10] apply to identify this relationship. It is generally admitted that to describe the material time dependent behavior accounting for different features and peculiarities over the cycle of vibration, a direct integration of the set of constitutive equations is necessary.

Within the second approach, the approximate amplitude relations are used to characterize the cyclic response of the material, i.e. the relations between amplitudes of the main mechanical field parameters over the cycle [9]. Naturally, the application of this technique is justified for the class of problems where there is no need for detailed information on the material response during the cycle (life prediction of the structure, failure due to overheating as a result of internal dissipation etc.). The key point of the amplitude theories is concept of complex moduli [9]. For an inelastic (particularly viscoelastic) material, the modulus governing the relation between strain and stress amplitudes is represented by a complex quantity with real and imaginary parts referred to as storage and loss modulus respectively. The former characterizes elastic response of material and the latter one defines the dissipative ability of the material [1]. In other words, the energy is stored during the loading part of cycle and released under unloading phase, whereas the energy loss occurs during complete cycle due to dissipative properties of the material. The drawback of the approach was the overestimation of stress amplitudes as a result of making use of standard equivalent linearization technique for calculation of both storage and loss moduli. To overcome this difficulty, the modified scheme was proposed in [9, 11]. But applicability of the method should be verified for each particular type of the material.

Considering the importance of examination of self-heating effect under cyclic loading in polymeric materials, researches done on time dependent behavior of polymeric materials are mainly aimed to study the viscoelastic behavior in different frequency application over wide ranges of loading amplitudes. These researches show that, the temperature will change with respect to the frequency spectrum of cyclically loading due to the stress relaxation processes in the material, thus it is necessary to determine the dependence of the modal characteristics in a frequency domain on mechanical properties.

This paper is devoted to investigation of the technique applicability to the typical viscoelastic materials such as PR-520, and to determination the frequency effect on complex moduli for isothermal loading case for wide range of loading amplitudes. Particular attention will be paid to simulation of cyclic response of pure polymer material (PR-520) to monoharmonic kinematic loading in the frame of the second approach.

Time dependent constitutive relations. To accurately predict an overall performance and lifetime of polymer, it is necessary to model time dependent and inelastic responses. Viscoelastic materials such as polymer materials have the peculiarity of possessing viscous, elastic and, under some conditions, plastic behavior. Constitutive material models of viscoelastic solids have been proposed for isotropic materials undergoing small deformation gradients whereas the inelastic strain can be calculated as the difference of the total strain and elastic strain.

Goldberg et al. [5,6] proposed a model for predicting the viscoplastic response of neat polymers, utilizing a set of state variables as an indication of the resistance of polymeric chains against flow. It should also be mentioned that polymer's mechanical properties and loading/strain rate are the two main parameters that govern the nonlinear response of the polymer. The formulation employed in this model is based on that used by Pan and co-workers [8]. First, an inelastic potential function based on the Drucker-Prager yield criterion [7] is defined as

$$f = \sqrt{J_2} + \alpha \sigma_{kk}, \quad (1)$$

where J_2 is the second invariant of the deviatoric stress tensor that can be expressed as a function of σ_{ij} . The variable σ_{kk} is the sum of the normal stress components and is equal to three times the hydrostatic stress.

The variable α is a state variable which controls the level of the hydrostatic stress effects. According to this model, the inelastic strain components can be expressed in terms of the deviatoric stress components as follows

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = 2D_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma_e}\right)\right)^{2n} \left(\frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} + \alpha\delta_{ij}\right), \quad (2)$$

where, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ is the inelastic strain rate tensor which can be defined as a function of deviatoric stress and Z and α are the state variables.

Moreover, D_0 and n are material constants; D_0 represents the maximum inelastic strain rate and n controls the rate dependency of the material. The equivalent (effective) stress, also be defined as a function of the mean stress, such that the summation of the normal stress components σ_{kk} is three times of the mean stress, as follows

$$\sigma_e = \sqrt{3J_2} + \sqrt{3}\alpha\sigma_{kk}, \quad (3)$$

the evolution of the internal stress state variable Z and the hydrostatic stress state variable α are defined by the equations

$$\dot{Z} = q(Z_1 - Z)\dot{\varepsilon}_e^{in}, \quad (4)$$

$$\dot{\alpha} = q(\alpha_1 - \alpha)\dot{\varepsilon}_e^{in}, \quad (5)$$

where q is a material constant representing the "hardening" rate, and Z_1 and α_1 are material constants representing the maximum values of Z and α , respectively.

The initial values of Z and α are defined by the material constants Z_0 and α_0 . The term $\dot{\varepsilon}_e^{in}$ in equations (4) and (5) represents the effective deviatoric inelastic strain rate, which was defined as follows

$$\dot{\varepsilon}_e^{in} = \dot{\varepsilon}_e^{in} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}, \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - \dot{\varepsilon}_m^{in} \delta_{ij}, \quad (7)$$

where $\dot{\varepsilon}_e^{in}$ is the effective deviatoric inelastic strain rate and $\dot{\varepsilon}_m^{in}$ is the mean inelastic strain rate, which matches the effective inelastic strain rate definition given by Pan and co-workers [8].

The material constants Z_0 , Z_1 , α_1 , α_0 , n and D_0 can be determined using the shear stress-strain and tensile or compression stress-strain curves, obtained by experiments conducted under constant strain rates on neat polymers. Empirically, it has been shown that the value of D_0 , quantitatively, can be set equal to 10^6 times the maximum applied total strain rate; qualitatively, it is the restricting (controlling) value of the inelastic strain rate. The values of Z_1 and n can be identified using the shear stress-strain curves constructed under various strain rates. The plateau region of the effective stress under a uniaxial tensile loading at a particular strain rate, corresponds to the saturation region of the effective stress obtained under pure shear loading.

Complex moduli approach. Harmonic loading is one of the most widely used and important types of loadings imposed upon a mechanical structure. In this investigation, approximate model of inelastic behavior developed in [9,11] for the case of proportional harmonic loading has been used. In this case, the cyclic properties of the material are described in terms of complex moduli. It is important to notice that the inelastic deformation is considered to be incompressible and thermal expansion is dilatational, it may be more convenient in some applications to separate the isotropic stress-strain relations into deviatoric and dilatational components that can be shown by equations as

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{in}), \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon^{\theta}), \quad (8)$$

where G is the shear modulus, K_V is the bulk modulus, $i, j, k = 1, 2, 3$ and repeated index implies a summation over.

Due to incompressibility of plastic deformation, $\dot{\varepsilon}_{kk}^{in} = 0$, i.e. the plastic strain rate is deviatoric: $\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$.

According to this model, if a body as a system subjected to harmonic deformation or loading, then its response is also close to harmonic law

$$e_{ij}(t) = e'_{ij} \cos \omega t - e''_{ij} \sin \omega t, \quad s_{ij}(t) = s'_{ij} \cos \omega t - s''_{ij} \sin \omega t. \quad (9)$$

The complex amplitudes of the deviator of total strain, \tilde{e}_{ij} , inelastic strain, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{in}$, and the stress deviator, s_{ij} , are related in the N^{th} cycle by the complex shear modulus, \tilde{G}_N , and plasticity factor, $\tilde{\lambda}_N$, as shown below

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}\tilde{e}_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^{in} = \tilde{\lambda}\tilde{e}_{ij}, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

here

$$\tilde{e}_{ij} = e'_{ij} + ie''_{ij}, \quad \tilde{s}_{ij} = s'_{ij} + is''_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^{in} = \varepsilon'^{in}_{ij} + i\varepsilon''^{in}_{ij}, \quad \tilde{G} = G'_N + iG''_N, \quad \tilde{\lambda}_N = \lambda'_N + i\lambda''_N, \quad (11)$$

and N is the cycle number; $(\cdot)'$ and $(\cdot)''$ denote the real and imaginary parts of complex quantities.

