ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

2(32)/2014

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

Публикуются оригинальные статьи по актуальным вопросам математического анализа, теории дифференциальных уравнений, математической физики, геометрии, топологии, алгебры, теории вероятностей, теории оптимального управления, теоретической механики, теории упругости, механики жидкости и газа. Все материалы, поданные в редколегию, рецензируются. После выхода в свет все материалы реферируются в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Содержание выпуска и аннотации статей размещены на Web-страничке Вестника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для научных сотрудников, преподавателей, студентов.

ЗМІСТ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 517.9

Ф. Асроров, канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

Досліджуються інтегральні множини систем диференціальних рівнянь, які зазнають імпульсного впливу у фіксовані моменти часу.

ВСТУП. Тематика роботи тісно пов'язана з двома напрямками теорії диференціальних рівнянь – теорією багаточастотних коливань [3, 5] та теорією диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями [4, 6, 8]. Вивчається питання про існування інтегральних множин для неоднорідних систем диференціальних рівнянь. Для відшукання інтегральної множини застосовується ітераційний процес, який полягає в тому, що множина шукається як границя послідовності множин, кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь, а також досліджується поведінка розв'язків рівнянь в околі інтегральної множини.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Дослідимо питання про існування інтегральних множин нелінійних систем з імпульсним впливом. Розглянемо неоднорідну систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,x), \ \ t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi,x) \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \in R,\ \ \varphi \in \Im_m,\ \ \Im_m$ – m-вимірний тор, $a(t,\varphi),\ f(t,\varphi,x),\ P(t,\varphi)$ – неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) стосовно t неперервні і 2π-періодичні стосовно φ_ν, $\nu = \overline{1,m}$, обмежені при всіх $t \in R$ векторні і матрична функції відповідно, функції $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпщиця стосовно $\varphi \in \Im_m$ рівномірно відносно $t \in R$. Функції $B_i(\varphi)$, $I_i(\varphi,x)$ – рівномірно обмежені по i, $\det(E + B_i) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in \Im_m$. Припустимо також, що функції $f(t,\varphi,x)$, $I_i(\varphi,x)$ задовольняють умову Ліпшиця

$$\left\| f(t,\varphi',x') - f(t,\varphi'',x'') \right\| + \left\| I_i(\varphi',x') - I_i(\varphi'',x'') \right\| \leq L\left(\left\| \varphi' - \varphi'' \right\| + \left\| x' - x'' \right\| \right) \tag{2}$$

для всіх $t \in R, \varphi', \varphi'' \in \Im_m, x', x'' \in R^n$.

Крім того, вважаємо, що функції $f(t,\varphi,x)$, $I_i(\varphi,x)$ обмежені при $x = 0,$ тобто

$$\sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\| f(t,\varphi,0) \right\| + \sup_{i\in Z} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\| I_i(\varphi,0) \right\| \leq M. \tag{3}$$

Встановимо умови існування інтегральних множин системи (1). Аналогічні системи рівнянь без імпульсних збурень та достатні умови існування інтегральних множин досліджено в [2], питання існування обмежених на всій осі розв'язків систем з імпульсними збуреннями досліджено в [1].

Розглянемо неавтономну систему диференціальних рівнянь, визначену на торі $\Im_m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi). \tag{4}$$

Позначемо через $\varphi_t(\tau,\varphi)$ розв'язок цієї системи, який задовольняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi.$ В силу компактності фазового простору системи рівнянь (4) і припущень відносно функції $a(t,\varphi),$ кожен розв'язок $\varphi_t(\tau,\varphi),\ \ \varphi_\tau(\tau,\varphi) = \varphi$ існує при всіх $\tau \in R$ і $\varphi \in \Im_m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь $R.$

Розглянемо однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x, \ \ t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_t(\tau,\varphi))x \end{aligned} \tag{5}$$

залежну від $\tau \in R, \varphi \in \Im_m$ як від параметрів і позначимо через $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ матрицант цієї системи.

Лемма 1. Для будь-яких $t,s,\tau,\sigma \in R$ і $\varphi \in \Im_m$ справедливо $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)) = \Omega_s^t(\sigma,\varphi)$.

Доведення. Так як $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ – матрицант системі рівнянь (5), то

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi) = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi), \\ &\Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi)\Big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned}$$

Замінимо φ на $\varphi_\tau(\sigma,\varphi)$ і враховуючи властивість $\varphi_t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=\varphi_t(\sigma,\varphi)$ розв'язків $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ системи (4), одержимо

$$\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))=P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$$
$$\Delta\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi))\Omega_s^{\tau_i}(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi)).$$

Остання рівність означає, що $\Omega_s^t(\tau,\varphi_\tau(\sigma,\varphi))$ є фундаментальною матрицею системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi_t(\sigma,\varphi))x,$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi_{\tau_i}(\sigma,\varphi)x,$$

яка при $t=s$ є одиничною матрицею. Але цю ж властивість має і матриця $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$. Тому ці матриці співпадають. Лему доведено.

Нехай $C(t,\varphi)$ – неперервна 2π-періодична по кожній компоненті φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$, кусково-неперервна по $t\in R$ з розривами першого роду в точках $\{\tau_i\}$ матрична функція. Покладемо

$$G(t,s,\varphi)=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s\le t,\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E-C(s,\varphi_s(t,\varphi))\right], & s>t.\end{cases}$$

Назвемо $G(t,s,\varphi)$ функцією Гріна-Самойленко системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi),$$
$$\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi)x,\quad t\ne\tau_i,$$
$$\Delta x\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi)x,$$

якщо

$$\left\|G(t,s,\varphi)\right\|\le Ke^{-\gamma|t-s|} \tag{6}$$

для всіх $t,s\in R$, $\varphi\in\Im_m$ і деяких $K\ge 1,\quad \gamma>0.$

Вкажемо найпростіші властивості функції Гріна-Самойленко $G(t,s,\varphi)$. З визначення цієї функції випливає, що $G(t,s,\varphi)$ неперервна при всіх $t,s\in R, t\ne s,\ \varphi\in\Im_m, 2\pi$-періодична стосовно φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$ причому $G(s+0,s,\varphi)-G(s-0,s,\varphi)=E.$

Беручи до уваги лему 1, маємо

$$G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))=\begin{cases}\Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(\tau,\varphi)), & s\le t,\\ -\Omega_s^t(t,\varphi)\left[E-C(s,\varphi_s(\tau,\varphi))\right], & s>t.\end{cases} \tag{7}$$

При $s=\tau$ одержимо

$$G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))=\begin{cases}\Omega_\tau^t(t,\varphi)C(\tau,\varphi), & \tau\le t,\\ -\Omega_\tau^t(t,\varphi)\left[E-C(\tau,\varphi)\right], & \tau>t.\end{cases}$$

Як бачимо, матриця $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи рівнянь (5), що розглядається при $t\ge\tau$ і $t<\tau$ відповідно.

Інтегральною множиною системи рівнянь (1) будемо називати таку множину $x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m$, де $u(t,\varphi)$ – кусково-неперервна стосовно t з розривами першого роду в точках $t=\tau_i$, неперевна стосовно φ і 2π- періодична стосовно φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$ функція, яка для будь-якого розв'язку $\left(\varphi_t(\tau,\varphi),\ x_t(\tau,\varphi,x_0)\right)$ рівнянь (1), задовольняє при деякому $t=s$ рівняння $x_s(\tau,\varphi,x_0)=u(s,\varphi_s(\tau,\varphi))$ і виконується при всіх $t\in R$ співвідношення $x_t(\tau,\varphi,x_0)=u(t,\varphi_t(\tau,\varphi)).$

Іншими словами, функція $x=u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину рівнянь (1), якщо для будь-якого розв'язку $\varphi_t(\tau,\varphi),\ \varphi_\tau(\tau,\varphi)=\varphi$ першого з рівнянь (1) справедливе співвідношення

$$\frac{dx_t(\tau,\varphi)}{dt}=\frac{d}{dt}u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))=P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))u(t,\varphi_t(\tau,\varphi))+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))=P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x_t(\tau,\varphi)+f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))$$

для всіх $\tau\in R,\varphi\in\Im_m$. При $t=\tau_j$ є $x_{\tau_j+0}(\tau,\varphi)-x_{\tau_j}(\tau,\varphi)=B_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))x_{\tau_j}(\tau,\varphi)+I_j(\varphi_{\tau_j}(\tau,\varphi))$ для всіх $\tau\in R,\ \varphi\in\Im_m$.

Для відшукання інтегральної множини $x = u(t,\varphi)$ рівнянь (1) застосуємо простий ітераційний процес, який полягає в тому, що інтегральна множина шукається як границя послідовності множин

$$u^{(0)}(t,\varphi), u^{(1)}(t,\varphi), \ldots, u^{(j)}(t,\varphi), \ldots \tag{8}$$

кожна з яких є інтегральною множиною системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi,u^{(j-1)}(t,\varphi)),\ t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi, u^{(j-1)}(\tau_i,\varphi)). \end{aligned} \tag{9}$$

В якості початкової інтегральної множини беремо множину $x = 0,\ t \in R,\ \varphi \in \Im_m$.

Знайти інтегральну множину рівнянь (1) дозволяє наступне твердження.

Лемма 2. Якщо послідовність (8) інтегральних множин $x = u^{(j)}(t,\varphi),\quad t \in R,\quad \varphi \in \Im_m$ збігається

$$\lim_{j\to\infty} u^{(j)}(t,\varphi) = u(t,\varphi),$$

то гранична функція $u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину $x = u(t,\varphi),\ t \in R,\ \varphi \in \Im_m$, системи рівнянь (1).

Доведення леми 2 аналогічно доведенню леми 1 з [5].

Інтегральну множину $x = u^{(j+1)}(t,\varphi)$ рівнянь (9) шукатимемо, використовуючи функцію Гріна-Самойленка для задачі про обмежені на всій осі R розв'язки системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi),u^{(j-1)}(t,\varphi_t(\tau,\varphi))), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi),u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))) \end{aligned} \tag{10}$$

де $\varphi_t(\tau,\varphi)$ – загальний розв'язок першого з рівнянь (1).

Визначимо функцію Гріна-Самойленко через $G(t,s,\varphi)$. Тоді сімейство функцій

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi),0)))ds + \sum_{-\infty<\tau<\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0)$$

є сімейством обмежених при всіх $t \in R$ розв'язків системи рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = P(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t,\varphi_t(\tau,\varphi),0), \quad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x\big|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x + I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi),0), \end{aligned}$$

залежних від $\tau \in R, \varphi \in \Im_m$.

Це сімейство розв'язків покриває інтегральну множину:

$$x = u^{(1)}(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi)f(s,\varphi_s(t,\varphi),0)ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi)I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0). \tag{11}$$

З урахуванням нерівності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s,\varphi)\| ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \|G(t,\tau_i+0,\varphi)\| \le K \tag{12}$$

функцію $u^{(1)}(t,\varphi)$ можно оцінити таким чином

$$\left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| \le K\left[\sup_{t\in R}\max_{\varphi\in\Im_m}\|f(t,\varphi,0)\| + \sup_{i\in Z}\max_{\varphi\in\Im_m}\|I_i(\varphi,0)\|\right] \tag{13}$$

Припустимо, що константа Ліпщиця L у нерівності (2) настільки мала, що,

$$2KL < 1 \tag{14}$$

і зафіксуємо додатнє число $h \ge 2KM,$ де M визначається згідно (3).

Побудувавши інтегральну множину $x = u^{(1)}(t,\varphi)$ можемо визначити $x = u^{(2)}(t,\varphi)$ як інтегральну множину системи рівнянь (10) при $j = 1$:

$$\begin{aligned} x = u^{(2)}(t,\varphi) = &\int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) \times f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),u^{(1)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ &+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} G(t,\tau_i+0,\ \varphi_t(\tau,\varphi)) \times I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),\ u^{(1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))). \end{aligned} \tag{15}$$

З урахуванням нерівностей (12), (2) і (13) для функції $x = u^{(2)}(t,\varphi)$ отримуємо оцінку

$$\left\|u^{(2)}(t,\varphi)\right\| = \int_{-\infty}^{\infty} \left\|G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \times \Big[\left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(1)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi))) - f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\| + \left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\|\Big]ds +$$

$$+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \left\|G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \times \Big\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))) - I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0)\Big\| +$$

$$+\left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi),0)\right\|\Big] \le KL \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\|u^{(1)}(t,\varphi)\right\| + KM,$$

яку остаточно можна записати у вигляді

$$\left\|u^{(2)}(t,\varphi)\right\| \le KL\cdot KM + KM \le 2KM \le h \tag{16}$$

Припустимо тепер, що нам вдалося побудувати інтегральну множину $x = u^{(\nu)}(t,\varphi), \quad \nu = \overline{1,j}$, і встановити для неї оцінки вигляду (16), тобто

$$\left\|u^{(\nu)}(t,\varphi)\right\| \le 2KM \le h, \quad \nu = \overline{1,j}\,, \tag{17}$$

для всіх $t\in R, \varphi\in\Im_m$.

При такому припущенні ми можемо побудувати інтегральну множину $x = u^{(j+1)}(t,\varphi)$ системи рівнянь (10). Для функції, що визначає цю множину справедливе зображення

$$\begin{aligned} x = u^{(j+1)}(t,\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) \times f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ &+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi)) \times I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))), \end{aligned} \tag{18}$$

з якого отримуємо

$$\begin{aligned} \left\|u^{(j+1)}(t,\varphi)\right\| &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left\|G(t,s,\varphi)\right\| \times \Big[\left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi))) - f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\| + \\ &+ \left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\|\Big]ds + \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \left\|G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \times \\ &\times\Big[\left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))) - I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi),0)\right\| + \left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)),0)\right\|\Big] \le \\ &\le KL \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\|u^{(j)}(t,\varphi)\right\| + KM. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що з огляду на нерівності (14) і (16) маємо

$$\left\|u^{(2)}(t,\varphi)\right\| \le KL\cdot KM + KM \le 2KM \le h \tag{19}$$

На підставі методу повної математичної індукції можемо стверджувати, що для будь-якого натурального числа j можна побудувати множину $x = u^{(j+1)}(t,\varphi),\ t\in R, \varphi\in\Im_m$, причому функція $u^{(j+1)}(t,\varphi)$, визначена співвідношенням (18), допускає оцінку (19).

Оцінимо тепер різницю функцій $u^{(j+1)}(t,\varphi)$ і $u^{(j)}(t,\varphi)$. Маємо

$$\begin{aligned} &\left\|u^{(j+1)}(t,\varphi) - u^{(j)}(t,\varphi)\right\| \le \\ &\le \int_{-\infty}^{\infty} \left\|G(t,s,\varphi)\right\| \times \Big[\left\|f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi))) - f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j-1)}(s,\varphi_t(\tau,\varphi)))\right\| ds \\ &+ \sum_{-\infty<\tau_i<\infty} \left\|G(t,\tau_i+0,\varphi_t(\tau,\varphi))\right\| \Big[\left\|I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi)), u^{(j)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi))) - I_i(\varphi_{\tau_i}(t,\varphi_t(\tau,\varphi), u^{(j-1)}(\tau_i,\varphi_{\tau_i}(t,\varphi)))\right\|\Big] \le \\ &\le KL \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\Im_m} \left\|u^{(j)}(t,\varphi) - u^{(j-1)}(t,\varphi)\right\| \end{aligned}$$

для всіх $t\in R, \varphi\in\Im_m$.

З цієї оцінки випливає, що для будь-якого натурального j і всіх $t\in R, \varphi\in\Im_m$ виконується нерівність

$$\left\|u^{(j+1)}(t,\varphi) - u^{(j)}(t,\varphi)\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^j KM \tag{20}$$

Цієї нерівності достатньо, щоб стверджувати, що послідовність функцій $u^{(j)}(t,\varphi),\ j=1,2,\dots$, рівномірна відносно $t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ сходиться. Покладемо

$$u(t,\varphi)=\lim_{j\to\infty}u^{(j)}(t,\varphi). \tag{21}$$

З властивостей дограничних функцій $u^{(j)}(t,\varphi)$ випливає, що гранична функція є кусково-неперервною стосовно t з розривами першого роду при $t=\tau_i$, 2π - періодична стосовно φ_ν, $\nu=\overline{1,m}$ і задовольняє оцінку

$$\|u(t,\varphi)\|\le 2KM\le h \tag{22}$$

На підставі леми робимо висновок, що функція $u(t,\varphi)$ визначає інтегральну множину $x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ системи рівнянь (1).

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. Нехай система рівнянь (1) така, що виконується співвідношення (2) і при всіх $t\in R,\ \varphi\in\Im_m$, $\|x'\|\le h,\ \|x''\|\le h$ виконується нерівність (3). Припустимо, що відповідна їй система рівнянь

$$\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}=a(t,\varphi),\\&\frac{dx}{dt}=P(t,\varphi)x,\ \ t\ne\tau_i,\\&\Delta x\Big|_{t=\tau_i}=B_i(\varphi)x\end{aligned} \tag{23}$$

має функцію Гріна-Самойленко $G(t,s,\varphi)$, яка задовольняє нерівності (12). Тоді можна вказати таке додатнє число $L_0\le\frac{1}{2K}$, що якщо $h\ge 2KM$, то для будь-якого $L\le L_0$ система рівнянь (1) має інтегральну множину $x=u(t,\varphi),\ t\in R,\ \varphi\in\Im_m$ і при цьому функція $u(t,\varphi)$ задовольняє нерівності (22) і може бути обчислена як границя (21).

Розглянемо окремий випадок системи рівнянь (1).

Теорема 2. Нехай найбільше з власних чисел симетричної матриці $\tilde P(t,j)=\frac{1}{2}\left(P(t,j)+P^T(t,j)\right)$, задовольняє нерівності $\sup\limits_{t\in R}\max\limits_{\varphi\in\Im_m}\operatorname{Re}\lambda_i(P)\le\alpha$, а найбільше з власних чисел матриці $\sup\limits_{i\in Z}\max\limits_{\varphi\in\Im_m}\lambda_i(E+B_i(\varphi))(E+B_i^T(\varphi))\le\beta^2$. Тоді за умови $\alpha+p\ln\beta<0$ функція Гріна-Самойленка, яка задовольняє умові (12), існує і інтегральна множина рівнянь (1) у цьому випадку буде асимптотично стійкою.

Доведення. Справді, при виконанні нерівності $\alpha+p\ln\beta<0$ будь-який розв'язок (5) допускає оцінку вигляду

$$\|x(t,x_0)\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x_0\|,\ \ t\ge t_0,$$

де в якості γ можна взяти будь-яке додатнє число, яке задовольняє нерівності $0<\gamma<|\alpha+p\ln\beta|$. Отже, і матрицант $\Omega_\tau^t(t_0,\tau)$ рівнянь (1) можна оцінити таким же чином, тобто інтегральна множина рівнянь (1) є асимптотично стійкою.

ВИСНОВКИ. Встановлюються достатні умови збіжності послідовності інтегральних множин $x=u^{(j)}(t,\varphi),\ t\in R,\varphi\in\Im_m$, до граничної множини, що є інтегральною множиною системи рівнянь (1), а також досліджується поведінка розв'язку системи рівнянь (1) в околі інтегральної множини.

Список використаних джерел

1. Асроров Ф.А., Фекета П.В. Обмежені розв'язки лінійних неоднорідних систем з імпульсною дією // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2010. – Вип.20. – С. 4-12.
2. Асроров Ф.А., Перестюк Н.А. Функция Грина-Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных систем // Укр. мат. журн. 1994. т. 46, №8. – С. 1067-1071.
3. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
4. Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – К.: ИМ НАН Украины, 2007.
5. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 304 с.
6. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 288 с.
7. Фекета П.В., Асроров Ф.А. Інтегральні множини розширень неавтономних систем на торі з імпульсними збуреннями // Наук. вісн. Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. 2012. – Вип.23. – С. 125-132.
8. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive differential equations. Singapore: World Scientific 1995.

Надійшла до редколегії 24.04.14

Ф. Асроров, канд. физ.-мат. наук, научн. сотр.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Исследуются интегральные множества систем дифференциальных уравнений, подвергающиеся импульсному воздействию в фиксированные моменты времени.

F. Asrorov, PhD
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

NONLINEAR SYSTEMS WITH IMPULSIVE ACTIONS

The paper deals with the properties of integral set of system of differential equations that undergo impulsive actions at fixed moments of time.

УДК 517.947

А. Громик, канд. тех. наук
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В ОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПРОСТОРОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Методом головних розв'язків (функцій впливу та функції Гріна) у поєднанні з методом інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок алгоритмічного характеру гіперболічної крайової задачі математичної фізики в обмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі.

ВСТУП

Теорія крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки [2, 5, 19, 25, 26].

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [7, 18, 20, 21, 24,].

Зокрема, вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для гіперболічних рівнянь одержано у працях Ж. Адамара [1], Л. Гордінга [6], Ю. Митропольського, Г. Хоми, М. Громяка [27], А. Самойленка, Б. Ткача [29], М. Смирнова [31], В. Чернятика [33] та ін.

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими.

Деякі класи подібних крайових і мішаних задач розглядалися в працях Б. Болі, Дж. Уейнера [3], В. Дейнеки, І. Сергієнка, В. Скопецького [9, 30], Ю. Коляно [11], Я. Підстригача, В. Ломакіна, Ю.М.Коляно [28], Г.Ф.Шиліна [34], в яких досліджувалися низка важливих математичних моделей механіки суцільного середовища, механіки деформівного твердого тіла, термомеханіки, тощо. При цьому використовувалися методи чисельного аналізу або ж метод зведення задач в кусково-однорідному середовищі до відповідних задач для диференціальних рівнянь з коефіцієнтами у вигляді узагальнених функцій (δ -функції та її похідних) в однорідному середовищі, точний розв'язок яких побудувати неможливо.

Окрім методу відокремлення змінних та його узагальнень [32, 10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод **гібридних інтегральних перетворень**, які породженні гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду але з різними наборами коефіцієнтів [8, 15-17, 23].

У цій статті ми пропонуємо побудований методом інтегральних перетворень розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в обмеженому за аплікатною змінною кусково-однорідному просторовому середовищі, яке описується декартовою системою координат.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \left\{ (t,x,y,z);\, t>0;\, (x,y)\in\Omega_2 = \langle a;b\rangle\times\langle c;d\rangle;\; z\in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1}\left(l_{j-1};l_j\right),\, l_0\ge 0;\, l_{j-1}<l_j;\, l_{n+1}=l<+\infty \right\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу [32]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j\left(t,x,y,z\right);\, z\in \mathrm{I}_j;\; j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1(x,y,z);\ \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2\ (x,y,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_1\Big|_{z=l_0} = g_0(t,x,y);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\Big|_{z=l} = g_l(t,x,y); \tag{3}$$

умовами спряження [16]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k}=0;\ j=1,2;k=\overline{1,n}, \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0;\ c_{1k}c_{2k}>0;\left|\alpha_{11}^0\right|+\left|\beta_{11}^0\right|\neq 0;\ \left|\alpha_{22}^{n+1}\right|+\left|\beta_{22}^{n+1}\right|\neq 0;\ f(t,x,y,z)$$
$$=\left\{f_1(t,x,y,z),\,f_2(t,x,y,z),\ldots,\,f_{n+1}(t,x,y,z)\right\};$$

$$g^1(x,y,z)=\left\{g_1^1(x,y,z),\,g_2^1(x,y,z),\ldots,\,g_{n+1}^1(x,y,z)\right\};\ g^2(x,y,z)=\left\{g_1^2(x,y,z),\,g_2^2(x,y,z),\ldots,\,g_{n+1}^2(x,y,z)\right\};$$

$g_0(t,x,y)$ $g_l(t,x,y)$ – задані обмежені неперервні функції; $u(t,x,y,z)=\left\{u_1(t,x,y,z),u_2(t,x,y,z),\ldots,u_{n+1}(t,x,y,z)\right\}$ – шукана функція.

Зауважимо, що: 1) у випадку $\chi_j^2\equiv 0$ рівняння (1) є класичними тривимірними неоднорідними хвильовими рівняннями (рівняннями коливань) для ортотропного середовища; 2) у випадку $\alpha_{11}^k\equiv 0,\ \beta_{11}^k=1;\ \alpha_{12}^k\equiv 0,\ \beta_{12}^k=1;$ $\alpha_{21}^k\equiv E_1^k,\ \beta_{21}^k=0;\ \alpha_{22}^k\equiv E_2^k,\ \beta_{22}^k=0,$ де $E_1^k, E_2^k,\ k=\overline{1,n}$ – модулі Юнга, умови спряження (4) є умовами ідеального механічного контакту.

Отже, у зазначених випадках, розглянута задача є математичною моделлю вимушених коливних процесів у обмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі, яке описується декартовою системою координат.

ОСНОВНА ЧАСТИНА

Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури області Ω_2. Зауважимо, що випадки $\Omega_2=$ $=(-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$, $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(0;+\infty)$ розглянуто в [12], а випадки $\Omega_2=(-\infty;+\infty)\times(0;b)$; $\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;+\infty)$ – в [13].

Розглянемо область $\Omega_2=(0;+\infty)\times(0;b)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)u_j\Big|_{x=0}=\theta_j(t,y,z);\ \frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\Big|_{x=+\infty}=0;k=0,1;\ j=\overline{1,n+1} \tag{5}$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)u_j\Big|_{y=0}=\omega_j^1(t,x,z);\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)u_j\Big|_{y=b}=\omega_j^2(t,x,z);\ j=\overline{1,n+1} \tag{6}$$

щодо змінної y, де $p,h_s\,(s=1,2)$ – деякі невід'ємні сталі; $\theta(t,y,z)=\left\{\theta_1(t,y,z),\theta_2(t,y,z),\ldots,\theta_{n+1}(t,y,z)\right\};$ $\omega^1(t,x,z)=\left\{\omega_1^1(t,x,z),\omega_2^1(t,x,z),\ldots,\omega_{n+1}^1(t,x,z)\right\};$ $\omega^2(t,x,z)=\left\{\omega_1^2(t,x,z),\omega_2^2(t,x,z),\ldots,\omega_{n+1}^2(t,x,z)\right\}$ – задані обмежені неперервні функції.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22, 23].

До задачі (1) – (6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної x [22]:

$$F_{+x}\left[g(x)\right]=\int_0^{+\infty} g(x)\,K_x(x,\sigma)\,dx\equiv\tilde g(\sigma), \tag{7}$$

$$F_{+x}^{-1}\left[g(\sigma)\right]=\int_0^{+\infty}\tilde g(\sigma)K_x(x,\sigma)\,d\sigma\equiv g(x), \tag{8}$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2\tilde g(\sigma)+K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\Big|_{x=0}, \tag{9}$$

де ядро перетворення

$$K_x(x,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3' = \{(t,y,z) | t>0;\ y\in(0;b);\ z\in K_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{u}_j + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_j = \tilde{F}_j(t,\sigma,y,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^1(\sigma,y,z),\ \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_j^2(\sigma,y,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{u}_1\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t,\sigma,y);\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1}\Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(t,\sigma,y); \tag{12}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right)\tilde{u}_j\Big|_{y=0} = \tilde{\omega}_j^2(t,\sigma,z);\left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right)\tilde{u}_j\Big|_{y=b} = \omega_j^2(t,\sigma,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}, \tag{14}$$

де

$$\tilde{F}_j(t,\sigma,y,z) = \tilde{f}_j(t,\sigma,y,z) + a_{xj}^2 K_x(0,\sigma)\theta_j(t,y,z);\ j=\overline{1,n+1}.$$

До задачі (10) – (14) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y [22]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)] = \int_0^b g(y)v_k(y)dy \equiv g_k, \tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \tag{16}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0)\left(-\frac{dg}{dy} + h_1 g\right)\Big|_{y=0} + v_k(b)\left(\frac{dg}{dy} + h_2 g\right)\Big|_{y=b}, \tag{17}$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}}, \qquad \|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y)dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1+h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2+h_1^2)(\gamma_k^2+h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1+h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z) | t>0;\ z\in K_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jk}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{jk}}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jk} = \tilde{G}_{jk}(t,\sigma,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{18}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jk}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}^1(\sigma,z);\ \frac{\partial \tilde{u}_{jk}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}^2(\sigma,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}; \tag{19}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{u}_{1k}\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t,\sigma);\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)\tilde{u}_{n+1,k}\Big|_{z=l} = \tilde{g}_{lk}(t,\sigma) \tag{20}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{s}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^{s}\right)\tilde{u}_{sk}-\left(\alpha_{j2}^{s}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^{s}\right)\tilde{u}_{s+1,k}\right]\Bigg|_{z=l_s}=0;\ j=1,2;\ s=\overline{1,n}, \tag{21}$$

де

$$\tilde{G}_{jk}\left(t,\sigma,z\right)=\tilde{F}_{jk}\left(t,\sigma,z\right)+a_{yj}^{2}v_k\left(0\right)\tilde{\omega}_j^1\left(t,\sigma,z\right)+a_{yj}^{2}v_k\left(b\right)\tilde{\omega}_j^2\left(t,\sigma,z\right);\ j=\overline{1,n+1}.$$

До задачі (18) – (21) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з n точками спряження щодо змінної z [23]:

$$F_{jn}\left[g\left(z\right)\right]=\int_{l_0}^{l}g\left(z\right)V\left(z,\lambda_j\right)\sigma\left(z\right)dz\equiv g_j, \tag{22}$$

$$F_{jn}^{-1}\left[g_j\right]=\sum_{j=1}^{\infty}g_j\frac{V\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2}\equiv g\left(z\right), \tag{23}$$

$$\begin{gathered}F_{jn}\left[\sum_{j=1}^{n+1}a_{zj}^{2}\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_j-z\right)\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\lambda_j^2g_j-\sum_{j=1}^{n+1}k_j^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}g\left(z\right)V_i\left(z,\lambda_j\right)\sigma_i dz-\\ -a_{z1}^{2}\sigma_1\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\left(\alpha_{11}^{0}\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^{0}g\right)\Bigg|_{z=l_0}+a_{z,n+1}^{2}\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz}+\beta_{22}^{n+1}g\right)\Bigg|_{z=l}.\end{gathered} \tag{24}$$

У формулах (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V\left(z,\lambda_j\right)=\sum_{i=1}^{n+1}V_i\left(z,\lambda_j\right)\theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta(l_i-z);\ \sigma\left(z\right)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta\left(z-l_{i-1}\right)\theta\left(z-l_i\right);\ \sigma_k=\frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2}\prod_{m=k}^{n}c_{1m}c_{2m};k=\overline{1,n};\sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{z,n+1}};$$

$$V_m\left(z,\lambda_j\right)=\prod_{i=m}^{n}c_{2i}q_{i+1,j}G_m\left(z,\lambda_j\right);m=\overline{1,n};\ V_{n+1}\left(z,\lambda_j\right)=\omega_{n2}\left(\lambda_j\right)\cos\left(q_{n+1,j}z\right)-\omega_{n1}\left(\lambda_j\right)\sin\left(q_{n+1,j}z\right);$$

$$G_m\left(z,\lambda_j\right)=\omega_{m-1,2}\left(\lambda_j\right)\cos\left(q_{mj}z\right)-\omega_{m-1,1}\left(\lambda_j\right)\sin\left(q_{mj}z\right);\ \left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^2=\int_{l_0}^{l}V^2\left(z,\lambda_j\right)\sigma\left(z\right)dz=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{l_{k-1}}^{l_k}V_k^2\left(z,\lambda_j\right)\sigma_k dz;$$

$$q_s\equiv q_s\left(\lambda\right)=a_{z,s}^{-1}\left(\lambda^2+k_s^2\right)^{1/2};q_{sj}=q_s\left(\lambda_j\right);\ v_{ip}^{k1}\left(q_{sj}l_m\right)=-\alpha_{ip}^{k}q_{sj}\sin\left(q_{sj}l_m\right)+\beta_{ip}^{k}\cos\left(q_{sj}l_m\right);\ \omega_{01}\left(\lambda_j\right)=v_{11}^{01}\left(q_{1j}l_0\right);$$

$$\omega_{02}\left(\lambda_j\right)=v_{11}^{02}\left(q_{1j}l_0\right);\ v_{ip}^{2}\left(q_{sj}l_m\right)=\alpha_{ip}^{k}q_{sj}\cos\left(q_{sj}l_m\right)+\beta_{ip}^{k}\sin\left(q_{sj}l_m\right);\ \psi_{pm}^{k}\left(xy\right)=v_{11}^{kp}\left(x\right)v_{22}^{km}\left(y\right)-v_{21}^{kp}\left(x\right)v_{12}^{km}\left(y\right);$$

