ВІСНИК
## КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА — 1(31)/2014

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

Публикуются оригинальные статьи по актуальным вопросам математического анализа, теории дифференциальных уравнений, математической физики, геометрии, топологии, алгебры, теории вероятностей, теории оптимального управления, теоретической механики, теории упругости, механики жидкости и газа. Все материалы, поданные в редколегию, рецензируются. После выхода в свет все материалы реферируются в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Содержание выпуска и аннотации статей размещены на Web-страничке Вестника – http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv.

Для научных сотрудников, преподавателей, студентов.


| Адреса редколегії | 03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua |
| Затверджено | Вченою радою механіко-математичного факультету 28.04.14 (протокол № 8) |
| Атестовано | Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010 |
| Зареєстровано | Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09 |
| Засновник та видавець | Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02 |
| Адреса видавця | 01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28 |

## ЗМІСТ

# СОДЕРЖАНИЕ

# CONTENTS

**УДК 517.98**

**А. Чайковський, д-р фіз.-мат. наук**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**

# ФУНКЦІЇ ВІД ОПЕРАТОРІВ ЗІ СТЕПЕНЕВОЮ МАЖОРАНТОЮ ДЛЯ НОРМ СТЕПЕНІВ

***Для функцій від операторів зі степеневим зростанням норм степенів встановлено нове зображення та досліджено його властивості. Знайдено оцінки для норм значень таких функцій.***

**ВСТУП.** Оцінки для функцій від операторів є дуже важливим засобом дослідження поведінки розв'язків різних типів диференціальних та різницевих рівнянь. У зв'язку зі складністю отримання точних оцінок при використанні загальних формул для функцій від оператора, важливими є функції від операторів, що належать спеціальним класам. Зокрема, в [1, с. 201] для норм операторів, степені яких за нормою зростають не швидше степеневої фsункції:

$$\| f(T) \| \leqslant C\left( \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(t)| + \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k+2)}(t)| \right),$$

де $f \in C^{k+2}(\mathbb{R}), \varphi(t) := f(e^{it}), t\in \mathbb{R},$ отримано оцінку

$$\| T^n \| = O(|n|^k), |n| \to +\infty.$$

У [2] досліджено функції від операторів з обмеженими степенями норм та покращено оцінки з [1]. У цій статті результати праці [2] узагальнено на більш широкий клас операторів.

**ФУНКЦІЇ ВІД ОПЕРАТОРІВ.** Нехай $(X, \|\cdot\|_X)$ – комплексний банахів простір, $L(X)$ – множина лінійних неперервних операторів в $X$, $S := \{z\in\mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

**Означення 1.** *Нехай $\varphi \in C^{k+2}(S, L(X))$. Позначимо через $D_\varphi$ клас операторів $M \in L(X)$, які задовольняють умови:*

*1) $M$ комутує з усіма значеннями функції $\varphi$;*

*2) $\sigma(M) \subset S$;*

*3) існують $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ та $C > 0$ такі, що для всіх $n\in\mathbb{Z}$ справджується оцінка*

$$\forall n\in\mathbb{Z} : \| M^n \| \le C\left(|n|+1\right)^k.$$

*Визначимо функцію від операторів $\varphi : D_\varphi \to L(X)$ формулою*

$$\varphi(M) := \frac{1}{2\pi i}\left( \int_S \left( \sum_{n=-k-2}^{-1} M^{-n-1} z^n \right) \varphi(z)dz + (-1)^k \int_S F(z)\varphi^{(k+2)}(z)dz \right), \tag{1}$$

*де одиничне коло $S$ пробігається проти годинникової стрілки і*

$$F(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-k-2,\dots,-2,-1\}} \frac{z^{n+k+2} M^{-n-1}}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k+2)}, z \in S.$$

**Зауваження.** *Підінтегральні функції є неперервними, отже, інтеграли збіжні в сенсі Рімана. Зокрема, $\varphi(M) \in L(X)$.*

**Приклад.** Нехай $X = \mathbb{C}^k$ і $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Тоді оператор $M$ задовольняє умови 1) – 3) означення 1.

*Доведення наведених далі тверджень цього пункта аналогічні доведенням в роботі [2].*

**Лема.** *Якщо $\varphi(z) = z^m I, m\in\mathbb{Z}$, $M \in D_\varphi$, то $\varphi(M) = M^m$ в сенсі означення 1.*

**Теорема 1.** *Нехай $\varphi \in C^{k+2}(S, L(X))$, $M \in D_\varphi$. Тоді*

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to+\infty} \int_S \left( \sum_{n=-N}^{N} z^n M^{-n-1} \right) \varphi(z)dz.$$

**Теорема 2.** *Якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{k+2}(S, L(X))$, $M \in D_{\varphi_1} \cap D_{\varphi_2}$ і $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, то в сенсі означення 1 існують*

$$(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(M) = \alpha_1\varphi_1(M) + \alpha_2\varphi_2(M),$$
$$(\varphi_1\varphi_2)(M) = \varphi_1(M)\varphi_2(M).$$

*Якщо додатково $\varphi_1(z) \ne 0, z \in S$, то в сенсі означення 1 існує*

$$\left(\frac{1}{\varphi_1}\right)(M) = (\varphi_1(M))^{-1}.$$

Сформульована далі теорема показує співпадіння функцій від оператора, введених означенням 1, з введеними за класичним означенням Данфорда у випадку, коли $\varphi$ – комплекснозначна аналітична в околі $S$ функція, помножена на одиничний оператор.

**Теорема 3.** *Нехай* $\varphi \in C^{k+2}(S, L(X))$, $M \in D_\varphi$, *і* $\varphi(z) = \psi(z)I, z \in S,$ *де* $\psi$ *– комплекснозначна функція, аналітична в околі одиничного кола* $S$. *Тоді оператор* $\varphi(M)$ *в сенсі означення 1 співпадає з оператором* $\psi(M)$ *в сенсі означення Данфорда.*

**ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ.**

**Теорема 4.** *Нехай* $\varphi \in C^{k+2}(S, L(X))$, $M \in D_\varphi$. *Тоді оператор* $\varphi(M)$ *з означення 1 допускає оцінку*

$$\| \varphi(M) \| \le L\left( \| \varphi \|_1 + \sqrt[k+2]{\| \varphi^{(k+2)} \|_1 \| \varphi \|_1^{k+1}} \right), \tag{2}$$

де стала $L > 0$ не залежить від функції $\varphi$, $\| g \|_1 := (2\pi)^{-1} \| g \|_{L_1(S, L(X))}$.

*Доведення*. Інтегруючи частинами формулу (1), отримаємо для довільного $N \ge k+2$ рівність

$$\varphi(M) = \frac{1}{2\pi i}\left( \int_S \left( \sum_{n=-k-2-N}^{-1+N} M^{-n-1} z^n \right) \varphi(z) dz + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \int_S \left( \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k-2-N, \dots, -1+N\}} \frac{z^{n+k+2} M^{-n-1}}{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k+2)} \right) \varphi^{(k+2)}(z) dz \right).$$

Тоді

$$\| \varphi(M) \| \leqslant \| \varphi \|_1 \left( \sum_{n=-k-2-N}^{N-1} C\left(|n+1|+1\right)^k \right) + \| \varphi^{(k+2)} \|_1 \left( \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{-k-2-N, \dots, N-1\}} \frac{C\left(|n+1|+1\right)^k}{(n+1)(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k+2)} \right) \le$$

$$\le C_1 \| \varphi \|_1 N^{k+1} + \frac{C_2 \| \varphi^{(k+2)} \|_1}{N} = U(N).$$

Підберемо $N$. При $\| \varphi^{(k+2)} \|_1 \leqslant \| \varphi \|_1$ можна покласти $N = 1$, отримаємо значення

$$U(1) = C_1 \| \varphi \|_1 + C_2 \| \varphi^{(k+2)} \|_1 \le C_1 \| \varphi \|_1 + C_2 \sqrt[k+2]{\| \varphi^{(k+2)} \|_1 \| \varphi \|_1^{k+1}}.$$

В іншому разі покладемо

$$w := \sqrt[k+2]{\frac{C_2 \| \varphi'' \|_1}{C_1 (k+1) \| \varphi \|_1}}, \; N := [w] + 1.$$

Тоді

$$U(N) \le C_1 (w+1)^{k+1} \| \varphi \|_1 + \frac{C_2 \| \varphi^{(k+2)} \|_1}{w} \le C_3 \sqrt[k+2]{\| \varphi^{(k+2)} \|_1 \| \varphi \|_1^{k+1}}.$$

**Зауваження 1.** *Норму* $\| \cdot \|_1$ *в оцінці (2) можна замінити на рівномірну.*

**Зауваження 2.** *Доведена теорема дає можливість визначати оператори* $\psi(M)$ *для функцій* $\psi \in W_1^{k+2}(S, X)$. *Дійсно, обравши довільну послідовність* $\{\psi_n : n \geqslant 1\} \subset C^{k+2}(S, X)$, *збіжну в нормі* $\| \cdot \|_1$ *до* $\psi$, *за допомогою теореми 4 отримаємо фундаментальність послідовності* $\{\psi_n(M) : n \geqslant 1\} \subset C^{k+2}(S, X)$. *Тому можна покласти*

$$\psi(M) := \lim_{n \to \infty} \psi_n(M).$$

*Також оцінка з теореми 4 гарантує незалежність цього визначення від обраної функціональної послідовності.*

**ВИСНОВКИ.** Досліджено функції від операторів зі степеневим зростанням степенів норм та встановлено оцінки для таких функцій.

**Список використаних джерел**

1. Kantorovitz S. Classification of operators by means of their operational calculus / S. Kantorovitz // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – 115. – P. 194–224.
2. Чайковський А. В. Функції від оператора зсуву та їх застосування до різницевих рівнянь / А. В. Чайковський // Укр. матем. журн. – 2010. – Т. 62, №10. – С. 1408–1419.

Надійшла до редколегії 25.11.13

А. Чайковский, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

## ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРОВ СО СТЕПЕННОЙ МАЖОРАНТОЙ ДЛЯ НОРМ СТЕПЕНЕЙ

***Для функций от операторов со степенным возрастанием норм степеней установлено новое изображение и исследованы его свойства. Найдены оценки для норм значений таких функций.***

A. Chaikovskiy, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

## FUNCTIONS OF OPERATORS WITH POWER MAJORANT FOR NORM OF POWERS

***For functions of operators with power degree of increasing of powers' norms new representation is found and investigated. Estimates are found for norms of values of such functions.***

UDC 517.9

A. Chichurin, Full Doctor, Prof.
KUL, Lublin, Poland, Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk, Ukraine,
G. Stepaniuk, researcher
Lesya Ukrainka Eastern European National University, Lutsk, Ukraine

# GENERAL SOLUTION TO THE FOURTH ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS SATISFYING THE SYSTEM OF THREE THE FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

***In this paper we obtain the general solution of the fourth order linear differential equation with coefficients satisfying the system of three the first order differential equations.***

## 1. Introduction

The analytical method of the integration of the fourth order linear differential equation, which is considered in this paper, was proposed by N. A. Lukashevich [7] while studying the linear differential equation of the third order. The gist of this method is as follows: the general solution of the linear equation is searched in the form of product

$$y = \xi(x) \cdot y_1(x), \tag{1}$$

where $y_1(x)$ is arbitrary partial solution of the linear equation, $\xi(x)$ is sufficiently smooth a function. Then, using a special procedure [2,7,8], the linear differential equation of the third order is reduced to the second order nonlinear differential equation of the form

$$(12i + b(x))i'' = 15i'^2 - h_0(x)i' - 8i^3 - h_1(x)i^2 - h_2(x)i - h_3(x) \tag{2}$$

with respect to the new unknown function $i(x)$, which is connected with the function $\xi(x)$ by means of Schwarzian derivative using the relation

$$\frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 = i(x)\,. \tag{3}$$

**Remark 1.** The using Schwarzian derivative is an effective means for solving many mathematical problems. Among them let's mention a classical problem of conformal mapping of the polygons, sides of which are the arcs of circles, the theory of univalent functions, the theory of quadratic differentials, problems of the nonlinear dynamics, etc. In the papers [5, 9] the applications of Schwarzian derivative to the studying of the dynamics of mappings of the segments are given. Application examples of the generalized Schwarzian derivative in solving the problems about softness or stiffness of the Andronov-Hopf bifurcations are given in the paper [13]. Some other applications of Schwarzian derivative are described in the papers [1, 10].

**Remark 2.** Under certain coefficient ratios the equation (2) can be reduced to the XXV Painlevé equation in the Ince classification [6].

Detailed study of the homogeneous linear differential equation of the third order by the instrumentality of the relations (1), (3) and the equation (2) is given in the paper [2]. There's also given the generalization of studying method on the fourth order linear equations of the form

$$y^{(IV)} + p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y = 0\,. \tag{4}$$

In this case the appropriate nonlinear differential equation with respect to the function i(x) is the fourth order equation and is quite cumbersome (denote it (A)). The explicit form of the equation (A) is given in the paper [2].

It should be noted, that if the functions $\xi(x)$ and $i(x)$ are known, then partial solution of the equation (4) can be found as the general solution of the first order linear differential equation of the form [3]

$$\begin{gathered}
y_1'(6ip^4 - 3rp^3 + 3q'p^3 + 36i^2p^2 + q^2p^2 - 32iqp^2 - 6sp^2 - 3r'p^2 + 9i''p^2 + 3q''p^2 + 20irp + 14qrp + 20iq'p - \\
-10qq'p - 30ip''p - 3qp''p + 80i^3 - 4q^3 + 36iq^2 - 18r^2 - 150i'^2 + 6(6i-q)p'^2 - 96i^2q - 80is + 16qs + \\
+12rq' - 40ir' + 8qr' + 120ii'' - 24qi'' + 15i'(p^3 - 4qp + 3p'p + 8r - 4q' - 2p'') + 18rp'' - 12q'p'' + 40iq'' - \\
-8qq'' + p'(144i^2 + 18p^2i - 68qi + 10q^2 - 3p^2q - 3pr - 24s + 6pq' - 12r' + 36i'' + 12q''))2\xi' + \\
+y_1((6ip^4 - 3rp^3 + 3q'p^3 + 36i^2p^2 + q^2p^2 - 32iqp^2 - 6sp^2 - 3r'p^2 + 9i''p^2 + 3q''p^2 + 20irp + 14qrp + 20iq'p - \\
-10qq'p - 30ip''p - 3qp''p + 80i^3 - 4q^3 + 36iq^2 - 18r^2 - 150i'^2 + 6(6i-q)p'^2 - 96i^2q - 80is + 16qs + \\
+12rq' - 40ir' + 8qr' + 120ii'' - 24qi'' + 15i'(p^3 - 4qp + 3p'p + 8r - 4q' - 2p'') + 18rp'' - 12q'p'' + \\
+40iq'' - 8qq'' + p'(144i^2 + 18p^2i - 68qi + 10q^2 - 3p^2q - 3pr - 24s + 6pq' - 12r' + 36i'' + 12q''))\xi'' + \\
+\xi'(40pi^3 + 4p^3i^2 + 8pqi^2 - 112ri^2 + 80q'i^2 - 8p''i^2 - 14pq^2i + 4p^3qi - 14p^2ri + 64qri - 40psi + 6p^2q'i - \\
-16qq'i + 20pr'i - 160s'i + 60pi''i - 20qp''i + 40r''i + 40i'''i + 3pr^2 - 75pi'^2 - 6rp'^2 - 4q^2r + p^2qr - \\
-9p^3s + 32pqs - 48rs + 3p^3r' - 10pqr' + 12rr' - 12p^2s' + 32qs' + 6p^3i'' - 18pqi'' + 12ri'' - 3prp'' + \\
+48sp'' - 12r'p'' - 12i''p'' + i'(3p^4 + 24ip^2 - 6qp^2 - 15p''p + 80i^2 - 12q^2 + 18p'^2 - 64iq + 240s + (9p^2 + \\
+96i + 6q)p' - 60r' - 60i'') + 3p^2r'' - 8qr'' + 3p^2i''' - 8qi''' + p'(12pi^2 + 6pqi - 56ri + 24q'i - 3p^2r + \\
+10qr - 12ps + 6pr' - 48s' + 18pi'' + 12r'' + 12i'''))) = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

**2. Problem statement and preliminaries**

In this paper we'll solve the problem of integration of the fourth order linear differential equation (4), coefficients of which satisfy the conditions

$$p'+\frac{1}{4}p^2-\frac{2}{3}q=0,\ \ q'+\frac{1}{4}pq-\frac{3}{2}r=0,\ \ r'+\frac{1}{4}pr-4s=0. \tag{6}$$