The shear modulus and plasticity factor are functions of the intensity of the strain-range tensor, frequency and temperature

$$\tilde{G} = \tilde{G}_N(e_0, \omega, \theta), \quad \tilde{\lambda}_N = \tilde{\lambda}_N(e_0, \omega, \theta), \quad (12)$$

where the square of the intensity of strain-range tensor is calculated as $e_0^2 = e'_{ij}e'_{ij} + e''_{ij}e''_{ij}$.

The imaginary parts of the complex moduli are determined from the condition of equality of the energies dissipated over a period and are calculated according to the formula

$$G_N'' = \frac{\langle D' \rangle_N}{\omega e_0^2}, \quad \lambda_N'' = \frac{G_N''}{G_0}, \quad \langle (\cdot) \rangle_N = \frac{1}{T} \int_{T(N-1)}^{TN} (\cdot) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (13)$$

where D' is the rate of dissipation of mechanical energy, G_0 is the elastic shear modulus.

The real parts are found with making use of the condition that generalized cyclic diagrams $s_{aN} = s_{aN}(e_0, \omega)$ and $e_{paN} = e_{paN}(e_0, \omega)$, which relate the ranges of the stress and plastic-strain intensities in the N^{th} cycle, coincide in the frame of the complete and approximate approaches

$$G_N'(e_0, \omega) = \left[\frac{s_{aN}^2(e_0, \omega)}{4e_0^2} - G_N''^2(e_0, \omega) \right]^{1/2}, \quad (14)$$

$$\lambda_N'(e_0, \omega) = \left[\frac{s_{aN}^2(e_0, \omega)}{4e_0^2} - \lambda_N''^2(e_0, \omega) \right]^{1/2},$$

where G' and λ' are the sought-for real part of shear modulus and plasticity factor.

In spite of the fact that the single-frequency approximation based on harmonic linearization has a well agreement with precise model of nonlinear behavior, it's necessary to analyze its practical accuracy for specific classes of problems.

As mentioned in the introduction, the second approach is based on the concept of complex moduli, which are determined by standard and modified techniques of equivalent linearization. It is important to notice that, the imaginary parts of complex moduli are defined by the exact expression for rate of dissipation averaged over the period of cyclic loading while to improve the accuracy of real parts of complex moduli the modified approach is proposed as shown in equation (14). According to equation (12), the complex moduli for isothermal loading case depend on the frequency and amplitude of kinematic loading only. The purpose of this paper is to investigate the influence of these parameters on complex moduli.

Numerical technique and the material properties. In the present work, as it was mentioned above, due to significant nonlinearity of the stiff type, the numerical integration of Goldberg equations was adopted. To solve the implicit equation (2), one should utilize an appropriate numerical discretization technique. Three step scheme of attacking the problem of complex moduli determination was designed. At the first step, the elastic-viscoplastic response of the material to harmonic deformation was calculated by numerical technique for different amplitudes of loading strain at different frequencies. At the second step, the stabilized cyclic stress-strain and inelastic-strain-strain diagrams were obtained for the whole set of calculated data. At the final step, the complex moduli were calculated by the averaging over the period of vibration of the results of direct integration and making use of cyclic diagrams and formulae (13) and (14). The system of nonlinear ordinary differential equations that describes the polymer response to harmonic loading in the case of pure shear consists of the one-dimensional equations of Goldberg model comprising equations (2), (4), (5) and evolutionary equations

$$\dot{\varepsilon}_{12}^{in} = 2D_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z^2}{3S_{12}^2}\right)^n\right) \left(\frac{S_{12}}{2|S_{12}|}\right), \quad (15)$$

$$\dot{Z} = \frac{2}{\sqrt{3}} q D_0 (Z_1 - Z) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z^2}{3S_{12}^2}\right)^n\right) \left(\frac{S_{12}}{|S_{12}|}\right), \quad (16)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} q D_0 (\alpha_1 - \alpha) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z^2}{3S_{12}^2}\right)^n\right) \left(\frac{S_{12}}{|S_{12}|}\right). \quad (17)$$

The law of strain deviator variation $e = e_0 \sin \omega t$, as well as Hooke law for shear stress

$$s_{12} = 2G(e_{12} - \varepsilon_{12}^{in}), \quad (18)$$

should be added to the system.

The values of material constants for RP-520, which were used for calculations, have been taken from [5]. The list of the values is given below

$$E = 3250 \text{ MPa}, \quad D_0 = 10^6 \text{ 1/sec}, \quad n = 0.92, \quad q = 253.6,$$

$$Z_0 = 407.5 \text{ MPa}, \quad Z_1 = 768.6 \text{ MPa}, \quad \alpha_0 = 0.571, \quad \alpha_1 = 0.122, \quad \nu = 0.4.$$

Numerical results and discussion. The results of transient response simulation and frequency effects (short and long times) on the complex moduli in the frame of modified technique described above are presented. Evolution of stress and inelastic strain for epoxy resin (PR-520) under harmonic loading in pure shear with strain amplitude $e_0 = 5.5 \cdot 10^{-2}$ are shown in Fig. 1 and Fig. 2 respectively for frequency 1 Hz. The material demonstrates cyclically stable response over the whole interval of loading amplitudes and frequencies investigated. According to Fig. 3, stabilization of the response amplitude occurs after the several initial cycles. Relatively slow stabilization is observed only in the vicinity of yield point. Fig. 4 illustrates the mechanical hysteresis phenomenon under cyclic loading in the maximum dissipation condition ($e_0 = 5.5 \cdot 10^{-2}$) at the frequency 1 Hz.

As it was mentioned earlier, this actual loop can be approximated with making use of either standard or modified equivalent linearization scheme. In the same figure, the actual loop (line 1) is shown along with the loops calculated in the frame of standard (line 2) and modified (line 3) equivalent linearization techniques.

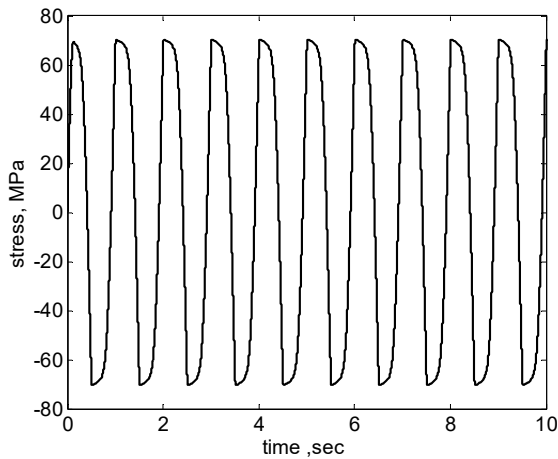


Fig. 1. Stress evolution under harmonic loading

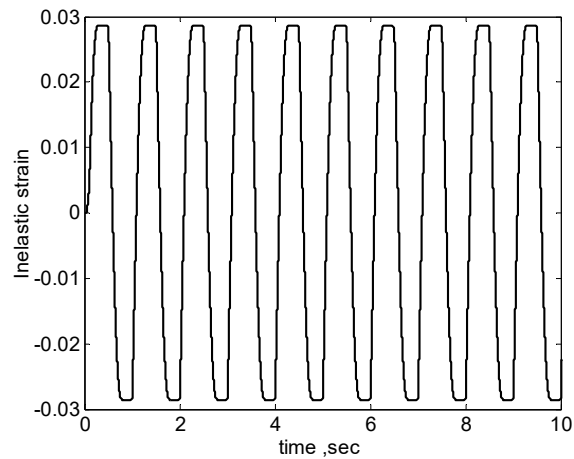


Fig. 2. Inelastic strain evolution under harmonic loading

The cyclic diagrams at stabilized stage of the vibration $s_a = s_a(e_0)$ (i.e. concretization of general cyclic diagram $s_{aN} = s_{aN}(e_0, \omega)$ used in the formulae (14) for $N \rightarrow \infty$) are shown in Fig. 5. The curves are calculated for cyclic pure shear for different frequencies (1, 50, 100 Hz). The effect of frequency is easily observable. Two order of magnitude variation in frequency leads to approximate 20 % change in stress amplitude at the stage of advanced deformation.

