ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

1(33)/2015

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в ″Zentralblatt MATH″ (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in ″Zentralblatt MATH″ (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

Адреса редколегії	**03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua**
Затверджено	**Вченою радою механіко-математичного факультету 25.06.15 (протокол № 13)**
Атестовано	**Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010**
Зареєстровано	**Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09**
Засновник та видавець	**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02**
Адреса видавця	**01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28**

ЗМІСТ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК: 517.9

О. Лопотко, канд. фіз.-мат. наук,
Національний лісотехнічний університет України, Львів
e-mail: *Lopotko13@gmail.com*

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСІВ $K_{n,a}, K_{i,\grave{a}}$.

Одержано необхідні і достатні умови однозначного продовження парних функцій $k(x) \in K_{n,a}$, або $K_{n,a}(-a < x, a)$ з інтервалу на всю вісь.

ВСТУП. Проблема продовження додатно визначених функцій $k(x)$ з скінченного інтервалу на всю вісь розглядалася у працях М. Г. Крейна [3]. Залучаючи теорію просторів з позитивною і негативною нормами Ю. М. Березанський в [1, 2] вивчав цю проблему для функцій, $k(x)$ що пов'язані з оператором $L = i\dfrac{d}{dx}$. У даній статті, використовуючи методику [2], одержано необхідну і достатню умови однозначного продовження парних додатно визначених функцій $k(x)$, що пов'язані з оператором $L = -\dfrac{d^2}{dx^2}$.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція $k(x)(-2a \le x \le 2a, a < \infty)$ належить класу $K_{n,a}$ якщо вона дійсна, неперервна, парна і породжує парне по кожній змінній додатно визначене ядро

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\left[k(x+y) + k(x-y)\right] \; (-a < x, y < a).$$

Додатню визначеність ядра $K(x,y)(-l \le x, y \le l, l < a)$ розуміємо в сенсі умови $\left\langle (Ku,u) \right\rangle = \int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{-l}^{l} K(x,y)\overline{u(x)}u(y)dxdy \ge 0$, де $u \in L_2\left[-l,l\right]$ – парна функція, $u \to Ku = \int\limits_{-l}^{l} K(x,y)u(y)dy$.

Відомо, що функція $k(x) \in K_{n,a}$ допускає зображення

$$k(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x d\rho(\lambda), \tag{1}$$

де $d\rho(\lambda)$ – скінчена міра, яка визначається неоднозначно.

Теорема 1. Якщо парна неперервна на сегменті $[-2l, 2l]$, де $l < a$, функція $k(x) \in K_{n,a}$ інтегрована з квадратом і така, що оператор

$$(Kf)(x) = \int\limits_{-l}^{l} \frac{1}{2}[k(x+t) + k(x-t)]f(t)dt \tag{2}$$

строго додатний у просторі $L_2 = L_2[-l,l], \forall l < a$, то для однозначності міри $d\rho(\lambda)$ у зображенні (1) необхідно, щоб для будь-якого уявного z і достатньо для деякого уявного z мало місце співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \left| \int\limits_{-l}^{l} \cos\sqrt{z}x\overline{w_j(x)}dx \right|^2 = \infty, \tag{3}$$

де $w_j(x)$ – власні функції оператора K: $u \to Ku = \int\limits_{-l}^{l} K(x,y)u(y)dy$, λ_j – власні значення оператора K.

Доведення. Необхідність. За функцією $k(x) \in K_{n,a}$, інтегрованою з квадратом, побудуємо ядро $K(x,y) = \dfrac{1}{2}[k(x+y) + k(x-y)](-l \le x, y \le l, l < a)$ і введемо скалярний добуток, поклавши

$$\left\langle f, g \right\rangle = \int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{-l}^{l} K(x,y)f(y)\overline{g(x)}dxdy, \; (f, g \in L_2) \tag{4}$$

Завдяки властивості інтегрування $k(x)$ з квадратом простір L_2 можна поповнити відносно скалярного добутку (4). Одержаний простір H_k можна розглядати як негативний простір відносно $H_0 = L_2$. Тепер по ланцюжку $H_k \supseteq H_0 = L_2$ можна побудувати ланцюжок

$$H_k \supseteq H_0 = L_2 \supseteq H_{+,k} \tag{5}$$

де $H_{+,k}$ будується як замикання $\Re(K)$ відносно метрики $(u,v)_{+,k} = (K^{-1}u, v)_0$, а $K > 0$ – оператор в L_2 якій визначається з рівності

$$(Kf, g)_0 = \left\langle f, g \right\rangle \; (f, g \in L_2), \tag{6}$$

Із (4) і (6) знаходимо, що

$$(Kf)(x) = \int\limits_{-l}^{l} K(x,y)f(y)dy \; (f \in L_2), \tag{7}$$

Тому із (7) і неперервності $K(x,y)$ випливає що $\Re(K) \subseteq C[-l,l]$ $(l<a)$.

Зауважимо, що згідно з теоремою 1.1 [3, гл.I] простір $H_{+,k}$ співпадає з $\mathfrak{D}(D)$, де $D=\sqrt{I^{-1}}$, тобто $H_{+,k}=\Re(\sqrt{I})$. Оскільки $I=K$, то маємо

$$H_{+,k}=\Re(\sqrt{K}) \tag{8}$$

$$\underbrace{\overbrace{H_k \supseteq \overbrace{\underbrace{H_0 = L_2 \supseteq H_{+,k}}_{I}}^{D}}^{I^{-1}}}_{I}$$

Лема. Позначимо $w_1(x), w_2(x), \ldots$ повний набір ортонормованих власних функцій із L_2 ядра $K(x,y)$ які відповідають власним значенням $\lambda_1,\lambda_2,\ldots(\lambda_j>0; j=1,2,\ldots)$. Функція $u\in L_2$ належить $H_{+,k}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\|u\|^2_{+,k}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left|(u,u_j)_0\right|^2<\infty \tag{9}$$

Доведення. Необхідність. Згідно з (8) $u\in H_{+,k}$ тоді і тільки тоді, коли $u=\sqrt{K}f$, де $f\in L_2$ причому, згідно [3, гл.I, формула (1.13)] $\|u\|^2_{+,k}=\|Du\|^2_0=\|f\|^2_0$. Оскільки $f=\sqrt{K^{-1}}u$, то $(f,w_j)_0=\dfrac{(u,w_j)_0}{\sqrt{\lambda_j}}$ і $\|u\|^2_+=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_j}\left|(u,w_j)_0\right|^2$.

Звідки випливає твердження леми.

Введемо тепер у просторі H_k оператор $Cu=-\dfrac{d^2u}{dx^2}$ $(u\in\mathfrak{D}(C)=C_0^{\infty}[-l,l]\ (l<\alpha))$. Знайдемо для нього спряжений оператор С*. Нехай I оператор $H_k\to H_{+,k}$ тоді

$$C^*=I^{-1}[-(I\alpha)'']. \tag{10}$$

причому, $\mathfrak{D}(C^*)$ складається із тих і тільки тих $\alpha\in H_k$, для яких $I\alpha\in C^2[-l,l]$ і $(I\alpha)''\in H_{+,k}$.

Дійсно, нехай $\alpha\in H_k$ таке що $\langle -u'',\alpha\rangle=\langle u,\beta\rangle$ $(u\in C_0^{\infty}[-l,l])$ при деякому $\beta=C^*\alpha$. Тоді $(-u'',I\alpha)_0=(u,I\beta)_0$, причому $I\beta\in H_{+,k}\subseteq C[-l,l]$. Якщо врахувати зауваження на с. 498 [3], то одержимо $-I\alpha\in C^2[-l,l]$ і $(-I\alpha)''=I\beta$, тобто $\beta=C^*=I^{-1}(-I\alpha)''$..

Розмірковуючи у зворотньому сенсі маємо: що $C^*=I^{-1}(-I\alpha)''=\beta$ якщо $\alpha\in H_k$. Тоді $I\beta=(-I\alpha)''$ і $I\alpha\in C^2[-l,l]$. Отже $(-u'',I\alpha)_0=(u,I\beta)_0$ і $\langle -u'',\alpha\rangle=\langle u,\beta\rangle$, якщо $(-I\alpha)\in H_k$ і $u\in C_0^{\infty}[-l,l]$.

Тепер позначимо $\overline{C}$ замикання оператора C в H_k. Розглянемо підпростір $\Re(\overline{C}-zE)$ простору H_k і ортогональне доповнення N_z до нього, тобто дефектний підпростір. Із (10) випливає наступний факт: індекси дефектного оператора С мають вид (0,0) або (1,1). В останньому випадку дефектний підпростір N_z складається із скалярних кратних векторів $I^{-1}\cos\sqrt{z}x\in H_k$. Дійсно, у оператора C дефектні числа рівні, завдяки дійсності його відносно інволюції 0. Якщо $\overline{C}$ не самоспряжений, то N_z співпадає з підпростором розв'язків рівняння $C^*\varphi=\bar{z}\varphi$. Відповідно з (10) для $x\in[-l,l]-(I\varphi)''=\bar{z}I\varphi$, тобто $(I\varphi)_1=a\cos\sqrt{z}x$; $(I\varphi)_2=a\dfrac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}$ à – ñêàëÿð, або $\varphi_1=aI^{-1}\cos\sqrt{z}x$; $\varphi_2=aI^{-1}\dfrac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}$. Але $\varphi_2\overline{\in}H_k$ так як H_k розглядається на парних функціях. Таким чином індекси дефекта оператора $C\in(0,0)$ або (1,1) і $\overline{C}$ є самоспряженим якщо $\cos\sqrt{z}x\in H_{+,k}$ для будь-якого уявного z. А це означає, згідно з лемою, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left|\int_{-l}^{l}\cos\sqrt{z}x\cdot\overline{w_j(x)}dx\right|^z=\infty,$$

де $\overline{w_j(x)}$ – власні функції оператора K, λ_j – власні значення оператора K.

Тоді, згідно з теоремою 3.7 [3, с.659] маємо зображення (1), де міра $d\rho(\lambda)$ визначається однозначно.

Достатність. Нехай маємо $f(x)\in K_{n,a}$ яка інтегрована з квадратом і задовольняє (2), (3) при деякому уявному z. Доведемо, що вона має зображення (1), де $d\rho(\lambda)$ – скінчена міра, яка визначається однозначно. Дійсно, так як $f(x)\in K_{n,a}$ і інтегрована з квадратом, то вона має зображення (1). Із умов (2), (3), при деякому уявному $z=\xi$, слідує що $(C-\xi z)(\mathfrak{D}(C))$ щільне у $H_{+,k}$, а значить і в H_k. Це означає що $\overline{C}$ самоспряжене в H_k. Тому одержимо, згідно з теоремою 3.1 [3, с.651], має місце зображення (1), де міра $d\rho(\lambda)$ визначається однозначно.

Теорему 1 доведено.

Означення. Функція $k(x)(-2a < x < 2a, a < \infty)$ належить класу $K_{i,a}$ якщо вона дійсна, неперервна, парна, $k(0)=0$ і породжує непарне по кожній змінній додатно визначене ядро

$$K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)-k(x-y)]\ (-a < x, y < a).$$

Додатню визначеність ядра $K(x,y)(-l \le x, y \le l.l < a)$ розуміємо як $(Ku,u)=\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l}K(x,y)\overline{u(x)}u(y)dxdy \ge 0$, для непарної $u \in L_2[-l,l]$, де $Ku=\int_{-l}^{l}K(x,y)u(y)dy$.

Відомо, що функція $k(x)\in K_{i,a}$ допускає зображення

$$k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda}d\rho(\lambda) \tag{11}$$

де $d\rho(\lambda)$ – скінчена міра, яка визначається неоднозначно.

Аналогічно довести теоремі 1 доводиться наступне твердження.

Теорема 2. Якщо парна неперервна на сегменті $[-2l,2l](\forall l < a)$ функція $k(x)\in K_{i,a}$ інтегрована з квадратом і така, що оператор

$$(Kf)(x)=\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}[k(x+t)+k(x-t)]f(t)dt \tag{12}$$

строго додатний у просторі $L_2 = L_2[-l,l],(\forall l < a)$, то для однозначності міри $d\rho(\lambda)$ у зображенні (11) необхідно, щоб для будь-якого уявного z і достатньо для деякого уявного z мало місце співвідношення

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}\left|\int_{-l}^{l}\frac{\sin\sqrt{z}x}{\sqrt{z}}\overline{w_j(x)}dx\right|^2=\infty, \tag{13}$$

де $w_j(x)$ – власні функції оператора K, λ_j - власні значення оператора K.

ВИСНОВКИ. Одержані необхідні і достатні умови однозначного продовження парних функцій $k(x)(-a < x < a)$ з інтервалу на усю площину $(R^1\times R^1)$ для яких ядро $K(x,y)=\frac{1}{2}[k(x+y)\pm k(x-y)]$. додатно визначено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Березанский Ю. М.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. УМЖ. – 1959. – 11 с.
2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. -К: Наукова думка, 1965. – 800 с.
3. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения. // Докл. АН СССР. – 1946. – 53, №1. –С. 3–6.

Стаття надійшла до редколегії 21.01.15

Лопотко О. В., канд. физ.-мат. наук
Национальный лесотехнический университет Украины, Львов

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $K_{\div,a}, K_{i\div,\grave{a}}$.

Получены необходимые о достаточные условия для однозначного продолжения четных функций $k(x)\in K_{\div,a}$ или $K_{i\div,a}(-a < x, a)$ с интервала на всю ось.

Lopotko O. V., PhD
National Forestry and Wood-Technology University of Ukraine, Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS OF THE CLASSES $K_{e,a}, K_{une,\grave{a}}$.

The necessary and sufficient conditions for simple continuation of even functions $k(x)\in K_{e,a}$, $K_{une,a}(-a < x, a)$ from the interval on the whole axis are obtained.

УДК 517.5

М. О. Назаренко, канд. фіз.-мат. наук, доц., Т. А. Брязкало, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *nanazarenko@gmail.com,* e-mail: *tianan@yandex.ru*

ФРАКТАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ЕРМІТОВИМИ СПЛАЙНАМИ

Запропоновано фрактальну процедуру для отримання сім'ї інтерполяційних відображень пов'язаних з ермітовими сплайнами парного та непарного порядків за довільним розбиттям. При певних обмеженнях, використовуючи техніку наближення многочленами отримано оцінку фрактального наближення ермітовими сплайнами.

ВСТУП. Фрактальна інтерпляція насьогодні є ефективним методом при розв'язанні задач апроксимаційного характеру, (див. наприклад [8, 10]). У працях Барснлі ([5, 6]) запропоновано використання фрактальних функцій для наближення множини вихідних даних. Теорема Барнслі і Харрінгтона ([7]) гарантує існування та єдиність диференційовної фрактальної інтерполяційної функції.

Ця стаття присвячена опису загального способу побудови гладкої фрактальної функції за допомогою ермітових інтерполяційних поліномів. Пропонується фрактальна процедура для отримання сім'ї інтерполяційних фрактальних відображень пов'язаних з ермітовими сплайнами парного і непарного порядків. Досліджено рівномірну збіжність запропонованого методу до вихідної функції, коли діаметр розбиття прямує до нуля.

ПОБУДОВА СИСТЕМИ ІТЕРАЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕРМІТОВИХ СПЛАЙНІВ. Нехай $t_0 < t_1 < ... < t_N$ – дійсні числа, $I = \left[t_0, t_N\right] \subset R$ – відрізок, що включає ці точки, функція g належить класу неперервних на відрізку I функцій $C(I)$. Позначимо через $\Delta:\quad t_0 < t_1 < ... < t_N$ розбиття відрізка $I = \left[t_0, t_N\right] \subset R$. Нехай $I_n = \left[t_{n-1,} t_n\right]$, $L_n : I \to I_n, n \in \{1, 2, ..., N\}$ – гомеоморфізм такий, що

$$L_n(t_0) = t_{n-1}, \quad L_n(t_N) = t_{n,} \tag{1}$$

$$\left|L_n(c_1) - L_n(c_2)\right| \le l\left|c_1 - c_2\right|, \forall\left\{c_1, c_2\right\} \subset I, \tag{2}$$

для $0 \le l \le 1$. Розглянемо для всіх $n = 0, 1, ..., \mathrm{N}$ і $F = I \times R,\ \left|\alpha_n\right| < 1,\ N$ неперервних відображень $F_n : F \to R,$ які задовольняють умови

$$F_n(t_0, x_0) = x_{n-1}, F_n(t_N, x_N) = x_{n,}\ n = 0, 1, ..., \mathrm{N}, \tag{3}$$

$$\left|F_n(t, x) - F_n(t, y)\right| \le \left|\alpha_n\right|\left|x - y\right|, t \in I, \left\{x, y\right\} \subset R. \tag{4}$$

Визначимо функції

$$w_n(t, x) = \left(L_n(t), F_n(t, x)\right), n = 0, 1, ..., \mathrm{N}. \tag{5}$$

Тоді має місце наступна теорема:

Теорема 1.(*Барнслі [8, 10]) Система ітераційних функцій* $\{F, w_n : n = 1, 2, ..., N\}$ *(3)–(5), визначає атрактор* G*, що є графом неперервної функції* $f : I \to R$ *, яка задовольняє умови* $f(t_i) = x_i$ *для* $i = 0, 1, ..., N$.

Функція f називається фрактальною інтерполяційною функцією по відношенню до $\left\{(L_n(t), F_n(t, x)\right\}_{n=1}^{N}$. Вона є єдиною, яка задовольняє функціональне рівняння

$$f(L_n(t)) = F_n(t, f(t)), n = 0, 1, ..., \mathrm{N}, t \in I,$$

або

$$f(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)), n = 0, 1, ..., \mathrm{N}, t \in I_n = [t_{n-1}, t_n].$$

Нехай $\Im$ – множина неперервних функцій $f : [t_0, t_N] \to R$ таких, що $f(t_0) = x_0$ і $f(t_N) = x_N$. Розглянемо метрику на $\Im$

$$d(f, g) = \left\|f - g\right\|_\infty = \max\{\left|f(t) - g(t)\right| : t \in \left[t_0, t_N\right]\} \ \forall\left\{f, g\right\} \subset \Im.$$

Зазначимо, що простір $(\Im, d)$ є метричним і повним. Визначимо відображення $T : \Im \to \Im$ наступним чином:

$$(Tf)(t) = F_n(L_n^{-1}(t), f \circ L_n^{-1}(t)) \ \forall t \in \left[t_{n-1}, t_n\right], n = 1, 2, ..., N.$$

$(Tf)(t)$ є неперервною функцією на відрізку $[t_{n-1}, t_n]$ для $n = 1, 2, ..., N.$ Відображення T є стискуючим $(\Im, d)$, бо

$$\left\|Tf - Tg\right\|_\infty \le \left|\alpha\right|\left\|f - g\right\|_\infty, \tag{6}$$

де $\left|\alpha\right| = \max\{\left|\alpha_n\right| : n = 0, 1, ..., \mathrm{N}\}$. Оскільки $\left|\alpha\right| < 1$, то відображення T визначає єдину фіксовану точку на $\Im$, тобто існує $f \in \Im$ така, що $(Tf)(t) = f(t)$ для $t \in [t_0, t_N]$. Ця функція є фрактальною інтерполяційною функцією для w_n.

Розглянемо систему ітераційних функцій:

$$\begin{cases} L_n(t) = a_n t + b_n, \\ F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t), \end{cases}$$

$$a_n = \frac{(t_n - t_{n-1})}{(t_N - t_0)}, \quad b_n = \frac{(t_N t_{n-1} - t_0 t_n)}{(t_N - t_{0)}}.$$

У випадку, коли $\alpha_n = 0, n = 1, 2, ..., N,$ маємо $F_n\left(t, x\right) = q_n\left(t\right)$ і $f\left(t\right) = q_n \circ L_n^{-1}\left(t\right), t \in I_n.$

Позначимо через $C^p[t_0, t_N]$ множину p разів неперервно-диференційовну на $[t_0, t_N]$ функцій.

Для визначення умов побудови фрактальної інтерполяційної функції, яка буде диференційовною, використаємо наступну теорему.

Теорема 2 *(Барнслі–Харрінгтона [7]). Нехай* $t_0 < t_1 < ... < t_N$, *візьмемо* $L_n(t)$, $n = 1, 2, ..., N$ *такі, що* $L_n(t) = a_n t + b_n$ *задовольняють співвідношення (1)–(2);* $a_n = L_n'(t) = \dfrac{t_n - t_{n-1}}{t_N - t_0}$ *і* $F_n(t, x) = \alpha_n x + q_n(t)$, $n = 1, 2, ..., N$. *Припустимо, для деякого цілого* $p \ge 0, |\alpha_n| < a_n^p$ *і* $q_n \in C^p[t_0, t_N]$, $n = 1, 2, ..., N$. *Нехай*

$$F_{nk}(t, x) = \frac{\alpha_n x + q_n^{(k)}(t)}{a_n^k},\ \ x_{0,k} = \frac{q_1^{(k)}(t_0)}{a_1^k - \alpha_1}, x_{N,k} = \frac{q_N^{(k)}(t_N)}{a_N^k - \alpha_N},\ k = 1, 2, ..., p.$$

Якщо $F_{n-1,k}(t_N, x_{N,k}) = F_{n,k}(t_0, x_{0,k}), n = 2, 3, ..., N, k = 1, 2, ..., p$, *то тоді* $\left\{\left(L_n(t), F_n(t, x)\right)\right\}_{n=1}^N$ *визначає фрактальну інтерполяційну функцію* $f \in C^p[t_0, t_N]$ *і* $f^{(k)}$ *є фрактальною інтерполяційною функцією, що визначається*

$$\left\{\left(L_n(t), F_{n,k}(t, x)\right)\right\}_{n=1}^N, k = 1, 2, ..., p.$$

Вважатимемо далі, що $a_n = \dfrac{1}{N}$. Використовуючи теорему Барнслі і Харрінгтона, подамо q_n у такому вигляді:

$$q_n(t) = g \circ L_n(t) - \alpha_n b(t),$$

де g – неперервна функція, $g(t_i) = x_i, i = 0, 1, ..., N,$ а $b(t)$ – така дійсна неперервна функція, $b \ne g$, що $b(t_0) = x_0, b(t_N) = x_N$.

Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Позначимо через g^α фрактальну інтерполяційну функцію, яку іноді називають α-фрактальною функцією для g відносно розбиття Δ та функції b.

Відповідь про оцінку похибки величини $\left\|g^\alpha - g\right\|_\infty$ дає наступна теорема.

Теорема 3. [9] α *-фрактальна функція* g^α *для функції* g *відносно* Δ *і* b *задовольняє нерівність:*

$$\left\|g^\alpha - g\right\|_\infty \le \frac{|\alpha|}{1 - |\alpha|}\left\|g - b\right\|_\infty, |\alpha| = \max_{1 \le n \le N}\left\{|\alpha_n|\right\}. \tag{7}$$

При цьому, для $\forall n = 0, 1, ..., \mathrm{N}$ має місце $g^\alpha(t_n) = g(t_n)$,

З'ясуємо додаткові обмеження на функцію $b(t)$ для того, щоб виконувались умови теореми Барнслі-Харрінгтона і забезпечувалось існування фрактальної інтерполяційної функції. Розглянемо $p \ge 0, |\alpha_n| < \dfrac{1}{N^p}$ і $q_n \in C^p\left[t_0, t_N\right], n = 1, 2, ..., N.$ Обовязкова умова для $n = 2, 3, ..., N, k = 1, 2, ..., p$

$$F_{n-1,k}\left(t_N, x_{N,k}\right) = F_{nk}\left(t_0, x_{0,k}\right). \tag{8}$$

Оскільки $F_{nk}(t, x) = \dfrac{\left(\alpha_n x + q_n^{(k)}(t)\right)}{a_n^k}$, $L_n(t) = \dfrac{t}{N} + b_n, L_n'(t) = \dfrac{1}{N} = a_n$, то

$$q_n^{(k)}(t) = \frac{1}{N^k} g^k(L_n(t)) - \alpha b^{(k)}(t), \forall k = 0, 1, 2, ..., p,$$

Співвідношення (8) перепишемо наступним чином:

$$N^k \alpha_{n-1} \frac{g^k(t_N) - N^k \alpha_N b^{(k)}(t_N)}{1 - N^k \alpha_N} - \alpha_{n-1} N^k b^{(k)}(t_N) = N^k \alpha_n \frac{g^k(t_0) - N^k \alpha_1 b^{(k)}(t_0)}{1 - N^k \alpha_1} - \alpha_n N^k b^{(k)}(t_0)$$

Якщо взяти $\alpha_n = \alpha, n = 1, ..., N,$ то одержимо

$$g^{(k)}(t_N) - b^{(k)}(t_N) = g^{(k)}(t_0) - b^{(k)}(t_0).$$

Звідки,

$$\begin{cases} b^{(k)}(t_0) = g^{(k)}(t_0), \\ b^{(k)}(t_N) = g^{(k)}(t_N), \end{cases} \quad \text{де } k = 0, 1, 2, ..., p. \tag{9}$$

Для того, щоб виконувались умови (9) у якості b можна взяти ермітовий інтерполяційний поліном з вузлами t_0, t_N і p похідними

$$b(t) = H_g(t) = \sum_{k=0}^p g^{(k)}(t_0)\mathcal{L}_{0k}(t) + \sum_{k=0}^p g^{(k)}(t_N)\mathcal{L}_{Nk}(t),$$

де функція $\mathcal{L}_{ik}$ визначається наступним чином для $i = 0, N, 0 \le k \le p,$

$$l_{0k}(t)=\frac{(t-t_0)^k}{k!}\left(\frac{t-t_N}{t_0-t_N}\right)^{p+1},\quad l_{Nk}(t)=\frac{(t-t_N)^k}{k!}\left(\frac{t-t_0}{t_N-t_0}\right)^{p+1},$$

$$\mathcal{L}_{0p}(t)=l_{0k}(t),\quad \mathcal{L}_{Np}(t)=l_{Nk}(t),\ k=p-1,p-2,...,0,$$

$$\mathcal{L}_{0k}(t)=l_{0k}(t)-\sum_{v=k+1}^{p} l_{0k}^{(v)}(t_0)\mathcal{L}_{0v}(t),\quad \mathcal{L}_{Nk}(t)=l_{Nk}(t)-\sum_{v=k+1}^{p} l_{Nk}^{(v)}(t_0)\mathcal{L}_{Nv}(t).$$

Відображення $\mathcal{L}_{ik}$ задовольняють умову:

$$\mathcal{L}_{ik}^{(\sigma)}(t_j)=\begin{cases}1,\ i=j,\ k=\sigma,\\ 0,\ \text{³í àêø å.}\end{cases}$$

Звідси випливає, що в ролі функції $b(t)$ треба взяти ермітовий інтерполяційний поліном степеня $2p+1$, а функцією g може бути будь-яка функція з класу C^p.

Система ітераційних функцій з k разів диференційовними фрактальними інтерполяційними функціями записується наступним чином:

$$\begin{cases}L_n(t)=\dfrac{1}{N}t+b_n,\\ F_{nk}(t,x)=N^k\alpha x+N^k q_n^{(k)}(t),\ k=0,1,2,...,p,\end{cases}$$

$$q_n^{(k)}(t)=\frac{1}{N^k}g^k(L_n(t))-\alpha b^{(k)}(t),\ k=0,1,2,...,p,$$

Тоді:

$$\begin{cases}L_n(t)=\dfrac{1}{N}t+b_n,\\ F_{nk}(t,x)=N^k\alpha x+g^k\circ L_n(t)-N^k\alpha b^k(t),\ k=0,1,2,...,p.\end{cases}$$

тобто, $q_{nk}(t)=g^k\circ L_n(t)-N^k\alpha b^k(t),\ k=0,1,2,...,p,$ і $(g_b^{\alpha})^{(k)}=(g^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k\alpha},\ k=0,1,2,...,p.$

Згідно з теоремою 3, величина $\left\|(g_b^{\alpha})^{(k)}-g^{(k)}\right\|_{\infty}$ оцінюється таким чином:

$$\left\|(g_b^{\alpha})^{(k)}-g^{(k)}\right\|_{\infty}=\left\|(g^{(k)})_{b^{(k)}}^{N^k\alpha}-g^{(k)}\right\|_{\infty}\le\frac{N^k|\alpha|}{1-N^k|\alpha|}\left\|g^{(k)}-b^{(k)}\right\|_{\infty}.$$

Нехай $\Delta=\{0=t_0<t_1<...<t_N=1\}$ - довільне розбиття відрізка $[0,1]$, $h_i=t_i-t_{i-1}$ і $|\Delta|=\max\limits_{1\le i\le n}h_i$. Поставимо у відповідність кожній функції $f\in C^p$ функції $g_{2p}\in C^p$ і $g_{2p-1}\in C^p$, $p\ge 0$, які задовольняють наступні умови:

a) На кожному проміжку $[t_{i-1},t_i]$ функція g_{2p-1} є алгебраїчним многочленом $2p-1$ порядка, а g_{2p} можна записати у вигляді

$$g_{2p}(x)=\sum_{s=0}^{2p}c_s^{(i)}(t-t_{i-1})^s+c_{2p+1}^{(i)}(t-\overline{t}_{i-1})_+^{2p},\ \overline{t}_{i-1}=t_{i-1}+h_i/2,\quad z_+^k=\left[\max(0,z)\right]^k;$$

b) $g_{2p-k}^{(j)}(f;t_n)=f^{(j)}(t_n),\ k=0,1,\ j=0,1,...,\mathrm{p},\ n=0,1,...,N.$

Відомо, що для $f\in C^p$ функції $g_{2p-k},k=0,1$ існують і єдині [3]. Функції g_{2p} і g_{2p-1} називають ермітовими сплайнами парного і непарного порядків відповідно.

Для того, щоб оцінити величину $\left\|f-g_{2p-k,b}^{\alpha}\right\|_{\infty}$, скористаємось методом проміжного наближення, а саме:

$$\left\|f-g_{2p-k,b}^{\alpha}\right\|_{\infty}\le\left\|f-g_{2p-k}\right\|_{\infty}+\left\|g_{2p-k}-g_{2p-k,b}^{\alpha}\right\|_{\infty}.$$

Для оцінки першого доданка правої частини скористаємось результатами праць [1], [2], [4].

Для функції $f\in C^{2p}$, $\left|f^{2p}(t)\right|\le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\|f-g_{2p-1}\right\|_{\infty}\le\frac{|\Delta|^{2p}}{(2p)!2^{2p}}.$$

Для функції $f\in C^{2p+1}$, $\left|f^{2p}(t)\right|\le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів парного порядку g_{2p} справедлива оцінка

$$\left\|f-g_{2p}\right\|_{\infty}\le\frac{|\Delta|^{2p+1}}{(2p+1)\left[2p!!\right]^2 2^{2p+1}}.$$

З іншого боку, використовуючи теорему 3, знаходимо

$$\left\|g_{2p-k} - g^{\alpha}_{2p-k,b}\right\|_{\infty} \le \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}\left\|g_{2p-k} - b\right\|_{\infty}.$$

Отже, для функції $f \in C^{2p}$, $\left|f^{2p}(t)\right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\|f - g^{\alpha}_{2p-1,b}\right\|_{\infty} \le \frac{|\Delta|^{2p}}{(2p)!2^{2p}} + \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}\left\|g_{2p-1} - b\right\|_{\infty}.$$

Для функції $f \in C^{2p+1}$, $\left|f^{2p}(t)\right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів парного порядку g_{2p} справедлива оцінка

$$\left\|f - g^{\alpha}_{2p,b}\right\|_{\infty} \le \frac{|\Delta|^{2p+1}}{(2p+1)[2p!!]^2\, 2^{2p+1}} + \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}\left\|g_{2p} - b\right\|_{\infty}.$$

Зауважимо, що коли $|\alpha| < 1/N^2$ *, то існує* $s = s(N)$ *таке, що* $0 < s < 1$ *і* $|\alpha| \le 1/N^{2+s}$ *. Тоді,*

$$\frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} \le \frac{1}{N^{2+s} - 1}.$$

Дійсно за припущенням $|\alpha| < \frac{1}{N^2}$.Оскільки, $\frac{1}{N^{2+x}} \to \frac{1}{N^2}$ при $x \to 0^+$, то існує $s = s(N)$ таке, що $0 < s < 1$ і $|\alpha| \le \frac{1}{N^{2+s}}$.

У випадку рівномірного розбиття $\overline{\Delta} = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = 1\}$ відрізка $I = [t_0, t_N] = [0,1]$ з кроком $1/N$ має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $s = s(N)$ *таке, що* $0 < s < 1$ *і* $|\alpha| \le 1/N^{2+s}$. Для функції $f \in C^{2p}$, $\left|f^{2p}(t)\right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\|f - g^{\alpha}_{2p-1,b}\right\|_{\infty} \le \frac{1}{(2p)!(2N)^{2p}} + \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}\left\|g_{2p-1} - b\right\|_{\infty}.$$

Для функції $f \in C^{2p}$, $\left|f^{2p}(t)\right| \le 1$ майже скрізь на $[0,1]$ та ермітових сплайнів непарного порядку g_{2p-1} справедлива оцінка

$$\left\|f - g^{\alpha}_{2p,b}\right\|_{\infty} \le \frac{1}{(2p+1)[2p!!]^2(2N)^{2p+1}} + \frac{1}{N^{2+s} - 1}\left\|g_{2p} - b\right\|_{\infty}$$

ВИСНОВКИ. У статті запропоновано метод фрактальної інтерполяції за допомогою ермітових сплайнів для апроксимації вихідних функцій. Отримано похибку наближення, при певних обмеженнях щодо вихідної диференційовної функції. Як результат, отримано рівномірну збіжність фрактальної функції до вихідної, коли діаметр розбиття прямує до нуля.

Ці результати гарантують збіжність інтерполянта до будь-якої гладкої функції, коли крок інтерполяції прямує до нуля. Як наслідок, стає можливим апроксимувати будь-яку функцію за допомогою фрактальних ермітових сплайнів з довільною точністю.

Похибка, що отримана, є порівняною з іншими аналогічними процедурами. Можлива втрата точності врівноважується з узагальненням метода, оскільки, інтерполяційні фрактальні функції співпадають з ермітовими сплайнам, у окремому випадку, коли коефіцієнт α дорівнює нулю. Це узагальнення зберігається при збереженні гладкості функції.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Великин В. Л.* Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах диференцируемых функций.// Математические заметки, 1973, т. 37, выпуск 1, с. 165–185.
2. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения, М., «Наука», 1984.
3. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов, М., «Наука», 1976.
4. *Назаренко Н. А., Переверзев С. В.* Точные значения приблежения єрмитовыми сплайнами четной степени на классах дифференцируемых функций, Математические заметки, 1980, т. 28, выпуск 1, с. 33–44
5. *Barnsley M. F.* Fractal Everywhere. – Academic Press, Inc,1988.
6. *Barnsley M. F.* Fractal functions and interpolation. // Contr. Approx. 2, 4 (1986), p. 303–329.
7. *Barnsley M. F., Harrington A. N.* The calculus of fractal interpolation functions. // J. Approx. Theory 57 (1989), p. 14–34.
8. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Generelization of Hermite functions by fractal interpolation. // J. Approx. Theory 131, 1 (2004), p. 19–29.
9. *Navascues M. A., Sebastian M.*V. Fractal Splines – Monografias del Seminario Matematiko Garcia de Galdeano.33 (2006), p. 161–168.
10. *Navascues M. A., Sebastian M. V.* Some results of convergence of cubic spline fractal interpolation functions. // Fractals 11, 1 (2003), p. 1–7.

Стаття надійшла до редколегії 28.11.14

Назаренко Н. А., канд. физ.-мат. наук, Брязкало Т. А., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ФРАКТАЛЬНАЯ АПРОКСИМАЦИЯ ЭРМИТОВЫМИ СПЛАЙНАМИ

Определено фрактальную процедуру для получения семьи интерполяционных отображений, которые связаны с эрмитовыми сплайнами. С помощью некоторых предположений, используя технику приближения полиномами, было получено оценку приближения эрмитовыми сплайнами.