Let use the result of the paper [2] according to which the equation (A) for the equations (4), (6) has the form

$$\begin{gathered}20\cdot\left(8\,i^3-15\,i'^2+12\,i\cdot i''\right)\cdot i^{(\mathrm{IV})}-280i\cdot i'''^2+20\cdot\left(42\,i'\cdot i''-56\,i^2 i'\right)\cdot i'''+504\,i''^3+\\+192\,i^2\cdot i''^2+\left(448\,i^4+2040\,i\cdot i'^2\right)\cdot i''-1275i'^4-560i^3\cdot i'^2+64i^6=0.\end{gathered} \tag{7}$$

The equation (7) was studied in detail in [2, 4,11,12]. In particular, there was proved, that equation (7) has one- and two-parametric families of solutions, which are contained among the functions

$$i(x)=\frac{P_2(x)}{P_4(x)}\ \text{ or }\ i(x)=\frac{P_4(x)}{P_8(x)},$$

where $P_2(x), P_4(x), P_8(x)$ are polynomials of the second, fourth and eighth degrees with certain coefficients. Respectively for example, such family of solutions is the function

$$\begin{gathered}i=(6(-24x(6C_1{}^2+6C_2{}^2-3C_1(2C_2+C_3)-2C_2C_4+C_3C_4)-4x^3(18C_1(2C_2-C_3)+\\+9C_3{}^2-6C_3C_4+4C_4(-3C_2+C_4))-12x^2(18C_1{}^2+C_2(9C_3-6C_4)+2C_4{}^2-3C_1(3C_3+2C_4))-\\-3x^4(12C_2{}^2+3C_3{}^2-2C_2(3C_3+2C_4)+C_1(-6C_3+4C_4))+3(-12C_2{}^2-3C_3{}^2+C_1(6C_3-4C_4)+\\+C_2(6C_3+4C_4))))\times(6(1+2x+3x^2)C_1+6(-1+x^2+2x^3)C_2+x(3(-2-x+x^3)C_3-2x(3+2x+x^2)C_4))^{-2}.\end{gathered}$$

Note also, that the equation (7), using substitutions

$$h(i)=u(t)\cdot\exp(\frac{3}{2}t),\ \ i=\exp(\frac{3}{2}t),\ \ u'(t)=g(u),$$

can be reduced to the differential equation of the second order of the form [2]

$$\begin{gathered}(1+u)^2(8+3u^2)^2+(56u\cdot(8+3u^2)+36u^3(8+3u^2))g+(1072u^2+422u^4)g^2+\\(160u+596u^3)g^3-40u^2g^4+(10u^3(8+3u^2)g+80(8u^2+u^4)g^2+400u^3g^3)g'+\\(20u^3(8+3u^2)g-40u^4g^2)g'^2+20((8u^3+3u^5)g^2+12u^4g^3)g''=0.\end{gathered}$$

Let consider the function $\xi$ in the form of the polynomial of the third degree

$$\xi(x)=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4\,, \tag{8}$$

where $C_i\ (i=\overline{1,4})$ are arbitrary constants. Such choice of the functions $\xi(x)$ allows us to find the family of solutions of the equation (7). Really, substituting the equality (8) into the equation (3), we find the function

$$i(x)=-\frac{6(6C_1{}^2x^2+C_2{}^2+C_1(4C_2x-C_3))}{(3C_1x^2+2C_2x+C_3)^2}. \tag{9}$$

**Theorem 1**. Function (9) defines the two-parametric family of solutions to the equation (7).

*Proof.* Fact, that function (9) is the solution is verified by substituting it into the equation (7). Fact, that it's the two-parametric family is proved by the fact, that the function (9) defines the general solution of the second order nonlinear differential equation in the form

$$2048i^6+5000i^3i'^2+375i'^4-1024i^4i''+1500ii'^2i''-96i^2i''^2+72i''^3=0\,. \tag{10}$$

**3. Solution of the problem**

Let find the partial solution $y_1(x)$ for the equations (4), (6). To do this we use the formula (5). Substituting (6), (8) and (9) into the equality (5) we obtain the differential equation of the form

$$p(x)y_1(x)+4y_1{}'(x)=0\,. \tag{11}$$

Integrating the equation (11) and substituting found function $y_1(x)$ into the relation (1) we obtain

$$y=(C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4)\exp(-\frac{1}{4}\int_1^x p(\tau)d\tau)\,. \tag{12}$$

**Theorem 2.** The general solution of the equation (4), (6) has the form (12).

*Proof.* Functions $x^i\exp(-\frac{1}{4}\int_1^x p(\tau)d\tau),\ i=0,1,2,3$ are the partial solutions of the equation (4), (6), which is easily verified by direct calculations. These functions form the fundamental system of solutions. Therefore, their linear combination of the form (12) gives the general solution of the equation (4), (6).

**Example**. Let the first coefficient of the equation (4), (6) has the form

$$p(x)=\mathrm{sn}(x/m)\,, \tag{13}$$

where $\mathrm{sn}(x/m)$ is the Jacobi elliptic function with the parameter $m$. Solving (6), we find the other three coefficients of the equation, namely

$$q(x)=\frac{3}{8}(4\,\mathrm{cn}(x/m)\,\mathrm{dn}(x/m)+\mathrm{sn}(x/m)^2)\,, \tag{14}$$

$$r(x)=\frac{1}{16}\mathrm{sn}(x/m)\,(12\,\mathrm{cn}(x/m)\,\mathrm{dn}(x/m)-16\,(2\,\mathrm{dn}(x/m)^2+m-1)+\mathrm{sn}(x/m)^2)\,, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}s(x)=\frac{1}{256}(8\,\mathrm{cn}(x/m)\,\mathrm{dn}(x/m)\,(6\,\mathrm{dn}(x/m)\,(\mathrm{cn}(x/m)-8\,\mathrm{dn}(x/m))+3\,\mathrm{sn}(x/m)^2-8m+40)-\\ -64(2\,\mathrm{dn}(x/m)^2+m-1)\,\mathrm{sn}(x/m)^2+\mathrm{sn}(x/m)^4)\,,\end{gathered} \tag{16}$$

where $\mathrm{cn}(x/m)$, $\mathrm{dn}(x/m)$ are the Jacobi elliptic functions.

Substituting (13) into the general solution (12), we obtain

$$y(x)=(C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4)\,(\mathrm{dn}(x/m)-\sqrt{m}\,\mathrm{cn}(x/m))^{-\frac{1}{4\sqrt{m}}}\,. \tag{17}$$

Expression (17) defines the general solution of the equation (4) with the coefficients (13) – (16).

**Remark 3.** As noted above, the choice of the function $\xi(x)$ in the form of (8) is not random. It is connected to the fact, that obtained from the equation (3) function $i(x)$ is the solution of equation (7). Following functions $\xi(x)$ of the form (18) – (20) also satisfy the similar property

$$\xi(x)=\frac{C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4}{x}, \tag{18}$$

$$\xi(x)=\frac{C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4}{x^2}, \tag{19}$$

$$\xi(x)=\frac{C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4}{x^3}. \tag{20}$$

These functions correspond to the functions $i(x)$ of the form

$$i(x)=-\frac{6(C_1{}^2x^4+4C_1C_4x+C_2C_4)}{(C_4-C_2x^2-2C_1x^3)^2}, \tag{21}$$

$$i(x)=-\frac{6(C_1C_3x^4+4C_1C_4x^3+C_4{}^2))}{x^2(2C_4+C_3x-C_1x^3)^2}, \tag{22}$$

$$i(x)=-\frac{6((C_3{}^2-C_2C_4)x^2+4C_3C_4x+6C_4{}^2)}{x^2(C_2x^2+2C_3x+3C_4)^2}, \tag{23}$$

which are also the solutions of the equation (7).

Let prove, that the choice of the function $\xi(x)$ in the form of the one of the functions (18) – (20) doesn't change the structure of the general solution (12). Really, let choose, for example, the function $\xi(x)$ in the form (18). Then corresponding function $i(x)$ has form (21). Substituting relations (6), (18) and (21) into (5), we obtain the differential equation

$$y_1{}'(x)+\frac{(xp(x)-4)y_1(x)}{4x}=0\,. \tag{24}$$

Integrating the equation (24) and substituting found function $y_1(x)$ into the relation (1), where the function $\xi(x)$ has the form (18), we obtain equality (12), which was to be proved above. In the other two cases (19) and (20), carrying out analogous reasoning, we get the general solution of the equation (4), (6) again in the form (12).

**4. Conclusions**

1) Relation (9) from the theorem 1 defines two-parametric family of the solutions of the equation (7).
2) Relation (9) from the theorem 1 also defines the general solution of the differential equation (10).
3) Theorem 2 indicates the general solution of the equation (4), (6).
4) Found functions (21) – (23) are also two-parametric families of the solutions of the equation (7).
5) Considered method of finding the solutions can be applied not only to the equation (7), which is connected to the linear equation (4), (6). It can be used for investigating the subclasses of the fourth order nonlinear equation of the form (A) (given in [2, p.70-71]), which is connected to the linear equation (4).

**References**

1. Bihn Zhou, Chuan-Jie Zhu. An Application of the Schwarzian Derivative // arXiv:hep-th/9907193v1 27 Jul 1999.
2. Chichurin A.V. The Chazy equation and the linear equations of the Fuchs' class. Russian University of Peoples' Friendship Publishing House, Moscow – 2003. – 163 p.
3. Chichurin A., Lukashevich N. To the theory of the fourth order linear differential equations // Proc. of the Intern. Conf. "Computer Algebra Systems in Teaching and Research" (31.01-3.02.2007, Siedlce, Poland), Siedlce, Wyd. AP, 2007. – P. 47-51.
4. Chichurin A.V. About one non-linear equation of the IV-th order with constant coefficients // Vestik of Brest University. – 2000. – № 4. – P. 33-38.
5. Guckenheimer J., Holmes F. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. Moscow, Izhevsk, IKI, 2002.
6. E.L. Ince. Ordinary differential equations, Dover Publications, New York. – 1956. – 558 p.
7. Lukashevich N.A. About linear equations of the third order // Differential equations – 1999. – Vol.35, № 10. – P. 1366-1371.
8. Lukashevich N.A., Chichurin A.V. Differential Equations of the first order. Belarusian State University Publishing House, Minsk. – 1999. – 210 p.
9. Sataev E.A. Schwartzian derivative for multidimensional maps and flows // Mat. Sb. 1999. Vol. 190. № 1. P. 139-160.

10. Seong-a Kim, Toshiyuki Sugava. Invariant Schwarzian derivatives of higher order // arXiv:0911.2663v1 [math.CV] 13 Nov 2009.
11. Stepanyuk G.P., Chichurin A.V. About one condition of the integrability of the linear differential equation of the fourth order // Vesnik of Brest University. Series 4: Physics. Mathematics. – 2011. – № 2. – P. 99-103.
12. Stepanyuk G.P., Chichurin A.V. About the solutions of the nonlinear differential equation of the fourth order, associated to the linear equations of the fourth order by the instrumentality of Schwarzian derivative // Collection of articles of the Intern. Conf. "Fundamental and applied problems of solid mechanics, mathematical modeling and information technologies", 12-15.08.2013), Cheboksary. Part 2, Mathematical Modeling and Information Technologies. P. 60-66.
13. Yakushkin N.A. Generalized Schwarzian derivative and its applications // Proceedings of ISA RAS, The dynamics of inhomogeneous systems, 2008, issue 12, P.139-158.

**Надійшла до редколегії 16.12.13**

**О.Чичурін, д-р фіз.-мат. наук, доц., проф.,**
**КУЛ, Люблін, Польща, СНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна**
**Г. Степанюк, ст. лаб.**
**СНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна**

**ПРО ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ СИСТЕМУ ТРЬОХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

***У роботі знайдено загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння четвертого порядку, коефіцієнти якого задовольняють систему трьох диференціальних рівнянь першого порядку.***

**А.Чичурін, д-р физ.-мат. наук, доц., проф.**
**КУЛ, Люблин, Польша, ВНУ имени Леси Українки, Луцк, Украина**
**Г. Степанюк, ст. лаб.**
**ВНУ имени Леси Українки, Луцк, Украина**

**ОБ ОБЩЕМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОГО УДОВЛЕТВОРЯЮТ СИСТЕМЕ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА**

***В работе найдено общее решение линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, коэффициенты которого удовлетворяют системе трех дифференциальных уравнений первого порядка.***

**УДК 517.98**

**М. Городній, д-р фіз.-мат. наук,**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**
**А. Сиротенко, асист.,**
**НТУУ "КПІ", Київ**

# ІНТЕГРОВНІ ЗІ СТЕПЕНЕМ $p$ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ

***Отримано необхідні і достатні умови, при виконанні яких різницеве рівняння з неперервним аргументом має єдиний інтегровний зі степенем $p$ (обмежений) розв'язок для спеціального класу "вхідних" функцій.***

**ВСТУП.** Нехай $B$ – комплексний банахів простір з нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\overline{0}$, $A$ – лінійний неперервний оператор, що діє із $B$ в $B$. Покладемо при $p \in [1,\infty)$

$$l_p(B) := \left\{ \overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B \,\middle|\, |\overline{x}|_p := \left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\} \text{ і } l_\infty(B) := \left\{ \overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset B \,\middle|\, |\overline{x}|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\}.$$

Зафіксуємо $p \in [1,\infty]$. Відомо [1,2,4], що різницеве рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + y_n,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

має для довільного $\overline{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $\overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_p(B)$ тоді і лише тоді, коли для спектра $\sigma(A)$ оператора $A$ виконується умова

$$\sigma(A) \cap \{z \in C \,\|z| = 1\} = \varnothing. \tag{2}$$

У випадку, коли умова (2) не виконується, у [6] отримано результат про існування та властивості розв'язків різницевого рівняння (1). Сформулюємо цей результат, оскільки він використовується в подальшому.

Нехай $V_d$ – набір усіх таких елементів $y \in B$, що різницеве рівняння (1) має при $y_0 = y,\ y_n = \overline{0},\ n \neq 0$, єдиний розв'язок в просторі $l_p(B)$. Цей розв'язок у подальшому позначатимемо $\overline{x}_y$.

**Теорема 1 [6].** Нехай множина $V_d$ містить хоча б один ненульовий елемент та виконуються наступні умови:

1) якщо $\{y; y_m : m \geq 1\} \subset V_d$ і $\|y_m - y\| \to 0$ при $m \to \infty$, то для розв'язків $\overline{x}_y$, $\overline{x}_{y_m}$ рівняння (1), що відповідають $y$ та $y_m$, виконується $\left|\overline{x}_y - \overline{x}_{y_m}\right|_p \to 0$ при $m \to \infty$.

2) для довільної послідовності $\{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$, що належить $l_p(B)$, рівняння (1) має єдиний розв'язок в $l_p(B)$.

Тоді $V_d$ – інваріантний відносно $A$ підпростір в $B$ і $\sigma(\tilde{A})\cap\{z\in C\,|\,|z|=1\}=\varnothing$ для звуження $\tilde{A}$ оператора $A$ на $V_d$.

Мета цієї статті – отримати аналогічний результат для випадку аналогічного до (1) різницевого рівняння з неперервним аргументом. Про застосування різницевих рівнянь див. [1,3-5] та наведені там посилання.

**ФОРМУЛЮВАННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ.** Нехай $C(\mathbb{R},B)$ – множина неперервних (за нормою) $B$-значних функцій, заданих на $\mathbb{R}$. Покладемо

$$L_{C,p}(B):=\left\{f\in C(\mathbb{R},B)\,\middle|\,\|f\|_p:=\left(\int_{\mathbb{R}}\|f(t)\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\},\ p\in[1,\infty);\ L_{C,\infty}(B):=\left\{f\in C(\mathbb{R},B)\,\middle|\,\|f\|_\infty:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|<\infty\right\};$$

$$L_{b,p}(B):=\left\{f\in L_{C,p}(B)\,\middle|\,\|f\|_{b,p}:=\|f\|_p+\|f\|_\infty<\infty\right\},\ p\in[1,\infty].$$

Неважко переконатися, що $\left(L_{b,p}(B),\|\cdot\|_{b,p}\right)$ – банахів простір, а також для кожного $\overline{y}=\{y_n:n\in\mathbb{Z}\}\in l_p(B)$ функція

$$f_{\overline{y}}(t)=\{t\}y_{[t]+1}+(1-\{t\})y_{[t]},\ t\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

у якій $[t]$ і $\{t\}$ позначають відповідно цілу і дробову частину числа $t$, належить простору $L_{b,p}(B)$.