$\omega_{pm}\left(\lambda_j\right)=\omega_{p-1,2}\left(\lambda_j\right)\psi_{1m}^{p}\left(q_{pj}l_p,q_{p+1,j}l_p\right)-\omega_{p-1,1}\left(\lambda_j\right)\psi_{2m}^{p}\left(q_{pj}l_p,q_{p+1,j}l_p\right)$, де λ_j – корені трансцендентного рівняння $\Delta_n\left(\lambda\right)\equiv v_{22}^{n+1,2}\left(q_{n+1}l\right)\omega_{n1}\left(\lambda\right)-v_{22}^{n+1,1}\left(q_{n+1}l\right)\omega_{n2}\left(\lambda\right)=0$, які утворюють дискретний спектр.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+q_1^2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z2}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+q_2^2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z,n+1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+q_{n+1}^2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{G}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \tilde{G}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{G}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \tilde{u}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1k}^1\left(\sigma,z\right)\\ \tilde{g}_{2k}^1\left(\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,k}^1\left(\sigma,z\right)\end{bmatrix};\ \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \tilde{u}_{2k}\left(t,\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}\tilde{g}_{1k}^2\left(\sigma,z\right)\\ \tilde{g}_{2k}^2\left(\sigma,z\right)\\ \dots\dots\dots\\ \tilde{g}_{n+1,k}^2\left(\sigma,z\right)\end{bmatrix}, \tag{26}$$

де

$$q_j^2\left(\sigma,\gamma_k\right)=a_{xj}^2\sigma^2+a_{yj}^2\gamma_k^2+\chi_j^2;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots]=\left[\int_{l_0}^{l_1}\dots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1 dz\int_{l_1}^{l_2}\dots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2 dz\dots\int_{l_n}^{l}\dots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1}dz\right] \tag{27}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda_j^2+q_j^2(\sigma,\gamma_k)+k_j^2\right)\tilde{u}_{ikj}(t,\sigma)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{G}_{ikj}(t,\sigma)-\frac{\sigma_1 a_{z1}^2}{\alpha_{11}^0}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma)+\frac{\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(t,\sigma), \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{ikj}\bigg|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{jk}^1(\sigma),\ \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{u}_{ikj}\bigg|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}^2(\sigma), \tag{29}$$

де

$$\tilde{u}_{ikj}(t,\sigma)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{u}_{ik}(t,\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_j dz;\ i=\overline{1,n+1},\ \tilde{G}_{ikj}(t,\sigma)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{G}_{ik}(t,\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1},$$

$$\tilde{g}_{ikj}^1(\sigma)=\int_{l_{i-1}}^{l_i}\tilde{g}_{ik}^2(\sigma,z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz;\ i=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,\dots q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2=q_1^2-q_i^2\ \left(i=\overline{1,n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{u}_{kj}}{dt^2}+\Delta^2(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)\tilde{u}_{kj}=\tilde{G}_{kj}(t,\sigma)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(t,\sigma), \tag{30}$$

$$\tilde{u}_{kj}\Big|_{t=0}=\tilde{g}_{kj}^1(\sigma),\ \frac{d\tilde{u}_{kj}}{dt}\bigg|_{t=0}=\tilde{g}_{kj}^2(\sigma), \tag{31}$$

де

$$\tilde{u}_{kj}(t,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{ikj}(t,\sigma);\ \Delta^2(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)=\lambda_j^2+a_{x1}\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2;\ \tilde{G}_{kj}(t,\sigma)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{G}_{ikj}(t,\sigma),\ \tilde{g}_{kj}^1(\sigma)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}^1(\sigma),\ \tilde{g}_{kj}^2(\sigma)=\sum_{i=1}^{n+1}\tilde{g}_{ikj}^2(\sigma).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (30), (31) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{kj}(t,\sigma)=&\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)t\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)}\tilde{g}_{kj}^2(\sigma)+\frac{d}{dt}\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)t\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)}\tilde{g}_{kj}^1(\sigma)+\int_0^t\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)(t-\tau)\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\lambda_j)}\times\\&\times\left[\tilde{G}_{kj}(\tau,\sigma)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_j)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_j)\tilde{g}_{lk}(\tau,\sigma)\right]d\tau.\end{aligned} \tag{32}$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots]=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{\infty}\dots\frac{V_1(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\\ \sum_{j=1}^{\infty}\dots\frac{V_2(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_{j=1}^{\infty}\dots\frac{V_{n+1}(z,\lambda_j)}{\left\|V(z,\lambda_j)\right\|^2}\end{bmatrix}. \tag{33}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{u}_{kj}\left(t,\sigma\right)\right]$, де функція $\tilde{u}_{kj}\left(t,\sigma\right)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)-(21):

$$\tilde{u}_{ik}\left(t,\sigma,z\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\tilde{g}_{kj}^{2}\left(\sigma\right)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\tilde{g}_{kj}^{1}\left(\sigma\right)+\int_0^t\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)\left(t-\tau\right)\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\lambda_j\right)}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\tilde{G}_{kj}\left(\tau,\sigma\right)-\sigma_1a_{z1}^{2}\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_1\left(l_0,\lambda_j\right)\tilde{g}_{0k}\left(\tau,\sigma\right)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^{2}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}\left(l,\lambda_j\right)\tilde{g}_{lk}\left(\tau,\sigma\right)\right]d\tau\right\}\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^{2}};\ i=\overline{1,n+1}. \quad (34)$$

До функцій $\tilde{u}_{ik}\left(t,\sigma,z\right),$ визначених формулами (34), послідовно застосуємо обернені оператори Λ_{yk}^{-1} за правилом (16) та F_{+x}^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_i\left(t,x,y,z\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^{l}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{ik}\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)f_k\left(\tau,\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k\,d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_0^{b}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^{1}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k\,d\xi d\eta d\zeta+\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_0^{b}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^{2}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k\,d\xi d\eta d\zeta+$$
$$+\int_0^t\int_0^{\infty}\int_0^{b}\left[W_i^{1}\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_0\left(\tau,\xi,\eta\right)+W_i^{1}\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_l\left(\tau,\xi,\eta\right)\right]d\xi d\eta d\tau+ \quad (35)$$
$$+a_{xj}^{2}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{b}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xik}\left(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta\right)\theta_k\left(\tau,\eta,\zeta\right)\sigma_k\,d\eta d\zeta d\tau+$$
$$+a_{yj}^{2}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}\left[W_{yik}^{1}\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k^{1}\left(\tau,\xi,\zeta\right)+W_{yik}^{2}\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k^{2}\left(\tau,\xi,\zeta\right)\right]\sigma_k\,d\xi d\zeta d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1) – (6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_r,\lambda_j\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_r,\lambda_j\right)}\frac{V_i\left(z,\lambda_j\right)V_k\left(\xi,\lambda_j\right)}{\left\|V\left(z,\lambda_j\right)\right\|^{2}}\frac{v_r\left(y\right)v_r\left(\eta\right)}{\left\|v_r\right\|^{2}}K_x\left(x,\sigma\right)K_x\left(\xi,\sigma\right)d\sigma;i,k=\overline{1,n+1}$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти $W_i^{1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=-\sigma_1a_{z1}^{2}\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}E_{i1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0\right)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти $W_i^{2}\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^{2}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{i,n+1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l\right)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти $W_{xik}\left(t,x,y,\eta,z,\xi\right)=E_{ik}\left(t,x,0,y,\eta,z,\xi\right)$ абсцисної матриці Гріна, компоненти $W_{yik}^{1}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$ лівої ординатної матриці Гріна та компоненти $W_{yik}^{2}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{ik}\left(t,x,\xi,y,b,z,\zeta\right)$ правої ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{ik}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_i^{s}\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right),$ $W_{xik}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right),W_{yik}^{s}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right),\left(s=1,2\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_i\left(t,x,y,z\right),$ визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [35].

Єдиність розв'язку (35) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) задачі (1)-(6).

Методами з [4, 14] можна довести що при відповідних умовах на вихідні дані задачі, формули (35) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої гіперболічної початково-крайової задачі.

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^{2}=a_{yj}^{2}=a_{zj}^{2}\equiv a_j^{2}>0$ формули (35) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)-(6) в ізотропному (*n+1*) – шаровому обмеженому за координатою z просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^{0},\beta_{11}^{0};\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z=l_0,z=l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій

Зауваження 3. Параметр p дає можливість виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадку задання на поверхні $x=0$ крайової умови 1-го $\left(h\to\infty\right)$ та 2-го роду $\left(p\to0\right).$

Зауваження 4. Параметри $h_j\left(j=1,2\right)$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $y=0,y=b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,x,y,z)$, $g_j^1(x,y,z)$, $g_j^2(x,y,z)$, $g_0(t,x,y), g_l(t,x,y), \theta_j(t,y,z), \omega_j^1(t,x,z), \omega_j^2(t,x,z)$ проводиться безпосередньо.

ВИСНОВКИ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в обмеженому кусково-однорідному просторовому середовищі, яке описується декартовою системою координат. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (акустика, гідродинаміка, коливання механічних систем).

Список використаних джерел

1.Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978.
2. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966.
3. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964.
4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958.
5. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища шк., 1995.
6. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. – М.: ИЛ, 1961.
7. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1998.
8. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.І. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2011.
9. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998.
10. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002.
11. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992.
12. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в обмежених багатошарових просторових областях // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2013. – Вип. 8. – С. 84-104.
13. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в обмежених кусково-однорідних просторових областях // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2012. – Вип. 7. – С. 124-139.
14. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними в кусково-однорідних середовищах: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. докт. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "Диференціальні рівняння". – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2008.
15. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998.
16. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці : Прут, 2001.
17. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці : Прут, 2004.
18. Крылов Н.В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – М.: Наука, 1985.
19. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.
20. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
21. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973.
22. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К.,1983. – 60 с. – (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
23. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997.
24. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці : Прут, 2003.
25. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.
26. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957.
27. Митропольский Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук. думка, 1991.
28. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984.
29. Самойленко А.М., Ткач Б.П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными.– К.: Наук. думка, 1992.
30. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991.
31. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
33. Чернятин В.А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. – М.: Изд-во МГУ, 1991.
34. Шилин Г.Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1983.
35. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

Надійшла до редколегії 17.11.13

А. Громик, канд. тех. наук, препод.
Подольский государственный аграрно-технический университет, Каменец-Подольский,
И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф.
Каменец-Подольский НУ имені Ивана Огиенко, Каменец-Подольский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ОГРАНИЧЕННОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СРЕДЕ

Методом главных решений (функций влияния и функций Грина) в сочетании с методом интегральных преобразований построено точное аналитическое решение алгоритмического характера гиперболической краевой задачи математической физики в ограниченной кусочно-однородной пространственной среде.

A. Gromyk, PhD (eng).
Podolsky State Agrarian Technical University, Kamenetz-Podolsk,
I. Konet, Full Doctor
Ivan Ogienko National University of Kamenetz-Podolsk, Kamenetz-Podolsk

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM OF MATHEMATICAL PHYSICS IN CONFINED PIECEWISE HOMOGENEOUS ATTITUDE ENVIRONMENT

Method of main solutions (functions of influence and function of Green) in conjunction with the method of integral transformation built an exact analytical solution of the algorithmic nature of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in confined piecewise homogeneous attitude environment.

УДК:517.9

О. Лопотко, канд. фіз.-мат. наук
Національний лісотехнічний університет України, Львів

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ЯДЕР, ЩО ПОВ'ЯЗАНІ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВИРАЗОМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Одержано інтегральне зображення додатно визначених ядер двох змінних зв'язаних з виразом другого порядку еліптичного типу. Ця теорема узагальнює теорему про інтегральне зображення додатно визначених ядер зв'язаних з оператором Лапласа.

Вступ

У статті [3] М.Г.Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер. Згодом [1] Ю.М. Березанский запропонував метод одержання інтегральних зображень за допомогою власних функцій диференціальних операторів. У [2, с.749] одержано інтегральне зображення додатно визначених (д.в.) ядер, що пов'язані з виразом Лапласа

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{1}$$

У даній статті розглядається інтегральне зображення ядер, що пов'язані з еліптичним виразом

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\rho\varphi_1\left(x_1x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+2\rho\varphi_2\left(x_1x_2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{2}$$

Тут (φ_1,φ_2 – деякі аналітичні функції, ρ – дійсне число)

Теорема. Нехай $K\left(x,y\right)\in C\left(R^2\times R^2\right)$ – д.в. ядро; $\chi_\xi^{(0)}\left(x;\lambda\right)$ і $\chi_\xi^{(1)}\left(x;\lambda\right)$ – функціонали, які визначені над простором Z (цілих функцій, зі рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині). Для того, щоб при будь-яких $x,y\in R^2$ мало місце зображення

$$K\left(x;y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}\left(x;\lambda\right)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}\left(y,\lambda\right)\right),d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}\left(\lambda\right), \tag{3}$$

необхідно і достатньо, щоб $K\left(x,y\right)$ задовольняла (у сенсі узагальнених функцій Л.Шварца) рівняння

$$L_xK=L_yK, \tag{4}$$

де $\sum\left(\lambda\right)=\left\|\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$ – аналітична міра, яка визначається неоднозначно.

Доведення. Достатність. Нехай ядро $K\left(x,y\right)\in C\left(R^2\times R^2\right)$ додатно визначено і для нього виконується (4). Тоді, згідно з теоремою 3.1 [2, с. 653], маємо інтегральне зображення у вигляді абсолютно збіжного інтеграла

$$K\left(x;y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\Omega_\lambda\left(x;y\right)d\rho\left(\lambda\right), \tag{5}$$

де $d\rho\left(\lambda\right)$ – деяка міра, $\Omega_\lambda\left(x;y\right)$ – родина елементарних д.в. ядер. Зведемо зображення (5) до зображення (4). Для цього знайдемо формулу для розв'язку рівняння $Lu=\lambda u$. Нехай $u\left(x_1,x_2\right)$ – розв'язок рівняння на всій площині

$$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2\rho\varphi_1\left(x_1x_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}+2\rho\varphi_2\left(x_1x_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2}=\lambda u. \tag{6}$$

Так, як кожний розв'язок еліптичного рівняння з аналітичними коефіцієнтами є аналітичним, то існує ціла по кожній з комплексних змінних $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ функція $u\left(z_1,z_2\right)$, яка при $z_1=x_1;\ z_2=x_2$ співпадає з $u\left(x_1,x_2\right)$ і задовольняє (6).

Позначимо $v\left(x_1;x_2\right)=u\left(x_1,ix_2\right)$. Тоді рівність (6) набуде такого вигляду

$$\frac{\partial^2v}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2v}{\partial x_2^2}+2\rho\varphi_1\left(x_1x_2\right)\frac{\partial v}{\partial x_1}+2\rho\varphi_2\left(x_1x_2\right)\frac{\partial v}{\partial x_2}=\lambda v. \tag{7}$$

Розв'яжемо рівняння (7) методом Рімана. Для цього спочатку знайдемо функцію Рімана [5, с.135 –136]. .

Нехай $v=v\left(z\right)$, де $z=\sqrt{\left(x_1-\xi\right)^2-\left(x_2-\eta\right)^2}$. Тоді ліву частину рівняння (7) вигляд можна записати у вигляді

$$v''\left(z\right)\left(z_{x_1}^2-z_{x_2}^2\right)+v'\left(z\right)\left(z_{x_1x_1}-z_{x_2x_2}\right)+2\rho v'\left(z\right)z_{x_1}\varphi_1\left(z\right)+2\rho v'\left(z\right)z_{x_2}\varphi_2\left(z\right).$$

Враховуючи рівності $z_{x_1}^2 - z_{x_2}^2$ =1, $z_{x_1x_1} - z_{x_2x_2}$ =1 і позначивши $\varphi_1(z) = \dfrac{1}{x_1 - \xi}$, $\varphi_2 = \dfrac{1}{i(x_2 - \eta)}$ з (7) отримаємо

$$v''(z) + \frac{1+2\rho}{z} v'(z) = \lambda v . \tag{8}$$

Рівняння (8) є рівняння Ейлера, яке має розв'язки [4].

$$\frac{J_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho}; \frac{Y_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho},$$

де J_ρ, Y_ρ – функції Беселя I і II роду. Розглянемо тепер парний розв'язок рівняння(8), тобто $\dfrac{J_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho}$,

Якщо тепер ввести позначення

$$J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda} z\right) = \frac{2^\rho \Gamma(\rho+1) J_\rho\left(\sqrt{-\lambda} z\right)}{\left(\sqrt{-\lambda} z\right)^\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+K+1)K!} (-\lambda)^K \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

$$\left(J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda} z\right)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho+K+1)K!} (-\lambda)^K 2k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-1},$$

то одержимо розв'язок (8), який задовольняє умови $J_\rho^-(0) = 1, J_\rho^{-'}(0) = 0$.

Тоді розв'язок рівняння (8), можна записати через початкові умови наступним чином

$$\begin{aligned} v(x_1 x_2) = {} & \frac{1}{2}\left[v(x_1 - x_2, 0) + v(x_1 + x_2, 0)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} x_2 \int_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) v(\xi, 0)\, d\xi + \\ & + \frac{1}{2}\int_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) v'(\xi, 0)\, d\xi . \end{aligned} \tag{9}$$

Функцію $v(z_1, z_2)$ визначено для довільних z_1, z_2 і є цілою за кожною змінною, зокрема є цілою функція $v(z_1, 0)$ та її похідна $v'(z_1, 0)$. Звідси випливає, що кожний додаток у правій частині (9) можна продовжити за x_2 у комплексну площину z_2. Поклавши $z_2 = -ix_2$ і враховуючи, що $v(x_1; -ix_2) = u(x_1; x_2)$, одержуємо такий розв'язок рівняння (6)

$$\begin{aligned} u(x_1 x_2) = {} & \frac{1}{2}\left[u(x_1 - ix_2, 0) + u(x_1 + ix_2, 0)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} x_2 \int_{x_1 - ix_2}^{x_1 + ix_2} J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) u(\xi, 0)\, d\xi + \\ & + \frac{1}{2}\int_{x_1 - ix_2}^{x_1 + ix_2} J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) u'(\xi, 0)\, d\xi . \end{aligned} \tag{10}$$

Тут інтегрування виконується по будь-якій спрямляючій дузі комплексної площини, яка з'єднує точки $x_1 + ix_2$ і $x_1 - ix_2$.

Запишемо формулу (10) у скороченому вигляді. Позначимо через *Z* – простір цілих функцій $\varphi(\xi)$ однієї комплексної змінної ξ з рівномірною збіжністю на кожній обмеженій множині. Тоді рівності

$$\begin{aligned} \left(X_\xi^{(0)}(x,\lambda); \varphi(\xi)\right) &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x_1 + ix_2) + \varphi(x_1 - ix_2)\right] - \frac{1}{2}\sqrt{-\lambda} x_2 \int_{x_1 + ix_2}^{x_1 - ix_2} J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) \varphi(\xi)\, d\xi \\ \left(X_\xi^{(1)}(x,\lambda); \varphi(\xi)\right) &= \frac{1}{2}\int_{x_1 + ix_2}^{x_1 - ix_2} J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1 - \xi)^2 - x_2^2}\right) \varphi(\xi)\, d\xi; \quad \left(x = \left(x_1, x_2 \in R^2; \varphi \in Z\right)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

визначають лінійні неперервні функціонали $\chi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi^{(1)}(x;\lambda)$ у просторі *Z*. Використовуючи (11), формулу (10) вигляду можна записати у вигляді

$$u(x) = u(x_1; x_2) = \left(\chi_\xi^{(0)}(x;\lambda); u(\xi;0)\right) + \left(\chi_\xi^{(1)}(x;\lambda); u_\eta'(\xi;0)\right),\ \left(x = (x_1; x_2) \in E_2\right). \tag{12}$$

Функції $\chi^{(0)}(x;\lambda)$ і $\chi^{(1)}(x;\lambda)$ утворюють у деякому сенсі фундаментальну систему розв'язків (6). За допомогою цих розв'язків запишемо елементарні ядра. Для цього введемо простір $Z \otimes Z$, який складається із функцій

$\varphi(\xi;\eta)$ двох комплексних змінних ξ,η, які є цілими за кожною змінній. Збіжність в $Z\otimes Z$ є рівномірною у кожній обмеженій у просторі $((\xi;\eta)\in C_2)$ множині.

Далі побудуємо $\chi_\xi^{(\alpha)}\otimes\chi_\eta^{(1)}$, де $\alpha,\beta=0,1$. Нехай $\alpha=0;\ \beta=1$. Тоді маємо

$$\left(X_\xi^{(0)}(x,\lambda)\otimes X_\eta^{(1)}(y,\lambda);\right)=\frac{1}{4}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}\left[\varphi(x_1+ix_2,\eta)+\varphi(x_1-ix_2,\eta)\right]J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)d\eta-$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-\lambda}x_2\int\limits_{x_1+ix_2}^{x_1-ix_2}\int\limits_{y_1+iy_2}^{y_1-iy_2}J_\rho^{-'}\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(x_1-\xi)^2+x_2^2}\right)J_\rho^-\left(\sqrt{-\lambda}\sqrt{(y_1-\eta)^2+y_2^2}\right)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\,,$$

$$\left(x=(x_1,x_2),\,y=(y_1,y_2)\in R^2\right).$$

Нехай тепер $\Omega_\lambda(x,y)$ – множина елементарних д.в. ядер з (5) для ядра $K(x,y)$. За змінними x, y функція $\Omega_\lambda(x,y)$ задовольняє рівняння (6), тому ця функція є цілою за x_1,y_1,x_2,y_2. Тоді для всіх ξ маємо, що $\Omega_\lambda((\xi,0),y)$ і $\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi;0),y)$ також задовольняють за змінною y рівняння (6), а тому до ядра $\Omega_\lambda(x,y)$ можна застосувати спочатку перетворення (12) (за x), а потім за y. У результаті одержимо

$$\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\right),\tag{13}$$

де

$$\Omega_\lambda^{(0,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\Omega_\lambda((\xi,0),(\eta,0)),\quad \Omega_\lambda^{(1,0)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial x_2}((\xi,0),(\eta,0)),$$

$$\Omega_\lambda^{(0,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial\Omega_\lambda}{\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0)).\quad \Omega_\lambda^{(1,1)}((\xi,0),(\eta,0))=\frac{\partial^2\Omega_\lambda}{\partial x_2\partial y_2}((\xi,0),(\eta,0)).$$

Підставивши (13) у (5) одержимо (3), якщо покласти $\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta)=\int\limits_\Delta\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\,d\rho(\lambda)$.

Інтеграл (3) розуміємо, як $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum\limits_{\alpha,\beta}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda),\,d\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\right)=\lim\sum\limits_{N=1}^{N}\sum\limits_{\alpha,\beta}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x,\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(\lambda_\nu),\,\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta_\nu)\right)$,

де $\Delta_1,\ldots\Delta_N$ – розбиття осі $(-\infty,+\infty)$ на проміжку $\lambda_\nu\in\Delta_\nu$, а границя береться по продовженню розбиття. Якщо $\chi_\xi^{(\alpha)}(\lambda)$ достатньо малі, а λ – достатньо велике, то ця границя існує і не залежить від способу розбиття і вибору точок $\lambda_\nu\in\Delta_\nu$.

Тепер доведемо аналітичність міри $\sum(\Delta)$. Для цього розглянемо матрицю $\sum(\lambda)=\left\|\sigma_{\xi,n}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)\right\|_{\alpha,\beta=0}^{1}$, елементам якої є функції $\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\lambda)$.Ці функції є цілими за ξ,η і мають обмежену варіацію за λ. Покажемо, що ця матриця є аналітичною мірою, тобто, $\sum(\Delta)=\sum(b)-\sum(a)$ ($\Delta=(a,b)$) додатно визначеною у такому сенсі: для довільних функціоналів $t_\xi^{(0)},\,t_\xi^{(1)}$, які визначені над простором Z, виконується нерівність

$$\sum_{\alpha,\beta}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),\,t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)>0\,.$$

Для цього спочатку виберемо пару точок $x_\alpha\in R^1$ $(\alpha=0,1)$ таким чином щоб матриця $\left\|\chi_\xi^\alpha(x_\alpha)\right\|_{\alpha=0}^{1}$ була невираженою, а кожний функціонал представимо в вигляді $t_\xi^{(\alpha)}=\sum\limits_{k=0}^{1}C_k\chi_\xi^{(\alpha)}(x_k;\lambda)(\alpha=0,1)$. Тоді

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\sigma_{\xi,\eta}^{(\alpha,\beta)}(\Delta),\,t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int\limits_\Delta\left(\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\cdot t_\xi^{(\alpha)}\otimes t_\eta^{(\beta)}\right)d\rho(\lambda)=$$

$$=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\int\limits_\Delta\left(\Omega_\lambda^{(\alpha,\beta)}((\xi,0),(\eta,0))\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}C_j\overline{C}_k\chi_\xi^{(\alpha)}(x_j;\lambda)\otimes\chi_\xi^{(\beta)}(x_\eta;\lambda)\right)\cdot d\rho(\lambda)=$$

$$=\int\limits_\Delta\sum_{j,k}^{1}\Omega_\lambda\left((\xi,x_j),(\eta,\chi_k)\right)C_j\overline{C}_k\,d\rho(\lambda)\geq 0.$$

Достатність доведено.

Необхідність. Нехай маємо інтегральне зображення (3). Потрібно довести рівність (4). Так, як ядро $\Omega_\lambda(x,y)=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(\chi_\xi^{(\alpha)}(x;\lambda)\otimes\chi_\eta^{(\beta)}(y;\lambda)\right)$ сумовано за $(x,y,\lambda)\in\Im\times\Im\times R^2$ ($\Im\in R^2$ і обмежена) відносно міри $dxdyd\rho(\lambda)$, тому отримаємо:

$$\left\langle L^+u,v\right\rangle=\int_\Im\int_\Im\left\{\int_{R^2}\Omega_\lambda(x;y)d\rho(\lambda)\right\}\left(L^+u\right)(y)\overline{v(x)}dxdy=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\Omega_\lambda(x;y)\left(L^+u\right)(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=$$
$$=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\left(\overline{L_y^+}\Omega_\lambda\right)(x;y)u(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\left(L_x^+\Omega_\lambda\right)(x;y)u(y)\overline{v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)= \tag{14}$$
$$=\int_{R^2}\left\{\int_\Im\int_\Im\Omega_\lambda(x;y)u(y)\overline{L^+v(x)}dxdy\right\}d\rho(\lambda)=\left\langle u;L^+v\right\rangle$$

Тут L^+ – звуження на $u,v\in C_0^\infty(\Im)$.

Із (14) випливає (4).

Теорему доведено.

Зауваження. Якщо у (2) p=0 одержимо зображення (6.14) із [2, с.752]

Висновки

Доведена теорема стверджує що зображення (3.7) з [2, с. 652] для додатно визначеного ядра через сукупність додатно визначених елементарних ядер $\Omega_\lambda(x,y)$ можна одержати не тільки для рівняння

$\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=\lambda u$ але і для більш складного рівняння $\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2\rho\varphi_1(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}+2\rho\varphi_2(x_1x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2}=\lambda u$,

де (φ_1,φ_2 – деякі аналітичні функції, ρ – дійсне число).

Список використаних джерел

1. Березанский Ю.М. Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям диференцциальних операторов // Докл. АН. СССР. – 1956. – 108, №3. – С.893–896.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 798 с.
3. Крейн М.Г. Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на елементарные произведения // Докл. АН. СССР. – 1946. – 53, №1. – С.3–6.
4. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М: Из-во "Физ.-мат.литература", 2001 – 300 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 724 с.

Надійшла до редколегії 10.03.14

О. Лопотко, канд. физ.-мат. наук
Национальний лесотехнический университет Украины, Львов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР, СВЯЗАННЫХ С ВЫРАЖЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЕЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Получено интегральное представление положительно определенных ядер двух переменных связанных с выражением второго порядка елиптического типа. Эта теорема обобщает теорему об интегральном представлении положительно определенных ядер связанных с оператором Лапласа.

O. Lopotko, PhD
National Forestry and Wood-Technology University of Ukraine, Lviv

THE INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVE DEFINITE KERNELS ASSOCIATED WITH THE EXPRESSION OF SECOND ORDER OF ELLIPTIC TYPE

An integral representation of positive definite kernels of the two variables associated with the expression of second order of elliptic type. The result is generalization of the theorem about integral representation of positively definite kernels associated with operator Laplace.

УДК 512.643.8

Р. Динис, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
О. Тилищак, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

ПРО ЗВІДНІСТЬ ДЕЯКИХ МОНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМИ КІЛЬЦЯМИ

Показано звідність добутку підстановочної матриці циклу парної довжини n та діагональної матриці $\mathrm{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ порядку n над комутативним кільцем K з одиницею, де $t\in K$.

ВСТУП

Проблема класифікації всіх квадратних матриць, з точністю до подібності, яка повністю розв'язана над полем (див., наприклад, [4]), при переході до довільного комутативного кільця з одиницею сильно ускладнюється. В більшості випадків, як над кільцем класів лишків [1], вона включає в себе класичну нерозв'язну задачу про "пару матриць". Тільки матриці малих порядків, з точністю до подібності, вдалося описати над деякими кільцями головних ідеалів (див., наприклад, [5 – 8]). В таких випадках важливе значення має інформація про незвідні матриці.

Будемо розглядати питання звідності деяких мономіальних матриць над комутативними кільцями.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо мономіальну матрицю над довільним комутативним кільцем *K* з одиницею вигляду

$$M(k_1,k_2,...,k_n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & k_n \\ k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь на питання про звідність такої матриці інваріантна відносно циклічної перестановки елементів k_1, k_2, ..., k_n. Якщо $k_1=k_2=...=k_n$, $n>1$, то матриця $M(k_1,k_2,...,k_n)$, очевидно, звідна. Якщо кільце *K* локальне і *tK* – його радикал Джекобсона для деякого $t\in K$, $t\neq 0$, то матриця $M(1,...,1,t)$ довільного порядку є незвідною, оскільки її характеристичний многочлен $x^n+(-1)^{n+1}t$ незвідний. Крім того в [2]**Ошибка! Источник ссылки не найден.** показано, що матриця $M(1,t,...,t)$ довільного порядку над тим же кільцем незвідна. В [3] встановлено критерій звідності $M(1,...,1,t,...,t)$ порядку $n\le 6$ над тим же кільцем. Дослідимо звідність матриць $M(1,...,1,t,1,...,1,t)$ довільно1го порядку $n>1$ над комутативним кільцем K з одиницею, де $t\in K$.

ЗВІДНІСТЬ НАД КІЛЬЦЕМ $Z[\lambda]$

Лема 1. *Нехай m, s – натуральні числа,* $n=2m$*,* $s<n$*,* $s\neq m$*. Тоді матриця* $M(\underbrace{1,...,1}_{s-1},t,1,...,1,t)$ *подібна матриці вигляду*

$$N=\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем $Z[\lambda]$ *многочленів з цілочисловими коефіцієнтами від невідомої* λ*, де* A*,* B *– квадратні матриці порядку* m *і є, зокрема, звідною.*

Доведення. Не зменшуючи загальності можна вважати, що $s>m$. Нехай φ – лінійний оператор який визначено матрицею $M(\underbrace{1,...,1}_{s-1},t,1,...,1,t)$ в базисі e_1, e_2, ..., e_n деякого лінійного простору L над полем відношень F кільця $Z[\lambda]$. Тоді

$$\begin{gathered}\varphi(e_1)=e_2,...,\varphi(e_{s-1})=e_s,\varphi(e_s)=\lambda e_s,\\ \varphi(e_{s+1})=e_{s+2},...,\varphi(e_{n-1})=e_n,\varphi(e_n)=\lambda e_1.\end{gathered} \tag{1}$$

Покладемо

$$\begin{gathered}b_1=\lambda e_1+e_{m+1},...,b_{s-m}=\lambda e_{s-m}+e_s,\\ b_{s-m+1}=e_{s-m+1}+e_{s+1},...,b_m=e_m+e_n.\end{gathered}$$

Враховуючи формули (1), одержимо

$$\begin{gathered}\varphi(b_1)=\lambda\varphi(e_1)+\varphi(e_{m+1})=\lambda e_2+e_{m+2}=b_2,\\ \dots\\ \varphi(b_{s-m-1})=\lambda\varphi(e_{s-m-1})+\varphi(e_{s-1})=\lambda e_{s-m}+e_s=b_{s-m},\\ \varphi(b_{s-m})=\lambda\varphi(e_{s-m})+\varphi(e_s)=\lambda e_{s-m+1}+\lambda e_{s+1}=\lambda b_{s-m+1},\\ \varphi(b_{s-m+1})=\lambda\varphi(e_{s-m+1})+\varphi(e_{s+1})=e_{s-m+2}+e_{s+2}=b_{s-m+2},\\ \dots\\ \varphi(b_{m-1})=\varphi(e_{m-1})+\varphi(e_{n-1})=e_m+e_n=b_m,\\ \varphi(b_m)=\varphi(e_m)+\varphi(e_n)=e_{m+1}+\lambda e_1=\lambda e_1+e_{m+1}=b_1\end{gathered} \tag{2}$$

Очевидно, що b_1, ..., b_m, e_1, ..., e_m є базисом простору L. Матриця переходу від базису e_1, ..., e_n до базису b_1, ..., b_m, e_1, ..., e_m складається з елементів з $Z[\lambda]$ і має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad \dots \quad 0}_{s-m}} & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det C = \pm 1$, то $C \in GL(n, Z[\lambda])$. Враховуючи формули (2), маємо

$$C^{-1}MC = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $A = M(\underbrace{1,...,1}_{s-m-1}, t, 1,..., 1)$ і B – квадратні матриці порядку m.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай m – натуральне число, $n = 2m$. Тоді матриця $A = M(\underbrace{1,...,1}_{m-1}, t, 1,..., 1)$ подібна матриці вигляду*

$$N = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем $Z[\lambda]$ многочленів з цілочисловими коефіцієнтами від невідомої λ, де A, B – квадратні матриці порядку m і є, зокрема, звідною.