Nazarenko M. O., PhD., Briazkalo T. A., PhD graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

HERMITE SPLINE FRACTAL INTERPOLATION

A family of interpolating mappings associated to a hermite spline are defined. Under some hyposeses, and using Hermite polynomials techniques, bounds of interpolation error for function are obtained.

УДК 517.9

Ф. Асроров, канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ФУНКЦІЯ ГРІНА-САМОЙЛЕНКА ТА ІСНУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МНОЖИН ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудовано інтегральну інваріантну множину з використанням функції Гріна-Самойленка.

ВСТУП. Багато еволюційних процесів у фізиці, техніці, біології, економіці протягом свого розвитку піддаються короткочасним впливам. При математичному описі таких процесів часто тривалістю збурення зручно знехтувати і вважати, що ці збурення носять "миттєвий" характер. Така ідеалізація призводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями або як їх ще називають, диференціальні рівняння з імпульсною дією. Зростання інтересу до таких систем останнім часом пов'язано насамперед із запитами новітньої техніки, де імпульсні системи автоматичного регулювання, імпульсні обчислювальні системи зайняли дуже помітне місце і інтенсивно розвиваються, розширюючи коло своїх додатків в різнорідних за фізичною природою і функціональним призначенням технічних завдань. Математичною моделлю еволюційних процесів з короткочасними збуреннями може служити система диференціальних рівнянь з імпульсною дією [2, 4, 8].

Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотніх коливань [1, 3, 7] та диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [2, 4, 6, 8].

У даній статті досліджуються лінійні розширення диференціальних рівнянь з імпульсною дією. роботі для яких встановлюються умови, які забезпечують існування інтегральної множини. Однією з достатніх умов існування інтегральної множини є існування функції Гріна–Самойленка.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in R, \quad x \in R^n, \quad \varphi \in \Im^m, \quad \Im^m - m -$ мірний тор; $a(t,\varphi), \quad f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$. – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) по t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π-періодичні по $\varphi_\nu, \quad \nu = \overline{1,m}$, обмежені при всіх $t \in R, \quad \varphi \in \Im^m$. Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по $i \in Z$ матриці і вектори, $\det(E + B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \Im^m$. Послідовність моментів імпульсного збурення $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $\tau_i \to +\infty$. Вважатимемо, що рівномірно по $t \in R$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to\infty} \frac{i(t,t+T)}{T} = p < \infty. \tag{2}$$

Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця по φ, рівномірно відносно $t \in R$, тобто

$$\|a(t,\varphi_1) - a(t,\varphi_2)\| \le l \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{3}$$

Припустимо також, що функції $f(t,\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ задовольняють рівність

$$\sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \|f(t,\varphi)\| + \sup_{i\in Z} \max_{\varphi\in\Im_m} \|I_i(\varphi)\| = m.$$

Виходячи з [1, 3, 4, 8], вводимо поняття функції Гріна–Самойленка задачі про інтегральні множини диференціальних рівнянь для імпульсних систем і вкажемо достатні умови існування інтегральної множини.

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь, визначених на торі $\Im^m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) \tag{4}$$

і позначимо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок цієї системи, який задоволняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi.$ В силу компактності фазового простору системи рівнянь (4) і зроблених припущень відносно функції $a(t,\varphi)$, кожний розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi), \quad \varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi,$ при будь-яких $\tau \in R$, $\varphi \in \Im^m$ існує і продовжимо його на всю вісь R.

Розглянемо систему диференціальных рівнянь з імпульсним впливом

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau, \varphi)), \quad t \neq \tau_i, \qquad (5)$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)).$$

Запишемо відповідну (5) однорідну систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x, \quad t \neq \tau_i, \qquad (6)$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))x$$

і позначимо через $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ матрицант цієї системи. В силу неперервної залежності $\varphi_t(\tau, \varphi)$ від параметрів $\tau \in R$ и $\varphi \in \Im^m$ матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ від цих параметрів залежить неперервним чином.

Лемма. Для будь-яких $t, s, \tau, \sigma \in R$ і $\varphi \in \Im^m$ справедливо $\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = \Omega_s^t(\sigma, \varphi)$.

Доведення. Оскільки $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ матрицант системи рівнянь (6), то

$$\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau, \varphi) = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\Omega_s^t(\tau, \varphi),$$
$$\Delta\Omega_s^t(\tau, \varphi)\big|_{t=\tau_i} = B_i\left(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)\right)\Omega_s^{\tau_i}(\tau, \varphi).$$

Замінимо φ на $\varphi_\tau(\sigma, \varphi)$ і, враховуючи властивість $\varphi_t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = \varphi_t(\sigma, \varphi)$, розв'язків $\varphi_t(\tau, \varphi)$ системи (3), одержимо

$$\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = P(t, \varphi_t(\sigma, \varphi))\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)), \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi))\big|_{t=\tau_i} = B_i\left(\varphi_{\tau_i}(\sigma, \varphi)\right)\Omega_s^{\tau_i}(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)).$$

Остання рівність означає, що $\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi))$ є фундаментальною матрицею системи рівнянь (6), яка при $t = s$ є одиничною матрицею. Але цю ж властивість має і матриця $\Omega_s^t(\sigma, \varphi)$. Це можливо тільки у випадку, коли матриці $\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi))$ і $\Omega_s^t(\sigma, \varphi)$ співпадають. Лему доведено.

Нехай $C(t, \varphi)$ – неперервна 2π– періодична по кожній компоненті $\varphi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, кусково-неперервна по $t \in R$, з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t, \varphi)C(s, \varphi_s(t, \varphi)), & s \leq t, \\ -\Omega_s^t(t, \varphi)\left[E - C(s, \varphi_s(t, \varphi))\right], & s > t, \end{cases} \qquad (7)$$

і назвемо $G(t, s, \varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(t, \varphi)x, \quad t \neq \tau_i,$$
$$\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x,$$

якщо для всіх $t, s \in R$, $\varphi \in \Im^m$ і деяких, $\sup\limits_{t\in R} \sum\limits_{\tau_i < t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\|G(t, s, \varphi)\right\| ds + \sum_{i=\infty-}^{+\infty} \left\|G(t, \tau_i + 0, \varphi)\right\| \leq K \qquad (8)$$

Вкажемо найпростіші властивості функції Гріна–Самойленка $G(t, s, \varphi)$. З визначення цієї функції випливає, що функція Гріна–Самойленка неперервна для всіх $t, s \in R,\ t \neq s,\ \varphi \in \Im^m,\ 2\pi$– періодична по $\varphi_\nu, \nu = \overline{1, m}$, причому

$$G(s + 0, s, \varphi) - G(s - 0, s, \varphi) = E.$$

Беручи до уваги лему 1, маємо

$$G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) = \begin{cases} \Omega_s^t(t, \varphi)C(s, \varphi_s(\tau, \varphi)), & s \leq t, \\ -\Omega_s^t(t, \varphi)\left[E - C(s, \varphi_s(\tau, \varphi))\right], & s > t. \end{cases} \qquad (9)$$

При $s = \tau$ одержимо $$G(t, \tau, \varphi_t(\tau, \varphi)) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(t, \varphi)C(\tau, \varphi), & \tau \leq t; \\ -\Omega_\tau^t(t, \varphi)\left[E - C(\tau, \varphi)\right], & \tau > t. \end{cases}$$

Як бачимо, матриця $G(t, \tau, \varphi_t(\tau, \varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (6), що розглядається при $t \geq \tau$ і $t < \tau$ відповідно.

Припустимо, що моменти імпульсного впливу τ_i такі, що для всіх $i \in Z.$ виконується оцінка

$$\tau_{i+1} - \tau_i > \theta > 0\,. \qquad (10)$$

Розглянемо вираз

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)).$$

Враховуючи (10) і (8), одержимо

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)) \right\| \le \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \| f(t,\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}} \sup_{i\in Z} \max_{\varphi\in\Im_m} \| I_i(\varphi\| .$$

Покладемо

$$u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)). \qquad (11)$$

Функція $u(t,\varphi)$ -2π – періодична по $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m}$ неперервна по $\varphi\in\Im^m$ і кусково-неперервна по $t\in R$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$.

Покажемо, що множина $x=u(t,\varphi),\quad t\in R, \varphi\in\Im^m$ є інтегральною множиною системи рівнянь (1). Для цього розглянемо функцію $x_t(\tau,\varphi)=u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$, де $\varphi_t(\tau,\varphi),\quad \varphi_\tau(\tau,\varphi)=\varphi-$ розв'язок першого з рівнянь системи (1).

Згідно (9), (11) маємо

$$x_t(\tau,\varphi) = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) =$$

$$\int_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\times C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{\tau_i<t} \Omega_{\tau_i}^t(\tau,\varphi) C(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\big[C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))-E\big] f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + \sum_{\tau_i>t} \Omega_{\tau_i}^t(\tau,\varphi)\Big[C(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))-E\Big] I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)).$$

Диференціюючи останнє співвідношення по t при $t\ne\tau_j$, знаходимо

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_t(\tau,\varphi)}{dt} = \frac{d}{dt} u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) \int_{-\infty}^{t} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\times C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))\times \\
&\times f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + C(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\times \\
&\times \int_{t}^{+\infty} \Omega_s^t(\tau,\varphi)\big[C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))-E\big] f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds - \big[C(t,\varphi_t(\tau,\varphi))-E\big]\times \\
&\times f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \\
&= P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) x_t(\tau,\varphi) + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))
\end{aligned}$$

для будь-якого $\tau\in R, \varphi\in\Im^m$. А при $t=\tau_j$ маємо

$$x_{\tau_j+0}(\tau,\varphi) - x_{\tau_j}(\tau,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (G(\tau_j+0,s,\varphi_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,s,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi)) \times f(s,\varphi_s(\tau_j,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi)))ds +$$

$$+\sum_{i=-\infty}^{\infty} (G(\tau_j+0,\tau_i,\varphi_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,\tau_i,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))\ I_i(\varphi_{\tau_j}(\tau_j,\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))) = B_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi)) x_{\tau_j}(\tau_j,\varphi) + I_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))$$

для будь-якого $\tau\in R, \varphi\in\Im^m$.

Останні дві рівності доводять, що функція $u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$ є розв'язком системи рівнянь (5), яка залежить від $\tau\in R, \varphi\in\Im^m$ як від параметрів. Це означає, що множина $x=u(t,\varphi)$ є інтегральною множиною системи рівнянь (1).

Таким чином доведено наступну теорему.

Теорема 1. Нехай в системі рівнянь (1) функції $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ – неперервні за t відповідно векторні і матричні функції, неперервні і 2π- періодичні по $\varphi_\nu,\ \nu=\overline{1,m},$ обмежені при всіх $t\in R, \varphi\in\Im^m$. Функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця по φ рівномірно відносно $t\in R.$ Функції $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ – рівномірно обмежені по i матриці і вектори, $\det(E+B_i(\varphi))\ne 0$ для будь-якого $\varphi\in\Im^m$. Для послідовності моментів імпульсних збурень $\{\tau_i\}$ виконується оцінка (10). Нехай також існує функція Гріна–Самойленка $G(t,s,\varphi).$ Тоді система рівнянь (1) має інтегральну множину

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)), \quad t\in R, \quad \varphi\in\Im^m,$$

причому

$$\sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \| u(t,\varphi)\| \le \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \| f(t,\varphi)\| + \frac{2K}{1-e^{-\gamma\theta}} \sup_{i\in Z} \max_{\varphi\in\Im_m} \| I_i(\varphi\| . \qquad (12)$$

Припустимо тепер, що матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (6) допускає оцінку

$$\left\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-s)} \qquad (13)$$

для будь-яких $t \ge s \in R,\ \tau \in R,\ \ \varphi \in \Im^m$ і деяких $K \ge 1, \gamma > 0.$

В цьому випадку, існує функція Гріна-Самойленка наступного вигляду

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi), & s < t, \\ 0, & s \ge t. \end{cases} \qquad (14)$$

Властивість (14) випливає з (7). Якщо в (7) покласти $G(s,\varphi_s(\tau,\varphi)) = E$, то інтегральну множину системи рівнянь (1) подамо у вигляді

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))ds + \sum_{\tau_{i<t}} G(t,\tau_i+0,\varphi) I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)), \quad t \in R, \quad \varphi \in \Im^m. \qquad (15)$$

Покажемо, що ця множина асимптотично стійка.

В системі рівнянь (6) зробимо заміну: $x = u(t,\varphi) + z.$ Тоді

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dz}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}a(t,\varphi) + \frac{dz}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) + P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$$

$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = \Delta u\Big|_{t=\tau_i} + \Delta z\Big|_{t=\tau_i} = P(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))u(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + \Delta z\Big|_{t=\tau_i}.$$

Звідки

$$\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))z. \qquad (16)$$

Позначимо через $z = z(t,\varphi,z_0) = \Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0$ загальний розв'язок системи рівнянь (16). Використовуючи властивості матриціанта $\Omega_0^t(\tau,\varphi)$ для цього розв'язку одержуємо оцінку

$$\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\| = \left\|\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0\right\| = \left\|\Omega_\tau^t(\tau,\varphi)\Omega_0^t(\tau,\varphi)z_0\right\| =$$

$$= \left\|\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\tau,\varphi)z(t,\varphi,z_0)\right\| \le \left\|\Omega_\tau^{t-\tau}(\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\|\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\|,$$

яка справедлива для всіх $t \in R,\ \varphi \in \Im^m.$ Але в силу лінійності системи рівнянь (5), різниця будь-якого розв'язку $x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0)$ і її розв'язку $x = u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),$ який лежить на інтегральній множині, є розв'язком рівнянь (6), тобто для цієї різниці справедлива оцінка

$$\left\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| = \left\|z(t,\varphi,z_0)\right\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\left\|z(t,\varphi,z_0)\right\|.$$

А це означає, що

$$\left\|x(t,\varphi_t(\tau,\varphi),x_0) - u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \to 0, \text{ при } t \to \infty.$$

Таким чином, нами встановлене наступне твердження.

Теорема 2. Припустимо, що система рівнянь (1) задовольняє умовам теореми 1. Нехай також матрицант $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи рівнянь (6) задовольняє нерівності (13). Тоді система рівнянь (1) має асимптотично стійку інтегральну множину (15) і ця множина задовольняє оцінку

$$\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|u(t,\varphi)\right\| \le K_0\left[\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|f(t,\varphi)\right\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\left\|I_i(\varphi\right\|\right], \qquad (17)$$

де

$$K_0 = \frac{\mathrm{K}}{\gamma} + K\sup_{t\in R}\sum_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}.$$

Відмітимо, що в припущенні існування кінцевої границі (3) величина $\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)}$ обмежена.

Насправді, з існування границі (3) випливає, що можна вказати таки числа $l_0 > 0$ і натуральне число $q,$ що будь-який відрізок часової вісі довжини l_0 містить найбільше q членів послідовності $\{\tau_i\}$. Тому

$$\sup_{t\in R}\sum_{\tau_i<t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} \le \frac{q}{1-e^{-\gamma l_0}},$$

звідси, в оцінці (17) в якости K_0 можно взяти число $K_0 = K\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{q}{1-e^{-\gamma l_0}}\right).$

Зокрема, якщо моменти імпульсного впливу τ_i такі, що $\tau_{i+1} - \tau_i \ge \theta > 0$ для всіх $i \in Z,$ то в цьому випадку в якості l_0 може служити $\theta,$ а в якості q – одиниця, так що в якості константи K_0 може бути число $K_0 = K\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-e^{-\gamma\theta}}\right).$

ВИСНОВКИ. Для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом побудована інтегральна інваріантна множина з використанням функції Гріна–Самойленка. Досліджено питання асимптотичної стійкості цих множини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. 272 с.
2. Перестюк Н. А., Плотников В. А., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. К.: ИМ НАН Украины, 2007.
3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
4. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
5. Фекета П. В., Асроров Ф. А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип.23. С. 125–132.
6. Perestyuk N. O., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V. Differential Equations with Impulse Effects: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities. Berlin: Walter de Gruyter Co, 2011.
7. Samoilenko A. M. Elements of the Mathematical Theory of Multi-Frequency Oscillations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.
8. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Стаття надійшла до редколегії 30.03.15

Асроров Ф., канд. физ.-мат. наук., научн. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченка, Киев

ФУНКЦИЯ ГРИНА-САМОЙЛЕНКО И СУЩЕСТВОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ЛИНЕЙНЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием построена интегральная инвариантная множества с использованием функции Грина-Самойленко.

Asrorov F., PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

GREEN-SAMOILENKO FUNCTION AND EXISTENCE OF INTEGRAL SETS FOR LINEAR EXTENTIONS OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS

An integral invariant set is constructed for systems of impulsive differential equations by using the Grin-Samoilenko functions.

УДК 517.9

А. Лучко, студ.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Л. Процак, канд. фіз.-мат. наук,
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ
e-mail: *alina.v.luchko@gmail.com, protsak_l_v@ukr.net*

СЛАБКО НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА НА ПІВОСІ З СИНГУЛЯРНІСТЮ ПЕРШОГО РОДУ

Розглянуто сингулярну крайову задачу на додатній півосі для слабко нелінійної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку, коли розв'язки незбуреної задачі утворюють сім'ю, залежну від кількох параметрів. Сингулярність задачі обумовлена наявністю полюса першого порядку в коефіцієнтах системи та умовою прагнення розв'язку до нуля на нескінченності. Доведено теорему про продовження за малим параметром збурення тих розв'язків незбуреної задачі, параметри яких задовольняють визначальне рівняння.

ВСТУП. Розглядається слабко нелінійна крайова задача

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)y + \frac{a}{x} + f(x) + \varepsilon F(x,y), \quad x \in \mathbb{R}_+ := [0;+\infty), \tag{1}$$

$$y(0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0. \tag{2}$$

Тут $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $B(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)\right)$, $f(\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, $F(\cdot,\cdot) \in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. Задача містить параметр збурення $\varepsilon \in \mathbb{R}$ та параметр керування $\lambda \in \mathbb{R}^n$. При $\varepsilon = 0$ маємо незбурену лінійну задачу

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)y + \frac{a}{x} + f(x), \tag{3}$$

$$y(0) = \lambda, \quad y(+\infty) = 0. \tag{4}$$

Припустимо, що для деякого $\lambda = \lambda_0 \in \mathbb{R}^n$ ця незбурена задача має розв'язок $y_0(\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$. З погляду теорії збурень виникає природне питання: чи знайдеться таке додатне $\varepsilon_* > 0$, що для кожного $\varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ існує пара $\lambda = \lambda_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y = y_\varepsilon(\cdot) \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$, яка задовольняє (1)–(2), і при цьому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \ge 0} \left\| y_\varepsilon(x) - y_0(x) \right\| = 0 \tag{5}$$

(а отже, $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon = \lambda_0$). Якщо відповідь на це питання позитивна, то кажуть, що сім'я функцій $y_\varepsilon(\cdot)$ є *продовженням за малим параметром* $\varepsilon \in (-\varepsilon_*, \varepsilon_*)$ розв'язку $y_0(\cdot)$ задачі (3)–(4) з $\lambda = \lambda_0$. Водночас важливо описати множину тих параметрів керування незбуреної задачі, для яких існує продовження за малим параметром.

Задача (1)–(2) належить до класу двосторонньо сингулярних, оскільки перша крайова умова ставиться в особливій точці $x=0$, а друга – на нескінченності. Проблеми такого роду виникають при побудові та дослідженні окремих типів розв'язків різноманітних рівнянь математичної фізики, зокрема рівнянь нелінійної теорії поля. Постановки відповідних задач, а також важливі результати з їхнього розв'язання наведено, наприклад, в [7, 11, 13, 15, 16]. У цих працях можна знайти обширну бібліографію, пов'язану із зазначеною тематикою. Проте у нелінійній постановці основна маса робіт стосувалася сингулярних крайових задач на півосі для рівнянь другого порядку.

Для лінійних систем та рівнянь вищого порядку з неінтегровними коефіцієнтами змістовну теорію сингулярних крайових задач на скінченному відрізку розроблено в [6, 14]. В [12] було досліджено задачу (3)–(4) і знайдено достатні умови існування її розв'язків. Серед таких умов, зокрема, фігурує припущення про експоненціальну дихотомічність на півосі $[1,\infty)$ лінійної однорідної системи, асоційованої з неоднорідною системою (3). Наявність цього припущення стає зрозумілою, якщо звернутися до теорії обмежених розв'язків лінійних систем з обмеженою неоднорідністю на півосі або на всій осі [1, 4, 17].

Використаний нами підхід до розв'язання задачі (1)–(2) ідейно близький до розвинутого в працях [5, 8, 10], де вивчалася проблема існування обмежених на всій осі розв'язків слабко нелінійних систем в дусі теорії Фредгольма – Нетера. Важливо відзначити, що, як і в цих статтях, ми не виключаємо так званий резонансний (критичний) випадок, коли відповідна незбурена лінійна однорідна задача має нетривіальні розв'язки, і суттєво використовуємо узагальнену функцію Гріна для зведення вихідної задачі до системи інтегральних рівнянь та знаходження так званого визначального рівняння (рівняння породжувальних амплітуд). Раніше інший підхід до розв'язання дещо загальніших у порівнянні з (1)–(2) задач, який не використовує явно функції Гріна, було запропоновано в [2, 3]. Однак в цих роботах розглядалися лише нерезонансні (некритичні) випадки.

ЗВЕДЕННЯ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ. Як і в [12], стосовно лінійної системи (3) усюди надалі вимагаємо виконання таких умов:

(A): характеристичний поліном оператора A не має коренів з дійсною частиною рівною одиниці і $a \in \operatorname{Im} A$;

(B): лінійна однорідна система $y' = B(x)y$ експоненціально дихотомічна на $[1,\infty)$, причому $M := \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\|B(x)\| < \infty$;

(C): неоднорідність $f(\cdot)$ зникає на нескінченності: $\lim_{x\to\infty}\|f(x)\| = 0$.

Сформулюємо також дві додаткові вимоги щодо нелінійності $F(\cdot,\cdot)$:

(D): $\lim_{x\to\infty}\|F(x,0)\| = 0$;

(E): для всіх $(x,y)\in\mathbb{R}^{1+n}$ існує неперервна частинна похідна $J(x,y) := F_y'(x,y)$, причому

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\|J(x,0)\| < \infty, \quad \lim_{z\to y}\sup_{x\ge 0}\|J(x,z)-J(x,y)\| = 0 \quad \forall y\in\mathbb{R}^n.$$

Зауваження 1. *З умови **(E)** та нерівності*

$$\left|\sup_{x\ge 0}\|J(x,y)\| - \sup_{x\ge 0}\|J(x,z)\|\right| \le \sup_{x\ge 0}\|J(x,y)-J(x,z)\| \quad \forall y,z\in\mathbb{R}^n$$

випливає, що функція $\sup_{x\ge 0}\|J(x,\cdot)\|$ неперервна, а тоді функція $\|J(\cdot,\cdot)\|$ обмежена на $\mathbb{R}_+\times\mathcal{D}$ для довільної обмеженої області $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$.

Позначимо через $Y(x)$ нормований в точці $x=1$ еволюційний оператор лінійної однорідної системи

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)y. \tag{6}$$

Відзначимо, що коли виконується умова **(B)**, то ця система теж експоненціально дихотомічна (див., наприклад, [1, с. 267]).

Як вже зазначалося вище, ми не виключаємо з розгляду критичний випадок, коли існує підпростір $\mathbb{L}\subset\mathbb{R}^n$ з числом вимірів $l := \dim\mathbb{L}$ такий, що для кожного $v\in\mathbb{L}$ розв'язок $Y(x)v$ системи (6) належить $C^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ і зникає при $x\to+\infty$.

Зрозуміло, що тоді

$$C_Y := \sup_{x\ge 0}\max\left\{\|Y(x)v\| : v\in\mathbb{L}, \|v\| = 1\right\} < \infty. \tag{7}$$

З результатів роботи [12] випливають такі факти стосовно незбуреної задачі:

(a): розв'язок задачі (3)–(4) в класі $C^1(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n)$ існує тоді й лише тоді, коли справджується рівність (умова ортогональності)

$$\int_0^\infty PY^{-1}(x)(f(x)+B(x)\eta)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{8}$$

де вектор $\eta\in\operatorname{Im}A^*$ однозначно визначається з лінійної системи рівнянь $A\eta + a = 0$, а $P:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{M}$ – це ортопроектор на підпростір $\mathbb{M}\subset\mathbb{R}^n$, $m := \dim\mathbb{M}$, який є ортогональним доповненням (відносно відповідним чином уведеного скалярного добутку) до підпростору початкових значень при $x=1$ тих розв'язків системи (6), які або неперервно диференційовні на $\mathbb{R}_+$, або мають нульову границю при $x\to+\infty$ (у [12] P позначено через P_6); при цьому

$$C_P := \int_0^\infty \|PY^{-1}(x)\|\,\mathrm{d}x < \infty; \tag{9}$$

(b): якщо (8) виконується, то розв'язки задачі (3)–(4) в класі $C^1(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n)$ утворюють залежну від параметра $v \in \mathbb{L}$ сім'ю $y^0(\cdot, v)$, яка має інтегральне зображення

$$y^0(x,v) = Y(x)v + \eta + \int_0^\infty G(x,s)(f(s)+B(s)\eta)\mathrm{d}s, \tag{10}$$

з деким ядром $G(\cdot,\cdot): \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathrm{Hom}\mathbb{R}^n$, структура якого описана в [12];

(c): ядро $G(\cdot,\cdot)$ можна записати у вигляді

$$G(x,s) = G_0(x,s) + \vartheta(x-s)Y(x)PY^{-1}(s), \quad \vartheta(x) := \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x \ge 0, \end{cases}$$

де $G_0(x,s) := G(x,s)Y(s)(E-P)Y^{-1}(s)$, і якщо покласти

$$H(x,s) := G_0(x,s) + \begin{cases} \left[1+\vartheta(x-s)\right]Y(x)PY^{-1}(s), & x \in [0,1], \\ \vartheta(x-s)Y(x)PY^{-1}(s), & x > 1, \end{cases}$$

то для довільної функції $g(\cdot)$, яка задовольняє умови

$$g(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right), \quad \lim_{x\to\infty}\|g(x)\| = 0, \quad \int_0^\infty PY^{-1}(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{11}$$

справджується рівність $\int_0^\infty G(x,s)g(s)\mathrm{d}s = \int_0^\infty H(x,s)g(s)\mathrm{d}s;$ при цьому виконуються умови рівномірної збіжності невласного інтеграла

$$C_H := \sup_{x\ge 0}\int_0^\infty \|H(x,s)\|\mathrm{d}s < \infty, \quad \lim_{\xi\to\infty}\sup_{x\in[0,b]}\int_\xi^\infty \|H(x,s)\|\mathrm{d}s = 0 \quad \forall b>0;$$

(d): множина допустимих параметрів керування являє собою афінний підпростір $\mathbb{A}$ у $\mathbb{R}^n$, утворений елементами вигляду $\lambda = \eta + \zeta_0 + \zeta$, де $\zeta_0 \in \ker A$ – деякий фіксований вектор, а ζ пробігає підпростір усіх тих векторів з $\ker A$, для кожного з яких існує розв'язок $y_\zeta(\cdot)$ однорідної системи (6) такий, що

$$y_\zeta(x) = \left[E + x(E-A)^{-1}B(0) + o(x)\right]\zeta, \quad x \to +0, \quad \lim_{x\to\infty}\left\|y_\zeta(x)\right\| = 0.$$

Виберемо фінітну функцію $\varphi(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+\right)$ з компактним носієм $\mathrm{supp}\varphi \subset (0,\infty)$ так, щоб $\int_0^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$, покладемо

$$C_\varphi := \sup_{x\ge 0}\|\varphi(x)Y(x)\|$$

і визначимо ядро

$$K(x,s) := H(x,s) - \left[\int_0^\infty \varphi(t)H(x,t)Y(t)\mathrm{d}t\right]PY^{-1}(s).$$

На підставі фактів **(a)** та **(c)** для всіх $x \ge 0$ маємо нерівність

$$\int_0^\infty \|K(x,s)\|\mathrm{d}s \le C_H + \left[\int_0^\infty \|H(x,t)\|\|\varphi(t)Y(t)\|\mathrm{d}t\right]\int_0^\infty \left\|PY^{-1}(s)\right\|\mathrm{d}s \le (1+C_\varphi C_P)C_H,$$

з якої випливає рівномірна збіжність невласного інтеграла

$$C_K := \sup_{x\ge 0}\int_0^\infty \|K(x,s)\|\mathrm{d}s < \infty, \quad \lim_{\xi\to\infty}\sup_{x\in[0,b]}\int_\xi^\infty \|K(x,s)\|\mathrm{d}s = 0 \quad \forall b>0. \tag{12}$$

Твердження 2. *Нехай виконується умова ортогональності* (8). *Тоді для довільної функції* $g(\cdot) \in C\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ *такої, що* $\lim_{x\to\infty}\|g(x)\| = 0$*, і кожного* $v \in \mathbb{L}$ *функція*

$$y(\cdot) := y^0(\cdot, v) + \int_0^\infty K(\cdot,s)g(s)\mathrm{d}s$$

є розв'язком класу $C^1\left(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n\right)$ *системи*

$$y' = \left(\frac{A}{x} + B(x)\right)y + \frac{a}{x} + f(x) + g(x) - \varphi(x)Y(x)\int_0^\infty PY^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s, \tag{13}$$

для якого $\lim_{x\to\infty}\|y(x)\| = 0$.

Доведення. Вибір функції $\varphi(\cdot)$ гарантує прагнення норми неорднорідного члена системи (13) до нуля при $x \to \infty$. Крім того, виконана умова ортогональності

$$\int_0^\infty PY^{-1}(x)\left[g(x) - \varphi(x)Y(x)\int_0^\infty PY^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Тому на підставі факту **(c)** маємо

$$\int_0^\infty G(x,s)\left[g(s)-\varphi(s)Y(s)\int_0^\infty PY^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^\infty H(x,s)\left[g(s)-\varphi(s)Y(s)\int_0^\infty PY^{-1}(t)g(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s=\int_0^\infty K(x,s)g(s)\mathrm{d}s,$$

звідки з рахуванням факту **(b)** випливає потрібний висновок.

Наслідок 3. *Якщо функція* $g(\cdot)$ *задовольняє умови* (11)*, то для всіх* $x\in\mathbb{R}_+$ *справджується рівність* $\int_0^\infty G(x,s)g(s)\mathrm{d}s=\int_0^\infty K(x,s)g(s)\mathrm{d}s$.

Твердження 4. *Нехай виконана умова ортогональності* (8)*. Рівномірно обмежена на* $\mathbb{R}_+$ *сім'я функцій* $\left\{y_\varepsilon(\cdot)\in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)\right\}_{\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)}$ *з властивістю*

$$\lim_{x\to\infty}\left\|y_\varepsilon(x)\right\|=0\quad\forall\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$$

є продовженням за малим параметром ε *розв'язку* $y_0(\cdot):=y^0(\cdot;v_0)$ *задачі (3) – (4) тоді й лише тоді, коли для кожного* $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ *існує вектор* $v_\varepsilon\in\mathbb{L}$ *такий, що справджуються рівності*

$$y_\varepsilon(x)=y^0(x,v_\varepsilon)+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)F(s,y_\varepsilon(s))\mathrm{d}s\quad\forall x\in\mathbb{R}_+, \tag{14}$$

$$\int_0^\infty PY^{-1}(x)F(x,y_\varepsilon(x))\mathrm{d}x=0, \tag{15}$$

а вектор $v_0:=\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon$ *задовольняє визначальне рівняння*

$$\Phi(v):=\int_0^\infty PY^{-1}(x)F(x,y^0(x,v))\mathrm{d}x=0. \tag{16}$$

Доведення. Нехай сім'я $\left\{y_\varepsilon(\cdot)\in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)\right\}_{\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)}$ є продовженням розв'язку $y_0(\cdot)$. Оскільки $F(x,y)=F(x,0)+\left[\int_0^1 J(x,sy)\mathrm{d}s\right]y$, то унаслідок (5), умови **(D)** та Зауваження 1 маємо

$$\lim_{x\to\infty}F(x,y_\varepsilon(x))=0,\quad \lim_{\varepsilon\to0}\sup_{x\ge0}\left\|F(x,y_\varepsilon(x))-F(x,y_0(x))\right\|=0. \tag{17}$$

З урахуванням першої границі у цій формулі $y_\varepsilon(\cdot)$ можна розглядати як деякий розв'язок лінійної задачі вигляду (3)–(4), у якій замість $f(x)$ фігурує $f_\varepsilon(x):=f(x)+\varepsilon F(x,y_\varepsilon(x))$. У цьому випадку умова ортогональності зводиться до (15). Тоді з огляду на опис сім'ї всіх розв'язків формулою (10), у якій $f(x)\mapsto f_\varepsilon(x)$, та з урахуванням Наслідку 3 справджується (14), де

$$v_\varepsilon:=y_\varepsilon(1)-\eta-\int_0^\infty K(1,s)(f_\varepsilon(s)+B(s)\eta)\mathrm{d}s\in\mathbb{L}.$$

Звідси випливає, що $\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon=v_0$. Взявши до уваги (9) і другу рівність (17), здійснимо граничний перехід під знаком інтеграла у (15) при $\varepsilon\to0$ і дістанемо $\Phi(v_0)=0$.

Навпаки, якщо сім'я $\left\{y_\varepsilon(\cdot)\in \mathrm{C}\left(\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}^n\right)\right\}_{\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)}$, про яку йдеться в умові твердження, задовольняє рівності (14), (15), то з урахуванням Твердження 2 для кожного $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ функція $y_\varepsilon(\cdot)$ є розв'язком лінійної задачі вигляду (3)–(4) з неоднорідністю $f_\varepsilon(x)$ замість $f(x)$. І оскільки $\lim_{\varepsilon\to0}v_\varepsilon=v_0$, то, взявши до уваги (7), дістанемо (5).

З урахуванням доведеного твердження за умови існування розв'язку v_0 визначального рівняння (16) пропонується такий підхід до розв'язання задачі (1)–(2). Розглянемо інтегральне рівняння з параметрами v,ε

$$y(x,v,\varepsilon)=y^0(x,v)+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s;v,\varepsilon))\mathrm{d}s. \tag{18}$$

Нехай встановлено, що це рівняння має розв'язок $y^*(\cdot,v,\varepsilon)$, залежний від векторного параметра v з деякого околу точки v_0 у $\mathbb{L}$ та параметра $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ (ε_0 – деяке додатне число), і такий, що $\lim_{x\to\infty}\left\|y^*(x,v,\varepsilon)\right\|=0$. Тоді, якщо для кожного $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$, де $\varepsilon_*\in(0,\varepsilon_0)$ – достатньо мале, існує розв'язок $v=v_\varepsilon$ рівняння щодо v

$$\Psi(v,\varepsilon):=\int_0^\infty PY^{-1}(x)F(x,y^*(x;v,\varepsilon))\mathrm{d}x=0, \tag{19}$$

такий, що $v_\varepsilon\to v_0$, коли $\varepsilon\to0$, то покладемо $y_\varepsilon(\cdot):=y^*(\cdot,v_\varepsilon,\varepsilon)$. Зрозуміло, що тоді $y_\varepsilon(\cdot)$ та v_ε задовольнятимуть співвідношення (14)–(15), а $y_\varepsilon(\cdot)$ і буде шуканим продовженням розв'язку $y_0(\cdot)$.

ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ. Теоремою, сформульованою нижче, встановлено достатні умови існування сім'ї розв'язків збуреної задачі.