Зафіксуємо $p\in[1,\infty]$ і розглянемо різницеве рівняння з неперервним аргументом

$$x(t+1)=Ax(t)+f(t),\ t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

де $f\in L_{b,p}(B)$ – задана функція.

Позначимо через $V$ набір усіх таких елементів $y\in B$, що різницеве рівняння (4) має єдиний розв'язок $x_y(t),\ t\in\mathbb{R}$, у просторі $L_{b,p}(B)$, що відповідає функції $f_y(t),\ t\in\mathbb{R}$, яка будується за правилом (3) по послідовності $y_0=y,\ y_n=\overline{0},\ n\neq 0$, причому $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\|x_y(t_0+k)\right\|^p<\infty$ для кожного $t_0\in[0,1)$.

Основний результат статті містить наступна теорема.

**Теорема 2.** Нехай $V$ містить хоча б один ненульовий елемент, а також виконуються такі умови:

1) якщо $\{u,u_m:m\geq 1\}\subset V$ і $\|u_m-u\|\to 0$ при $m\to\infty$, то для розв'язків $x_u$, $x_{u_m}$ рівняння (4), що відповідають функціям $f_u$, $f_{u_m}$, виконується $\left\|x_{u_m}-x_u\right\|_{b,p}\to 0$ при $m\to\infty$;

2) для довільної функції $f\in L_{b,p}(B)$ такої, що $f:\mathbb{R}\to V$, рівняння (4) має єдиний розв'язок $x\in L_{b,p}(B)$ такий, що $x:\mathbb{R}\to V$.

Тоді $V$ – інваріантний відносно $A$ підпростір в $B$ і для звуження $\hat{A}$ оператора $A$ на $V$ виконується умова

$$\sigma(\hat{A})\cap\{z\in C\,|\,|z|=1\}=\varnothing. \tag{5}$$

**ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ.** У подальшому використовуються такі леми.

**Лема 1.** Якщо виконується умова (2), то рівняння (4) має для довільної функції $f\in L_{b,p}(B)$ єдиний розв'язок в просторі $L_{b,p}(B)$.

Доведення. Згідно з [3, с.8] внаслідок умови (2) простір $B$ розкладається в пряму суму підпросторів $B=B_+\dot{+}B_-$, інваріантних відносно оператора $A$ і таких, що для звужень $A_\pm$ оператора $A$ на $B_\pm$ виконуються включення $\sigma(A_-)\subset\{z\in C\,|\,|z|<1\}$, $\sigma(A_+)\subset\{z\in C\,|\,|z|>1\}$. Тому

$$\exists m\in N\ \exists\delta\in(0,1)\ \forall n\geq m:\ \left\|A_-^n\right\|\leq\delta^n,\ \left\|A_+^{-n}\right\|\leq\delta^n. \tag{6}$$

Зафіксуємо $f\in L_{b,p}(B)$ і покладемо

$$x(t):=\sum_{n=0}^{\infty}A_-^n f(t-1-n)-\sum_{n=-\infty}^{-1}A_+^n f(t-1-n),\ t\in\mathbb{R}. \tag{7}$$

Внаслідок (6) кожний з доданків у (7) є неперервною на $\mathbb{R}$ функцією як рівномірно збіжний ряд із неперервних функцій, а також $\|x\|_\infty\leq\|f\|_\infty\left(\sum\limits_{n=0}^{m-1}\left\|A_-^n\right\|+\sum\limits_{n=-m+1}^{-1}\left\|A_+^n\right\|+\dfrac{2\delta^m}{1-\delta}\right)$.

Покажемо, що $\|x\|_p<\infty$. Для цього достатньо встановити, що коли $\{\beta_n:n\geq 1\}\subset\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\beta_n|<\infty$ і $h\in L_{C,p}(B)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n h(t-n)\in L_{C,p}(B)$. Останнє виконується, оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\|\beta_n h(t-n)\right\|_p=\|h\|_p\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\beta_n|<\infty$.

Лему 1 доведено.

**Лема 2.** Нехай виконується умова (2) і функція $f \in L_{b,p}(B)$ така, що додатково для довільного $t_0 \in [0,1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| f(t_0+k) \right\|^p < \infty . \tag{8}$$

Тоді для відповідного до $f \in L_{b,p}(B)$ єдиного в $L_{b,p}(B)$ розв'язку $x$ рівняння (4) і для довільного $t_0 \in [0,1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| x(t_0+k) \right\|^p < \infty . \tag{9}$$

Доведення. Із (6) випливає, що коли покласти $a_n = \left\| A_-^n \right\|,\ n \ge 0,\quad a_n = \left\| A_+^n \right\|,\ n \le -1$, то $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty$. Тому, при фіксованому $t_0 \in [0,1)$, скориставшись зображенням (7) і нерівністю Юнга для згортки [7, с. 318], отримаємо

$$\left( \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| x(t_0+k) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left[ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \left\| f(t_0-1+k-n) \right\| \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = |g*h|_p \le |g|_1 |h|_p < \infty .$$

Лему 2 доведено.

**Лема 3.** Нехай для довільної функції $f \in L_{b,p}(B)$, для якої виконується умова (8), існує єдиний розв'язок рівняння (4), що належить простору $L_{b,p}(B)$. Тоді рівняння (1) має для довільного $\overline{y} = \{ y_n : n \in \mathbb{Z} \} \in l_p(B)$ єдиний розв'язок $\overline{x}$ у просторі $l_p(B)$.

Доведення. Зафіксуємо $\overline{y} = \{ y_n : n \in \mathbb{Z} \} \in l_p(B)$. Для побудованої згідно з (3) функції $f_{\overline{y}}$ виконується умова (8), а отже, існує єдиний в $L_{b,p}(B)$ розв'язок $x$ рівняння (4), який внаслідок леми 2 задовольняє умову (9). Зокрема, $x(n+1) = Ax(n) + f(n) = Ax(n) + y_n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, а отже, $\{ x(n) : n \in \mathbb{Z} \}$ – розв'язок рівняння (1) в $l_p(B)$.

Якщо від супротивного рівняння (2) має два різні розв'язки в $l_p(B)$, то існує ненульова послідовність $\{ u_n : n \in \mathbb{Z} \} \in l_p(B)$ така, що

$$u_{n+1} = Au_n,\ n \in \mathbb{Z} . \tag{10}$$

Розглянемо функцію $u(t) = \{t\} u_{[t]+1} + (1-\{t\}) u_{[t]},\ t \in \mathbb{R}.$ Це ще один розв'язок однорідного рівняння

$$x(t+1) = Ax(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

з простору $L_{b,p}(B)$. Маємо протиріччя.

Лему 3 доведено.

**Лема 4.** Нехай $V$ містить хоча б один ненульовий елемент. Тоді $V$ – лінійний многовид і інваріантна відносно $A$ множина.

Доведення. Оскільки $V \ne \varnothing$ і при $y \in V$ рівняння (4) має єдиний в $L_{b,p}(B)$ розв'язок $x_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, що відповідає $f_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, то $\overline{0} \in V$. Справді, інакше знайдеться ненульова функція $u \in L_{b,p}(B)$, така, що $u(t+1) = Au(t),\ t \in \mathbb{R}$, а отже, $x_y + u$ – теж розв'язок різницевого рівняння (4), що відповідає функції $f_y$. Останнє суперечить єдиності розв'язку.

Враховуючи, що $\overline{0} \in V$, легко переконатися, що $V$ – лінійний многовид. Також при $y \in V$, подіявши на рівності $x(t+1) = Ax(t) + f_y(t),\ t \in \mathbb{R}$, оператором $A$, дістанемо, що $Ay \in V$.

Лему 4 доведено.

**ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 2.** Спочатку переконаємося, що $V = V_d$.

1) $p = \infty$. Нехай $y \in V$, $x$ – обмежений розв'язок рівняння (4), що відповідає функції $f_y$. Тоді $x(1) = Ax(0) + y$ і $x(n+1) = Ax(n)$ для кожного $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Отже, $\{ x_n = x(n) : n \in \mathbb{Z} \}$ – обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає елементу $y$. Нехай, від супротивного, рівняння (1) має 2 різні обмежені розв'язки, відповідні до $y$. Тоді існує ненульова обмежена послідовність $\overline{u} = \{ u_n : n \in \mathbb{Z} \}$, що задовольняє рівняння (10).

Розглянемо функцію $u(t) = \{t\} u_{[t]+1} + (1-\{t\}) u_{[t]},\ t \in \mathbb{R}$. Вона неперервна, обмежена, ненульова, а також для довільного $t \in \mathbb{R}$

$$Au(t) = \{t\} Au_{[t]+1} + (1-\{t\}) Au_{[t]} = \{t\} u_{[t]+2} + (1-\{t\}) u_{[t]+1} = u(t+1),$$

тобто рівняння (11) має ненульовий обмежений розв'язок, що суперечить тому, що $\overline{0} \in V$. Отже, $y \in V_d$.

Нехай тепер $y \in V_d$, $\{ x_n : n \in \mathbb{Z} \}$ – обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає елементу $y$. Тоді функція

$$x_y(t) = \{t\} x_{[t]+1} + (1-\{t\}) x_{[t]},\ t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

неперервна, обмежена. Також неважко переконатися, що $x_y$ – розв'язок рівняння (4), що відповідає функції $f_y$. Якщо, від супротивного, рівняння (4) має два різні неперервні обмежені розв'язки, що відповідають функції $f_y$, то існує ненульовий неперервний обмежений розв'язок $u$ рівняння (11). Тоді існує $t_0 \in \mathbb{R}$, для якого $u(t_0) \neq \overline{0}$. Тому $u(t_0+n+1) = Au(t_0+n)$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, тобто $\{u(t_0+n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – ненульовий обмежений розв'язок рівняння (1), що суперечить тому, що $\overline{0} \in V_d$. Отже, $y \in V$. Таким чином, $V = V_d$.

2) $p \in [1,\infty)$. Нехай $y \in V$, $x$ – розв'язок рівняння (4) у просторі $L_{b,p}(B)$, який відповідає функції $f_y$. Тоді $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|x(k)\|^p < \infty$, а отже $\{x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – розв'язок рівняння (1), що відповідає $y$ і належить простору $l_p(B)$. Якщо (1) має два різні розв'язки в $l_p(B)$, то існує ненульова послідовність $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$, що задовольняє рівняння (10). Тоді функція $u(t) = \{t\}u_{[t]+1} + (1-\{t\})u_{[t]},\ t \in \mathbb{R}$, є непевним обмеженим розв'язком рівняння (4), а також

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|u(t)\|^p\, dt \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \int\limits_k^{k+1} \left(\|u_k\| + \|u_{k+1}\|\right)^p dt \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\|u_k\| + \|u_{k+1}\|\right)^p < \infty \tag{13}$$

і для довільного $t_0 \in [0,1)$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|u(t_0+k)\|^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\|\{t_0\}u_{[t_0]+k+1} + (1-\{t_0\})u_{[t_0]+k}\right\|^p \le \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(\|u_l\| + \|u_{l+1}\|\right)^p < \infty. \tag{14}$$

Отже, однорідне рівняння (11) має ненульовий розв'язок в $L_{b,p}(B)$, для якого виконується умова (9). Маємо протиріччя. Таким чином, $y \in V_d$.

Нехай тепер $y \in V_d$, $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ – розв'язок рівняння (1), що відповідає елементу $y$. Розглянемо функцію $x_y(t)$, що задана за допомогою формули (12). Тоді аналогічно (13,14) перевіряємо, що $\int\limits_{\mathbb{R}} \|x_y(t)\|^p\, dt < \infty$ і для функції $x_y$ виконується умова (9). Тому ця функція є розв'язком рівняння (4) в просторі $L_{b,p}(B)$, для якого виконується умова (9). Нехай, від супротивного, існують два такі розв'язки. Тоді рівняння (11) має ненульовий розв'язок $u(t),\ t \in \mathbb{R}$, в $L_{b,p}(B)$, що задовольняє умову (9). Отже, існує таке $t_0 \in \mathbb{R}$, що $u(t_0) \neq \overline{0}$, $u(t_0+k+1) = Au(t_0+k)$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, а також $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|u(t_0+k)\|^p < \infty$. Це означає, що рівняння (10) має ненульовий розв'язок в $l_p(B)$. Маємо протиріччя. Отже, $V = V_d$.

Покажемо тепер, що при виконанні умов 1), 2) теореми 2 виконуються умови 1), 2) теореми 1. Нехай $\{u, u_m : m \ge 1\} \subset V_d$, $\|u_m - u\| \to 0$ при $m \to \infty$. Нехай $\overline{x}(m) = \{x_n^m : n \in \mathbb{Z}\}, m \ge 1$, $\overline{x} = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ – єдині розв'язки рівняння (1) у просторі $l_p(B)$, що відповідають елементам $u_m$ та $u$. Тоді побудовані аналогічно до (12) функції $x_{u_m}$, $x_u$ є розв'язками рівняння (4) у просторі $L_{b,p}(B)$, що відповідають $f_{u_m}$ та $f_u$. Тому $|\overline{x}(m) - \overline{x}|_p \le \|x_{u_m} - x_u\|_{b,p} \to 0$, $m \to \infty$, а отже, для $V_d$ виконується умова 1) теореми 1.

Зафіксуємо тепер $\overline{y} = \{y_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$, $\overline{y} \in l_p(B)$. Побудуємо функцію $f_{\overline{y}}$ за правилом (3). Ця функція належить простору $L_{b,p}(B)$ і набуває значення в $V = V_d$. Згідно умови 2) теореми 2 існує єдиний розв'язок $x$ рівняння (4) у просторі $L_{b,p}(B)$, що відповідає функції $f_{\overline{y}}$. Тоді $x(n+1) = Ax(n) + f_{\overline{y}}(n) = Ax(n) + y_n$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$, тобто $\{x_n = x(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ – розв'язок рівняння (1) у просторі $l_p(B)$, який відповідає елементу $\overline{y}$, і для цього розв'язку маємо $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\} \subset V_d$.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то існує ненульова послідовність $\{u_m : m \in \mathbb{Z}\} \in l_p(B)$, яка є розв'язком рівняння (10). Це суперечить тому, що $\overline{0} \in V_d$.

Отже, умова 2) теореми 1 теж виконується. Оскільки $V = V_d$, то з теореми 1 випливає, що виконується твердження теореми 2.

**Зауваження 1.** Якщо $V$ – інваріантний відносно оператора $A$ підпростір в $B$ і для звуження $\hat{A}$ оператора $A$ на $V$ виконується умова (5), то внаслідок леми 1 виконується умова 2) теореми 2.

**Зауваження 2.** Внаслідок теореми 2 правильне обернене до леми 1 твердження.

**ВИСНОВКИ.** Для різницевого рівняння $x(t+1) = Ax(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}$, доведено теорему про існування і єдиність у просторі $L_{b,p}(B)$ розв'язку у випадку, коли $\sigma(A) \cap \{z \in C \,\|z| = 1\} \neq \varnothing$, де $A$ – лінійний неперервний оператор, що діє з банакового простору $B$ в $B$.

**Список використаних джерел**

1. Баскаков А.Г., Пастухов А.И. Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. – 2001. – 42, №6. – С.1231 – 1243.
2. Городній М.Ф. $l_p$ -розвязки одного різницевого рівняння в банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №3. – С. 425-430.
3. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк,, 1992. – 319 с.
4. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 с.
5. Пелюх Г.П. О непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси решениях систем нелинейных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, №12. – С. 1636-1645.
6. Сиротенко А.В. Обмежені та сумовні зі степенем *p* розв'язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом // Вісник Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 68-72.
7. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций – М.: Мир, 1973. – 342 с.

**Надійшла до редколегії 25.02.14**

**М. Городний, д-р физ.-мат. наук**
**КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**
**А. Сиротенко, асист.**
**НТУУ "КПИ", Киев**

## ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СО СТЕПЕНЬЮ $p$ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

***Получены необходимые и достаточные условия, при выолнении которых разностное уравнение с непрерывным аргументом имеет единственное интегрируемое со степенью $p$ (ограниченное) решение для специального класса "входных" функций.***

**M. Gorodnii, Full Doctor**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv**
**A. Syrotenko, PhD graduate**
**National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv**

## $p$ -INTEGRABLE SOLUTIONS FOR DIFFERENCE EQUATION WITH CONTINUOUS ARGUMENT

***We consider linear difference equation with continuous argument in a complex Banach space. For input $p$ –integrable function from a some class, we obtain necessary and sufficient conditions, under which this equation has a unique $p$ -integrable solution.***

**УДК 517.946**

**І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, Т. Пилипюк, викладач**
**Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський**

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ НА КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕГМЕНТІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

***Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва) зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для системи рівнянь параболічного типу на кусково-однорідному сегменті $[R_0, R]$ з м'якими межами. Моделювання еволюційного процесу здійснено методом гібридного диференціального оператора Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва).***

**ВСТУП.** Параболічні крайові задачі в однорідних середовищах (однозв'язних областях) становлять значний теоретичний та практичний інтерес, оскільки знаходять застосування при математичному моделюванні різноманітних процесів і явищ природознавства, техніки, технологій [1, 14].