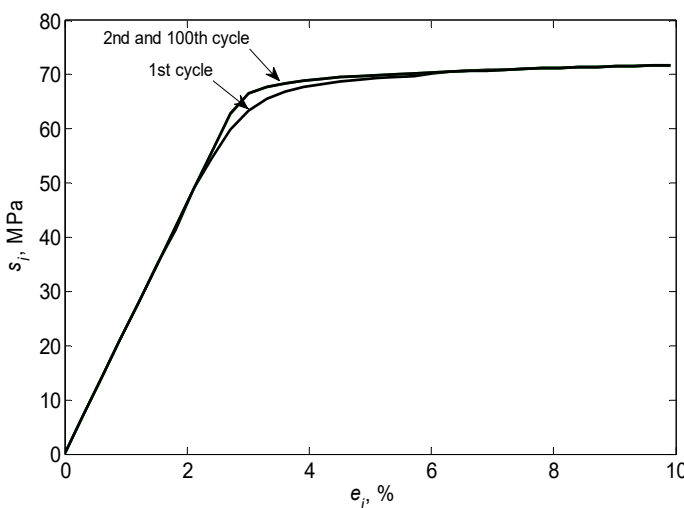


Fig. 3. Stabilized cyclic diagram for PR-520 at 1 Hz

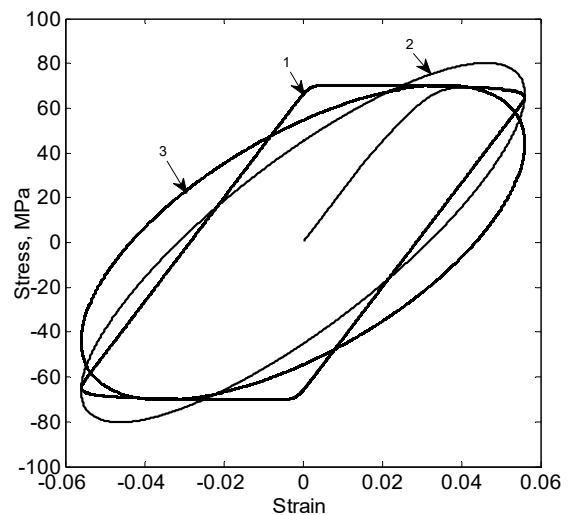


Fig. 4. Hysteresis loops

Using the cyclic diagram and making use of the formulae (13) and (14), the imaginary and real parts of the complex moduli (the loss moduli G'' and λ'' , storage moduli G' and λ') in the frame of modified equivalent linearization scheme are determined. The improved values of G' and G'' have been found according to the modified scheme for different frequencies at steady-state cyclic regime and constant temperature. Dependency of storage modulus, G' , and loss modulus, G'' , on the amplitude of strain, e_0 , and frequency for the PR-520 are shown in Fig.6. for 1, 50, 100 Hz by solid, circle-solid and dashed lines, respectively. This figure and cyclic diagram show the inelastic behavior will be started at higher strain amplitude with increase of frequency.

The trend of storage moduli behavior presented in Fig. 6 show that the G' values increase with increase of frequency. The loss modulus varies slightly. The peak values of the modulus increase insignificantly. Within the interval of interest between 1 and 100 Hz, the maximum in loss modulus occurs in the vicinity of 6% of strain intensity. For higher values of strain intensity, the loss modulus decreases.

Conclusions. In this paper, Goldberg model was used to simulate the time dependent response of PR-520. Obtained histories of main field variables evolution were used to find the stress–strain cyclic diagram and real as well as imaginary parts of complex shear modulus with making use of both standard and modified equivalent linearization techniques over wide range of frequency and amplitude.

Results of calculations show evidently that, the strength of material increases with increase of frequency. The sensitivity of cyclic diagrams to frequency variations at the low values is more profound than at the region of higher frequency (see Fig.5). It's important to notice that with the increase of strength of material the sensitivity to frequency is reduced. Therefore the behavior of saturation type is clearly exhibited. In general, it is possible to conclude that complex moduli demonstrate the weak dependence on the frequency within the interval investigated.