Теорема 5. *Припустимо, що виконані умови* ***(A)–(E)*** *й існує розв'язок* v_0 *визначального рівняння* (16) *такий, що* $\Phi'(v_0):\mathbb{L}\mapsto\mathbb{M}$ *– сюр'єкція. Тоді існують додатні числа* ρ *та* ε_* *такі, що для кожного* $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ *задача* (1)–(2) *має* $(l-m)$*-параметричну неперервно диференційовну сім'ю розв'язків* $y_\varepsilon(\cdot;q)$, $q=(q_1,\ldots,q_{l-m})$, $\|q\|<\rho$, *яка є продовженням за малим параметром* ε *сім'ї розв'язків* $y_0(\cdot;q)$ *незбуреної задачі. При цьому* $y_0(\cdot,0)=y^0(\cdot,v_0)$.

Доведення. Нехай r, R та ε_0 – додатні числа. Покладемо

$$T_R[y_0]:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n:\|y-y_0(x)\|\le R\right\},\quad \mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}:=\mathbb{R}_+\times\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0),$$

де $\mathbb{B}_r(v_0)$ – куля в $\mathbb{L}$ радіусом r та з центром в точці v_0, і позначимо через $\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$ множину тих $y(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathrm{C}\left(\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}\mapsto\mathbb{R}^n\right)$, що

$$(x,y(x,v,\varepsilon))\in T_R[y_0]\quad\forall(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0},$$

$$\lim_{x\to\infty}\|y(x,v,\varepsilon)\|=0\quad\forall(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0).$$

Права частина рівності (18) визначає на цій множині оператор, який ми позначимо через $\mathcal{F}[\cdot]$.

Подальші міркування розіб'ємо на кілька етапів.

1. Доведемо існування нерухомої точки оператора $\mathcal{F}[\cdot]$. Насамперед покажемо, що вибором r,R,ε_0 можна розпорядитися так, щоб $\mathcal{F}\left[\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]\right]\subset\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$. З урахуванням Зауваження 1 матимемо

$$C_J(R):=\sup_{(x,y)\in T_R[y_0]}\|J(x,y)\|<\infty,$$

$$C_F(R):=\sup_{(x,y)\in T_R[y_0]}\|F(x,y)\|\le\sup_{x\ge0}\|F(x,y_0(x))\|+C_J(R)R<\infty.$$

Тепер з (12) випливає нерівність

$$\|\mathcal{F}[y](x,v,\varepsilon)-y_0(x)\|\le\|Y(x)(v-v_0)\|+\varepsilon\int_0^\infty\|K(x,s)\|\|F(s,y(s,v,\varepsilon))\|\mathrm{d}s\le C_Yr+\varepsilon_0C_KC_F(R)\le R\quad\forall(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0},$$

як тільки числа r,R,ε_0 задовольнятимуть нерівності

$$C_Yr<R,\quad 0<\varepsilon_0<\left[R-C_Yr\right]/\left[C_KC_F(R)\right].\tag{20}$$

Отже, при виконанні цих нерівностей графік функції $\mathcal{F}[y](\cdot,v,\varepsilon)$ належатиме $T_R[y_0]$ для всіх $(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$. Крім того, з Твердження 2 при $g(\cdot)=\varepsilon F(\cdot,y(\cdot,v,\varepsilon))$ випливає, що $\lim_{x\to\infty}\|\mathcal{F}[y](x,v,\varepsilon)\|=0.$

Тепер доведемо неперервність $\mathcal{F}[y](\cdot,\cdot,\cdot)$ на $\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}$, а саме, покажемо, що

$$\mathcal{F}[y](x,v,\varepsilon)\to\mathcal{F}[y](\bar{x},\bar{v},\bar{\varepsilon}),\quad\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}\ni(x,v,\varepsilon)\to(\bar{x},\bar{v},\bar{\varepsilon})\quad\forall(\bar{x},\bar{v},\bar{\varepsilon})\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}.$$

Для цього, очевидно, достатньо для $b>\bar{x}$ обґрунтувати границі

$$\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s,v,\varepsilon))\mathrm{d}s\underset{x\in[0,b]}{\rightrightarrows}\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s,\bar{v},\bar{\varepsilon}))\mathrm{d}s,\quad(v,\varepsilon)\to(\bar{v},\bar{\varepsilon}),$$

$$\int_0^\infty K(x,s)F(s,y(s,\bar{v},\bar{\varepsilon}))\mathrm{d}s\to\int_0^\infty K(\bar{x},s)F(s,y(s,\bar{v},\bar{\varepsilon}))\mathrm{d}s,\quad x\to\bar{x}.$$

Друга границя випливає з диференційовності $\mathcal{F}[y](\cdot,v,\varepsilon)$ на $\mathbb{R}_+$, гарантованій Твердженням 2 при $g(\cdot)=\varepsilon F(\cdot,y(\cdot,v,\varepsilon))$, та факту **(b)**. Для обґрунтування першої границі запишемо нерівність

$$\sup_{x\in[0,b]}\left\|\int_0^\infty K(x,s)\left[F(s,y(s,v,\varepsilon))-F(s,y(s,\bar{v},\bar{\varepsilon}))\right]\mathrm{d}s\right\|\le\left[\sup_{x\in[0,b]}\int_0^\xi\|K(x,s)\|\mathrm{d}s\right]\sup_{s\in[0,\xi]}\|F(s,y(s,v,\varepsilon))-F(s,y(s,\bar{v},\bar{\varepsilon}))\|+$$

$$+2\left[\sup_{x\in[0,b]}\int_\xi^\infty\|K(x,s)\|\mathrm{d}s\right]\sup_{(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}}\|F(s,y(s,v,\varepsilon))\|\le C_K\sup_{s\in[0,\xi]}\|F(s,y(s,v,\varepsilon))-F(s,y(s,\bar{v},\bar{\varepsilon}))\|+2C_F(R)\sup_{x\in[0,b]}\int_\xi^\infty\|K(x,s)\|\mathrm{d}s.$$

В останньому рядку другий доданок можна зробити меншим за будь-яке наперед задане $\delta>0$ за рахунок вибору достатньо великого числа $\xi=\xi_\delta$, а перший доданок при такому значенні ξ_δ прямує до нуля, коли $(v,\varepsilon)\to(\bar{v},\bar{\varepsilon})$, за теоремою Кантора про рівномірну неперервність неперервної функції на компакті.

Увівши тепер у $\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$ стандартну метрику

$$\rho(y_1,y_2)=\sup_{(x,v,\varepsilon)\in\mathcal{U}_{r,\varepsilon_0}}\|y_1(x,v,\varepsilon)-y_2(x,v,\varepsilon)\|,\quad y_i(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0],\ i=1,2,$$

дістанемо повний метричний простір $\left(\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0],\rho(\cdot,\cdot)\right)$. З урахуванням отриманих вище оцінок легко показати, що

$$\rho\left(\mathcal{F}[y_1],\mathcal{F}[y_2]\right)\le\varepsilon_0 C_K C_J(R)\rho\left(y_1,y_2\right),$$

а тому, якщо поряд з (20) виконується нерівність

$$\varepsilon_0 C_K C_J(R)<1, \tag{21}$$

то $\mathcal{F}[\cdot]$ стискає $\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$ і за теоремою Банаха оператор $\mathcal{F}[\cdot]$ має нерухому точку $y^*(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[y_0]$. Ця функція є розв'язком інтегрального рівняння (18) і прагне до 0, коли $x\to\infty$. Крім того, очевидно, що $y^*(x,v,0)\equiv y^0(x,v)$.

2. Доведемо, що $y^*(\cdot,\cdot,\cdot)$ має неперервні частинні похідні за змінними v та ε. Природно припустити, що коли існує похідна за напрямком

$$D_{\mathbf{e}}y^*(x,v,\varepsilon):=\lim_{t\to 0}w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon),\quad w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon):=\frac{1}{t}\left[y^*(x,v+t\mathbf{e},\varepsilon)-y^*(x,v,\varepsilon)\right],$$

де $\mathbf{e}\in\mathbb{L}$, $\|\mathbf{e}\|=1$, то вона збігається з розв'язком інтегрального рівняння

$$z(x,v,\varepsilon)=Y(x)\mathbf{e}+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)J(s,y^*(s,v,\varepsilon))z(s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s,$$

одержаного формальним диференціюванням за напрямком $\mathbf{e}$ обох частин рівняння (18). Права частина цього рівняння визначає на повному метричному просторі $\left(\mathcal{M}_{r,\infty,\varepsilon_0}[0],\rho(\cdot,\cdot)\right)$, де $\mathcal{M}_{r,\infty,\varepsilon_0}[0]:=\bigcup_{R>0}\mathcal{M}_{r,R,\varepsilon_0}[0]$, оператор $\mathcal{J}[\cdot]$. Ті самі міркування, що й на етапі 1, дають підстави стверджувати, що нерівність (21) гарантує існування у цього оператора єдиної нерухомої точки $z_{\mathbf{e}}(\cdot,\cdot,\cdot)\in\mathcal{M}_{r,\infty,\varepsilon_0}[0]$. При цьому на підставі вже відомих нам оцінок дістаємо

$$\rho(z_{\mathbf{e}},0)\le C_Y+\varepsilon_0 C_K C_J(R)\rho(z_{\mathbf{e}},0)\quad\Rightarrow\quad\rho(z_{\mathbf{e}},0)\le C_Y/\left[1-\varepsilon_0 C_K C_J(R)\right]. \tag{22}$$

Легко бачити, що при $0<|t|<\delta\ll 1$ справджується рівність

$$w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)=Y(x)\mathbf{e}+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)I\left(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\right)w_{\mathbf{e}}(t,s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s,$$

де $I(s,y_1,y_2):=\int_0^1 J(s,\theta y_1+(1-\theta)y_2)\mathrm{d}\theta$, з якої, в свою чергу, дістаємо оцінку

$$\rho(w_{\mathbf{e}},0)\le C_Y/\left[1-\varepsilon_0 C_K C_J(R)\right].$$

Її наслідком, зокрема, є рівномірна збіжність

$$y^*(x,v+t\mathbf{e},\varepsilon)-y^*(x,v,\varepsilon)\underset{x\in\mathbb{R}_+}{\rightrightarrows}0,\ t\to 0\quad\forall(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0). \tag{23}$$

Різниця $u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon):=w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)-z_{\mathbf{e}}(x,v,\varepsilon)$ справджує рівність

$$u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)\left[I\left(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\right)w_{\mathbf{e}}(t,s,v,\varepsilon)-J\left(s,y^*(s,v,\varepsilon)\right)z_{\mathbf{e}}(s,v,\varepsilon)\right]\mathrm{d}s\equiv$$

$$\equiv\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)I\left(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\right)u_{\mathbf{e}}(t,s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s+$$

$$+\varepsilon\int_0^\infty K(x,s)\left[I\left(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\right)-J\left(s,y^*(s,v,\varepsilon)\right)\right]z_{\mathbf{e}}(s,v,\varepsilon)\mathrm{d}s.$$

Унаслідок виконання умови **(E)** та (23) для будь-якої точки $(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ і для довільного $\sigma>0$ існує $\delta>0$ таке, що

$$\sup_{s\ge 0}\left\|I\left(s,y^*(s,v+t\mathbf{e},\varepsilon),y^*(s,v,\varepsilon)\right)-J\left(s,y^*(s,v,\varepsilon)\right)\right\|<\sigma\quad\forall t\in(-\delta,\delta).$$

Тому

$$\sup_{x\ge 0}\left\|u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon_0 C_K C_J(R)\sup_{x\ge 0}\left\|u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)\right\|+\varepsilon_0 C_K\sigma\rho(z_{\mathbf{e}},0),$$

звідки з урахуванням (22) дістаємо

$$\sup_{x\ge 0}\left\|u_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)\right\|\le\frac{\sigma\varepsilon_0 C_K C_Y}{\left[1-\varepsilon_0 C_K C_J(R)\right]^2}\quad\forall t\in(-\delta,\delta).$$

Це означає, що $\lim_{t\to 0}w_{\mathbf{e}}(t,x,v,\varepsilon)=z_{\mathbf{e}}(x,v,\varepsilon)$, а отже, $D_{\mathbf{e}}y^*(x,v,\varepsilon)=z_{\mathbf{e}}(x,v,\varepsilon)$.

Аналогічно, з незначними змінами доводимо існування та неперервність частинної похідної $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(\cdot,\cdot,\cdot)$.

3. Розглянемо рівняння (19). На підставі (9) можна стверджувати, що

$$\Psi(\cdot,\cdot)\in C^1\left(\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\mapsto\mathbb{M}\right).$$

Крім того, $\Psi(v,0)\equiv\Phi(v)$. З умов теореми випливає, що $\Psi(v_0,0)=0$ і що ортонормований базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{l}$ простору $\mathbb{L}$ можна вибрати так, щоб вектори $\left\{D_{\mathbf{e}_i}\Phi(v_0)\right\}_{i=1}^{m}$ утворювали базис простору $\mathbb{M}$. Тоді за теоремою про неявну функцію в околі точки $(v_0,0)$ множина рівня $\{(v,\varepsilon)\in\mathbb{B}_r(v_0)\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0):\Psi(v,\varepsilon)=0\}$ утворює диференційовний локальний $(l-m+1)$-вимірний многовид. При цьому існують достатньо малі числа $\rho>0$ та $\varepsilon_*\in(0,\varepsilon_0)$ такі, що цей многовид можна задати параметрично рівнянням $v=\psi(q,\varepsilon)$, де $\psi(0,0)=v_0$,

$$\psi(\cdot,\cdot)\in C^1\left(\left\{q\in\mathbb{R}^{l-m}:\|q\|<\rho\right\}\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\mapsto\mathbb{L}\right),$$

а за параметри $q=(q_1,\ldots,q_{l-m})$ можна взяти, наприклад, $q_i=\langle v-v_0,\mathbf{e}_{m+i}\rangle$.

4. Для завершення доведення достатньо визначити шукану сім'ю розв'язків у такий спосіб: $y_\varepsilon(x,q):=y^*(x,\psi(q,\varepsilon),\varepsilon)$.

Наслідок 6. *Для кожного* $\varepsilon\in(-\varepsilon_*,\varepsilon_*)$ *множина допустимих керувань збуреної задачі містить сім'ю, задану рівнянням*

$$\lambda=\lambda_\varepsilon(q):=Y(+0)\psi(q,\varepsilon)+\eta+\zeta_0+\varepsilon\int\limits_0^\infty G(+0,s)F(s,y_\varepsilon(s,q))\mathrm{d}s,\quad \|q\|<\rho.$$

ВИСНОВКИ. Для сингулярної крайової задачі у критичному випадку, коли відповідна лінійна задача (3)–(4) має неєдиний розв'язок, доведено теорему, яка є аналогом результатів класичної теорії збурень періодичних розв'язків нелінійних систем, започаткованої А. Пуанкаре, та теорії збурень широких класів крайових задач, розробленої в [9].

Існування інтегрального зображення для розв'язків відповідної лінійної задачі дало змогу звести збурену задачу до пари рівнянь – інтегрального та визначального (рівняння породжувальних амплітуд). Як і слід було очікувати, виявилося, що за наявності у незбуреної задачі сім'ї розв'язків продовження за малим параметром допускають, узагалі кажучи, не всі розв'язки сім'ї, а лише ті, які виокремлюються за допомогою зазначеного визначального рівняння.

Питання про застосування отриманих результатів до конкретних прикладних задач буде розглянуто окремо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970 – 534 с.
2. *Парасюк І. О., Позур С. В., Процак Л. В.* Збурення сингулярної нелінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку// Вісник Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. – 2006 – вип.15. – С. 20–26.
3. *Парасюк І. О., Позур С. В., Процак Л. В.* Неперервне продовження за малим параметром розв'язку двобічно сингулярної нелінійної крайової задачі на півосі// Наук. записки НПУ ім. М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2003, № 4. – С. 177–190.
4. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной дихотомии на $\mathbb{R}$ линейных диференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 3. – 356–371.
5. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Бойчук Ан. А.* Ограниченные на всей оси решения слабо возмущённых линейных систем // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 11. – С. 1517–1530.
6. *Agarwal R. P., Kiguradze I.* Two-point boundary value problems for higher-order linear differential equations with strong singularities// Bound. Value Probl. – 2006. – 2006, № 83910. P. 1–32.
7. *Agarwal R. P., Mustafa O. G., Rogovchenko Yu. V.* Existence and asymptotic behavior of solutions of a boundary value problem on an infinite interval// Math. Comput. Modelling. – 2005. – 41. – P. 135–157.
8. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line// Нелінійні коливання. – 1999. – 2 , № 1. – С. 3–10.
9. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht, Boston: VSP. The Netherlands, 2004. – 317 p.
10. *Boichuk A.* Dichotomy, trichotomy and solutions of nonlinear systems bounded on R// In: Proc. of XXVI Summer School "Applications of Mathematics in Engineering and Economics", Sozopol 2000. – Sofia: Heron Press, 2001. – P. 9–15.
11. *Duhoux M.* Green function and the property of positivity for singular second order boundary value problem// Tatra Mt. Math. Publ. – 2000. – 19. – P. 1–20.
12. *Horishna Y., Parasyuk I., Protsak L.* Integral representation of solutions to boundary value problems on the half-line for linear ODEs with singularity of the first kind// Electron. J. Differ. Equat. – 2008. – Vol. 2008, №137. – P. 1–18.
13. *Jiang W., Wang B., Wang Zh.* Solvability of a second-order multi-point boundary-value problems at resonance on a half-line with dimker L=2// Electron. J. Differ. Equat. – 2011. – 2011, №. 120 – P. 1–11. (URL: http://ejde.math.txstate.edu)
14. *Kiguradze I. T.* On boundary value problems for linear differential systems with singularities// Differ. Equ. – 2003. – 39. – P. 212–225.
15. *Kiguradze I. T., Shekhter B. L.* Singular boundary-value problems for ordinary second order differential equations// J. Sov. Math. – 1988. – 43. – P. 2340–2417.
16. *O'Regan D.* Solvability of some singular boundary value problems on the semi-infinite interval// Can. J. Math. – 1996. – 48. – P. 143–158.
17. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points// J. Differ. Equ. – 1984. – 55. – P. 225–256.

Стаття надійшла до редколегії 11.11.14

Лучко А., студ.,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев
Процак Л., канд. физ.-мат. наук
Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, Киев

СЛАБО НЕЛИНЕЙНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ПОЛУОСИ С СИНГУЛЯРНОСТЬЮ ПЕРВОГО РОДА

Рассмотрена сингулярная краевая задача на положительной полуоси для слабо нелинейной системы дифференциальных уравнений в критическом случае, когда решения невозмущенной задачи образуют семью, зависящую от нескольких параметров. Сингулярность задачи обусловлена наличием полюса первого порядка в коэффициентах системы и условием стремления решения к нулю на бесконечности. Доказана теорема о продолжении по малому параметру возмущения тех решений невозмущенной задачи, параметры которых удовлетворяют определяющему уравнению.

Luchko A., BA,
Taras Shevchenko National university of Kyiv
Protsak L., PhD
National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv

WEAKLY NONLINEAR BOUNDARY-VALUE PROBLEM ON THE HALF-LINE WITH SINGULARITY OF THE FIRST KIND

A singular boundary-value problem on the half-line for weakly nonlinear system of differential equations is considered in the critical case where solutions of the corresponding unperturbed problem form a family depending on several parameters. The singularity of the problem is caused by the presence of the first-order pole in system's coefficients as well as by the condition that the solution vanishes at infinity. A theorem is proved on the continuation by small parameter of those solutions of the unperturbed system parameters of which satisfy the determining equation.

УДК 517.947

A. Gromyk, Ph.D., Associate Professor
Podolski State Agricultural and Technical University, Kamianets-Podilsky
I. Konet, Full Doctor, Professor
Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University, Kamianets-Podilsky
e-mail: *gapon74@mail.ru, konet51@ukr.net*

HYPERBOLIC BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS IN SEMIBOUNDED PIECEWISE-HOMOGENEOUS SPATIAL ENVIRONMENT

By means of method of integral transforms in combination with the method of main solutions (influence matrices and Green matrices) the exact analytical solution of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in semibounded piecewise-homogeneous spatial environment is constructed.

INTRODUCTION. It is known that the actual problems of thermophysics, thermodynamics, theory of elasticity, theory of electrical circuits, theory of vibrations lead to boundary value problems of mathematical physics not only in homogeneous domains if the coefficients of the equations are continuous but also in inhomogeneous and piece-homogeneous domains if the coefficients of the equations are piece-continuous or in particular piece-constant.

Some classes of such boundary value problems were considered in the papers of B. Boley, J. Weiner [1], V. Deineka, I. Sergienko, V. Skopetskiy [4, 13], Yu. Kolyano [5], Ya. Pidstryhach, V. Lomakin, Yu. Kolyano [12], G. Shilin [15], ets., in which there were investigated a number of important mathematical models of mechanics of continuum environment, mechanics of deformable solids, thermomechanics and so on. There are often used methods of numerical analysis, or method of reduction of problems in piecewise-homogeneous environments to the corresponding problems for differential equations with singular coefficients in the form of generalized functions (Dirac δ-function and its derivatives) in homogeneous environment exact solution of which is practically impossible to construct.

However for a rather wide class of problems in piecewise-homogeneous environments it is shown to be effective the method of hybrid integral transforms generated by hybrid differential operators if in each connected component of piecewise-homogeneous environment there are considered different differential operators or differential operators of the same kind but with different sets of coefficients [3, 7–9, 11]. This method makes it possible to construct in analytical form solutions of certain linear boundary value problems of mathematical physics in piecewise-homogeneous environments due to their integral images.

We propose in this paper constructed by means of method of integral and hybrid integral transforms exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem in semibounded spatial environment that is described by the Cartesian coordinate system.

FORMULATION OF THE PROBLEM. Let's consider the problem of construction the solution which is bounded in the set $D_3 = \left\{ (t,x,y,z) : t>0; (x,y)\in\Omega_2 = (0;+\infty)\times(0;b); z\in I_n^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j), l_0\ge 0, l_k<l_{k+1}, l_{n+1}=+\infty \right\}$ of separate system of partial differential equations of hyperbolic type [14]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t,x,y,z); \quad z\in I_j; \quad j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

with initial conditions

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1(x,y,z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2(x,y,z); \quad z\in I_j; \quad j=\overline{1,n+1}; \tag{2}$$

boundary conditions

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)u_j\Big|_{x=0} = \theta_j(t,y,z); \quad \frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\Big|_{x=+\infty} = 0; \quad k=0,1; \quad j=\overline{1,n+1}; \tag{3}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)u_j\Big|_{y=0} = \omega_j^1(t,x,z); \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)u_j\Big|_{y=b} = \omega_j^2(t,x,z); \quad j=\overline{1,n+1}; \tag{4}$$

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_1\Big|_{z=l_0} = g_0(t,x,y); \quad \frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k}\Big|_{z=+\infty} = 0; \quad k=0,1 \tag{5}$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0; \quad j=1,2; \quad k=\overline{1,n}, \tag{6}$$

here a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}, χ_j, p, h, k, α_{js}^k, β_{js}^k are some non-negative constants;

$\tilde{n}_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k \ne 0$; $c_{1k}c_{2k}>0$; $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$; $\left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \ne 0$;

$f(t,x,y,z) = \{ f_1(t,x,y,z), f_2(t,x,y,z), \ldots, f_{n+1}(t,x,y,z) \}$;

$g^1(x,y,z) = \{ g_1^1(x,y,z), g_2^1(x,y,z), \ldots, g_{n+1}^1(x,y,z \}$;

$g^2(x,y,z) = \{ g_1^2(x,y,z), g_2^2(x,y,z), \ldots, g_{n+1}^2(x,y,z \}$;

$\theta(t,y,z)=\{\theta_1(t,y,z),\theta_2(t,y,z),\dots,\theta_{n+1}(t,y,z)\}$;

$\omega^1(t,x,z)=\left\{\omega_1^1(t,x,z),\omega_2^1(t,x,z),\dots,\omega_{n+1}^1(t,x,z\right\}$;

$\omega^2(t,x,z)=\left\{\omega_1^2(t,x,z),\omega_2^2(t,x,z),\dots,\omega_{n+1}^2(t,x,z\right\}$;

$g_0(t,x,y)$ are given bounded continuous functions;

$u(t,x,y,z)=\{u_1(t,x,y,z),u_2(t,x,y,z),\dots,u_{n+1}(t,x,y,z)\}$ is the unknown function.

Be noted that: 1) in the case of $\chi_j^2\equiv 0$ equations (1) are classic three-dimensional nonhomogeneous wave equations (oscillation equations) for orthotropic spatial environment; 2) in the case of $\alpha_{11}^k=0,\ \beta_{11}^k=1;\ \alpha_{12}^k=0,\ \beta_{12}^k=1;\ \alpha_{21}^k=E_1^k$, $\beta_{21}^k=0;\ \alpha_{22}^k=E_2^k,\ \beta_{22}^k=0$, here E_1^k, E_2^k are Young modulus, $k=\overline{1,n}$, conjugate conditions (6) coincide with the terms of the ideal mechanical contact.

Therefore, in these cases, the problem which is considered is a mathematical model of forced oscillatory processes in semibounded piecewise-homogeneous spatial environment $\Omega_3=\left\{(x,y,z):(x,y)\in\Omega_2;z\in I_n^+\right\}$.

THE MAIN PART. Let's suppose that the solution of hyperbolic initial boundary value problem of conjugation (1)–(6) exists and given and unknown functions satisfy the conditions of applicability of involved integral transforms [10, 11].

Let's apply the integral Fourier transform on the Cartesian semiaxis $(0;+\infty)$ relative to the variable x [10] to the problem (1)–(6):

$$F_{+x}\left[g(x)\right]=\int_0^{+\infty} g(x)K_x(x,\sigma)dx\equiv\tilde g(\sigma), \tag{7}$$

$$F_{+x}^{-1}\left[\tilde g(\sigma)\right]=\int_0^{+\infty}\tilde g(\sigma)K_x(x,\sigma)d\sigma\equiv g(x), \tag{8}$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2\tilde g(\sigma)+K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\Bigg|_{x=0}, \tag{9}$$

here the kernel of transform is

$$K_x(x,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}.$$

The integral operator F_{+x} due to the rule (7) because of identity (9) for nitial boundary value problem (1)–(6) assigns to the problem of constructing of bounded solution on the set $D_3^{'}=\left\{(t,y,z);t>0;y\in(0;b);z\in I_n^+\right\}$ of separate system of differential equations

$$\frac{\partial^2\tilde u_j}{\partial t^2}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde u_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde u_j=\tilde F_j(t,\sigma,y,z);\quad z\in I_j;\quad j=\overline{1,n+1} \tag{10}$$

with initial conditions

$$\tilde u_j\Big|_{t=0}=g_j^1(\sigma,y,z),\ \frac{\partial\tilde u_j}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\tilde g_j^2(\sigma,y,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{11}$$

boundary conditions

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)\tilde u_j\Bigg|_{y=0}=\omega_j^1(t,\sigma,z);\ \left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)\tilde u_j\Bigg|_{y=b}=\omega_j^2(t,\sigma,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{12}$$

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde u_1\Bigg|_{z=l_0}=\tilde g_0(t,\sigma,y);\ \frac{\partial^k\tilde u_{n+1}}{\partial z^k}\Bigg|_{z=+\infty}=0;\ k=0,1; \tag{13}$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)\tilde u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)\tilde u_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}, \tag{14}$$

here

$$F_j(t,\sigma,y,z)=f_j(t,\sigma,y,z)+a_{xj}^2K_x(0,\sigma)\theta_j(t,y,z);\ j=\overline{1,n+1}.$$

Let's apply to the problem (10)-(14) a finite integral Fourier transform on Cartesian segment $\left[0;b\right]$ relative to the variable y [10]:

$$\Lambda_{yk}\left[g(y)\right]=\int_0^b g(y)\nu_k(y)dy\equiv g_k, \tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}\left[g_k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{\nu_k(y)}{\|\nu_k\|^2}\equiv g(y), \tag{16}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2 g_k+\nu_k(0)\left(-\frac{dg}{dy}+h_1 g\right)\Bigg|_{y=0}+\nu_k(b)\left(\frac{dg}{dy}+h_2 g\right)\Bigg|_{y=b}, \tag{17}$$

here the kernel of transform is

$$\nu_k(y)=\frac{\gamma_k\cos(\gamma_k y)+h_1\sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2+h_1^2}},\quad \|\nu_k\|^2\equiv\int_0^b \nu_k^2(y)dy=\frac{b}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\gamma_k^2+h_1h_2)}{2(\gamma_k^2+h_1^2)(\gamma_k^2+h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ is monotonically increasing sequence of real various positive roots of transcendental equation $ctg(\gamma b)=\frac{\gamma^2-h_1h_2}{\gamma(h_1+h_2)}$, which form the discrete spectrum.

The integral operator Λ_{yk} due to the rule (15) because of identity (17) for initial boundary value problem (10)–(14) assigns to the problem of constructing of bounded solution on the set $D_3^{'}=\left\{(t,y,z);t>0;y\in(0;b);z\in I_n^+\right\}$ of separate system of differential equations

$$\frac{\partial^2\tilde u_{jk}}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2\tilde u_{jk}}{\partial z^2}+\left(a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2\right)\tilde u_{jk}=\tilde G_{jk}(t,\sigma,z);\quad z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{18}$$

with initial conditions

$$\tilde u_{jk}\Big|_{t=0}=g_{jk}^1(\sigma,z);\quad \frac{\partial\tilde u_{jk}}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\tilde g_{jk}^2(\sigma,z);\quad z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{19}$$

boundary conditions

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde u_{1k}\Bigg|_{z=l_0}=\tilde g_{0k}(t,\sigma);\quad \frac{\partial^k\tilde u_{n+1,k}}{\partial z^s}\Bigg|_{z=+\infty}=0;\ s=0,1; \tag{20}$$

and conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^s\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^s\right)\tilde u_{sk}-\left(\alpha_{j2}^s\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^s\right)\tilde u_{s+1,k}\right]\Bigg|_{z=l_s}=0;\ s=\overline{1,n}, \tag{21}$$

here

$$\tilde G_{jk}(t,\sigma,z)=\tilde F_{jk}(t,\sigma,z)+a_{yj}^2\nu_k(0)\tilde\omega_j^1(t,\sigma,z)+a_{yj}^2\nu_k(b)\tilde\omega_j^2(t,\sigma,z);\quad j=\overline{1,n+1}.$$

Let's apply to the problem (18)–(21) the integral Fourier transform on the Cartesian semiaxis $(l_0;+\infty)$ whith n points of conjugation relative to the variable z [11]:

$$F_{n,+}\left[g(z)\right]=\int_{l_0}^{+\infty}g(z)V(z,\beta)\sigma(z)dz\equiv\tilde g(\beta), \tag{22}$$

$$F_{n,+}^{-1}\left[\tilde g(\beta)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\tilde g(\beta)V(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\equiv g(z), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^n a_{zj}^2\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_j-z\right)\frac{d^2g}{dz^2}+a_{z,n+1}^2\theta\left(z-l_n\right)\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\beta^2\tilde g(\beta)-\sigma_1a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(z,l_0)\times\\&\times\left(\alpha_{11}^0\frac{d}{dz}+\beta_{11}^0 g\right)\Bigg|_{z=l_0}-\sum_{j=1}^{n+1}\kappa_j^2\int_{l_{j-1}}^{l_j}g(z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz.\end{aligned} \tag{24}$$

In formulas (22)-(24) there are values and functions:

$$V(z,\beta)=\sum_{k=1}^n V_k(z,\beta)\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+V_{n+1}(z,\beta)\theta(z-l_n);\quad \sigma(z)=\sum_{k=1}^n\sigma_k\theta(z-l_{k-1})\theta(l_k-z)+\sigma_{n+1}\theta(z-l_n);$$

$$\Omega_n(\beta)=\frac{\beta}{b_{n+1}(\beta)\omega_n(\beta)};\quad V_m(z,\beta)=\prod_{j=m}^n c_{2j}a_{z,j+1}^{-1}b_{j+1}(\beta)G_m(z,\beta);\quad m=\overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z,\beta)=\omega_{n2}(\beta)\cos\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right)-\omega_{n1}(\beta)\sin\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right);\ \sigma_k=\prod_{j=k}^n\frac{c_{1j}\cdot a_{z,n+1}}{c_{2j}\cdot a_{zj}^2};\ \sigma_n=\frac{c_{1n}\cdot a_{z,n+1}}{c_{2n}\cdot a_{2n}};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{z,n+1}};$$

$$G_k(z,\beta)=\omega_{k-1,2}(\beta)\cos\left(\frac{b_kz}{a_{zk}}\right)-\omega_{k-1,1}(\beta)\sin\left(\frac{b_kz}{a_{zk}}\right);\ k=\overline{1,n};\ b_j(\beta)=\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2};\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\omega_n(\beta)=\omega_{n1}^2(\beta)+\omega_{n2}^2(\beta);\quad \omega_{01}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{01}(q_1l_0);\quad \omega_{02}(q_1l_0)=-\nu_{11}^{02}(q_1l_0);$$

$$\omega_{jm}(\beta)=\omega_{j-1,2}(\beta)\psi_{1m}^j(q_jl_j;q_{j+1}l_j)-\omega_{j-1,1}(\beta)\psi_{2m}^j(q_jl_j;q_{j+1}l_j);$$

$$\psi_{jm}^k(q_kl_k;q_{k+1}l_k)=\nu_{11}^{kj}(q_kl_k)\nu_{22}^{km}(q_{k+1}l_k)-\nu_{21}^{kj}(q_kl_k)\nu_{12}^{km}(q_{k+1}l_k);$$

$$v_{ij}^{k1}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k\right)\cos(q_s z)\Big|_{z=l_m} = -\alpha_{ij}^k q_s \sin(q_s l_m) + \beta_{ij}^k \cos(q_s l_m);\ \ v_{ij}^{k2}(q_s l_m) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k\right)\sin(q_s z)\Big|_{z=l_m} =$$
$$= \alpha_{ij}^k q_s \cos(q_s l_m) + \beta_{ij}^k \sin(q_s l_m);\quad m = 1, 2;$$

$\theta(x)$ is the Heaviside step function [16].

Let's write the system of differential equations (18) and the initial conditions (19) in matrix form:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma,\gamma_k)\right)\tilde{u}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma,\gamma_k)\right)\tilde{u}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma,\gamma_k)\right)\tilde{u}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{G}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \tilde{G}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{u}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1k}^1(\sigma,z) \\ \tilde{g}_{2k}^1(\sigma,z) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{g}_{n+1,k}^1(\sigma,z) \end{bmatrix};\ \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k}(t,\sigma,z) \\ \tilde{u}_{2k}(t,\sigma,z) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,k}(t,\sigma,z) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1k}^2(\sigma,z) \\ \tilde{g}_{2k}^2(\sigma,z) \\ \cdots\cdots \\ \tilde{g}_{n+1,k}^2(\sigma,z) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

here $q_j^2(\sigma,\gamma_k) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2;\quad j = \overline{1, n+1}.$

The integral operator $F_{n,+}$ which operates by the formula (22) let's represent as an operator matrix-row

$$F_{n,+}[\cdots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \ldots V_1(z,\beta)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \ldots V_2(z,\beta)\sigma_2 dz \ldots \int_{l_n}^{+\infty} \ldots V_{n+1}(z,\beta)\sigma_{n+1} dz\right] \tag{27}$$

and apply to the problem (25), (26) due to matrices multiplication rule.

As a result of the identity (24), we get a Cauchy problem

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \beta^2 + q_j^2(\sigma,\gamma_k) + k_j^2\right)\tilde{\tilde{u}}_{jk}(t,\sigma,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jk}(t,\sigma,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(l_0,\beta)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma), \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jk}\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta);\ \ \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jk}\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta), \tag{29}$$

here $\tilde{\tilde{u}}_{jk}(t,\sigma,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{u}_{jk}(t,\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j = \overline{1,n+1};\ \tilde{\tilde{G}}_{jk}(t,\sigma,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{G}_{jk}(t,\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j = \overline{1,n+1};$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{g}_{jk}^1(\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j = \overline{1,n+1};\ \ \tilde{\tilde{g}}_{jk}^2(\sigma,\beta) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{g}_{jk}^2(\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ \ j = \overline{1,n+1};\ \ l_{n+1} = +\infty.$$

Let's suppose, without reducing of generality that $\max\left\{q_1^2, q_2^2, \ldots, q_{n+1}^2\right\} = q_1^2$ and we put everywhere $k_j^2 = q_1^2 - q_j^2\ \left(j = \overline{1,n+1}\right)$.