В останні десятиліття значна увага приділяється також дослідженню параболічних крайових задач в неоднорідних середовищах [3, 15]. У цьому випадку коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими. Для таких задач класичний метод відокремлення змінних [17] застосувати важко. Але для досить широкого класу подібних задач при побудові їх точних розв'язків можливе ефективне використання методу гібридних інтегральних перетворень [2, 6, 7, 10].

У теоретичних дослідженнях і прикладних задачах найбільш часто вживаними є диференціальні оператори 2-го порядку, зокрема, диференціальний оператор Фур'є [16]

$$F = \frac{d^2}{dr^2} ,$$

диференціальний оператор Ейлера [9]

$$B_\alpha^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2 ,$$

диференціальний оператор Бесселя [12]

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2} ,$$

диференціальний оператор Лежандра [5]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r},$$

узагальнений диференціальний оператор Лежандра [5]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right), \ \ \mu = (\mu_1, \mu_2)$$

та диференціальний оператор Конторовича-Лєбєдєва [11]

$$B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2 .$$

Якщо $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [18], а $L_j$ - один із перелічених диференціальних операторів, то завжди можна утворити гібридний диференціальний оператор, що відповідає геометричній структурі кусково-однорідного середовища.

Наприклад, для кусково-однорідного проміжку $(R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R)$ можна утворити гібридний диференціальний оператор

$$M = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)a_1^2 L_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)a_2^2 L_2 + \theta(r - R_2)\theta(R - r)a_3^2 L_3 ; \ a_j^2 = const .$$

При цьому очевидно, що оператор $L_1$ визначений на проміжку $(R_0, R_1)$, оператор $L_2$ – на проміжку $(R_1, R_2)$, а оператор $L_3$ – на проміжку $(R_2, R)$.

Зрозуміло, що змінивши порядок сполучення операторів $L_1, L_2, L_3$ ми одержимо інший гібридний диференціальний оператор.

У свою чергу, кожний гібридний диференціальний оператор породжує відповідне гібридне інтегральне перетворення [4], яке можна застосувати для побудови точних аналітичних розв'язків лінійних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідних середовищах.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.** Розглядається задача про структуру обмеженого на множині $D_2 = \{(t,r) : t \in (0;+\infty); \ \ r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R); \ \ R_0 > 0, R < +\infty\}$ розв'язку системи еволюційних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу [17]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1(t,r) - a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1}[u_1] = f_1(t,r), \ \ r \in (R_0, R_1), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2(t,r) - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2] = f_2(t,r), \ \ r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3(t,r) - a_3^2 B_{\alpha_2}[u_3] = f_3(t,r), \ \ r \in (R_2, R) \end{aligned} \tag{1}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$L_{11}^0\left[u_1(t,r)\right]\Big|_{r=R_0} = g_0(t), \qquad L_{22}^3\left[u_3(t,r)\right]\Big|_{r=R} = g_R(t) \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k\left[u_k(t,r)\right] - L_{j2}^k\left[u_{k+1}(t,r)\right]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); \ \ j,k = 1,2. \tag{3}$$

У системі (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $B_{\upsilon,\alpha_1} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_1+1)r^{-1}\dfrac{\partial}{\partial r} - (\upsilon^2 - \alpha_1^2)r^{-2}$, Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + cthr\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\mu_1^2(1-chr)^{-1} + \mu_2^2(1+chr)^{-1}\right)$ та (Конторовича-Лєбєдєва) $B_{\alpha_2} = r^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + (2\alpha_2+1)r\dfrac{\partial}{\partial r} + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$; $2\alpha_j + > 0$, $\upsilon \ge \alpha_1$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

У рівностях (2) та (3) беруть участь диференціальні оператори

$$\begin{aligned} &L_{11}^0 = \left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0\frac{\partial}{\partial t}; \ \ L_{22}^3 = \left(\alpha_{22}^3 + \delta_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3 + \gamma_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}, \\ &L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k\frac{\partial}{\partial t}; \ \ j,m,k = 1,2. \end{aligned} \tag{4}$$

Умови на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$; $\delta_{11}^0 \ge 0$, $\gamma_{11}^0 \ge 0$; $\alpha_{22}^3 \ge 0$, $\beta_{22}^3 \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$; $\delta_{22}^3 \ge 0$, $\gamma_{22}^3 \ge 0$; $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\delta_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $\gamma_{jm}^k \ge 0$; $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$; $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$; $c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0$,

$$\alpha_{11}^k\gamma_{21}^k - \alpha_{21}^k\gamma_{11}^k = \beta_{11}^k\delta_{21}^k - \beta_{21}^k\delta_{11}^k, \ \alpha_{12}^k\gamma_{22}^k - \alpha_{22}^k\gamma_{12}^k = \beta_{12}^k\delta_{22}^k - \beta_{22}^k\delta_{12}^k . \tag{5}$$

*Зауваження 1.* Наявність оператора диференціювання за часом $\frac{\partial}{\partial t}$ в крайових умовах у точках $r = R_0$, $r = R$ та в умовах спряження ми інтерпретуємо, виходячи з фізичних міркувань про теплові хвилі, як м'ягкість межі середовища щодо відбиття хвиль.

*Зауваження 2.* У випадку, коли межі середовища жорсткі щодо відбиття хвиль ($\delta_{11}^0 = 0;\ \gamma_{11}^0 = 0;\ \delta_{22}^3 = 0;\gamma_{22}^3 = 0$; $\delta_{jm}^k = 0;\gamma_{jm}^k = 0$), маємо мішану задачу з класичними крайовими умовами та класичними умовами спряження, розв'язок якої одержується з розв'язку задачі (1)-(3) як частковий випадок.

**ОСНОВНА ЧАСТИНА.** Розв'язок мішаної параболічної задачі спряження (1)-(3) побудуємо методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва) зі спектральним параметром у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна).

### Гібридне інтегральне перетворення Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва) зі спектральним параметром

Розглянемо на множині $I_2$ гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$M_{\upsilon,(\alpha)}^{(\mu)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_2)(R-r)a_3^2 B_{\alpha_2}, \tag{6}$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

*Означення*. Областю задання ГДО $M_{\upsilon,(\alpha)}^{(\mu)}$ назвемо множину $G$ функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) функція $f(r) = \left\{B_{\upsilon,\alpha_1}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\right\}$ неперервна на множині $I_2$;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0\right) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = 0, \qquad \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right) g_3(r)\Big|_{r=R} = 0 \tag{7}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0, \quad j,k = 1,2. \tag{8}$$

У рівностях (7) та (8) беруть участь величини:

$$\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - (\beta^2+\gamma^2)\delta_{jk}^m,\ \ \tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - (\beta^2+\gamma^2)\gamma_{jk}^m,\ \ j,k = 1,2,\ \ m = \overline{0,3};\ \ \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\}$$

$\beta \in (0, +\infty)$ – спектральний параметр.

Зауважимо, що для двох елементів $u \in G$ та $v \in G$ з умов спряження (8) випливає базова тотожність:

$$\left(u_k' v_k - u_k v_k'\right)\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right]\Big|_{r=R_k}. \tag{9}$$

Якщо для функції $u(r) = \{u_1(r); u_2(r); u_3(r)\}$ умови спряження будуть неоднорідними, тобто

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) u_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk},\quad j,k = 1,2, \tag{10}$$

то базова тотожність (9) набуває вигляду:

$$\left(u_k' v_k - u_k v_k'\right)\Big|_{r=R_k} = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r) - u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right]\Big|_{r=R_k} + \tag{11}$$

$$+c_{11,k}^{-1}[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}],\quad k = 1,2.$$

Ми прийняли до уваги, що $v_j(r)$ задовольняють однорідні умови спряження (8). У рівності (11) беруть участь функції

$$Z_{\upsilon,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{i2}^k\right) v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k};\quad i,k = 1,2.$$

Введемо до розгляду величини

$$a_1^2\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}shR_1R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21,1}c_{21,2}shR_2R_1^{2\alpha_1+1}},\ \ a_2^2\sigma_2 = \frac{c_{11,2}R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21,2}shR_2},\ \ a_3^2\sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 shr + \theta(r-R_2)\theta(R-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big)=\int_{R_0}^{R}u(r)v(r)\sigma(r)dr=\int_{R_0}^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2 sh r dr+\int_{R_2}^{R}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\,. \qquad (12)$$

Безпосередньо можна переконатися у справедливості рівності

$$\Big(M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[u(r)],v(r)\Big)=\Big(u(r),M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[v(r)]\Big)\,, \qquad (13)$$

тобто ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ – самоспряжений.

Припустимо, що спектральний параметр (власне число) $\beta$ і йому відповідає власна (спектральна) функція

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{i=1}^{3}\theta(r-R_{i-1})\theta(R_i-r)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);i}(r,\beta), \qquad R_3\equiv R\,. \qquad (14)$$

Для знаходження власних елементів ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля: побудувати обмежений на множині $I_2$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Лежандра та (Конторовича-Лєбєдєва) для звичайних функцій

$$\begin{aligned}
&\left(B_{\upsilon,\alpha_1}+b_1^2\right)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)=0, \qquad r\in(R_0,R_1)\,,\\
&\left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)=0, \qquad r\in(R_1,R_2)\,,\\
&\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=0, \qquad r\in(R_2,R)
\end{aligned} \qquad (15)$$

з однорідними крайовими умовами (7) та умовами спряження (8); $b_j=a_j^{-1}(\beta^2+k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2\ge 0$, $j=\overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha_1}+b_1^2\right)v=0$ утворюють дійсні функції Бесселя першого роду $J_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r)$ та другого роду $N_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r)$ [12]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)v=0$ утворюють дійсні узагальнені приєднані функції Лежандра $A^{(\mu)}_{\upsilon_2^*}(chr)$ та $B^{(\mu)}_{\upsilon_2^*}(chr)$, $\upsilon_2^*=-1/2+ib_2$; [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича-Лєбєдєва) $\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)v=0$ утворюють функції $C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [11].

Будемо відшукувати функції $V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);j}(r,\beta)$ як лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків:

$$\begin{aligned}
&V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1J_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r)+B_1N_{\upsilon,\alpha_1}(b_1r), \quad r\in(R_0,R_1)\,,\\
&V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta)=A_2A^{(\mu)}_{\upsilon_2^*}(chr)+B_2B^{(\mu)}_{\upsilon_2^*}(chr), \quad r\in(R_1,R_2)\,,\\
&V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta)=A_3C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)+B_3D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3), \quad r\in(R_2,R)\,.
\end{aligned} \qquad (16)$$

Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення шести величин $A_j$, $B_j$ ($j=\overline{1,3}$) дають однорідну алгебраїчну систему з шести рівнянь:

$$\begin{aligned}
&u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)A_1+u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)B_1=0\,;\\
&u^{11}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1+u^{12}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)B_1-Y^{(\mu),11}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)A_2-Y^{(\mu),12}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)B_2=0, \quad j=1,2\,;\\
&Y^{(\mu),21}_{\upsilon_2^*;j1}(chR_2)A_2+Y^{(\mu),22}_{\upsilon_2^*;j1}(chR_2)B_2-X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)A_3-X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)B_3=0\,;\\
&X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)A_3+X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)B_3=0\,.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Введемо до розгляду функції:

$$\delta_{\upsilon,\alpha_1;jk}(b_1R_0,b_1R_1)=u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{12}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1)-u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{11}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_1R_1), \quad j=1,2\,;$$

$$\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;jk}(chR_1,chR_2)=Y^{(\mu);11}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu);22}_{\upsilon_2^*;k1}(chR_2)-Y^{(\mu);12}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu);21}_{\upsilon_2^*;k1}(chR_2); \quad j,k=1,2\,;$$

$$\delta_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)=X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)X^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)-X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)X^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)\,;$$

$$a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha_1;j}(\beta)=\delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;2j}(chR_1,chR_2)-\delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;1j}(chR_1,chR_2)\,;$$

$$b^{(\mu)}_{\alpha_2;j}(\beta)=\delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;j1}(chR_1,chR_2)-\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)\delta^{(\mu)}_{\upsilon_2^*;j2}(chR_1,chR_2)\,.$$

Алгебраїчна система (17) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю [8]:

$$\delta^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(\beta) \equiv a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha_1;1}(\beta)\delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3) - a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha_1;2}(\beta)\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, \lambda R_3, b_3) =$$

$$= \delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_1 R_0, b_1 R_1) b^{(\mu)}_{\alpha_2;2}(\beta) - \delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_1 R_0, b_1 R_1) b^{(\mu)}_{\alpha_2;1}(\beta) = 0 . \tag{18}$$

Таким чином, ми одержали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел $\beta_n$ ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$.

Підставимо в систему (17) $\beta = \beta_n \quad (b_j(\beta_n) = b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності.

Припустимо, що $A_1 = -A_0 u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0)$, $B_1 = A_0 u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю, а для визначення величин $A_2$, $B_2$ одержуємо алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};j2}(chR_1) A_2 + Y^{(\mu);12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};j2}(chR_1) B_2 = A_0 \delta_{\upsilon,\alpha_1;j1}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1); \quad j = 1,2 \tag{19}$$

Визначник алгебраїчної системи (19) обчислюється безпосередньо:

$$Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12}(chR_1) Y^{(\mu);12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22}(chR_1) - Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22}(chR_1) Y^{(\mu);12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12}(chR_1) = \frac{c_{21,1}}{S_{(\mu)}(b_{2n}) shR_1} \equiv q_{(\mu)}(\beta_n) \neq 0, \;\; \overset{*}{\upsilon}_{2n} = -1/2 + i b_{2n} .$$

Отже, алгебраїчна система (19) має єдиний розв'язок [8]:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)} = \left[ \delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{(\mu);12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22}(chR_1) - \delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{(\mu);12}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12}(chR_1) \right], \tag{20}$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}(\beta_n)} = \left[ \delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12}(chR_1) - \delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) Y^{(\mu);11}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22}(chR_1) \right].$$

При відомих $A_2$, $B_2$ для визначення $A_3$, $B_3$ маємо алгебраїчну систему рівнянь

$$X^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_{3n}) A_3 + X^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2, b_{3n}) B_3 = -A_0 q^{-1}_{(\mu)} a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha_1;j1}(\beta_n), \quad j = 1,2 . \tag{21}$$

Визначник алгебраїчної системи (21) обчислюється безпосередньо:

$$X^{21}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, b_{3n}) X^{22}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, b_{3n}) - X^{21}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, b_{3n}) X^{22}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, b_{3n}) =$$

$$= -c_{21,2} sh(\pi b_{3n}) \left( \pi \lambda^{2\alpha_2} R_2^{2\alpha_2+1} \right)^{-1} \equiv -q_{\alpha_2}(\beta_n) \neq 0 .$$

Отже, алгебраїчна система (21) має єдиний розв'язок [8]:

$$A_0 = q_{\alpha_2}(\beta_n) q_{(\mu)}(\beta_n); \;\; B_3 = \omega^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta_n), \quad A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta_n) , \tag{22}$$

$$\omega^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);j}(\beta_n) = a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha_1;2}(\beta_n) X^{2j}_{\alpha_2;12}(\lambda R_2, b_{3n}) - a^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha_1;1}(\beta_n) X^{2j}_{\alpha_2;22}(\lambda R_2, b_{3n}); \quad j = 1,2 .$$

Підставимо визначені формулами (20) та (22) величини $A_j$ й $B_j$ $(j = \overline{1,3})$ у рівності (16). Отримаємо функції:

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n) q_{(\mu)}(\beta_n)[u^{01}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0) N_{\upsilon,\alpha_1}(b_{1n} r) - u^{02}_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0) J_{\upsilon,\alpha_1}(b_{1n} r)];$$

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n)[\delta_{\upsilon,\alpha_1;21}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};12}(chR_1, chr) - \delta_{\upsilon,\alpha_1;11}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1) f^{(\mu),1}_{\overset{*}{\upsilon}_{2n};22}(chR_1, chr)]; \tag{23}$$

$$V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta_n) = \omega^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(\beta_n) D_{\alpha_2}(\lambda r, b_{3n}) - \omega^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(\beta_n) C_{\alpha_2}(\lambda r, b_{3n}) .$$

Згідно формули (14) власна функція $V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)$ ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ визначена.