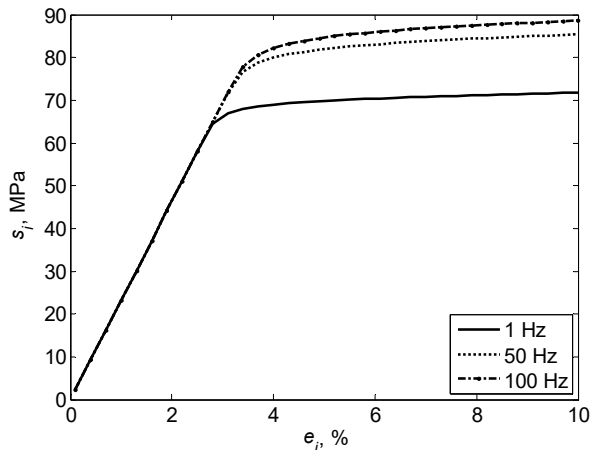


Fig. 5. Cyclic diagram for PR-520 at 1, 50, 100 Hz

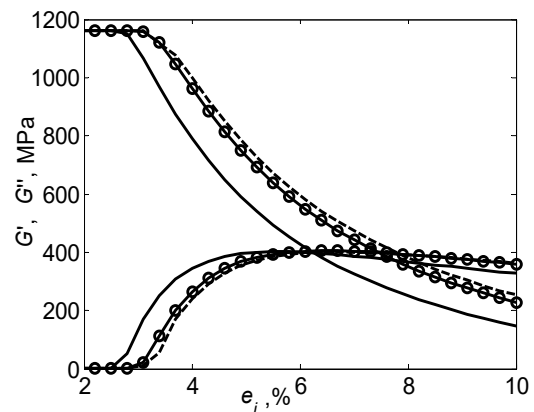


Fig. 6. The real and imaginary parts of complex modulus at various frequencies

REFERENCES

1. Beards C. E. Structural Vibration: Analysis and Damping. – London, 1996.
2. Bodner S. R., Partom Y. Constitutive equations for elasto-viscoplastic strain hardening material / Trans. ASME, J. Appl. Mech. – 1975. – Vol. 42. – P. 385–389.
3. Constable I., Williams J. G., Bums D. J. Fatigue and thermal softening of thermoplastics // J. Mech. Eng. Sci. – 1970. – Vol. 12. – P. 20–29.
4. Frank G. J., Brockman R. A. A viscoelastic-viscoplastic constitutive model for glassy polymers // Int. J. Solids Struct. – 2001. – Vol. 38 – P. 5149–5164.
5. Gilat A., Goldberg R. K., Roberts G. D. Strain rate sensitivity of epoxy resin in tensile and shear loading // Journal of Aerospace Engineering. – 2007. – Vol. 20, No. 2. – P. 75–89.
6. Goldberg R. K. Computational simulation of the high strain rate tensile response of polymer matrix composites – 2002. – NASA Report, NASA/TM-2002-211489.
7. Khan A.S., Huang S. Continuum Theory of Plasticity. – New York, 1995.
8. Li F.Z., Pan J. Plane-Stress Crack-Tip Fields for Pressure-Sensitive Dilatant Materials // Journal of Applied Mechanics. – 1990. – Vol. 57. – P. 40–49.
9. Senchenkov I. K., Zhuk Y. A., Karnaukhov V. G. Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40. – P. 943–969.
10. Zairi F., Woznica K., Nai A. M. Phenomenological nonlinear modeling of glassy polymers // C. R. Mecanique. – 2005. – Vol. 333. – P. 359–364.
11. Zhuk Y. A., Senchenkov I. K. Modeling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40. – P. 546–556.

Стаття надійшла до редколегії 22.02.16

Хашемі М., асп.

Жук Я., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ВПЛИВ ЧАСТОТИ І АМПЛІТУДИ ГАРМОНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА КОМПЛЕКСНІ МОДУЛІ ПОЛІМЕРНИХ МАТЕРІАЛІВ

Проведено моделювання і характеристизацію реакції полімерного матеріалу на моногармонічне кінематичне навантаження. Для описання нестационарної поведінки полімеру використані визначальні рівняння моделі Голдберга. Для моделювання реакції матеріалу в термінах амплітуд встановлені амплітудні співвідношення для основних польових змінних. Для цього використано концепцію комплексних модулів. Досліджено залежність комплексних модулів від частоти та амплітуди інтенсивності деформацій. Показано, що коефіцієнт втрат демонструє низьку залежність від частоти навантаження в усьому дослідженому інтервалі частот.

Хашемі М., асп.

Жук Я., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ВЛИЯНИЕ ЧАСТОТЫ И АМПЛИТУДЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНЫЕ МОДУЛИ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Проведены моделирование и характеристизация реакции полимерного материала на моногармоническое кинематическое нагружение. Для описания нестационарного поведения полимера использованы определяющие уравнения модели Голдберга. Для моделирования реакции материала в терминах амплитуд установлены амплитудные соотношения для основных полевых переменных. Для этого использована концепция комплексных модулів. Исследована зависимость комплексных модулів от частоты и амплитуды интенсивности деформаций. Показано, что коэффициент потерь демонстрирует слабую зависимость частоты нагружения во всем исследованном интервале частот.

УДК 539.3

Н. Ободан, д-р техн. наук, Н. Гук, д-р фіз.-мат. наук, О. Магас, асп.
ДНУ імені Олесь Гончара, Дніпропетровськ
e-mail: nataly-guk@rambler.ru

НЕЙРОМЕРЕЖЕВІ МОДЕЛІ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Розглянуто застосування нейронної мережі для ідентифікації властивостей тонкостінної системи за результатами спостережень. Обґрунтовано можливість апроксимації залежності між результатами спостережень і невідомими функціями оберненої задачі за допомогою нейронної мережі. Подано результати тестування налаштованої мережі та результати ідентифікації функції розподілу товщини тонкостінної системи при використанні результатів спостережень, отриманих в умовах дії "шуму".

ВСТУП. Обернені задачі математичної фізики лежать в основі побудови моделі дійсності реального стану системи та передбачають визначення зовнішнього впливу або внутрішніх характеристик системи за інформацією, отриманою за допомогою тих або інших впливів.

Некоректність постановок обернених задач потребує розробки спеціальних підходів до їх розв'язання та створення методів для регуляризації [6]. Для розв'язання кожної задачі є необхідним використання алгоритмів оберненої прямої задачі та їх регуляризація, що суттєво ускладнює застосування вказаних методів для оцінки поточного стану деформівних систем у режимі on-line.

Альтернативним підходом є підхід, що ґрунтується на теоремі Колмогорова-Арнольда, згідно з якою кожна неперервна функція n змінних, що задана в одиничному кубі n -вимірного простору, може бути подана за допомогою операції додавання, множення та суперпозиції із неперервних функцій однієї змінної, тобто апроксимація розв'язку оберненої задачі $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може бути зображена через вимірні або розраховані значення змінних x_p , $p = \overline{1, n}$ у такий спосіб [3]:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q(u) \left[\sum_{p=1}^n \phi_q^p(x_p) \right], \quad (1)$$

де $h_q(u)$ – неперервні функції; $\phi_q^p(x_p)$ – стандартні функції, які не залежать від вибору функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

При цьому множина функцій, які апроксимуються за допомогою нейронних мереж із заданою неперервною нелінійною характеристичною функцією $h_q(u)$, є щільною у просторі неперервних функцій від вхідних сигналів [4].

Процедура (1) може бути реалізована із застосуванням нейронної мережі, в якій x_p , $p = \overline{1, n}$ – вхідна інформація про поведінку системи, а $f(x_1, \dots, x_n)$ – властивості системи, які визначаються.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглядається процедура моделювання оберненої задачі математичної фізики за допомогою інверсної нейронної мережі.

Моделювання зв'язку прямої задачі з використанням нейронної мережі не викликає складнощів, якщо оператор зв'язку між властивостями системи H та її реакцією на здійснений зовнішній вплив u є відомим, оскільки процедура не відрізняється від будь-якого методу дискретизації задачі для формування навчальної вибірки, призначеної для налаштування мережі.

Оператор зв'язку описується співвідношеннями прямої задачі, у ролі яких застосовуються рівняння математичної фізики (РМФ), тоді мережа моделює відомий оператор РМФ $u(H)$. Інверсна нейронна мережа моделює невідомий оператор зв'язку між властивостями системи $H(u)$ та її реакцією на здійснений зовнішній вплив, при цьому використовується та ж сама навчальна вибірка, що й при прямому моделюванні.

Для застосування запропонованого підходу необхідно:

- 1) занурити всі функції задачі у багатовимірні простори, елементи яких описують вхід-вихід мережі;
- 2) обрати спосіб зображення вхідного та вихідного векторів;
- 3) обґрунтувати можливість побудови вибірки, що забезпечує налаштування мережі;
- 4) побудувати навчальну вибірку для налаштування мережі;
- 5) сформулювати функцію похибки.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ. Використання апроксимації (1) для опису оберненого оператора задачі математичної фізики потребує доведення неперервності залежності невідомих оберненої задачі від функцій, значення яких спостерігаються.

Пряму задачу механіки деформівного твердого тіла сформульовано на області $\Omega = \{\Psi \mid \Psi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in R^3, a_1 \leq \xi_1 \leq b_1, a_2 \leq \xi_2 \leq b_2, a_3 \leq \xi_3 \leq b_3\}$ у вигляді:

$$L(H(\Psi))U(\Psi) = R(H) \quad (2)$$

$$\text{при } G(H(\Psi))U|_{\Gamma} = G_0, \quad (3)$$

$$S(U(H))|_{\gamma_k} = S^*,$$

де $\Psi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ – вектор просторових координат; $L(H)$, $G(H)$, G_0 – задані диференціальні оператори, які діють в області Ω та на контурі Γ області Ω відповідно; $H(\Psi)$ – невідома вектор-функція оберненої задачі; $U(\Psi)$ – век-

тор-функція невідомих прямої задачі при заданій вектор-функції H ; \bar{U} – область значень функції $U(\Psi)$; γ_k – частини границі Γ або області Ω , на яких відбувається спостереження; $R(H)$ – зовнішній вплив; $S(H, U)$ – значення спостережуваних функцій в областях γ_k , які обчислюються з розв'язку прямої задачі; S^* – значення спостережуваних функцій в областях γ_k , які вимірюються.