Доведення. Нехай φ – лінійний оператор, який визначено матрицею $M(\underbrace{1, ..., 1}_{m-1}, t, 1, ..., 1, t)$ в базисі e_1, e_2, ..., e_n деякого лінійного простору L над полем відношень F кільця $Z[\lambda]$. Тоді

$$\begin{gathered} \varphi(e_1) = e_2, ..., \varphi(e_{m-1}) = e_m, \varphi(e_m) = \lambda e_{m+1}, \\ \varphi(e_{m+1}) = e_{m+2}, ..., \varphi(e_{n-1}) = e_n, \varphi(e_n) = \lambda e_1. \end{gathered} \tag{3}$$

Покладемо

$$\begin{gathered} b_1 = e_1 + e_{m+1}, ..., b_{m-1} = e_{m-1} + e_{n-1}, \\ b_m = e_m + e_n. \end{gathered}$$

З формул (3), отримаємо

$$\begin{gathered} \varphi(b_1) = \varphi(e_1) + \varphi(e_{m+1}) = e_2 + e_{m+2} = b_2, \\ \dots \\ \varphi(b_{m-1}) = \varphi(e_{m-1}) + \varphi(e_{n-1}) = e_m + e_n = b_m, \\ \varphi(b_m) = \varphi(e_m) + \varphi(e_n) = \lambda e_{m+1} + \lambda e_1 = \lambda(e_1 + e_{m+1}) = \lambda b_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Очевидно, що $b_1, ..., b_m, e_1$, ..., e_m є базисом простору L. Матриця переходу від базису e_1, ..., e_n до базису $b_1, ..., b_m, e_1, ..., e_m$ має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad \dots \quad 1}_{m}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det C = \pm 1$, то $C \in GL(n, Z[\lambda])$. З формул (4) випливає рівність

$$C^{-1}MC = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

де $A = M(1,...,1,t)$ і B – квадратні матриці порядку m.

Лему 2 доведено.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. *Нехай K – комутативне кільце з одиницею,* $t \in K$, $n = 2m$ *– натуральне число, тоді матриця*

$$M(1,...,1,t,1,...,1,t),$$

подібна матриці вигляду

$$N = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

над кільцем K *, де* A *,* B *– квадратна матриця порядку m і є, зокрема, звідною.*

Доведення випливає з лем 1, 2 та існування гомоморфізму $f : Z[\lambda] \to K$ такого, що $f(1) = 1$, $f(\lambda) = t$. Теорему 1 доведено.

ВИСНОВКИ

Показано, що матриця $M(t,1,...,1,t,1,...,1,t)$ довільного парного порядку $n > 1$ над комутативним кільцем *K* з одиницею звідна для довільного $t \in K$.

Список використаних джерел

1. Бондаренко В.М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – Т.96, № 1. – С. 63–74.
2. Гудивок П.М., Тилищак О.А. Про незвідні модулярні зображення скінченних p-груп над комутативними локальними кільцями // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. – 1998. – Вип. 3. – С. 78–83.
3. Динис Р.Ф., Тилищак О.А. Про звідність матриць деякого вигляду над комутативними локальними кільцями головних ідеалів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2012. – Вип. 23 №1. – С. 57–62.
4. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984.
5. Шевченко В.Н. Сидоров С.В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия вузов. Сер. матем. – 2006. – № 4. – С. 57–64.
6. Avni N., Onn U., Prasad A. , Vaserstein L., Similarity classes of 3X3 matrices over a local principal ideal ring, Comm. Algebra 37 2009. – Vol.37, N8 –, pp. 2601–2615.
7. Pizarro A. . Similarity Classes of 3X3 Matrices over a Discrete Valuation Ring // Linear Algebra and Its Applications. – 1983. – Vol. 54. – P. 29–51.
8. Prasad A., Singla P., and Spallone S. Similarity of matrices over local rings of length two. (2012). http://arxiv.org/pdf/1212.6157.pdf.

Надійшла до редколегії 27.11.13

Р. Динис, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,
О. Тилищак, канд.. физ.-мат. наук
ДВНЗ «Ужгородский национальний университет», Ужгород

О ПРИВОДИМОСТЕ НЕКОТОРЫХ МОНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ

Показано, что произведения подстановочной матрицы цикла четной длины и диагональной матрицы $\operatorname{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ ***порядка*** n ***над коммутативным кольцом*** K ***с единицей, где*** $t \in K$ ***, является приводимым.***

R. Dinis, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv,
A. Tylyshchak, PhD
State higher educational institution, "Uzhhorod National University", Uzhhorod

ON REDUCIBILITY OF SOME MONOMIAL MATRICES OVER COMMUTATIVE RINGS

There has been shown the reducibility of the product of the permutation matrix of the cycle of even length n ***and the diagonal matrix*** $\operatorname{diag}(1,...,1,t,1,...,1,t)$ ***of order*** n ***over a commutative ring*** K ***with identity, where*** $t \in K$ ***.***

УДК 519.21

А. Савченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ВИПРАВЛЕНА *T(q)*-ВІРОГІДНА ОЦІНКА У КВАДРАТИЧНІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

Вивчається квадратична структурна модель регресії з похибками вимірювання. Дисперсія похибок у відгуку вважається невідомою. Побудовано виправлену T(q)-вірогідну оцінку коефіцієнтів регресії. Отримано достатню умову строгої консистентності оцінки в ситуації, коли q залежить від обсягу вибірки і прямує до 1 при необмеженому зростанні обсягу вибірки.

1. Вступ

У статті вивчається квадратична модель регресії з похибками у змінних. За невідомого розподілу прихованої змінної виправлена (CS, Corrected Score) оціночна процедура дає консистентну оцінку [8], [9]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку при малих і середніх обсягах вибірки. У [3], [7] побудовано модифікацію CS оцінки, що стійкіша для малої й середньої вибірок і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності. У даній статті розвинуто іншу ідею модифікувати CS оцінку для малих і середніх обсягів вибірки.

Існує низка статей, присвячених *T(q)*-вірогідній оцінці за відсутності похибок у змінних. У [5], [6] вивчаються властивості оцінки шляхом асимптотичного аналізу і комп'ютерних моделювань. Показано, що для малих і середніх обсягів вибірки вибором q можна змінювати зсув оцінки заради точності, що суттєво може зменшити середньоквадратичне відхилення. Встановлено необхідну і достатню умову асимптотичної нормальності й ефективності оцінки, якщо q прямує до 1, та обсяг вибірки великий.

Метою цієї статті є розгляд виправленої *T(q)*-вірогідної оцінки за наявності похибок вимірювання і невідомої дисперсії похибок у відгуку (ця дисперсія відповідає параметру розсіяння відповідної експоненційної сім'ї щільностей відгуку). Раніше розглядався випадок, коли параметр розсіяння відомий. Зокрема, у статті [1] представлено виправлену *T(q)*-вірогідну оцінку у випадку показникової структурної моделі регресії з похибками вимірювання.

Позначимо через **E** математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць, **D** означає дисперсію. Математичне сподівання $\mathbf{E}_b f$ береться за умови, що b – істинне значення параметра β. Верхній індекс T означає транспонування. В скінченновимірному просторі розглядається норма, що дорівнює сумі модулів координат.

Стаття влаштована наступним чином. У розділі 2 описується загальна модель спостережень. Розділ 3 представляє виправлену *T(q)*-вірогідну оцінку параметрів регресії. Розділ 4 містить висновки.

2. Модель спостережень

Квадратична структурна модель з похибками вимірювання має вигляд

$$y=\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2+\varepsilon\,,\;\; x=\xi+\delta\,,$$

де $\xi,\ \varepsilon,\ \delta$ – незалежні випадкові величини, $\delta\sim N\left(0,\sigma_\delta^2\right),\ \varepsilon\sim N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$, дисперсія σ_δ^2 вважається відомою, σ_ε^2 – невідомою.

Припустимо, що $\sigma_\varepsilon^2\in[\varphi_1;\varphi_2]$, де $\varphi_1>0,\ \ \varphi_2>0$ – відомі, ξ – випадковий скалярний регресор з невідомим розподілом, причому $|\xi|\le const$ майже напевно, $\beta=(\beta_0;\beta_1;\beta_2)^T$ – невипадковий ненульовий вектор параметрів регресії, який треба оцінити. Крім того, оцінюється і σ_ε^2, тобто загалом потрібно оцінити $\theta=\left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T$.

Спостерігаються незалежні копії моделі $z_i=(y_i,x_i),\ i=\overline{1,n}$. Позначимо

$$\rho=\left(1;\xi;\xi^2\right)^T,\ f(y,\xi,\beta)=f\left(y/\xi\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}\exp\left(-\frac{\left(y-\rho^T\beta\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right).$$

Справедливі формули $\mathbf{E}\left(y/\xi\right)=\rho^T\beta=\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2,\ \mathbf{D}\left(y/\xi\right)=\sigma_\varepsilon^2$, де параметри регресії вважаються істинними.

Для $u>0,\ q>0$ введемо перетворення Бокса – Кокса

$$T(q,u)=\begin{cases}\dfrac{u^{1-q}-1}{1-q},q\ne1,\\ \ln u,q=1.\end{cases}$$

T(q)-вірогідна оціночна функція визначається як

$$S^{(q)}(y,\xi,\beta)=2\sigma_\varepsilon^2\sqrt{\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{1-q}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}T(q,f(y,\xi,\beta))=2\sigma_\varepsilon^2\sqrt{\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{1-q}}\,f^{-q}(y,\xi,\beta)\frac{\partial f(y,\xi,\beta)}{\partial\beta}=$$

$$=2\sigma_\varepsilon^2\sqrt{\left(2\pi\sigma_\varepsilon^2\right)^{1-q}}\,f^{1-q}(y,\xi,\beta)(y-\rho^T\beta)\rho.$$

Для $q=1$ функція $S^{(q)}$ співпадає з оціночною функцією методу максимальної вірогідності. За відсутності похибки вимірювання $S^{(q)}$ розглядалась у [5], [6]. Якщо параметр $q=q_n$ залежить від n та $\sqrt{n}\left(q_n-1\right)\to0$ при $n\to\infty$, то *T(q)*-вірогідна оціночна функція дає консистентну оцінку β з тою ж ефективністю, що і оцінка максимальної вірогідності (ОМВ), але з кращою поведінкою для малих вибірок. За відсутності похибки вимірювання ОМВ, позначена як $\widehat{\beta}_n$, задається рівністю

$$\widehat{\beta}_n=\arg\max_{\beta\in\Theta_1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(f(y_i,\xi_i,\beta)\right),$$

де параметрична множина $\Theta_1\subset R^3$.

3. Виправлена *T(q)*-вірогідна оцінка та її консистентність

Розкладемо оціночну функцію $S^{(q)}(y,\xi,\beta)$ в ряд за степенями $(1-q)$:

$$S^{(q)}(y,\xi,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-q)^m}{m!}\left(-\frac{\left(y-\rho^T\beta\right)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)^m(y-\rho^T\beta)\rho=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-q)^m(-1)^m}{m!\left(2\sigma_\varepsilon^2\right)^m}\left(y-\rho^T\beta\right)^{2m+1}\rho\,.$$

Нижче буде вказано умови, що гарантують збіжність цього степеневого ряду.

Нехай $\beta=(\beta_0;\beta_1;\beta_2)^T$, $b=(b_0;b_1;b_2)^T$ є істинним значенням β, φ_0 є істинним значенням σ_ε^2, Θ – компактна множина в R^4, $\theta=\left(b^T;\varphi_0\right)^T$, $s=\left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T$, $\theta,s\in\Theta$. Адаптуємо оціночну функцію $S^{(q)}$ до похибок вимірювання, побудувавши виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$, для якої майже напевно для всіх β виконується рівність

$$\mathbf{E}_b\left(S_C^{(q)}(y,x,\beta)/y,\xi\right)=S^{(q)}(y,\xi,\beta). \quad (1)$$

Ця задача при $k\ge 0$ зводиться до розв'язання базових рівнянь

$$\mathbf{E}\left(f_k^{(q)}(x,\beta)/\xi\right)=\left(\rho^T\beta\right)^k\rho\,, \quad (2)$$

звідки можна знайти функції $f_k^{(q)}(x,\beta)$.

Кожне з рівнянь (2) має поліноміальний розв'язок, тому розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$S_C^{(q)}(y,x,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-q)^m(-1)^{m+1}}{m!\left(2\sigma_\varepsilon^2\right)^m}\sum_{k=0}^{2m+1}C_{2m+1}^k\left(-1\right)^k y^k f_{2m+1-k}^{(q)}(x,\beta)=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(y,x;\beta,q) \quad (3)$$

за умови, що $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(\|u_m\|/y,\xi\right)<\infty$ майже напевно.

З (2) знаходимо $\mathbf{E}\left(f_k^{(q)}(x,\beta)/\xi\right)=\sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\xi^{m_2+2m_3}\rho.$

Відомо, що розв'язком рівняння $\mathbf{E}\left(t_j(\xi+\delta)/\xi\right)=\xi^j$, $j\ge 0$, є функція $t_j(x)=\sigma_\delta^j H_j\left(\dfrac{x}{\sigma_\delta}\right)$, $j\ge 0$, де $H_j(z)=(-1)^j\exp\left(\dfrac{z^2}{2}\right)\left(\exp\left(-\dfrac{z^2}{2}\right)\right)^{(j)}$, $j\ge 0$, – многочлени Ерміта [4, с. 169]. Тоді вектор-функція

$$f_k^{(q)}(x,\beta)=\begin{pmatrix}\sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\sigma_\delta^{m_2+2m_3}H_{m_2+2m_3}\left(\dfrac{x}{\sigma_\delta}\right)\\ \sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\sigma_\delta^{m_2+2m_3+1}H_{m_2+2m_3+1}\left(\dfrac{x}{\sigma_\delta}\right)\\ \sum\limits_{m_1+m_2+m_3=k}\beta_0^{m_1}\beta_1^{m_2}\beta_2^{m_3}\sigma_\delta^{m_2+2m_3+2}H_{m_2+2m_3+2}\left(\dfrac{x}{\sigma_\delta}\right)\end{pmatrix}$$

складається з многочленів степеня $2k$, $2k+1$ та $2k+2$ відповідно. Диференціюванням $\mathbf{E}\left(y^{n-1}/\xi\right)$ за ξ знаходимо $\mathbf{E}\left(y^n/\xi\right)$. Методом математичної індукції можна довести, що це поліном степеня $2n$ відносно ξ. Зауважимо також, що степеневий ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{z^m}{m!}v_m$ має ненульовий радіус збіжності, якщо для деякої сталої $C>0.$ виконується умова $|v_m|\le C^m\cdot m!$

Для того, щоб оцінити σ_ε^2, запишемо ще одну оціночну функцію:

$$S_C^{(\varphi)}\left(y,x,\beta\right)=y^2-yu(x,\beta)-\sigma_\varepsilon^2 w(x,\beta).$$

Тут функції $u(x,\beta)$, $w(x,\beta)$ задовольняють наступні рівняння деконволюції:

$$\mathbf{E}\left(u(x,\beta)/\xi\right)=\rho^T\beta,\ \ \mathbf{E}\left(w(x,\beta)/\xi\right)=1.$$

Розв'язавши ці рівняння в класі поліноміальних функцій, отримаємо $u(x,\beta)=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2\left(x^2-\sigma_\delta^2\right)$, $w(x,\beta)=1$.

При доведенні наступних теорем будуть використовуватися математичні сподівання

$$\mathbf{E}_\theta y^2=\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(y^2/\xi\right)=\mathbf{E}\left(\mathbf{D}_\theta\left(y/\xi\right)+\left(\mathbf{E}_\theta\left(y/\xi\right)\right)^2\right)=\varphi_0+\mathbf{E}\left(\rho^T b\right)^2.$$

$$\mathbf{E}_\theta yu(x,\beta)=\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(yu(x,\beta)/x,\xi\right)=\mathbf{E}u(x,\beta)\mathbf{E}_\theta\left(y/\xi\right)=\mathbf{E}\left(\rho^T b\right)\mathbf{E}\left(u(x,\beta)/\xi\right)=\mathbf{E}\rho^T b\rho^T\beta.$$

Виправлена *T(q)*-вірогідна оцінка $\widehat{\theta}_n(q)=\left(\widehat{\beta}_n^T;\widehat{\varphi}_n\right)^T$ визначається як вимірний розв'язок векторного рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\left(S_C^{(q)}(y_i,x_i,\beta);S_C^{(\varphi)}\left(y_i,x_i,\beta\right)\right)^T=0,\ \left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T\in\Theta. \quad (4)$$

Якщо рівняння (4) не має розв'язку, то покладаємо $\widehat{\theta}_n(q) = 0.$

Означення 3.1. *Для послідовності випадкових величин* $\{U_n : n \geq 1\}$ *послідовність тверджень* $A_n(U_n)$ *виконується зрештою, якщо існує така випадкова подія* Ω_0, $P(\Omega_0) = 1$, *що* $\forall \omega \in \Omega_0\ \exists N = N(\omega)\ \forall n \geq N:\ A_n(U_n(\omega))$ *виконується.*

Позначимо для зручності

$\left(h_1(x,\beta); h_2(x,\beta); h_3(x,\beta)\right)^T = h(x,\beta) = f_0^{(1)}(x,\beta) = \left(1; x; x^2 - \sigma_\delta^2\right)$ – розв'язок рівняння (2) при $k = 0$;

$$\left(z_1(x,\beta), z_2(x,\beta), z_3(x,\beta)\right)^T = z(x,\beta) = f_1^{(1)}(x,\beta) = \left(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2(x^2 - \sigma_\delta^2); \beta_0 x + \beta_1(x^2 - \sigma_\delta^2) + \beta_2(x^3 - 3\sigma_\delta^2 x);\right.$$

$$\left.\beta_0\left(x^2 - \sigma_\delta^2\right) + \beta_1\left(x^3 - 3\sigma_\delta^2 x\right) + \beta_2\left(x^4 - 6\sigma_\delta^2 x^2 + 3\sigma_\delta^4\right)\right)^T$$ – розв'язок рівняння (2) при $k = 1$;

ймовірнісний простір $L^2(\Omega; P) = \{u - \textit{випадкова величина на } \Omega : \mathrm{E}u^2 < \infty\}$;

оціночні функції

$$\left(S_1(y_i, x_i, s, q_n); S_2(y_i, x_i, s, q_n)\right)^T = S_C(y_i, x_i, s, q_n) := S_C^{(q_n)}(y_i, x_i, s),\ S_C^{(1)}(y, x, s) = yh(x,\beta) - z(x,\beta),$$

$$Q_C(y, x, s, q_n) := \left(S_C^{(q_n)}(y, x, s); S_C^{(\varphi)}(y, x, s)\right)^T,\ S_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_C(y_i, x_i, s, 1),$$

$$\Phi_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_C(y_i, x_i, s, q_n) - S_C(y_i, x_i, s, 1); 0\right)^T. \tag{5}$$

Неперервна диференційованість функцій на Θ означає, що функції визначені в деякому околі Θ і неперервно в цьому околі диференційовані.

У подальшому використовується наступна лема (цитуємо [2, с. 161]:

Лема 3.2. Розглянемо борелеву за сукупністю змінних функцію $q(\beta, W, \Delta, Y)$. *Розглядається оціночне рівняння* $S_n(\beta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q(\beta, W_i, \Delta_i, Y_i) = 0,\ \beta \in \Theta.$ *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $q(\cdot, W, \Delta, Y) \in C^1(\Theta)$ *м.н.; при всіх* $\beta \in \Theta$ $\mathbf{E}\left\|q(\beta, W, \Delta, Y)\right\| < \infty$ *відносно міри* P;

2) Функція $S_\infty := \mathbf{E}_b q(\beta, W, \Delta, Y)$ *неперервна за* b *на* Θ;

3) $\mathbf{E}_b \left\|\dfrac{\partial q(\beta, W, \Delta, Y)}{\partial \beta^T}\right\| < \infty$;

4) $V := \dfrac{\partial S_\infty(\beta, b)}{\partial \beta^T}\Big|_{\beta=b}$ *– невироджена матриця.* (6)

5) $S_\infty(\beta, b) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\beta = b.$

Нехай випадкові функції $\Phi_n(\beta) = \Phi_n(\beta, \omega)$, $n \geq 1$, *задовольняють умови:*

6) Для всіх $\beta \in \Theta$: $\Phi_n(\beta) \to 0$ *з ймовірністю 1 при* $n \to \infty$, $\Phi_n(\cdot) \in C^1(\Theta)$ *м. н.;*

7) $\sup_{n\geq 1} \sup_{\beta\in\Theta} \left\|\dfrac{\partial \Phi_n(\beta)}{\partial \beta^T}\right\| < \infty$ *м. н.*

Тоді мають місце наступні твердження

а) з імовірністю 1, починаючи з деякого випадкового номера $n = n(\omega)$, *існує зрештою розв'язок оціночного рівняння* $S_n(\beta) + \Phi_n(\beta) = 0,\ \beta \in \Theta;$ *існує також послідовність* $\{\widehat{\beta}_n\}$, *що задовольняє означення 1;*

б) оцінка вектора параметрів $\widehat{\beta}_n$ *є строго консистентною (тобто для кожної такої послідовності* $P\{\widehat{\beta}_n \to b, n \to \infty\} = 1$*).*

Мають місце наступні твердження.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються наступні умови.*

1. *Показник* q *залежить від обсягу вибірки,* $q = q_n$, *причому* $0 < q_n \leq 1,\ n \geq 1,$ *та* $q_n \to 1$ *при* $n \to \infty.$
2. *Параметрична множина* Θ *є компактною в* R^4, *а істинне значення* $\theta = (b_0; b_1; b_2; \varphi_0)^T$ *параметра* $s = \left(\beta^T; \sigma_\varepsilon^2\right)^T$ *є внутрішньою точкою* $\Theta.$
3. *Існує таке* $K > 0,$ *що* $|\xi| \leq K$ *майже напевно, де* K *– невідома стала; розподіл* ξ *не зосереджений у трьох чи менше точках.*

Тоді рівняння (4) має зрештою розв'язок.

Визначимо оцінку $\widehat{\theta}_n(q_n)$ як розв'язок рівняння (4), якщо існує такий розв'язок; інакше покладемо $\widehat{\theta}_n(q_n)=0$.

Теорема 3.4. *За умов теореми 3.3 оцінка* $\widehat{\theta}_n(q_n)$ *є строго консистентною, тобто* $\widehat{\theta}_n(q_n)\to\theta$ *з імовірністю 1 при* $n\to\infty$, *де* θ *є істинним значенням* s.

Зауваження 1. Аналогічні теореми з тими самими припущеннями справедливі і у випадку моделі $\eta=\beta_0+\beta_1\xi+\beta_2\xi^2+...+\beta_k\xi^k$, але тоді має виконуватися умова про те, що розподіл ξ не зосереджений в *(k+1)* чи менше точках.

Доведення теорем 3.3 і 3.4. Перевіримо умови леми 3.2, де в якості параметрів β, b та функції $q(\beta,W,\Delta,Y)$ візьмемо $s=\left(\beta^T;\sigma_\varepsilon^2\right)^T$, $\theta=\left(b^T;\varphi_0\right)^T$ та $q(s,y,x)=\left(\left(yh(x,\beta)-z(x,\beta)\right)^T;y^2-yu(x,\beta)-\sigma_\varepsilon^2\right)^T$ відповідно. Маємо оціночне рівняння (4), в якому $q=q_n\to1$ при $n\to\infty$. Поділимо це рівняння на n і запишемо його у вигляді $S_n(s)+\Phi_n(s)=0,\ s\in\Theta,$ де відповідні оціночні функції задаються формулами (5). Тоді маємо $q(\cdot,y,x)\in C^1\left(\Theta\right)$ майже напевно та, крім того, для всіх $s\in\Theta$ виконуються нерівності

$$\mathbf{E}_\theta\left\|q(s,y,x)\right\|\le\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_\theta\left|yh_1(x,\beta)\right|/x,\xi\right)+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left|z_1(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_\theta\left|yh_2(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\left(\left|z_2(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\left(\mathbf{E}_\theta\left|yh_3(x,\beta)\right|/\xi\right)+$$
$$+\mathbf{E}\left(\left|z_3(x,\beta)\right|/\xi\right)+\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(y^2/\xi\right)+\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(\left|yu(x,\beta)\right|/\xi\right)+\sigma_\varepsilon^2<\infty.$$

Ці нерівності випливають з умов 2, 3 теореми 3.3. Отже умова 1 леми 3.2 виконується.

Далі, гранична оціночна функція

$$S_\infty(s,\theta):=\mathbf{E}_b q(s,y,x)=\mathbf{E}\mathbf{E}_\theta\left(yh_1(x,\beta)-z_1(x,\beta);yh_2(x,\beta)-z_2(x,\beta);yh_3(x,\beta)-z_3(x,\beta);y^2-yu(x,\beta)-\sigma_\varepsilon^2\right)^T/\xi=$$
$$=\left((b-\beta)^T\mathbf{E}\rho;(b-\beta)^T\mathbf{E}\xi\rho;(b-\beta)^T\mathbf{E}\xi^2\rho;\varphi_0-\sigma_\varepsilon^2+\mathbf{E}b^T\rho(b-\beta)^T\rho\right)^T$$

неперервна за s на Θ, тому умова 2 леми 3.2 також виконується.

Крім того, маємо $\mathbf{E}_\theta\sup_{s\in\Theta}\left\|\dfrac{\partial q(s,y,x)}{\partial s^T}\right\|=\sum\limits_{\mathrm{i}=0,1,2}\sum\limits_{\mathrm{j}=1,2,3}\mathbf{E}_b\sup_{s\in\Theta}\left(\left|\dfrac{\partial}{\partial\beta_i}\left(yh_j(x,\beta)-z_j(x,\beta)\right)\right|+\left|y\dfrac{\partial u(x,\beta)}{\partial\beta_i}\right|\right)<\infty.$

Тут використано умови 2, 3 теореми 3.3, які забезпечують скінченність кожного доданка. Отже умова 3 леми 3.2 також виконується.

Далі, згідно умови (6) маємо

$$V^*:=-V=\begin{pmatrix}1&\mathbf{E}\xi&\mathbf{E}\xi^2&0\\\mathbf{E}\xi&\mathbf{E}\xi^2&\mathbf{E}\xi^3&0\\\mathbf{E}\xi^2&\mathbf{E}\xi^3&\mathbf{E}\xi^4&0\\b^T\mathbf{E}\rho&b^T\mathbf{E}\xi\rho&b^T\mathbf{E}\xi^2\rho&1\end{pmatrix}.$$

Згідно умови 3 теореми 3.3 маємо $\mathbf{D}\xi>0$. Крім того, розподіл ξ не зосереджений в трьох чи менше точках, а отже визначник Грама для елементів $1,\xi,\xi^2$ з простору $L^2\left(\Omega;P\right)$ є додатним. Звідси, використовуючи критерій Сильвестра, отримуємо, що матриця V^* додатно визначена, а отже матриця V від'ємно визначена, тому умова 4 леми 3.2 виконується.

Якщо $s=\theta$, то $S_\infty\left(\theta,\theta\right)=0$. Отже для перевірки умови 5 леми 3.2 припустимо, що існує таке $s\ne\theta$, що $S_\infty\left(s,\theta\right)=0.$ Позначимо $f\left(s\right)=S_\infty\left(s,\theta\right)$, $g(t)=\left(f(t\theta+(1-t)s),\theta-s\right).$ Тоді за припущенням $g(0)=g(1)=0,$ а отже за теоремою Ролля існує таке $\tau\in(0,1)$, що $g'(\tau)=0$ і виконується рівність

$$\left(\theta-s\right)^T\left(\frac{\partial S_\infty(s,\theta)}{\partial s^T}\Big|_{s=\overline{s}}\right)\left(\theta-s\right)=0,\tag{7}$$

де $\overline{s}\in\left(\theta;s\right).$ Аналогічно, як і при перевірці умови 4 леми 3.2, отримаємо, що матриця $\left(\dfrac{\partial S_\infty(s,\theta)}{\partial s^T}\Big|_{s=\overline{s}}\right)$ від'ємно визначена для всіх $\theta\in\Theta.$ Це приводить до суперечності з рівністю (7). Таким чином, рівняння $S_\infty(s,\theta)=0$ має єдиний розв'язок на множині Θ. Крім того, $S_\infty(s,\theta)=0$ тоді і тільки тоді, коли $s=\theta$.

Перевіримо умову 6 леми 3.2. Щоб обґрунтувати збіжність

$$\sup_{s\in\Theta}\left\|\Phi_n(s)\right\|\xrightarrow{P1}0,$$

оцінимо значення $\left\|\Phi_n(s)\right\|.$ Нагадаємо, що $\Phi_n(s)$ задається формулою (5). Маємо

$$\left\|\Phi_n(s)\right\|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left\|S_C(y_i,x_i,s,q_n)-S_C(y_i,x_i,s,1)\right\|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^2\sup_{q_n\le\gamma_n\le1,s\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,s,\gamma_n)}{\partial q}\right|\cdot\left|q_n-1\right|.$$

Нехай n_0 – такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується нерівність $q_n \ge 1-\tilde{\delta},$ де число $\tilde{\delta} \in (0;\ 1)$ вибирається з умови, що для кожного $k = 1,2$ виконується нерівність

$$\mathbf{E}_\theta \sup_{1-\tilde{\delta}\le\gamma\le1, s\in\Theta} \left|\frac{\partial S_k(y_i, x_i, s, \gamma)}{\partial q}\right| < \infty. \tag{8}$$

Нехай зафіксовано число $\tilde{\delta} > 0.$ Щоб обґрунтувати нерівність (8), оцінимо $x \le |x| \le |\xi| + |\delta|,$ $|\beta_0| \le C_0,$ $|\beta_1| \le C_1,$ $|\beta_2| \le C_2,$ скориставшись для цього зображенням (3) і умовою 3 теореми 3.3. З посиленого закону великих чисел та умови 1 теореми 3.3 випливає збіжність послідовності

$$|q_n - 1| \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2} \sup_{q_n\le\gamma_n\le1, s\in\Theta} \left|\frac{\partial S_k(y_i, x_i, s, \gamma_n)}{\partial q}\right| \to 0,\ n\to\infty.$$

Тому умова 6 леми 3.2 виконується.

Перевіримо виконання умови 7 леми 3.2. Нехай n_0 – такий номер, що при всіх $n \ge n_0$ виконується $q_n \ge 1-\tilde{\delta},$ де число $\tilde{\delta}$ вибрано вище (при перевірці умови 6 леми 3.2). Маємо

$$\sup_{n\ge1}\sup_{s\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(s)}{\partial s^T}\right\| \le \sup_{n\ge n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial s^T}\big(S_C(y_i,x_i,s,q) - S_C(y_i,x_i,s,1)\big)\right\| + \sup_{n<n_0}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(s)}{\partial s^T}\right\|.$$

Доданок $\sup_{n<n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{s\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial s^T}\big(S_C(y_i,x_i,s,q_n) - S_C(y_i,x_i,s,1)\big)\right\|$ скінчений майже напевно.

З умови 3 теореми 3.3 випливає скінченність математичного сподівання

$$\mathbf{E}\sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial s^T}\big(S_C(y_i,x_i,s,q) - S_C(y_i,x_i,s,1)\big)\right\|.$$

Із збіжності за посиленим законом великих чисел маємо $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial s^T}\big(S_C(y_i,x_i,s,q) - S_C(y_i,x_i,s,1)\big)\right\| \to \mathbf{E}\sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial s^T}\big(S_C(y_i,x_i,s,q) - S_C(y_i,x_i,s,1)\big)\right\|,$

$n\to\infty$, звідки випливає обмеженість майже напевно послідовності

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{s\in\Theta, 1-\tilde{\delta}\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial s^T}\big(S_C(y_i,x_i,s,q) - S_C(y_i,x_i,s,1)\big)\right\| : n\ge1\right\}.$$

Таким чином, усі умови леми 3.2 виконуються, а отже теореми 3.3, 3.4 доведено.

Теорема 3.5. *Нехай виконуються умови теореми 3.3 та додатково виконується умова:* $M_n \to +\infty,$ $n\to\infty,$ *де* $M_n,$ $n\ge1,$ *– невипадкова послідовність; функції* $u_m(y,x;\beta,q)$ *задані рівністю (3). Тоді векторне рівняння*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{M_n}\begin{pmatrix} u_m(y_i,x_i;\beta,q) \\ y_i^2 - \left(\beta_0+\beta_1x_i+\beta_2(x_i^2-\sigma_\delta^2)\right)y_i - \sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix} = 0$$

зрештою має розв'язок.