Cauchy problem (28), (29) takes the form

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_k}{dt^2} + \Delta^2(\sigma,\gamma_k,\beta)\tilde{\tilde{u}}_k = \tilde{\tilde{G}}_k(t,\sigma,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma), \tag{30}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_k\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta),\ \ \frac{d\tilde{\tilde{u}}_k}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta), \tag{31}$$

here
$$\tilde{\tilde{u}}_k(t,\sigma,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jk}(t,\sigma,\beta);\qquad \Delta^2(\sigma,\gamma_k,\beta) = \beta^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2;$$

$$\tilde{\tilde{G}}_k(t,\sigma,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{G}}_{jk}(t,\sigma,\beta);\qquad \tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta);\qquad \tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^2(\sigma,\beta).$$

Directly is checked that the only solution to the problem (30), (31) is the function

$$\tilde{\tilde{u}}_k(t,\sigma,\beta) = \frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta) + \frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta) + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)} \times$$
$$\times\left[\tilde{\tilde{G}}_k(\tau,\sigma,\beta) - \sigma_1 a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)\right]d\tau. \tag{32}$$

A superposition of operators $F_{n,+}$ and $F_{n,+}^{-1}$ is the identity operator so we represent the operator $F_{n,+}^{-1}$ as the operator matrix-column

$$F_{n,+}^{-1}[\ldots]=\frac{2}{\pi}\begin{bmatrix}\int\limits_0^{+\infty}\ldots V_1(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\\ \int\limits_0^{+\infty}\ldots V_2(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \int\limits_0^{+\infty}\ldots V_{n+1}(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\end{bmatrix} \tag{33}$$

Let's apply operator matrix-column (33) to matrix-element $\left[\tilde{\tilde{u}}_k(t,\sigma,\beta)\right]$ due to matrices multiplication rule, if the function $\tilde{\tilde{u}}_k(t,\sigma,\beta)$ is defined by formula (32). We get the only analytical solution of initial-boundary value problem (18)–(21):

$$\tilde{u}_{jk}(t,\sigma,z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta)\right]V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta+ \tag{34}$$

$$+\int\limits_0^t\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)(t-\tau))}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\left[\tilde{\tilde{G}}_k(\tau,\sigma,\beta)-\sigma_1 a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0;\beta)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)\right]V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}.$$

To the functions $\tilde{u}_{jk}(t,\sigma,z)$ which are defined by formulas (34), we apply the inverse operators Λ_{yk}^{-1} due to the rule (16) and F_{+x}^{-1} due to the rule (8). As a result of simple transformations, we get functions

$$u_j(t,x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^b\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\tau,\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^b\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)g_k^1(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^b\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)g_k^2(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^b W_j(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z)g_0(\tau,\xi,\eta)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+a_{xj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^b\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xjk}(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta)\theta_k(\tau,\eta,\zeta)\sigma_k d\eta d\zeta d\tau+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}[W_{xjk}^1(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_k^1(\tau,\xi,\zeta)+$$

$$+W_{yjk}^2(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta)\omega_k^2(\tau,\xi,\zeta)]\sigma_k d\xi d\zeta d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{35}$$

which define the unique solution of hyperbolic initial boundary value problem of conjugation (1)–(6).

In formulas (35) the components

$$E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\sigma,\gamma_r,\beta)t)}{\Delta(\sigma,\gamma_r,\beta)}V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)\Omega_n(\beta)K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)\frac{v_r(y)v_r(\eta)}{\|v_r\|^2}d\sigma d\beta;\quad j,k=\overline{1,n+1}$$

of influence matrix (influence function) and components

$$W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0),$$

$$W_{xjk}(t,x,y,\eta,z,\zeta)=E_{j1}(t,x,0,y,\eta,z,\zeta),$$

$$W_{xjk}^1(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{jk}(t,x,\xi,y,0,z,\zeta),$$

$$W_{xjk}^2(t,x,\xi,y,z,\zeta)=E_{jk}(t,x,\xi,y,b,z,\zeta)$$

of Green matrices take part of the problem under consideration.

Using the properties of influence functions $E_{jk}(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta)$ and Green functions $W_j(t,x,\xi,y,\eta,z)$, $W_{xjk}(t,x,y,\eta,z,\zeta)$, $W_{yjk}^s(t,x,\xi,y,z,\zeta)$, $(s=1,2)$ can be verified directly that functions $u_j(t,x,y,z)$ defined by formulas (35) satisfy the equation (1), the initial conditions (2), the boundary conditions (3), (4), (5) and conjugate conditions (6) in terms of the theory of generalized functions [16].

The uniqueness of the solution (35) follows from its structure (integral image) and uniqueness of the main solutions (influence matrices and Green matrices) of initial boundary value problem of conjugation (1)–(6).

By methods from [2, 6] it can be proved that under appropriate conditions of initial data of problem, formulas (35) define a limited classical solution of the considered hyperbolic initial boundary value problem of conjugation.

Remark 1. In the case of $a_{xj}^2=a_{yj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2>0$ formulas (35) define the structure of solution of hyperbolic boundary value problem (1)–(6) in isotropic $(n+1)$-layer semibounded spatial environment.

Remark 2. Parameters $p, h_j\,(j = 1,2)$ make it possible to allocate from formulas (35) solutions of initial boundary value problems (1)–(6) in the case of setting on the surfaces $x = 0; y = 0, y = b$ the boundary conditions of the 1st, 2nd and 3rd kind and their possible combinations.

Remark 3. Parameters $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ make it possible to allocate from formulas (35) solutions of boundary value problems in the case of setting on the surface $z = l_0$ the boundary condition of the 1st kind $(\alpha_{11}^0 = 0, \beta_{11}^0 = 1)$, 2nd kind $(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 = 0)$ and 3rd kind $(\alpha_{11}^0 = -1, \beta_{11}^0 \equiv h > 0)$.

Remark 4. The analysis of the solution (35) according to the analytical expression of functions $f_1(t,x,y,z)$, $g_j^1(x,y,z)$, $g_j^2(x,y,z)$, $g_0(t,x,y)$, $\theta_1(t,y,z)$, $\omega_j^1(t,x,z)$, $\omega_j^2(t,x,z)$, $j = \overline{1, n+1}$ is carried out directly from the general structures.

CONCLUSIONS. By means of method of integral and hybrid integral transforms of Fourier type in combination with method of main solutions (influence matrices and Green matrices) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics at semibounded piecewise-homogeneous spatial environment that is described by Cartesian coordinate system is obtained. The resulting solution is of algorithmic nature, continuously depends on the parameters and data of the problem and can be used in further theoretical studies and practice of engineering calculations of real processes that are modeled by hyperbolic boundary-value problems of mathematical physics of inhomogeneous environments.

REFERENCES

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський: Абетка-Світ, 2011.
4. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
5. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992.
6. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 «Диференціальні рівняння». – К.: КНУ ім. Т.Шевченка, 2008.
7. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.
8. Конет І. М., Ленюк М. П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001.
9. Конет І. М., Ленюк М. П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці: Прут. 2004.
10. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – 60 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997.
12. Подстригач Я. С.. Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984.
13. Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
14. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
15. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983.
16. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука. 1965.

Стаття надійшла до редколегії 17.12.14

Громик А., канд. техн. наук, доц.
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольск
Конет И., д-р физ.-мат. наук, проф.
Каменец-Подольский Национальный университет имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольск

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СРЕДЕ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений (матриц влияния и матриц Грина) построено точное аналитическое решение алгоритмического характера гиперболической краевой задачи математической физики в полуограниченной кусочно-однородной пространственной среде.

Громик А., канд. техн., доц.
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський
Конет І., д-р фіз.-мат. наук, проф.
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПРОСТОРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру гіперболічної крайової задачі математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі.

УДК 517.944:532.546

B. Dovgiy, PhD, E. Vakal, PhD, Y. Vakal, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
e-mail: *jvakal@gmail.com*

NUMERICAL SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN A CIRCULAR DOMAIN WITH CUTS

A problem of a stationary liquid filtration using fan-shaped drainage in a circular domain is considered. A mathematical model is formulated as a boundary value problem for the Poisson equation in domains of a circular shape with a given number of radial cuts and mixed boundary value conditions. The problem is solved by the finite difference method using the convergent Seidel method for systems of difference equations. Numerical calculations for different values of parameters of the problem are given.

INTRODUCTION. Stationary filtration problems arise for homogeneous and multilayer media in the design and construction of hydraulic structures such as water intakes, wells, drainage canals. A solution of the problem of stabilized fluid flow to a single imperfect well even in homogeneous soils is associated with considerable mathematical difficulties [5; 6]. In [1; 2] it was considered a spatial problem of pressure stabilized-fluid flow of heavy incompressible fluid to fan-shaped drainage systems located in the multilayer infinite layer of finite thickness under the bottom of a reservoir. It is interesting to solve the problem of the stationary liquid filtration using the fan-shaped drainage in circular domains.

This paper deals with the boundary value problem for the Poisson equation in circular domain with a given number of radial cuts that simulate drainage ditches.

FORMULATION OF THE PROBLEM. We study the stationary filtration problem using the fan-shaped drainage. We consider a horizontal slice of the soil layer where the filtration occurs by means of ditches emanating from the center of symmetry of the domain. We assume that conditions of the problem are not depend on the depth of the slice. Since the domain of fluid motion has a central symmetry we can confine ourselves by solving the problem on the plane in the first quarter of the Cartesian coordinate system XOY. We place the origin of coordinates at the center of symmetry of the domain (Fig. 1).

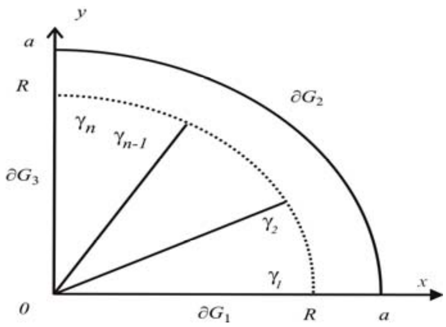

Fig. 1. The domain of fluid filtration

Let *t* – time, *a* – radius of the considered domain *G*, $\gamma_i,\ i=\overline{1,n},\ n\ge 2$ – drainage ditches, each having the same length *R* (Fig. 1) or different lengths, $\partial G_i,\ i=\overline{1,3}$ – the domain boundaries, $\gamma=\bigcup_{i=1}^{n}\gamma_i$, $\bar G = G\bigcup_{i=1}^{3}\partial G_i$.

Since the filtration is stationary, for each fixed time *t* we consider the boundary value problem for the Poisson equation

$$\Delta u = -f(x,y),\ (x,y)\in G\backslash\gamma \tag{1}$$

with mixed boundary conditions

$$u\big|_{\partial G_2}=0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_1\backslash\gamma_1}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial G_3\backslash\gamma_n}=0. \tag{3}$$

Here formulas (3) are the conditions of symmetry.

On the drainage ditches $\gamma_i,\ i=\overline{1,n},\ n\ge 2$, it is given the value of hydraulic head , i.e. the function *u*(*x*, *y*):

$$u\big|_{\gamma_i}=\psi(x,y). \tag{4}$$

Taking into account the structure of the considered domain the problem (1)-(4) can be conveniently formulated in polar coordinates $(r,\varphi),\ 0\le r\le a,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$ Since the solution is limited at $r=0,$ we can write the boundary value problem to determine the function $u(r,\varphi)$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=-f(r,\varphi),\ (r,\varphi)\in G\backslash\gamma, \tag{5}$$

$$u\big|_{r=a}=0,\ \ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\partial G_1\backslash\gamma_1}=0,\ \ r\in(R,a), \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right|_{\partial G_3\backslash\gamma_n}=0,\ \ r\in(R,a), \tag{8}$$

$$|u|\big|_{r=0}<\infty, \tag{9}$$

$$u\big|_{\gamma_i}=\psi(r,\varphi),\ \ i=\overline{1,n}, \tag{10}$$

where $\partial G_1\backslash\gamma_1=\{(r,\varphi):R<r<a,\ \varphi=0\}$, $\partial G_3\backslash\gamma_n=\left\{(r,\varphi):R<r<a,\ \varphi=\frac{\pi}{2}\right\}$,

$$\gamma_1=\{(r,\varphi):0\le r\le R,\ \varphi=0\},\ \ \gamma_i=\left\{(r,\varphi):0\le r\le R,\ \varphi=\varphi_i,\ 0<\varphi_i<\frac{\pi}{2}\right\},\ i=\overline{2,n-1},$$

$$\gamma_n=\left\{(r,\varphi):0\le r\le R,\ \varphi=\frac{\pi}{2}\right\},\ \ n\ge 2.$$

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM. The boundary value problem for the equation (5) with the conditions (6)-(10) is solved by the finite differences method. The domain $\bar G=[0,a]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ is covered by a difference grid $\bar\omega_{h_1h_2}=\bar\omega_{h_1}\times\bar\omega_{h_2}$, where h_1,h_2 are grid steps in directions r and φ respectively, the grid $\bar\omega_{h_1}=\left\{r_k=kh_1, k=\overline{0,N_1}, h_1=\frac{a}{N_1}\right\}$, the grid $\bar\omega_{h_2}=\left\{\varphi_j=jh_2, j=\overline{0,N_2}, h_2=\frac{\pi}{2N_2}\right\}$. The grid $\bar\omega_{h_2}$ is chosen so that its nodes cover inner drains.

A difference scheme for the equation (5) is constructed using the integro-interpolation method [3]

$$\frac{1}{r_k}\left(r_{k-\frac12}y_{\bar r,kj}\right)_{r,k}+\frac{1}{r_k^2}\left(y_{\bar\varphi,kj}\right)_{\varphi,j}=-\tilde f_{kj},\ (r,\varphi)\in\omega_{h_1}\times\omega_{h_2}\backslash\gamma. \tag{11}$$

In (11) y and $\tilde f$ are difference analogues of the functions u and f. The approximation error of the difference scheme (11) is $O\left(h_1^2+\frac{h_1^2}{r}+\frac{h_2^2}{r^2}\right)$.

The boundary conditions (6)–(10) are approximated with the second order in space:

$$y_{N_1j}=0,\ \varphi\in\bar\omega_{h_2}, \tag{12}$$

$$\frac{1}{r_k}\left(r_{k-\frac12}y_{\bar r,k0}\right)_{r,k}+\frac{2}{r_k^2h_2^2}\left(y_{k1}-y_{k0}\right)=-\tilde f_{k0},\ \ r\in\omega_{h_1}\cap(R,a), \tag{13}$$

$$\frac{1}{r_k}\left(r_{k-\frac12}y_{\bar r,k0}\right)_{r,k}-\frac{2}{r_k^2h_2^2}\left(y_{kN_2}-y_{kN_2-1}\right)=-\tilde f_{kN_2-1},\ r\in\omega_{h_1}\cap(R,a), \tag{14}$$

$$y_{0j}=\psi_{0j},\ \ \varphi\in\bar\omega_{h_2}, \tag{15}$$

$$y_{k0}=\psi_{k0},\ y_{kN_2/(n-1)}=\psi_{kN_2/(n-1)},\ \dots,\ y_{k(n-2)N_2/(n-1)}=\psi_{k(n-2)N_2/(n-1)},\ y_{kN_2}=\psi_{kN_2},\ r\in\omega_{h_1}\cap(0,R]. \tag{16}$$

An estimate of the solution of the difference problem is obtained. This estimate expresses the stability of the solution by boundary conditions and the right part of the equation. We have established convergence of the solution of the difference problem to the solution of the original differential problem.

By adding to the equation (11) difference approximations of the boundary conditions (12)–(16), we obtain a system of linear difference equations. This system is solved using the point Seidel method [4].

This method belongs to single-step methods. According to the mentioned method the system of difference equations (11)–(16) is written in the form

$$Ay=f, \tag{17}$$

where $y=(y_1,y_2,\dots y_m)'$ is vector of unknowns.

According to the Seidel method a matrix *A* is represented as

$$A=D-L-U, \tag{18}$$

where *D* is a diagonal matrix, *L* is a strictly lower triangular matrix, *U* – a strictly upper triangular matrix (diagonal elements of the matrices *L* and *U* are equal to zero). Then for solving the system (17) the Seidel method is written in the form

$$(D-L)y^{s+1}-Uy^s=f$$

or
$$y^{s+1} = (D-L)^{-1}\left(Uy^s + f\right), \tag{19}$$
where y^0 is an initial approximation to the solution of the system (17).

Taking into account the structure of the considered problem, calculation formulas of the Seidel method, for example, for the internal nodes of the grid have the form
$$y_{kj}^{s+1} = \frac{r_k}{2\left(r_k^2 h_2^2 + h_1^2\right)}\left(h_2^2\left(r_{k+\frac{1}{2}} y_{k+1j}^{s} + r_{k-\frac{1}{2}} y_{k-1j}^{s+1}\right) + \frac{h_1^2}{r_k}\left(y_{kj-1}^{s+1} + y_{kj+1}^{s}\right) + r_k h_1^2 h_2^2 \tilde{f}_{kj}\right), \tag{20}$$
where y_{kj}^{s+1} – the value of an approximate solution on s+1-st iteration at a point $\left(r_k, \varphi_j\right)$. The iterative process is terminated when the condition $\max\limits_{k,j}\left|y_{kj}^{s+1} - y_{kj}^{s}\right| \le \varepsilon$ is fulfilled, where $\varepsilon > 0$ – a required accuracy for convergence of iterations.

RESULTS OF NUMERICAL CALCULATIONS. Developed numerical algorithms are used for solving the problems of the stationary filtration in the domain *G* with a different number of drainage ditches. We have considered such variants:

1. The number of drainage ditches $n = 2$, all of them have the same length $R = 0.5$, so $\gamma_1 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$, radius of the domain $a = 2$, $f(r,\varphi) = 0$, the function $\psi(r,\varphi) = -0.25$.
2. The number of drainage ditches $n = 3$, all of them have the same length $R = 1$, so $\gamma_1 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 1.0,\ \varphi = 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 1.0,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\right\}$, $\gamma_3 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 1.0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$, radius of the domain $a = 2$, $f(r,\varphi) = 0$, the function $\psi(r,\varphi) = -0.25$.
3. The number of drainage ditches $n = 4$, they have different lengths *R*, so that $\gamma_1 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = 0\right\}$, $\gamma_2 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 0.7.0,\ \varphi = \frac{\pi}{6}\right\}$, $\gamma_3 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 1.2,\ \varphi = \frac{\pi}{3}\right\}$, $\gamma_4 = \left\{(r,\varphi): 0 \le r \le 0.5,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\right\}$, radius of the domain $a = 2$, $f(r,\varphi) = 0$, the function $\psi(r,\varphi) = -0.25$.

We chose the programming system MATLAB 7.6.0 for the implementation of a numerical algorithm for solving the problem.

The calculation results are shown in Fig. 2–7 in the form of solution values of the problem (5)-(10) and isolines of solution for specified variants of the problem parameters.

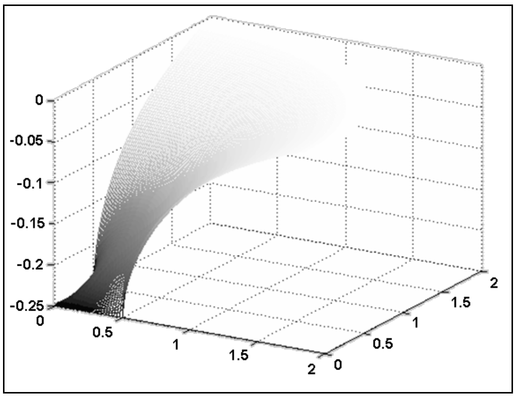

Fig. 2. Values of hydraulic head for n=2

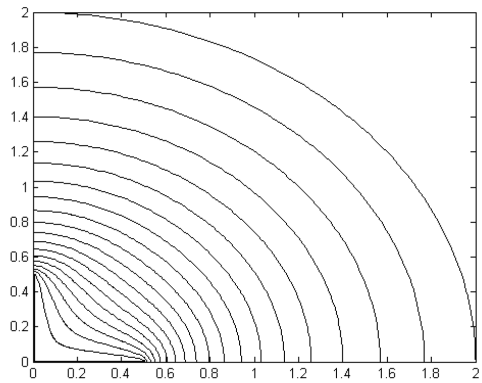

Fig. 3. Isolines of hydraulic head for n=2

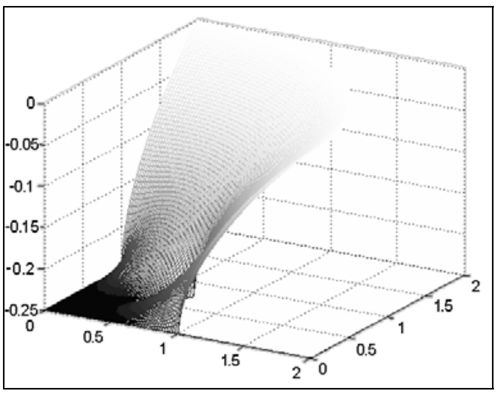

Fig. 4. Values of hydraulic head for n=3

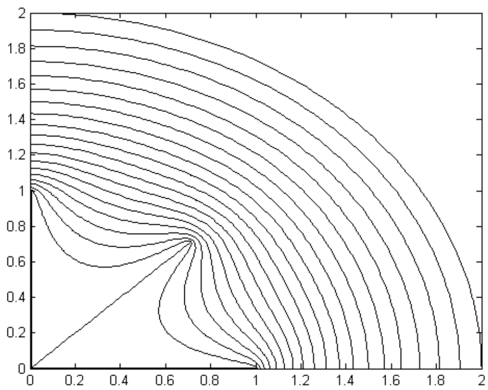

Fig. 5. Isolines of hydraulic head for n=3

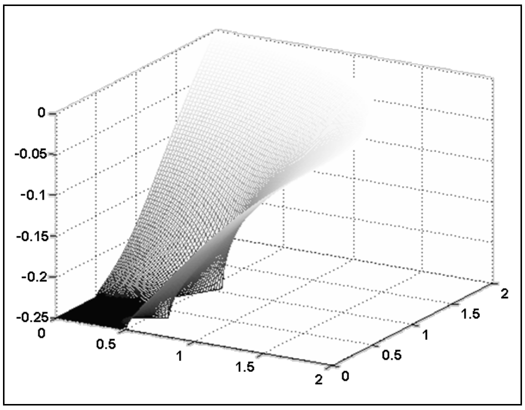

Fig. 6. Values of hydraulic head for n=4

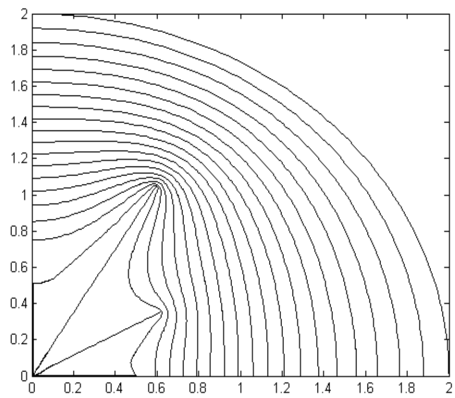

Fig. 7. Isolines of hydraulic head for n=4

CONCLUSIONS. The results of the conducted researches show the effectiveness and validity of the proposed approach for solving the problem of the stationary filtration using the fan-shaped drainage with ditches of equal or different length.

These calculations allow to estimate the hydrodynamic state of soil in a case of the stationary fluid filtration to the system of fan-shaped drainages in circular domains.

The obtained results correspond to the characteristic behavior of the solution of the differential problem. This methodology can be used for solving other problems of this class.

REFERENCES

1. Великоиваненко И. М., Шевченко В. И., Кивва С. Л. Решение задачи установившейся фильтрации к системе веерных дренажей в многослойном грунте // Вычислительная и прикладная математика. – 1984. – Выпуск 53. – С. 120–125.
2. Ляшко И. И., Долидзе Д. Ш., Кивва С. Л. Решение краевых задач фильтрации и влагопереноса в областях сложной формы // Материалы V Всесоюзного семинара "Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости". – Новосибирск, 1981. – С. 224–229.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М. : Наука, 1983.
4. Самарский А. А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М. : Наука, 1978.
5. Черный И. А. Подземная гидродинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963.
6. Чертоусов М. Д. Гидравлика. – М. : Госэнергоиздат, 1962.

Стаття надійшла до редколегії 30.10.14

Довгий Б., канд. физ.-мат. наук, Вакал Е., канд. физ.-мат. наук, Вакал Ю., канд. физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Рассмотрена задача стационарной фильтрации жидкости в круговой области с использованием веерного дренажа. Математическая модель сформулирована как краевая задача для уравнения Пуассона в области круговой формы с заданным числом радиальных разрезов и смешанными краевыми условиями. Задача решена методом конечных разностей с использованием сходящегося метода Зейделя для системы разностных уравнений. Приведены численные расчеты для разных значений параметров задачи.

Довгий Б., канд. фіз.-мат. наук, Вакал Є., канд. фіз.-мат. наук, Вакал Ю., канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА В КРУГОВІЙ ОБЛАСТІ З РОЗРІЗАМИ

Розглянуто задачу стаціонарної фільтрації рідини в круговій області з використанням віялового дренажу. Математичну модель сформульовано як крайову задачу для рівняння Пуассона в області кругової форми з заданим числом радіальних розрізів і змішаними крайовими умовами. Задачу розв'язано методом скінченних різниць з використанням збіжного методу Зейделя для системи різницевих рівнянь. Наведено чисельні розрахунки для різних значень параметрів задачі.

УДК 517.95

Є. Лесіна, канд. фіз.-мат. наук
Красноармійський індустріальний інститут ДВНЗ "ДонНТУ"
e-mail: *lesina17@gmail.com*

ПРО ЗАДАЧУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З КОМУТУЮЧИМИ МАТРИЧНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Отримано критерій однозначної розв'язності однорідної задачі Діріхле у крузі для безтипового диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку, коефіцієнтами якого є комутуючі квадратні матриці. Необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку записано у вигляді рівності нулю визначника, що залежить від коефіцієнтів наданого рівняння.

ВСТУП. Початком систематичного дослідження властивості ньютеровості крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь вважається стаття Я. Б. Лопатинського [12] 1953 року, де автором вказано умову зведення загальної крайової задачі в обмеженій області до еквівалентної системи інтегральних рівнянь. Пізніше було встановлено необхідність цієї умови [1; 15; 9], яку називають у даний час умовою додатковості, умовою накривання або просто умовою Лопатинського.

У статті [2] А. В. Біцадзе побудував приклад еліптичної системи диференціальних рівнянь, для якої однорідна задача Діріхле в крузі має нескінченний набір лінійно незалежних поліноміальних розв'язків. Вперше було виявлено ефект нескінченновимірності ядра задачі Діріхле. Згодом він знову навів приклад системи з такою самою властивістю і запровадив поняття слабо зв'язаної системи в довільній області з ляпуновською межею, простір розв'язків задачі Діріхле якої в даній області має скінченну вимірність [3]. Проте умову слабої зв'язаності важко перевірити навіть у випадку круга для скалярного рівняння.

Слід відзначити, що подібні приклади зустрічаються у роботах В. С. Віноградова [7], Є. М. Кузьміна [11], В. І. Шевченка [14]. Останній з них навів приклад еліптичної системи трьох рівнянь другого порядку, для якої має місце порушення ньотеровості задачі Діріхле у чотиривимірній кулі.

Крім того, вивченню ньотеровості крайових задач для кватерніонозначних рівнянь присвячено статтю В. С. Віноградова [8], у якій отримано необхідну і достатню умову на змінні коефіцієнти, що забезпечує скінченновимірність ядра оператора задачі.

Зауважимо, що, як показано В. П. Бурським у статті [5], для єдиності розв'язку першої крайової задачі тип рівняння не має принципового значення. Він отримав критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку із сталими комплексними коефіцієнтами та однорідним невиродженим символом у вигляді π-раціональності кута між різними комплексними характеристиками. В іншій його статті [6] розглянуто однорідну задачу Діріхле в одиничному крузі для безтипового диференціального рівняння другого порядку

$$au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0,$$

де a, b, c – комплексні квадратні матриці $n \times n$, $u \in H^{2,n}(K)$, $H^{2,n}(K) = \left[H^2(K)\right]^n$ – соболєвський простір вектор-функцій, і отримано критерій порушення єдиності розв'язку задачі в достатньо складній формі, що не піддається перевірці. Тому виникло питання більш простого опису систем із порушенням єдиності, який було реалізовано за допомогою додаткової умови на матриці-коефіцієнти, що полягала у комутативності.

Отже, у поданій статті, із використанням додаткової умови комутативності коефіцієнтів рівняння і методу двоїстості "рівняння-область" (див. [4]), отримано критерій порушення єдиності розв'язку задачі Діріхле в крузі для безтипового диференціального рівняння другого порядку з комплексними матричними коефіцієнтами у простій формі, що дозволяє будувати приклади систем, оператор задачі Діріхле яких має нетривіальне ядро.

Необхідну і достатню умову нетривіальної розв'язності записано у вигляді рівності нулю визначника, елементи якого виражаються через коефіцієнти наданого рівняння. За умови виконання рівності, у явному вигляді побудовано нетривіальний векторно-поліноміальний розв'язок задачі (1), (2). На додаток наводиться приклад системи диференціальних рівнянь другого порядку, яка задовольняє умову (3) і ядро задачі Діріхле якої є нетривіальним і нескінченновимірним.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ. Для диференціального рівняння з матричними коефіцієнтами та з однорідним за порядком диференціювання символом (без молодших членів)

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0 \tag{1}$$

розглянемо задачу Діріхле

$$u\big|_{\partial K} = 0 \tag{2}$$

в соболєвському просторі $H^{2,n}(K) = \left[H^2(K)\right]^n$ вектор-функцій, де $K = \left\{x \in \mathrm{R}^2 : |x| < 1\right\}$ – одиничний круг з межею ∂K. Припустимо, що φ_1 і φ_2 – комутуючі комплексні $n \times n$-матриці, $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 \neq 0$ – їх різниця. Через $l(\xi) = \left(a^1 \cdot \xi\right)\left(a^2 \cdot \xi\right)$ будемо зазвичай позначати невироджений матричний символ диференціального оператора $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(a^1 \cdot \nabla\right)\left(a^2 \cdot \nabla\right)$.

Зауважимо, що рівняння $au''_{x_1x_1} + bu''_{x_1x_2} + cu''_{x_2x_2} = 0$ (з комутуючими комплексними невиродженими матрицями у якості коефіцієнтів) можна привести до вигляду: $\left(a^1 \cdot \nabla\right)\left(a^2 \cdot \nabla\right)u = 0$, де $a_1^1,\ a_2^1,\ a_1^2,\ a_2^2$ – такі комутуючі матриці, що матриця $\left(a_1^j\right)^2 + \left(a_2^j\right)^2$, $j = 1, 2$, має обернену. Зокрема, в нашому випадку $a^1 = \left(\sin\varphi_1, \cos\varphi_1\right)$, $a^2 = \left(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2\right)$.

Розглянемо ортогональні по відношенню до a^j вектори $\tilde{a}^j = \left(-a_2^j, a_1^j\right) = \left(-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j\right)$, $j = 1, 2$. Слід відзначити, що, відповідно до прийнятих позначень,

$$tg\varphi_j = a_1^j \cdot \left(a_2^j\right)^{-1}, \qquad j = 1, 2.$$

Це означає, що матриці φ_1 і φ_2 існують лише тоді, коли жодне з характеристичних чисел $\lambda_k^{(1)}$ та $\lambda_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, матриць $a_1^1 \cdot \left(a_2^1\right)^{-1}$ і $a_1^2 \cdot \left(a_2^2\right)^{-1}$ не дорівнює відповідно $\pm i$. Цей факт пов'язаний із тим, що у скалярному випадку рівняння $tg\phi = \pm i$ не має розв'язків.

Наша мета – дослідити питання порушення єдиності задачі (1), (2) і побудувати приклад задачі з нескінченновимірним та нетривіальним ядром.

ДОВЕДЕННЯ НЕТРИВІАЛЬНОЇ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ. У процесі дослідження першої крайової задачі у крузі для рівняння другого порядку з комутуючими матричними коефіцієнтами отримано наступний критерій.

Теорема. *Задача Діріхле (1), (2) має нетривіальний розв'язок у просторі* $H^{2,n}(K)$ *тоді і тільки тоді, коли існує такий натуральний номер* $N \ge 2$*, при якому виконується рівність:*

$$\det\left[\sin N\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)\right] = 0. \tag{3}$$

Якщо умова (3) справедливою має місце, то існує злічена кількість лінійно незалежних векторно-поліноміальних розв'язків.

Спочатку доведемо допоміжне твердження, яке сформулюємо у вигляді леми.

Лема. *Нехай для деякого полінома* Q *виконується тотожність:*

$$Q\left(\cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau...., \cos m\tau, \sin m\tau\right) \equiv 0 \quad \forall\tau \in \mathrm{R}. \tag{4}$$

Тоді тотожність (4) справедливою виконується і для довільної матриці τ*.*

Доведення леми. Якщо τ – дійсне число, то після розкладання даного поліному Q у ряд Тейлора за ступенями τ одержимо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k \cdot \tau^k = 0, \tag{5}$$

звідки безпосередньо випливає, що усі коефіцієнти $q_k = 0, \ k = 0,1,2,...$.

З іншого боку, якщо τ – довільна матриця, то шляхом множення q_k на τ^k і підсумовування за k, отримаємо вираз вигляду (5), від якого здійснюється перехід до запису (4). Доведення леми завершено.

Доведення теореми.

Необхідність. Нехай $u \in H^{2,n}(K)$ – будь-який нетривіальний розв'язок задачі (1), (2), $\tilde{u} \in H^{2,n}\left(\mathrm{R}^2\right)$ – деяке продовження функції u на площину. Через $\theta = \theta(x)$ позначимо характеристичну функцію круга K :

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \notin K, \\ 0, & x \in K, \end{cases}$$

Подіємо оператором L із умови рівняння (1) на функцію $v = \tilde{u} \cdot \theta$:

$$Lv = -l(\nu)\tilde{u}'_{\nu}\, \delta_{\partial K}. \tag{6}$$

Тут ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі, $\delta_{\partial K}$ – міра, зосереджена на межі ∂K круга K : $\left(\delta_{\partial K}, \varphi\right) = \int\limits_{\partial K} \overline{\varphi} dS$.

Помноживши обидві частини рівності (6) на поліном $x^2 - 1$, який визначає межу області, отримаємо нуль у правій частині:

$$\left(x^2 - 1\right) \cdot Lv = 0 \, . \tag{7}$$

Тепер до рівняння (7) застосуємо перетворення Фур'є: $-(\Delta_\xi + 1)\left\{\left(a^1 \cdot \xi\right)\left(a^2 \cdot \xi\right) \cdot \hat{v}\right\} = 0$.