Розв'язок оберненої задачі описується як квазірозв'язок

$$H^* = \arg \min_{H \in \bar{H}} J(H) \quad (4)$$

де $J(H) = (S(U(H)) - S^*)^T (S(U(H)) - S^*)$; \bar{H} – множина, яка описує область значень вектор-функції $H(\Psi)$, тобто неперервність вектор-функції $H(\Psi)$ потребує неперервності функціонала $J(H)$.

Для опису властивостей множини \bar{H} розглянемо умову збіжності послідовності $\tilde{H}^m \subseteq \bar{H}$ до підпослідовності $H^m \subseteq \tilde{H}^m$, яка збігається до деякого елемента $H^* \in \bar{H}$. Компактність множини \bar{H} у гільбертовому просторі W^0 забезпечує цю умову.

Зобразимо структуру множини \bar{H} , як компактної множини, в такий спосіб:

$$\bar{H} : \left\{ H \mid H_{\min} \leq H \leq H_{\max}, a \leq \frac{dH}{du} \leq b, \frac{d^2H}{du^2} > 0 \right\},$$

де H_{\min}, H_{\max}, a, b – задані константи.

Теорема [2] стверджує, що якщо $H^m \subseteq \bar{H}$ – будь-яка послідовність елементів компакту \bar{H} , то при $H^m \rightarrow H^*$ та при $m \rightarrow \infty$ у нормі простору W^0 , послідовності збігаються:

$$U(H^m) \rightarrow U(H^*), S(U(H^m)) \rightarrow S(U(H^*)).$$

Звідси випливає, що функціонал $J(H)$ є неперервним, тобто якщо послідовність $H^m \subseteq \bar{H}$ збігається до елемента $H^* \in \bar{H}$ у нормі простору W^0 , $(H^m \rightarrow H^*)$, то числова послідовність $J(H^m)$ збігається до елемента $J(H^*)$.

З теореми Вейерштраса [1] випливає, що в цьому випадку задача мінімізації функціонала $J(H)$ на множині \bar{H} має, принаймні, один розв'язок, та будь-яка мінімізуюча послідовність збігається до множини

$$\bar{H}_0 = \left\{ H \in \bar{H} \mid J(H) = J_0, J_0 = \min_{H \in \bar{H}} J(H) \right\}$$

у нормі простору W^0 .

Слід також відмітити, що розв'язок лінійної задачі (2), (3) $U(H)$ є неперервним за змінної H , а відображення $\bar{H} \rightarrow \bar{U}$ є однозначним [5].

Тоді з топологічної лєми [6] випливає, що якщо метричний простір \tilde{H} відображається на метричний простір \tilde{U} , а \bar{U} – образ компакту $\bar{H} \subseteq \tilde{H}$ при цьому відображенні, відображення $\tilde{H} \rightarrow \bar{H}$ є неперервним та взаємно однозначним, то обернене відображення множини \bar{U} на множини \bar{H} , $(\bar{U} \rightarrow \bar{H})$ також є неперервним у метриці простору U .

Отже, функція H неперервне залежить від функції U в області \bar{H} , тобто апроксимація (1) можлива лише в області, де $H^* \in \bar{H}$.

Якщо використовувати для апроксимації розв'язку оберненої задачі $H(\Psi)$ відомі значення $S(U(H))$ шляхом занурення $H(\Psi)$ та $S(U(H))$ у багатовимірні простори відношення (1), то для реалізації апроксимації (1) можна використовувати інверсну багат шарову нейронну мережу (БНМ).

БНМ подається у символічній формі в такий спосіб

$$Q_{m_0, m_1, \dots, m_D}^D,$$

де D – число шарів в мережі; m_0 – число входів; m_i , $(i = \overline{1, D-1})$ – число базових елементів у i -их "прихованих" шарах; m_D – число базових елементів у вихідному D -шарі та водночас число виходів $q_1 \dots q_{m_D}$ БНМ.

Проміжний l -шар складається з m_l базових елементів. Зв'язки між базовими елементами шару відсутні. Виходи базових елементів l -го шару передають лише на входи базових елементів наступного $(l+1)$ -го шару. Вихід i -го елемента в l -му шарі може бути визначений у вигляді [4]:

$$q_i^{(l)} = f \left(\sum \alpha_{i,j}^{(l)} q_j^{(l-1)} + \alpha_{i,0}^{(l)} q_j^{(l-1)} \right) = f \left(S_i^{(l)} \right).$$

Аналогічно, у векторній формі:

$$q^{(l)} = f\left(\alpha^{(l)} q^{(l-1)} + \alpha_0^{(l)}\right), \quad l = \overline{1, D}$$

де $q^{(l)} = \{q_1^{(l)}, \dots, q_{n_i}^{(l)}\}^T$; $q^{(l-1)} = \{q_1^{(l-1)}, \dots, q_{n_i}^{(l-1)}\}^T$;

α^l – вектор вагових коефіцієнтів l -го шару; $\alpha^{(l)} = \{\alpha_0^{(l)}, \alpha_i^{(l)}, \dots, \alpha_{n_i}^{(l)}\}^T$.

Тоді апроксимація розв'язку оберненої задачі $H(X)$ через відомі значення $S(U(H))$ може бути зображена у такий спосіб:

$$H = f^D\left(\alpha_0^{(D)} + \alpha^{(D)} f^{D-1}\left(\alpha_0^{(D-1)} + \alpha^{(D-1)} f^{D-2} \times \dots \left(\alpha_0^{(l)} + \alpha^l f^{(l-1)}\left(\alpha_0^{(l-1)} + \alpha^{(l-1)} f^{(l-2)} \times \dots \left(\alpha_0^{(2)} + \alpha^2 f^1\left(\alpha_0^{(1)} + \alpha^{(1)} S(U)\right) \dots\right) \dots\right) \dots\right)\right), \quad (5)$$

де $H, S(U)$ – вектори дискретних значень функцій $H(\Psi), S(U^*(\Psi))$, які являють собою невідому вектор-функцію, що характеризує властивості розглянутої системи (включаючи зовнішні навантаження) та відому вектор-функцію, що описує спостережуваний відгук системи, відповідно.

У режимі навчання в якості вектора U^* виступає розв'язок прямої задачі механіки деформівного твердого тіла при відомих властивостях $H(\Psi)$.

Таким чином, входом інверсної нейромережі є вектор спостережуваних (вимірюваних) значень функції $S(U^*)$, а виходом – вектор значень функції, яка описує розв'язок оберненої задачі.

НАВЧАННЯ МЕРЕЖІ. Для формування входу-виходу мережі необхідно подати вектор-функції $H(\Psi)$ та $U(\Psi)$, а також $S(U(\Psi))$ у дискретній формі.