Доведення цієї теореми здійснюється аналогічно доведенню теореми 3.3.

4. Висновки

Вивчено квадратичну модель регресії з нормально розподіленою похибкою вимірювання за умови, що дисперсія σ_δ^2 похибки вимірювання відома, а дисперсія похибки у відгуку невідома. При оцінюванні невідомого параметра побудовано виправлену *T(q)*-вірогідну оцінку. Отримано достатні умови її строгої консистентності.

Список викорсиатних джерел

1. Савченко А.В. Виправлення T(q)-вірогідної оцінки в показниковій структурній моделі з похибками вимірювання // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2012. – Вип. 86. – С. 172 – 181.
2. Усольцева О.С. Консистентна оцінка в моделі тривалості життя з цензурованими спостереженнями за наявності похибок вимірювання // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2010. – Вип. 82. – С. 156 – 162.
3. Cheng C.-L., Schneeweiss H. Polynomial regression with errors in the variables // J. Royal Statist. Soc. B. – 1998. – 60. – P. 189 – 199.
4. Cheng C.-L., Van Ness J. W. Statistical regression with measurement error. – London: Arnold Publishers, 1999. – 262 p.
5. Ferrari D., Yang Y. Maximum L_q –likelihood estimation // Ann. Statist. – 2010. – 38, № 2. – P. 753 – 783.
6. Kolev N. Maximum T(q)-likelihood estimation: a new method and its application in risk management // Actuarial Science & Finance: Proc. 6th Conference (Samos, Greece, June 3 – 6, 2010). – Samos, 2010. – P. 22.
7. Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S. Consistent adjusted least squares estimator for errors-in-variables model AXB=C // Metrika. – 2003. – 57, № 3. – P. 253 – 285.
8. Kukush A., Schneeweiss H. Comparing different estimators in a non-linear measurement error model. I // Mathematical Methods of Statist. – 2005. – 14, № 1. – P. 53 – 79.
9. Schneeweiss H., Kukush A. Comparing the efficiency of structural and functional methods in measurement error models // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – Вип. 80. – P. 119 – 129.

Надійшла до редколегії 19.02.14

А. Савченко, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

ИСПРАВЛЕННАЯ T(q)-ПРАВДОПОДОБНАЯ ОЦЕНКА В КВАДРАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ С ОШИБКАМИ ИЗМЕРЕНИЯ

Изучается квадратичная структурная модель регрессии с ошибками измерения. Дисперсия ошибок в отклике предполагается неизвестной. Построена исправленная T(q)-правдоподобная оценка для коэффициентов регрессии. Получено достаточное условие строгой состоятельности оценки для случая, когда параметр q зависит от объема выборки и стремится к 1 при неограниченном возрастании объема выборки.

A. Savchenko, PhD graduate
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

CORRECTED *T(q)*-LIKELIHOOD ESTIMATOR IN QUADRATIC STRUCTURAL MEASUREMENT ERROR REGRESSION MODEL

A quadratic structural measurement error regression model is studied. Variance of error in output is assumed to be unknown. The corrected T(q)-likelihood estimator is constructed. For the case as the sample size tends to infinity and parameter q depends on the sample size and tends to 1, a sufficient condition of strong consistency for the estimator is given.

УДК 539.595

В. Губська, канд. фіз.-мат. наук
НТУУ "КПІ", Київ,
О. Лимарченко, д-р техн. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ,
І. Кудзіновська, канд. техн. наук
Національний авіаційний університет (НАУ), Київ

СИЛОВА ВЗАЄМОДІЯ РЕЗЕРВУАРУ У ФОРМІ УСІЧЕНОГО КОНУСА І РІДИНИ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРИ ЇХ СУМІСНОМУ РУСІ

Розглянуто задачу силової взаємодії, що виникає в системі резервуар-рідина при збудженні руху системи періодичною силою в зоні частот до резонансу, в малому околі резонансу, а також більших за резонансну. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу.

1. Вступ

Розглянемо задачу про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею при їх сумісному русі. Поведінка системи розглядається в рамках нелінійної моделі на тривалому проміжку часу. При дослідженні виходу такої системи на усталений режим коливань в рамках багатомодової нелінійної моделі, важливим виявився вплив силової взаємодії резервуару і рідини на розвиток коливальних процесів. Експериментальні дослідження останніх років [3, 5] показали, що при збудженні коливань за основним тоном обов'язково відбувається збудження вищих гармонік спектру зі своїми власними частотами, які можуть бути не кратними частоті збудження системи. Зокрема для випадку резервуару прямокутної форми показано, що в реальних системах вихід на усталений режим коливань вільної поверхні не проявляється в чистому вигляді [3]. В [2] розглянуто задачу виходу системи конічний резервуар – рідина з вільною поверхнею на усталений режим в залежності від відношення маси резервуара до маси рідини і було показано, що в чистому вигляді вихід на усталений режим коливань в класичному сенсі не спостерігається взагалі і тільки частину режимів, які відрізняються повторами циклів коливань при суттєвій модуляції амплітуд, можна умовно вважати усталеними. Важливим виявився також прояв силової взаємодії, що виникає в системі резервуар-рідина при збудженні руху системи періодичною силою при дослідженні виходу системи на усталений режим коливань.

2. Метод дослідження

Розглядається резервуар у формі усіченого конуса. Нехай τ – область, яку займає рідина; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; Σ і Σ_0 – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x,y,z,t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$. Припускається, що рідина ідеальна, однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками.

Постановка задачі [1]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S. \tag{4}$$

Тут рівняння (1) відповідає вимозі нерозривності потоку в об'ємі рідини τ, (2) – умова неперетікання на твердій межі контакту тіло – рідина Σ, (3) – умова неперетікання на вільній збуреній поверхні рідини S, (4) – динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини.

З точки зору аналітичної механіки задача складається з кінематичних умов (механічних в'язей) (1) – (3), які необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу, і динамічної умови (4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Для вивчення задачі використано модель [1, 4], яка була протестована на прикладі перехідних процесів для задач динаміки резервуарів у формі тіл обертання з рідиною з вільною поверхнею. Математична модель представлена в амплітудних параметрах a_i коливань рідини та руху резервуара $\vec{\varepsilon}$:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k,t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k,t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k,\dot{a}_l,t), \quad r=\overline{1,N+3} \text{ ю} \qquad (5)$$

При цьому коефіцієнти p_{rn} визначаються через алгебраїчні форми від першого до третього порядку з коефіцієнтами, які визначаються через квадратури від форм коливань (координатних функцій). Для побудови координатних функцій використано метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні. Для оцінки точності отриманого розв'язку прийято похибку у вигляді $\delta = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} \Big/ \max\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S_0}$. Отримані функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняють умову неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} – на продовженні стінки над вільною поверхнею. За умови використання методу допоміжної області, похибки умови неперетікання вище рівня вільної поверхні вдалося покращити в 100-500 разів.

3. Дослідження силової взаємодії при збудженні руху системи періодичною силою

Розглянемо усічений конічний резервуар з радіусом нижньої основи 0,2 м. Рух резервуару відбувається тільки в горизонтальній площині. Розглядається поведінка системи за 50-80 періодів коливань по головній формі. Проаналізуємо реакції взаємодії резервуару і рідини по горизонтальній Oy і вертикальній Oz вісях.

Частота зовнішнього збурення приймається близькою до резонансної, для першого випадку вона становить $\Omega_0 =$ 3,328 1/с. Приймаємо, що зовнішня періодична сила має амплітуду коливань 0,5($M_p + M_ж$) Н; співвідношення мас резервуару і рідини $M_p = 0{,}01 M_ж$. На рис. 1, 2 показано зміну силової взаємодії резервуара і рідини по осях Oy і Oz відповідно на періоді до 150 с (приблизно 80 періодів коливань за першою формою). Для більш детального вивчення на Рис. 1 *а*, 1 *б* розглянуто ці ж значення на менших інтервалах часу.

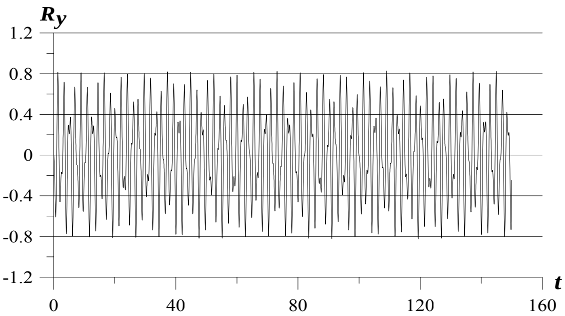


Рис.1. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oy для резонансного випадку

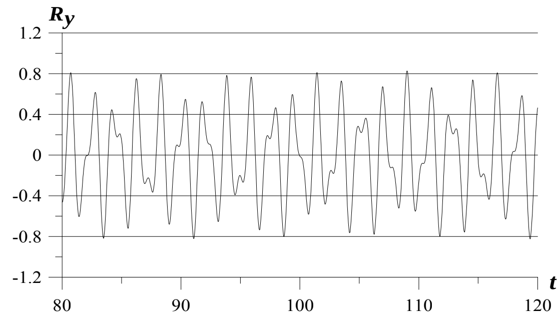


Рис.1 *а*. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oy для резонансного випадку, часовий проміжок 80-120 с

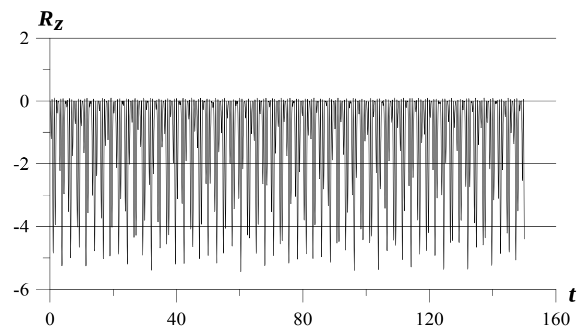


Рис.2. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oz для резонансного випадку

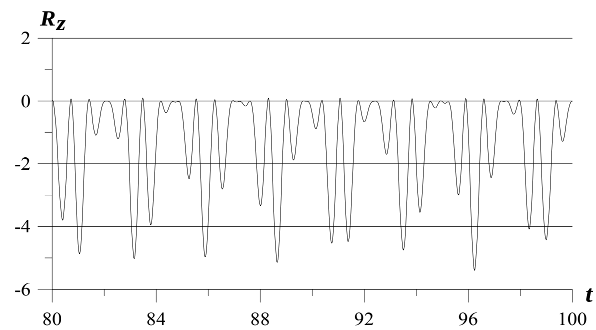


Рис.2 *а*. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oz для резонансного випадку, часовий проміжок 80-100 с

З графіків видно, що процес зміни силової взаємодії відбувається за наявності модуляції (по осі Oy і по осі Oz), впливу вищих гармонік (проявляються супергармоніки та двогорбі піки). Помітний істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження. Усталені режими коливань відсутні [2] і, завдяки відмові від гіпотези про нехтування коливаннями з власними частотами, режим зміни реакцій не співпадає з частотою зовнішнього періодичного збудження, що є також свідченням неусталеного режиму коливань і впливу вищих гармонік спектру

Розглянемо випадок, коли частота зовнішнього збурення менша за резонансну і становить $\Omega_0 = 2$ 1/с, $M_p = 0{,}01 M_ж$, амплітуду зміни зовнішньої сили прийнято 0,5($M_p + M_ж$) Н. На рис. 3, 4 показано зміну силової взаємодії резервуара і рідини по осях Oy і Oz для цього випадку. На рис. 3 *а*, 4 *а* ці значення на менших часових проміжках показані більш детально.

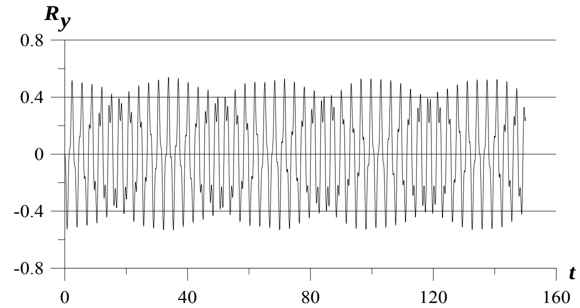


Рис.3. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oy для резонансного випадку

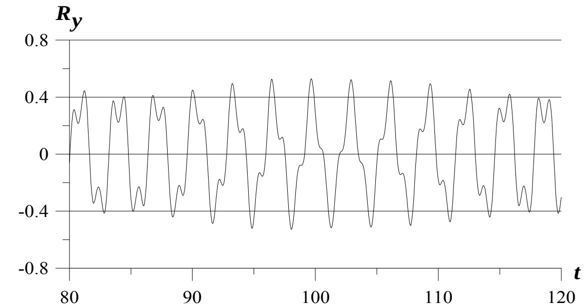


Рис.3 *а*. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oy для резонансного випадку, часовий проміжок 80-120 с

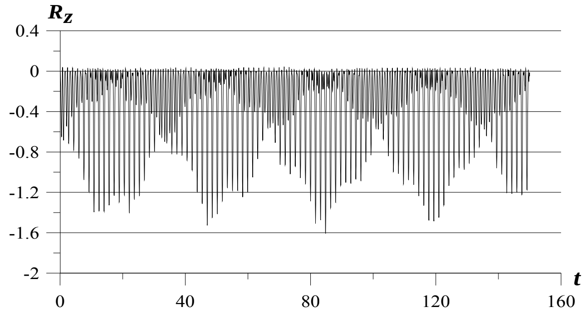


Рис.4. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oz для резонансного випадку

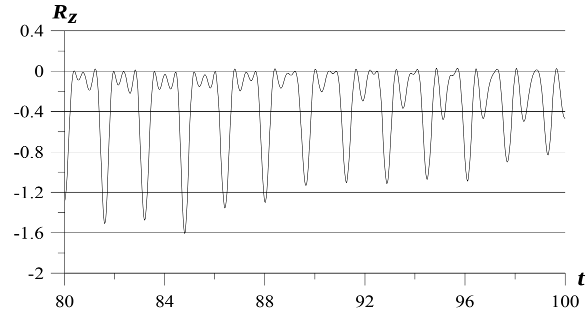


Рис.4 *а*. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oz для резонансного випадку, часовий проміжок 80-100 с

Процес зміни силової взаємодії відбувається при вираженій модуляції (по осі Oy і по осі Oz), досить вираженому впливі вищих гармонік. Помітний істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження.

Покажемо розвиток коливань для випадку, коли частота збурення більша за резонансну частоту і становить $\Omega_0 = 5$ 1/с, амплітуда сили для даного прикладу складала 0.2($M_p + M_{ж}$) Н. Зміну силової взаємодії резервуара і рідини по осях Oy і Oz для цього випадку показано на Рис. 5, 6. Ці значення на менших часових проміжках показані більш детально на Рис. 5 *а*, 6 *а*.

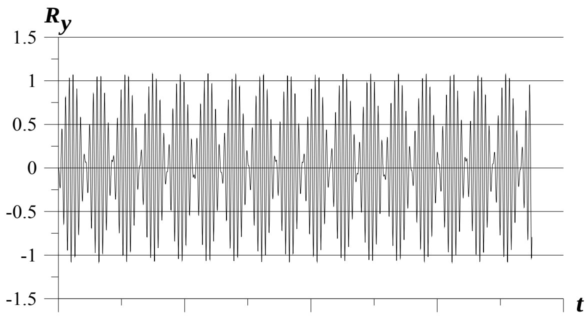


Рис.5. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oy для резонансного випадку

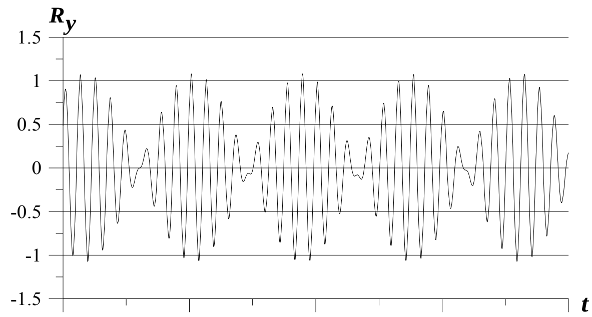


Рис.5 *а*. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oy для резонансного випадку, часовий проміжок 80-120 с

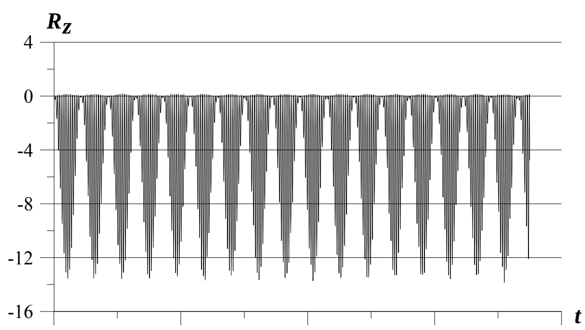


Рис.6. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oz для резонансного випадку

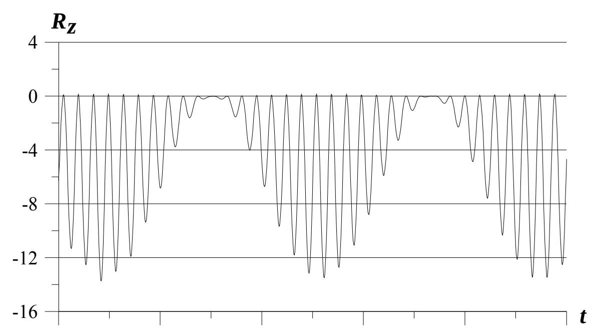


Рис.6 *а*. Зміна силової взаємодії резервуара і рідини по осі Oz для резонансного випадку, часовий проміжок 80-100 с

З графіків видно, що процес зміни силової взаємодії відбувається за наявності вираженої модуляції (по осі Oy і по осі Oz), впливу вищих гармонік (проявляються супергармоніки та двугорбі піки). Помітний істотний прояв вищих форм з періодами не кратними періоду зовнішнього збудження.

3. Висновки

При аналізі поведінки системи під дією гармонічного силового збудження розрізняються діапазони коливань з до-, біля- і зарезонансною частотою. В цих випадках спостерігаються явища, що роблять процес суттєво неусталеним: модуляція коливань (для всіх трьох частотних діапазонів), суттєвий вплив коливань вищих гармонік із своїми частотами (переважно проявляється для до- і білярезонансних частот збудження), що є свідченням неусталеності режиму коливань. Зі збільшенням частоти зовнішнього силового збудження прояв модуляції стає більш суттєвим, а прояв вищих гармонік навпаки зменшується. В моделі не приймається гіпотеза про відсутність коливань з власними частотами в системі і задача розглядається в сумісній постановці для системи резервуар – рідина.

Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С., В.В. Ясинский. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью, Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ"//, 1997. – 348 с.
2. Лимарченко О.С., Губська В.В. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною, Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: фізико-математичні науки. – 2012. –Т.1, №1. – С.73-76.
3. Faltinsen O.M., Rognebakke O.F., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth// Physics of fluids 18. – 2006. – 14 p.
4. Limarchenko O.S. Peculiarities of application of perturbation techniques in problems of nonlinear oscillations of liquid with a free surface in cavities of non-cylindrical shape, Ukrainian Mathematical Journal – 2007– Vol. 59, No. 1, p. 44-70.
5. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – Vol. 1, No. 6, p. 1-5.

Надійшла до редколегії 14.05.14

В. Губская, канд. физ.-мат. наук
НТУУ "КПИ", Киев,
О. Лимарченко, д-р техн. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев,
І. Кудзиновская, канд. техн. наук
Национальный авиационный университет (НАУ), Киев

СИЛОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЗЕРВУАРА В ФОРМЕ УСЕЧЕННОГО КОНУСА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ИХ СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ

Рассматривается задача силового взаимодействия, возникающего в системе резервуар-жидкость при возбуждении движения системе периодической силой в зоне частот до резонанса, в малой окрестности резонанса, а также больших чем резонансная. Поведение системы рассматривается в рамках нелинейной модели на длительном промежутке времени.

V. Gubska, PhD
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv,
O. Limarchenko, Full Doctor (eng.)
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv,
I. Kudzinivs'ka, PhD (eng.)
National Aviation University, Kyiv

FORCE INTERACTION OF RESERVOIR IN THE FORM OF TRANCATED CONE AND LIQUID WITH A FREE SURFACE IN THEIR COMBINMED MOTION

The problem of force interaction that occurs in the system reservoir-liquid under the action of periodic force in the resonance frequency zone, in a small neighborhood of resonance and greater than the resonant one is under consideration. Behavior of the system is considered within the framework of nonlinear model on durable time interval.

УДК 539.3

В. Будак, д-р техн. наук, проф., М. Борисенко, асп., О. Бойчук, канд. фіз.-мат. наук
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського, Миколаїв,
О. Григоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Досліджуються вільні коливання тонких ізотропних еліптичних оболонок змінної товщини однакової маси на основі методу скінченних елементів. Проводиться порівняльний аналіз результатів з чисельними результатами, підтвердженими експериментально, отриманими для еліптичної оболонки постійної товщини еквівалентної маси. Порівнюються частоти при однакових формах коливань для оболонок однакової геометрії для трьох різних матеріалів.

Постановка проблеми. Дослідження вільних частот і форм коливань тонкостінних некругових циліндричних оболонок змінної товщини пов'язано із значними труднощами, які зумовлені складністю системи вихідних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами та необхідністю задовільнення крайовим умовам.

Метою цієї роботи є вивчення вільних коливань пружних ізотропних некругових циліндричних оболонок змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу з використанням програми Femap та порівняння їх з отриманими чисельними результатами за допомогою експерименту для еліптичної оболонки постійної товщини [1]. Також розглядається вплив зміни товщини оболонкових конструкцій і механічних параметрів матеріалу на їх динамічні характеристики.

Задачам про вільні коливання некругових циліндричних оболонок присвячено незначну кількість публікацій. Вільні коливання елементів оболонкових конструкцій розглядалися в [4]. Вивченню вільних коливань некругових циліндричних оболонок присвячена стаття [3]. Для дослідження коливань циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом застосовувалася теорія оболонок вищих порядків [10]. Розв'язування задач про вільні коливання ортотропних кругових оболонок змінної товщини методом сплайн-апроксимації та дискретної ортогоналізації запропоновано в [2]. Аналіз зазначених публікацій дає можливість зробити висновок про те, що не існує єдиної точки зору щодо переваг застосування того чи іншого підходу до вирішення зазначеного класу задач.

Широке застосування для дослідження динамічних процесів в оболонкових конструкціях отримала класична теорія оболонок Кірхгофа-Лява. У випадку змінної товщини або довільної форми серединної поверхні оболонок розглянутого класу механіко-математична модель описуються системою диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. У цьому випадку не вдається розділити змінні з використанням рядів Фур'є в одному з координатних напрямків, тому розв'язування задач про вільні коливання оболонок змінної товщини або довільної форми серединної поверхні призводить до значних труднощів обчислювального характеру. Особливості застосування чисельних методів для вирішення широкого класу задач теорії оболонок описано в [5, 6, 7].

У даний час широке застосування для розв'язування задач механіки набуло використання систем автоматизованого конструювання (computer-aided engineering – CAE), які можуть розраховувати конструкцію будь-якої форми завдяки використанню метода скінчених елементів. Крім того CAE-системи дають користувачеві можливість оцінити поведінку комп'ютерної моделі виробу в реальних умовах експлуатації, перевірити дієздатність конструкції без значних витрат часу і коштів. Однією з таких систем є пре- і постпроцесор для виконання інженерного аналізу методом скінчених елементів – Femap з розв'язувачем NX Nastran [8].

Вихідні співвідношення. NX Nastran для визначення власних форм і частот коливань у випадку, коли дисипація енергії і демпфування не враховується, використовує, як основний, метод Ланцоша (Lanczos), що вимагає менших ресурсів (часу обчислень і вільної пам'яті на жорсткому диску) в порівнянні з іншими методами. Метод Ланцоша [11] дозволяє визначати n-ну кількість необхідних власних значень і форм із заданою точністю. Чим більшу кількість власних пар потрібно визначити, тим помітнішими виявляються переваги цього методу.

Знаходження власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$K\vec{\Phi}_i - \omega_i^2 M\vec{\Phi}_i = 0, \quad i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

де $[K]$ – матриця жорсткості, $[M]$ – матриця мас, $\vec{\Phi}_i$ – власна форма, ω_i – пульсація.

Метод Ланцоша використовує приведення до трьохдіагональної матриці T вигляду

$$T = Q_j^T MK^{-1}MQ_j, \tag{2}$$

де $Q_j = \{q_1, q_2, ..., q_j\}$ – прямокутна матриця з елементами $N_{eq} \times j$, N_{eq} – число рівнянь, j – номер кроку по методу Ланцоша, q_j – *j*-ий вектор Ланцоша. Вираз

$$\beta_{j+1}\vec{q}_{j+1} = K^{-1}M\vec{q}_j - \alpha_j\vec{q}_j - \beta_j\vec{q}_j, \tag{3}$$

генерує наступний вектор Ланцоша q_{j+1} і визначає поточний рядок матриці T

$$T = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ . & . & . & . & . \\ & & & \beta_j & \alpha_j \end{vmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо задачу на власні значення:

$$T\vec{s}_k^{\,j} - \lambda_k^j \vec{s}_k^{\,j} = 0, \quad k = 1,2,...,j, \tag{4}$$

$\left(\omega_k^j\right)^2 = 1/\lambda_k^j$, де ω_k^j – *j*-а апроксимація кругової частоти ω_k, $k = 1,2,...,n$, n – необхідне число власних пар. Алгоритм продовжує обчислення (при збільшенні j-номера кроку процедури Ланцоша) до тих пір, поки не буде досягнуто необхідної точніості по всім необхідним власним значенням.

Процедура вибіркової ортогоналізації підтримує необхідний рівень ортогоналізації векторів Ланцоша q_j, що забезпечує надійність і стійкість чисельного процесу розрахунку. При цьому застосовуються економічні методи для реалізації процедури вибіркової ортогоналізації й для визначення власних значень (4) шляхом використання подвійних QR-ітерацій зі зсувами. Вихідні власні вектори визначаються за формулою

$$\vec{\Phi}_k^j = Q_j \vec{s}_k^{\,j}, \quad k = 1,2,...,n. \tag{5}$$

Більш детальний опис даного методу можна знайти в [9, 11].

Методика розв'язування. За допомогою системи Femap побудовано геометрію оболонок у вигляді циліндричних поверхонь еліптичного перерізу змінної і постійної товщини еквівалентної маси з розмірами: висота $h = 120\,мм$, велика піввісь серединної поверхні $a = 50{,}8\,мм$, мала піввісь серединної поверхні $b = 36{,}295\,мм.$ Товщини оболонок уздовж великої півосі d_a і вздовж малої півосі d_b вказані в таблиці 1.

***Таблиця* 1. Значення товщини вздовж великої і малої півосі еліптичних оболонок**

Вид оболонки		$d_a, мм$	$d_b, мм$
постійної товщини	$d_a = d_b$	2	2
змінної товщини	$d_a > d_b$	3	1,3
	$d_a < d_b$	1	2,73

Досліджувані оболонки жорстко закріплювалися вздовж одного краю; тобто при $z = 0$ виконуються умови

$$u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0 .$$

Матеріалом оболонок обирались три різних метала: сталь 40Х (модуль Юнга $E = 214\,ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}32$, густина $\rho = 7820\,кг/м^3$), алюміній (модуль Юнга $E = 71\,ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}34$, густина $\rho = 2710\,кг/м^3$), мідь (модуль Юнга $E = 110\,ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}35$, густина $\rho = 8920\,кг/м^3$). Розбиття проводилось лінійними восьмикутними solid-елементами розміром сторони 1 мм.

Результати. За допомогою вищеописаної методики досліджувався спектр резонансних частот і форми коливань консольно затиснених ізотропних оболонок змінної і постійної товщини. Резонансні частоти приведені в порівняльних таблицях 2 (для оболонок із сталі), 3 (для оболонок з алюмінію) і 4 (для оболонок з міді), де m – кількість вузлів уздовж твірної, n – кількість вузлів по колу, і у вигляді гістограм (рис. 1, 2, 3 відповідно).

***Таблиця* 2. Власні частоти для різних форм коливань сталевих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини**

m	n	$f, Гц$		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1565	1712	1801
1	6	1992	2155	2119
1	8	3678	3849	3755
1	10	5829	6131	5896
1	12	8493	8962	8610
2	4	5800	6160	6369
2	6	4456	4488	4386
2	8	4817	4896	4733
2	10	6714	7073	6848
2	12	9245	9748	9374

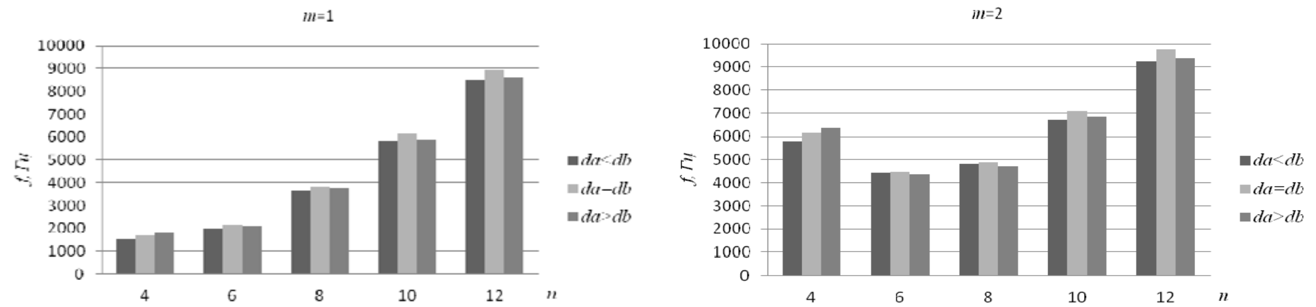


Рис. 1. Порівняльні гістограми власних частот для різних форм коливань сталевих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

***Таблиця* 3. Власні частоти для різних форм коливань алюмінієвих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини**

m	n	$f, Гц$		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1531	1676	1761
1	6	1952	2113	2078
1	8	3607	3776	3684
1	10	5719	6015	5784
1	12	8332	8793	8448
2	4	5672	6025	6230
2	6	4363	4394	4294
2	8	4720	4797	4638
2	10	6585	6938	6716
2	12	9070	9564	9197

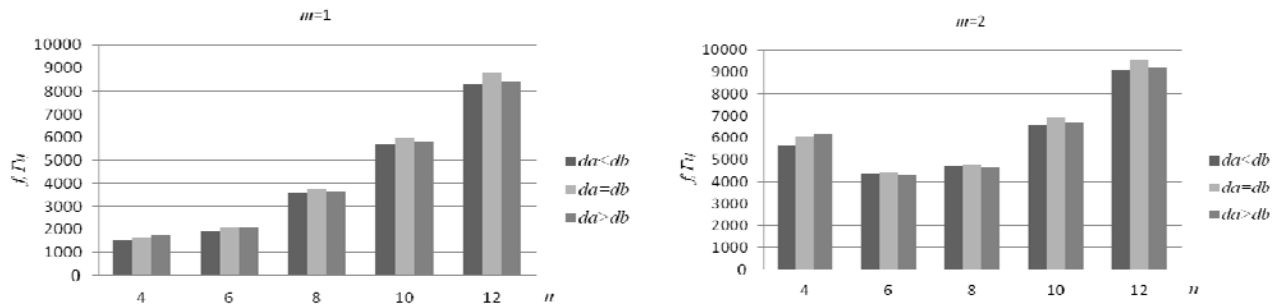


Рис. 2. Порівняльні гістограми власних частот для різних форм коливань алюмінієвих еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

Таблиця **4. Власні частоти для різних форм коливань еліптичних оболонок постійної і змінної товщини з міді**

m	n	$f, Гц$		
		$d_a < d_b$	$d_a = d_b$	$d_a > d_b$
1	4	1051	1150	1209
1	6	1344	1456	1432
1	8	2488	2605	2541
1	10	3946	4150	3991
1	12	5749	6068	5829
2	4	3887	4131	4272
2	6	2995	3018	2949
2	8	3248	3302	3193
2	10	4541	4785	4631
2	12	6258	6600	6345

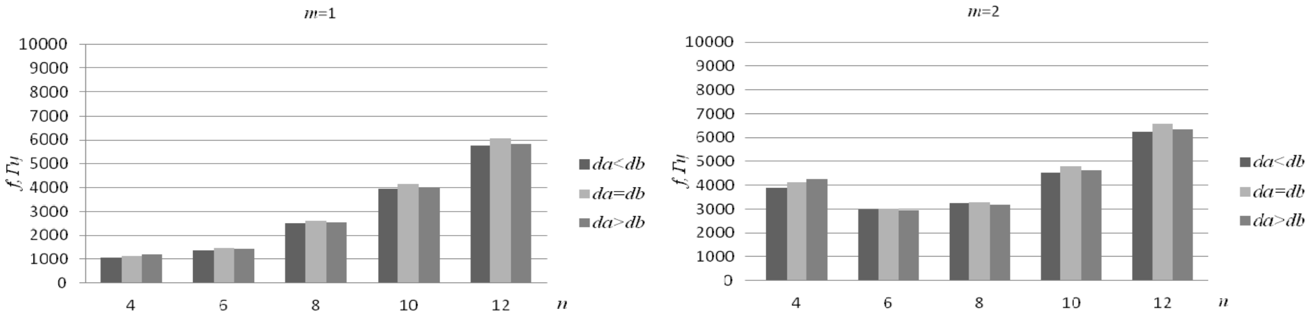


Рис. 3. Порівняльні гістограми власних частот для різних форм коливань мідних еліптичних оболонок постійної і змінної товщини

Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок однакової геометрії з різних матеріалів подано на рис. 4, 5, 6, де суцільною лінією показано графік зміни частоти від форми коливань для оболонки зі сталі, штриховою пунктирною лінією – для оболонки з алюмінію, пунктирною лінією з точками – для оболонки з міді.