Методами з роботи [4] доводяться такі твердження.

**Теорема 1.** Корені $\beta_n$ трансцендентного рівняння $\delta^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = +\infty$.

**Теорема 2.** Система $\left\{ V^{(\mu)}_{\upsilon.(\alpha)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ узагальнено ортогональна, повна й замкнена.

**Теорема 3.** Будь-яка функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині $I_2$ рядом Фур'є за системою $\left\{ V^{(\mu)}_{\upsilon.(\alpha)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{R_0}^{R} g(\rho) V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(\rho,\beta_n) \sigma(\rho) d\rho \right) \frac{V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\| V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n) \right\|_1^2} . \tag{24}$$

Ряд Фур'є (24) визначає пряме $H^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ та обернене $H^{-(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині $I_2$ ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$:

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R} g(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n \,, \tag{25}$$

$$H^{-(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\left(\left\|V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|_1^2\right)^{-1} \equiv g(r)\,. \tag{26}$$

У формулах (24), (26) бере участь узагальнений квадрат норми власної функції [13]

$$\left\|V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|_1^2 = \int_{R_0}^{R}\left[V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}(r,\beta_n)\right]^2 \sigma(r)dr + \Theta_2(\beta_n,\beta_n)\,. \tag{27}$$

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2\sigma_2 shR_2 : c_{11,2}\,; \quad \tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr\,,$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr\,, \quad \tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R} g_3(r)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\,,$$

$$Z^{(\mu),k}_{\upsilon,(\alpha);i2}(\beta_n) = \left(\tilde{\alpha}^k_{i2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{i2}\right)V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}, \quad i,k = 1,2\,.$$

**Теорема 4.** Якщо функція $f(r) = \{B_{\upsilon,\alpha_1}[g_1(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині $I_2$, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}^0_{11}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^0_{11}\right)g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \quad \left(\tilde{\alpha}^3_{22}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^3_{22}\right)g_3(r)\Big|_{r=R} = g_R \tag{28}$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}^k_{j1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j1}\right)g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}^k_{j2}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}^k_{j2}\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}\,, \quad j,k = 1,2\,, \tag{29}$$

то справджується основна тотожність СГІП ГДО $M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$:

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[M^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta_n^2\tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_{in} + (-\tilde{\alpha}^0_{11})^{-1}V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0 +$$

$$+(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R + \sum_{k=1}^{2}d_k[Z^{(\mu),k}_{\upsilon,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\upsilon,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}]\,. \tag{30}$$

**Розв'язання задачі (1) – (3)**

Формули (25), (26), (30) складають математичний апарат для розв'язання мішаної параболічної задачі спряження (1) – (3).

Запишемо систему (1) й нульові початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1^2 - a_1^2 B_{\upsilon,\alpha_1}\right)u_1(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2^2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_3^2 - a_3^2 B_{\alpha_2}\right)u_3(t,r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \\ f_3(t,r) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(t,r) \\ u_2(t,r) \\ u_3(t,r) \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}$ згідно правила (25) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha)}[\cdots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \cdots V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 shrdr \right.$$

$$\left. \int_{R_2}^{R} \cdots V^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\right]. \tag{32}$$

Застосуємо до задачі (31) операторну матрицю-рядок (32) за правилом множення матриць. Внаслідок основної тотожності (30) одержуємо задачу Коші [16]:

$$\left[\frac{d}{dt}+(\beta_n^2+\gamma^2)\right]\tilde{u}_n(t)=\tilde{f}_n(t)+(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0(t)+$$
$$+(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}g_R(t)+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}\right],, \quad (33)$$
$$\gamma^2=\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\},\ \tilde{u}_n(t)\big|_{t=0}=0.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі Коші (33) є функція

$$\tilde{u}_n(t)=\int_0^t e^{-(\beta_n^3+\gamma^2)(t-\tau)}\left[\tilde{f}_n(\tau)+(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1}g_0(\tau)+\right. \quad (34)$$
$$\left.+(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}g_R(\tau)+\sum_{k=1}^{2}d_k\left(Z_{\upsilon,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k}(\tau)-Z_{\upsilon,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}(\tau)\right)\right]d\tau.$$

Оператор $H_{\upsilon,(\alpha)}^{-(\mu)}$ згідно (26) як обернений до (32) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\upsilon,(\alpha)}^{-(\mu)}=\begin{bmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}\cdots v_{\upsilon,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\\ \sum_{n=1}^{\infty}\cdots v_{\upsilon,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\\ \sum_{n=1}^{\infty}\cdots v_{\upsilon,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\end{bmatrix};\qquad v_{\upsilon,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta_n)=\frac{V_{\upsilon,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\upsilon,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1}. \quad (35)$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (35) за правилом множення матриць до матриці-елементу $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена формулою (34). У результаті низки елементарних перетворень одержуємо інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної параболічної задачі спряження (1) – (3):

$$u_j(t,r)=\int_0^t\left[W_{\upsilon,(\alpha);1j}^{(\mu)}(t-\tau,r)g_0(\tau)+W_{\upsilon,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t-\tau,r)g_R(\tau)\right]d\tau+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^t\left[R_{\upsilon,(\alpha);12}^{(\mu);j,k}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)-R_{\upsilon,(\alpha);22}^{(\mu);j,k}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)\right]d\tau+ \quad (36)$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}H_{\upsilon,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t-\tau,r,\rho)f_k(\tau,\rho)\sigma_k\varphi_k(\rho)d\rho d\tau,\qquad j=\overline{1,3},$$

де $\varphi_1(\rho)=\rho^{2\alpha_1+1}$, $\varphi_2(\rho)=sh\rho$, $\varphi_3(\rho)=\rho^{2\alpha_2-1}$.

У рівностях (36) беруть участь головні розв'язки задачі:

1) породжені крайовою умовою у точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);1j}^{(\mu)}(t,r)=\sum_{n=`}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}(-\tilde{\alpha}_{11}^0)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)v_{\upsilon,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta_n)a_1^2\sigma_1R_0^{2\alpha_1+1},\quad j=\overline{1,3};$$

2) породжені крайовою умовою у точці $r=R$ функції Гріна

$$W_{\upsilon,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t,r)=\sum_{n=`}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}V_{\upsilon,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)v_{\upsilon,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta_n)a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1},\quad j=\overline{1,3};$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\upsilon,(\alpha);i2}^{(\mu);j,k}(t,r)=\sum_{n=`}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}Z_{\upsilon,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta_n)v_{\upsilon,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta_n)d_k;\ i,k=1,2,\quad j=\overline{1,3};$$

4) породжені неоднорідністю системи (1) функції впливу

$$H_{\upsilon,(\alpha);jk}^{(\mu)}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}v_{\upsilon,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta_n)v_{\upsilon,(\alpha);k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n);\quad j,k=\overline{1,3}.$$

*Зауваження 3.* Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\geq 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\geq 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=0$.

*Зауваження 4.* Якщо початкові умови відмінні від нуля, тобто

$$u_1\big|_{t=0}=g_1(r),\ \ r\in(R_0,R_1);\qquad u_2\big|_{t=0}=g_2(r),\ \ r\in(R_1,R_2);\qquad u_3\big|_{t=0}=g_3(r),\ \ r\in(R_2,R),$$

то в рівностях (36) функції $f_k(\tau,\rho)$ будуть замінені на функції $[f_k(\tau,\rho)+g_k(\rho)\delta_+(\tau)]$, де $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+$ [18], та з'являться доданки

$$W^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);1j}(t,r)\psi_0+W^{(\mu)}_{\upsilon,(\alpha);3j}(t,r)\psi_R+\sum_{k=1}^{2}\left(R^{(\mu);j,k}_{\upsilon,(\alpha);12}(t,r)\psi_{2k}-R^{(\mu);j,k}_{\upsilon,(\alpha);22}(t,r)\psi_{1k}\right). \qquad (37)$$

Тут прийняті позначення:

$$\psi_0=\delta^0_{11}g_1'(R_0)+\gamma^0_{11}g_1(R_0),\qquad \psi_R=\delta^3_{22}g_3'(R_3)+\gamma^3_{22}g_3(R_3),$$

$$\psi_{jk}\equiv[\delta^k_{j1}g_k'(R_k)+\gamma^k_{j1}g_k(R_k)]-[\delta^k_{j2}g_{k+1}'(R_k)+\gamma^k_{j2}g_{k+1}(R_k)];\quad j,k=1,2.$$

Практика показує, що доданки (37) з'являються в результаті відображення від межі середовища початкових теплових хвиль.

Ці доданки можна анулювати, якщо перейти до нових початкових даних $\overline{g}_j(r)$ за формулами

$$g_j(r)=\overline{g}_j(r)+a_jr+b_j,\quad j=\overline{1,3}$$

і визначити $a_j$ та $b_j$ із системи алгебраїчних рівнянь:

$$(\delta^0_{11}+\gamma^0_{11}R_0)a_1+\gamma^0_{11}b_1=\psi_0,\qquad (\delta^3_{22}+\gamma^3_{22}R_3)a_3+\gamma^3_{22}b_3=\psi_R \qquad (38)$$

$$[(\delta^k_{j1}+\gamma^k_{j1}R_k)a_k+\gamma^k_{j1}b_k]-[(\delta^k_{j2}+\gamma^k_{j2}R_k)a_{k+1}+\gamma^k_{j2}b_{k+1}]=\psi_{jk};\quad j,k=1,2.$$

При виконанні умов на коефіцієнти алгебраїчна система (38) завжди має єдиний розв'язок.

**ВИСНОВКИ.** Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва) зі спектральним параметром у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) побудовано точний аналітичний розв'язок мішаної задачі для системи еволюційних рівнянь параболічного типу, змодельованих гібридним диференціальним оператором Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лєбєдєва) на кусково-однорідному сегменті $R_0\le r\le R$ з м'якими межами. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків (із залученням методів комп'ютерної математики) реальних еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які моделюються параболічними крайовими задачами (процеси теплопровідності, дифузії).

**Список використаних джерел**

1. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці, 1998.
2. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський, 2011.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К., 1998.
4. Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці, 2001.
5. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці, 2002.
6. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001.
7. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., 1971.
9. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку. – Чернівці, 2012.
10. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997.
11. Ленюк М.П., Міхалевська Г.І. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва. – Чернівці, 2002.
12. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є. Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль, 2004.
13. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Ейлера, Бесселя, Лежандра). Частина 2. – Тернопіль, 2011.
14. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці, 2003.
15. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991.
16. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1959.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972.
18. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., 1965.

**Надійшла до редколегії 12.11.13**

**И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф., Т. Пилипюк, преподаватель**
**Каменец-Подольский НУ имени Ивана Огиенко, Каменец-Подольский**

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА НА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СЕГМЕНТЕ С МЯГКИМИ ГРАНИЦАМИ

***Методом гибридного интегрального преобразования типа Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедева) со спектральным параметром получено интегральное представление точного аналитического решения смешанной задачи для системы уравнений параболического типа на кусочно-однородном сегменте $[R_0,R]$ с мягкими границами. Моделирование эволюционного процесса осуществлено методом гибридного дифференциального оператора Бесселя-Лежандра-(Конторовича-Лебедева).***

**I. Konet, Full Doctor, T. Pylypiuk, assistant**
**Ivan Ogienko National University of Kamenetz-Podolsk, Kamenetz-Podolsk**

## THE INTEGRAL REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR A SYSTEM OF EVOLUTIONARY EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE IN PIECE-HOMOGENEOUS SEGMENT WITH SOFT BOUNDARIES

***The integral representation of exact analytical solution of mixed problems for equations of parabolic type in piecewise homogeneous segment $[R_0,R]$ with soft boundaries is obtained by the method of hybrid integral type conversion Bessel-Legendre-(Kontorovich-Lebedev) with spectral parameter. Modeling of the evolutionary process is done by using a hybrid differential operator Bessel-Legendre-(Kontorovich-Lebedev).***

УДК 517.9

Б. Репета, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

# ДИНАМІЧНИЙ АНАЛОГ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА У СИСТЕМАХ З ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

***В даній статті описується динамічна біфуркація, при якій положення рівноваги диференціальної системи в деякий момент часу втрачає стійкість та встановлюється коливальний режим. Методом нормальних форм отримується біфуркаційна система, що досліджується на дисипативність та конвергентність. Кінцевим результатом є доведення теореми про асимптотичне зображення розв'язків нормалізованої системи.***

## Вступ

В даній статті ми розглянемо диференціальну систему

$$\dot{x} = A(\tau,\varepsilon)x + F(\tau,x,\varepsilon),$$

яка залежить від "повільного" часу $\tau = \varepsilon t$ та малого параметра $\varepsilon > 0$. Нас цікавитиме випадок, коли спектр матриці $A(\tau,0)$ утворюють пари суто уявних власних чисел $\pm i\omega_j(\tau), j=\overline{1,n}$, а система має тривіальне положення рівноваги, яке в деякий момент, скажімо $\tau = 0$, втрачає властивість стійкості. Тобто при $\tau < 0$ це положення рівноваги поводить себе як локальний атрактор, притягуючи близькі розв'язки, а при $\tau > 0$ воно стає репелером. Наша мета полягає в тому, аби показати, що за певних додаткових умов в системі відбувається встановлення стійкого коливального режиму і ми маємо змогу спостерігати динамічну біфуркацію, яка є аналогом біфуркації народження інваріантного тора в автономному випадку, детально описаної в [2].

Серед основоположних праць, присвячених вивченню динамічних біфуркацій у нелінійних системах зі швидкими та повільними змінними вигляду

$$\dot{x} = \varepsilon f(x,y,\lambda), \quad \dot{y} = g(x,y,\lambda),$$

відзначимо [6, 9]. У цих статтях, а згодом у [7] вивчалося, зокрема, явище затримки втрати стійкості, яке полягає в наступному. Коли під час біфуркації положення рівноваги повільної системи втрачає властивість стійкості, близькі до нього траєкторії певний час порядку $O(1/\varepsilon)$ залишаються в його околі, а потім швидко віддаляються від цього положення на відстань $O(1)$. На відміну від цих праць ми зосереджуємося на аналізі коливальних режимів, які виникають у процесі динамічної біфуркації.

Для дослідження вихідної диференціальної системи ми використаємо вже відомі результати про неавтономний метод нормальних форм для побудови модельної біфуркаційної системи [8], а також деякі відомості з теорії дисипативних та конвергентних систем для якісного аналізу останньої. Насамкінець буде сформульовано й доведено теорему про асимптотичне зображення розв'язків вихідної системи.

Отримані результати можуть бути корисними при дослідженні математичних моделей деяких явищ нелінійної механіки, гідродинаміки та динаміки популяцій.

Зазначимо, що окрім вже згаданих джерел детальну інформацію про побудову нормальних форм можна знайти, наприклад, в [11], де розглянуто неавтономні системи, системи з повільно змінними параметрами та проведено порівняння методу нормальних форм з іншими способами якісного дослідження нелінійних рівнянь. У випадку, коли права частина періодична за часом, можна звернутись до [5]. Також для ознайомлення з цим методом можна звернутись до [10]. Особливу увагу в останній відведено системам, у яких лінійна частина має нульові або суто уявні власні числа, системам на центральних многовидах та наведено приклади деяких біфуркацій, наприклад Гопфа та Богданова-Такенса.

Стосовно дослідження явищ біфуркації у системах зі швидкими та повільними змінними заслуговують на увагу праці [12, 14], пов'язані з багатовимірною біфуркацією Гопфа, з'ясуванням властивостей стійкості народжуваних циклів, знаходження сталої Ляпунова, що за них відповідає, тощо. Інший тип біфуркаці народження циклу – "катастрофу блакитного неба" – описано в [4]. Для неї характерним є необмежене зростання періоду та довжини циклу, коли біфуркаційний параметр стає як завгодно малим.

Нарешті, варто відзначити ще один результат загального характеру про динамічні біфуркації, анонсований в [1]: якщо в результаті звичайної біфуркації в системі виникає експоненціальний стійкий або гіперболічний інваріантний многовид, то аналогічне явище можна спостерігати і при малій динамічній біфуркації.