Виконується дискретизація функції $U(\Psi)$ на сітці $\Psi_n, n = \overline{1, N}$, тоді вектор значень відповідної вектор-функції у вузлах можна подати у вигляді $U = \{U_1, U_2, \dots, U_N\}$, де компонента $U_n = \{u_{n\xi_1}, u_{n\xi_2}, u_{n\xi_3}\}$, $n = \overline{1, N}$. Аналогічно вводяться сітки $\Psi_k, k = \overline{1, K}$ та $\Psi_p, p = \overline{1, P}$ для опису вектор-функцій $S(U(\Psi))$ та $H(\Psi)$, відповідно, тобто формуються вектори значень $S = \{S_k\}, k = \overline{1, K}$, $H = \{H_p\}, p = \overline{1, P}$.

Для дискретизації функцій $H(\Psi), U(\Psi)$ використовується метод скінчених елементів, після виконання відповідної процедури інтегрування й підсумовування матриць елементів формулюється система алгебраїчних рівнянь:

$$K(H^1) \cdot U = R(H^2) \quad (6)$$

$$S_\Gamma(H) \cdot U = \tilde{U},$$

де $K(H^1)$ – матриця жорсткості, яка залежить від властивостей H^1 ; $R(H^2)$ – невідомий вектор проєкцій зовнішніх навантажень на функції форми; $H = \{H^1, H^2\}$, $H^1 = \{H_i^1, \dots, H_k^1\}$, $H^2 = \{H_i^2, \dots, H_m^2\}$.

Для визначення вектора H використовується інформація

$$S_{\gamma_p}(U(H)) = S^* \Big|_{\gamma_p}, \quad p = \overline{1, P}, \quad (7)$$

де γ_p – дискретизована підобласть області Ω або частини границі Γ , S^* – вектор спостереження за реакцією системи.

При фіксованому значенні вектора H після розв'язання системи рівнянь (6) отримано значення $S_{\gamma_p}(U(H))$ у (7). Для визначення невідомого вектора H необхідно задовольнити рівність (7).

Із врахуванням апроксимації (5) сформульовано умову, яка еквівалентна (4)

$$\sum_{d=1}^D \left(S_{\gamma_k}^d(H(\alpha)) - S_d^* \right)^T \left(S_{\gamma_k}^d(H(\alpha)) - S_d^* \right) \Rightarrow \min_{\alpha \in \Lambda}, \quad (8)$$

де α – вектор значень вагових коефіцієнтів $\alpha^{(l)}, l = \overline{1, D}$; S^* – вектор, отриманий шляхом дискретизації функції $S^*(X)$; D – кількість числових експериментів.

Функціонал (8) використовується як функція похибки при налаштуванні мережі на навчальній вибірці.

ЧИСЕЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. Чисельний експеримент полягає в побудові множини розв'язків задачі (6)

$$Z^D = \{S^*(H_d), H_d, \quad d = \overline{1, D}\}$$

в області $\overline{H} : \{H \mid H_{\min} \leq H \leq H_{\max}\}$ із розміром елемента ΔH .

Навчання інверсної мережі (5) проводиться на D прикладах розрахунку Z^D , які використовуються для побудови вектора вагових коефіцієнтів α із застосуванням методу зворотного поширення похибки. Після навчання мережі на множині $\bar{H} : \{H \mid H_{\min} \leq H \leq H_{\max}\}$ отримуємо зв'язок

$$H = Q(S(U)), H \subseteq \bar{H},$$

де Q – неявний оператор, який описується нейронною мережею та здійснює відображення множини $U_d, d = \overline{1, D}$ на множини $H_d, d = \overline{1, D}$.

Прикладом реалізації запропонованого підходу є відновлення геометричних параметрів (товщини) циліндричної оболонки. Оболонка має геометричні параметри $L/R = 2, R/h = 100, h, R, L$ – товщина, радіус кривизни та довжина оболонки, матеріал оболонки характеризується модулем пружності $E = 2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ та коефіцієнтом Пуассона $\mu = 0,3$.

За допомогою методу скінченних елементів, який застосовувався для розв'язання прямої задачі для різних законів змінення товщини оболонки, було побудовано вибірку для навчання нейронної мережі. При цьому на значення товщини оболонки було накладено конструктивні обмеження $H_{\min} \leq H_i \leq H_{\max}$, виконано розбиття поверхні оболонки на N елементів, товщина кожного i -го елемента задана значенням $H_i, i = \overline{1, N}$, яке змінювалось із кроком $\Delta H = (H_{\max} - H_{\min})/20$. Навчальна вибірка складалася з D елементів, $D = C_N^M \frac{H_{\max} - H_{\min}}{\Delta H}$, де M – число елементів із товщиною $H_i \neq H_{\max}$. Мережа являла собою багатoshаровий перцептрон. Ідентифікацію параметрів за допомогою налаштованої нейромережі виконано як для елементів тестуючої вибірки, так і для "зашумлених" вхідних значень S_k .

На рис. 1 наведено результати ідентифікації значень товщини H та місцезнаходження області стоншення за довжиною оболонки L , отримані за допомогою нейронної мережі. Проведено порівняння з відомим вихідним розподілом товщини для елементів вибірки n . На рис. 1 використовуються такі позначення:

- квадрат (□...□) позначає вихідне значення товщини;
- плюс (+) позначає значення товщини, отримане за допомогою нейронної мережі;
- ромб (◇...◇) позначає вихідне місцезнаходження стоншення за довжиною оболонки;
- хрестик (x) позначає місцезнаходження стоншення, отримане за допомогою нейронної мережі.

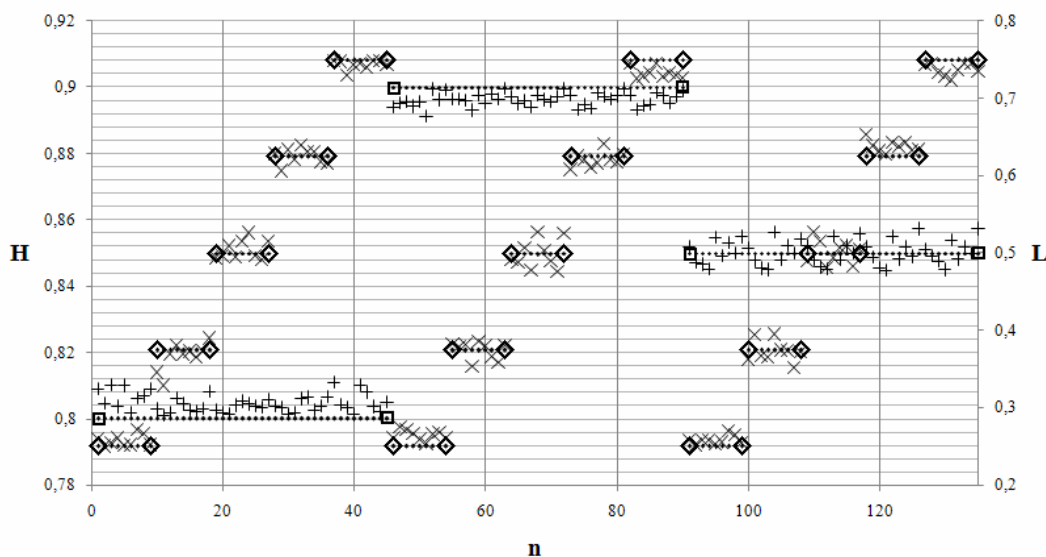


Рис. 1. Результати ідентифікації значень товщини та місцезнаходження області стоншення

З аналізу рис. 1 видно, що похибка апроксимації не перевищувала 3%.