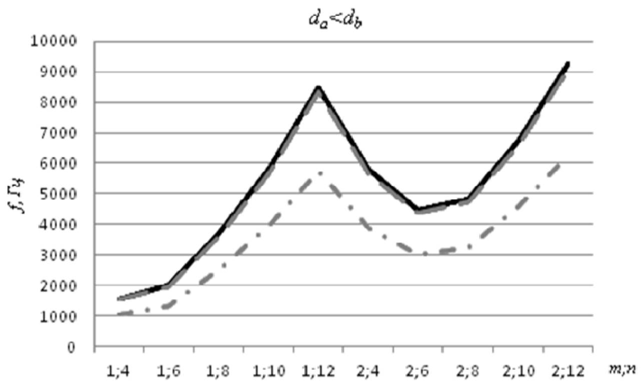


Рис.4. Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок змінної товщини (d_a=1*мм*, d_b=2.73*мм*) з різних матеріалів

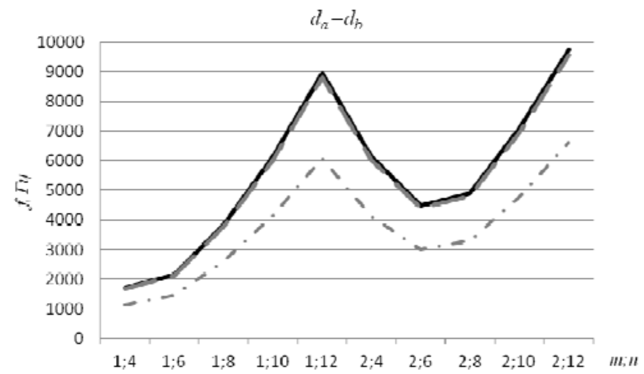


Рис.5. Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок однакової товщини (d_a=2*мм*, d_b=2*мм*) з різних матеріалів

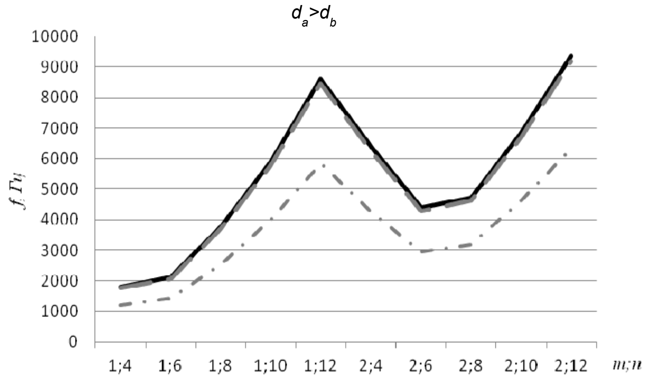


Рис.6. Порівняння частот вільних коливань при однакових формах для оболонок змінної товщини (d_a=3*мм*, d_b=1.3*мм*) з різних матеріалів

Форми коливань для оболонки із сталі на деяких частотах зображено на рис.7, переміщення точок оболонки для візуалізації показані в десятикратному збільшенні.

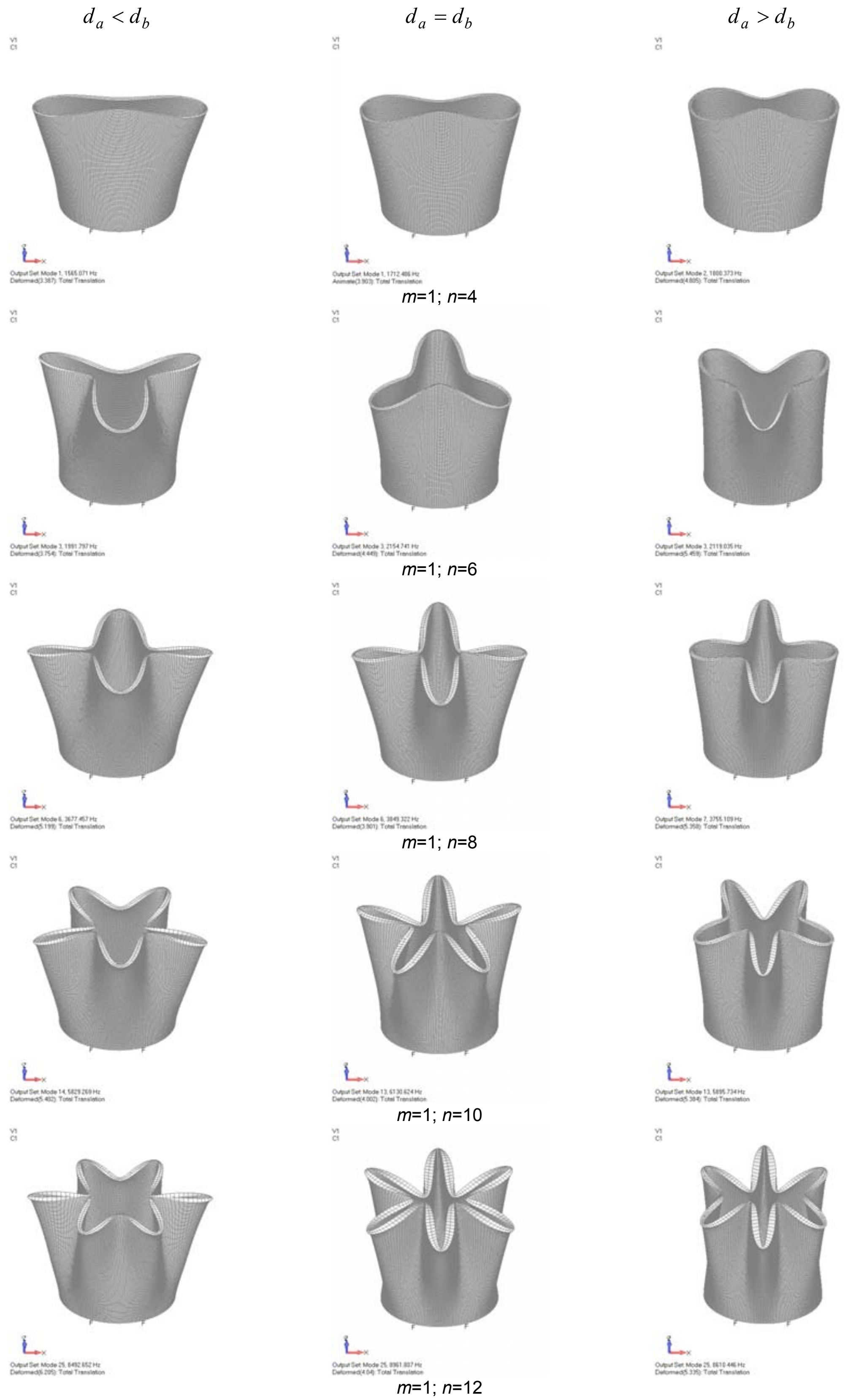


Рис. 7. Форми коливань для оболонки із сталі на деяких частотах

Висновки. Проведено розрахунки вільних коливань двох некругових циліндричних оболонок змінної товщини вздовж дуги поперечного перерізу на основі методу скінчених елементів із застосуванням комплексу FEMAP. Порівняння отриманих результатів для оболонок змінної товщини з частотами для циліндричних оболонок постійної товщини еквівалентної маси, показало :

- ✓ для форм коливань $m=1$, $n=4$ і $m=2$, $n=4$ при збільшенні товщини уздовж осі a резонансні частоти зростають і, навпаки, при збільшенні товщини уздовж осі b – резонансні частоти зменшуються;
- ✓ для інших розглянутих форм частота вільних коливань оболонки постійної товщини вища в порівнянні з частотами вільних коливань оболонок змінної товщини, причому із збільшенням n різниця цих частот зростає.

Запропонована методика дає можливість керувати спектром частот вільних коливань оболонкових конструкцій для виключення її динамічних характеристик з резонансного режиму за рахунок модуляції зміни товщини оболонки, що є однією з актуальних проблем дослідження міцності оболонкових конструкцій.

Для аналізу впливу характеристик матеріалу на динамічні характеристики розглянуто три матеріали (сталь, алюміній і мідь). Аналізуючи отримані дані, можна зробити висновок про те, що частоти вільних коливань при однакових геометричних параметрах оболонок із сталі і алюмінію мають незначну відмінність через невелику відмінность швидкості розповсюдження об'ємного розширення, яка залежить від модуля Юнга і густини матеріалу $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Частоти для оболонок з міді, при ідентичній геометрії, в 1,49 разів менші відповідних частот оболонок із сталі, що пояснюється відношенням відповідних швидкостей поздовжніх хвиль $\frac{c_{сталь}}{c_{медь}}=1{,}49$.

Список використаних джерел

1. Будак В.Д., Григоренко А.Я., Борисенко М.Ю., Бойчук Е.В. Определение собственных частот эллиптической оболочки постоянной толщины методом конечных элементов // Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла. – 2013. – 1. – С. 75-79.
2. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я., Соколова Л. В. Свободные колебания анизотропных цилиндрических оболочек с переменными параметрами // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Том 3, № 12 – С. 13-16.
3. Григоренко А.Я., Пузырев С.В, Волчек Е.А. Исследование свободных колебаний некруговых цилиндрических оболочек с помощь метода сплайн-коллокации // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 3. – С. 60-69.
4. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
5. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 4.).
6. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
7. Григоренко Я.М., Панкратова Н.Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 279 с.
8. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К. НТУУ "КПИ", 2011. – 317с.
9. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. – McGraw-Hill Book Comp., 1975. – 634 p.
10. Hayek Sabih I., Boisvert Jeffrey E. Vibration of elliptic cylindrical shells: higher order shell theory // J. Acoust. Soc. Amer. – 2010. – 128, No. 3. – P. 1063–1072.
11. Papadrakakis. Solving large-scale problems in mechanics,. – John Wiley & Sons Ltd., 1993.

Надійшла до редколегії 27.02.14

В. Будак, д-р техн. наук, проф., М. Борисенко, асп., Е. Бойчук, канд. физ.-мат. наук
ННУ им. В.О. Сухомлинского, Николаев,
А. Григоренко, д-р физ.-мат. наук, проф.
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Исследуются свободные колебания тонких изотропных эллиптических оболочек переменной толщины одинаковой массы с помощью метода конечных элементов. Производится сравнительный анализ результатов с численными результатами, подтвержденными экспериментально, полученными для эллиптической оболочки постоянной толщины эквивалентной массы. Сравниваются частоты при одинаковых формах колебаний для оболочек одинаковой геометрии из трех разных материалов.

V. Budak, Full Doctor (eng), Professor., M. Borisenko, Post graduate student, O. Boychuk, Ph.D.
Mykolayiv State University named after Sukhomlynskyi, Mykolayiv,
A. Grigorenko, Full Doctor, Professor
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

NATURAL VIBRATIONS OF ELLIPTICAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS

Natural vibrations of thin isotropic elliptical shells of variable thickness equal weight are studied on the basis of finite element method. A comparative analysis of results with the numerical confirmed experimentally results obtained for elliptical shell of constant thickness equivalent weight. Frequencies vibrations in the same forms for the same geometry of shells of three different materials are compared.

УДК 517.946

К. Буряченко, канд. фіз.-мат. наук, О. Логачова, канд. фіз.-мат. наук
Донецький національний університет, Донецьк

ВИМІРНІСТЬ ЯДРА ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ У ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ВИПАДКАХ

Досліджено питання вимірності ядра задачі Діріхле в крузі для еліптичних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами у вироджених випадках. Особлива увага приділена неправильно еліптичним рівнянням четвертого порядку, які одночасно мають кратні характеристики, а також корені $\pm i$ відповідного характеристичного рівняння.

Вступ.

Я. Б. Лопатинський [9] встановив, що однорідна задача Діріхле в обмеженій області з гладкою межею для правильно еліптичних рівнянь парного порядку зі сталими коефіцієнтами має скінчене число лінійно незалежних нетривіальних розв'язків, тобто, ядро оператора такої задачі скінченовимірне. У випадку сильно еліптичних рівнянь без молодших членів було встановлено, що ядро тривіальне [8].

У даній статті диференціальним рівнянням з виродженим символом будемо називати рівняння, корені відповідного характеристичного рівняння якого є кратними, а також можуть набувати значення $\pm i$. Зазначимо, що у випадку, коли усі корені характеристичного рівняння прості та не дорівнюють $\pm i$, відповідне диференціальне рівняння називатимемо рівнянням головного типу.

Ефект нескінченновимірності ядра задачі Діріхле для неправильно еліптичних рівнянь другого порядку було вперше виявлено А. В. Біцадзе,.який в [3] дав приклад рівняння, для якого однорідна задача Діріхле в крузі має злічену кількість лінійно незалежних розв'язків. Рівняння Біцадзе $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}=0, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$, які розглядалися у [3], є виродженими у використовуваної нами термінології (корені характеристичного рівняння кратні і дорівнюють i або $-i$), зокрема, вони є неправильно еліптичними.

В статті [4] отримано критерій нетривіальної розв'язності однорідної задачі Діріхле в одиничному крузі для рівнянь другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами і однорідним невиродженим символом у вигляді π-раціональності кута між різними комплексними характеристиками. При цьому ця умова гарантує неправильну еліптичність рівняння та нескінченновимірність ядра оператора задачі Діріхле. Також встановлено, що у випадку існування кратних коренів, а також коренів $\pm i$ характеристичного рівняння, ядро задачі Діріхле є тривіальним.

Питання існування та єдиності розв'язку граничних задач, які безпосередньо пов'язані з вимірністю ядра оператора відповідної задачі, для еліптичних рівнянь і систем другого порядку зі сталими коефіцієнтами було досліджено А. В. Біцадзе [3], А. П. Солдатовим [10], Н. Є. Товмасяном [11], а для рівнянь четвертого порядку – А. О. Бабаяном [1; 2] , К. О. Буряченко [7].

Таким чином, як було встановлено у зазначених вище працях, для рівнянь другого порядку не існує неправильно еліптичних рівнянь, для яких ядро відповідної задачі Діріхле було б скінченовимірним (але не тривіальним), тобто для таких рівнянь ядро або нескінченновимірне або тривіальне. Щодо рівнянь високого порядку (четвертого і вище), то для них можна виділити класи неправильно еліптичних рівнянь, ядро задачі Діріхле для яких є ненульовим і скінченовимірним. Використовуючи результати [5], у даній статті досліджено вимірність ядра задачі Діріхле для неправильно еліптичних рівнянь четвертого порядку, характеристичне рівняння яких має одночасно корені $\pm i$, а також кратні корені, які не дорівнюють $\pm i$.

1. Допоміжні означення та твердження

В одиничному крузі $K \subset R^2$ розглянемо задачу Діріхле для диференціального рівняння четвертого порядку з однорідним за порядком диференціювання символом (без молодших членів) зі сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0, \quad (1)$$

$$u\,|_{\partial K} = 0, \quad u'_\nu\,|_{\partial K} = 0. \quad (2)$$

Тут $\vec{\nu}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі, $\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right),\ a_k \in C,\ k = 0,1,...,4.$

Нехай $\lambda_j, j = 1,...,4$, – корені характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0.$

Означення 1. Кутом φ_j нахилу характеристики, яка відповідає деякому кореню $\lambda_j \neq \pm i$ характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0$, називається розв'язок рівняння $-tg\varphi_j = \lambda_j, j = 1,2,...,4.$

Зазначимо, що умова $\lambda_j \neq \pm i, j = 1,2,...,4$, пов'язана з тим, що рівняння $tg(x) = \pm i$ не має розв'язків. Внаслідок однорідності символу $L(\xi)$ рівняння (1), його можна розвинути наступним чином:

$$L(\xi) = a_0\xi_1^4 + a_1\xi_1^3\xi_2 + a_2\xi_1^2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2^3 + a_4\xi_2^4 = <\xi, a^1><\xi, a^2><\xi, a^3><\xi, a^4>,$$

з деякими комплексними векторами a^j . Тут $<,>$ – скалярний добуток у двовимірному комплексному просторі. Отже, рівняння (1) переписуємо у вигляді

$$<\nabla, a^1><\nabla, a^2><\nabla, a^3><\nabla, a^4> u = 0. \quad (3)$$

Побудуємо ортогональні до a^j вектори $\tilde{a}^j, j = 1,2,...,4,$ які будуть використані далі в роботі.

Сформулюємо означення правильно еліптичного рівняння.

Означення 2. Нехай усі корені λ_j характеристичного рівняння $L(1,\lambda) = 0$ є комплексними, $\lambda_j \in C$, тобто рівняння є еліптичним. Будемо казати, що еліптичне рівняння парного порядку $2m$ є правильно еліптичним, якщо корені λ_j порівну розподілені у додатній та від'ємній уявній площині, тобто

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0,\ j = 1,2,...,m, \quad \operatorname{Im}\lambda_k < 0,\ k = m+1, m+2,...,2m.$$

Найпростішим прикладом правильно еліптичного рівняння другого порядку є рівняння Лапласа $\Delta u = 0,\ \lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i,$ а прикладом правильно еліптичного рівняння четвертого порядку є рівняння вигляду $\Delta^2 u = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -i.$

В [7] встановлено наступні результати, які є правильними для диференціальних рівнянь будь-якого типу.

Теорема 1 [7]. Нехай усі корені характеристичного рівняння не дорівнюють $\pm i$, λ_1 – корінь кратності $k>1$, а решта коренів прості. Тоді

1. Якщо $k=2$, то для нетривіальної розв'язності задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо, щоб кути нахилу характеристик задовольняли наступну умову для деякого $n\in N,\ n>3$:

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_1 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_1 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}=0. \tag{4}$$

При виконанні цієї умови існує поліноміальний розв'язок задачі, який можна побудувати за допомогою поліномів Чебишева $T_k(x,\tilde{a}^j)$ першого роду порядку $k=n,\ n-1,n-2$ та ортогональних до a^j (див. (3)) векторів $\tilde{a}^j$:

$$u_n(x)=\sum_{j=1,j\neq 2}^{4} C_j\left(\frac{1}{2n}T_n(x,\tilde{a}^j)-\frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x,\tilde{a}^j)\right)+C_2<x,a^1>T_{n-1}(x,\tilde{a}^1). \tag{5}$$

2. Якщо $k=3$, то необхідною і достатньою умовою нетривіальної розв'язності задачі (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ є виконання наступної рівності для деякого $n\in N,\ n>3$:

$$\det\begin{pmatrix} \cos n\varphi_1 & \sin n\varphi_1 & \cos(n-2)\varphi_1 & \sin(n-2)\varphi_1 \\ -n\sin n\varphi_1 & n\cos n\varphi_1 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_1 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_1 \\ n^2\cos n\varphi_1 & n^2\sin n\varphi_1 & (n-2)^2\cos(n-2)\varphi_1 & (n-2)^2\sin(n-2)\varphi_1 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}=0. \tag{6}$$

3. Якщо $k=4$, то задача (1), (2) має тільки нульовий розв'язок у просторі $C^4(\bar{K})$.

Теорема 2 [7]. Нехай $\lambda_1=i$ – корінь характеристичного рівняння, який має кратність k, решта коренів – прості та не дорівнюють $-i$. Тоді

1. Якщо $k=1$, то для існування нетривіального ядра задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо виконання наступної умови для деякого $n\in N,\ n>3$:

$$\Delta_n=\det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ \cos n\varphi_3 & \sin n\varphi_3 & \cos(n-2)\varphi_3 & \sin(n-2)\varphi_3 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix}=0. \tag{7}$$

При цьому поліноміальний розв'язок задачі можна подати за допомогою поліномів Чебишева T_k першого роду порядку $k=n,n-2$:

$$u_n(x)=\frac{C_1}{2n}(x_1+ix_2)^n+\sum_{j=2}^{4} C_j\left(\frac{1}{2n}T_n(x,\tilde{a}^j)-\frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x,\tilde{a}^j)\right).$$

2. Якщо $k=2$, то існує лише нульове ядро задачі Діріхле.

3. Якщо $k=3,4$, то ядро задачі Діріхле складається із зліченної кількості лінійно незалежних поліноміальних розв'язків:

$$u_n(z)=(1-z\bar{z})^2P_n(z),\ n=0,1,2,...,\ \text{при }k=3,$$

$$u_n(z)=(1-z\bar{z})^3P_n(z),\ n=0,1,2,...,\ \text{при }k=4.$$

Тут $P_n(z)$ – довільні поліноми ступеню n.

Для рівнянь четвертого порядку можна виділити два класи неправильно еліптичних рівнянь:

$$1)\ \operatorname{Im}\lambda_1>0,\ \operatorname{Im}\lambda_2>0,\ \operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4<0, \tag{8}$$

$$2)\ \operatorname{Im}\lambda_1>0,\ \operatorname{Im}\lambda_2>0,\ \operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4>0. \tag{9}$$

Тобто, чим вище порядок рівняння, тим більше таких класів можна виділити. Зокрема, для рівнянь довільного парного порядку $2m$ таких класів m.

2. Формулювання задачі

Розглянемо питання про нетривіальну розв'язність задачі Діріхле для наступних класів неправильно еліптичних рівнянь у випадках одночасного існування коренів $\pm i$ та кратних коренів (що не дорівнюють $\pm i$) характеристичного рівняння:

$$\lambda_1=i,\ \lambda_2=\lambda_3,\ \operatorname{Im}\lambda_2=\operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4<0,\ \lambda_j\neq\pm i,\ j=2,3,4, \tag{10}$$

$$\lambda_1=i,\ \lambda_2=\lambda_3,\ \operatorname{Im}\lambda_2=\operatorname{Im}\lambda_3>0,\ \operatorname{Im}\lambda_4>0,\ \lambda_j\neq\pm i,\ j=2,3,4, \tag{11}$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda_3 = \mathrm{Im}\,\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4, \tag{12}$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda_3 = \mathrm{Im}\,\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4. \tag{13}$$

Зазначимо, що згідно п. 2 теореми 2 у випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = \lambda_4,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 3,4,$ ядро відповідної задачі Діріхле тривіальне.

3. Теореми існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле у вироджених випадках

Сформулюємо спочатку теорему існування нетривіального розв'язку задачі Діріхле для рівнянь будь-якого типу у випадку

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4. \tag{14}$$

Після цього дослідимо отриману умову для класів (10) і (11) неправильно еліптичних рівнянь.

Теорема 3. Нехай $\lambda_1 = i$ – простий корінь характеристичного рівняння, $\lambda_2 = \lambda_3,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4,$ тобто виконано умови (14). Тоді для нетривіальної розв'язності відповідної задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо виконання наступної умови для деякого $n \in N,\ n > 3$:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ -n\sin n\varphi_2 & n\cos n\varphi_2 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_2 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_2 \\ \cos n\varphi_4 & \sin n\varphi_4 & \cos(n-2)\varphi_4 & \sin(n-2)\varphi_4 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{15}$$

При цьому поліноміальний розв'язок задачі має вигляд:

$$u_n(x) = \frac{C_1}{2n}(x_1 + ix_2)^n + \sum_{j=2,4} C_j\left(\frac{1}{2n}T_n(x,\tilde{a}^j) - \frac{1}{2(n-2)}T_{n-2}(x,\tilde{a}^j)\right) + C_3 < x, a^2 > T_{n-1}(x,\tilde{a}^2).$$

Доведення теореми 3 є наслідком об'єднання п.1 теореми 1 і п.1 теореми 2 (див. також [5; 7]).

Аналогічно, для рівнянь будь-якого типу за умов

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4, \tag{16}$$

встановлюємо:

Теорема 4. Нехай $\lambda_1 = i$ – простий корінь характеристичного рівняння, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \ \lambda_j \neq \pm i,\ \ j = 2,3,4,$ тобто виконано умови (16). Тоді для нетривіальної розв'язності відповідної задачі Діріхле (1), (2) в просторі $C^4(\bar{K})$ необхідно і достатньо виконання наступної умови для деякого $n \in N,\ n > 3$:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ \cos n\varphi_2 & \sin n\varphi_2 & \cos(n-2)\varphi_2 & \sin(n-2)\varphi_2 \\ -n\sin n\varphi_2 & n\cos n\varphi_2 & -(n-2)\sin(n-2)\varphi_2 & (n-2)\cos(n-2)\varphi_2 \\ n^2\cos n\varphi_2 & n^2\sin n\varphi_2 & (n-2)^2\cos(n-2)\varphi_2 & (n-2)^2\sin(n-2)\varphi_2 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{17}$$

Доведення цього результату також можна отримати з п. 2 теореми 1 і п. 1 теореми 2 (див. також [5; 7]).

4. Дослідження вимірності ядра задачі Діріхле для класів (10) та (11) неправильно еліптичних рівнянь.

Дослідимо умову (15) теореми 3 для двох класів неправильно еліптичних рівнянь (10) та (11). Нехай спочатку виконано умови (10). Розглянемо

$$\mu_2 = \mu_3 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i},\ \mu_4 = -\frac{\lambda_4 + i}{\lambda_4 - i}. \tag{18}$$

Тоді з формул (18) і означення 1 кутів нахилу характеристик, $\lambda_j = -tg\varphi_j$, отримуємо $\mu_2 = \mu_3 = e^{2i\varphi_2}$, $\mu_4 = e^{-2i\varphi_4}$. Перепишемо визначник з умови (15) у термінах μ_k . Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\,\mu_2 & \mu_4^{n-1} \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\,\mu_2^{n-1} & \mu_4 \\ \mu_2^n & -n\,\mu_2^n & 1 \end{pmatrix},\ \ n > 3. \tag{19}$$

Нехай $|\,\mu_2\,|>|\,\mu_4\,|$, $\gamma = \mu_4\mu_2$. Тоді внаслідок (10) і (18) знаходимо $|\,\gamma\,| < 1$. Дослідимо асимптотику визначника (19) при достатньо великих n . Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & n-2 & \gamma^{n-1} \\ 1 & -(n-2) & \gamma \\ 1 & -n & 1 \end{pmatrix} = \gamma^{n-1} - (n-1)\gamma + (n-2) \neq 0,$$

при $|\,\gamma\,| < 1$. Таким чином, доведено

Твердження 1. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (10) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро задачі Діріхле (1), (2) тривіальне.

Розглянемо неправильно еліптичні рівняння, які задовольняють умовам (11). Покладемо

$$\mu_2 = \mu_3 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i},\ \mu_4 = -\frac{\lambda_4 - i}{\lambda_4 + i}. \tag{20}$$

Тоді з формул (20) і означення 1 кутів нахилу характеристик, $\lambda_j = -tg\varphi_j$, отримуємо $\mu_2 = \mu_3 = e^{2i\varphi_2}$, $\mu_4 = e^{2i\varphi_4}$. Перепишемо визначник з умови (15) у термінах μ_k. Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\,\mu_2 & \mu_4 \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\,\mu_2^{n-1} & \mu_4^{n-1} \\ \mu_2^n & -n\,\mu_2^n & \mu_4^n \end{pmatrix},\ \ n > 3. \tag{21}$$

Нехай $|\mu_2| > |\mu_4|$, $\delta = \dfrac{\mu_4}{\mu_2}$. Тоді з (10) та (20) знаходимо, що $|\delta| < 1$. З (21) отримуємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & n-2 & \delta \\ 1 & -(n-2) & \delta^{n-1} \\ 1 & -n & \delta^n \end{pmatrix} = (n-2)\delta^{n-1} - (n-1)\delta^{n-2} + 1 = 0,$$

при деякому $|\delta| < 1,\ n > 3$. Наприклад, при $n = 4,\ \Delta_4 = 2\delta^3 - 3\delta^2 + 1 = 0$, якщо $\delta = 1,\ \delta = -\dfrac{1}{2}$. Тобто умова (15) для класу (11) неправильно еліптичних рівнянь виконується для скінченого числа номерів n, отже, ядро відповідної задачі Діріхле у цьому випадку нетривіальне і скінченовимірне . Таким чином, доведено

Твердження 2. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (11) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро відповідної задачі Діріхле (1), (2) скінченовимірне і складається з

$$0 \neq d = \sum_{n=4}^{\infty} (4 - rank\ A_n) < \infty \tag{22}$$

лінійно незалежних поліноміальних елементів вигляду:

$$u_n(z,\overline{z}) = \frac{C_1}{2n} z^n + \sum_{j=2,4} C_j \left(\frac{1}{2n} T_n(\mu_k z + \overline{z}) - \frac{1}{2(n-2)} T_{n-2}(\mu_k z + \overline{z}) \right) + C_3 (z - \mu_2 \overline{z}) T_{n-1}(\mu_2 z + \overline{z}),\ z = x_1 + i x_2.$$

Тут

$$A_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\mu_2 & \mu_4 \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\mu_2^{n-1} & \mu_4^{n-1} \\ \mu_2^n & -n\mu_2^n & \mu_4^n \end{pmatrix},\ \ n > 3,$$

а числа μ_j пов'язані з коренями $\lambda_j,\ j = 2,3,4,$ характеристичного рівняння за допомогою співвідношень (20).

5. Вимірність ядра задачі Діріхле для класів (12) та (13) неправильно еліптичних рівнянь

Розглянемо умову (17) теореми 4 для двох класів неправильно еліптичних рівнянь, коли корені характеристичного рівняння задовольняють умову (12) або (13). У випадку (12) покладемо

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i}. \tag{23}$$

Тоді $\lambda_j = -tg\varphi_j$ і $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = e^{-2i\varphi_4}$. Перепишемо визначник з умови (17) у термінах μ_k. Маємо:

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} \mu_2 & (n-2)\mu_2 & (n-2)^2\mu_4 \\ \mu_2^{n-1} & -(n-2)\mu_2^{n-1} & (n-2)^2\mu_4^{n-1} \\ \mu_2^n & -n\mu_2^n & n^2\mu_2^n \end{pmatrix},\ \ n > 3, \tag{24}$$

або

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} 1 & n-2 & (n-2)^2 \\ 1 & -(n-2) & (n-2)^2 \\ 1 & -n & n^n \end{pmatrix} = -2(n-2)(4n-4) = 0,$$

остання рівність виконується при $n = 1,2$ (бо $n > 3$). Таким чином, умова (17) для класу (12) неправильно еліптичних рівнянь не виконується, тобто задача Діріхле у цьому випадку має лише тривіальне ядро. Аналогічна ситуація має місце і для класу (13) неправильно еліптичних рівнянь. Отже, місце встановлено такий результат

Твердження 3. Нехай рівняння (1) є неправильно еліптичним, і відповідне йому характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, а також кратний корінь $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \lambda_j \neq \pm i,\ j = 2,3,4,$ причому виконано умови (12) і (13) на уявні частини цих коренів. Тоді ядро відповідної задачі Діріхле (1), (2) тривіальне.

Висновки

Досліджено питання про нетривіальну розв'язність задачі Діріхле для наступних класів неправильно еліптичних рівнянь четвертого порядку у випадках одночасного існування коренів $\pm i$, а також кратних коренів (що не дорівнюють $\pm i$) характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda_3 > 0,\ \mathrm{Im}\,\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda_3 > 0,\ \mathrm{Im}\,\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda_3 = \mathrm{Im}\,\lambda_4 > 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4,$$

$$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4,\ \mathrm{Im}\,\lambda_2 = \mathrm{Im}\,\lambda_3 = \mathrm{Im}\,\lambda_4 < 0,\ \lambda_j \neq \pm i, j = 2,3,4.$$

Вивчено також питання про вимірність ядра відповідної задачі Діріхле в цих випадках.