## Нормалізація системи

Будемо розглядати $2n$-вимірну диференціальну систему

$$\dot{x} = A(\tau,\varepsilon)x + F(\tau,x,\varepsilon), \tag{1}$$

залежну від "повільного" часу $\tau = \varepsilon t$ та малого параметра $\varepsilon > 0$, для якої виконуються наступні припущення

1. $F(\tau,0,\varepsilon)=0$, $F'_x(\tau,0,\varepsilon)=0$;
2. матриця $A(\tau,0)$ має прості суто уявні власні числа $\pm i\omega_j(\tau), j=\overline{1,n}$ ;
3. функції $\pm i\omega_j(\tau), j=\overline{1,n}$ додатні, неперервні та обмежені на всій осі;
4. $\inf\limits_{\tau\in\mathbb{R}} |\omega_i(\tau)-\omega_j(\tau)| > 0,\ i \ne j$ ;
5. функції $A(\tau,\varepsilon)$ та $F(\tau,x,\varepsilon)$ визначені на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ та $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ відповідно, гладкі.

За вказаних вище умов можна застосувати метод нормальних форм [8]. Опишемо коротко його ідею.

Нехай в системі (1)

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{l\geq 0}A_l(\tau)\varepsilon^l,\qquad F(\tau,x,\varepsilon)=\sum_{k\geq 2}\sum_{l\geq 0}F_{k,l}(\tau)\varepsilon^l x^k.$$

Ряди в правих частинах формальні або збіжні, а відображення $A_l\in C^\infty(\mathbb{R}\to\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}))$, $F_{k,l}\in C^\infty(\mathbb{R}\to\mathfrak{F}^k(\mathbb{R}^n))$ обмежені на дійсній осі разом з усіма своїми похідними. Тут через $\mathfrak{F}^k$ поначено простір $\mathbb{R}^n$-значних однорідних поліноміальних форм $k$-го степеня.

Тоді виконавши заміну $y=S(\tau)z$, де $S(\tau)$ – матриця, складена з власних векторів матриці $A_0(\tau)$, яка зводить матрицю $A_0(\tau)$ до канонічної форми, та формальне поліноміальне перетворення

$$x=\sum_{k\geq 1}\sum_{l\geq 0}H_{k,l}(\tau)\varepsilon^l y^k,\quad H_{1,0}(\tau)=E,$$

систему (1) можна звести до вигляду

$$\dot z_j=\left(\lambda_j(\tau)+\sum_{l\geq 1}\lambda_{j,l}(\tau)\varepsilon^l\right)z_j+\sum_{\substack{|q|\geq 2\\ \mathrm{res}}}\sum_{l\geq 0}g_{j,q,l}(\tau)\varepsilon^l z^q,\quad j=\overline{1,n}.$$

При цьому в другу суму входять тільки резонансні члени, тобто ті доданки, індекси яких задовольняють нерівність

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left|\ \langle q,\Lambda(\tau)\rangle-\lambda_j(\tau)\right|=0,$$

де вектор $\Lambda(\tau)=(\lambda_1(\tau),...,\lambda_{2n}(\tau))$. Детально процес побудови такої нормальної форми описано в [8].

Розглянемо умови резонансів системи (1). Власні числа матриці $A(\tau,0)$ мають вигляд $\pm i\omega_j(\tau),\ j=\overline{1,n}$, тому вказаний вектор $\Lambda(\tau)$ можна визначити як $\Lambda(\tau)=(i\omega_1(\tau),-i\omega_1(\tau),...,i\omega_n(\tau),-i\omega_n(\tau))$. Оскільки він складається з $n$ пар комплексно спряжених суто уявних функцій, то ми отримаємо лише $n$ різних умов резонансів:

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left|(q_1-q_2-1)\omega_1(\tau)+(q_3-q_4)\omega_2(\tau)+...+(q_{2n-1}-q_{2n})\omega_n(\tau)\right|=0,$$

$$\dots$$

$$\inf_{\tau\in\mathbb{R}}\left|(q_1-q_2)\omega_1(\tau)+(q_3-q_4)\omega_2(\tau)+...+(q_{2n-1}-q_{2n}-1)\omega_n(\tau)\right|=0.$$

Очевидно, що з виконання рівностей

$$q_1=q_2,\ ...,\ q_{2j-3}=q_{2j-2},\quad q_{2j-1}=q_{2j}+1,\quad q_{2j+1}=q_{2j+2},\ \ ...,\ \ q_{2n-1}=q_{2n}$$

випливає виконання $j$-ої умови резонансу. Тому для того щоб отримати потрібні нам доданки в нормальній формі, будемо вважати, що при всіх інших значеннях $q$ таких, що $|q|\leq 4$, кожна лінійна комбінація

$$(q_1-q_2)\omega_1(\tau)+...+(q_{2j-1}-q_{2j}-1)\omega_j(\tau)+...+(q_{2n-1}-q_{2n})\omega_n(\tau),\quad j=\overline{1,n},$$

відділена від нуля на всій осі.

Тоді (1) можна поліноміальним перетворенням звести до системи з $n$ пар комплексно спряжених рівнянь

$$\dot z_i=\left[i\omega_i(\tau)+\sum_{l\geq 1}\lambda_{i,l}(\tau)\varepsilon^l\right]z_i+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{\infty}a_{i,j,l}(\tau)\,|\,z_j\,|^2\,z_i\varepsilon^l+Z_i(\tau,z,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},$$

де функції $Z_k(\tau,z,\varepsilon)$ мають порядок $O(z^5)$ при $z\to 0$, а коефіцієнти $\lambda_{i,j}(\tau)$ та $a_{i,j,l}(\tau),\ i,j\geq 1,\ l\geq 0$ – гладкі та обмежені на всій осі.

Перейшовши до полярних змінних і повільного часу $\tau=\varepsilon t$ та зробивши розтяг за допомогою заміни $z_j=\sqrt{\varepsilon r_j},\ j=\overline{1,n}$, остаточно отримаємо систему вигляду

$$r_i'=\alpha_i(\tau)r_i+\sum_{k=1}^{n}\beta_{i,k}(\tau)r_k r_i+\varepsilon R_i(\tau,r,\varphi,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

$$\varphi_i'=\frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon}+\omega_{i,1}(\tau)+\sum_{k=1}^{n}c_{i,k}(\tau)r_k+\varepsilon\Phi_i(\tau,r,\varphi,\varepsilon),\quad i=\overline{1,n},$$

в якій диференціювання в лівій частині здійснюється за змінною $\tau$, а коефіцієнти мають вигляд

$$\alpha_i(\tau)=\mathrm{Re}\,\lambda_{i,0}(\tau),\quad \beta_{i,j}(\tau)=\mathrm{Re}\,a_{i,j,0}(\tau),\quad \omega_{i,1}(\tau)=\mathrm{Im}\,\lambda_{i,0}(\tau),\quad c_{i,k}(\tau)=\mathrm{Im}\,a_{i,k,0}(\tau).$$

При цьому для будь-якого $R>0$ можна вказати таке $\varepsilon_0>0$, що праві частини системи (2) є гладкими $2\pi$-періодичними за змінною $\varphi$ функціями на множині

$$D:=\{\tau\in\mathbb{R}\}\times\{r\in[0,R]\}\times\{\varphi\in\mathbb{R}\}\times\{\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]\}.$$

Саме з системою (2) ми й матимемо справу надалі. Нижче ми з'ясуємо які умови мають задовольняти коефіцієнти $\alpha_i(\tau),\ i=\overline{1,n}$ та $\beta_{i,j}(\tau),\ i,j=\overline{1,n}$, щоб мав місце динамічний аналог біфуркації народження інваріантного тора найбільшої розмірності. Також ми розглянемо простішу модельну систему, розв'язки якої апроксимують розв'язки системи (2). При цьому бажана динаміка матиме наступний характер.

1. При $\tau<0$ тривіальне положення рівноваги модельної системи відіграє роль глобального атрактора. Причому це положення абсолютно нестійке, коли $\tau\to-\infty$.

2. При $\tau > 0$ тривіальне положення рівноваги є репелером, а всі розв'язки модельної системи притягуються до деякого нетривіального експоненціально стійкого розв'язку, що трактується як встановлення коливального режиму.

**Модельна система та її попередній аналіз**

Оскільки при малих значеннях $\varepsilon$ функції $R_j, \Phi_j, j = \overline{1,n}$, в (2) фактично відіграють роль малих збурень, то природно, що поведінка розв'язків системи (2) значною мірою визначається простішою модельною системою, складеною з рівнянь для радіальних та кутових змінних

$$r_i' = \alpha_i(\tau) r_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}(\tau) r_k r_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$\varphi_i' = \frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon}, \quad i = \overline{1,n}.$$

При цьому основний інтерес становить тільки частина з радіальними змінними.

Зауважимо, що права частина (3) є локально ліпшицевою відносно $r = (r_1, \ldots, r_n)$, а отже для неї має місце єдиність розв'язків. Унаслідок цього будь-який розв'язок $r(\tau; \tau_0, r_0)$, що проходить через точку $r_0 \in \mathbb{R}_+^n$ у деякий момент часу $\tau_0$, не виходить за межі позитивного конуса $\mathbb{R}_+^n$. Дійсно, якби $r(\tau; \tau_0, y_0)$ перетинав межу $\partial \mathbb{R}_+^n$ в момент часу $\tau_1$, то хоча б одна з координат $r_i(\tau; \tau_0, r_0)$ стала б рівною нулеві, а отже і для похідної ми б мали

$$r_i'(\tau; \tau_0, r_0) = 0.$$

Але в силу єдиності, це можливо лише для розв'язків, що лежать у гіперплощині $r_i = 0$.

Тому надалі нас буде цікавити радіальна складова системи (3) лише в позитивному конусі. При цьому замість звичайної евклідової норми $\|r\|$ зручніше буде використовувати норму $\|r\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |r_i|$.

Із зроблених раніше припущень щодо поведінки розв'язків модельної системи та характеру її стійкості одразу можна виписати умови на компоненти вектора $\alpha(\tau) = (\alpha_1(\tau), ..., \alpha_n(\tau))$:

$$\operatorname{sgn} \alpha_i(\tau) = \operatorname{sgn} \tau,$$

$$\limsup_{\tau \to -\infty} \alpha_j(\tau) < 0, \quad \liminf_{\tau \to +\infty} \alpha_j(\tau) > 0. \tag{4}$$

Опишемо тепер умови, яким мають задовольняти елементи матриці $B(\tau) = (\beta_{i,j}(\tau))$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\tau < 0$. Для того, щоб кожен розв'язок $r(\tau)$ наближався до тривіального, норма $\|r(\tau)\|_1$ має спадати, тобто похідна

$$\|r\|_1' = \langle \alpha(\tau), r \rangle + \langle B(\tau) r, r \rangle \tag{5}$$

має бути від'ємною. Це можна забезпечити, наприклад, однією з двох умов:

1) всі елементи матриці $B(\tau)$ недодатні; 2) симетрична частина матриці $B(\tau)$ від'ємно визначена.

Тоді справджується оцінка

$$\|r\|_1' \le \max_i \alpha_i(\tau) \|r\|_1 + Q(\tau) \|r\|_1^2 < 0,$$

де $Q(\tau) = \max_{i,j} \beta_{i,j}(\tau)$ у першому випадку, або $Q(\tau) = \max_{\|r\|=1} \langle B(\tau) r, r \rangle$ $Q(\tau) = \max_{\|r\|_1=1} \langle B(\tau) r, r \rangle$ – у другому.

З урахуванням (4), $\|r(\tau)\|_1$ строго спадає на $\tau < 0$ і всі розв'язки наближаються до тривіального. При цьому розв'язок $r(\tau; \tau_0, r_0)$, який задовольняє початкову умову $r(\tau_0; \tau_0, r_0) = r_0$ в деякий віддалений в минуле момент часу $\tau_0 < 0$, наближається до тривіального розв'язку тим ближче при $\tau \to 0-$, чим більше значення $|\tau_0|$.

**Дисипативність модельної системи**

На наступному кроці з'ясуємо за яких умов система (3) дисипативна при $\tau > 0$: всі розв'язки з початковими значеннями в $\mathbb{R}_+^n$ входять в деяку множину $\{\|r\|_1 < M, r \in \mathbb{R}_+^n\}$ та в подальшому не залишають її. При цьому будемо надалі припускати, що симетрична частина матриці $B(\tau)$ рівномірно від'ємно визначена при $\tau \ge 0$.

Позначимо

$$a_*(\tau) = \min_i \alpha_i(\tau), \quad a^*(\tau) = \max_i \alpha_i(\tau), \quad b_*(\tau) = \min_{\|r\|_1=1} \langle -B(\tau) r, r \rangle, \quad b^*(\tau) = \max_{\|r\|_1=1} \langle -B(\tau) r, r \rangle.$$

Тоді в рівнянні (5) похідну норми розв'язку можна оцінити як

$$a_*(\tau) \|r\|_1 - b^*(\tau) \|r\|_1^2 \le \|r\|_1' \le a^*(\tau) \|r\|_1 - b_*(\tau) \|r\|_1^2.$$

Розв'язавши відповідні нижнє й верхнє рівняння Бернуллі, отримаємо оцінку для норми розв'язку

$$e^{\int_{\tau_0}^{\tau} a_*(s) ds} \left( \|r(\tau_0)\|_1^{-1} + \int_{\tau_0}^{\tau} b^*(p) e^{\int_{\tau_0}^{p} a_*(s) ds} dp \right)^{-1} \le \|r(\tau)\|_1 \le e^{\int_{\tau_0}^{\tau} a^*(s) ds} \left( \|r(\tau_0)\|_1^{-1} + \int_{\tau_0}^{\tau} b_*(p) e^{\int_{\tau_0}^{p} a^*(s) ds} dp \right)^{-1}.$$

Після спрямування $\tau \to \infty$ остаточно будемо мати

$$0 < \liminf_{\tau\to\infty} \frac{a_*(\tau)}{b^*(\tau)} \le \liminf_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 \le \limsup_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 \le \limsup_{\tau\to\infty} \frac{a^*(\tau)}{b_*(\tau)} =: M < \infty,$$

що й забезпечує властивість дисипативності.

Оцінка знизу може бути покращена. Для цього введемо функцію

$$z = \langle \alpha(\tau), r \rangle + \langle B(\tau) r, r \rangle. \tag{6}$$

Рівність $z = 0$ при кожному фіксованому $\tau > 0$ визначає еліпсоїд $\mathrm{E}_\tau$, який є своєрідним аналогом $0$-ізокліни, оскільки на ньому $\|r\|_1' = 0$. Цей еліпсоїд відтинає на додатних координатних півосях відрізки з довжинами $-\alpha_i(\tau)/\beta_{i,i}(\tau),\ \ i = \overline{1,n}$, обмеженими на півосі $\tau > 0$ і відділеними від нуля при $\tau \ge \tau_0 > 0$. Введемо позначення

$$m_*(\tau) = \min_i (\alpha_i(\tau) / -\beta_{i,i}(\tau)), \quad m = \liminf_{\tau\to\infty} m_*(\tau)$$

та покажемо, що число $m$ можна використати як оцінку знизу норми розв'язків модельної системи.

Неважко переконатись, що при довільному фіксованому $\tau$ множина $S_\tau = \{\|r\|_1 < m_*(\tau), r \in \mathbb{R}_+^n\}$ лежить всередині $\mathrm{E}_\tau$. Тоді будь-яка точка $r = \|r\|_1 \sum_i \lambda_i e_i$, де $\sum_i \lambda_i = 1$, $e_i$ – $i$-ий базисний орт, з множини $S_\tau$ задовольняє нерівність

$$z\left( \|r\|_1 \sum_i \lambda_i e_i \right) \ge \|r\|_1 \sum_i \lambda_i (\alpha_i(\tau) + \|r\|_1 \beta_{i,i}(\tau)) >$$
$$> \|r\|_1 \sum_i \lambda_i (\alpha_i(\tau) + m_*(\tau)\beta_{i,i}(\tau)) + \|r\|_1 (\|r\|_1 - m_*(\tau)) \sum_i \lambda_i \beta_{i,i}(\tau) \ge \|r\|_1 (m_*(\tau) - \|r\|_1) \min_i |\beta_{i,i}(\tau)|.$$

Водночас для всіх точок, що лежать за межами $\mathrm{E}_\tau$ справедлива нерівність $\|r\|_1 \ge m_*(\tau)$.

Для всякого нетривіального розв'язку $r(\tau)$ при $\tau > 0$ апріорі можливі три сценарії поведінки:

1. існує $\tau_0 > 0$ таке, що $z(r(\tau), \tau) > 0$ для всіх $\tau \ge \tau_0$;
2. існує $\tau_0 > 0$ таке, що $z(r(\tau), \tau) \le 0$ для всіх $\tau \ge \tau_0$;
3. жоден з двох попередніх випадків не має місця.