З метою аналізу стійкості нейронної мережі до наявності "шуму" у вимірювальній системі, вхідні дані S^* задані із похибкою, яка моделювалась додаванням адитивної перешкоди \tilde{S}^* до обчисленого значення кожного з вхідних параметрів, у вигляді:

$$\tilde{S}^*(t) = 1 + \delta \cdot Rnd(t),$$

де δ – відносна похибка; $Rnd(t)$ – випадкове число з інтервалу $[-1, 1]$. Рівень "шуму" приймався рівним 5%, тобто $\delta = 0.05$.

На рис. 2 наведено результати ідентифікації товщини оболонки в умовах дії "шуму" у вимірювальній системі, використовуються позначення ідентичні позначенням на рис. 1.

Слід відмітити, що нейромережевий підхід є робастним щодо зовнішніх збурень вхідних даних та дозволяє отримати стійкий розв'язок оберненої задачі, похибка відновлення при використанні даних в умовах дії "шуму" зростає незначно до 5%.

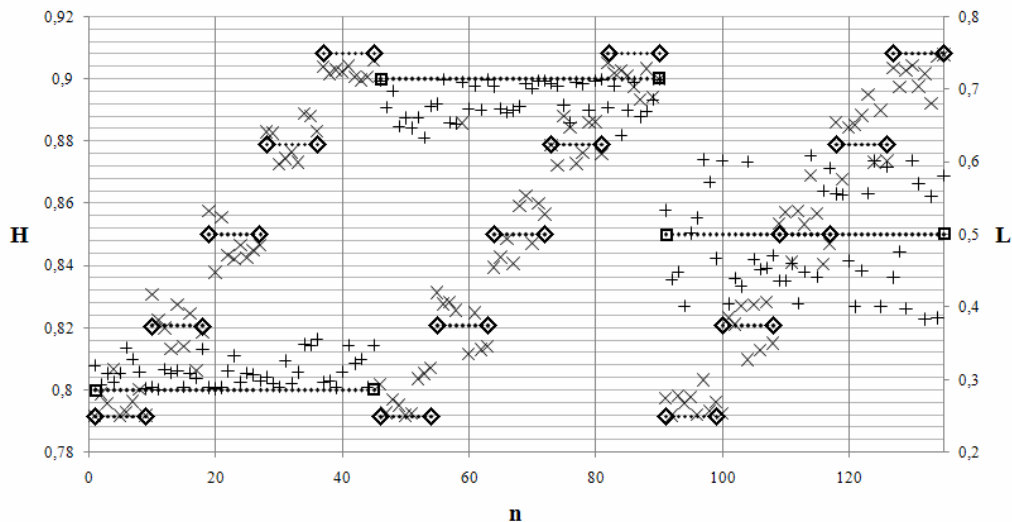


Рис. 2. Результати ідентифікації товщини оболонки в умовах дії "шуму" у вимірювальній системі

На рис. 3 наведено залежність похибки нейронної мережі (E) від кількості епох навчання (Nt).

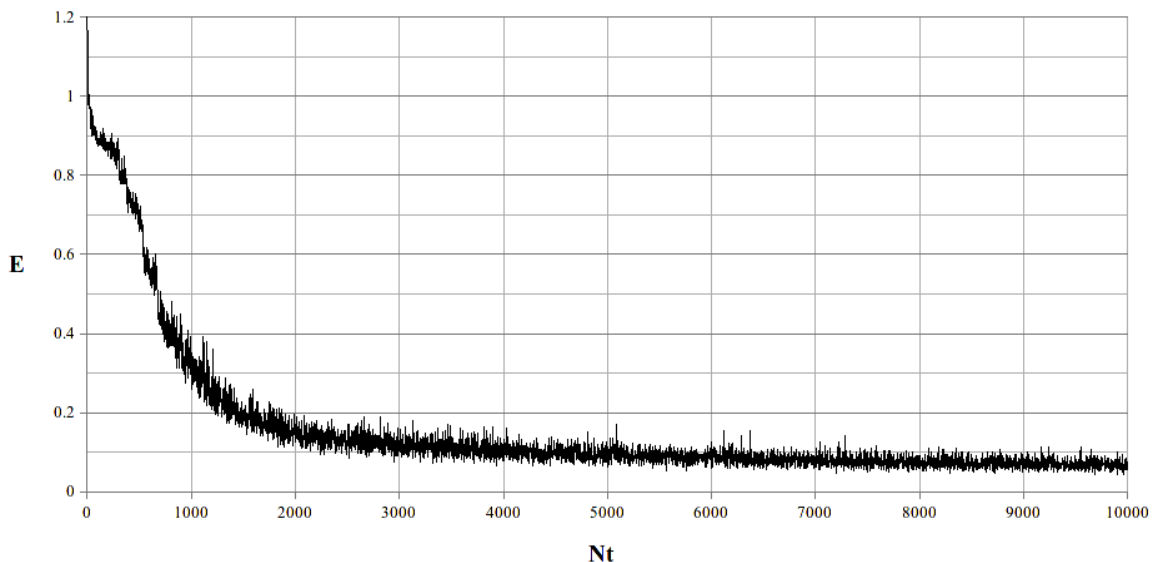


Рис. 3. Залежність похибки нейронної мережі від кількості епох навчання

ВИСНОВКИ. Аналіз можливостей та властивостей побудованої нейронної мережі демонструє, що нейронні мережі можуть бути використані як інструмент розв'язання обернених задач механіки деформівного твердого тіла. Для навчання можна використовувати чисельні розв'язки прямих задач, а не результати коштовних експериментів. Чисельний експеримент демонструє, що використання нейронної мережі, яка налаштована на розв'язках прямих задач, дає гарні результати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
2. Гасанов А. И. Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1, № 6. – С. 1–32.
3. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 114, № 5. – С. 953–956.
4. Нейроинформатика / А. Н. Горбань, В. Л. Дунин-Барковский, А. Н. Кирдин, Е. М. Миркес, и др. – Новосибирск: Наука, 1998. –
5. Самарский А. А., Вабищев П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 284 с.

Стаття надійшла до редколегії 29.01.15

Ободан Н., д-р техн. наук, Гук Н., д-р физ.-мат. наук, Магас О., асп.
ДНУ імені Олеса Гончара, Дніпропетровськ

**НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Рассматривается применение нейронной сети для идентификации свойств тонкостенной системы по результатам наблюдений. Обосновывается возможность аппроксимации зависимости между результатами наблюдений и неизвестными функциями обратной задачи с помощью нейронной сети. Приводятся результаты тестирования настроенной сети и результаты идентификации функции распределения толщины тонкостенной системы по результатам наблюдений, полученным в условиях действия "шума" в измерительной системе.

Obodan N., Full Doctor (eng), Guk N., Full Doctor, Magas O., PhD graduate
DNU Oles Honchar, Dnipropetrovsk

NEURAL NETWORK MODEL OF INVERSE PROBLEMS FOR NONLINEAR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS

The article deals with application of neural network for identification of thin-walled shell properties by observation. The possibility of approximation of the dependence between observations and unknown functions of inverse problem using neural network is demonstrated. The article demonstrates the results of configured neural network and identification function of the thickness distribution of the thin-walled shell using the results of observation in action of "noise".

ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИКОЛИ ОЛЕКСІЙОВИЧА ПЕРЕСТЮКА



1 січня 2016 року виповнилося 70 років видатному українському науковцю і педагогу, доктору фізико-математичних наук, професору, академіку НАН України та АН вищої школи України, завідувачу кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка **Миколі Олексійовичу Перестюку**.