Список використаних джерел

1. Бабаян А. Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в единичном круге // Известия НАН Армении, Математика. – 2003. – 38, № 6. – С. 39–48.
2. Бабаян А. О задаче Дирихле для неправильного эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики. – 2007. – С. 56–68.
3. Бицадзе А. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Усп. матем. наук. – 1948. – 3, № 6. – С. 211–212.
4. Бурский В. О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Матем. заметки. – 1990. – 48, № 3. – С. 32–36.
5. Бурский В., Буряченко Е. Нарушение единственности решения задачи Дирихле для бестипных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка в круге // Український математичний вісник. – 2012. – Т. 9, № 4. – С. 477–514.
6. Бурский В., Буряченко Е. Некоторые вопросы нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для линейных уравнений произвольного четного порядка в круге // Матем. заметки. – 2005. – 74, № 4. – С. 1032–1043.
7. Буряченко Е. О единственности решений задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. – 2000. – 10. – С. 44–49.
8. Вишик М. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сборник. – 1951. – 29, вып. 3. – С. 615–677.
9. Лопатинский Я. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр.мат. журнал. – 1953. – 5, № 2. – С. 123–151.
10. Солдатов А. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39, № 5. – С. 674–786.
11. Товмасян Н. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм. ССР. Математика. – 1968. – 3, № 6. – С. 497–521.

Надійшла до редколегії 12.03.14

Е. Буряченко, канд. физ.-мат. наук, О. Логачева, канд. физ.-мат. наук
Донецкий государственный университет, Донецк

РАЗМЕРНОСТЬ ЯДРА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Исследован вопрос о размерности ядра задачи Дирихле в круге для эллиптических уравнений четвертого порядка с постоянными комплексными коэффициентами в вырожденных случаях. Особое внимание уделено неправильно эллиптическим уравнениям четвертого порядка, имеющим одновременно кратные характеристики, а также корни $\pm i$ соответствующего характеристического уравнения.

K. Buryachenko, Ph.D, O. Logachova, Ph.D
Donetsk National University, Donetsk

DIMENSION OF THE KERNEL OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER EQUATIONS IN SOME DEGENERATE CASES

It is investigated the question of kernel's dimension of the Dirichlet problem in a disk for the fourth order elliptic equations with constant complex coefficients in degenerate cases. A special role is given to the fourth order improperly elliptic equations with multiple characteristics and roots $\pm i$ of the corresponding characteristic equation.

УДК 539.3

$\boxed{\text{Р. Ісрафілов}}$, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.,
К. Савельєва, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАСИЧЕНОГО ПОРИСТОГО ПІВПРОСТОРУ

Розв'язок просторово-двовимірної задачі отримано в рамках теоретичної лінійної схеми Біо шляхом застосування перетворення Лапласа за часом, комплексного перетворення Фур'є за просторовою координатою та методу послідовних наближень. Граничні умови відповідають дії на межі середовища джерела пружних переміщень. Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках здійснено за допомогою методу Р.Шепері.

ВСТУП

Роботу присвячено розв'язанню просторово-двовимірної задачі для випадку дії на межі в'язкопружного пористого півпростору джерела пружних переміщень Точні розв'язки аналогічних одновимірних задач, граничні умови для переміщень в яких відповідають заданню на межі півпростору короткочасного, рівномірного за координатами, гармонічного із заданою частотою імпульсу, отримано в роботах [7,8].

Для розв'язання даної задачі застосовано перетворення Лапласа за часом і комплексне перетворення Фур'є за просторовою координатою *x*. Які теоретичну схему, що описує властивості середовища, обрано класичну лінійну схему Біо [3,4,7,10,11].

Постановка задачі та основні рівняння

Задача, згідно з прийнятою теоретичною схемою Біо, зводиться до розв'язання системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь руху:
для скелета

$$\begin{aligned}&(A+N)\frac{\partial e^{(s)}}{\partial x}+N\nabla^2\mathrm{u}^{(s)}-\rho_{11}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(f)}}{\partial t}-Q\frac{\partial e^{(f)}}{\partial x},\\&(A+N)\frac{\partial e^{(s)}}{\partial y}+N\nabla^2\mathrm{v}^{(s)}-\rho_{11}\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(s)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 v^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(f)}}{\partial t}-Q\frac{\partial e^{(f)}}{\partial y};\end{aligned}\tag{1}$$

для рідини

$$\begin{aligned}&mR\frac{\partial e^{(f)}}{\partial x}-\rho_{22}\frac{\partial^2 u^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(f)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}-mQ\frac{\partial e^{(s)}}{\partial x},\\&mR\frac{\partial e^{(f)}}{\partial y}-\rho_{22}\frac{\partial^2 v^{(f)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(f)}}{\partial t}=\rho_{12}\frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial t^2}-b\frac{\partial v^{(s)}}{\partial t}-mQ\frac{\partial e^{(s)}}{\partial y};\end{aligned}\tag{2}$$

при заданих нульових початкових умовах

$$\mathrm{u}^{(s)}(x,y,0)=\mathrm{v}^{(s)}(x,y,0)=\frac{\partial\mathrm{u}^{(s)}(x,y,0)}{\partial t}=\frac{\partial\mathrm{v}^{(s)}(x,y,0)}{\partial t}=\mathrm{u}^{(f)}(x,y,0)=\mathrm{v}^{(f)}(x,y,0)=\frac{\partial\mathrm{u}^{(f)}(x,y,0)}{\partial t}=\frac{\partial\mathrm{v}^{(f)}(x,y,0)}{\partial t}=0\tag{3}$$

та граничних умовах на координатній площині xOz

$$\mathrm{u}^{(s)}(x,0,t)=f_1^{(s)}(x,t),\ \mathrm{v}^{(s)}(x,0,t)=f_2^{(s)}(x,t),\ \mathrm{u}^{(f)}(x,0,t)=f_1^{(f)}(x,t),\ \mathrm{v}^{(f)}(x,0,t)=f_2^{(f)}(x,t).\tag{4}$$

У виразах (1) – (4) використано стандартні для теорії Біо та для теорії пружності [5] позначення. Тут $\mathrm{u}^{(s)},\mathrm{u}^{(f)}$ та $\mathrm{v}^{(s)},\mathrm{u}^{(f)}$ – переміщення скелета і рідини в напрямках x та y, відповідно; $\mathrm{e}^{(s)}$, $\mathrm{e}^{(f)}$ – їхні об'ємні деформації; $f_1^{(s)}$, $f_2^{(s)}$, $f_1^{(f)}$, $f_2^{(f)}$ – функції, що задають переміщення на межі середовища.

У просторі зображень, з урахуванням (3), співвідношення (1) – (4) набувають вигляду

$$(A+N)\frac{\partial\overline{e}^{(s)}}{\partial x}+N\nabla^2\overline{u}^{(s)}-p(\rho_{11}p+b)\overline{u}^{(s)}=p(\rho_{12}p-b)\overline{u}^{(f)}-Q\frac{\partial\overline{e}^{(f)}}{\partial x};\tag{5}$$

$$(A+N)\frac{\partial\overline{e}^{(s)}}{\partial x}+N\nabla^2\overline{v}^{(s)}-p(\rho_{11}p+b)\overline{v}^{(s)}=p(\rho_{12}p-b)\overline{v}^{(f)}-Q\frac{\partial\overline{e}^{(f)}}{\partial x};\tag{6}$$

$$mR\frac{\partial\overline{e}^{(f)}}{\partial y}-p(\rho_{22}p+b)\overline{u}^{(f)}=p(\rho_{12}p-b)\,\overline{u}^{(s)}-mQ\frac{\partial\overline{e}^{(s)}}{\partial x};\tag{7}$$

$$mR\frac{\partial\overline{e}^{(f)}}{\partial y}-p(\rho_{22}p+b)\overline{v}^{(f)}=p(\rho_{12}p-b)\,\overline{v}^{(s)}-mQ\frac{\partial\overline{e}^{(s)}}{\partial y};\tag{8}$$

$$\tilde{u}^{(s)}(x)=\tilde{f}_1^{(s)}(x),\ \tilde{v}^{(s)}(x)=\tilde{f}_2^{(s)}(x),\ \tilde{u}^{(f)}(x)=\tilde{f}_1^{(f)}(x),\ \tilde{v}^{(f)}(x)=\tilde{f}_2^{(f)}(x),\tag{9}$$

(p – параметр Лапласа).

Розв'язання в просторі зображень. Метод послідовних наближень

Один з найбільш часто використовуваних в класичній теорії пружності способів розв'язання задач динаміки пов'язаний з введенням потенціалу пружних переміщень (представлення типу Ламе). З метою отримання такого представлення для пористого середовища, яке насичене рідиною, переміщення для скелета і рідини записують таким чином

$$\tilde{u}^{(s)}(x)=\left(\frac{A+N}{N}\right)\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial x\partial y},\ \tilde{v}^{(s)}=\left(\frac{A+2N}{N}\right)\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(s)}}{\partial y^2}-\frac{p}{N}(\rho_{11}p+b)\tilde{\Phi}^{(s)},\tag{10}$$

$$\tilde{u}^{(f)}(x)=-mR\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(f)}}{\partial x\partial y},\ \tilde{v}^{(f)}=-p(\rho_{22}p+b)\tilde{\Phi}^{(f)}+mR\frac{\partial^2\tilde{\Phi}^{(f)}}{\partial x^2}.\tag{11}$$

При підстановці виразів (10), (11) в рівняння (5) – (8) і заміні правих частин в рівняннях (6), (8), з урахуванням правих частин рівнянь (5), (7), тобто з урахуванням рівностей

$$p(\rho_{11}p-b)\overline{v}^{(f)}-Q\frac{\partial\overline{e}^{(f)}}{\partial y}=p(\rho_{11}p-b)\overline{v}^{(f)}-Q\frac{\partial^2\overline{v}^{(f)}}{\partial y^2}-\frac{Q^2}{p(\rho_{12}p-b)}\frac{\partial^3\overline{e}^{(f)}}{\partial x^2\partial y},\tag{12}$$

$$p\left(\rho_{12}p-b\right)\bar{v}^{(s)}-mQ\frac{\partial\bar{e}^{(s)}}{\partial y}=p\left(\rho_{12}p-b\right)\bar{v}^{(s)}-mQ\left(\frac{\partial^2\bar{v}^{(s)}}{\partial y^2}-\frac{m^2Q^2}{p\left(\rho_{12}p-b\right)}\frac{\partial^3\bar{e}^{(s)}}{\partial x^2\partial y}\right), \qquad (13)$$

рівняння (5), (7) тотожно задовольняються.

Рівняння (6), (8) розв'язувалися методом послідовних наближень, при цьому в якості першого наближення беруться розв'язки однорідних рівнянь, що відповідають (6), (8). З урахуванням (11), перші однорідні рівняння з (1), (2) (з нульовими правими частинами), тотожно задовольняються, а другі записуються через $\bar{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)$, $\tilde{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)$, як допоміжні рівняння, які за допомогою перетворення Фур'є

$$\bar{\Phi}_1^{(s)}\left(\alpha,y,p\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\bar{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)dx\ ,\ \bar{\Phi}_1^{(s)}\left(\alpha,y,p\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha x}\bar{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)dx$$

набувають вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-p^2D_1^{(s,f)}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-p^2D_2^{(s,f)}\right)\bar{\Phi}_1^{(s,f)}(\alpha,y,P)=0\,, \qquad (14)$$

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2-p^2D_1^{(f)}\right)\left(\frac{d^2}{dy^2}-\alpha^2\right)\bar{\Phi}_1^{(f)}(\alpha,y,P)=0\,, \qquad (15)$$

де α – параметр перетворення Фур'є; $D_1^{(s)}=\rho_{11}/\left(A+2N\right)$, $D_2^{(s)}=\rho_{11}/N$, $D_1^{(f)}=\rho_{11}/A$, $D_2^{(f)}=0$.

Обмежені на нескінченності розв'язки рівнянь (10), (11) мають вигляд:

$$\Phi_1^{(s)}\left(\alpha,y,P\right)=B_1^{(s)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_1^{(s)}}+B_2^{(s)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_2^{(s)}}\ , \qquad (16)$$

$$\Phi_1^{(f)}\left(\alpha,y,p\right)=B_1^{(f)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_1^{(f)}}+B_2^{(f)}\exp(-y\sqrt{\alpha^2+D_2^{(f)}}\ . \qquad (17)$$

Відповідно до формул звернення для перетворення Фур'є маємо

$$\tilde{\Phi}^{(s)}\left(x,y,p\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left[B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_1^{(s)}}\right)+B_{21}^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_2^{(s)}}\right)\right]d\alpha\ , \qquad (18)$$

$$\tilde{\Phi}^{(f)}\left(x,y,p\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha x}\left[B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_1^{(s)}}\right)+B_{21}^{(s)}\left(\alpha,p\right)\exp\left(-y\sqrt{\alpha^2+p^2D_2^{(s)}}\right)\right]d\alpha\ , \qquad (19)$$

де $B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)$, $B_2^{(s)}\left(\alpha,p\right)$ і $B_1^{(s)}\left(\alpha,p\right)$, $B_2^{(s)}\left(\alpha,p\right)$ визначаються з образу граничних умов (4) для переміщень скелета і рідини.

Для другого наближення загальний розв'язок однорідних рівнянь будуємо аналогічним чином, а частинні розв'язки неоднорідних рівнянь (5) – (8) знаходимо за допомогою відомих результатів (17), (18) методом невизначених коефіцієнтів. Нові константи, що виникають при цьому, визначаються також з формул (9). Подібним чином можна знайти і наступні наближення. Враховуючи, однак, вплив взаємопов'язаності процесів фільтрації і деформації скелета, з практичної точки зору, досить обмежитися другим наближенням.

Про процедуру обертання перетворення лапласа

Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках є математично складною задачею. Для багатьох інженерних застосувань наближений розв'язок цієї задачі, за певних умов, можна отримати за допомогою методу Р.Шепері [11], який запропонований автором для розв'язання квазістатичних задач. Суть цього наближеного методу обернення перетворення Лапласа полягає в тому, що для функції $f\left(t\right)$ (або $p\tilde{f}\left(p\right)$), лінійно залежної від $\ln t$ (або від $\ln p$), апроксимація

$$f\left(t\right)\approx\left(p\tilde{f}\left(p\right)\right)=e^{\frac{w_0}{t}}\ , \qquad (20)$$

де $p=e^{\frac{w_o}{t}}$, дає точний результат, причому значення параметра w_0 залежить від числа Ейлера γ ($w_0=-\gamma$). Для обертання отриманих розв'язків формулу (20) узагальнено (з додаванням наступних наближень) для випадку нестаціонарних динамічних задач. При цьому параметр визначаємо із співвідношення

$$\frac{\pi^2}{6}+\gamma\left(\gamma+2\right)+w_0\left(w_0+2\gamma-2\right)+p\left(\frac{\pi^2}{6}+w_0\left(w_0+2\gamma\right)\right)=0\,. \qquad (21)$$

Після підстановки розв'язку рівняння (21) в формулу $p=e^{w_o/t}$ отримуємо вираз

$$p=\frac{1}{t}\exp\left(-\gamma+\frac{1}{1+p}\left(1-\sqrt{\left(p+0,675\right)\left(p+3,345\right)}\right)\right). \qquad (22)$$

Висновки

Розв'язок просторово-двовимірної задачі отримано в рамках теоретичної лінійної схеми Біо шляхом застосування перетворення Лапласа за часом, комплексного перетворення Фур'є за просторовою координатою та методу послідовних наближень. Граничні умови відповідають дії на межі середовища джерела пружних переміщень. Перехід до оригіналу в отриманих розв'язках отримано за допомогою методу Р.Шепері.

Побудований розв'язок відповідає заданню переміщення в загальному вигляді. Розв'язок задачі для конкретно заданих граничних умов буде предметом наступних публікацій.

Список використаних джерел

1. Био М.А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды // Механика, сборник переводов. – 1956. – 35, №1. – С. 140-146.
2. Гомилко А.М., Гуржий А.А., Трофимчук А.М. Гармонические колебания пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании // Акуст. вістник. – 1999. – 2, №3. – С.33-41.
3. Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акуст.вістник. – 2007. – 10, №2. – С.43-63.
4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. Двумерное волновое движение в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала // Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела, Том 1. – Донецкий национальный.университет, 2013. – С. 253 –257.
5. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. – М.:Наука, 1972. – 328 с.
6. Рущицкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. I. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №4. – С. 104–111.
7. Рущицкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. II. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №5. – С. 115–125.
8. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье. – М.: ИЛ, 1956. – 220 с.
9. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред. – К.: Наук. думка, 2003. – 230 с.
10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range // J. Acoust.Soc.Am. –1956. – 28. – P.168 – 178.
11. Biot M.A.Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. : II. – Higher frequency range // J.Acoust.Soc.Amer, 1956. – 28. – P. 179-191.
12. Shapery R.A. Approximate method of transform Inversion for viscoelastic stress analysis // Processing of the Fourth U.S.Nat. Congress of App. Mech.. vol.2, ASME. – 1962. – P. 1075.

Надійшла до редколегії 10.04.14

Р. Исрафилов, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр., Е. Савельева, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр.
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ПОРИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Решение пространственно-двухмерной задачи получено в рамках теоретической линейной схемы Био путем приме-нения преобразования Лапласа по времени, комплексного преобразования Фурье по пространственной координате и метода последовательных приближений. Граничные условия соответствуют действию на границе среды источника упругих перемещений. Переход к оригиналу в полученных решениях получен с помощью метода Р.Шепери.

R. Israfilov, PhD, K. Savelieva, PhD
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEM FOR SATURATED POROUS HALF-SPACE

Solution of spatially two-dimensional problem is obtained in the framework of the theoretical classical linear scheme Bio by the Laplace transform, the complex Fourier transform, and the method of successive approximations. Boundary conditions correspond to the action of the source of elastic displacements on the medium boundary. Original of the solutions is obtained by the method of R.Sheperi.

УДК 539.3

Р. Ісрафілов, канд. фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.,
К. Савельєва, канд. фіз.-мат. наук, старш.наук.співроб.
Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСИЧЕНОГО РІДИНОЮ АБО ГАЗОМ ПОРИСТОГО ПОРОЖНЬОГО ЦИЛІНДРА ПІД ВПЛИВОМ ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Розглянуто процес деформування насиченого рідиною або газом пористого скляного порожнього циліндра внаслідок імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні. Враховано стисливість рідини чи газу. В якості теоретичної моделі середовища використано класичну лінійну схему Біо.

Вступ

Теоретичні результати механіки насичених пористих середовищ знаходять широке практичне застосування [1-11]. Зокрема, в хімічній і нафтопереробній промисловості для очищення рідин і газів від забруднення і агресивних домішок використовуються фільтрувальні елементи з пористих металів [1]. В авіації один з методів боротьби з утворенням криги полягає в подачі підігрітого повітря або рідини, що випаровується, через пористі корозійностійкі матеріали передніх кромок крил літаків [4]. У механіці гірських порід велика увага приділяється зміні фільтраційних і механічних процесів у масиві, що є пористим насиченим рідиною або газом середовищем. Таким чином, пористі матеріали в процесі експлуатації зазвичай контактують з деяким газоподібним чи рідким середовищем, внаслідок чого можуть виникнути особливості фільтрації в порах, зміни напружено-деформованого стану та міцнісних властивостей скелета. З цього випливає необхідність теоретичного описання поведінки таких матеріалів, що послідовно враховує фізико-механічні властивості і структуру їхніх окремих фаз. Запропоноване дослідження проводилося в рамках теорії Біо [5], яка докладно описує поведінку середовища.

Постановка задачі. Основні співвідношення

Розглядається процес деформування насиченого рідиною або газом досить довгого пористого скляного порожнього циліндра внаслідок миттєво виниклого рівномірно розподіленого імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні з урахуванням стисливості рідини чи газу. Протягом проміжку часу $0 \le t \le t_0$ навантаження в порожнині зростає до Q_1, а при $t \ge t_0$ зберігається сталим (атмосферний тиск $Q_0 < Q_1$ ($Q_0 < P_0 < Q_1$)).

Початкові рівняння для пористого середовища, насиченого рідиною або газом, згідно з методом Біо, записуються у вигляді:
рівняння руху твердої фази

$$\sigma_{rr}^{(s)},_r + \left(\sigma_{rr}^{(s)} - \sigma_{\theta\theta}^{(s)}\right)\Big/ r = \rho_{11}u,_{tt}^{(s)} + \rho_{12}u,_{tt}^{(f)} + b\left(u,_t^{(s)} + u,_t^{(f)}\right), \quad (1)$$

рівняння руху рідкої або газоподібної фази

$$-m_2\rho,_r^{(f)} = \rho_{12}u,_{tt}^{(s)} + \rho_{22}u,_{tt}^{(f)} - b\left(u,_t^{(s)} + u,_t^{(f)}\right), \quad (2)$$

визначальні рівняння середовища

$$\sigma_{rr}^{(s)} = Ae^{(s)} + 2Nu,_r^{(s)} + Qe^{(f)}; \ \sigma_{\theta\theta}^{(s)} = Ae^{(s)} + 2Nu^{(s)}\big/ r + Qe^{(f)}, \quad (3)$$

$$-m_2 p^{(f)} = Qe^{(f)} + \mathrm{R}e^{(f)}. \quad (4)$$

Враховуючи специфіку задання граничних умов для напружень в скелеті і тиску рідини або газу, зазначимо таке: оскільки зазвичай на граничній поверхні докладається загальне навантаження, слід враховувати об'ємний вміст твердої фази і рідини або газу. Загальний тиск рідини або газу в пористому циліндрі подається у вигляді

$$P^{(f)} = P_1^{(f)} + P_0, \quad (5)$$

де $P_1^{(f)}$ – тиск, що викликаний процесом фільтрації.

Таким чином, задача полягає у розв'язанні зв'язаних рівнянь (1) – (4) при заданих на поверхнях порожнього циліндра граничних умовах

$$\sigma_{rr}^{(s)}\Big|_{r=r_b} = -m_1\left(Q_0 - E\left(t-t_0\right)\left(Q_1 - Q_0\right)\right), \ \sigma_{rr}^{(s)}\Big|_{r=r_H} = 0, \quad (6)$$

$$P_1^{(f)}\Big|_{r=r_b} = -m_2\left(Q_0 + E\left(t-t_0\right)\left(Q_1' - Q_0'\right)\right), \ \sigma,_r^{(f)}\Big|_{r=r_H} = 0, \quad (7)$$

де $Q_0' = Q_0 - P_0$, $Q_1' = Q_1 - P_0$, $E(t) = \begin{cases} 0, t<0; \\ 1, t\ge 0, \end{cases}$ $Q_1' = Q_1 - P_0$, $Q_0 < P_0 < Q_1$.

У формулах (1) – (7) використано позначення: $\sigma_{rr}^{(s)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(s)}$ – напруги в скелеті середовища; $P^{(f)}$ – поточний тиск рідини (газу) в середовищі, $e^{(s)}$, $e^{(f)}$ та $u^{(s)}$, $u^{(f)}$ – об'ємні деформації і переміщення скелета (s) і рідини (газу) (f), відповідно; A, Q, N, R – стандартні фізичні сталі теорії Біо, що залежать від характеристик скелета і рідини (газу) [6,7]; b – коефіцієнт дифузної взаємодії твердої та рідкої складових середовища; $\rho_{11} = (1-m_2)\rho^{(s)} - \rho_{12}$, $\rho_{22} = m_2\rho^{(f)} - \rho_{12}$, $\rho^{(s)}$, $\rho^{(f)}$ – щільності твердої і рідкої фази; ρ_{12} – коефіцієнт приєднаної маси; t – тривалість імпульсу; r_H – внутрішній і зовнішній радіуси циліндра.

Розв'язання системи рівнянь

Точний розв'язок системи зв'язаних рівнянь (1) – (4) в просторі зображень за Лапласом можна отримати у вигляді інтегралів від складних комбінацій модифікованих циліндричних функцій. Знаходження оригіналів і обчислення інтегралів у цьому випадку пов'язані з певними математичними труднощами. Нижче запропоновано зручний та ефективний підхід до розв'язання задачі, а розв'язки, що побудовано, записано через елементарні функції. Задача розв'язується у напруженнях. З цією метою, з співвідношень (3) і (4) для переміщень фаз отримано формули

$$u^{(s)}(r,t) = \frac{1}{r^{a_1}}\int_{r_b}^{r} r^{a_1}\left(a_2\sigma_{rr}^{(s)} + a_3P^{(f)}\right)dr + c_1(t)\frac{1}{r^{a_1}}, \quad (8)$$

$$u^{(f)}(r,t) = \frac{1}{r}\int_{r_b}^{r} r\left(a_4P^{(f)} + a_5\sigma_{rr}^{(s)}\right)dr + a_6\frac{1}{r}\int_{r_b}^{r}\left(1/r^{a_1}\right)\int_{r_b}^{r} r^{a_1}\left(a_2\sigma_{rr}^{(s)} + a_3P^{(f)}\right)drdr + a_6\left(1-a_1\right)^{-1}c_1(t)\frac{1}{r^{a_1}} + c_2(t)\frac{1}{r}, \quad (9)$$

де $a_1 = A_1\left(A - \dfrac{Q^2}{R}\right)$, $a_2 = A_1, a_3 = m_2\dfrac{Q}{R}A_1$, $A_1 = \left(A + 2N - \dfrac{Q^2}{R}\right)^{-1}$, $0 < a_1 < 1$, $a_4 = -m_2\left(A+2N\right)\dfrac{A_1}{R}$, $a_5 = -Q\dfrac{A_1}{R}$.

Зазначимо, що (8), (9) є результатом розв'язання рівнянь Бернуллі. Підставляючи (8) до (1), (2), з урахуванням (3), (4), для рівнянь руху отримаємо

$$\sigma_{rr,r}^{(s)} - 2N\left(1+a_1\right)c_1(t)r^{-(2+a)} + b\left(a_6\left(1-a_1\right)^{-1} - 1\right)c_{1,t}r^{-a_1} - \left(\rho_{11} + \rho_{12}a_6\left(1-a_1\right)^{-1}\right)c_{1,tt}r^{-a_1} + bc_{2,t}r^{-1} - \rho_{12}c_{2,tt}r^{-1} =$$

$$= -2NI_0(r,t) + 2N\left(1+a_1\right)r^{-(2+a_1)}I_1(r,t) + \left(b\frac{\partial}{\partial t} + \rho_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)r^{-a_1}I_1(r,t) - \left(b\frac{\partial}{\partial t} - \rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{1}{r}I_2(r,t) + a_6\frac{1}{r}I_3(r,t)\right), \quad (10)$$

$$m_2P_{1,r}^{(f)} - b\left(a_6\left(1-a_1\right)^{-1} - 1\right)c_{1,t}r^{-a_1} - \left(\rho_{12} + \rho_{22}a_6\left(1-a_1\right)^{-1}\right)c_{1,tt}r^{-a_1} - bc_{2,t}r^{-1} - \rho_{22}c_{2,tt}r^{-1} =$$

$$= \left(b\frac{\partial}{\partial t} + \rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)r^{-a_1}I_1(r,t) + \left(b\frac{\partial}{\partial t} + \rho_{22}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{1}{r}I_2(r,t) + a_6\frac{1}{r}I_3(r,t)\right), \quad (11)$$

де $I_0(r,t)=\int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}\left(a_2\sigma_{rr}^{(s)}+a_3P_1^{(f)}\right)dr$, $I_1(r,t)=\int_{r_в}^{r}r^{a_1}\left(a_2\sigma_{rr}^{(s)}+a_3P_1^{(f)}\right)dr$, $I_2(r,t)=\int_{r_в}^{r}r\left(a_4P_1^{(f)}+a_5\sigma_{rr}^{(s)}\right)dr$,

$$I_3(r,t)=\int_{r_в}^{r}\left(r^{1/a_1}\int_{r_в}^{r}r^{a_1}\left(a_2\sigma_{rr}^{(s)}+a_3P_1^{(f)}\right)dr\right)dr.$$

Інтегруючи вирази (10), (11), знаходимо

$$\sigma_{rr}^{(s)}=-2N\,c_1(t)\,r^{-(1+a_1)}-b(1-a_1)^{-1}\left(a_6(1-a_1)^{-1}-1\right)c_{1,t}r^{1-a_1}-\left(bc_{2,t}-\rho_{12}c_{2,tt}\right)\ln r+$$
$$+(1-a_1)^{-1}\left(\rho_{11}+\rho_{12}a_6(1-a_1)^{-1}\right)c_{1,tt}r^{1-a_1}+2N(1+a_1)\int_{r_в}^{r}r^{-(2+a_1)}(r,t)I_1(r,t)\,dr-$$
$$-2N_0\int_{r_в}^{r}I_0(r,t)\,dr+\left(b\frac{\partial}{\partial t}+\rho_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int_{r_в}^{r}r^{-a_1}I_1(r,t)\,dr-\ (b\frac{\partial}{\partial t}+\rho_{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2})(\int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}I_2(r,t)\,dr+a_6\int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}I_3(r,t)\,dr)+c_3(t). \quad (12)$$

$$P_1^{(f)}=-(b/m_2)\left(a_6(1-a_1)^{-1}-1\right)(1-a_1)^{-1}c_{1,t}r^{1-a_1}-(1/m_2)\rho_{12}+\rho_{22}a_7(1-a_1)^{-1}r^{1-a_1}c_{1,tt}-$$
$$-(b/m_2)c_{2,t}\ln r-(\rho_{22}/m_2)c_{2,tt}\ln r-(1/m_2)(b\frac{d}{dt}+\rho_{12}\frac{d^2}{dt^2}\ )\int_{r_в}^{r}\frac{1}{r^{a_1}}I_1(r,t)\,dr-$$

Виходячи з граничних умов (6), (7), при, $r=r_в$, отримаємо

$$\sigma_{rr}^{(s)}=-m_1\left[Q_0-E(t-t_0)(Q_1-Q_0)\right]-2Nc_1(t)\left(r^{-1-a_1}-r_в^{-1-a_1}\right)-a_{11}c_{1,t}\left(r^{1-a_1}-r_в^{1-a_1}\right)+\ a_{12}c_{1,tt}\left(r^{1-a_1}-r_в^{1-a_1}\right)-bc_{2,t}\ln\frac{r}{r_в}+$$
$$+\rho_{12}c_{2,tt}\ln\frac{r}{r_в}-2N\int_{r_в}^{r}I_0(r,t)\,dr+\ a_{13}\int_{r_в}^{r}r^{-2-a_1}I_1(r,t)\,dr+\left(\ b\frac{\partial}{\partial t}+\rho_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \right)\left[\ \int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}I_2(r,t)\,dr\ \right)+a_6\int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}I_3(r,t)\,dr\Big], \quad (14)$$

$$P_1^{(f)}=m_2\left(Q_0'+E(t-t_0)\left(Q_1'-Q_0'\right)\right)-m_2^{-1}a_{11}\ c_{1,t}\left(r^{1-a_1}-r_в^{1-a_1}\right)-\ a_{14}c_{1,tt}\left(r^{1-a_1}-r_в^{1-a_1}\right)-b\ m_2^{-1}\ c_{2,t}\ln\frac{r}{r_в}-m_2^{-1}\ \rho_{22}\ c_{2,tt}\ln\frac{r}{r_в}-$$
$$-m_2^{-1}(b\frac{d}{dt}+\rho_{12}\frac{d^2}{dt^2}\ )\int_{r_в}^{r}r^{-a_1}I_1(r,t)\,dr-\left(\frac{1}{m_2}\right)(b\frac{d}{dt}+\rho_{22}\frac{d^2}{dt^2}\ )(\ \int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}I_2(r,t)\,dr+a_6\int_{r_в}^{r}\frac{1}{r}I_3(r,t)\,dr\ ). \quad (15)$$

З граничних умов (6), (7) при $r=r_H$ випливає

$$-m_1\left(Q_0-E(t-t_0)(Q_1-Q_0)\right)-2Na_{17}c_1(t)-a_{18}a_{11}c_{1,t}+a_{12}a_{18}c_{1,tt}-bc_{2,t}\ln\frac{r_H}{r_в}+$$
$$+\rho_{12}c_{2,tt}\ln\frac{r_H}{r_в}=2N\int_{r_в}^{r_H}I_0(r,t)\,dr-a_{13}\int_{r_в}^{r_H}r^{-2-a_1}I_1(r,t)\,dr- \quad (16)$$
$$-(b\frac{d}{dt}+\rho_{11}\frac{d^2}{dt^2}\ )\int_{r_в}^{r_H}r^{-a_1}I_1(r,t)\,dr+(b\frac{d}{dt}-\rho_{12}\frac{d^2}{dt^2}\ )(\ \int_{r_в}^{r_H}r^{-1}I_2(r,t)\,dr+a_6\int_{r_в}^{r_H}r^{-1}I_3(r,t)\,dr\ ),$$

$$-a_{15}c_{1,t}r_H^{-a_1}-a_{16}c_{1,tt}r_H^{-a_1}-bc_{2,t}r_H^{-a_1}-\rho_{22}c_{2,tt}r_H^{-1}=$$
$$=(b\frac{d}{dt}+\rho_{12}\frac{d^2}{dt^2}\ )r_H^{-a_1}I_1(r_H,t)+(b\frac{d}{dt}+\rho_{22}\frac{d^2}{dt^2}\ )\left[\ r_H^{-1}I_2(r_H,t)+a_6r_H^{-1}I_3(r_H,t)\ \right]. \quad (17)$$

У формулах (14) – (17) використано позначення:

$$a_{11}=b(1-a_1)^{-1}\left(a_6(1-a_1)^{-1}-1\right),\ a_{12}=(1-a_1)^{-1}\left(\rho_{11}+\rho_{12}a_6(1-a_1)^{-1}\right),$$
$$a_{13}=2N(1+a_1),\ a_{14}=m_2^{-1}\left(\rho_{12}+\rho_{22}a_6(1-a_1)^{-1}\right)(1-a_1)^{-1},\ a_{15}=b\left(a_6(1-a_1)^{-1}-1\right);\ a_{16}=\rho_{12}+\rho_{22}a_6(1-a_1)^{-1},$$
$$a_{17}=r_H^{-1-a_1}-r_в^{-1-a_1},\ a_{18}=r_H^{1-a_1}-r_в^{1-a_1}.$$

Виходячи з (12), (13), систему рівнянь (14) – (17) будемо розв'язувати шляхом поєднання методу послідовних наближень та інтегрального перетворення Лапласа за часом. Під час застосування методу послідовних наближень, як перше наближення, беремо розв'язок системи (14) – (17) без участі правих частин рівнянь, при початкових умовах $c_1(0)=c_1'(0)=c_{20}(0)=c_1'(0)$. Друге наближення знаходимо з системи (14) – (17) з участю інтегральних доданків, які побудовано з урахуванням першого наближення за тих самих нульових початкових умов. Подібним чином визначаються наступні наближення. При цьому всі наближення обчислюються в просторі зображень в квадратурах, які записуються через елементарні функції.