Внаслідок теореми Пелі-Вінера, згідно якої перетворення Фур'є функції з компактним носієм є цілою функцією, тобто допускає розклад у ряд Тейлора, для молодшої однорідної частини v_m розкладу степеню однорідності m одержимо:

$$\Delta_\xi \left\{\left(a^1 \cdot \xi\right) \cdot \left(a^2 \cdot \xi\right) \cdot v_m\right\} = 0 \, .$$

Розв'язок w рівняння Лапласа $\Delta_\xi w = 0$ можна записати наступним чином:

$$w = const + \sum_{N=1}^{\infty} r^N \left(c_N \cos N\tau + d_N \sin N\tau\right) \tag{8}$$

з деякими векторними коефіцієнтами c_N , d_N . Оскільки у полярних координатах (r, τ)

$$v_m = r^m \sum_{\beta=0}^{m} \left(A_\beta \cos\beta\tau + B_\beta \sin\beta\tau\right),$$

то, вважаючи $w = \left(a^1 \cdot \xi\right) \cdot \left(a^2 \cdot \xi\right) \cdot v_m$ у рівності (8) і беручи до уваги, що $\xi = \left(r\cos\tau, \ \ r\sin\tau\right)$, при $N = m + 2$ отримаємо:

$$\left(a^1 \cdot \tilde{\xi}\right) \cdot \left(a^2 \cdot \tilde{\xi}\right) \cdot v_m(\tau) = \cos\left(m+2\right)\tau I \cdot c_{m+2} + \sin\left(m+2\right)\tau I \cdot d_{m+2} \, . \tag{9}$$

Тут $\tilde{\xi} = \left(\cos\tau, \sin\tau\right)$, I – одинична матриця порядку n . Оскільки

$$\left(a^1 \cdot \tilde{\xi}\right) \cdot \left(a^2 \cdot \tilde{\xi}\right) = \left(\sin\varphi_1 \cos\tau I + \cos\varphi_1 \sin\tau I\right) \cdot \left(\sin\varphi_2 \cos\tau I + \cos\varphi_2 \sin\tau I\right) = \ \sin\left(\varphi_1 + \tau I\right) \sin\left(\varphi_2 + \tau I\right),$$

то помічаємо, що ліва частина рівності (9) дорівнює нулю, коли $\tau I = -\varphi_j + k\pi I$, $\quad j = 1,2, \quad k = 1,2, \ \ldots$.

Очевидно, при такому значенні τ для правої частини (9) будемо мати однорідну систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} \cos\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_1)\right]\cdot c_{m+2}+\sin\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_1)\right]\cdot d_{m+2}=0, \\ \cos\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_2)\right]\cdot c_{m+2}+\sin\left[(m+2)\cdot(k\pi I-\varphi_2)\right]\cdot d_{m+2}=0. \end{cases} \quad (10)$$

Помножимо перше рівняння системи (10) зліва на матрицю $\cos\left[(m+2)(k\pi I-\varphi_2)\right]$, друге – на матрицю $-\cos\left[(m+2)(k\pi I-\varphi_1)\right]$ і складемо одержані рівності. Результатом додавання буде наступне рівняння:

$$\sin\left[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)\right]\cdot d_{m+2}=0. \quad (11)$$

Оскільки система (10) має нетривіальний розв'язок (c_{m+2},d_{m+2}) (цей факт випливає з нашого припущення щодо існування нетривіального розв'язку задачі (1), (2) та із міркувань двоїстості), то з (11) випливає, що матриця $\sin\left[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)\right]$ вироджена, тобто $\det\left\{\sin\left[(m+2)(\varphi_2-\varphi_1)\right]\right\}=0$, і, таким чином, існує номер $N=m+2$, який забезпечує виконання умови (3).

Лишається обґрунтувати тотожність

$$\left(a^1\cdot\tilde{\xi}\right)\left(a^2\cdot\tilde{\xi}\right)\upsilon_m(\tau)-c_{m+2}\cdot\cos(m+2)\tau-d_{m+2}\cdot\sin(m+2\tau)\equiv 0$$

для будь-якої матриці τ, але цей факт справедливий внаслідок леми, яку було доведено вище для полінома

$$Q(\cos\tau,\sin\tau,....,\cos m\tau,\sin m\tau)=\left(a^1\cdot\tilde{\xi}\right)\left(a^2\cdot\tilde{\xi}\right)v_m(\tau)-c_{m+2}\cdot\cos(m+2)\tau-d_{m+2}\cdot\sin(m+2)\tau.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай існує такий натуральний номер $N\geq 2$, що виконується умова (3). Тоді знайдеться деякий ненульовий вектор $\overline{v}$, який анулює матрицю $\sin N(\varphi_2-\varphi_1)$; тобто $\sin N(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\overline{v}=0.$

Покажемо, що для довільного натурального N розв'язком задачі Діріхле (1), (2) є вектор

$$\overline{u}_N=\left(T_{2N}\left(-\tilde{a}^1\cdot x\right)-T_{2N}\left(-\tilde{a}^2\cdot x\right)\right)\cdot\overline{v},$$

де T_{2N} – поліном Чебишева першого роду, $T_{2N}(\cos\alpha)=\cos(2N\alpha)$.

Рівняння (1) після підстановки вектора $\overline{u}_N$ в ліву частину буде задовольнятися тривіально. Таким чином, лишається перевірити справедливість граничної умови (2) для $\overline{u}_N$ маємо

$$\overline{u}_N\Big|_{\partial K}=\left(T_{2N}\left(-\tilde{a}^1\cdot x\right)-T_{2N}\left(-\tilde{a}^2\cdot x\right)\right)\cdot\overline{v}\Big|_{\partial K}=\left[T_{2N}\left(\cos(\varphi_1+\tau I)\right)-T_{2N}\left(\cos(\varphi_2+\tau I)\right)\right]\cdot\overline{v}=$$

$$=\left[\cos 2N(\varphi_1+\tau I)-\cos 2N(\varphi_2+\tau I)\right]\cdot\overline{v}=-2\sin N\left(\varphi_1+\varphi_2+\tau I\right)\sin N(\varphi_2-\varphi_1)\cdot\overline{v}=0.$$

Теорему доведено.

Зауваження. *Легко показати, що подібна задача Діріхле в області, обмеженій еліпсом, за допомогою лінійної заміни зводиться до задачі у крузі, і міркування, які викладено вище, дослівно переносяться на цей випадок.*

Дійсно, задача

$$Lu\equiv\left(\sin\varphi_1\frac{\partial}{\partial x}+\cos\varphi_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot\left(\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial x}+\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdot u(x,y)=0,$$

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0$$

у просторі $H^{2,n}(\Omega)=\left[H^2(\Omega)\right]^n$, де $\Omega=\left\{(x,y)\ :\ \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}<1\right\}$, $\partial\Omega=\left\{(x,y)\ :\ \frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1,\ p\geq q>0\right\}$ – еліпс, φ_1 і φ_2 – комутуючі комплексні $n\times n$-матриці, вводимо заміну змінних $x=p\xi$, $y=q\eta$, зводиться до задачі:

$$\left(\frac{1}{p}\sin\varphi_1\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{q}\cos\varphi_1\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\left(\frac{1}{p}\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{1}{q}\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\tilde{u}(\xi,\eta)=0,$$

$$\tilde{u}(\xi,\eta)\big|_{\partial K}=0,$$

де $K=\left\{(\xi,\eta)\ :\ \xi^2+\eta^2<1\right\}$ – одиничний круг з межею ∂K.

ПРИКЛАД СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З НЕТРИВІАЛЬНИМ РОЗВ'ЯЗКОМ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ У КРУЗІ. Побудуємо приклад системи диференціальних рівнянь, для якої однорідна задача Діріхле у крузі має нетривіальний розв'язок. При цьому будемо вважати, що $n=2$.

Позначимо $N(\varphi_2-\varphi_1)=N\varphi_0=A$ і розглянемо у якості матриці A наступну симетричну матрицю:

$$A=\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix},$$

де $b\in\mathbb{C}$, a визначається за допомогою b. Нам потрібно, щоб виконувалась умова $\det\left[\sin A\right]=0$. Маємо [10]:

$$\sin A=A-\frac{A^3}{3!}+\frac{A^5}{5!}-\dots\ .$$

Неважко показати, що ступінь матриці A можна обчислити за формулою:

$$A^{2k+1}=\begin{pmatrix} b^{2k+1}+C_{2k+1}^{2}b^{2k-1}a^{2}+\ldots+C_{2k+1}^{2k}ba^{2k} & C_{2k+1}^{1}b^{2k}a+C_{2k+1}^{3}b^{2k-2}a^{3}+\ldots+a^{2k+1} \\ C_{2k+1}^{1}b^{2k}a+C_{2k+1}^{3}b^{2k-2}a^{3}+\ldots+a^{2k+1} & b^{2k+1}+C_{2k+1}^{2}b^{2k-1}a^{2}+\ldots+C_{2k+1}^{2k}ba^{2k} \end{pmatrix},\text{ де } k=0,1,2,\ldots,$$

враховуючи яку, після елементарних перетворень, запишемо шукану матрицю $\sin A$ у вигляді:

$$\sin A=\begin{pmatrix} \cos a\sin b & \cos b\sin a \\ \cos b\sin a & \cos a\sin b \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тепер умова $\det\left[\sin A\right]=0$ зводиться до тригонометричного рівняння:

$$\cos^{2}a\sin^{2}b-\cos^{2}b\sin^{2}a=0,$$

звідки знаходимо $a=\pm b+m\pi,\ m\in\mathrm{Z}$.

Отже, $A=N\varphi_{0}=\begin{pmatrix} b & \pm b+m\pi \\ \pm b+m\pi & b \end{pmatrix}$, звідки $\varphi_{0}=\varphi_{2}-\varphi_{1}=\begin{pmatrix} \frac{b}{N} & \pm\frac{b}{N}+\frac{m}{N}\pi \\ \pm\frac{b}{N}+\frac{m}{N}\pi & \frac{b}{N} \end{pmatrix}$.

Матриці φ_{1} і φ_{2} обираємо наступним чином: $\varphi_{1}=\begin{pmatrix} 0 & \mp\frac{b}{N}-\frac{m}{N}\pi \\ \mp\frac{b}{N}-\frac{m}{N}\pi & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_{2}=\begin{pmatrix} \frac{b}{N} & 0 \\ 0 & \frac{b}{N} \end{pmatrix}$.

Безпосередньою перевіркою встановлюється, що матриці φ_{1} і φ_{2} комутують.

Далі, беручи до уваги впроваджені вище позначення, обчислимо компоненти векторів a^{j}, $j=1,2$, з умови вихідного рівняння (1). Дійсно,

$$\sin\varphi_{1}=\begin{pmatrix} 0 & \sin\left(\mp\frac{b}{N}-\frac{m}{N}\pi\right) \\ \sin\left(\mp\frac{b}{N}-\frac{m}{N}\pi\right) & 0 \end{pmatrix},\quad \cos\varphi_{1}=\begin{pmatrix} \cos\left(\mp\frac{b}{N}-\frac{m}{N}\pi\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\mp\frac{b}{N}-\frac{m}{N}\pi\right) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що у процесі пошуку $\sin\varphi_{1}$ і $\cos\varphi_{1}$ ми використали формулу (12), а також тригонометричну тотожність $\sin^{2}\varphi_{1}+\cos^{2}\varphi_{1}=I$, яка виконується для довільної невиродженої квадратної матриці φ_{1} (див. [10]; [13]).

Не обмежуючи загальності, припустимо, що m є кратним по відношенню до N. Тоді вирази для матриць $\sin\varphi_{1}$ та $\cos\varphi_{1}$ набувають більш простої форми, а саме

$$\sin\varphi_{1}=\begin{pmatrix} 0 & \pm\sin\frac{b}{N} \\ \pm\sin\frac{b}{N} & 0 \end{pmatrix},\quad \cos\varphi_{1}=\begin{pmatrix} -\cos\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{b}{N} \end{pmatrix}.$$

відшукаємо аналогічно знаходимо компоненти вектора a^{2}. Маємо:

$$\sin\varphi_{2}=\begin{pmatrix} \sin\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & \sin\frac{b}{N} \end{pmatrix},\quad \cos\varphi_{2}=\begin{pmatrix} \cos\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & \cos\frac{b}{N} \end{pmatrix}.$$

Таким чином: $$a^{1}=\left(\sin\varphi_{1},\cos\varphi_{1}\right)=\left(\begin{pmatrix} 0 & \pm\sin\frac{b}{N} \\ \pm\sin\frac{b}{N} & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\cos\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & -\cos\frac{b}{N} \end{pmatrix}\right);$$

$$a^{2}=\left(\sin\varphi_{2},\cos\varphi_{2}\right)=\left(\begin{pmatrix} \sin\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & \sin\frac{b}{N} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \cos\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & \cos\frac{b}{N} \end{pmatrix}\right).$$

Шукане рівняння можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm\sin^{2}\frac{b}{N} \\ \pm\sin^{2}\frac{b}{N} & 0 \end{pmatrix}\cdot u''_{x_{1}x_{1}}+\begin{pmatrix} -\cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N} & \pm\cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N} \\ \pm\cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N} & \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N} \end{pmatrix}\cdot u''_{x_{1}x_{2}}+\begin{pmatrix} -\cos^{2}\frac{b}{N} & 0 \\ 0 & -\cos^{2}\frac{b}{N} \end{pmatrix}\cdot u''_{x_{2}x_{2}}=0,$$

або у еквівалентному вигляді

$$\pm\sin^2\frac{b}{N}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot u''_{x_1x_1} - \sin\frac{b}{N}\cos\frac{b}{N}\begin{pmatrix}1 & \mp 1\\ \mp 1 & 1\end{pmatrix}\cdot u''_{x_1x_2} - \cos^2\frac{b}{N}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot u''_{x_2x_2} = 0\,. \qquad (13)$$

Перепишемо рівняння (13) у вигляді системи двох скалярних рівнянь, позначивши $u = (f, g)$:

$$\begin{cases}\pm\sin^2\frac{b}{N}\cdot g''_{x_1x_1} - \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot f''_{x_1x_2} \pm \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot g''_{x_1x_2} - \cos^2\frac{b}{N}\cdot f''_{x_2x_2} = 0,\\ \pm\sin^2\frac{b}{N}\cdot f''_{x_1x_1} \pm \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot f''_{x_1x_2} - \cos\frac{b}{N}\sin\frac{b}{N}\cdot g''_{x_1x_2} - \cos^2\frac{b}{N}\cdot g''_{x_2x_2} = 0.\end{cases} \qquad (14)$$

Таким чином, система (14) – це система диференціальних рівнянь другого порядку, для якої ядро першої крайової задачі у крузі є нетривіальним і нескінченновимірним.

ВИСНОВКИ. Досліджено питання нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в крузі для безтипового диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку без молодших членів із комутуючими комплексними матричними коефіцієнтами. Умова комутативності, якій відповідають коефіцієнти рівняння, дозволяє одержати критерій існування нетривіального розв'язку у менш складній формі, яка піддається перевірці. Отримано необхідну і достатню умову порушення єдиності розв'язку у вигляді рівності нулю визначника, що залежить від коефіцієнтів даного рівняння. Розглянуто приклад системи диференціальних рівнянь, для якої задача Діріхле у крузі має нетривіальне і нескінченновимірне ядро.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агранович М. С., Дынин А. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области. // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 511–514.
2. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. // Усп. матем. наук. – 1948. – 6. – С. 211–212.
3. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. – М.: ФМ, 1959. – 164 с.
4. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 316 с.
5. Бурский В. П. О единственности решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в области с алгебраической границей. // Укр. матем. журнал. – 1993. – 45. № 7. – С. 898–906.
6. Бурский В. П. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка в круге. // Матем. заметки. 1999.– 1. – С. 23–27.
7. Виноградов В. С. О задаче Дирихле для многомерных эллиптических систем второго порядка. // Докл. АН СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 766–767.
8. Виноградов В. С. О некоторых эллиптических системах без нётеровских граничных задач. // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 179, № 5. – С. 1223–1226.
9. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем. // Матем. сборник. – 1995. – Т. 68, Вып. 110, № 3. – С. 373–416.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М: Наука, 1966. – 576 с.
11. Кузьмин Е. Н. О задаче Дирихле для эллиптических систем в пространстве. // Дифференц. уравнения. – 1957. – Т. 3, № 1. – С. 155–157.
12. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. // Укр. матем. журнал. – 1953. – Т. 5, № 2. – С. 123–151.
13. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М: Наука. 1972. – 232 с.
14. Шевченко В. И. Об эллиптических системах трех уравнений с четырьмя независимыми переменными. // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 210, № 6. – С. 1300–1302.
15. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – Vol. 17, № 1. – P. 35–92.

Стаття надійшла до редколегії 29.04.15

Лесина Е., канд. физ.-мат. наук
Красноармейский индустриальный институт ДВНЗ "ДонНТУ"

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОММУТИРУЮЩИМИ МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе получен критерий однозначной разрешимости однородной задачи Дирихле в круге для бестипного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, коэффициентами которого являются коммутирующие квадратные матрицы. Необходимое и достаточное условие нарушения единственности решения записано в виде равенства нулю определителя, зависящего от коэффициентов рассматриваемого уравнения.

Lesina Ye., PhD
Krasnoarmiysk Industrial Institute of
State Higher Education Establishment "Donetsk National Technical University"

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION WITH COMMUTING MATRIX COEFFICIENTS

The unique solvability criterion of the homogeneous Dirichlet problem in a disk for untyped second order partial differential equation with commuting matrix coefficients is obtained. The necessary and sufficient condition of the uniqueness violation is formulated as equality to zero of the determinant depending on the coefficients of given equation.

УДК 517.912

М. Сєрова, канд. фіз.-мат. наук, доц., Ю. Приставка, асист.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава
e-mail: *yuliaprystavka@rambler.ru*

ПРО РОЗШИРЕННЯ ОСНОВНИХ СИМЕТРІЙ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

Отримано неперервні перетворення еквівалентності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії. Встановлено необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності даного рівняння.

ВСТУП. Дослідження багатьох фізичних, біохімічних, екологічних, економічних та інших процесів потребує побудови математичних моделей. У багатьох випадках такими моделями є диференціальні рівняння. Найчастіше математичні моделі є наслідком загальних законів або специфічних властивостей, що притаманні даному процесу.

Диференціальні рівняння успішно застосовувалися в якості математичних моделей фізичних явищ, пов'язаних з різними фізичними полями і хвильовими функціями в електродинаміці, акустиці, теорії пружності, гідро- і аеродинаміці і ряду інших напрямів дослідження фізичних явищ в суцільних середовищах. Математичні моделі цього класу явищ найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними. До таких рівнянь відносять рівняння реакції-конвекції-дифузії.

Дослідження рівнянь дифузії та різних їх модифікацій з додатковими членами, що відповідають реакції або конвекції, є актуальною задачею математичної фізики, оскільки ці рівняння часто використовують у якості математичних моделей різноманітних процесів у природі та суспільстві. Наприклад, у біології розглядають клітини, бактерії, хімічні речовини, тварин тощо як частинки, кожна з яких рухається хаотично. Тоді систематичний рух їх групи вважається процесом дифузії, і зазвичай це не проста дифузія, оскільки береться до уваги взаємодія між частинками. Для простоти біологи використовують (1+1)-вимірне неперервне модельне рівняння для опису глобальної поведінки в термінах густини чи концентрації частинок. Оскільки моделі дифузії часто формулюються в термінах нелінійних диференціальних рівнянь, які, як правило, не є інтегровними та не можуть бути лінеаризованими, то симетрійні методи, в силу своєї універсальності, є важливими для їх дослідження. Тому невипадково, що сучасний розвиток групового аналізу розпочався з групової класифікації Л. В. Овсянніковим [4] класу (1+1)-вимірних нелінійних рівнянь дифузії. Результатом класифікації лієвських або некласичних симетрій (умовних, потенціальних, узагальнених) є виокремлення модельних рівнянь з нетривіальними симетрійними властивостями.

Розглянемо двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$w_0 = \partial_a (f(w) w_a) + g^a(w) w_a + H(w), \tag{1}$$

де $w = w(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f(w)$, $g^a(w)$, $H(w)$ – коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно. Індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1,2\}$. В одновимірному випадку симетричні властивості рівняння (1) досліджено в [9].

Рівняння (1) використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних і біохімічних процесів. До класу рівнянь (1) входять такі відомі рівняння, як рівняння теплопровідності, Бюргерса та інші. Заміна

$$u = \int f(w) dw,$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$ – нова невідома функція, зводить рівняння (1) до вигляду

$$\Delta u = f^0(u) u_0 + f^a(u) u_a + h(u), \tag{2}$$

яке ми і будемо досліджувати, причому вважатимемо, що $f^a(u) \neq 0$, так як випадок $f^a(u) = 0$ досліджено в [1].

СИСТЕМА ВИЗНАЧАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ОСНОВНА АЛГЕБРА ІНВАРІАНТНОСТІ.

Означення. Основною алгеброю інваріантності рівняння (2) назвемо алгебру, відносно якої рівняння (2) інваріантне при довільних виглядах нелінійностей f^0, f^a, h.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. Основною алгеброю інваріантності рівняння (2) є алгебра

$$A^{bas} = \langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle. \tag{3}$$

Доведення. Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності рівняння (2) будемо шукати у вигляді

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

де $x = (x_0, x_1, x_2)$, $\mu = \overline{0,2}$, ξ^μ, η – шукані функції.

Застосувавши до рівняння (2) алгоритм С. Лі (див., наприклад, [3], [5]) одержимо систему визначальних рівнянь відносно нелінійностей f^0, f^a, h та координат ξ^μ, η оператора (4) :

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \quad \xi^1_1 = \xi^2_2, \quad \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\eta \dot{f}^0 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1) f^0, \\ &\eta \dot{f}^a = \xi^a_0 f^0 + (-\xi^1_1 \delta_{ab} + \xi^2_1 \varepsilon_{ab}) f^b + 2\eta_{au}, \\ &\eta \dot{h} = (\eta_u - 2\xi^1_1) h - \eta_0 f^0 + \eta_a f^a + \Delta\eta, \end{aligned} \tag{6}$$

де $(\delta_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – символ Кронекера, $(\varepsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – антисиметричний тензор.

Для того, щоб знайти основну алгебру інваріантності рівняння (2) припускаємо, що f^0, f^a, h – довільні гладкі функції. Це дає можливість "розчепити" систему (6) за цими функціями та їх похідними. У результаті розчеплення одержимо систему визначальних рівнянь відносно функцій ξ^μ та η:

$$\xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \ \xi^1_1 = \xi^2_2, \ \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \tag{7}$$

Загальним розв'язком системи (7) є функції

$$\xi^\mu = c_\mu, \ \eta = 0, \tag{8}$$

де c_μ – довільні сталі, $\mu = 0,1,2$. Оператор (4) з функціями (8) породжує алгебру (3). Лема 1 доведена.

НЕПЕРЕРВНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ. Так як рівняння (2) містить довільні функції f^0, f^a, h, то воно описує деякий клас рівнянь. При дослідженні симетрійних властивостей певного класу рівнянь важливе значення має знання перетворень еквівалентності даного класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів канонічні рівняння. Достатньо дослідити тільки канонічні представники з кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь даного класу.

Знайдемо перетворення еквівалентності рівняння (2), які будемо використовувати при проведенні повної групової класифікації цього рівняння.

Лема 2. Максимальною групою неперервних перетворень еквівалентності рівняння (2) є група перетворень, суперпозиція яких має вигляд

$$\begin{aligned} & x_0' = e^{\theta_0} x_0 + m_0, \\ & x_a' = \theta_a x_0 + e^{\theta_1}(\delta_{ab}\cos\theta_2 + \varepsilon_{ab}\sin\theta_2)x_b + m_a, \\ & u' = e^{\theta} u + m, \ \ f^{0'} = e^{\theta_0} u + m, \\ & f^{a'} = \theta_0 f^0 + e^{-\theta_1}(\delta_{ab}\cos\theta_2 + \varepsilon_{ab}\sin\theta_2) f^b, \\ & h' = e^{\theta - 2\theta_1} h, \end{aligned} \tag{9}$$

де $\theta_0, \theta_a, \theta, m_0, m_a, m$ – довільні групові параметри.

Доведення. Застосуємо метод, запропонований у [2; 8].

Інфінітезимальний оператор групи перетворень еквівалентності будемо шукати у вигляді

$$E = \xi^\mu \partial_\mu + \eta \partial_u + \varsigma^0 \partial_{f^0} + \varsigma^a \partial_{f^a} + \varsigma^3 \partial_h, \tag{10}$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x,u)$, $\eta = \eta(x,u)$, $\varsigma^0 = \varsigma^0(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$,
$\varsigma^a = \varsigma^a(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$, $\varsigma^3 = \varsigma^3(x,u,f^0,f^1,f^2,h)$ – шукані функції.

Із вигляду рівняння (2) випливає наступна система обмежень для нелінійностей f^0, f^a, h

$$f^0_{x_\mu} = 0, \ f^0_{u_\mu} = 0, \ f^a_{x_\mu} = 0, \ f^a_{u_\mu} = 0, \ h_{x_\mu} = 0, \ h_{u_\mu} = 0,$$ яку позначимо S_1.

Застосувавши критерій еквівалентності $\tilde{E}S\big|_{S=0,S_1=0} = 0, \quad \tilde{E}S_1\big|_{S=0,S_1=0} = 0$, отримаємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат $\xi^0, \xi^a, \eta, \varsigma^0, \varsigma^a, \varsigma^3$ оператора (10)

$$\begin{aligned} & \xi^\mu_u = \xi^0_a = \eta_{uu} = 0, \\ & \eta_\mu = 0, \ \ \varsigma^0_\mu = \varsigma^a_\mu = \varsigma^3_\mu = \varsigma^0_{u_\mu} = \varsigma^a_{u_\mu} = \varsigma^3_{u_\mu} = 0, \\ & \xi^1_1 = \xi^2_2, \ \xi^2_1 + \xi^1_2 = 0, \\ & \varsigma^0 = (\xi^0_0 - 2\xi^1_1) f^0, \\ & \varsigma^a = \xi^a_0 f^0 - 2\xi^1_1 f^a + \xi^a_b f^b, \\ & \varsigma^3 = (\eta_u - 2\xi^1_1) h. \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язком системи (11) є функції:

$$\begin{aligned} & \xi^0 = \kappa_0 x_0 + d_0, \\ & \xi^a = \kappa_1 x_a + g_a x_0 + c\varepsilon_{ab} x_{ab} + d_a, \\ & \eta = \kappa u + d, \ \ \ \varsigma^0 = (\kappa_0 - 2\kappa_1) f^0, \\ & \varsigma^a = g_a f^0 - \kappa_1 f^a + c\varepsilon_{ab} f^b, \\ & \varsigma^3 = (\kappa - 2\kappa_1) h. \end{aligned} \tag{12}$$

де $\kappa_0, \kappa_1, g_a, d_0, d_1, d$ – довільні сталі.

Оператор (10) з функціями (12) породжує групу перетворень (9). Лему 2 доведено.

НЕОБХІДНІ УМОВИ РОЗШИРЕННЯ ОСНОВНОЇ АЛГЕБРИ ІНВАРІАНТНОСТІ. Вище встановлено, що при довільних функціях f^0, f^a, h рівняння (2) інваріантне відносно алгебри (3). Знайдемо необхідні умови розширення основної алгебри інваріантності двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії (2). Тобто, проаналізувавши систему визначальних рівнянь (5)–(6), вкажемо вигляд нелінійностей f^0, f^a, h, при яких рівняння (2) може бути інваріантне відносно алгебри, ширшої, ніж алгебра (3).

Теорема 1. Для того, щоб рівняння (2) допускало розширення основної алгебри інваріантності (3) необхідно, щоб нелінійності f^0, f^a, h, з точністю до перетворень еквівалентності (9), мали вигляд, наведений у таблиці.

Таблиця

Необхідні умови розширення симетрій двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії

№ п/п	f^0	f^a	h
1	e^{ku}	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(u)$	$\lambda_3 e^{2mu}$
2	e^u	λ_a	$\lambda_3 e^u + \lambda_4$
3	u^k	$\lambda_b e^{mu} K_{ab}(\ln u)$	$\lambda_3 u^{2m+1}$
4	u^k	λ_a	$\lambda_3 u^{k+1} + \lambda_4 u$
5	u^k	$\lambda_a u e^u$	$\lambda_3 e^{2u} + \lambda_4 e^u$
6	u^k	$\lambda_a u^k \ln u$	$\lambda_3 u^{2k+1} + \lambda_4 u^{k+1}$
7	1	$\lambda_a \ln u$	$(\lambda_3 \ln^2 u + \lambda_4 \ln u + \lambda_5) u$
8	1	$\lambda_a u$	$\lambda_3 u + \lambda_4$
9	1	$\lambda_a u$	$\lambda_3 u^3 + \lambda_4 u$

У таблиці $K_{ab}(u) = \delta_{ab} \cos pu + \varepsilon_{ab} \sin pu$, $k, m, p, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ – довільні сталі.

Доведення. Визначальну систему (6) будемо розв'язувати методом введення структурних сталих (див. [6; 7]). Структурні зв'язки між коефіцієнтами системи (6) залежать від вигляду функцій f^a. Можливі два суттєво різні випадки:

I) $f^a \neq const$. II) $f^a = \lambda_a - const$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

I) $f^a \neq const$. У цьому випадку структурні зв'язки мають вигляд:

$$\begin{gathered} a = k_1\varphi,\ b = k_2\varphi,\ \xi_0^0 - 2\xi_1^1 = k\varphi,\ \xi_0^a = \gamma_a\varphi,\ -\xi_1^1 = m\varphi,\ -\xi_1^2 = p\varphi, \\ -a_0 = q_1\varphi,\ -b_0 = r_1\varphi,\ -a_a = \alpha_a\varphi,\ -b_a = \beta_a\varphi,\ \Delta a = q_2\varphi,\ \Delta b = r_2\varphi, \end{gathered} \tag{13}$$

де $k, m, p, k_a, q_a, r_a, \alpha_a, \beta_a, \gamma_a$ – довільні сталі, які назвемо структурними константами, $\varphi = \varphi(x)$ – довільна гладка функція.

Підставивши умови (13) в систему (6) в силу довільності функції $\varphi(x)$ одержимо

$$\begin{gathered} (k_1 u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0, \\ (k_1 u + k_2)\dot{f}^a = \gamma_a f^0 + (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}) f^b - 2\alpha_a, \\ (k_1 u + k_2)\dot{h} = (k_1 + 2m)h + (q_1 u + r_1) f^0 + (\alpha_a u + \beta_a) f^a + q_2 u + r_2. \end{gathered} \tag{14}$$

Система (14) називається структурною для функцій f^0, f^a, h.

Для спрощення структурної системи (14) застосуємо перетворення еквівалентності вигляду

$$x_0' = x_0,\ x_a' = x_a + \theta_a x_0,\ u' = u,\ f^{0\prime} = f^0,\ f^{a\prime} = f^a + \theta_a f^0,\ h' = h. \tag{15}$$

Переписавши систему (14) в штрихованих змінних та підставивши (15), після нескладних перетворень одержимо

$$(k_1 u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0, \quad (k_1 u + k_2)\dot{f}^a = \Gamma_a f^0 + (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}) f^b - 2\alpha_a,$$

$$(k_1 u + k_2)\dot{h} = (k_1 + 2m)h + (Q_1 u + R_1) f^0 + (\alpha_a u + \beta_a) f^a + q_2 u + r_2.$$

де
$$\Gamma_a = [(m-k)\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab}]\theta_b + \gamma_a, \quad Q_1 = \theta_a \alpha_a + q_1,\ R_1 = \theta_a \beta_a + r_1.$$

Якщо

$$(m-k)^2 + p^2 \neq 0 \tag{16}$$

то параметри θ_a можна підібрати так, щоб $\Gamma_a = 0$. Тому у випадку (16) з точністю до перетворень (15) можна вважати $\gamma_a = 0$.

Розв'язок системи (14) залежить від сталої k_1. Мають місце два суттєво різні випадки:

1) $k_1 = 0$, 2) $k_1 \neq 0$.

Доведення проведемо на прикладі випадку 1.

1) $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати $k_2 = 1$). З умови (11) при $k_1 = 0$ випливає, що $a = 0,\ b = \varphi$, що, у свою чергу, накладає умови

$$\alpha_a = q_a = 0 \tag{17}$$

та

$$mb + \xi_1^1 = 0,\ pb - \xi_1^2 = 0. \tag{18}$$

Із рівнянь (18) маємо

$$p\xi_1^1 + m\xi_1^2 = 0. \tag{19}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (19) за змінними x_1 та x_2, використавши (6), отримаємо систему

$$\begin{aligned} p\xi_{11}^1 - m\xi_{12}^1 = 0,\\ m\xi_{11}^1 + p\xi_{12}^1 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Так як головний визначник системи (20) $\Delta = p^2 + m^2$ відмінний від нуля(в протилежному випадку із (14) $\dot{f}^0 = 0$, що протирічить умові $f^a \neq const$), то дана система має лише нульовий розв'язок

$$\xi_{11}^1 = \xi_{12}^1 = 0. \tag{21}$$

З рівнянь (6), (21) отримаємо

$$\xi_{bc}^a = 0, \tag{22}$$

де $a,b,c = \overline{1,2}$. Із (18), (22) випливає, що $b - const$, тому

$$r_a = \beta_a = 0\ . \tag{23}$$

Враховуючи (17) та (23) запишемо структурну систему

$$\begin{aligned} &\dot{f}^0 = kf^0,\\ &\dot{f}^a = (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b,\\ &\dot{h} = 2mh\ . \end{aligned} \tag{24}$$

Загальним розв'язком системи (24) є функції

$$f^0 = \lambda_0 e^{ku},\ f^a = \lambda_b e^{mu}(\delta_{ab}\cos pu + \varepsilon_{ab}\sin pu),\ h = \lambda_3 e^{2mu}.$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні сталі. З точністю до перетворень еквівалентності (9) можна вважати, що $\lambda_0 = 1$. Тобто має місце перший випадок 1 із таблиці.

Якщо $(m-k)^2 + p^2 = 0$, то $\Gamma_a \neq 0$.

Розв'язок системи (14) залежить від сталих k та k_1. Мають місце чотири суттєво різні випадки:

1) $k \neq 0$, $k_1 = 0$, 2) $k \neq 0$, $k_1 \neq 0$, 3) $k = 0$, $k_1 = 0$, 4) $k = 0$, $k_1 \neq 0$.

Доведення проведемо на прикладі випадку 1.

1) $k \neq 0$, $k_1 = 0$, $m = k$, $p = 0$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $k_2 = k$.

З умов (13) випливає, що $a = 0$, $b = k\varphi$. Це накладає умови

$$\alpha_a = q_a = 0\ . \tag{25}$$

та

$$b = -\xi_0^0. \tag{26}$$

Взявши диференціальні наслідки рівняння (26) за x_a, отримаємо

$$b_a = 0\ . \tag{27}$$

Із (27) маємо

$$\beta_a = r_2 = 0\ . \tag{28}$$

Врахувавши (25), (28) запишемо структурну систему

$$\dot{f}^0 = f^0,\ k\dot{f}^a = kf^b + \gamma_a f^0,\ k\dot{h} = 2kh + r_1 f^0. \tag{29}$$

Загальним розв'язком системи (29) із точністю до перетворень еквівалентності $x_0' = x_0$, $x_a' = x_a + \theta_a x_0$, $u' = u$ є функції $f^0 = e^u$, $f^a = \lambda_a u e^u$, $h = \lambda_3 e^{2u} + \lambda_4 e^u$, де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні сталі. Тобто має місце випадок 5 із таблиці.

II. Розглянемо випадок $f^a = \lambda_a$. Зауважимо, що у цьому випадку $f^0 \neq const$, так як при $f^0 = \lambda - const$ перетвореннями (15) рівняння (2) зводиться до вигляду

$$\Delta u = \lambda u_0 + h(u)\ . \tag{30}$$

Симетрійні властивості рівняння (30) прокласифіковано в [1]. У випадку сталих функцій f^a, розчепивши друге рівняння системи (6) за змінною u, одержимо

$$\xi_0^a = 0,\ (-\xi_1^1\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab})\lambda_b + 2a_a = 0\ . \tag{31}$$

Тому нам залишається вивчити структуру тільки першого та останнього рівнянь даної системи. У цьому випадку структурні зв'язки задаються інакше:

$$a = k_1\varphi,\ b = k_2\varphi,\ \xi_0^0 - 2\xi_1^1 = k\varphi,\ -2\xi_1^1 = s\varphi,\ -a_0 = q_1\varphi,$$
$$-b_0 = r_1\varphi,\ -\lambda_a a_a + \Delta a = q_3\varphi,\ -\lambda_a b_a + \Delta b = r_3\varphi. \quad (32)$$

Враховуючи (32) запишемо структурну систему

$$(k_1u + k_2)\dot{f}^0 = kf^0, \quad (k_1u + k_2)\dot{h} = (k_1 + s)h + (q_1u + r_1)f^0 + q_3u + r_3.$$

Розглянемо випадок $k_1 = 0$. Це приводить до умови $a = 0$, що, в свою чергу, приводить до умов $q_1 = q_3 = 0$. Із другого рівняння системи (6) будемо мати $\xi_1^1 = \xi_1^2 = 0,$ а, отже,

$$s = 0. \quad (33)$$

Тоді, продиференціювавши рівняння $\xi_0^0 = kb$ за змінними x_a одержимо

$$b_a = 0, \quad (34)$$

$k \neq 0,$ так як $f^0 \neq const$.