У першому випадку $\|r(\tau)\|_1$ при $\tau \ge \tau_0$ монотонно зростає і, отже, існує границя $\lim_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 = \rho \ge m$. Справді, якщо б $\rho < m$, то при всіх досить великих $\tau$ ми б мали

$$\|r(\tau)\|_1' > \rho(m - \rho) \inf_{\tau \ge \tau_0} \min_i |\beta_{i,i}(\tau)| > 0,$$

звідки $\|r(\tau)\|_1 \to \infty, \tau \to \infty$, що неможливо.

У другому випадку, як вже було зазначено, $\|r(\tau)\|_1 \ge m_*(\tau)$ і тому $\liminf_{\tau\to\infty} \|r(\tau)\|_1 \ge m$.

У третьому випадку піввісь $\tau > \tau_0$ можна подати у вигляді об'єднання $I_0 \cup I_+ \cup I_-$, де

$$I_0 = \{\tau > \tau_0 \text{ ы} r(\tau) \in \mathrm{E}_\tau, r \in \mathbb{R}_+^n\}, \quad I_+ = \{\tau > \tau_0 \text{ ы} r(\tau) \in \operatorname{int} \mathrm{E}_\tau, r \in \mathbb{R}_+^n\}, \quad I_- = \{\tau > \tau_0 \text{ ы} r(\tau) \in \operatorname{ext} \mathrm{E}_\tau, r \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

Кожна з двох останніх множин як відкрита множина на прямій є об'єднанням неперетинних інтервалів. При цьому вони скінченні, оскільки випадки 1 та 2 виключаються. Тепер бачимо, що для $\tau \in I_0 \cup I_-$ виконується нерівність $\|r(\tau)\|_1 \ge m_*(\tau)$, а якщо $(\tau_1, \tau_2) \subset I_+$ і до моменту $\tau_1$ розв'язок $r(\tau)$ перетнув еліпсоїд, то $\|r(\tau)\|_1 > m_*(\tau_1)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\tau_\varepsilon > 0$, що при $\tau_1 > \tau_\varepsilon$ матимемо $\|r(\tau)\|_1 > m - \varepsilon$.

Підсумовуючи все сказане вище, сформулюємо твердження.

**Твердження 1.** *Якщо вектор $\alpha(\tau)$ задовольняє умови (4), а симетрична частина матриці $B(\tau)$ рівномірно від'ємно визначена, то всі розв'язки модельної системи (3) при $\tau \to +\infty$ як завгодно близько наближаються до області $\Omega = \left\{ m < \|r\|_1 < M, r \in \mathbb{R}_+^n \right\}$. При цьому, якщо всі розв'язки $r(\tau)$ такі, що $r(\tau_0) \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$, відділені від координатних площин $\partial \mathbb{R}_+^n$ при $\tau \to \infty$, то вони входять в область $\Omega$ за скінченний час.*

### Відділеність розв'язків від $\partial \mathbb{R}_+^n$

Якщо б досліджувана система було автономною, то для того, щоб у ній спостерігалося явище біфуркації народження $n$-вимірного інваріантного тора внаслідок переходу параметра $\varepsilon$ через критичне значення $\varepsilon = 0$, відповідна модельна система при $\varepsilon > 0$ повинна була б мати в $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$ експоненціально стійке положення рівноваги. Беручи до уваги цей факт, ми проаналізуємо умови, які гарантують відділеність від межі $\partial \mathbb{R}_+^n$ при додатних $\tau$ усіх розв'язків неавтономної системи (3), що починаються в $\operatorname{int} \mathbb{R}_+^n$.

Розглянемо $i$ -е рівняння модельної системи:

$$r_i' = (\alpha_i(\tau) + \sum_{j\neq i} \beta_{i,j}(\tau) r_j) r_i + \beta_{i,i}(\tau) r_i^2 .$$

Якщо розв'язати це рівняння як рівняння Бернуллі, то можна використати оцінку

$$\liminf_{\tau\to\infty} r_i(\tau) \geq \liminf_{\tau\to\infty} \frac{\inf_{r\in\Omega}(\alpha_i(\tau) + \sum_{j\neq i}\beta_{i,j}(\tau) r_j)}{-\beta_{i,i}(\tau)} =: m_i .$$

Тоді якщо $m_i > 0$, то розв'язки модельної системи відділені від координатної площини $r_i = 0$.

Повторивши аналогічні міркування для інших рівнянь системи, приходимо до наступного висновку.

**Твердження 2.** *Якщо всі* $m_i, i = \overline{1,n}$*, додатні, то розв'язки модельної системи, що починаються в* $\operatorname{int}\mathbb{R}_+^n$*, відділені від межі* $\partial\mathbb{R}_+^n$ *та справедливі оцінки* $\liminf_{\tau\to\infty} r_i(\tau) \geq m_i, \quad i=\overline{1,n}$.

Зауважимо, що, коли всі $\beta_{i,j}(\tau), i\neq j$, елементи матриці $B(\tau)$ невід'ємні при великих $\tau > 0$, умови твердження виконуються автоматично.

**Конвергентність модельної системи на півосі**

Виконаємо заміну $r_j = e^{u_j}$, $j=\overline{1,n}$, в системі (3). Будемо мати

$$u_i' = \alpha_i(\tau) + \beta_{i,1}(\tau)e^{u_1} + \ldots + \beta_{i,n}(\tau)e^{u_n}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Зрозуміло, що, якщо при $\tau > 0$ розв'язок $r(\tau)$ системи (3) відділений від $\partial\mathbb{R}_+^n$ та обмежений, то відповідний йому розв'язок $u(\tau)$ системи (7) також обмежений на півосі. Тобто ця система теж є дисипативною. Тепер нас цікавитиме питання, чи є система (7) конвергентною на додатній півосі.

З'ясування властивості конвергентності модельної системи виявилося нетривіальною задачею і нам не вдалося її розв'язати в повному обсязі. Однак у деяких випадках на питання про існування глобально експоненціально стійкого розв'язку все ж можна дати ствердну відповідь. Нехай матриця $B(\tau)$ симетрична. Розглянемо залежну від $\tau$ додатно визначену форму $\left\langle -B^{-1}(\tau)(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle$. Її похідна має вигляд

$$\left\langle -B^{-1}(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle' = \left\langle -(B^{-1})'(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle - 2\left\langle e^{u_1} - e^{u_2}, u_1-u_2 \right\rangle,$$

де позначено $e^{u_i} = (e^{u_{i,1}}, \ldots, e^{u_{i,n}}), i = \overline{1,2}$.

Використавши теорему Лагранжа, дістанемо

$$\left\langle -B^{-1}(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle' = \left\langle -(B^{-1})'(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle - 2\left\langle e^{\theta} \circ (u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle,$$

де $\theta_j \in [u_{1,j}, u_{2,j}]$, $j=\overline{1,n}$, а $\circ$ – поелементний добуток матриць (добуток Адамара). З урахуванням виконаної заміни $r_j = e^{u_j}$, $j=\overline{1,n}$, маємо, що починаючи з деякого моменту часу $\tau_0$ справджуються нерівності $e^{\theta_j} \geq m_j$, $j=\overline{1,n}$. Це дає змогу оцінити похідну

$$\left\langle -B^{-1}(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle' \leq \lambda_{\max}(-(B^{-1})')\|u_1-u_2\|^2 - 2\varkappa\|u_1-u_2\|^2,$$

де $\varkappa = \min_j m_j$.

З іншого ж боку справедлива нерівність $\left\langle -B^{-1}(u_1-u_2), u_1-u_2 \right\rangle \geq \lambda_{\min}(-B^{-1})\|u_1-u_2\|^2$, звідки випливає оцінка для норми

$$\|u_1-u_2\|^2 \leq -\lambda_{\min}(B)\int_{\tau_0}^{\tau}\left(\lambda_{\max}(-(B(s)^{-1})') - 2\varkappa\right)\|u_1-u_2\|^2\,ds + \|u_1(\tau_0)-u_2(\tau_0)\|^2$$

і за лемою Гронуола-Беллмана маємо

$$\|u_1-u_2\|^2 \leq \|u_1(\tau_0)-u_2(\tau_0)\|^2 \exp\int_{\tau_0}^{\tau}\left[-\lambda_{\min}(B(s))\left(\lambda_{\max}(-(B(s)^{-1})') - 2\varkappa\right)\right]ds .$$

Зважаючи на умови щодо матриці $B(\tau)$, якщо справджується нерівність

$$\sup_{\tau\geq\tau_0}\left(\lambda_{\max}(-(B(\tau)^{-1})') - 2\varkappa\right) < 0, \tag{8}$$

два довільні розв'язки модельної системи (7) наближаються один до одного з експоненціальною швидкістю при $\tau\to\infty$. Це й означає, що система (7) конвергентна.

Варто зауважити, що, коли додатково матриця $B(\tau)$ стала, умова (8) виконується автоматично.

У деяких випадках замість перевірки нерівності (8) можна скористатись простішими твердженнями. Так з [3, 13] відомо, що для системи у варіаціях

$$\delta\dot{u} = J(\tau,u)\delta u$$

відносно деякого розв'язку $u(\tau)$ має місце оцінка

$$\left\|\delta u(\tau)\right\|_1 \le \left\|\delta u(\tau_0)\right\|_1 \exp\int_{\tau_0}^{\tau} \max{}_j \,(J_{j,j}(s,u(s)) + \sum_{i\ne j} |J_{i,j}(s,u(s))\,|)ds\,. \tag{9}$$

При цьому, якщо інтеграл від'ємний та розбіжний при $\tau \to +\infty$, то модельна система конвергентна на півосі.

Таким чином, коли справедлива нерівність

$$\max_j \sup_{\tau>\tau_0}\left(\beta_{j,j}(\tau) + \sum_{i\ne j} |\,\beta_{i,j}(\tau)\,|\right) < 0\,,$$

конвергентність системи (7) випливає безпосередньо з оцінки (9).

Якщо ж модельна система двовимірна та справджуються умови

$$\beta_{1,1}(\tau) + |\,\beta_{1,2}(\tau)\,| < 0, \quad \beta_{2,2}(\tau) + |\,\beta_{2,1}(\tau)\,| < 0,$$

то за допомогою перетворення

$$\delta z = \mathrm{diag}\{a,b\}\delta u, \quad a = \limsup_{\tau\to\infty} |\,\beta_{1,2}(\tau)\,|, \quad b = \limsup_{\tau\to\infty} |\,\beta_{2,1}(\tau)\,|$$

отримаємо матрицю Якобі

$$F = \begin{pmatrix} \beta_{1,1}e^{u_1} & \dfrac{a}{b}\beta_{1,2}e^{u_2} \\ \dfrac{b}{a}\beta_{2,1}e^{u_1} & \beta_{2,2}e^{u_2} \end{pmatrix},$$

для якої

$$\limsup_{\tau\to\infty}(\beta_{1,1}(\tau) + \frac{a}{b}|\,\beta_{2,1}(\tau)\,|) \le \limsup_{\tau\to\infty}\beta_{1,1}(\tau) + \limsup_{\tau\to\infty}|\,\beta_{1,2}(\tau)\,| < 0\,,$$

$$\limsup_{\tau\to\infty}(\beta_{2,2}(\tau) + \frac{b}{a}|\,\beta_{1,2}(\tau)\,|) \le \limsup_{\tau\to\infty}\beta_{2,2}(\tau) + \limsup_{\tau\to\infty}|\,\beta_{2,1}(\tau)\,| < 0\,,$$

та знову використаємо оцінку (9).

**Асимптотичне зображення розв'язків**

Провівши детальний аналіз модельної системи, перейдемо до основного результату. Як і раніше зробимо заміну $r_i = e^{u_i}$, $i = \overline{1,n}$, після якої прийдемо до системи

$$u_i' = \alpha_i(\tau) + \sum_{k=1}^{n} \beta_{i,k}(\tau)e^{u_k} + R_i(\tau, e^u, \varphi, \varepsilon), \quad i = \overline{1,n}, \tag{10}$$

$$\varphi_i' = \frac{\omega_i(\tau)}{\varepsilon} + \omega_{i,1}(\tau) + \sum_{k=1}^{n} c_{i,k}(\tau)e^{u_k} + \varepsilon\Phi_i(\tau, e^u, \varphi, \varepsilon), \quad i = \overline{1,n},$$

в якій через $e^u$ позначено вектор $(e^{u_1},...,e^{u_2})$.

Тепер для системи (10) можемо сформулювати та довести теорему про асимптотичне інтегрування. З неї зокрема випливатиме, що $u$ -компоненти розв'язку задачі Коші $u(\tau_0) = u_0$ та $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$ системи (10) при $\varepsilon \to 0+$ рівномірно на півосі $\tau \ge \tau_0$ прямують до $u(\tau;\tau_0,u_0)$ – розв'язку модельної системи (7).

Як і раніше ми вважаємо, що вектор $\alpha(\tau)$ задовольняє умови (4), матриця $B(\tau)$ рівномірно від'ємно визначена та виконуються оцінки, що дозволяють стверджувати про дисипативність та конвергентність модельної системи (7).

**Теорема 1.** *Нехай модельна система (7) має глобально експоненційно стійкий, обмежений на додатній півосі розв'язок* $u_0(\tau)$. *Тоді для довільних* $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ *існують такі числа* $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, *що розв'язок системи (10), який задовольняє початкові умови* $u(\tau_0) = u_0$, $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$ *при кожному* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ *допускає зображення*

$$u = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i u_i(\tau) + \varepsilon^m U(\tau,\varepsilon),$$

$$\varphi_j = \varphi_{0,j}(\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau}\left[\frac{\omega_j(s)}{\varepsilon} + \omega_{j,1}(s) + \sum_{k=1}^{n} c_{j,k}(s)e^{u_k(s)}\right]ds + \varepsilon\Psi_j(\tau,\varepsilon), \quad j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

*де* $u_0(\tau) = u(\tau;\tau_0,u_0)$ *– розв'язок модельного рівняння (7), що задовольняє початкову умову* $u(\tau_0) = u_0$, *а функції* $u_i(\tau), i = \overline{1,m-1}$, $U(\tau,\varepsilon)$, $\Psi(\tau,\varepsilon)$ *гладкі щодо* $\tau \ge \tau_0$, *причому* $u_i(\tau_0) = 0, i = \overline{1,m-1}$ *та*

$$\max_{\tau\ge\tau_0}\left\{\left\|u_i(\tau)\right\|, \left\|U(\tau,\varepsilon)\right\|, \frac{\left\|\Psi(\tau,\varepsilon)\right\|}{\tau-\tau_0}\right\} \le C, \quad i = \overline{1,m-1}.$$

**Доведення.** Підставивши (11) в (10), отримаємо низку задач Коші

$$u_i' = J(u_0,\tau)u_i + f_i(\tau), \quad u_i(\tau_0)=0, \quad i=\overline{1,m-1},$$

де $f_i(\tau)$ утворено з використанням функцій $u_j(\tau),\ j=\overline{0,i-1}$. В силу конвергентності модельної системи симетрична частина її матриці Якобі $J(u_0,\tau)$ від'ємно визначена і кожен розв'язок відповідної задачі Коші $u_i(\tau)$ обмежений при $\tau\to\infty$. Тобто знайдуться такі числа $N_i$, що $\sup_{\tau\ge\tau_0}\|u_i(\tau)\|\le N_i,\ i=\overline{1,m-1}$. Останньою будемо мати задачу

$$U' = J(u_0,\tau)U + F(\tau,\varepsilon^m U,\varepsilon\Psi,\varepsilon), \quad U(0,\varepsilon)=0,$$

$$\Psi' = G(\tau,\varepsilon^m U,\varepsilon\Psi,\varepsilon), \quad \Psi(0,\varepsilon)=0\,.$$

Оскільки розв'язок $u_0(\tau)$ модельного рівняння фінально обмежений, то знайдуться такі числа $\delta>0, \varepsilon_0>0$, що функції $F$ та $G$ будуть гладкими, обмеженими та $2\pi$-періодичними за змінною $\varphi$ на множині

$$\Delta = \mathbb{R}\times[-\delta,\delta]^n\times\mathbb{R}^n\times[-\varepsilon_0,\varepsilon_0].$$

Функції $U,\Psi$ будемо шукати як нерухому точку оператора

$$A[U,\Psi] = \left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Omega_\tau^s F(s,\varepsilon^m U,\varepsilon\Psi,\varepsilon)ds, \int_{\tau_0}^{\tau}G(s,\varepsilon^m U,\varepsilon\Psi,\varepsilon)ds\right),$$

визначеного на просторі

$$S = \left\{\left(U(\cdot,\varepsilon),\Psi(\cdot,\varepsilon)\right)\in C\left([\tau_0,\infty)\to[-\sigma,\sigma]^n\times\mathbb{R}^n\right),\ \frac{\|\Psi(\tau,\varepsilon)\|}{\tau-\tau_0}\le M\right\}.$$

Тут $\Omega_\tau^s$ – фундаментальна матриця системи $u'=J(\tau,u_0)u$, для якої в силу експоненціальної стійкості розв'язку $u_0$ модельної системи справджується оцінка $\left\|\Omega_\tau^s\right\|\le Ke^{-\gamma(\tau-s)}$, для деяких $K>0,\gamma>0$. Сталі $\sigma,M$ визначаються наступним чином

$$\sigma=\frac{KM}{\gamma}, \quad M=\max\{\max_\Delta\|F\|,\max_\Delta\|G\|\}.$$

Оскільки для всіх $(U,\Psi)\in S$ та $\varepsilon\in[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$

$$\left\|\int_{\tau_0}^{\tau}\Omega_\tau^s F(s,\varepsilon^m U,\varepsilon\Psi,\varepsilon)ds\right\|\le\sigma, \quad \left\|\int_{\tau_0}^{\tau}G(s,\varepsilon^m U,\varepsilon\Psi,\varepsilon)ds\right\|\le M(\tau-\tau_0),$$

то оператор $A$ відображає простір $S$ у себе. Крім того з гладкості функцій $F,G$ випливає існування сталої Ліпшиця $L>0$ такої, що

$$\|F(\tau,v_1,\phi_1,\varepsilon)-F(\tau,v_2,\phi_2,\varepsilon)\|\le L\left(\|v_1-v_2\|+\|\phi_1-\phi_2\|\right),$$

$$\|G(\tau,v_1,\phi_1,\varepsilon)-G(\tau,v_2,\phi_2,\varepsilon)\|\le L\left(\|v_1-v_2\|+\|\phi_1-\phi_2\|\right)$$

для всіх $(\tau,v_1,\phi_1,\varepsilon),(\tau,v_2,\phi_2,\varepsilon)\in\Delta$.