Оскільки, при виконанні умови Ліпшиця, послідовні наближення рівномірно збігаються, то, з практичних міркувань, зазвичай можна обмежитися другим наближенням.

З системи (14) – (17), в просторі зображень, знаходимо для першого наближення

$$\tilde{c}_1(p)=\frac{\frac{m_1}{a_{19}}(b+\rho_{22}p)\left(Q_0-(Q_1-Q_0)e^{-pt_0}\right)}{p\left(p^3+a_{20}p^2+a_{21}p+a_{22}\right)};\tilde{c}_2(p)=-\frac{\frac{m_1}{a_{19}}r_H^{1-a_1}(a_{15}+a_{16}p)\left(Q_0-(Q_1-Q_0)e^{-pt_0}\right)}{p\left(p^3+a_{20}p^2+a_{21}p+a_{22}\right)}, \quad (18)$$

де

$$a_{19}=\left(a_{12}a_{18}-r_H^{1-a_1}a_{16}\ln\frac{r_H}{r_в}\right)\rho_{22},\ a_{20}=\frac{1}{a_{19}}\left(a_{18}(a_{12}b-a_{11}\rho_{22})+r_H^{1-a_1}(a_{16}b-\rho_{12}a_{15})\ln\frac{r_H}{r_в}\right),$$

$$a_{21}=-\frac{1}{a_{19}}\left(a_{11}a_{18}b+2Na_{17}\rho_{22}+a_{15}r_H^{1-a_1}b\ln\frac{r_H}{r_в}\right),\ a_{22}=-2N\frac{1}{a_{19}}a_{17}b,\ a_{19}>0,\ a_{20}>0,\ a_{21}>0,\ a_{22}>0.$$

Запишемо формально розв'язок (18) через обернені перетворення

$$c_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}e^{pt}\tilde{c}_1(p)dp,\ c_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}e^{pt}\tilde{c}_2(p)dp. \quad (19)$$

Підінтегральні функції мають чотири прості особливі точки в комплексній площині: два дійсних полюси $p=0$, $p=\gamma_1$ і два спряжених комплексних полюси $p=\gamma_2\pm i\gamma_3$.

Якщо $q_3\ge 0$, $q_1>0$, то

$$\gamma_1=-\frac{a_{20}}{3}-2\sqrt{q_1/3}\,\mathrm{ctg}\ 2\alpha,\ \gamma_2=-\frac{a_{20}}{3}+\sqrt{+q_1/3}\,\mathrm{ctg}\ 2\alpha,\ \gamma_3=\sqrt{+q_1/3}\sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\ 2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\beta/2}\ (|\alpha|\le\pi/4),\ \mathrm{tg}\,\beta=\frac{2}{q_2}\sqrt{\left(-\frac{q_1}{3}\right)^3},(|\beta|\le\pi/2). \quad (20)$$

Якщо $q_3\ge 0$, $q_1<0$, то

$$\gamma_1=-\frac{a_{20}}{3}-2\sqrt{-q_1/3}\,\mathrm{cosec}\ 2\alpha,\ \gamma_2=-\frac{a_{20}}{3}+\sqrt{-q_1/3}\,\mathrm{cosec}\ 2\alpha,\ \gamma_3=\sqrt{-q_1/3}\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\ 2\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,\beta/2}\ (|\alpha|\le\pi/4),\ \sin\beta=\frac{2}{q_2}\sqrt{\left(-\frac{q_1}{3}\right)^3},(|\beta|\le\pi/2). \quad (21)$$

Далі формули (18) зручно записати у вигляді

$$\tilde{c}_1(p)=\frac{m_1}{a_{19}}\tilde{\Phi}_1(P)\left(Q_0-(Q_1-Q_0)e^{-pt_0}\right),\ \tilde{\Phi}_1(P)=(b+\rho_{22}p)\left(p\left(p^3+a_{20}p^2+a_{21}p+a_{22}\right)\right)^{-1}, \quad (22)$$

$$\tilde{c}_2(p)=-\frac{m_1r_H^{1-a_1}}{a_{19}}\tilde{\Phi}_2(P)\left(Q_0-(Q_1-Q_0)e^{-pt_0}\right),\ \tilde{\Phi}_2(P)=(a_{15}+a_{16}p)\left(p\left(p^3+a_{20}p^2+a_{21}p+a_{22}\right)\right)^{-1}, \quad (23)$$

$$e^{-pt_0}\tilde{\Phi}_1(P)\xrightarrow[\cdot]{\cdot}\begin{cases}0,0\le t\le t_0,\\ \Phi_1(t-t_0),t\le t_0;\end{cases}\quad e^{-pt_0}\tilde{\Phi}_2(P)\xrightarrow[\cdot]{\cdot}\begin{cases}0,0\le t\le t_0,\\ \Phi_2(t-t_0),t\ge t_0.\end{cases} \quad (24)$$

Застосовуючи для окремих випадків (20), (21) інтегральну теорему Коші про лишки, з (22), (23) знаходимо

$$\Phi_1(t)=l_1+l_2e^{\gamma_1 t}+l_3e^{\gamma_2 t}\cos\gamma_3 t+l_4e^{\gamma_2 t}\sin\gamma_3 t,\ \Phi_2(t)=l_5+l_6e^{\gamma_1 t}+l_7e^{\gamma_2 t}\cos\gamma_3 t+l_8e^{\gamma_2 t}\sin\gamma_3 t, \quad (25)$$

де

$$l_1=-b\left(\gamma_1\left(\gamma_2^2+\gamma_3^2\right)\right)^{-1},\ l_2=(b+\rho_{22}\gamma_1)\left(\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)^2+\gamma_1\gamma_3^2\right)^{-1},$$

$$l_3=(l\gamma_3)^{-1}\left((b+\rho_{22}\gamma_2)\gamma_3(\gamma_1-2\gamma_2)+\rho_{22}\gamma_3\left(\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2-\gamma_3^2\right)\right),$$

$$l_4=-(l\gamma_3)^{-1}\left(\rho_{22}\gamma_3^2(\gamma_1-2\gamma_2)-(b+\rho_{22}\gamma_2)\left(\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2-\gamma_3^2\right)\right),$$

$$l_5=-a_{15}\left(\gamma_1\left(\gamma_2^2+\gamma_3^2\right)\right)^{-1},\ l_6=(a_{15}+a_{16}\gamma_1)\left(\gamma_1(\gamma_1-\gamma_2)^2+\gamma_1\gamma_3^2\right)^{-1},$$

$$l_7=(l\gamma_3)^{-1}\left((a_{15}+\gamma_2a_{16})\gamma_3(\gamma_1-2\gamma_2)+a_{16}\gamma_3\left(\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2-\gamma_3^2\right)\right),$$

$$l_8=-(l\gamma_3)^{-1}\left(a_{16}\gamma_3^2(\gamma_1-2\gamma_2)-(a_{15}+\gamma_2a_{16})\left(\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2-\gamma_3^2\right)\right),$$

$$l=(\gamma_3(\gamma_1-2\gamma_2))^2+\left(\gamma_2^2-\gamma_1\gamma_2-\gamma_3^2\right)^2.$$

Згідно (19), оригінали для $c_1(p)$ та $c_2(p)$ запишемо в наступному вигляді

$$c_1(t) = \frac{m_1}{a_{19}}\left\{Q_0\left(l_1 + l_2 e^{\gamma_1 t} + l_3 e^{\gamma_2 t}\cos\gamma_3 t + l_4 e^{\gamma_2 t}\sin\gamma_3 t\right) -\right.$$

$$\left. - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0)\left(l_1 + l_2 e^{\gamma_1(t-t_0)} + l_3 e^{\gamma_2(t-t_0)}\cos\gamma_3(t-t_0) + l_4 e^{\gamma_2(t-t_0)}\sin\gamma_3(t-t_0)\right)\right\},$$

$$c_2(t) = -\frac{m_1 r_H^{1-\alpha}}{a_{19}}\left\{Q_0\left(l_5 + l_6 e^{\gamma_1 t} + l_r e^{\gamma_2 t}\cos\gamma_3 t + l_8 e^{\gamma_2 t}\sin\gamma_3 t\right) -\right.$$

$$\left. - E(t-t_0)(Q_1 - Q_0)\left(l_5 + l_6 e^{\gamma_1(t-t_0)} + l_7 e^{\gamma_2(t-t_0)}\cos\gamma_3(t-t_0) + l_8 e^{\gamma_2(t-t_0)}\sin\gamma_3(t-t_0)\right)\right\}. \qquad (26)$$

Підставляючи (26) у (8), (9) та (14), (15) без інтегральних доданків, знаходимо розв'язок поставленої задачі в першому наближенні. При побудові другого наближення для невідомих $c_1(p)$, $c_2(p)$, отримано формули, що у вигляді, що містять добуток двох зображень, оригінали яких визначають згортки двох відомих функцій типу (26). При цьому перехід до оригіналу відбувається шляхом обчислення інтегральних комбінацій зазначених функцій. Далі, підставляючи $c_1(p)$, $c_2(p)$ у (8), (9) і (14), (15) з відомими інтегральними доданками, знаходимо розв'язок розглянутої задачі в другому наближенні. Зауважимо, що всі інтегральні доданки, побудовані в елементарних функціях, легко обчислюються.

Приклад результатів числового дослідження

Проведено числовий аналіз з метою оцінки впливу динаміки на напружено-деформований стан і міцність насиченого рідиною пористого матеріалу. Це дослідження проводилося для скла, насиченого рідиною з наступними характеристиками:

$$K_1 = 4\cdot 10^{10}\,Па,\ \mu_1 = 2,4\cdot 10^{10}\,Па,\ \nu_1 = 0,25,\ m_2 = 0,3,\ {P_0}/{Q_0} = 0,5;1,\ \rho_{11} = 2,5\cdot 10^3\,Па\cdot\frac{сек^2}{м^2},\ t_0 = 30\,сек,$$

$$\rho_{11} = 2,5\cdot 10^3\,Па\cdot\frac{сек^2}{м^2},\ b = 10^{10}\,Па\cdot\frac{сек}{м^2},\ r_в = 0,1\,м,\ r_H = 1\,м.$$

На рис.1, для порівняння, зображено два графіки зміни переміщень типу (8), в залежності від t/t_0. Неперервну лінію побудовано для насиченого рідиною матеріалу, пунктирна – для сухого пористого матеріалу. Як можна бачити з графіків, у випадку ненасиченого рідиною (газом) пористого середовища, на поверхні циліндра спостерігаються коливання типу биття з різними амплітудами; у випадку насиченого середовища – гармонічні коливання з постійною амплітудою.

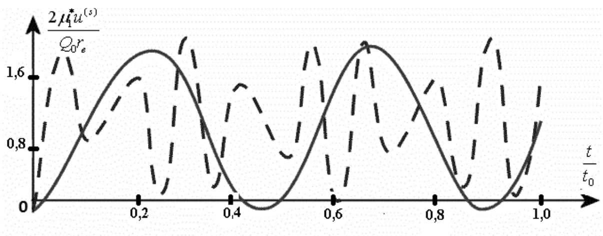


Рис.1

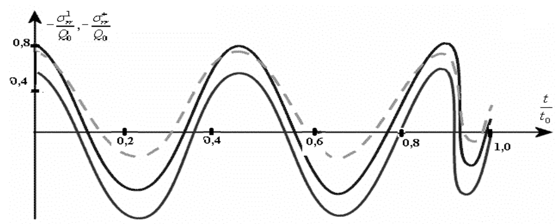


Рис.2

На рис.2 дві суцільні лінії є графіками залежності від t/t_0 радіальних напруг твердої фази $-\sigma_{rr}^1/Q_0$, де, $\sigma_{rr}^1 = \left(A - \frac{Q^2}{R}\right)e\delta_{ij} + 2Ne_{ij} - \left(\frac{mQ}{R} - (1-m_2)\right)P^{(f)}\delta_{ij}$ [5]. Графіки побудовано для двох значень параметра $P_0/Q_0 = 0,5;1$. Пунктирна лінія є графіком залежності від t/t_0 макронапружень $-\sigma_{rr}^*/Q_0 = -c_1\left(\sigma_{rr}'/Q_0 - c_2\,\sigma_{rr}^{(f)}/Q_0\right)$ в системі "скелет-рідина" при $r/r_в = 2$. З рис. видно, що поровий тиск істотно впливає на картину напруженого стану в пористому циліндрі. Для напружень у твердій фазі значення амплітуди із зростанням порового тиску збільшуються, тоді як амплітуди макронапружень в системі "скелет-рідина" залишаються незмінними. При цьому на деякій відстані від поверхні в циліндрі виникає зона розтягувальних радіальних напружень, макронапруження при цьому будуть майже стискальними. Цей факт є істотним для оцінки міцності пористого циліндра, тверда фаза якого (скло) має низьку міцність при розтягуванні.

Висновки

Вивчено процес деформування насиченого рідиною або газом пористого скляного порожнього циліндра внаслідок імпульсного навантаження на його внутрішній поверхні. Враховано стисливість рідини чи газу. Результати теоретичного та числового дослідження є істотними для оцінки міцності пористого циліндра, тверда фаза якого має низьку міцність при розтягуванні.

Список використаних джерел

1.Белов С.В. Пористые материалы в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1981. – 247 с.
2. Гомилко А.М.,Гуржий А.А., Трофимчук А.М. Гармонические колебания пористо-упругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании // Акуст. вістник. – 1999. – 2, №3. – С. 33-41.
3.Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акуст. вістник. – 2007. – 10, №2, – С. 43-63.

4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. К определению ядер наследственного уравнения насыщенной жидкостью пористой среды (Био) // XIV конф. им. Н.Кравчука.– 2012. – Т.І, С.194-197.
5.Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.:Наука, 1970. – 335 с.
6. Рущицкий Я.Я., Исрафилов Р.М. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала. І. // Прикл. механика. – 2001. – 37, №4. – С. 104–111.
7. Трофимчук А.Н. Динамика пористых упругих и упругопластических грунтов, насыщенных жидкостью: Дис. д-ра техн. наук: 05.15.09 // НАН Украины. – К., 1999 – 411 л. – Библиогр.: л. 363-400.
8.Хорошун Л.П., Исрафилов Р.М. Напряженное состояние пористого циліндра, находящегося в жидкой среде, при периодическом нагружении // Прикл. механика. – 1980. –16, №6. – С.3–8.
9. Шапиро Я.М., Мазинг Г.Ю., Прудников Н.Е. Основы проектирования ракет на твердом топливе. – М.: Военное изд-во, 1968. – 230 с.
10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Low frequency range // J. Acoust.Soc.Am. – 1956. – 28. – P.168 – 178.
11. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-structured porous solid. Higher frequency range // J. Acoust. Soc. Am. – 1956. – 28. – P. 179 – 191.
12. Pecke C., Deresiewicz H. Thermal effects on wave propagation in liquid-filed porous media.-Acta Mechanica,- XVI,-№1-2. – 1973.

Надійшла до редколегії 10.04.14

Р.Исрафилов, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр., Е. Савельева, канд. физ.-мат. наук, старш. науч. сотр.
Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ИЛИ ГАЗОМ ПОРИСТОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрен процесс деформирования насыщенного жидкостью или газом пористого стеклянного полого цилиндра вследствие импульсной нагрузки на его внутренней поверхности. Учтены сжимаемость жидкости или газа. В качестве теоретической модели среды использована классическая линейная схема Био.

R.Israfilov, PhD, K. Savelieva, PhD
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEMS FOR SATURATED LIQUID OR GAS POROUS EMPTY CYLINDER UNDER THE INFLUENCE OF PULSE LOADING

Theoretically studied the deformation of saturated liquid or gas porous hollow glass cylinder as a result of the impulse load on its inner surface. Taken into account the compressibility of the fluid or gas. The study conducted in the framework of the Biot theory.

УДК 539.595

О. Лимарченко, д-р техн. наук, Р. Ткаченко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

КОЛИВАННЯ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ РІДИНИ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ НА РУХОМІЙ ПЛАТФОРМІ

Побудовано математичну модель сумісного руху жорсткого циліндричного резервуару, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до рухомої платформи, і досліджено нелінійні коливання системи під дією прикладеної до рухомої платформи гармонічної сили.

1. Вступ

Задачі динаміки рідини з вільною поверхнею в резервуарах при різних закріпленнях продиктовані потребами сучасної техніки. Резервуари з рідиною, які знаходяться на рухомій платформі, використовуються в інженерних конструкціях в машинобудуванні, літакобудуванні, ракетній техніці, засобах транспортування та збереження рідинних вантажів [1, 3, 4, 5]. Аналітичні розв'язки цих нестаціонарних нелінійних крайових задач до теперішнього часу не одержані, тому застосовуються наближені методи, які базуються переважно на варіаційних алгоритмах.

Метою роботи є дослідження нелінійних коливань сумісного руху жорсткого циліндричного резервуара, заповненого рідиною з вільною поверхнею, приєднаного пружиною до платформи під дією прикладеної до платформи гармонічної сили.

2. Об'єкт дослідження

Дослідимо горизонтальний рух абсолютно твердого циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, приєднаного пружиною до рухомої платформи. Податливі пружини з малими жорсткостями не розглядались, щоб збереглись малі переміщення резервуару. Для порівняння розглянуто жорстке закріплення. В початковий момент часу система платформа, резервуар з рідиною, що має вільну поверхню, знаходиться у стані спокою. До платформи прикладено гармонічну силу $F = A\cos(\omega t)$, де $\omega =$ 3.8; 4.0, 4.14; 4.3; 5.2, A = 662 Н (частоти обиралися в околі частоти основного резонансу по першій гармоніці коливань рідини). Амплітуда сили A підбиралась в залежності від частоти і параметрів жорсткого закріплення. Загальну схему такої механічної системи зображено на рис.1.

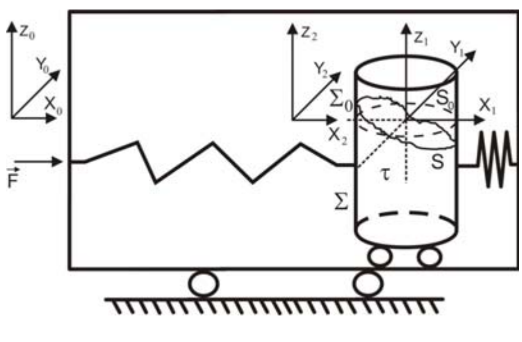


Рис.1. Схема механічної системи

Тут τ – область, яку займає рідина в даний момент часу, S – збурена вільна поверхня рідини, S_0 – незбурена вільна поверхня рідини, Σ_0 і Σ – області контакту рідини зі стінками резервуару в незбуреному та збуреному станах.

2. Математична модель

Дослідження нелінійної динаміки сумісного руху резервуару з рідиною, що частково заповнює його, і рухомої платформи, до якої пружиною приєднано резервуар, здійснювалося на основі багатомодової моделі роботи [1]. Вважаємо, що рідина однорідна, нестислива, ідеальна. В початковий момент часу відсутні вихрові рухи рідини, впливом поверхневого натягу на коливання рідини нехтуємо. Рівняння вільної поверхні в збуреному стані $z = \xi(x, y, t)$ невідоме. Аналіз здійснюємо на основі синтезу варіаційного формулювання задачі і розділення механічних рухів. Застосовуємо варіаційний принцип Гамільтона–Остроградського і кінематичні граничні умови. На відміну від диференційної постановки динамічні граничні умови задовольняються варіаційним принципом як природні. До кінематичних умов відносяться: рівняння нерозривності рідини в циліндрі

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad \tau, \text{ де } \varphi = \varphi_0 + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r},$$

умови неперетікання на межі контакту тіло-рідина і на вільній поверхні рідини

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\Sigma} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n}, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{S} = \vec{V}_0 \cdot \vec{n} + \frac{\partial\xi}{\partial t} \Big/ \sqrt{1 + \left(\vec{\nabla}\xi\right)^2},$$

де $\vec{V}_0$ – вектор швидкості руху резервуара, $\vec{r}$ – радіус-вектор точок області τ, $\vec{\varepsilon}$ – вектор поступального руху резервуара, φ – потенціал швидкості рідини. В початковий момент часу переміщення і швидкості всіх складових системи вважаються нульовими.

Динамічні граничні умови отримуємо із принципу Гамільтона–Остроградського як природні.

Кінетична і потенціальна енергії для кожного із елементів системи має вигляд:

$$T_l = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}\left(\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}}\right)^2 d\tau, \quad T_{res} = \frac{1}{2}M_{res}\dot{\vec{\varepsilon}}^2, \qquad T_{fr} = \frac{1}{2}M_{fr}\left(\dot{\vec{\varepsilon}} + \dot{\vec{u}}\right)^2, \tag{1}$$

$$\Pi_l = \frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS, \ \Pi_{res} = 0, \ \Pi_f = F\varepsilon_x, \ \Pi_{spr} = \frac{1}{2}C\varepsilon_x^2, \ \Pi_{fr} = \frac{1}{2}c\dot{\vec{u}}^2. \tag{2}$$

Тут T_l – кінетична енергія рідини, T_{res}, T_{fr} – кінетична енергія резервуару і платформи, Π_l, Π_{res}, Π_{fr} – потенціальна енергія рідини, резервуару, платформи, Π_f – потенціальна енергія, обумовлена прикладеною силою (умовне представлення), Π_{spr} – потенціальна енергія, обумовлена пружними силами, ρ – густина рідини, M_{res} – маса резервуару, M_{fr} – маса платформи, С – коефіцієнт жорсткості пружини. На відміну від традиційних постановок такого типу задач тут використовується додаткова змінна u, яка характеризує деформацію пружини, що реалізує закріплення резервуару на платформі.

Враховуючи вирази (1), (2) знайдемо функцію Лагранжа для даної системи. Зауважимо, що представлення потенціалу роботи зовнішніх сил є умовним. Маємо:

$$L = \frac{1}{2}\rho\int_{\tau}\left(\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}}\right)^2 d\tau + \frac{1}{2}M_p\left(\dot{\vec{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{1}{2}M_{fr}\left(\dot{\vec{\varepsilon}} + \dot{\vec{u}}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2 dS - \frac{1}{2}Cu^2 - \vec{F}\cdot\left(\vec{\varepsilon} + \vec{u}\right).$$

Запишемо принцип Гамільтона–Остроградського

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0.$$

Кінематичні граничні умови далі розглядаємо як механічні в'язі, які накладають обмеження на варіації в принципі Гамільтона–Остроградського

Таким чином для розв'язку нашої задачі побудовано математичну модель, яка включає варіаційний принцип, який природно задовольняє динамічні граничні умови як на стінці циліндра так і на вільній поверхні рідини, а задані кінематичні граничні умови є механічними в'язями, що накладають обмеження на варіації. Перед застосуванням варіаційного принципу необхідно спочатку виключити кінематичні граничні умови.

3. Побудова дискретної моделі системи

Нелінійну дискретну модель динаміки сумісного руху резервуара з рідиною, яка має вільну поверхню, приєднаного пружинами до рухомої платформи, побудовано на основі методу Канторовича, який застосовано до варіаційного формулювання задачі на основі варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського [1]. Для величин φ, ξ використаємо розклад розв'язків по формах власних коливань лінійної задачі ψ_n про рух обмеженого об'єму рідини в рухомому резервуарі, які задовольняють кінематичним граничним умовам на твердих стінках і умовам на вільній поверхні рідини в лінеарізованому вигляді. Розв'язок нелінійної задачі шукаємо у вигляді

$$\varphi = \sum_n b_n(t)\,\psi_n(r,\theta)\frac{\mathrm{ch}\chi_n(z+H)}{\chi_n\mathrm{sh}\chi_n H}, \qquad \xi = \sum_i a_i(t)\psi_i(r,\theta), \tag{3}$$

де a_i – амплітудний параметр збудження форм власних коливань рідини [1]. Ці ж розклади використовуємо і для кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, які задовольняються наближено за допомогою метода Гальоркіна. Розклади (3) дають можливість перейти від континуальної системи до не вільної дискретної. Для ефективного застосування варіаційного принципу кінематичні граничні умови необхідно виключити з розв'язку варіаційної задачі. Виключивши кінематичні граничні умови [1], отримаємо функцію Лагранжа, яка відповідає вільній дискретній системі з кількістю незалежних параметрів, що дорівнює числу ступенів вільності системи (число форм вільних коливань). Так як безвихровий рух ідеальної, однорідної, нестисливої рідини повністю визначається рухом її меж, то збурення вільної поверхні рідини повністю характеризують рух рідини з вільною поверхнею. Амплітуди цих збурень a_n можна вяти вякості незалежних змінних. Згідно [1] коефіцієнти $b_n(t)$ залежать від параметрів a_n і їх похідних. Із варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського знаходимо систему рівнянь руху в амплітудних параметрах коливань рідини a_i і в параметрах поступального руху резервуару і платформи, яка є системою звичайних диференціальних рівнянь, лінійних відносно другої похідної від a_i, $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{u}$.

Модель сумісного руху системи, яка записується у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь, лінійних відносно других похідних невідомих величин, в загальному вигляді має форму

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k,t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k,t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} + \sum_{n=N+4}^{N+6} p_{rn}(a_k,t)\ddot{u}_{n-N-3} = q_r(a_k,\dot{a}_l,t)\,,\ r=\overline{1,N+7}\,.$$

Ця модель враховує взаємний вплив всіх компонент системи.

4. Чисельні результати

Для чисельних розрахунків розглянуто модель, яка включає 12 форм коливань вільної поверхні рідини [2]. Проведено розрахунки вказаній для такої моделі та для моделі без пружини, де маса резервуара збільшена на масу, відповідну масі платформи попередньої моделі. Співвідношення мас рідини, резервуару, платформи в безрозмірному вигляді відповідно є M_{res} =0,25 M_l , M_{fr} =5 M_l .

Покладемо: жорсткість пружини *c*=50000 Н/м, 100000 Н/м, 200000 Н/м, 500000 Н/м, 2000000 Н/м. Суттєво податливі пружини не розглядаємо, щоб обмежити рух циліндра. На платформу діє сила $F = A\cos(\omega t)$, де в околі першого резонансу покладається $\omega =$ 3.8; 4.0; 4.14; 4.3; 5.2, *A*= 210Н, 235 Н, 662 Н. Рух розглядається на інтервалі до $t = 125$ c (приблизно 80 періодів коливань по першій формі). Резонансну частоту системи визначаємо за формулою

$$\omega^2 = \frac{\chi}{R} g \ \mathrm{th}\left(\frac{\chi H}{R}\right)$$

У данному випадку ω = 4,143368. Це частота коливань по першій гармоніці ψ_1 . відмітимо зауважимо що, в данному випадку маємо взаємодію трьох частот: зовнішньої сили, коливань резервуара на платформі і збурень вільної поверхні рідини. Розглянемо збурення вільної поверхні рідини на стінці циліндра в точках, рух яких співпадає з напрямком прикладеної сили ξ/R , в центрі циліндра (першої вісесиметричної форми, яка збурюється тільки на основі нелінійних механізмів) a_3/R та переміщення циліндра ε/R . Радіус циліндра R=1 м. Аналізується поведінка системи до резонансу, в околі резонансу і після резонансу. Чисельні розрахунки показують, що для данної системи притаманні основні властивості нелінійних коливань: модуляція, дрейф середнього значення, відсутність виходу на усталений режим, горби хвиль вищі ніж впадини, що узгоджується з експериментами [5] . Для ілюстрації останньої властивості наведемо таблиці максимальних і мінімальних значення збурень вільної поверхні ξ/R на стінці циліндра в точках, які рухаються в напрямку прикладеної сили, з пружиною і без неї при різних значеннях жорсткості пружини і частот зовнішньої сили в дорезонансній і зарезонансній областях частот по першій гармоніці.

***Таблиця* 1. Максимальні значення збурень вільної поверхні ξ/R**

Max ξ/R з пружиною	**C=50 000 (F=662)**	**C=100 000 (F=210)**	**C=200 000 (F=662)**	**C=500 000 (F =535)**	**C=2 000 000 (F=662)**
$\omega = 3.8$	0.03077	0.21508	0.05347	0.02764	0.02874
$\omega = 4.0$	0.02261	0.02991	0.29086	0.05305	0.04836
$\omega = 4.14$	0.01878	0.01609	0.19657	0.24094	0.10841
$\omega = 4.3$	0.01647	0.01071	0.06971	0.12856	0.26220
$\omega = 5.2$	0.01213	0.00411	0.01357	0.01005	0.01218
Max ξ/R без пружини	C=50 000 (F=662)	C=100 000 (F=210)	C=200 000 (F=662)	C=500 000 (F =535)	C=2 000 000 (F=662)
$\omega = 3.8$	0.02745	0.00858	0.02745	0.02209	0.02745
$\omega = 4.0$	0.04531	0.01430	0.04531	0.03634	0.04531
$\omega = 4.14$	0.09068	0.02624	0.09067	0.07112	0.09068
$\omega = 4.3$	0.30541	0.18415	0.30542	0.27735	0.30541
$\omega = 5.2$	0.01209	0.00380	0.01209	0.00975	0.01209

***Таблиця* 2. Мінімальні значення збурень вільної поверхні ξ/R**

Max ξ/R з пружиною	**C=50 000 (F=662)**	**C=100 000 (F=210)**	**C=200 000 (F=662)**	**C=500 000 (F =535)**	**C=2 000 000 (F=662)**
$\omega = 3.8$	-0.02952	-0.15784	-0.05116	-0.02664	-0.02787
$\omega = 4.0$	-0.02169	-0.02883	-0.19733	-0.05005	-0.04883
$\omega = 4.14$	-0.01850	-0.01606	-0.17304	-0.19977	-0.10064
$\omega = 4.3$	-0.01549	-0.01043	-0.06071	-0.09812	-0.15762
$\omega = 5.2$	-0.01184	-0.00419	-0.01368	-0.00996	-0.01194
Max ξ/R без пружини	C=50 000 (F=662)	C=100 000 (F=210)	C=200 000 (F=662)	C=500 000 (F =535)	C=2 000 000 (F=662)
$\omega = 3.8$	-0.02642	-0.00851	-0.02642	-0.02145	-0.02642
$\omega = 4.0$	-0.04331	-0.01376	-0.04331	-0.03495	-0.04331
$\omega = 4.14$	-0.08377	-0.02551	-0.08381	-0.06624	-0.08377
$\omega = 4.3$	-0.16936	-0.13030	-0.16941	-0.16318	-0.16936
$\omega = 5.2$	-0.01171	-0.00374	-0.01171	-0.00949	-0.01171

Із таблиць 1 та 2 видно, що максимальні значення збурень вільної поверхні на стінці циліндра ξ/R при пружинному закріпленні досягаються в дорезонансній області. Вони змінюються зі зміною жорсткості пружини та частот зовнішньої сили. При менших жорсткостях вони досягаються в дорезонансній області, при С=500000 Н/м – в області резонансу, а при більших жорсткостях – у зарезонансній області. При жорсткому закріпленні максимальні значення ξ/R маємо в зарезонансній області, найбільші з них є при ω =4,3. Тільки в околі цієї точки пружина суттєво зменшує амплітуди збурень, причому відношення амплітуд ξ/R з пружинним закріпленням до відповідних амплітуд ξ/R з жорстким закріпленням зменшується зі збільшенням жорсткості пружини. В усіх випадках коливань горби більші ніж впадини, що узгоджується з даними експеримента [5].

Характерною особливістю нелінійних коливань є їх модуляція. В системі модуляція коливань присутня практично у всіх випадках, але з різними періодами. Наведемо приклад модуляції без дрейфу середнього значення, що характерно для менших жорсткостей.