Врахувавши (33), (34) запишемо структурну систему

$$\dot{f}^0 = kf^0, \quad \dot{h} = r_1 f^0. \quad (35)$$

Загальним розв'язком системи (35) є функції $f^0 = \lambda_0 e^{ku}$, $f^a = \lambda_a$, $h = \lambda_3 e^{ku} + \lambda_4$, де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – довільні сталі. Із точністю до перетворень еквівалентності (9), не втрачаючи загальності, маємо $k = \lambda_0 = 1$. Тобто справедливий випадок 2 із таблиці 1.

Нехай $k_1 \neq 0$. Із точністю до перетворень еквівалентності (9) $k_1 = 1$, $k_2 = 0$. Запишемо структурну систему

$$u\dot{f}^0 = kf^0, \quad (36)$$

$$u\dot{h} = (s+1)h + q_1uf^0 + q_3u. \quad (37)$$

Загальним розв'язком рівняння (36) є функція

$$f^0 = \lambda_0 u^k. \quad (38)$$

причому $k \neq 0$, $\lambda_0 \neq 0$, так як $f^0 \neq const$ (з точністю до перетворень еквівалентності можна вважати $\lambda_0 = 1$).

Врахувавши (38) рівняння (37) набуде вигляду

$$\dot{h} = \frac{s+1}{u}h + q_1u^k + q_3. \quad (39)$$

Використавши заміну $h = u^{s+1} \cdot z$ із (39) отримаємо

$$\dot{z} = q_1u^{k-s-1} + q_3u^{-s-1}. \quad (40)$$

Проаналізувавши (40), отримаємо наступні суттєво різні випадки: 1) $s = k$, 2) $s = 0$, 3) $s \neq 0, k$.

Проаналізуємо структурні зв'язки (32). Маємо:

$$\varphi = a \neq 0,\ b = 0,$$

$$ka = \xi_0^0 - 2\xi_1^1,\ \ sa = -2\xi_1^1, \quad (41)$$

$$a_0 + q_1a = 0,\ \ \Delta a = \lambda_a a_a + q_3a \quad (42)$$

Із рівнянь (41) одержимо

$$(k-s)a = \xi_0^0. \quad (43)$$

Можливі два суттєво різні випадки:

1) $s \neq k$. У цьому випадку із (43) та (31) маємо

$$a_a = \xi_1^1 = \xi_1^2 = 0.$$

Тоді із (41), (42) випливає, що $s = q_3 = 0$. Рівняння (37) має вигляд

$$(k-s)a = \xi_0^0. \quad (44)$$

Розв'язавши рівняння (44), отримуємо $h = \lambda_3u^{k+1} + \lambda_4u$.

2) $s = k$. Із рівняння (32) будемо мати

$$-2\xi_1^1 = ka. \quad (45)$$

Продиференціювавши (45) за змінною x_0 одержимо

$$a_0 = 0. \quad (46)$$

Врахувавши (46) із структурних зв'язків (32) маємо $q_1 = 0$.

Рівняння (46) для даного випадку набуде вигляду

$$u\dot{h} = (k+1)h + q_3u. \quad (47)$$

Загальним розв'язком рівняння (47) є функція $h = \lambda_3u^{k+1} + \lambda_4u$.

Нехай $\mathrm{s} = 0$. Із (32) будемо мати $\xi_1^1 = 0$ та

$$\xi_0^0 = ka. \quad (48)$$

Взявши диференціальний наслідок (48) за змінними x_a, отримаємо

$$a_a = 0 . \tag{49}$$

Врахувавши (49) із системи (32) маємо $q_3 = 0$. Рівняння (38) для даного випадку набуде вигляду

$$u\dot{h} = h + q_1 u^{k+1} . \tag{50}$$

Загальним розв'язком рівняння (50) є функція $h = \lambda_3 u^{k+1} + \lambda_4 u$. Тобто має місце випадок 4 із таблиці.

Розв'язуючи структурні системи, ми врахували умови, які виникають при використанні зв'язків між структурними константами. Такі зв'язки можна використовувати лише у припущенні, що кожному рівнянню визначальної системи (6) відповідає одне структурне рівняння. Якщо ж хоч одному визначальному рівнянню системи (6) відповідає більше, ніж одне структурне рівняння, то зв'язки між структурними константами використовувати не можна.

Тому цей випадок розглянемо окремо. Дослідимо випадок, коли рівнянням визначальної системи (6) відповідають два рівняння структурної системи. Зазначимо, що для даної задачі два рівняння – це максимальна кількість рівнянь структурної системи, коли вона може бути сумісна.

Розглянемо перше рівняння системи (6). Нехай йому відповідає два рівняння структурної системи

$$(k_1 u + k_2)\dot{f}^0 - kf^0 = 0, \quad (n_1 u + n_2)\dot{f}^0 - nf^0 = 0. \tag{51}$$

Так як згідно умови поставленої задачі $f^0 \neq 0$, то система (6) може мати нетривіальний розв'язок лише у випадку

$$\begin{vmatrix} k_1 u + k_2 & -k \\ n_1 u + n_2 & -n \end{vmatrix} = 0 . \tag{52}$$

Розчепивши рівняння (52) за різними степенями функції u, одержимо $\frac{k_1}{n_1} = \frac{k_2}{n_2} = \frac{k}{n}$. Тобто рівняння системи (51) пропорційні. Це означає, що першому рівнянню (6) не можуть відповідати два непропорційні рівняння структурної системи.

Суттєво різними розв'язками першого рівняння структурної системи з точністю до перетворень еквівалентності (9) є функції $f^0 = 1,\ f^0 = e^u,\ f^0 = u^k$.

Розглянемо спочатку $f^0 = 1$ і проаналізуємо можливість двох структурних рівнянь для другого рівняння визначальної системи (6):

$$(k_1 u + k_2)\dot{f}^a - (m\delta_{ab} + p\varepsilon_{ab})f^b = -2\alpha_a , \quad (l_1 u + l_2)\dot{f}^a - (s\delta_{ab} + t\varepsilon_{ab})f^b = -2\sigma_a . \tag{53}$$

Розв'язавши систему (53) відносно змінних $\dot{f}^a$ та f^a маємо

$$\dot{f}^a = \frac{R_1^a(u)}{P_2(u)} , \tag{54}$$

$$f^a = \frac{Q_2^a(u)}{P_2(u)} = c^a + \frac{S_1^a(u)}{P_2(u)} , \tag{55}$$

де $S_1^a,\ R_1^a,\ P_2(u),\ Q_2^a(u)$ – довільні многочлени степеня 1 та 2 відповідно, c^a – довільні сталі.

Із умов сумісності рівнянь(54), (55) маємо

$$\dot{S}_1^a \cdot P_2 - S_1^a \cdot \dot{P}_2 = R_1^a \cdot P_2 . \tag{56}$$

Проаналізувавши систему рівнянь (56), приходимо до висновку, що, з точністю до перетворень (9) рівність (56) можлива лише у двох випадках: $f^a = \lambda_a u$, $f^a = \frac{\lambda_a}{u}$.

Нехай $f^0 = 1$, $f^a = \lambda_a u$. Знайдемо вигляд функції h. Запишемо визначальну систему

$$\xi_0^0 = 2\xi_1^1 , \tag{57}$$

$$(au + b)\lambda_a = \xi_0^a + (-\xi_1^1\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab})\lambda_b u + 2a_a , \tag{58}$$

$$(au + b)\dot{h} = (a - 2\xi_1^1)h - (a_0 u + b_0) - (a_a u + b_a)\lambda_a u + \vartriangle au + \vartriangle b .$$

Розчепивши рівняння (58) за різними степенями функції u отримаємо

$$\lambda_a a = (\xi_1^1\delta_{ab} + \xi_1^2\varepsilon_{ab})\lambda_b , \tag{59}$$

$$\lambda_a b = \xi_0^a + 2a_a . \tag{60}$$

Із рівняння (59) маємо

$$a = -\xi_1^1 , \tag{61}$$

$$\xi_1^2 = 0 . \tag{62}$$

Із (57), (61) маємо

$$a = -\frac{1}{2}\xi_0^0 . \tag{63}$$

Продиференціювавши (63) за змінними x_a отримаємо

$$a_a = 0 . \tag{64}$$

Врахувавши (61), (62), (64) та використавши диференціальний наслідок (60) за змінними x_a одержимо

$$b_a = 0\,. \tag{65}$$

Врахувавши (64), (65) запишемо третє рівняння визначальної системи

$$(au+b)\dot{h} = (a-2\xi_1^1)h - a_0 u - b_0\,. \tag{66}$$

Розглянемо випадок, коли рівнянню (66) відповідає два рівняння структурної системи.

$$(k_1 u + k_2)\dot{h} - 3k_1 h = q_1 u + r_1\,, \quad (n_1 u + n_2)\dot{h} - 3n_1 h = c_1 u + d_1\,.$$

Одержимо

$$\dot{h} = c + \frac{m_0}{W_1(u)}\,, \tag{67}$$

$$h = V_1(u) + \frac{n_0}{W_1(u)}\,, \tag{68}$$

де $W_1(u),\ V_1(u)$ – довільні многочлени 1-ого степеня, $m_0,\ n_0$ – довільні сталі.

Із умов сумісності (67), (68) маємо

$$\dot{Z}_1 W_1^2 - n_0 \dot{W}_1 = c W_1^2 + m_0 W_1\,. \tag{69}$$

Рівність (69) можлива лише у випадку, коли

$$h = \lambda_3 u + \lambda_4\,. \tag{70}$$

Зауважимо, що (70) є випадком 8 із таблиці 1.

Аналогічно доводиться випадок $f^0 = 1\,,\ f^a = \dfrac{\lambda_a}{u}$.

Теорема 1 доведена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19. – С. 1215–1223.
2. Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. – К., 2002. – Т.45. – 359 с.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений – М. : Наука, 1978. – 400 с.
4. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. Доклады АН СССР. – Т.125, 1959. – С. 492–495.
5. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М. : Мир, 1989. – 581 с.
6. Сєров М. І., Рассоха І. В. Симетрійні властивості рівнянь реакції-конвекції-дифузії: Монографія. – Полтава : ПолтНТУ, 2013. – 168 с.
7. Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – К. : Наук. думка, 1989. – 339 с.
8. Akhatov I. S., Gazizov R. K., Ibragimov N. H. Nonlocal symmetries. Heuristic approach. // J. Sov. Math. – 55 (1991). – P. 1401–1450.
9. Cherniha R., Serov M., Rassokha I. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V.342. – P.1363–1379.

Стаття надійшла до редколегії 01.02.15

Серова М., канд. физ.-мат. наук, доц., Приставка Ю., ассист.
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава

О РАСШИРЕНИИ ОСНОВНЫХ СИММЕТРИЙ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ-КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

В статье получено непрерывные преобразования эквивалентности двумерного уравнения реакции-конвекции-диффузии. Установлено необходимые условия расширения основной алгебры инвариантности данного уравнения.

Serova M., PhD, Pristavka Y., assist.
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University, Poltava

ABOUT THE EXPANSION BASIC SYMMETRIES OF TWO-DIMENSIONAL REACTION-CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

In the article continuous transformations of equivalence of two-dimensional equation of reaction-convection-diffusion were obtained. Necessary conditions for the expansion of basic invariance algebra of this equation were established.

УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук, Т. Шовкопляс, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *from_Tatyana@ukr.net*

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

Отримано умови єдиності узагальненого розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з випередженням.

ВСТУП. Теорія існування і єдиності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь знаходиться на початковому етап свого розвитку. Цій проблематиці присвячено багато праць різних авторів. Для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу з невипадковою початковою умовою фундаментальне дослідження було виконано Б. Л. Розовським в [4]. Для задач з початковою умовою, залежною від вінеровського процесу, ситуація складніша, оскільки потребує розширеного стохастичного інтегрування. У даній статті задача про єдиність розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь зводиться до аналогічного питання для диференціальних рівнянь з частинними похідними, при цьому вдається виділити клас процесів, для яких розв'язок єдиний. Ця обставина відповідає специфіці параболічних рівнянь з частинними похідними і спрощує пошук розв'язку. Інший підхід запропоновано в [6].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, ПРИПУЩЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ. Нехай $t\in[0,T]$, $T<\infty$; λ – міра Лебега на відрізку $[0,T]$; $I_{[a,b]}(\cdot)$ – індикатор відрізка; нехай $x\in R^d$, $|\cdot|$ – норма вектора з R^d. Через G позначимо обмежену область (відкриту зв'язну множину в R^d) з кусково-гладкою межею [2], ∂G – межу області G, λ_d – міру Лебега на G. Нехай: $G_T=\{(x,t):x\in G, t\in(0,T)\}$, $\partial G_T=\{(x,t):x\in\partial G, t\in[0,T]\}$.

Надалі в цій статті по парам однакових індексів здійснюється підсумовування в межах від 1 до d. Позначимо, $u_{x_i}=du/dx_i$, $\overline{i=1,\dots,d}$, $u_s=du/ds$, $u_x=(u_{x_1},\dots,u_{x_d})$. Всі похідні розглядаються в узагальненому сенсі [3].

Через $(\cdot,\cdot)_0$ і $(\cdot,\cdot)_{0,0}$ позначено скалярні добутки в $L^2(G)$ і в $L^2(G_T)$ відповідно: $\|f\|_0=(f,f)_0^{1/2}$, $\|f\|_{0,0}=(f,f)_{0,0}^{1/2}$.

$W_1^2(G)$ – простір Соболєва функцій $f\in L^2(G)$, які мають похідну $f_x\in L^2(G)$; $(f,g)_1=(f,g)_0+(f_{x_k},g_{x_k})_0$, $\|f\|_1=(f,f)_1^{1/2}$ – скалярний добуток і норма елементів в $W_1^2(G)$; $W_{1,0}^2(G_T)$ – простір Соболєва функцій $f\in L^2(G_T)$ з похідними $f_x\in L^2(G_T)$ і скалярним добутком

$$(f,g)_{1,0}=(f,g)_{0,0}+(f_{x_k},g_{x_k})_{0,0};\ \overset{\circ}{W}{}_{1,0}^2(G_T)=W_{1,0}^2(G_T)\cap\left\{f:f|_{\partial G_T}=0\right\}.$$

$W_{1,1}^2(G_T)$ – простір Соболєва функцій $f\in L^2(G_T)$, що мають похідні $f_x\in L^2(G_T)$ та $f_s\in L^2(G_T)$, а скалярний добуток в $W_{1,1}^2(G_T)$: $(f,g)_{1,1}=(f_s,g_s)_{0,0}+(f,g)_{1,0}$; $\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^2(G_T)=W_{1,1}^2(G_T)\cap\left\{f:f|_{\partial G_T}=0\right\}$.

Через $\overset{\circ}{V}$ позначимо банахів простір, який складається з таких елементів $\overset{\circ}{W}{}_{1,0}^2(G_T)$, що мають скінченну норму

$$\|f\|_{\overset{\circ}{V}}=\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\|f(\cdot,t)\|_0+\left(\int_{G_T}|f_x(x,s)|^2\,dxds\right)^{1/2}.$$

Нехай $(\Omega,\Im,P)$ – канонічний ймовірностний простір; $w(t)$, $t\in[0,T]$ – вінерівський процес, заданий на ньому. Це означає, що $\Omega=C_0([0,T])$, $\Im=\overline{B}^P(\Omega)$, P – вінерівська міра на $\Im$, а $W(t,\omega)=\omega(t)$; $\mathrm{E}\xi$ – математичне сподівання величини ξ за мірою P; D_s – стохастична похідна [7]; $\|F\|_2=\left(\mathrm{E}|F|^2\right)^{1/2}$.

Через $\overset{\circ}{SV}$ позначимо банахів простір, який складається з таких елементів $L^2\left([0,T]\times\Omega;\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)\right)$, що мають скінченну норму: $\|f\|_{\overset{\circ}{SV}}=\operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\left(\mathrm{E}\|f(\cdot,t,\cdot)\|_0^2\right)^{1/2}+\left(\mathrm{E}\int_{G_T}|f_x(x,s,\omega)|^2\,dxds\right)^{1/2}$, А через $\varepsilon(h)$ – стохастичну експоненту: $\varepsilon(h)=\exp\left\{\int_0^T h(s)\,dw(s)-\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}\right\}$, $h\in C^\infty([0,T])$.

Під $\int_0^t u(s)dw(s),\ 0\le t\le T$, будемо розуміти невизначений розширений стохастичний інтеграл Скорохода [5, 7]; $Dom\,\delta$ – область визначення інтегралу Скорохода.

Нехай $a_{ij}(x,t)$, $b_{ij}(x,t)$, $(x,t)\in G_T,\ i,j=\overline{1,d}$; $\varphi(x,\omega)$, $(x,\omega)\in G\times\Omega$ – задані функції. Надалі, з метою спрощення записів, аргументи функцій можуть опускатися, якщо це не призводить до неоднозначності, наприклад, $a_{ij}\equiv a_{ij}(x,t)$, $b_i\equiv b_i(x,t)$, $\varphi\equiv\varphi(x)\equiv\varphi(x,\omega)$, $u\equiv u(t)\equiv u(x,t)\equiv u(x,t,\omega)$, $u_{x_i}\equiv u_{x_i}(x,t,\omega)$, $i,j=\overline{1,d}$, і т. п.

ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ. Розглянемо рівняння

$$u(x,t)=\varphi(x)+\int_0^t\left(a_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j}ds+\int_0^t b_iu_{x_i}dw(s). \tag{1}$$

Означення. Узагальненим розв'язком першої крайової задачі для рівняння (1) в циліндрі G_T з умовами

$$u\big|_{t=0}=\varphi,\ u\big|_{\partial G_T}=0,$$

називається такий елемент $u\in\overset{\circ}{SV}$, що для всіх $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ співвідношення

$$\left(u(t),\eta\right)_0=(\varphi,\eta)_0-\int_0^t\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0ds+\int_0^t\left(b_iu_{x_i},\eta\right)_0dw(s) \tag{2}$$

виконується $(\lambda\times P)$ – майже напевно на $[0,T]\times\Omega$.

Знайдемо умови єдності розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1).

Припущення. Сформулюємо припущення, які будуть використані у подальшому.

A) $\left|a_{ij}(x,t)\right|+\left|b_i(x,t)\right|\le K<\infty,(x,t)\in G_T$;

B) $\nu|\xi|^2\le a_{ij}(x,t)\xi_i\,\xi_j,\ \xi\in R^d,\ \nu>0,(x,t)\in G_T$;

C) $\varphi\in L^2(G\times\Omega)$;

D) Процес $\left\{I_{[0,t]}(s)\left(b_iu_{x_i}(s),\eta\right)_0,\ 0\le s\le T\right\}\in Dom\,\delta$ для всіх $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ майже всіх $t\in[0,T]$.

Зауваження. Якщо виконуються умови A), B), C), D), то співвідношення (2) визначено коректно. Дійсно, $\left(u(t),\eta\right)_0$ існує в силу теореми Фубіні, оскільки $u\in\overset{\circ}{SV}$, а $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$. Аналогічно щодо $(\varphi,\eta)_0$. Потраєкторний інтеграл визначений, оскільки для довільного $t\in[0,T]$ P – майже напевно

$$\int_0^T\left|\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0\right|ds\le\sqrt{T}\left(\int_0^T\left|\left(a_{ij}u_{x_i},\eta_{x_j}\right)_0\right|^2ds\right)^{1/2}\le\sqrt{T}\left(\int_0^T\left|\sum_{i,\,j=1}^d K\left\|u_{x_i}\right\|_0\left\|\eta_{x_j}\right\|_0\right|^2ds\right)^{1/2}\le$$

$$\le\sqrt{T}K\,d^2\left(\int_0^T\|\eta\|_1^2\sum_{i=1}^d\left\|u_{x_i}\right\|_0^2ds\right)^{1/2}\le\sqrt{T}K\,d^2\,\|\eta\|_1\left(\int_{G_T}|u_x|^2\,dxds\right)^{1/2}<\infty.$$

Стохастичний інтеграл в (2) визначений силу згідно умови D).

Основний результат. Нехай $u(x,t,\omega)$ – розв'язок першої крайової задачі. Розглянемо $u^h(x,t)=\mathrm{E}\varepsilon(h)u(x,t)$. Зазначимо, що $u^h(x,t)$ існує майже для всіх $(x,t)\in G_T$. Згідно визначення узагальненої похідної, можна писати $u^h_{x_i}(x,t)$, оскільки з $\int_G\left(u^h\zeta_{x_i}+\left(u_{x_i}\right)^h\zeta\right)dx=0$. Отже, $\left(u^{x_i}\right)^h=\left(u^h\right)_{x_i}=u^h_{x_i}$.

Лема. Нехай виконуються умови A), B), C), D). Якщо u – узагальнений розв'язок першої крайової задачі для рівняння (1), то $\varphi^h\in L^2(G)$, $u^h\in\overset{\circ}{V}$ і

$$\int_{G_T}\left(u^h\zeta_{x_i}+\left(u_{x_i}\right)^h\zeta\right)\left\{a_{ij}u^h_{x_i}\Phi_{x_j}-hb_iu_{x_i}\Phi-u^h\Phi_s\right\}dxds=\int_G\varphi^h(x)\Phi(x,0)dx \tag{3}$$

для всіх $\Phi\in\overset{\circ}{W}{}_{1,1}^2(G)$ таких, що $\Phi\big|_{t=T}=0$.

Доведення. Покажемо, що $\varphi^h\in L^2(G)$. Це випливає з оцінки

$$\left\|\mathrm{E}\varepsilon(h)\varphi\right\|_0^2\le\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\mathrm{E}\|\varphi\|_0^2\le e^{\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\left\|\varphi\right\|^2_{L^2(G\times\Omega)}.$$

Тепер доведемо, що $u^h\in\overset{\circ}{V}$. Дійсно, майже при всіх $t\in[0,T]$ маємо

$$\left\|u^h(t)\right\|_0^2=\int_G\left(\mathrm{E}\varepsilon(h)u(x,t)\right)^2dx\le\int_G\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\mathrm{E}\left(u(x,t)\right)^2dx=\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\mathrm{E}\left\|u(t)\right\|_0^2=e^{\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\mathrm{E}\left\|u(t)\right\|_0^2\le e^{\|h\|^2_{L^2([0,T])}}\mathrm{E}\|u\|_{\overset{\circ}{SV}}.$$

Отже, $u^h \in \overset{\circ}{V}$. Для того, щоб довести (3), покажемо спочатку, що для всіх $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ функція u^h майже для всіх $t \in [0, T]$ задовольняє співвідношенню

$$\left(u^h(t), \eta\right)_0 = \left(\varphi^h, \eta\right)_0 + \int_0^t \left\{ -\left(a_{ij} u^h_{x_i}, \eta_{x_j}\right)_0 + \left(b_i u^h_{x_i}, \eta\right)_0 h(s) \right\} ds. \tag{4}$$

Формально (4) можна отримати з (2), якщо обидві частини рівності (2) помножити на $\varepsilon(h)$, взяти математичне сподівання і поміняти порядок інтегрування. Обґрунтуємо такий підхід.

Почнемо з лівої частини. Справедлива оцінка

$$\mathrm{E}\int_G \left|\varepsilon(h) u(t)\eta\right| dx \le \left(\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\right)^{1/2} \left(\mathrm{E}\left(\int_G \left|u(t)\eta\right| dx\right)^2\right)^{1/2} \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \left(\mathrm{E}\|u(t)\|_0^2 \|\eta\|_0^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \|\eta\|_1 \left(\mathrm{E}\|u(t)\|_0^2\right)^{1/2} \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \|\eta\|_1 \|u\|_{S\overset{\circ}{V}}.$$

З теореми Тонеллі [1] випливає: $\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\left(u^h(t), \eta\right)_0 = \left(u^h(t), \eta\right)_0$.

Аналогічно, $\mathrm{E}\int_G \left|\varepsilon(h)\varphi\,\eta\right| dx \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \|\eta\|_1 \left(\mathrm{E}\|\varphi\|_0^2\right)^{1/2}$ і за теоремою Тонеллі $\mathrm{E}\varepsilon(h)(\varphi, \eta)_0 = \left(\varphi^h, \eta\right)_0$.

Далі

$$\mathrm{E}\int \left|\varepsilon(h)\left(a_{ij} u_{x_j}, \eta_{x_j}\right)\right| ds \le \left(\mathrm{E}\left(\varepsilon(h)\right)^2\right)^{1/2} \left(\mathrm{E}\left(\int_0^T \left|\left(a_{ij} u_{x_i}, \eta_{x_j}\right)_0\right| ds\right)^2\right)^{1/2} \le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \left(\mathrm{E}T\int_0^T \left|\left(a_{ij} u_{x_i}, \eta_{x_j}\right)_0\right| ds\right)^{1/2} \le$$

$$\le e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \left(\mathrm{E}T\left(K\,d\|\eta\|_1\right)^2 \int_{G_T} |u_x|^2\,dxds\right)^{1/2} \le \sqrt{T}K\,d\|\eta\|_1\, e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \left(\int_{G_T} |u_x|^2\,dxds\right)^{1/2} \le \sqrt{T}Kd\|\eta\|_1\, e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \|u\|_{S\overset{\circ}{V}}.$$

Отже, маємо

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}, \eta_{x_j}\right)_0 ds = \int_0^t \left(a_{ij} u_{x_i}, \eta_{x_j}\right)_0 ds.$$

Нарешті, залишається показати, що

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\int_0^t \left(b_i u_{x_i}, \eta\right)_0 dw(s) = \int_0^t h(s)\left(b_i u^h_{x_i}, \eta\right)_0 ds. \tag{5}$$

Для цього зауважимо, що $D_s\,\varepsilon(h) = \varepsilon(s)h(s)$ і за означенням інтегралу Скорохода [7] має місце рівність:

$$\mathrm{E}\,\varepsilon(h)\int_0^t \left(b_i u_{x_i}, \eta\right)_0 dw(s) = \mathrm{E}\int_0^t \varepsilon(s)h(s)\left(b_i u^h_{x_i}, \eta\right)_0 ds.$$

Враховуючи те, що функція h обмежена на $[0, T]$, аналогічно попередньому, будемо мати

$$\mathrm{E}\int_0^t \left|\varepsilon(h)h(s)\left(b_i u_{x_i}, \eta\right)_0\right| ds \le \sqrt{T}K_1 d\|\eta\|_1\, e^{\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^2([0,T])}} \|u\|_{S\overset{\circ}{V}}, \quad \text{для деякої сталої } K_1 < \infty.$$

За теоремою Тонеллі отримаємо (5). Співвідношення (4) доведено.

Покажемо, як з (4) отримати (3). Нехай $\left\{\psi^k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальна система в $\overset{\circ}{W}{}_1^2(G)$ така, що $\left(\psi^k, \psi^l\right)_0 = \delta_{kl}$.

Тоді, для $\eta = \psi^k$, $k = \overline{1, M}$, $M < \infty$, і майже для всіх $t \in [0, T]$ маємо

$$\left(u^h(t), \psi^k\right)_0 - \left(\varphi^h, \psi^k\right)_0 = \int_0^t \left\{ -\left(a_{ij} u^h_{x_i}, \psi^k_{x_j}\right)_0 + \left(h b_i u^h_{x_i}, \psi^k\right)_0 \right\} ds, \tag{6}$$

Нехай $f \in C^\infty([0, T])$ така, що $f(T) = 0$. Оскільки права частина (6) і f абсолютно неперервні функції, то для них справедлива формула інтегрування частинами [1]:

$$\int_0^T f(s)\left\{ -\left(a_{ij} u^h_{x_i}, \psi^k_{x_j}\right)_0 + \left(h b_i u^h_{x_i}, \psi^k\right) \right\} ds = -\int_0^T f_t(t)\int_0^t \left\{ -\left(a_{ij} u^h_{x_i}, \psi^k_{x_j}\right)_0 + \left(h b_i u^h_{x_i}, \psi^k\right) \right\} dsdt =$$

$$= -\int_0^T f_t(t)\left\{ \left(u^h(t), \psi^k\right)_0 - \left(\varphi^h, \psi^k\right)_0 \right\} dt =$$

$$= -\int_0^T f_t(t)\left(u^h(t), \psi^k\right)_0 dt + \left(\varphi^h, \psi^k\right)_0 \left(f(T) - f(0)\right) = -\int_0^T f_t(t)\left(u^h(t), \psi^k\right)_0 dt - \left(\varphi^h, \psi^k\right)_0 f(0). \tag{7}$$

Нехай функція $g^k \in C^\infty\left(\left[0,T\right]\right), k=\overline{1,M},$ такі, що $g^k\left(T\right)=0$. Розглянемо (7) для $f=g^k$. Просумуємо (7) по k від 1 до $g^k \in C^\infty\left(\left[0,T\right]\right), k=\overline{1,M},$. Позначимо $\Phi^M\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{M}\psi^k\left(x\right)g^k\left(t\right)$. Отримуємо

$$\int_{G_T}\left\{a_{ij}u^h_{x_i}\Phi^M_{x_j}-hb_iu^h_{x_i}\Phi^M-u^h\Phi^M_s\right\}dxds=\int_G\varphi^h\left(x\right)\Phi^M\left(x,0\right)dx. \quad (8)$$

Функції $\Phi^M\left(x,t\right)$ складають щільну множину серед елементів $\overset{\circ}{W}{}^2_{1,1}\left(G_T\right)$, які дорівнюють нулю при $s=T$. Умови теореми забезпечують можливість граничного переходу в (8) по послідовностям $\left\{\Phi^M\right\}_{M=1}^{\infty}$. В результаті отримуємо (3). Лему доведено.

Теорема. Припустимо, що виконуються умови A), B), C), D). Тоді перша крайова задача для рівняння (1) не може мати двох узагальнених розв'язків.

Доведення. Припустимо, що u_1 і u_2 – два узагальнених розв'язки першої крайової задачі для (1) з $\overset{\circ}{SV}$. Тоді u_1^h і u_2^h – розв'язки задачі (3) з $\overset{\circ}{V}$. Але, як встановлено в [2], задача (3) не може мати двох різних розв'язків з $\overset{\circ}{V}$. Це означає, що для $h\in C^\infty\left(\left[0,T\right]\right)$ має місце умова $E\varepsilon\left(h\right)\left(u_1\left(x,s,\,\cdot\,\right)-u_2\left(x,s,\,\cdot\,\right)\right)=0$ на множині G_T^h повної $\left(\lambda_d\times\lambda\right)$ – міри циліндра G_T. Розглянемо множину $h\in C^\infty\left(\left[0,T\right]\right)$ всюди щільну в $L^2\left(\left[0,T\right]\right)$. Наприклад, це можуть бути многочлени з раціональними коефіцієнтами. Тоді $\left\{\varepsilon\left(h_i\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ утворює тотальну множину в $L^2\left(\Omega\right)$. Позначимо $\tilde{G}_T=\cap_{i=1}^{\infty}G_T^{h_i}$. Множина $\tilde{G}_T\subseteq G_T$ має повну $\left(\lambda_d\times\lambda\right)$ – міру циліндра G_T. Для всіх $h\in\left\{h_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ будемо мати: $E\varepsilon\left(h\right)\left(u_1-u_2\right)\Big|_{\tilde{G}_T}=0$.

З цього безпосередньо випливає, що $u_1-u_2=0$ за мірою $\lambda_d\times\lambda\times P$. Отже, u_1 і u_2 не відрізняються як елементи $\overset{\circ}{SV}$. Теорему доведено.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Богачев В. И.. Основы теории меры. Том 1, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика. // Институт компъютерных исследований. – Москва-Ижевск, 2006. – 584с.
2. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
3. Никольский С. М.. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480с.
4. Розовский Б. Л.. Эволюционные стохастические системы. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
5. Скороход А. В.. Об одном обобщении стохастического интеграла. // Теория вероятностей и применение, № 2, вып. 20, 1975. – С. 223–237.
6. Mohammed S.-E. A., Zhang T.. The substitution theorem for semilinear stochastic partial differential equations // Journal of Functional Analysis, 253:1, 2007. – P. 122–157.
7. Nualart D.. The Malliavin calculus and related topics, Springer, 1995. – 266 p.

Стаття надійшла до редколегії 05.11.14

Ильченко А., канд. физ.-мат. наук, Шовкопляс Т., канд. физ.-мат. наук,
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРЕЖЕНИЕМ

Получены условия единственности обобщенного решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с опережением.

Ilchenko O., PhD, Shovkoplyas T., PhD,
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF ANTICIPATING PARTIAL STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

Conditions for the uniqueness of the generalized solution of anticipating partial stochastic differential equations of parabolic type are obtained.

УДК 512.5

N. Golovashchuk, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
e-mail: golovash@gmail.com

INVARIANT SUBALGEBRA OF UNIVERSAL ENVELOPING ALGEBRA FOR ORTHOGONAL MATRIX LIE ALGEBRA

The structure and properties of invariant Gelfand-Zetlin subalgebra of universal enveloping algebra for the orthogonal complex Lie algebra. This algebra is considered as subalgebra of polynomials on groups of variables, depending on two indices that are invariant with respect to the action of the Weyl group. The Gelfand-Zetlin algebra is realized as some finite extension of the algebra of symmetric polynomials on groups of variables.

INTRODUCTION. The aim of this paper is to study the structure of the invariant subalgebra of the universal embedding algebra of complex orthogonal matrix Lie algebra O_n. We use Gelfand-Zetlin formal construction for orthogonal Lie algebras [1–3, 6]. We construct the orthogonal operator algebra associated with Gelfand-Zetlin formulae. The orthogonal Lie algebra

O_n is realized as operator Lie algebra on the set of tableau according to parity of n [3]. Thus sufficient to determine the action of generators of the Lie algebra O_n. The center Z of universal embedding algebra U_n [4] is generated by independent invariant operators, which can be determined by the S-theorem Poxa [3], they are Kasimir operators for O_n invariant with respect to the action of the Weyl group. The Gelfand-Zetlin approach interprets the center Z of universal embedding algebra U_n of orthogonal Lie algebra O_n as invariant Gelfand-Zetlin subalgebra Γ [4–6], and which is studied in this paper.

DEFINITIONS AND STATEMENT OF THE PROBLEM. Let K denotes the basic field of complex numbers. For $n \in N, n > 1$, we will denote by $e_{ij} \in Mat_{n\times n}(\mathrm{K})$, $1 \le i < j \le n$, the matrix units. We denote by O_n the Lie algebra of complex skew symmetric $n \times n$-matrix and call it the orthogonal matrix Lie algebra. Denote by U_n the universal embedding algebra for O_n, and by Z_n the center of U_n. The matrices $E_{ji} = e_{ji} - e_{ij}$, $1 \le i < j \le n$, form a standard generator set for O_n, and the set of matrices E_{j+1j}, $1 \le j < n$ is a minimal system of generators.

We identify O_n, $1 \le m \le n$, with an orthogonal Lie subalgebra of O_n spanned by $\left\{ e_{ji} - e_{ij} \mid 1 \le i < j \le m \right\}$. So that we have the following chain of orthogonal Lie algebras $O_1 \subset O_2 \subset \ldots \subset O_n$, embedded in the left upper corner. It induces the embeddings of the universal enveloping algebras $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n$.