Микола Олексійович народився в с. Плоска на Хмельниччині. Закінчивши у 1963 році середню школу з золотою медаллю, вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка. Тут розпочалися його перші наукові студії під керівництвом видатного українського математика А. М. Самойленка. Після успішного завершення навчання перспективного випускника було рекомендовано до аспірантури.

Починаючи з 1969 року, науково-педагогічна діяльність М. О. Перестюка незмінно пов'язана з Київським університетом, де він послідовно обіймає посади асистента, доцента (1976 р.), професора (1987 р.), завідувача кафедри інтегральних і диференціальних рівнянь (1987 р.). У 1988 році йому було присуджено вчене звання професора.

Здобувши повагу та авторитет серед університетських колег, Микола Олексійович у 1987 році стає деканом механіко-математичного факультету й успішно очолює його протягом наступних шістнадцяти

років. У цей період особливо яскраво проявилися адміністративні здібності М. О. Перестюка, його талант організатора освіти й науки.

Плідна багаторічна наукова діяльність Миколи Олексійовича втілювалась у цілу низку результатів світового рівня. Центральне місце в дослідженнях ученого посідали питання теорії імпульсних систем та теорії інваріантних множин диференціальних і різницевих рівнянь. У 1972 році він успішно захистив кандидатську дисертацію на тему "Деякі питання дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь з миттєвими змінами". У співпраці з А. М. Самойленком ним були одержані результати пріоритетного характеру, що стосувалися існування періодичних розв'язків нелінійних систем з імпульсною дією, обґрунтування методу усереднення та відшукування умов стійкості для таких систем. У подальшому науковий пошук ученого ознаменувався вагомими здобутками в теорії майже періодичних розв'язків та теорії інтегральних множин імпульсних систем.

У 1986 році М. О. Перестюк захистив докторську дисертацію на тему "Коливні розв'язки диференціальних рівнянь з імпульсною дією та їх стійкість". Через рік побачила світ монографія "Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием", написана у співавторстві з А. М. Самойленком. Це була перша у світі монографія, присвячена систематизованому викладу теорії імпульсних систем. У 1995 році вийшов з друку розширений англомовний варіант цієї книги під назвою "Impulsive Differential Equations".

М. О. Перестюк є автором якісно нового методу аналізу нелінійних імпульсних та розривних систем. Цей метод дав можливість дослідити диференціальні властивості розв'язків та інтегральних множин систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях. Уперше в математичній літературі було введено поняття кусково-неперервних похідних вищих порядків розв'язків за початковими даними і параметрами, що дозволило довести глибокі теореми про диференційовність розв'язків, графіки яких лежать на інтегральних поверхнях слабко нелінійних систем з експоненціально дихотомічною лінійною складовою.

М. О. Перестюком встановлено умови, при виконанні яких система з імпульсною дією на гіперповерхнях у певному сенсі еквівалентна системі диференціальних рівнянь з імпульсами в фіксовані моменти часу; доведено якісно нові теореми про існування інтегральних множин імпульсних систем у так званому критичному випадку, обґрунтовано аналог принципу зведення для імпульсних систем та аналог методу Пуанкаре відшукування періодичних і майже періодичних розв'язків збурень таких систем у випадку ізольованого породжуючого розв'язку, досліджено питання існування та стійкості періодичних і майже періодичних розв'язків сильно нелінійних систем з імпульсною дією.

Наукові результати М. О. Перестюка широко відомі математичній спільноті й визнані нею. Вони втілювались у понад 350 наукових та навчально-методичних праць, серед яких 6 монографій та 35 підручників і навчальних посібників, у численні доповіді на міжнародних конференціях, а також у лекції, прочитані в університетах країн колишнього СРСР, Болгарії, Польщі, Угорщини, Чехії, Румунії, Греції, Югославії, США, Італії, Канади, Куби, Німеччини, Фінляндії, Швеції, Бразилії, Чилі. Під науковим керівництвом М. О. Перестюка захищено 6 докторських та 25 кандидатських дисертацій.

У 1997 році М. О. Перестюка було обрано членом-кореспондентом Національної академії наук України, а в 2009 – її дійсним членом.

Плідну наукову роботу Микола Олексійович успішно поєднує з науково-методичною та педагогічною діяльністю. Протягом багатьох років він читає нормативний курс з диференціальних рівнянь та низку спеціальних курсів, у яких висвітлюються найважливіші досягнення теорії стійкості, топологічної динаміки, теорії інваріантних множин та імпульсних систем. Підручники та посібники "Диференціальні рівняння" (Київ: Либідь, 2003; у співавторстві з А. М. Самойленком та І. О. Парасюком), "Диференціальні рівняння в задачах" (Київ: Либідь, 2003; у співавторстві з А. М. Самойленком та С. А. Кривошеєю), Дифференциальные уравнения. Практический курс (Москва: Высшая школа, 2006), "Диференціальні та інтегральні рівняння" (Київ: Либідь, 2004, у співавторстві з С. А. Кривошеєю, В. М. Буримом), "Теорія рівнянь математичної фізики" (Київ: Либідь, 2001; у співавторстві з В. В. Маринцем), "Сучасний економічний аналіз" у 2-х частинах (Київ: Вища школа, 2004, в співавторстві з О. І. Пономаренком та В. М. Буримом) користуються популярністю у студентів багатьох вищих навчальних закладів України. Створений разом з А. М. Самойленком та В. А. Вишенським "Збірник задач з математики" (1990) витримав декілька видань українською та російською мовами.

На велику повагу заслуговує діяльність М. О. Перестюка з популяризації математики серед шкільної молоді. Протягом багатьох років він очолював журі заключного етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики.

Академік М. О. Перестюк веде інтенсивну науково-організаційну роботу як член бюро відділення математики НАН України та секції комітету з Державних премій в галузі науки і техніки, як голова секції "математика" Наукової ради МОН України та член спеціалізованої вченої ради в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Він входить до складу редколегій 7 наукових журналів.

М. О. Перестюк – лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки за цикл праць "Нові математичні методи в нелінійному аналізі" (1996), лауреат премії імені М. М. Крилова НАН України за цикл праць "Сучасні методи дослідження динамічних систем" (1998). У 2002 році указом Президента України йому присвоєно почесне звання "Заслужений діяч науки і техніки України", його відзначено Нагородою Ярослава Мудрого АН вищої школи України. За видатні заслуги у створенні й розвитку всесвітньо відомих національних наукових шкіл Миколу Олексійовича в 2009 році було нагороджено орденом "За заслуги" III ступеня та відзнакою НАН України "За наукові досягнення". У 2012 році у складі авторського колективу він стає лауреатом Державної премії України в галузі освіти за навчально-методичний комплект "Диференціальні рівняння". М. О. Перестюк – почесний доктор Ужгородського національного університету (2006 р.) та Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (2010 р.), заслужений професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2010 р.).

Друзі, колеги, учні та весь колектив механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка щиро вітають Миколу Олексійовича зі славним ювілеєм та бажають йому міцного здоров'я, наснаги та подальших творчих успіхів.

Самойленко А. М., Городній М. Ф., Жук Я. О., Капустян О. В., Кириченко В. В., Козаченко Ю. В., Кулініч Г. Л., Лимарченко О. С., Мішура Ю. С., Моклячук М. П., Парасюк І. О., Петравчук А. П., Плахотник В. В., Самойленко В. Г., Станжицький О. М., Шевчук І. О.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск (1)35

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,56. Наклад 300. Зам. № 216-7878.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку 29.07.16

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02