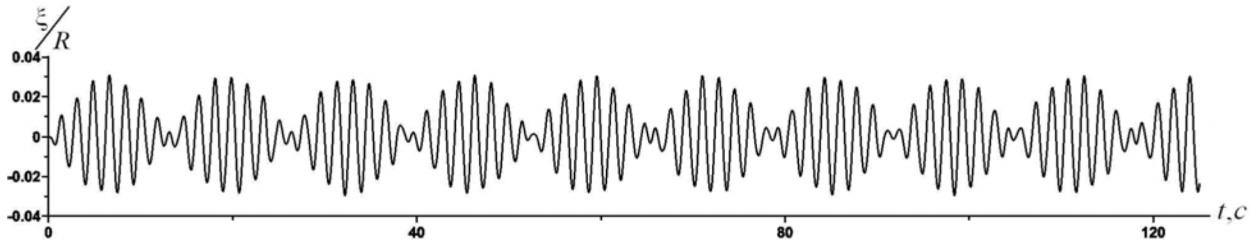


Рис.2. Значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини ξ/R при *C*=50000 Н/м, *A*=662 Н і $\omega = 3.8$.

На Рис 2 приведено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини ξ/R при жорсткості С=50000 Н/м, $\omega = 3.8$, А=662Н, де чітко видно модуляцію коливань без дрейфу середнього значення. Аналогічну картину маємо при відсутності пружини. При ω =4,0; 4,14 модуляція такого ж типу, але при наявності пружини зменшується період модуляції, більш виразні двогорбі піки, амплітуди коливань більші ніж при відсутності пружини, причому без пружини період модуляції суттєво збільшується, існують невеликі області, де коливання відбувається в околі нуля. В зарезонансній області маємо модуляцію з дрейфом середнього значення і з зсувом коливань в додатному напрямку.

Особливий випадок маємо при ω =4,3, де амплітуда коливань вільної поверхні рідини при пружинному закріпленні суттєво менша ніж при жорсткому. Наприклад, при С=200000 Н/м, А=662 Н амплітуда ξ/R при відсутності пружини в 4,3 раз більша ніж при пружинному закріпленні. Це характерно для всіх жорсткостей. При С більших 100000 Н/м вплив пружини зменшується зі збільшенням жорсткості пружини і амплітуди зовнішньої сили. При С=2000000 Н/м, А=662, амплітуда ξ/R при відсутності пружини в 1,6 раз більша ніж при пружинному закріпленні. При відсутності пружини модуляція відбувається з дрейфом середнього значення і зсувом його в додатній бік.

Вихід на усталений режим в загальному випадку в системі не спостерігається, що узгоджується з даними експерименту для нелінійних коливань [5, 6]. Але існують випадки, коли відбувається вихід на впорядкований режим (С=50000 Н/м, $\omega = 3.8$, А=210 Н, с=200000 Н/м, А=662 Н, ω =4,0 з пружиною і с=100000 Н/м, ω =4,3, А=210 Н без пружини).

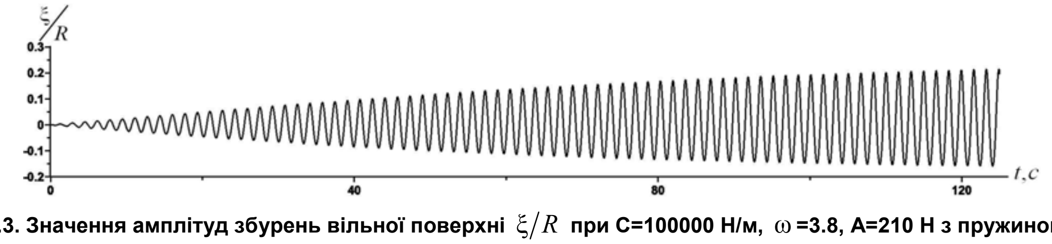


Рис.3. Значення амплітуд збурень вільної поверхні ξ/R при С=100000 Н/м, ω =3.8, А=210 Н з пружиною

На рис.3 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини ξ/R при жорсткості С=100000 Н/м, ω=3,8, А=210 Н при пружинному закріпленні, що підтверджує вихід на впорядкований режим. Коли пружина відсутня, то маємо модуляцію без дрейфу середнього значення аналогічно тому, що зоюражено на рис.2. При ω=4,3 графік коливань з пружиною повторює графік коливань без пружини, а графік без пружини повторює графік з пружиною для випадку ω=3,8.

Ще одною характерною рисою нелінійних коливань є вплив вищих гармонік.

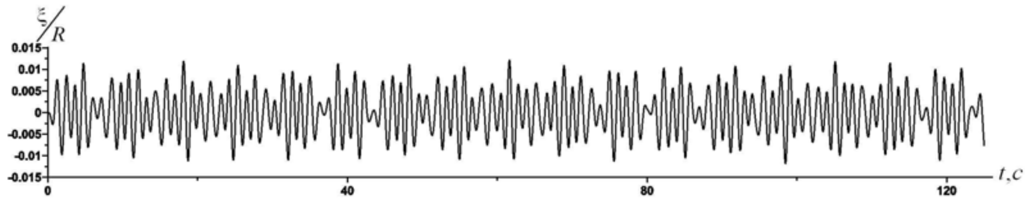
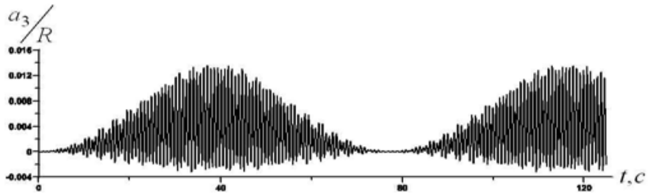


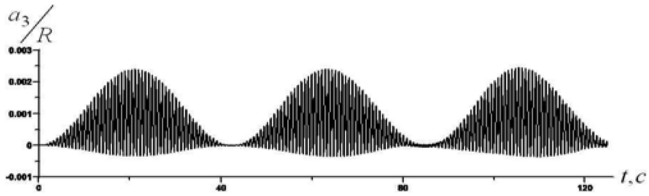
Рис.4. Значення амплітуд збурень вільної поверхні ξ/R при С=50000 Н/м, А=662Н і ω=5.2 з пружиною

На рис.4 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини ξ/R при С=50000 Н/м, А=662 Н і ω=5.2 з пружиною, що вказує на те, що вплив вищих гармонік найбільш суттєвий при ω=5.2 (в околі резонансної частоти по другій гармоніці ψ_2) для всіх жорсткостей. При цьому яскраво виражена модуляція з 4 – 5 періодами першої форми з різними амплітудами. Присутні двогорбі піки.

Розглянемо збурення рідини в центрі циліндра a_3/R (першої вісесиметричної форми). Відомо, що ця форма коливань збурюється тільки на основі нелінійних механізмів [1]. Майже для всіх випадків проявляється модуляція з різними періодами. Різко виражено зміщення середнього значення коливань в додатному напрямку. Висота горба хвилі суттєво більша глибини впадин.



а



б

Рис. 5. Значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини в центрі циліндра a_3/R при С=200000 Н/м, А=662 Н, $\omega = $ 4,14 (а) з пружиною *б*) без пружини)

На рис. 5 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини в центрі циліндра a_3/R при жорсткості С=200000 Н/м, А=662Н і ω=4,14 (а – з пружиною; б – без пружини), звідки видно, що відбувається дрейф середнього значення, коливання практично відбуваються в додатній області. Амплітуда коливань незначна. При цьому горби більші від впадин, існують невеликі проміжки, де відбувається коливання в околі нуля. При інших значеннях частот до ω=5.2 маємо подібні картини, але з різним періодом модуляції. При ω=5.2 більш суттєво видно вплив більш високих гармонік спектру.

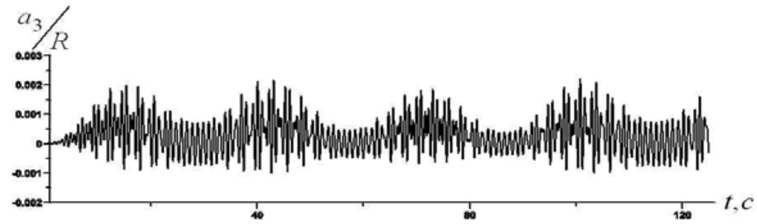


Рис.6. Амплітуди збурень вільної поверхні a_3/R при С=200000 Н/м, $\omega = 4{,}3$, А=662 Н з пружиною

На Рис.6 зображено значення амплітуд збурень вільної поверхні рідини a_3/R при С=200000 Н/м, $\omega = 4{,}3$, А=662 Н з пружиною. Видно зміщення в додатній бік, особливо суттєве зміщення буде при відсутності пружини.

Відмітимо випадки, при яких збурення в центрі циліндра подібні по модуляції до збурень на стінці циліндра, але з меншими амплітудами і різко зміщеними в додатній бік середніми значеннями: без пружини – при всіх жорсткостях на частоті ω=4.3; з пружиною – С=200000, А=662, ω=4.0; С=500000, А=535, $\omega = 4.14$. Вихід на усталений режим не відбувається для обох типів закріплень.

Коливання в центрі циліндра при С=100000Н/м, А=210Н, $\omega = 3{,}8$ майже повторюють форму їх на стінці циліндра, але з меншою амплітудою.

Проаналізуємо тепер поступальний рух резервуара. В дорезонансних областях і при ω=4.3 без пружини для ε_x/R відбувається повторення характеру руху ξ/R, але з меншими амплітудами. При відсутності пружини рух зміщено в додатню область. Відмінним є рух в резонансному випадку ω=4.14, де при жорсткому закріпленні коливання відбуваються повністю в додатній зоні з виходом на усталений режим при будь-якому значенні жорсткості пружини.

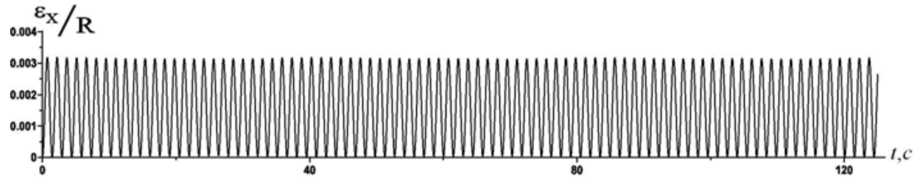


Рис. 7. Амплітуди коливань циліндра ε_x/R при С=500000 Н/м, $\omega = 4{,}14$, А=662 Н без пружини

На рис.7 зображено значення амплітуд коливань циліндра ε_x/R при жорсткому закріпленні С=500000 Н/м, $\omega = 4{,}14$, А=662 Н без пружини, що характеризує усталений режим. При наявності пружини маємо коливання зі слабкою модуляцією. Суттєво відрізняється рух при $\omega = 5.2$, який відбувається практично в додатній області з малими амплітудами. Тобто, в основному, коливання резервуару в дорезонансній області по формі подібні до коливань вільної поверхні рідини на стінці циліндра. При частотах ω=4.14 і вище коливання циліндра по формі відрізняються від коливань вільної поверхні рідини. Маємо дрейф середнього значення, більшу частоту модуляції. В околі значень частоти ω=4,3 пружина ефективна і зменшує амплітуди коливань. В околі ω=5,2 найбільш суттєво видно вплив більш високих гармонік спектру, наявні двогорбі піки, при русі в центрі резервуара переважно спостерігається опускання рівня вільної поверхні. Відбувається дрейф середнього значення.

5. Висновки

Побудовано математичну модель нелінійних коливань сумісного руху жорсткого циліндричного резервуара з рідиною з вільною поверхнею, пружно закріпленого на рухомій платформі.

Показано, що пружинне закріплення зменшує амплітуди коливань вільної поверхні рідини на стінці і в центрі циліндра тільки в невеликому діапазоні частот зовнішньої сили в околі ω=4,3. В інших випадках наявність пружини збільшує амплітуди коливань вільної поверхні.

При коливаннях вільної поверхні на стінці циліндра суттєво проявляються нелінійні ефекти: модуляція коливань, дрейф середнього значення, вплив вищих гармонік. Найбільший вплив вищих гармонік спостерігається в околі частоти $\omega = 5{,}.2$ як при жорсткому так і при пружинному закріпленні. Наявність пружини підсилює ці ефекти, за виключенням невеликої зони в околі частоти ω=4,3.

Вихід на усталений режим коливань вільної поверхні рідини протягом 80 періодів, в основному, не спостерігається. Але для випадків С=50000 Н/м, ω=3,8, А=210 Н; С=200000 Н/м, А=662 Н, ω=4,0 з пружиною і С=100000 Н/м, ω=4,3, А=210 Н без пружини відбувається вихід на упорядкований режим.

В дорезонансній зоні коливання резервуару на платформі по формі подібні до коливань вільної поверхні рідини на стінці циліндра. В зоні резонансу з пружиною маємо модуляцію з дрейфом середнього значення зі зсувом в додатному напрямку. А при жорсткому закріпленні циліндр коливається в усталеному режимі в додатній області. При ω=4.3 пружина зменшує амплітуди коливань циліндра.

Список використаних джерел

1. Лимарченко О.С., Матараццо Дж., Ясинский В.В Динамика вращающихся конструкций с жидкостью. – К.:, ГНОЗІС, 2002. – 304 с.
2. Лимарченко О.С. Исследование эффективности дискретных моделей при решении задачи об импульсном возбуждении резервуара с жидкостью //Мат.физика и нелинейн. механика. – 1985. – 4. – С.44-48.
3. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
4. Limarchenko O. Nonlinear properties for dynamic behavior of liquid with a free surface in a rigid moving tank // Int. J. Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2000. – Vol. 1, № 1. – P. 105–118..
5. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study / International Journal of Recent Trends in Engineering, 2009, Vol. 1, No. 6, P. 1-5.

Надійшла до редколегії 23.05.14

О. Лимарченко, д-р техн. наук, Р.Ткаченко, асп.
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ

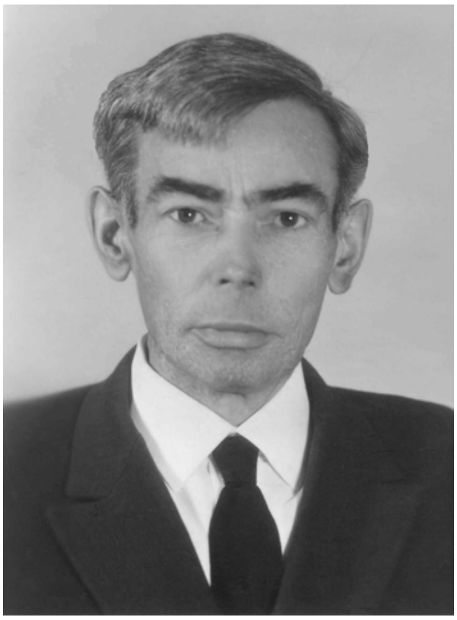
В роботе построена математическая модель совместного движения жесткого цилиндрического резервуара, заполненного жидкостью со свободной поверхностью, присоединенного пружиной к подвижной платформе, и исследовано нелинейные колебания системы под действием приложенной к подвижной платформе гармонической силы.

O. Limarchenko, Full Doctor (eng), R.Tkachenko, Post Graduate student
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

OSCILLATIONS OF LIQUID FREE SURFACE IN CYLINDRICAL RESERVOIR ON MOVABLE PLATFORM

Mathematical model of combined motion of rigid cylindrical reservoir, filled by liquid with a free surface, and fixed by spring to movable platform is considered. Nonlinear oscillations of the system under action of harmonic external force applied to the platform were studied.

ПОЛОЖІЙ ГЕОРГІЙ МИКОЛАЙОВИЧ – 100 РОКІВ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ



23 квітня 2014 року виповнилося 100 років від дня народження відомого математика члена-кореспондента АН УРСР, доктора фізико-математичних наук, професора Положія Георгія Миколайовича, який майже 20 років працював на механіко-математичному факультеті Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка.

Положій Г.М. працював доцентом кафедри математичного аналізу (1949 – 1950), доцентом кафедри математичної фізики (1950 – 1951), очолював кафедру математичної фізики (1951 – 1958), згодом, на механіко-математичному факультеті заснував кафедру обчислювальної математики і був першим її завідувачем (1958 – 1968), з листопада 1952 року по лютий 1953 року виконував обов'язки декана механіко-математичного факультету. При його активній участі у Київському університеті було створено обчислювальний центр.

Положій Г.М. заснував у Київському університеті наукову школу з теорії узагальнених аналітичних функцій. Він підготував 22 кандидати наук, з яких 6 захистили докторські дисертації. Серед його учнів – академік НАН України І.І. Ляшко, академік НАН України В.Л. Макаров, член-кореспондент НАН України Б.М. Бублик, професори Київського університету А.А. Глущенко, О.О. Капшивий, І.М. Ляшенко та кандидати фізико-математичних наук Н.О.Пахарева, А.А.Скоробагатько, В.С. Чемерис, О.М.Приходько, В.І.Діденко, Алім М.Антонов, Аліса М.Антонова, Б.В. Василишин, Чинь Куанг, Чань Бао та інш. Учні Г.М. Положія – І.І. Ляшко, Н.О. Пахарева, А.А. Глущенко і О.О. Капшивий свого часу очолювали кафедру математической фізики, а І.І. Ляшко згодом – кафедру обчислювальної математики. Його аспіранти-іноземці стали відомими вченими в своїх країнах.

Георгій Миколайович написав перший підручник з математичної фізики українською мовою (Рівняння математичної фізики. – Київ: Радянська школа, 1959), який згодом було перевидано як навчальний посібник для університетів СРСР (Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964). Опублікував один з перших навчальних посібників з обчислювальної математики для університетів СРСР (Математический практикум. – М.: Физматгиз, 1960, спільно з Н.О.Пахарєвою, І.З.Степаненко, П.С.Бондаренко, І.М.Великоіваненко), який згодом було перевидано німецькою і польською мовами (Mathematisches Praktikum. – Leipzig: B.G.Taubner, Verlagsgeselschaft, 1963; Metody przyblizonych obliczeacuten. – Warsawa: Wyd. Nauktechn, 1966).

Положій Г.М. – автор 114 наукових праць, серед яких 3 монографії, які перевидано англійською і німецькою мовами, та 3-х винаходів. Основні наукові праці Положія Г.М. стосувалися створених ним нових напрямів у математиці:

1) теорії узагальнених *p*- та *(p,q)*-аналітичних функцій комплексної змінної та їх застосувань в теорії крайових задач математичної фізики і механіки суцільних середовищ;

2) методу сумарних зображень і *P*-трансформацій чисельного розв'язання крайових задач математичної фізики.

Основні результати з цих напрямів підсумовані в одноосібних монографіях Положія Г.М. (Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1962), перевидано англійською мовою (The Method of Summary Representation for Numerical Solution of Problems of Mathematical Physics. – Oxford, London, Edinburgh, New Jork, Paris, Frankfurt: Pergamon Press, 1965) німецькою мовою Numerische Losung von Randwertproblemen der mathematischen Physik und Funktionen diskreten Arguments. – Leipzig: B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1966); Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. *p*-аналитические и *(p,q)*-аналитические функции и некоторые их применения. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965; Теория и применение *p*-аналитических и *(p,q)*-аналитических функций. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1973.

Наукові результати Положія Г.М. знайшли широке застосування при дослідженні складних прикладних задач, зокрема, механіки суцільних середовищ і теорії фільтрації.

За результатами наукових розробок Положія Г.М. і його учнів у 1958 – 1959 рр. було зареєстровано винаходи: "Метод мажорантных областей решения некоторых задач математической физики" (спільно з Н.О. Пахаревой, І.І. Ляшко, А.А. Скоробагатько); "Конформное отображение методом сравнения сопротивлений" та "Универсальный итерационный метод решения интегральных уравнений".

При активній участі Положія Г.М. у Київському університеті було створено Обчислювальний центр, роботі якого високу оцінку дав свого часу професор Сорбонського университету Данжуа, який під час відвідування Київського університету 28 червня 1955 р. у книзі відзивів Обчислювального центра КДУ написав: "Я очень восхищен организацией механико-математического факультета Киевского университета. Особенно меня поразило то, что сами студенты принимают участие в изготовлении и эксплуатации счетных машин. Большой интерес вызывает замечательное изобретение профессора Положего, которое позволяет экспериментальным путем определять точечные соответствия контурных точек при конформном отображении двух областей."

100-річчю від дня народження Положія Г.М. було присвячено Міжнародну математичну конференцію "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки", яка проходила 23 і 24 квітня 2014 р. на механіко-математичному факультеті.

Співголовами програмного комітету конференції були академік НАН України Самойленко А.М., директор Інституту математики НАН України та доктор геологічних наук, професор Вижва С.А., проректор Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Тематика конференції була присвячена чотирьом актуальним напрямам сучасної математики, з яких свого часу проводив наукові дослідження Г.М. Положій.

На відкритті конференції виступили декан механіко-математичного факультету, професор Городній М.Ф.; проректор з наукової роботи Київського університету, професор Вижва С.А.; завідувач кафедри математичної фізики, професор Самойленко В.Г.; завідувач відділу Інституту математики НАН України, академік НАН України Макаров В.Л.; професор НТУУ "КПІ", професор Вірченко Н.О., професор кафедри обчислювальної математики, професор Грищенко О.Ю.; провідний науковий співробітник Інститут математики НАН України, доктор фізико-математичних наук Плакса С.А.; професор Карагодова О.О.; донька Георгія Миколайовича – кандидат фізико-математичних наук Положій Т.Г., які розповіли про життєвий і науковий шлях Георгія Миколайовича, розвиток його наукових ідей та їх сучасне втілення.

У збірнику матеріалів конференції опубліковано 119 тез наукових доповідей і біобібліографічну статтю про життєвий шлях і наукову діяльність Положого Г.М. та список його праць. Електронна версія матеріалів конференції доступна за адресою **http://matfiz.univ.kiev.ua/conf2014/ua/page/links** .

В роботі конференції крім киян, взяли участь представники Донецька, Івано-Франківська, Кам'янець-Подільського, Кіровограда, Львова, Ніжина, Одеси, Тернополя, Ужгорода, Харкова, Чернівців.

Георгій Миколайович Положій прожив всього 54 роки. Це було складне і насичене багатьма подіями життя. Він народився 23 квітня 1914 року на станції 37 роз'їзд Забайкальської залізниці в Читинській області (зараз селище Новопавлівка) в сім'ї службовця. Його дід був родом із Харківської губернії і під час російсько-турецької війни одружився з грузинкою. Це в той час не дуже віталося, через що після закінчення російсько-турецької війни він був змушений переїхати в Астраханський степ (селище Капустін Яр). В його сім'ї народилося 18 дітей. Один з його синів – Микола Андрійович Положій – батько Георгія Миколайовича – деякий час служив телеграфістом на залізниці на 37 роз'їзді. Мама Георгія Миколайовича – Олена Григорівна (дівоче прізвище Святкіна) виховувала дітей. Батьки Георгія Миколайовича мали 5 дітей – чотирі доньки і сина, Георгія, який був найменшим.

У 1924 році родина Положих переїхала в селище Нижній Баскунчак Астраханської області, де мешкали їх рідні. В 16 років Георгій Миколайович закінчив восьмирічну школу в Нижньому Баскунчаку і для продовження навчання був змушений залишити рідних і переїхати в селище Верхній Баскунчак. Тут у 1931 р. Положій Г.М. закінчив Верхнє-Баскунчацьку середню школу, отримав Посвідчення про закінчення школи з особливою відміткою: "За время пребывания в школе обнаружил особую склонность к физико-математическим наукам".

Юнак мріяв про навчання у вищому навчальному закладі, але як син службовця, він не мав права продовжувати навчання в інституті, тому для отримання відповідного стажу почав працювати на електростанції Баскунчацького заводоуправлення з добування і переробки солі "Бассоль", де працював до січня 1933 р. У лютому 1933 р. Положій Г.М. стає студентом першого курсу фізико-математичного факультету Саратовського державного університету. Тут його зустріли прекрасні педагоги, один з яких – професор Георгій Петрович Боєв, справив величезний вплив на формування Георгія Миколайовича як людини, педагога і вченого.

Ще студентом Георгій Миколайович виявив здібності до науково-дослідницької роботи з математичного аналізу. Тому, після закінчення з відзнакою у грудні 1937 р. Саратовського університету і отримання спеціальності "математик" Георгія Миколайовича запрошують на викладацьку роботу – він починає працювати асистентом кафедри математики Саратовського автодорожного інституту. У цей же час він написав свої перші наукові праці, які надіслав до журналу Доповіді АН СРСР. Але його статтю "О движении граничных точек отображаемых областей" відхилили. Рецензент його праці – видатний математик М.В. Келдыш написав: "результаты Вашей работы могут быть получены почти непосредственно из леммы Шварца ... и, что в силу простоты, с которой могут быть получены результаты заметки, ее не стоит публиковать в ДАН. Однако формулировки Вашей заметки представляют интерес как дополнение к известным фактам и после упрощения доказательств их можно было бы опубликовать в разделе мелких заметок в "Успехах математических наук".

Ваши три заметки по теории фильтрации я направил П.Я.Кочиной с просьбой их просмотреть и дать отзыв. Она является специалистом в этих вопросах. По получении ее мнения я Вам сообщу о них.

Было бы хорошо если бы Вы на каникулы приехали в Москву с тем, чтобы нам обсудить вопросы, связанные с готовностью Вашей диссертации. Я Вам тогда же дам интересующую Вас литературу. 12.12.1937".

Ці статті так і не було опубліковані, але завдяки ним виникли наукові зв'язки з видатними вченими – М.В. Келдишем і П.Я. Кочіною, які тривали довгі роки. Згодом саме Мстислав Всеволодович Келдиш стане науковим консультантом Георгія Миколайовича по його докторській дисертації.

Через рік Положій Г.М. стає асистентом кафедри математичного аналізу Саратовського державного університету, де активно займається науковими дослідженнями. 1 лютого 1940 р. Георгій Миколайович добровольцем йде на фронт – в цей час тривала радянсько-фінська війна. Через декілька місяців – 11 листопада 1940 р., він повернувся до університету, але вже 24 червня 1941 р знову добровольцем йде на фронт – розпочалася Велика вітчизняна війна. На фронті Положій Г.М. воював в піхоті, був командиром стрілецького взводу, мав військове звання молодшого лейтенанта. 3 вересня 1941 р. він отримав поранення біля хутора Михайлівський, після лікування повернувся на фронт, але 22 лютого 1942 года на Калінінському фронті він знову отримав поранення, на цей раз дуже тяжке, після якого два роки проходив лікування. На початку 1944 р. його визнали непридатним до військової служби.

Георгій Миколайович повертається в Нижній Баскунчак. Йому лише 30 років, він інвалід, перед ним постало серйозне питання: що робити далі, як жити далі ? Чи повертатися до своєї професії – науково-педагогічної діяльності, чи корінним чином міняти своє трудове життя. І саме підтримка його вчителя – професора Боєва Г.П., допомогла знайти єдиний вихід із складної життєвої ситуації. 6 квітня 1944 р. його зараховують асистентом, а в жовтні переводять на посаду старшого викладача кафедри математичного аналізу Саратовського державного університету.

У 1946 р. Положій Г.М. захистив кандидатську дисертацію "Интегральные представления непрерывно дифференцированных функций комплексного переменного" (науковий керівник – професор Г.П. Боєв), в якій він розпочав розвиток нового напряму в теорії функцій комплексної змінної – теорії узагальнених аналітичних функцій.

У розвиток основних ідей своєї кандидатської дисертації Георгій Миколайович написав наукову працю (270 машинописних сторінок) "p-аналитические функции комплексного переменного", в якій основні властивості аналітичних функцій комплексної змінної було перенесено на p-аналітичні функції, що визначалися як розв'язки деяки системи диференціальних рівнянь з частинними похідними, більш загальних, ніж умови Коші-Рімана.

Цю роботу, як докторську дисертацію, Положій Г.М. доповів на семінарі академіка І.Г. Петровського, який її підтримав. У своєму відгуку І.Г.Петровський написав: "эта работа содержит целый ряд интересных новых научных результатов, которые, конечно, должны быть возможно скорее опубликованы. Доклад тов. Г.Н.Положего об этой работе был с большим интересом заслушан на заседании объединенного семинара по уравнениям в частных производных Московского государственного университета и Научно-исследовательского института им. Стеклова Академии наук СССР. Очень желательно, чтобы тов. Положий продолжал эту работу. 25 марта 1947 года.

Але докторську дисертацію на тему "p-аналитические функции комплексного переменного" Георгій Миколайович так і не захистив, бо не було опублікованих праць. Його зацікавили застосування узагальнених аналітичних функцій до розв'язання крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, механіки суцільних середовищ, та розвиток нових методів їх розв'язання.

З 1949 р., коли Положій Г.М. почав працювати на механіко-математичному факультеті Київського державного университету ім. Т.Г.Шевченка і до останніх днів, його життя пов'язане з Київським університетом. Після переїзду академіка М.М. Боголюбова до Москви, у жовтні 1951 р. Положія Г.М. призначили завідувачем кафедри математичної фізики.

25 червня 1953 року в Математичному інституті ім. В.А. Стєклова АН СРСР Положій Г.М. захистив докторську дисертацію на тему "О некоторых методах теорий функций в механике сплошных сред". Його дисертацію було присвячено застосуванням класичної теорії функцій комплексної змінної до розв'язання задач теорії пружності і теорії фільтрації, розвитку теорії узагальнених аналітичних функцій та їх застосуванням. Результати дисертації отримали високу оцінку фахівців.

Офіційний опонент академік М.О. Лаврентьєв відзначив таке: "автор дает решение классической теории упругости смешанного типа, когда на границе задаются нормальные смещения и касательные напряжения. Задача решается для многоугольной области. Эта задача привлекала внимание многих упругистов, но полное решение получено только в работе Г.Н.Положего."

Офіційний опонент член-кореспондент АН СРСР П.Я. Полубарінова-Кочіна відзначила наступне: "есть группа задач, связанная с математической теоремой Г.Н.Положего о движении граничных точек. Сама по себе это теорема изящная и представляет математический интерес, на нее имеются уже отклики. И с другой стороны она очень полезна в теории фильтрации, потому что позволяет давать оценки некоторых величин, представляющих непосредственный интерес".

У 1954 р. Положій Г.М. отримав звання професора кафедри математичної фізики.

Саме в цей час Георгій Миколайович приділяє велику увагу створенню Обчислювального центру в Київському університеті і практичній реалізації своїх теоретичних розробок. В цей період в СРСР значну увагу почали приділяти розвитку обчислювальної математики і у багатьох вищих навчальних закладах почали створювати кафедри обчислювальної математики. Таку кафедру було створено і на механіко-математичному факультеті – її створив і 21 травня 1958 р. очолив Георгій Миколайович.

У 1967 р. Положія Г.М. обрали членом-кореспондентом АН УРСР.

Положія Г.М. нагороджено орденом "Знак Пошани", медалями СРСР, Почесними Грамотами Президії Верховної Ради УРСР (1959, 1964).

Георгій Миколайович прожив всього 54 роки. За цей час він встиг створити наукову школу, два нових наукових напрями, написати десять монографій і навчальних пособників, створити нову кафедру.

Життя Положія Г.М. – це приклад служіння Науці і Вітчизні.

Самойленко А.М., Макаров В.Л., Перестюк М.О., Городній М.Ф., Ляшко С.І., Самойленко В.Г., Гордієнко М.Л.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ
для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі – "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows.** Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

– текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;
– поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
– комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
  - шрифт статті – Arial, розмір 9;
  - інтервал між рядками – одинарний;
  - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
  - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
  - класифікаційний індекс Універсальної десяткової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
  - відомості про авторів, що містять такі елементи
    перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
  - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання…", "Деякі питання…", "Проблеми…", Шляхи…" тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку);), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
  - анотація, резюме (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок ..."отримано задовільні результати …"; анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
  - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
  - *список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);*
  - дата надходження до редколегії, наприклад, " **Стаття надійшла до редколегії 09.11.05 "**. (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

– кожну абревіатуру слід уводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абревіатурою;
– джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
– *усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;*

– не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
– на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
– усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
– усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій віддтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;

– формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:				**Define Size:**		
Text	Times New Roman			Full	**9** pt	
Function	Times New Roman			Subscript/Superscript	**7** pt	
Variable	Times New Roman	italic		Sub-Subscript/Superscript	**6** pt	
L.C.Greek	Symbol			Symbol	**14** pt	
UC.Greek	Symbol			Sub-Symbol	9 pt	
Vector-matrix	Times New Roman	bold				
Number	Times New Roman					

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Ві (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (К) або градусах Цельсія (оС), Фаренгейта (оF), Реомюра (оR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовок бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передує рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:
– подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
– подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
– подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
– затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows ***ФАЙЛ>СВОЙСТВА***, обрати закладку ***ДОКУМЕНТ*** та заповнити поля ***Название, Автор***. У полі ***Заметки*** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск 2(32)

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/8}$. Ум. друк. арк. 7,1. Наклад 300. Зам. № 214-7176.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М2.
Підписано до друку 05.11.14

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02