We use the Gelfand-Zetlin formal construction concerning the the orthogonal Lie algebra [1, 6]. The simple finite-dimensional modules of the orthogonal Lie algebra O_{n+1} are parametrized by the vectors $m = (m_1, ..., m_p)$, $p = \left[\frac{n+1}{2} \right]$, with complex coefficients, satisfying

$$\begin{cases} m_1 \ge m_2 \ge ... \ge m_{p-1} \ge | m_p | & n = 2p, \\ m_1 \ge ... \ge m_{p-1} \ge m_p \ge 0 & n = 2p+1. \end{cases}$$

These vectors represent the highest weight of the corresponding simple module. This construction uses the notion of tableau. By a tableau, $[t]$, we mean a doubly-indexed complex vector

$$O_{2p}: \begin{matrix} t_{2p-1,j} & \cdots & \cdots & t_{2p-1,p} \\ & t_{2p-2,1} & \cdots & t_{2p-2,p-1} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & t_{1,1} \end{matrix} \qquad O_{2p+1}: \begin{matrix} t_{2p,j} & \cdots & \cdots & t_{2p,p} \\ & t_{2p-1,1} & \cdots & t_{2p-1,p} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & t_{1,1} \end{matrix}$$

The Gelfand-Zetlin formalism provides that O_{n+1} is realized as an operator Lie algebra on the set of all patterns or on the attached polynomial ring. For this, it is sufficient to determine the action of the generators E_{ji} of O_{n+1}. We denote

$$\begin{cases} l_{2p,j} = t_{2p,j} + p - j + 1/2, \\ l_{2p-1,j} = t_{2p-1,j} + p - j, \end{cases} j = 1, ..., p. \tag{1}$$

The following lemma summarizes the results [2,3].

Lemma 1. In terms of variables $l_{2p,1}, \ldots, l_{2p,p}$ (1), any element of the Weyl group W_{2p+1} for O_{2p+1} can be represented as a product of permutation of these variables and of an arbitrary number of inversions of a type:

$$\varepsilon_{2p,j} : \begin{cases} l_{2p,j} \mapsto -l_{2p,j}, \\ l_{2p-1,k} \mapsto l_{2p-1,k}, k \ne j. \end{cases}$$

The center Z_{2p+1} of universal enveloping algebra U_{2p+1} is generated by the symmetric polynomials of even order $z_k = \sum_{j=1}^{p} l_{2p,j}^k, k \in 2\mathrm{N}$. Let $\mathrm{Z}_2^p = \left\langle \varepsilon_{2p,1} \right\rangle \times ... \times \left\langle \varepsilon_{2p,p} \right\rangle$, $\varepsilon_{2p,j}^2 = 1, j = 1, ..., p$ be an elementary 2-group. The symmetric group Sym_p acts on Z_2^p by the permutation of components. Then the Weyl group W_{2p+1} of odd orthogonal Lie algebra O_{2p+1} as an abstract group is isomorphic to the semi direct product Sym_p та Z_2^p.

Lemma 2. In terms of variables $l_{2p-1,1}, \ldots, l_{2p-1,p}$ (1), any element of the Weyl group W_{2p} for O_{2p} can be represented as a product of permutation of these variables and of an arbitrary number of inversions of a type:

$$\varepsilon_{2p-1,i}\varepsilon_{2p-1,j} : \begin{cases} l_{2p-1,i} \mapsto -l_{2p-1,i}, \\ l_{2p-1,j} \mapsto -l_{2p-1,j}, \\ l_{2p-1,k} \mapsto l_{2p-1,k}, k \ne i, j. \end{cases}$$

The center Z_{2p} of universal enveloping algebra U_{2p} is generated by the product $pl_{2p-1,1...}l_{2p-1,p}$ and by the symmetric polynomials of even order of a type $z_k = \sum_{j=1}^{p} l_{2p-1,j}^k, k \in 2\mathrm{N}$.

Let $\varphi : Z_2^p \to \{\pm 1\}$ be a canonical epimorphism. We denote by E_p the sub group $Ker\varphi$ of index 2 in Z_2^p, i.e. $\varphi(\varepsilon)=1$ if and only if ε contains even number of non unit components. We denote $W_{2p}^{'}$ the semi direct product of groups Sym_p and Z_2^p. The Weyl group W_{2p} of even orthogonal Lie algebra O_{2p} as an abstract group is isomorphic to the semi direct product of groups Sym_p and E_p, it is a sub group of index 2 in $W_{2p}^{'}$.

METHODS. We fix some integer positive n and define the action of the Weyl group $W = W_{n+1}$ on the polynomial ring Λ. For any m, we put $p(m) = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ and $c_m = 1$ if m is even, $c_m = 0$ for m odd. Let $p = p(m)$, we consider the following numbers:

$$N_{[1;n)} = \sum_{m=1}^{n-1} p(m) \text{ i } N_{[1;n]} = \sum_{m=1}^{n} p(m) = N_{[1;n)} + p .$$

Then $N_{[1;n)} + N_{[1;n]} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. We denote by $J_m = [1; p(m)]$ an integer interval, and we indicate the following index sets: $J_{[1;n)} = \{mj\}_{m\in[1;n), j\in J_m}$, $J_{[1;n]} = \{mj\}_{m\in[1;n], j\in J_m}$. Then $\left|J_{[1;n)}\right| = N_{[1;n)}$ i $\left|J_{[1;n]}\right| = N_{[1;n]}$.

Let $\Lambda_m = \mathrm{K}\left[\{\lambda_{mj}\}_{j\in J_m}\right]$ be the polynomial K-algebra in $p(m)$ variables, denote by Λ the polynomial K-algebra $\Lambda = \mathrm{K}\left[\Lambda_1,\ldots,\Lambda_n\right]$ in $N_{[1;n]}$ variables, where

$$\begin{cases} \lambda_{2q,j} &= l_{2q,j} + 1/2 &= t_{2q,j} + q + 1 - j, & 2q \le n; \\ \lambda_{2q-1,j} &= l_{2q-1,j} &= t_{2q-1,j} + q - j, & 2q-1 \le n; \end{cases}$$

or, equivalently, $\lambda_{mj} = t_{mj} + \left[\dfrac{m}{2}\right] + 1 - j$, $j \in [1; p(m)]$.

For any $m, q = p(m)$, let Z_2^q be a 2-group defined above, and let $E_m = Z_2^q$ for m even, E_m be a sub group of index 2 in Z_2^q for m odd. Thereafter, we consider the transformation groups acting on the m-th level: the symmetric group S_m, and the groups $G_m = S_m \propto Z_q^2$, $W_m = S_m \propto E_m$ with $\propto$ be a semi-direct product. We have the following groups acting on Λ: $S = \prod_{m\in[1;n]} S_m$, $E = \prod_{m\in[1;n]} E_m$, $G = \prod_{m\in[1;n]} G_m = S \propto \prod_{m\in[1;n]} Z_2^q$, $W = \prod_{m\in[1;n]} W_m = S \propto E$. Under the construction, Weyl group of the orthogonal group O_{n+1} is isomorphic to W.

We determine the action of G and W on Λ. The group S acts naturally by the permutations on the variables having the same first index. The involution $\varepsilon_{mj} \in E_m$ is given by the formulae $\begin{cases} \lambda_{mj}^{\varepsilon_{mj}} &= \overline{\lambda}_{mj}, \\ \lambda_{ki}^{\varepsilon_{mj}} &= \lambda_{ki}, \quad ki \ne mj, \end{cases}$ with

$$\overline{\lambda}_{mj} = c_m - \lambda_{mj} = \begin{cases} -\lambda_{mj}, & c_m = 0, \\ 1-\lambda_{mj}, & c_m = 1, \end{cases}$$

be the conjugate element for λ_{mj} in Λ. For m odd, any generator $\varepsilon_{mj}\varepsilon_{mk}$ of E_m acts on Λ as a composition.

We establish some useful identities in Λ. For any $i, j \in J_m$, there holds $\lambda_{mj} + \overline{\lambda}_{mj} = \lambda_{mi} + \overline{\lambda}_{mi} (= c_m)$. Equality

$$\lambda_{mj} + \overline{\lambda}_{mj} + \lambda_{ki} + \overline{\lambda}_{ki} = c_m + c_k = 1.$$

hold for all $m, k \in [1; n]$ provided $|m-k| = 1$.

For any $m \le n$ and any $j \in J_m$, introduce a new variable $\gamma_{mj} = \lambda_{mj}\overline{\lambda}_{mj}$. The action of the group G is transferred to this variables in the natural way while E acts identically. We denote by $\Gamma_m^s = Sym\left[\{\gamma_{mj}\}_{j\in J_m}\right] = \mathrm{K}\left[\{\gamma_{mj}\}_{j\in J_m}\right]^{S_m}$ the K-algebra of symmetric polynomials in q variables $\{\gamma_{mj}\}_{j\in J_m}$. Given $0 \le k \le q = p(m)$ we denote by $\sigma_k^{(m)} = e_k(\gamma_{m1},\ldots,\gamma_{mq})$ the k-th elementary polynomial with $\sigma_0^{(m)} = 1$. Then $\Gamma_m^s = \mathrm{K}\left[\{\sigma_k^{(m)}\}_{k\in[1;q]}\right]$ is an algebra of symmetric polynomials.

Given $m = 2q-1$, we define the product $\lambda_{(2q-1)} = \lambda_{2q-1,1}\ldots\lambda_{2q-1,q} \in \Lambda_m^{G_m}$. Then $(\lambda_{(2q-1)})^2 = \prod_{j=1}^{q} \gamma_{2q-1,j} \in \Gamma_{2-1}^s$. We set $\gamma_{(2q-1)} = \gamma_{2q-1,1}\ldots\gamma_{2q-1,q} = \sigma_q^{(m)} \in \Gamma_m^s$.

Here are some statements from the theory of symmetric polynomials. For some set of variables $\{x_1,\ldots,x_r\}$ consider the ring of symmetric polynomials $Sym_r = Sym(x_1,\ldots,x_r) = \mathrm{K}[x_1,\ldots,x_r]^{S_r}$, the symmetric group S_r acts naturally by permutation of variables.

We denote by $s_{r,t} = s_{r,t}(x_1,\ldots,x_r)$ t-th elementary symmetric polynomial of the first r variables, $1 \le t \le r \le q$. We assume $s_{r,0} = 1$ і $s_{r,t} = 0$ for $t > r$. Then $Sym_r = \mathrm{K}[s_{r,1},\ldots,s_{r,r}]^{S_q}$. Let $Sym_r^{'} \subset Sym_r$ denotes the sub-ring of symmetric polynomials over K, generated by the elementary polynomials $s_{r,t}$, $t = 1,\ldots,r-1$.

Lemma 3. Let $1 \le r \le q$. Then for any $0 \le t \le q$ the following holds: $s_{r-1,t} = \sum_{k=0}^{t} (-1)^k x_r^k s_{r,t-k}$. In particular, there is equality $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k x_r^k s_{r,t-k} = 0.$

Proof. We prove the first equality by induction on $t > 0$. It is true for $t = 1$ and $r > t$, because $s_{r-1,1} = s_{r,1} - x_r s_{r-1,0}$. For $t > 1$, we have: $s_{r-1,t} = s_{r,t} - x_r s_{r-1,t-1} = s_{r,t} - x_r \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^k x_r^k s_{r,t-k-1} = s_{r,t} + x_r \sum_{l=1}^{t} (-1)^l x_r^l s_{r,t-l} = \sum_{l=0}^{t} (-1)^l x_r^l s_{r,t-l}$. The statement of Lemma 3 is obtained by substitution $t = r$.

RESULTS. We set $\Gamma_{2q} = \Gamma_{2q}^s$, $2q \le n$. For $2q-1 \le n$, we denote by Γ_{2q-1} the subalgebra in Λ_{2q-1}, generated by Γ_{2q-1}^s and $\lambda_{(2q-1)}$. Then $\Gamma_{2q-1}^s \subset \Gamma_{2q-1}$ is a square extension. The constructed Γ_{2q} and Γ_{2q-1} are the polynomial subalgebras in q variables.

Lemma 4. For any $m \in [1;n]$ the center Z_{m+1} of universal embedding algebra U_{m+1} is a subalgegra $\Gamma_m \subset \Lambda_m$.

Proof. Let $m = 2q$. For any j we obtain: $\gamma_{2q,j} = \lambda_{2q,j}\overline{\lambda}_{2q,j} = (l_{2q,j} + 1/2)(-l_{2q,j} + 1/2) = 1/4 - l_{2q,j}^2$. Therefore, $z_{\ 2k} = \sum_{j=1}^{q} l_{2q,j}^{2k} = \sum_{j=1}^{q} (1-\gamma_{2q,j})^k$ is a symmetric polynomial on $\gamma_{2q,1},\ldots,\gamma_{2q,q}$. The proof in this case follows from Lemma 1.

Similarly, for the case $m = 2q-1$, using Lemma 2, we obtain, that the center Z_{2q} is generated by the symmetric polynomials in variables $\gamma_{2q-1,1},\ldots,\gamma_{2q-1,q}$ and by the polynomial $\lambda_{(2q-1)}$. Besides, $\lambda_{(2q-1)}^2 = (-1)^q \prod_{j=1}^{q} \gamma_{2q-1,j}$ because $\prod_{j=1}^{q} \lambda_{2q-1,j} = (-1)^q \prod_{j=1}^{q} \overline{\lambda}_{2q-1,j}$.

By the definition, the Gelfand-Zetlin subalgebra $\Gamma \subset U_{n+1}$ is generated by all centers Z_{m+1} for $m \in [1;n]$. By the construction, Γ is a commutative integral domain, generated by all Γ_m. Let $\Gamma^s \subset \Gamma$ be a subalgebra, generated by all Γ_m^s, $m \in [1;n]$.

Лема 5. Following identities are valid: $\Gamma = \Lambda^W$ and $\Gamma^s = \Lambda^G$.

Proof. Obviously, $\Gamma^s \subset \Lambda^G$. We prove the opposite inclusion by induction on n. Let $\Lambda_{[1;n)} \subset \Lambda$ be a sub ring in the variables λ_{mj}, $m \in [1;n)$, and $\Gamma_{[1;n)} \subset \Gamma$ be a subalgebra, generated by all Γ_m, $m \in [1;n)$. By assumption of induction, $\Lambda_{[1;n)}^G = \Gamma_{[1;n)}^s$.

It is easy to see that $\Lambda^G \subset \Lambda_{[1;n)}^G[\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{np}] = \Gamma_{[1;n)}[\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{np}]$ where $p = p(n)$. Suppose that some $a \in \Lambda^G \setminus \Gamma_{[1;n)}$ depends on the variable λ_{nj}. Then there exists a polynomial $b(t) \in \Gamma_{[1;n)}[\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{np-1}][t]$ such that $a = b(\lambda_{nj})$. According to the assumption, $b(\overline{\lambda}_{nj}) = a^{\varepsilon_{nj}} = b(\lambda_{nj})$. Note that the polynomial $b(\overline{\lambda}_{nj}) + b(\lambda_{nj})$ is symmetric with respect to two variables $\overline{\lambda}_{nj}, \lambda_{nj}$, and thus depends on $\overline{\lambda}_{nj}\lambda_{nj} = \gamma_{nj}$ and $\overline{\lambda}_{nj} + \lambda_{nj} = c_n \in \mathrm{K}$. Hence, $a = b(\gamma_{nj})$ for some $b(t) \in \Gamma_{[1;n)}[\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{np-1}][t]$. From this we obtain the following inclusion: $b(t) \in \Gamma_{[1;n)}[\gamma_{n1},\ldots,\gamma_{np-1}][t]$.

From the theory of symmetric polynomials, it follows that every polynomial $a \in \Gamma_{[1;n)}[\gamma_{n1},\ldots,\gamma_{np}]$ can be presented as a polynomial $a = b(\gamma_{nj}) \in \Gamma^s[\gamma_{nj}]$ for some $j \in [1;p]$ of degree less than p, and this presentation is unique. Because $a^{\pi_{ni,nj}} = a$ with $\pi_{ni,nj}$ be a transposition, this means that the polynomial $b(t)$ has at least p roots $\gamma_{n1},\ldots,\gamma_{np}$, contrary to the assertion that the power does not exceed p. With the proven $a \in \Gamma^s$, from where we obtain the inclusion $\Lambda^G \subset \Gamma^s$.

Now we assume $\Lambda_{[1;n)}^W = \Gamma_{[1;n)}$ and show that $\Gamma = \Lambda^W$. It is trivial for n even. If n is odd, then $\Gamma^s = \Lambda^G \subset \Lambda^W$ because $W \subset G$. Note that $\Gamma^s[\gamma_{n1},\ldots,\gamma_{np}]^G = \Gamma^s[\gamma_{n1},\ldots,\gamma_{np}]^G = \Gamma^s$. Therefore, any element $F \in \Lambda^W$ can be represented as $a \in \Gamma^s[\lambda_{n1},\ldots,\lambda_{np}]$, moreover the degree of any λ_{nj} is not more than 1, while for n odd, there is $\lambda_{nj}^2 = -\gamma_{nj}$. Hence, if F has a factor $c\lambda_{nj}$, then $c\lambda_{nj} = c'\lambda_{ni}$ for any i, because $a^{\pi_{ni,nj}} = a$. From this we obtain $a = a'\lambda_{ni}$ with $a' \in \Gamma^s$. The proof is complete.

Consider the orthogonal Lie algebra O_{n+1} and its universal embedding algebra U_{n+1}. The corresponding polynomial K -algebra Λ and the Gelfand-Tsetlin algebra are defined above. We denote by F the field of fractions of Γ, and by L the field of fractions of Λ. The action of the group W on F and L is determined by the action of W on Λ. By the Lemmas 3 and 4, we obtain the following theorems.

Theorem 1. The natural monomorphism $\Gamma \to \Lambda$ can be extended to an embedding of the fields $K \to L$. The subalgebra $\Gamma = \Lambda^W$ is a Galois order in the sense of [5], $L^W = K$ and $G = G(L/K)$ is a Galois group of the field extension $K \subset L$. Besides, the global dimension of Γ equals $N_{[1;n]}$.

Theorem 2. $\Gamma^s = \Lambda^G$ is a ring of multi symmetric polynomials in groups of variables $\left\{ \gamma_{mj} \mid j \in J_m \right\}_{m\in[1;n]}$, and F^s is a field of fractions of Γ^s. Then $F \supset F^s$ is an extension of fields of degree $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$. Moreover, $F = F^s[t_1, t_3, \ldots, t_k]/J$, where k is a maximal odd integer less or equal $n+1$, an ideal J is generated by $t_r^2 - \sigma_r^{p(r)}$, $r = 1,3,\ldots,k$.

CONCLUSIONS. There is considered an invariant subalgebra Γ of universal embedding algebra U_n of complex orthogonal matrix Lie algebra O_n. Were introduced new variables, in terms of which Γ is a subalgebra of polynomial algebra, which is invariant under the action of Weyl group W. We describe algebra Γ as subalgebra of the algebra of symmetric polynomials in groups of variables.

REFERENCES

1. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы ортогональных матриц / И. М.Гельфанд, М. Д.Цетлин // ДАН СССР, 1950, т. 71, № 5, с. 1017–1020.
2. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их преставления / Д. П. Желобенко // Наука, Москва, 1970. – 350с.
3. Barut A. O., Raczka R. Theory of group representations and applications / A. O. Barut, R. Raczka // PWN – Polish Scientific Publisher, Warsaw, 1977. – 736 c.
4. Drozd Yu., Ovsienko S., Futorny V. Harish – Chandra sublgebras and Gelfand Zetlin modules / Yu. Drozd, S. Ovsienko,V. Futorny // In: "Finite dimensional algebras and related topics", NATO ASI Ser. C., Math. and Phys. Sci.. – 1994. – 424, c. 79–93.
5. Futorny V., Ovsienko S. Galois orders in skew monoid rings / Ovsienko,V. Futorny // Journal of Algebra; V. 324, Issue 4. – 2010, p. 598–630.
6. Gelfand I. M., Kirillov A. A. Sur les corps lies cor aux algebres enveloppantes des algebres de Lie. / Gelfand I. M., Kirillov A. A. // Publ. Inst. Hautes Sci. – 1966. – V 31, p. 5–19.

Стаття надійшла до редколегії 04.11.14

Головащук Н., канд. фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ІНВАРІАНТНА ПІДАЛГЕБРА УНІВЕРСАЛЬНОЇ ОБГОРТУЮЧОЇ АЛГЕБРИ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНОЇ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ ЛІ

Досліджено структуру та властивості інваріантної підалгебри Гельфанда-Цетліна універсальної обгортуючої алгебри для ортогональної комплексної алгебри Лі. Ця під алгебра розглядається як під алгебра алгебри поліномів від груп змінних, залежних від двох індексів, яка є інваріантною відносно дії групи Вейля. В роботі показано, що під алгебра Гельфанда-Цетліна реалізується як деяке скінчене розширення алгебри симетричних поліномів від груп змінних.

Головащук Н., канд. физ.-мат. наук, ст. наук. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИНВАРИАНТНАЯ ПОДАЛГЕБРА УНИВЕРСАЛЬНОЙ ОБЕРТЫВАЮЩЕЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Исследованы структура и свойства инвариантной подалгебры Гельфанда-Цетлина универсальной обертывальной алгебры для ортогональной комплексной алгебры Ли. Эта под алгебра рассматривается как под алгебра полиномов от групп переменных, зависящих от двух индексов, которая является инвариантной относительно действия группы Вейля. Алгебра Гельфанда-Цетлина реализуется как некоторое конечное расширение алгебры симметричных полиномов от групп переменных.

УДК 512.552.1

V. Stepukh, postgraduate stud.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv
e-mail: *svvhelios@gmail.com*

ANNIHILATOR SUBALGEBRAS IN LIE ALGEBRAS OF DERIVATIONS

Let K be an algebraically closed field of characteristic zero and K(x₁ , …, xₙ) be the field of rational functions. The set Ann(S) of all K-derivations of K(x₁ , …, xₙ) which annihilate a set S ⊆ K(x₁ , …, xₙ) is a subalgebra of the Lie algebra Wₙ(K). The structure of the subalgebra Ann(S) is connected with centralizers of elements of Wₙ(K). A characterization of the subalgebra Ann(S) is given, some sets of generators of Ann(S) are pointed out in the Lie algebra of all K-derivations of the polynomial ring K[x₁ , …, xₙ].

INTRODUCTION. Let K be an algebraically closed field of characteristic zero and $R = K(x_1,...,x_n)$ be the field of rational functions in *n* variables. The set $Der_K R$ of all K-derivations of R, i.e K-linear operators D on the field R satisfying the Leibniz's rule: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ for all $f, g \in R$ is a Lie algebra over K and a vector space over R in a natural way: if we take $f \in R, D \in Der_K R$, the derivation fD sends any element $g \in R$ to $fD(g)$. The structure of the Lie algebra $Der_K R$ is of great interest because one can consider derivations as vector fields on geometric objects. If we take any element $D \in Der_K R$ then D can be written in the form:

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}, f_i \in R,$$

and D is a vector field with rational coefficients. Such Lie algebras were studied by many authors (see, for example [1], [2], [3]). If we take any set $S \subseteq R = K(x_1,...,x_n)$, then one can pose a question about the structure of the annihilator $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S) = \{D \in \widetilde{W}_n(K) \mid D(s) = 0 \ for\ all\ s \in S\}$ (here $\widetilde{W}_n(K) = Der_K R$). This subset $Ann(S) \subseteq \widetilde{W}_n(K)$ is obviously a subalgebra of $\widetilde{W}_n(K)$ and a subspace of the R-space $\widetilde{W}_n(K)$. We point out explicitly a basis (over R) of $Ann(S)$ (see Theorem 1). Note that the annihilator $Ann(S)$ is contained in a larger subalgebra $N \subseteq \widetilde{W}_n(K)$, which consists of all derivations D of R such that $D(K(S)) \subseteq K(S)$ where $K(S)$ is the subfield of R generating by the set S and by the subfield K. We give also the basis of N over R. These results are applied to the Lie algebra $W_n(K)$ of all derivations of the polynomial ring $K[x_1,...,x_n]$. Here we consider systems of generators over $K[x_1,...,x_n]$ since $Ann_{W_n(K)}(S)$ is a submodule of the free $K[x_1,...,x_n]$-module $W_n(K)$ (Theorem 2).

We use standard notations, the ground field is denoted by K and is algebraically closed of characteristic zero. Recall that a polynomial *g* is a slice for a derivation $D \in W_n(K)$ if $D(g) = 1$.

ANNIHILATORS OF SETS OF RATIONAL FUNCTIONS. The next two lemmas contain some preliminary results used in the sequal.

Lemma 1. Let $D_1, D_2 \in \widetilde{W}_n(K)$ and $a, b \in R$. Then

1) $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1$;

2) If in addition $a, b \in KerD_1 \cap KerD_2$ then $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2]$.

Lemma 2. Let D be a K-derivation of the field $K(x_1,...,x_n)$ and F be an algebraic extension of $K(x_1,...,x_n)$. Then there exists a unique extension $\overline{D}$ of D on F, i.e. such a derivation of F that $\overline{D}|_{K(x_1,...,x_n)} = D$

Lemma 3. Let S be a subset of $K(x_1,...,x_n)$ and $K(S)$, the subfield generated by K and S in $K(x_1,...,x_n)$. If $\overline{K(S)}$ is the algebraic closure of $K(S)$ in $K(x_1,...,x_n)$ then:

1) $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S) = Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(K(S)) = Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(\overline{K(S)})$;

2) $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$ is a subalgebra of $\widetilde{W}_n(K)$ and a vector-space over R of dimension $m = n - tr.\deg_K K(S)$;

3) If in addition $m \geq 1$ then the Lie algebra $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$ is simple.

Proof. 1) Every K-derivation $D \in \widetilde{W}_n(K)$ annihilating the set S annihilates obviously the subfield $K(S)$. Since the subfield $\overline{K(S)}$ is an algebraic extension of $K(S)$ then every derivation of R annihilating $K(S)$ annihilates also $\overline{K(S)}$ by the Lemma 2. Therefore $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(\overline{K(S)}) = Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(K(S))$. The converse inclusion is obvious, so we have $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(K(S)) = Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(\overline{K(S)})$.

2) Let $k = tr.\deg_K K(S)$ and $y_1,...,y_k$ be a transcendence basis for $K(S)$ over K (the elements $y_1,...,y_k$ can be chosen from the set S). Take a complement of the set $\{y_1,...,y_k\}$ to a transcendence basis of the field $K(x_1,...,x_n)$ consisiting of arbitrarily chosen elements $y_{k+1},...,y_s$ and consider the derivations $\frac{\partial}{\partial y_i}, i = 1,...,n$, of the subfield $K(y_1,...,y_n)$ of the field $R = K(x_1,...,x_n)$. Let us extend the derivations $\frac{\partial}{\partial y_i}, i = 1,...,n$, to the derivations of the field $K(x_1,...,x_n)$ using Lemma 2, and save the same notations.

Then $\frac{\partial}{\partial y_{k+1}},...,\frac{\partial}{\partial y_n}$ annihilate obviously the subfield $K(S)$ (because $\frac{\partial}{\partial y_i}(y_j) = 0, i = k+1,...,n, j = 1,...,k$). Therefore $R\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} + \ldots + R\frac{\partial}{\partial y_n} \subseteq Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$. Let us show that the latest inclusion is equality. Take any $D \in Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$. Then D can be written in the form:

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + f_k \frac{\partial}{\partial y_k} + f_{k+1} \frac{\partial}{\partial y_{k+1}} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

for some $f_i \in K(x_1,...,x_n)$ (because the derivations $\frac{\partial}{\partial y_1},...,\frac{\partial}{\partial y_n}$ are linearly independent over $K(x_1,...,x_n)$).

Since $f_{k+1}\frac{\partial}{\partial y_{k+1}} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial y_n} \in Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$, we see that $D_1 = f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + f_k \frac{\partial}{\partial y_k} \in Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$.

The obvious equalities $D_1(y_i)=0, i=1,...,k$ imply $f_i=0$, i.e. $D_i=0$ (by the equality $\frac{\partial}{\partial y_i}(y_j)=\delta_{ij}$). Hence $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)=R\frac{\partial}{\partial y_1}+...+R\frac{\partial}{\partial y_n}$.

3) Let $m=n-k\ge 1$. We have by the above proven

$$Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)=R\frac{\partial}{\partial y_1}+...+R\frac{\partial}{\partial y_n},$$

i.e. the subalgebra $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$ is a vector space of dimension $m\ge 1$ over R. Let I be a nonzero proper ideal of $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$. Then I contains a nonzero ideal J which is a vector space over R. The latter is impossible because of results of the paper [4].

Let S be a non-empty subset of $K(x_1,...,x_n)$ and $\{y_1,...,y_k\}$ be a maximal algebraically independent over K subsystem of S. We can assume without loss of generality that $S=\{y_1,...,y_k\}$ because $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)=Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(\{y_1,...,y_k\})$ by the previous lemma. Complement the set S to a transcendental basis $\{x_1,...,x_{n-k},y_1,...,y_k\}$ of the field $K(x_1,...,x_n)$ over K (it is possible after renumbering of variables). Denote by J_{S,x_i} the jacobian derivation of the subfield $K(x_1,...,x_{n-k},y_1,...,y_k)$ defined by the rule: $J_{S,x_1}(h)=\det J(x_1,...,x_{i-1},h,x_{i+1},...,x_{n-k},y_1,...,y_k), i=1,...,n-k$, where the latter determinant is as following:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & ... & ... & \frac{\partial h}{\partial y_k} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Extend these derivations on the whole field $K(x_1,...,x_n)$ (it is possible by Lemma 2) and save the same notations for them. Denote by $\Delta=\det J(x_1,...,x_{n-k},y_1,...,y_k)$.

Lemma 4. The derivations $J_{S,x_i}, i=1,...,k$, are linearly independent over $K(x_1,...,x_n)$ and each of them contains the subfield $\overline{K(S)}$ in its kernel and the derivation $J_{S,y_i}\bullet\frac{1}{\Delta}$ maps the subfield $\overline{K(S)}$ into itself.

Proof. Assume that $f_1J_{S,x_1}+...+f_{n-k}J_{S,x_{n-k}}=0$ for some $f_i\in R$. Since $J_{S,x_i}(x_i)\neq 0$ (because this is the jacobian of algebraically independent over K rational functions $x_1,...,x_{n-k},y_1,...,y_k$) and $J_{S,x_i}(x_j)=0, i\neq j$, we get $f_1=0,...,f_{n-k}=0$ and therefore $J_{S,x_1},...,J_{S,x_{n-k}}$ are linearly independent over R. Further $J_{S,x_i}(y_j)=0$ for $j=1,...,k$ and $i=1,...,n-k$ and therefore $K(S)\subseteq KerJ_{S,x_i}, i=1,...,n-k$. But then $\overline{K(S)}\subseteq KerJ_{S,x_i}$ by Lemma 2 .

The derivation $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_i}$ agrees on $K(y_1,...,y_k)$ with the derivation $\frac{\partial}{\partial y_i}$. So $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_i}$ maps $K(y_1,...,y_n)$ into itself. By Lemma 2 the derivation $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_i}$ can be uniquely extended on the algebraic closure $\overline{K(S)}$ of the subfield $K(S)$ in R and hence $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_i}$ maps $\overline{K(S)}$ into itself.

Remark. The derivations $\frac{1}{\Delta}J_{S,x_i}$ and $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_j}$ can be easily written in the standard basis $\{\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\}$ of the field $K(x_1,...,x_n)$ in the form $J_{S,x_1}=f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+...+f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, where $f_i\in K(x_1,...,x_n)$. The coefficients are minors of order $n-1$ of the determinant (1)

Theorem 1. Let K be a field, S be a subset of the field $K(x_1,...,x_n)$ of rational functions and $y_1,...,y_k$ be a maximal set of algebraically independent over K elements of S. Then the annihilator $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$ is a vector space over $K(x_1,...,x_n)$ with the basis $J_{S,x_1},...,J_{S,x_{n-k}}$. The set N_1 of all elements of $\widetilde{W}_n(K)$ which map $K(S)$ into itself is a semidirect sum $N_1=M\times Ann_{W_n(K)}(S)$ where M is a subalgebra of $\widetilde{W}_n(K)$ with the basis $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_1},...,\frac{1}{\Delta}J_{S,y_k}$.

Proof. As $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_i}(y_i)=1, J_{S,y_i}(y_j)=0, i\neq j$, we see that $\frac{1}{\Delta}J_{S,y_1},...,\frac{1}{\Delta}J_{S,y_k}$ are linearly independent over R.

Every derivation J_{S,y_i} maps $\overline{K(S)}$ into itself by Lemma 4. Denote by *M* the subalgebra $M=\overline{K(S)}J_{S,y_1}+...+\overline{K(S)}J_{S,y_k}$ of the Lie algebra $\widetilde{W}_n(K)$. It can be easily shown that $Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$ is an ideal of the Lie algebra N_1. Take any element $D\in N_1$. Then

$D(y_i)=f_i$ for some $f_i\in\overline{K(S)}$ and $(D-\sum_{i=1}^{k}f_iJ_{S,y_i})(y_i)=0$ for all $i=1,...,k$. But then $D-\sum_{i=1}^{k}f_iJ_{S,y_i}\in Ann_{\widetilde{W}_n(K)}(S)$ and therefore $N_1=M\times Ann_{W_n(K)}(S)$ the semidirect sum of the subalgebra M and the ideal $Ann_{W_n(K)}(S)$ (it is obvious that the intersection of these subalgebras of N_1 is zero).

Example. Consider more detailed the case $tr.\deg_K K(S)=1$. We can assume without loss of generality that $S=\{y_1\}$. The annihilator of the subset S consists of linear combinations over R of the derivations $J_{S,x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,...,n-1$. The subalgebra M is of the form $M=\overline{K(y_1)}(\frac{\partial y_1}{\partial x_n})^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}$.

ANNIHILATORS OF RATIONAL FUNCTIONS IN THE LIE ALGEBRA $W_n(K)$**.** We will denote by $W_n(K)$ the Lie algebra of all K-derivations of the polynomial ring $K[x_1,...,x_n]$. It consists of the derivations of the form $D=f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+....+f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$, $f_i\in K[x_1,...,x_n]$. The Lie algebra $W_n(K)$ is contained in $\widetilde{W}_n(K)$ and $W_n(K)$ is a free $K[x_1,...,x_n]$-module. This Lie algebra acts naturally on $K(x_1,...,x_n)$ and we consider annihilators of elements of $K(x_1,...,x_n)$ in the subalgebra $W_n(K)$. If $\varphi\in K(x_1,...,x_n)$ then $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ is a submodule of the module $W_n(K)$ over the ring $K[x_1,...,x_n]$. We point out generators of $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ in some cases.

Lemma 5. Let $\varphi\in K(x_1,...,x_n)$ and $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ be the annihilator of φ in $W_n(K)$. Then:

1) $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ is a submodule of rank $n-1$ of $W_n(K)$;

2) If in addition $n=2$, then the $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ is a free submodule of rank 1 of $W_2(K)$.

Proof. 1) See Lemma 4.
2) See [3].

Lemma 6. Let $D=\sum_{i=1}^{n}p_i\frac{\partial}{\partial x_i}\in W_n(K)$ with $p_i\in K[x_1,...,x_n]$ and $D(\varphi)=0$ for some $\varphi\in K(x_1,...,x_n)$. Then the derivations $D_j^{(i)}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}, i,j=1,...,n, i\neq j$, satisfy the equality $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_jD_j^{(i)}=(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})D$.

Proof. It is obvious that $D_j^{(i)}(\varphi)=0$ for $i,j=1,...,n$. Further we have

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_jD_j^{(i)}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_j\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

The latter sum can be written in the form

$$\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial}{\partial x_j}+p_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}-p_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}=\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)D,$$

since $\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=D(\varphi)=0\cdot$

Theorem 2. Let $\varphi=\frac{u}{v}\in K(x_1,...,x_n)$ be such a rational function with coprime polynomials u,v that there exist polynomials $f_1,...,f_n$ with $f_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+....+f_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=\frac{1}{v^2}$. Then $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ is a submodule of rank $n-1$ over $K[x_1,...,x_n]$ with generators $\overline{D}_j=\sum_{i=1,i\neq j}^{n}f_iD_j^{(i)}, j=1,...,n$, where $D_j^{(i)}=\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)v^2$

Proof. Take any derivation $D\in Ann_{W_n(K)}(\varphi)$, let $D=p_1\frac{\partial}{\partial x_1}+....+p_n\frac{\partial}{\partial x_n}, p_i\in K[x_1,...,x_n]$. Consider the derivation $D_j^{(i)}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$. Since $D(\varphi)=0$ then by Lemma 6 it holds $\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_jD_j^{(i)}=(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})D, i=1,...,n$. Multiply both sides of these equalities by f_i and add them. Then we obtain in the right hand side $\sum_{i=1}^{n}f_i(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i})D=-\frac{1}{v^2}D$. The left hand side is of the form $\sum_{i=1}^{n}f_i\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n}p_jD_j^{(i)}\right)=\sum_{j=1}^{n}p_j\left(\sum_{i=1,i\neq j}^{n}f_iD_j^{(i)}\right)$. Denote $\tilde{D}_j=\sum_{i=1,i\neq j}^{n}f_iD_j^{(i)}v^2$. Then we get $-D=\sum_{j=1}^{n}p_j\tilde{D}_j$. It follows from this equality that $Ann_{W_n(K)}(\varphi)$ has generators $\tilde{D}_1,...,\tilde{D}_n$. It can be easily shown that $\tilde{D}_1,...,\tilde{D}_n\in W_n(K)$.

Corollary 1. Let f be a polynomial from the polynomial ring $K[x_1,...,x_n]$. If the ideal of $K[x_1,...,x_n]$ generated by the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_1},...,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ coincides with $K[x_1,...,x_n]$, then the annihilator $Ann_{W_n(K)}(f)$, can be generated by *n* generators.

Corollary 2. If a polynomial $f \in K[x_1,...,x_n]$ is a slice for a derivation $D \in W_n(K)$, then $Ann_{W_n(K)}(f)$ can be generated by *n* elements.

Corollary 3. Let $f \in K[x_1,...,x_n]$ be such a polynomial that at least one of the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i=1,...,n$ is a nonzero constant. Then $Ann_{W_n(K)}(f)$ is a free submodule of $W_n(K)$ of rank $n-1$.

REFERENCES
1. Petravchuk A. P., Iena O. G. On closed rational functions in several variables, Algebra and Discrete Mathematics. – 2007, – no. 2., P. 115–124..
2. Lysenko S. V., Petravchuk A. P., Stepukh V. V., Centralizers of elements in Lie algebras of derivations, Book of abstracts of the International Algebraic Conference dedicated to 100tr anniversary of L.A.Kaluzhnin July 7–12, 2014 Taras Shevchenko National University of Kyiv 2014, – p. 59.
3. Makedonskiy Ie. O., Petravchuk A. P., Stepukh V. V. On centralizers of elements in the Lie algebra W2(K); Науковий часопис НПУ ім. Драгоманова. 14, – 2013, c. 24–30.
4. Jordan D. A. On the ideals of a Lie algebra of derivations. J. London Math. Soc. (2), 33, (1986), no.1, p. 33--39.

Стаття надійшла до редколегії 04.03.15

Степух В., асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

АНУЛЯТОРНІ ПІДАЛГЕБРИ В АЛГЕБРАХ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ

Нехай K алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і K(x₁ , …, xₙ) - поле раціональних функцій від n змінних. Множина Ann(S) всіх K-диференціювань K(x₁ , …, xₙ), яка анулює підмножину S ⊆ K(x₁ , …, xₙ) є підалгеброю алгебри Лі Wₙ(K). Структура підалгебри Ann(S) пов'язана з централізаторами елементів в Wₙ(K). Дано характеризацію підалгебри Ann(S), вказано систему твірних для підалгебри Ann(S) в алгебрі Лі всіх K-диференціювань кільця многочленів K[x₁,…, xₙ].

Степух В., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

АННУЛЯТОРНЫЕ ПОДАЛГЕБРЫ В АЛГЕБРАХ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ

Пусть K алгебраически замкнутое поле характеристики нуль і $K(x_1 , …, x_n)$ поле рациональных функций от n переменнных. Множество Ann(S) всех K-дифференцирований $K(x_1 , …, x_n)$, аннулирующих подмножество $S \subseteq K(x_1 , …, x_n)$ является подалгеброй алгебры Ли $W_n(K)$. Структура подалгебры Ann(S) связана с централизаторами элементов в $W_n(K)$. Дано характеризацию подалгебры Ann(S), указано систему образующих для подалгебры Ann(S) в алгебре Ли всех K-диференцирований кольца многочленов $K[x_1 , …, x_n]$.

УДК 517.9

А. Русіна, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
e-mail: *rusina.alina@gmail.com*

НАБЛИЖЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ФОРМІ ОБЕРНЕНОГО ЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗІ ШВИДКО КОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається задача знаходження оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу) в лінійно-квадратичної задачі, яка складається з параболічної системи зі швидко коливними коефіцієнтами та напіввизначеного цільового функціоналу. Знайдено точну формулу синтезу та за допомогою переходу до усереднених параметрів обґрунтовано його наближену форму.

ВСТУП. Важливою задачею в теорії оптимального керування нескінченновимірними еволюційними системами є побудова оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу) [1], [4]. Для широкого класу задач як з розподіленим [1], так і з зосередженим керуванням [5] вдається знайти замкнену форму оптимального синтезу, параметри якої виражаються через власні функції та числа відповідного диференціального оператора. При цьому якщо коефіцієнти оператора є швидко осцилюючими [2], то виникає задача обґрунтування наближеного усередненого синтезу [5]. У даній статті така задача розв'язана для параболічної лінійної системи з зосередженим керуванням в правій частині та квадратичним критерієм якості. На основі знайденої формули точного синтезу обґрунтовано форму наближеного усередненого оптимального керування в формі оберненого зв'язку.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Нехай $\Omega \subset R^p, p \ge 1$, – обмежена область, $\varepsilon \in (0,1)$ – малий параметр, $T>0$. В циліндрі $Q_T=(0,T)\times\Omega$ для вектор-функцій $y=y(t,x)$, $u=u(t)$ розглядається задача

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = A\Delta^{\varepsilon} y + By + C^{\varepsilon}(x)u, \\ y(t,x)=0,\ x\in\partial\Omega, \\ y(0,x)=y_0^{\varepsilon}(x), \\ u\in U=\left(L^2[0,T]\right)^n, \end{cases} \tag{1}$$

$$J(y,u)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\int_{\Omega} y_i(T,x)q(x)\,dx\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^T u_i^2(t)dt \to \inf. \tag{2}$$

Тут A, B – сталі $n\times n$ матриці, $C^{\varepsilon}(x)$ – $n\times n$ матриця, елементи якої належать $L^2(\Omega)$, $y_0^{\varepsilon}\in\left(L^2(\Omega)\right)^n$, $q\in L^2(\Omega)$, $\alpha_i>0,\ \gamma_i>0,\ i=\overline{1,n}$, $\Delta^{\varepsilon}=div(\alpha^{\varepsilon}(x)\nabla)$, $\alpha^{\varepsilon}(x)=\alpha(\frac{x}{\varepsilon})$, $\alpha(x)=\left(\left(\alpha_{ij}(x)\right)\right)_{i,j=1}^{p}$ – вимірна, симетрична, періодична матриця, що задовольняє умови еліптичності та обмеженості: $\exists v_1>0, v_2>0\ \forall x,\ \xi\in R^p$

$$v_1\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^{p}\alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le v_2\sum_{i=1}^{p}\xi_i^2. \tag{3}$$

У статті при певних умовах на A і B знайдено формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку

$$u^{\varepsilon}=u^{\varepsilon}\left(t,y^{\varepsilon}\right), \tag{4}$$

де параметри функції u^{ε} залежать від швидко коливних коефіцієнтів. Основним результатом статті є обґрунтування того факту, що вектор-функція $u=u_N^0(t,y)$, яка одержується з (4) заміною швидко коливних параметрів на усереднені, а нескінченних сум на скінчені, реалізує наближений оптимальний синтез, тобто якщо y – розв'язок (1) з керуванням $u=u_N^0(t,y)$, то $\forall\ \delta>0\ \ \exists N_0\ge1,\ \ \exists\ \overline{\varepsilon}>0$ такі, що $\forall N\ge N_0\ \ \forall\varepsilon\in(0,\overline{\varepsilon})$ $\left|J\left(y^{\varepsilon},u^{\varepsilon}\right)-J(y,u)\right|<\delta$.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Будемо розглядати гільбертові простори вектор-функцій $H=\left(L^2(\Omega)\right)^n$, $V=\left(H_0^1(\Omega)\right)^n$ з відповідними скалярними добутками і нормами $(y,z)_H=\sum_{i=1}^{n}(y_i,z_i)_{L^2(\Omega)}$, $(y,z)_V=\sum_{i=1}^{n}(y_i,z_i)_{H_0^1(\Omega)}$, $\|y\|_H^2=(y,y)_H$, $\|y\|_V^2=(y,y)_V$.

Через $\|x\|$ і (x,y) будемо позначати евклідову норму і скалярний добуток в R^n, а $\|A\|=\sqrt{\left(\sum a_{ij}^2\right)_{i,j=1}^{n}}$ – норму матриці. Будемо вважати, що матриця $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ симетрична і для деякого $\beta>0$

$$A\ge\beta E. \tag{5}$$

Тоді оператор $A^{\varepsilon}=-A\Delta^{\varepsilon}\in L\left(V,V^*\right)$ і задовольняє оцінки

$$\left(A^{\varepsilon}y,y\right)_V\ge\beta\, v_1\|y\|_V^2,\ \forall y\in V, \tag{6}$$

$$\left\|A^{\varepsilon}y\right\|_{V^*}\le 2v_2\|A\|\|y\|,\forall y\in V. \tag{7}$$

Це означає [4, с. 120], що задача оптимального керування (1), (2) має єдиний розв'язок $\left\{\overline{y}^{\varepsilon},\overline{u}^{\varepsilon}\right\}\in W(0,T)\times U$, де $W(0,T)=\left\{y\in L^2(0,T;V)\,|\,\frac{dy}{dt}\in L^2(0,T;V^*)\right\}$.

Крім того, для розв'язку задачі (1) $y^{\varepsilon}\in W(0,T)$ при кожному фіксованому керуванні $u\in U$ справедлива оцінка для м.в. $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_H^2+\beta v_1\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_V^2\le\|B\|\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_H^2+C(\varepsilon)\|u(t)\|\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|_H, \tag{8}$$

де $C(\varepsilon)=\left(\int_{\Omega}\left\|C^{\varepsilon}(x)\right\|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для знаходження оптимального процесу $\left\{\overline{y}^{\varepsilon},\overline{u}^{\varepsilon}\right\}$ скористаємось схемою з [5].

Нехай $\{X_j^{\varepsilon}(x)\}$, $\{\lambda_j^{\varepsilon}\}$ – власні функції та числа оператора Δ^{ε}, $0<\lambda_1^{\varepsilon}\le\lambda_2^{\varepsilon}\le\cdots,\ \lambda_j^{\varepsilon}\to\infty,\ j\to\infty$.

Шукаємо розв'язок у вигляді $y^{\varepsilon}(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty}y_j^{\varepsilon}(t)X_j^{\varepsilon}(x)$. Тоді відносно вектор-функцій $y_j^{\varepsilon}(t)$ маємо задачу

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}y_j^{\varepsilon}(t)=-\lambda_j^{\varepsilon}Ay_j^{\varepsilon}(t)+By_j^{\varepsilon}(t)+C_j^{\varepsilon}u(t),\\ y_j^{\varepsilon}(0)=y_{0j}^{\varepsilon},\end{cases} \tag{9}$$

$$J=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{\infty}q_j^{\varepsilon}\left(y_j^{\varepsilon}\right)_i(T)\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\int_0^T u_i^2(t)dt\to\inf, \tag{10}$$

де $C^{\varepsilon}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}C_j^{\varepsilon}X_j^{\varepsilon}(x)$, $y_0^{\varepsilon}(x)=\sum_{j=1}^{\infty}y_{0j}^{\varepsilon}X_j^{\varepsilon}(x)$, $q(x)=\sum_{j=1}^{\infty}q_j^{\varepsilon}X_j^{\varepsilon}(x)$.

Припущення 1. Матриці A і B комутують.

Тоді після домноження рівняння (9) зліва на $q_j^\varepsilon e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)}$ відносно вектор-функції $a^\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)} y_j^\varepsilon(t)$ маємо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}a^\varepsilon(t)=Ba^\varepsilon(t)+G^\varepsilon(t)u(t), \\ a^\varepsilon(0)=a_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{11}$$

$$J(a^\varepsilon,u)=\left(Na^\varepsilon(T),a^\varepsilon(T)\right)+\int_0^T \left(Mu(t),u(t)\right)dt\to\inf, \tag{12}$$

де $G^\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)} C_j^\varepsilon$, $a_0^\varepsilon=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon e^{-\lambda_j^\varepsilon AT} y_{0j}^\varepsilon$, N – діагональна матриця, елементами якої є α_i, M – діагональна матриця, елементами якої є γ_i.

Оскільки матриці N і M є додатньо визначеними, то задача (11), (12) допускає оптимальне керування в формі оберненого зв'язку. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, одержуємо програмну форму цього керування

$$u^\varepsilon(t)=-M^{-1}\left(G^\varepsilon(t)\right)^* e^{-B^*(t-T)}N\left(E+D_T^\varepsilon\right)^{-1}e^{BT}a_0^\varepsilon, \tag{13}$$

де для $t\in[0,T]$ $D_t^\varepsilon=\int_0^t e^{B(t-s)}G^\varepsilon(s)M^{-1}(G^\varepsilon(s))^* e^{B^*(t-s)}ds$.

Тоді враховуючи формулу розв'язку (11)

$$a^\varepsilon(t)=e^{Bt}a_0^\varepsilon+\int_0^t e^{B(t-s)}G^\varepsilon(s)u^\varepsilon(s)ds, \tag{14}$$

з (13), (14) одержуємо шуканий синтез $u^\varepsilon(t)=S^\varepsilon(t)a^\varepsilon(t)$, де

$$S^\varepsilon(t)=-M^{-1}(G^\varepsilon(t))^* e^{-B^*(t-T)}N\left(E+D_T^\varepsilon\right)^{-1}e^{BT}\left(e^{Bt}-D_t^\varepsilon e^{B^*(T-t)}N\left(E+D_T^\varepsilon\right)^{-1}e^{BT}\right)^{-1}. \tag{15}$$

Таким чином, доведено наступний результат

Лема 1. *Нехай виконуються умови (3), (5) та припущення 1. Тоді задача (1)–(2) має єдиний розв'язок* $\{\bar{y}^\varepsilon,\bar{u}^\varepsilon\}$, *який може бути поданий в формі оберненого зв'язку*

$$\bar{u}^\varepsilon(t)=u^\varepsilon(t,y^\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\infty} q_j^\varepsilon S^\varepsilon(t)\, e^{\lambda_j^\varepsilon A(t-T)}\sum_{i=1}^{n} e_i\left(y^\varepsilon(t),e_i\bar{X}_j^\varepsilon\right)_H, \tag{16}$$

де $\bar{X}_j^\varepsilon$ – n - мірний вектор, кожна координата якого дорівнює X_j^ε, e_i - i - тий орт в R^n.

Використаємо формулу (16) для побудови наближеного синтезу.

Нехай стала матриця α_0 є усередненою для $\alpha^\varepsilon(x)$ [2]. Поряд з оператором Δ^ε розглянемо усереднений $\Delta^0=div(\alpha^0\nabla)$. Нехай $\{X_j^0(x)\}$, $\{\lambda_j^0\}$ – розв'язки відповідної спектральної задачі.

Припущення 2. Спектр усередненого оператора Δ^0 є простим.

Тоді мають місце збіжності $\forall j\ge 1,\ \lambda_j^\varepsilon\to\lambda_j^0,\ X_j^\varepsilon\to X_j^0$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$.

Нехай виконані умови

$$\alpha^\varepsilon(x)\xrightarrow{G}\alpha^0(x),$$

$$y_0^\varepsilon\to y_0,\ C_{kl}^\varepsilon\to C_{kl}^0 \text{ слабо в } L^2(\Omega) \text{ при } \varepsilon\to 0, \tag{17}$$

де C_{kl}^ε – елементи матриці $C^\varepsilon(x)$.

Покладемо

$$u_N^0(t,y_N^\varepsilon)=\sum_{j=1}^{N} q_j^0 S_N^0(t) e^{\lambda_j^0 A(t-T)}\sum_{i=1}^{n} e_i\left(y_N^\varepsilon(t),e_i\bar{X}_j^0\right)_H, \tag{18}$$

де $S_N^0(t)$ визначається формулою (15) з заміною матриці $G^\varepsilon(t)$ на $G_N^0(t)=\sum_{j=1}^{N} q_j^0 e^{\lambda_j^0 A(t-T)} C_j^0$, $\bar{X}_j^0$ – n - мірний вектор, кожна координата якого дорівнює X_j^0, $y_N^\varepsilon\in W(0,T)$ – розв'язок задачі (1) з керуванням (18).

Основним результатом статті є наступна теорема

Теорема 1. *Нехай виконані умови (3), (5), (17) та припущення 1, 2. Тоді формула (18) є наближеним оптимальним керуванням в формі оберненого зв'язку для задачі (1), (2), тобто* $\forall\eta>0\ \forall\,\delta>0\ \exists\bar{N}\ge 1,\ \exists\,\bar{\varepsilon}\in(0,1)$ *такі, що* $\forall N\ge\bar{N}\ \ \forall\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon})$

$$\int_0^T \left\| \overline{u}^{\varepsilon}(t) - u_N^0\left(t, y_N^{\varepsilon}\right)\right\| dt < \eta, \tag{19}$$

$$\max_{t\in[\delta,T]} \left\| \overline{y}^{\varepsilon}(t) - y_N^{\varepsilon}(t) \right\|_H < \eta, \tag{20}$$

$$\left| J\left(\overline{y}^{\varepsilon}, \overline{u}^{\varepsilon}\right) - J\left(y_N^{\varepsilon}, u_N^0[t, y_N^{\varepsilon}]\right)\right| < \eta. \tag{21}$$

Доведення. Для зручності надалі будемо позначати: $[z, X] = \sum_{i=1}^{n} e_i\left(z, e_i \overline{X}\right)_H$ для $z \in H,\ X \in L^2(\Omega)$, $K_j^{\varepsilon}(t) = q_j^{\varepsilon} S^{\varepsilon}(t) e^{\lambda_j^{\varepsilon} A(t-T)}$ для $j \ge 1,\ \varepsilon \ge 0$.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = A\Delta^{\varepsilon} z + Bz + C^{\varepsilon}(x) u^0(t, z), (t, x) \in Q_T, \\ z(t, x) = 0, x \in \partial\Omega, \\ z(0, x) = y_0^{\varepsilon}(x), \end{cases} \tag{22}$$

де $u^0(t, z) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j^0(t)\left[z, X_j^0\right]$.

Задача (22) має єдиний розв'язок $z^{\varepsilon}(t, x)$ в класі $W(0, T)$ [7], для якого справедлива оцінка (8) з $u(t) = u^0(t, z^{\varepsilon})$.

Згідно (17) $\exists\sigma > 0$ $C(\varepsilon) = \left(\int_{\Omega} \left\|C^{\varepsilon}(x)\right\|^2 dx\right)^{1/2} \le \sigma$, $\max_{t\in[0,T]} \left\|K_j^0(t)\right\| \le \sigma$, $\left\|y_0^{\varepsilon}\right\|_H \le \sigma$.

З (8) та з рівності Парсеваля, одержуємо оцінку $\forall t \in [0, T]$

$$\| z^{\varepsilon}(t) \|_H^2 + 2\beta\nu_1 \int_0^t \| z^{\varepsilon}(s) \|_V^2\, ds \le \sigma^2 + 2\|B\| \int_0^t \| z^{\varepsilon}(s) \|_H^2\, ds + 2\sigma^2 \int_0^t \| z^{\varepsilon}(s) \|_H^2\, ds. \tag{23}$$

Застосовуючи нерівність Гронуола, з (23) одержуємо $\forall t \in [0, T]$

$$\| z^{\varepsilon}(t) \|_H^2 \le \sigma^2 e^{2\left(\|B\| + \sigma^2\right)T}, \tag{24}$$

$$\left\| u^0(t, z^{\varepsilon}) \right\|^2 \le \sigma^2 \| z^{\varepsilon}(t) \|_H^2 \le \sigma^4 e^{2\left(\|B\| + \sigma^2\right)T}, \tag{25}$$

З (23)–(25) одержуємо, що $\left\{z^{\varepsilon}\right\}$ – обмежена в $W(0, T)$.

Оскільки вкладення $V \subset H$ є компактним, то за лемою про компактність [7] існує функція $z = z(t, x) \in W(0, T)$ така, що принаймні по послідовності

$$z^{\varepsilon} \to z \ \text{в}\ L^2(0, T; H),$$
$$z^{\varepsilon}(t, x) \to z(t, x) \ \text{м.с. в}\ Q_T, \tag{26}$$
$$z^{\varepsilon}(t) \to z(t) \ \text{в}\ H \ \text{для м.в.}\ t \in [0, T].$$

Тому

$$u^0(t, z^{\varepsilon}) \to u^0(t, z) \ \text{в}\ L^2(0, T; H). \tag{27}$$

Далі, оскільки оператор $A^{\varepsilon} = -A\Delta^{\varepsilon}$, задовольняє (6), (7), то з [2] по деякій підпослідовності $A^{\varepsilon} \xrightarrow{G} \overline{A}$, де $\overline{A} \in L(V, V^*)$ задовольняє (6). Розглянемо для $\forall u_0 \in V$ елемент $\bar{f} = \overline{A} u_0 \in V^*$ і нехай u_{ε} розв'язок рівняння $A^{\varepsilon} u = \bar{f}$. Тоді $u_{\varepsilon} \to u_0$ слабо в V. З іншого боку, $\forall i = \overline{1, n}$ $-\Delta^{\varepsilon}\left(Au_{\varepsilon}\right)_i = \overline{f_i}$, що в силу (17) означає, що $-A\Delta^0 u_0 = \bar{f}$. Таким чином $\overline{A} = A^0 = -A\Delta^0$ і в силу єдиності G-границі по всій послідовності

$$A^{\varepsilon} \xrightarrow{G} A^0 = -A\Delta^0. \tag{28}$$

Тоді з (27), (28) та результатів про G-збіжність параболічних операторів [3, 6] маємо, що z – розв'язок задачі (22) при $\varepsilon = 0$, тобто задачі (22) з оператором $-A\Delta^0$ та початковими даними y_0, причому $\forall\delta > 0$

$$z^{\varepsilon} \to z \ \text{в}\ C([\delta, T]; H). \tag{29}$$

З (27), (29) одержуємо $J\left(z^{\varepsilon}, u^0[t, z^{\varepsilon}]\right) \to J\left(z, u^0[t, z]\right)$ при $\varepsilon \to 0$.

Нарешті, оскільки задача оптимального керування (1), (2) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок [4], для якого аналогічно попередньому можна одержати формулу синтеза (16) при $\varepsilon = 0$, то $\left\{z, u^0(t, z)\right\}$ – оптимальний процесс в (1), (2) при $\varepsilon = 0$.

Далі зауважимо, що оскільки

$$\left\|G_N^0(t) - G^0(t)\right\| \le \sum_{j=N+1}^{\infty} \left|q_j^0\right| \left\|C_j^0\right\| e^{\lambda_j^0 \|A\|(t-T)} \le e^{\lambda_{N+1}^0 \|A\|(t-T)} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \left|q_j^0\right|\right)^{1/2} \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \left\|C_j^0\right\|\right)^{1/2} \to 0,\ N \to \infty,$$

$$\text{то } \forall t \in [0,T] \ \left\|S_N^0(t) - S^0(t)\right\| \to 0, \ N \to \infty .$$

Тоді аналогічно [5] можна показати, що $\forall \eta > 0$ виконуються співвідношення (19)–(21) з заміною $\bar{y}^{\varepsilon}$ на z^{ε}, $\bar{u}^{\varepsilon}$ на $u^0(t, z^{\varepsilon})$.

Залишилось показати, що $\{\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}\} \to \{z, u^0(t,z)\}$ в сенсі (19) – (21). Оскільки $\forall t \in [0,T]$ $\forall \varepsilon > 0$ $\left\|G^{\varepsilon}(t)\right\| \le \sum_{j=1}^{\infty} \left|q_j^{\varepsilon}\right| \left\|C_j^{\varepsilon}\right\| e^{\lambda_j^{\varepsilon}\|A\|(t-T)} \le \|q\| \sigma$ і, оскільки, в силу невід'ємної визначеності D_T^{ε} виконується нерівність $\left\|\left(E + D_T^{\varepsilon}\right)^{-1}\right\| \le 1$, то з формули (13) випливає

$$\forall t \in [0,T] \ \left\|\bar{u}^{\varepsilon}(t)\right\| \le \left\|M^{-1}\right\| \|q\|^2 \sigma^2 \|N\| e^{\|B\|T} := C . \tag{30}$$

Тоді з оцінки (8), застосованої до допустимого процесу $\{\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}\}$, маємо, що $\bar{y}^{\varepsilon}$ обмежена в $W(0,T)$.

Отже, для деякого $y \in W(0,T)$ $\bar{y}^{\varepsilon} \to y$ в сенсі (26).

Оскільки, $G^{\varepsilon}(T) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{\varepsilon} C_j^{\varepsilon} = \left(\left(\left(q, C_{kl}^{\varepsilon}\right)_{L^2(\Omega)}\right)\right)_{k,l=1}^{n} \to G^0(T), \varepsilon \to 0$, то $\forall t \in [0,T]$ маємо $G^{\varepsilon}(t) \to G^0(t), \varepsilon \to 0$.

Звідси, враховуючи збіжність $a_0^{\varepsilon} \to a_0, \varepsilon \to 0$, з формули (13), оцінки (30) і теореми Лебега виводимо, що

$$\bar{u}^{\varepsilon} \to u \ \text{в} \ \left(L^2(0,T)\right)^n . \tag{31}$$

Тоді, знову користуючись G-збіжністю параболічних операторів [3, 6], одержуємо, що y – розв'язок (1) при $\varepsilon = 0$ з керуванням $u(t)$ і при цьому $\forall \delta > 0$

$$y^{\varepsilon} \to y \ \text{в} \ C([\delta, T]; H). \tag{32}$$

З (31), (32) одержуємо

$$J\left(\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}\right) \to J(y,u) \ \text{при} \ \varepsilon \to 0 . \tag{33}$$

Нарешті, застосовуючи до задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$ процедуру (9)–(12), з урахуванням єдиності розв'язку [4] одержуємо для оптимального керування цієї задачі формулу (13) з матрицею $G^0(t)$ і початковим вектором a_0. Отже, $u(t)$ – оптимальне керування в (1), (2) при $\varepsilon = 0$. На підставі єдиності розв'язку задачі (1) при фіксованому керуванні звідси маємо, що $\{y,u\}$ – оптимальний процес в (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Отже, $\{y,u\} = \{z, u^0(t,z)\}$ і згідно (31)–(33) теорема доведена.

ВИСНОВКИ. В роботі розглянута задача оптимального керування на розв'язках параболічної системи зі швидко коливними коефіцієнтами. При певних умовах на матричні коефіцієнти системи, знайдено явну формулу оптимального керування в формі оберненого зв'язку (синтезу). На основі одержаної формули, шляхом переходу до усереднених параметрів, запропоновано та обґрунтовано формулу оптимального наближеного синтезу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами. – К., 1988.
2. Жиков В. В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М., 1993.
3. Жиков В. В., Козлов С.М., Олейник О.А. О G-сходимости параболических операторов // Успехи мат.наук. – 1981. – т. 36, №11. – С. 11–55.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М., 1972.
5. Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Sukretna A. V. Approximate bounded synthesis for distributed systems. – Lambert Academic Publishing, 2013.
6. Kapustyan O. V., Kapustian O. A., Shklyar T. B. Global attractor of a parabolic inclusion with nonautonomous main part // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 187, № 4. – P. 458–470.
7. Sell G. R., You Y. Dynamics of Evolutionary Equations. – Applied Mathematical Sciences, Vol 141, Springer Verlag, New York, 2002.

Стаття надійшла до редколегії 27.11.14

Русина А., асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С БЫСТРО КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе рассматривается задача нахождения оптимального управления в форме обратной связи (синтеза) для линейно-квадратичной задачи, состоящей из параболической системы с быстро колеблющимися коэффициентами и полуопределенного целевого функционала. Найдено точную формулу синтеза и с помощью перехода к усредненным параметрам обосновано его приближенную форму.

Rusina A., PhD Graduate
Taras Shevchenko National university of Kyiv, Kyiv

APPROXIMATE OPTIMAL CONTROL IN FEEDBACK FORM FOR A PARABOLIC SYSTEMS WITH RAPIDLY FLUCTUATING COEFFICIENTS

In this paper, the optimal control in feedback form (synthesis) is found for linear-quadratic problem that consists of semi defined performance criterion and a parabolic system with rapidly fluctuating coefficients. The exact formula for the synthesis was found and its approximate form that lies in substitution of quickly-oscillating parameters with average and all infinite sums with finite was justified.

НАГОРНИЙ ВОЛОДИМИР НИКИФОРОВИЧ
(14.03.1945 – 18.06.2015)

Володимир Никифорович Нагорний народився в невеликому місті Ніжин Чернігівської області.

З шкільних років захопився математикою. За підтримки батьків почав поглиблено вивчати точні науки. Закінчивши шкільну програму з золотою медаллю вирішив вступити до Київського університету імені Тараса Шевченка. Захоплення науками привело допитливого юнака на механіко-математичний факультет, який на довгі майже 50 років став рідним.

Володимир Никифорович закінчив у 1966 році механіко-математичного факультет Київського ордена Леніна державного університету ім. Т.Г.Шевченка по спеціальності "Математика". З присвоєнням кваліфікації "Математика з теорії ймовірностей і математичної статистики" він продовжив заняття наукою. У 1966-1970 роках навчався в аспірантурі Київського університету та під керівництвом свого вчителя М.Й.Ядренка у 1970 році захистив кандидатську дисертацію на тему "Об интерполяции случайных процессов и полей". Почав працювати в Київському ордена Леніна державному університеті ім. Т.Г.Шевченка з 01.09.1967 року та закінчив свою трудову діяльність в 2009 році вже в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Визначальні роки перебудови та становлення самостійної України Володимир Никифорович провів разом з механіко-математичним факультетом, покладаючи всі свої зусилля на роботу зі студентами в Київському університеті імені Тараса Шевченка. Основною справою Володимир Никифорович вважав виховання і підготовку фахівців з математики, викладачів, а головне – справжніх громадян.

Володимир Никифорович працював з 1968 року на кафедрі математичного аналізу. Більше 40 років читав нормативні курси, серед яких основоположний на механіко-математичному факультеті курс "Математичного аналізу". Глибокі знання, таланті досвід викладача дозволяли йому знаходити найбільш вдалу форму донесення найскладнішого матеріалу, що викликало велику повагу серед колег і любов та вдячність серед студентів. З 1975 року Володимир Никифорович працював на посаді доцента кафедри математичного аналізу, а у 1983 році йому присвоєно вчене звання доцента кафедри математичного аналізу.

Як більшість людей свого покоління Володимир Никифорович щиро поважав студентів, опікувався ними, сприймав їх проблеми і питання, як власні. Ці важливі людські якості він повністю реалізував за 14 років беззмінної роботи на посаді заступника декана з організаційної роботи з 1989 по 2003 рік. Проблеми гуртожитку, допомоги студентам, організація заходів на механіко-математичному факультеті – справа, яку з року в рік робив Володимир Никифорович. Всі мех-матяни з доброю усмішкою згадують 13 грудня – день механіко-математичного факультету. Концерти, студентські аукціони, конкурси та забави, власна валюта мех-мату здобули неабиякої слави серед студентів багатьох факультетів Київського університету.

Володимир Никифорович також приділяв значну увагу методичній роботі. Він опублікував більше 80 наукових та навчально-методичних праць. Його наукові інтереси стосувались питань побудови інтерполяційних многочленів по нерівновіддаленим вузлам інтерполяції. Слід звернути також увагу на його роботу з перекладу на українську мову багатьох видань, що розроблялися на кафедрі математичного аналізу. Результатом цієї кропіткої роботи став переклад українською мовою базового на механіко-математичному факультеті підручника "Математичний аналіз" під редакцією А.Я.Дороговцева. Також Володимир Никифорович разом з викладачами кафедри брав активну участь у розробці методичного матеріалу з курсу "Математичний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету. Слід також згадати про його роботу з юними математиками, що тільки почали свої кроки у науці. Багаторічний досвід викладання математичних дисциплін, роботи на олімпіадах з математики для школярів та студентів вилився в цікаві методичні розробки для юних математиків, серед яких "Збірник олімпіад для вступників в КНУ", "Десять математичних олімпіад" та інші, що були опубліковані у співавторстві з викладачами механіко-математичного факультету.

Володимир Никифорович вів активну організаційну та громадську роботу. Був членом вченої ради механіко-математичного факультету з 1988 по 2003 рік. Був головою трудового штабу механіко-математичного факультету. Також можна згадати багаторічну роботу Володимира Никифоровича у вступних компаніях в Київському університеті імені Тараса Шевченка. Свої організаторські здібності та відповідальність Володимир Никифорович неодноразово використовував в численних поїздках зі студентами механіко-математичного факультету в табори на "збір врожаю".

Плідну роботу Нагорного Володимира Никифоровича неодноразово відзначали як на механіко-математичному факультеті так і в університеті. Він нагороджений медаллю з нагоди 1500-річчя м. Києва, Почесною грамотою, Грамотою КНУ імені Тараса Шевченка та іншими відзнаками.

Колектив механіко-математичного факультету

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ
для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в ”Zentralblatt MATH” (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:
- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows.** Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними.

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

– текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;

– поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.

– комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
- шрифт статті – Arial, розмір 9;
- інтервал між рядками – одинарний;
- перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
- відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;

– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
- класифікаційний індекс Універсальної десяткової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
- відомості про авторів, що містять такі елементи
  перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
- назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання…", "Деякі питання…", "Проблеми…", Шляхи…" тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку);), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
- анотація, резюме (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок ..."отримано задовільні результати …"; анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
- основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
- список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
- дата надходження до редколегії, наприклад, "**Стаття надійшла до редколегії 09.11.05**". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

– кожну абревіатуру слід уводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абревіатурою;

– джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **<u>не подавати в тексті розгорнутих посилань!</u>**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

– усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;

– не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;

– на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;

– усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
– усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій віддтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
– формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:				**Define Size:**		
Text	Times New Roman			Full	**9** pt	
Function	Times New Roman			Subscript/Superscript	**7** pt	
Variable	Times New Roman	italic		Sub-Subscript/Superscript	**6** pt	
L.C.Greek	Symbol			Symbol	**14** pt	
UC.Greek	Symbol			Sub-Symbol	9 pt	
Vector-matrix	Times New Roman	bold				
Number	Times New Roman					

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (К) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовок бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передує рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:
– подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
– подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
– подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
– затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows ***ФАЙЛ>СВОЙСТВА***, обрати закладку ***ДОКУМЕНТ*** та заповнити поля ***Название, Автор***. У полі ***Заметки*** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск (1)33

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/8}$. Ум. друк. арк. 7,5. Наклад 300. Зам. № 215-7436.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку 07.10.15

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02