Введемо в просторі $S$ метрику

$$d((v_1,\phi_1),(v_2,\phi_2)) = \sup_{\tau\ge\tau_0}\left[e^{L(\tau_0-\tau)}\left(\|v_1(\tau,\varepsilon)-v_2(\tau,\varepsilon)\|+\|\phi_1(\tau,\varepsilon)-\phi_2(\tau,\varepsilon)\|\right)\right].$$

Тоді для $\varepsilon<1$

$$d\left(A[U_1,\Psi_1],A[U_2,\Psi_2]\right)\le$$

$$\le\sup_{\tau\ge\tau_0}\left\{e^{L(\tau_0-\tau)}\left[\int_{\tau_0}^{\tau}KLe^{\gamma(s-\tau)}\left(\varepsilon^m\|U_1(s,\varepsilon)-U_2(s,\varepsilon)\|+\varepsilon\|\Psi_1(s,\varepsilon)-\Psi_2(s,\varepsilon)\|\right)ds+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\tau_0}^{\tau}L\left(\varepsilon^m\|U_1(s,\varepsilon)-U_2(s,\varepsilon)\|+\varepsilon\|\Psi_1(s,\varepsilon)-\Psi_2(s,\varepsilon)\|\right)ds\right]\right\}\le$$

$$\le\varepsilon\sup_{\tau\ge\tau_0}\left\{e^{L(\tau_0-\tau}\int_{\tau_0}^{\tau}(K+1)Le^{L(s-\tau_0)}ds\right\}d\left((U_1,\Psi_1),(U_2,\Psi_2)\right)\le\varepsilon(K+1)d((U_1,\Psi_1),(U_2,\Psi_2)).$$

Якщо вибрати $\varepsilon_0$ так, щоб справджувалась нерівність $\varepsilon_0(K+1)<1,$ то оператор $A$ буде оператором стиску та матиме єдину нерухому точку.

Для завершення доведення залишилось покласти $C=\max\{N_1,...,N_{m-1},\sigma,M\}$.

**Висновки**

Ми розглянули $2n$-вимірну диференціальну систему з повільно змінними параметрами, яка має стійке до певного моменту часу положення рівноваги. В наслідок втрати останнім властивості стійкості ми можемо спостерігати динамічну біфуркацію, що є неавтономним аналогом біфуркації народження інваріантного тора. Так в нашому випадку розв'язки вихідної системи прямують до глобально експоненційно стійкого розв'язку модельної системи, коли біфуркаційний параметр $\varepsilon\to 0+$, що означає встановлення з часом певного багаточастотного коливного режиму.

При цьому деякі питання вимагають більш детального вивчення. Так можна було б покращити умови щодо коефіцієнтів біфуркаційної системи. Наприклад природно було б очікувати, що для конвергентності цієї системи достатньо лише додатності функцій $\alpha_j(\tau), j=\overline{1,n}$, та рівномірної від'ємної визначеності симетричної частини $B(\tau)$.

**Список використаних джерел**

1. Аносова О. Д. Инвариантные многообразия и динамические бифуркации // Успіхи мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 1. – С. 157-158.
2. Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. – Л., 1991.
3. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немцький В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости – М., 1966.
4. Колесов А. Ю. Об одной бифуркации в релаксационных системах // Укр. мат. журн. – 2008. – Т. 60, № 1. – С. 63–72.
5. Лисяной В. Ф. О нормальной форме неавтономных систем // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 5. – С. 665–667.
6. Нейштадт А. И. Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40 , № 5. – С. 190–191.
7. Нейштадт А. И. Затягивание потери устойчивости при динамических бифуркациях // Нелинейные волны'2006 / Под ред. Гапонов-Грехов А. В., Некоркин В. И. – Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2007. – С. 461–476.
8. Парасюк І. О., Перестюк М. О. Локальний аналіз нелінійних диференціальних рівнянь – Кам'янець-Подільський, 2013.
9. Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 209, № 3.
10. Haragus M., Iooss G. Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite Dimensional Dynamical Systems. – EDP Sciences, 2011.
11. Lee DeVille R. E., Harkin A., Holzer M., Kaper T. J. Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2008. – June. – Vol. 237, no. 8. – P. 1029-1052.
12. Lijun Yang, Xianwu Zeng. Stability of singular Hopf bifurcations // Journal of Differential Equations. – 2004. – Vol. 206, no. 1. – P. 30-54.
13. Lohmiller W., Slotine J.-J. E. On Contraction Analysis for Non-linear Systems // Automatica. – 1998. – Vol. 34, no. 6. – P. 683–696.
14. Rachinskii D., Schneider K. Dynamic Hopf bifurcations generated by nonlinear terms // Journ. Differ.. Eq. – 2005. – Vol. 210, no. 1. – P. 65-86.

**Надійшла до редколегії 11.11.13**

**Б. Репета, асп.**
**КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**

**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА В СИСТЕМАХ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ**

***В этой статье описывается динамическая бифуркация, при которой положение равновесия дифференциальной системы в некоторый момент времени теряет устойчивость и устанавливается колебательный режим. Посредством метода нормальных форм получается бифуркационная система, исследуемая на свойства диссипативности и конвергентности. Конечным результатом является доказательство теоремы об асимптотическом представлении решений нормализованной системы.***

**B. Repeta, PhD graduate**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv**

**THE DYNAMIC COUNTERPART FOR THE BIFURCATION OF THE BIRTH OF INVARIANT TORUS IN SYSTEMS WITH SLOWLY CHANGING PARAMETERS**

***This paper describes the following dynamic bifurcation. The differential system has an equilibrium which loses stability at some point of time and as a result the oscillations occur. Using the normal forms method, we obtain the bifurcation system. The dissipativity and convergence of the latter are studied. The final result consists in proving the asymptotic representation theorem for solutions of the normalized system.***

**УДК 517.9**

**Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук**
**КНУ імені Тараса Шевченка, м.Київ**

# ДВОФАЗОВИЙ АСИМПТОТИЧНИЙ СОЛІТОНОПОДІБНИЙ РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ЗАГАЛЬНОМУ ВИПАДКУ

***Розглядається питання про побудову головного члена двофазового асимптотичного солітоноподібного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами у загальному випадку. Описано множину початкових значень, при яких побудова такого асимптотичного розв'язку можлива.***

## Вступ

Рівняння Кортевега-де Фріза [6]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R, t \in [0;T], \tag{1}$$

є фундаментальним рівнянням сучасної математичної і теоретичної фізики. Вперше це рівняння було отримано Д.Кортевегом і Дж. де Фрізом у 1895 році для опису руху відокремленої хвилі [8], які знайшли його розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = u_0 + \frac{a^2}{2} ch^{-2}\left(\frac{a(x-\varphi(t))}{2}\right), x \in R, t \in [0;T],$$

де $\varphi(t) = (a^2 + 6u_0)t$; $a > 0$, $u_0 > 0$ – довільні (фіксовані) дійсні сталі.

Саме завдяки інтенсивним дослідженням цього рівняння було створено метод оберненої задачі розсіювання, який успішно в подальшому було використано для побудови точних розв'язків спеціального вигляду для низки нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, для рівняння Кортевега-де Фріза (1) було отримано так званий двосолітонний (дублетний) розв'язок, який записується за допомогою формули вигляду

$$u(x,t) = 12\frac{4ch\,(2x-8t) + ch\,(4x-64t) + 3}{\left[3ch\,(x-28t) + ch\,(3x-36t)\right]^2}.$$

Проте, якщо для дослідження рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами можна використовувати метод оберненої задачі розсіювання, то у випадку, коли це рівняння має змінні коефіцієнти, чи не єдиним підходом до його дослідження є асимптотичний аналіз.

У даній статті розглядається рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x \tag{2}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f(x,\varepsilon)\ , \tag{3}$$

де

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,t)\varepsilon^k\ ,\ \ b(x,t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,t)\varepsilon^k\ ,$$

функції $a_k(x,t)$, $b_k(x,t) \in C^\infty(R\times[0;T])$, $k \ge 0$, причому $a_0(x,t) \ne 0$, $b_0(x,t) \ne 0$ при всіх $(x,t) \in R\times[0;T]$.

Відомо, що наявність однофазового чи двофазового солітонного розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі сталими коефіцієнтами залежить від вигляду початкової умови. Цілком природно виникає питання, чи можна знайти множину початкових умов для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, щоб відповідна задача Коші (2), (3) мала асимптотичний розв'язок, який за своєю структурою в певному сенсі є близьким до двофазового солітонного розв'язку. Така множина описана в праці [2]. При цьому, в [2] суттєво використовується умова рівності коефіцієнтів рівняння на так званих кривих розриву. У даній статті запропоновано підхід, який дозволяє без умови рівності коефіцієнтів на кривих розриву знайти початкові умови для рівняння (2), для яких можна побудувати головний член асимптотичного розв'язку задачі (2), (3), який за своєю структурою є близьким до двохсолітонного.

**Основні припущення і позначення**

У подальшому використовується простір швидко спадних функцій $S = S(R)$, тобто простір таких нескінченно диференційовних на множині $R$ функцій, що для довільних цілих чисел $m,n \ge 0$ виконується умова [5]

$$\sup_{x\in R}\left| x^m \frac{d^n}{dx^n}u(x)\right| < +\infty\ .$$

Через $C^\infty(0,T;S)$ позначимо простір нескінченно диференційовних на множині $R\times[0;T]$ функцій $u(x,t)$, для яких при довільних цілих $m,k > 0$ виконується умова

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(D_x^m D_t^k u\right)^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+x^2\right)^m \left(D_t^k u\right)^2 dx < \infty\ .$$

Аналогічно [1, 7] позначимо через $G_1 = G_1(R\times[0;T]\times R)$ лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, що для довільних невід'ємних цілих чисел $n$, $p$, $q$, $r$ рівномірно щодо $(x,t)$ на кожній компактній множині $K \subset R\times[0;T]$ виконуються такі дві умови:

$1^0$. справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x,t,\tau) = 0,\quad (x,t)\in K\ ;$$

$2^0$. існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}\Big( f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\Big) = 0,\quad (x,t)\in K\ .$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(R\times[0;T]\times R) \subset G_1$ – простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)\in G_1$, $(x,t,\tau)\in R\times[0;T]\times R$, що рівномірно щодо змінних $(x,t)$ на кожному компакті $K\subset R\times[0;T]$ виконується умова

$$\lim_{\tau\to-\infty} f(x,t,\tau) = 0\ .$$

Позначимо за допомогою $G_2^0 = G_2^0(R\times[0;T]\times R\times R)$ лінійний простір нескінченно диференційованих функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(x,t,\tau_1,\tau_2)\in(R\times[0;T]\times R\times R)$, для яких існують такі функції $f_1^\pm = f_1^\pm(x,t,\tau_2)$, $f_2^\pm = f_2^\pm(x,t,\tau_1) \in$ $\in G_1^0(R\times[0;T]\times R)$, що для довільних невід'ємних цілих чисел $\alpha$, $q$, $p_1$, $p_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau_2^{\beta_2}}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\Big( f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_1^\pm(x,t,\tau_2)\Big) = 0,\quad (x,t)\in K\ ;$$

$$\lim_{\tau_2\to\pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial\tau_1^{\beta_1}}\frac{\partial^{\beta_2}}{\partial\tau_2^{\beta_2}}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\Big( f(x,t,\tau_1,\tau_2) - f_2^\pm(x,t,\tau_1)\Big) = 0,\quad (x,t)\in K\ .$$

**Означення 1.** *Функція $u = u(x,t,\varepsilon)$ називається двофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа $N \ge 0$ вона зображається у вигляді:*

$$u(x,t,\varepsilon) = Y_N\left(x,t,\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon},\varepsilon\right) + O\left(\varepsilon^{N+1}\right),$$

*де*

$$Y_N(x,t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^{j+1}\left(u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\right),\ \tau_1=\frac{S_1(x,t)}{\varepsilon},\ \tau_2=\frac{S_2(x,t)}{\varepsilon};$$

*функції* $S_k=S_k(x,t)\in C^{\infty}(R\times[0;T])$, *причому* $\left.\frac{\partial S_k}{\partial x}\right|_{\Gamma_k}\neq 0$, $\Gamma_k=\{(x,t)\in R\times[0;T],\ S_k(x,t)=0\}$, $k=1,2$; $u_j(x,t)$, $j=\overline{1,\ N}$, – *нескінченно диференційовні функції;* $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, $V_j(x,t,\tau_1,\tau_2)\in G_2$.

У подальшому використовується стандартне для асимптотичного аналізу позначення: запис $\Psi(x,t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^N\right)$ при $\varepsilon\to 0$ означає, що існують такі величина $\varepsilon_0>0$ і стала $C>0$, яка залежить від числа $N$ і від компакта $K\subset R\times[0;T]$, що $\left|\Psi(x,t,\varepsilon)\right|\le C_{N,K}\ \varepsilon^{N+1}$ для всіх $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ і всіх $(x,t)\in K$.

**Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші (2), (3)**

За допомогою заміни $u(x,t,\varepsilon)=\dfrac{v(x,t,\varepsilon)}{b(x,t,\varepsilon)}$ рівняння (2) зведемо до диференціального рівняння вигляду

$$\varepsilon^2 v_{xxx}=a(x,t,\varepsilon)v_t+vv_x-3\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v_{xx}-3\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v_x-\varepsilon^2 b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v+$$
$$+b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v^2+a(x,t,\varepsilon)b(x,t,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b(x,t,\varepsilon)}\right)v,$$

асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок якого можна шукати у вигляді

$$v(x,t,\varepsilon)=Y_N(x,t,\varepsilon)+O\left(\varepsilon^{N+1}\right), \tag{4}$$

де

$$Y_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\left(u_j(x,t)+V_j(t,\tau_1,\tau_2)\right),\quad \tau_k=\frac{x-\varphi_k(t)}{\varepsilon},\ k=\overline{1,2}.$$

Щодо функцій $\varphi_k(t)$, $t\in[0;T]$, $k=\overline{1,2}$, припускається, що ці функції є нескінченно диференційовними і задовольняють умову $\varphi_k(0)=0$, $k=\overline{1,2}$.

Функції $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$, $V_N(t,\tau_1,\tau_2)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2)$ називаються регулярною та сингулярною частинами асимптотики (4) відповідно. Очевидно, що при цьому виконується рівність $Y_N(x,t,\varepsilon)=U_N(x,t,\varepsilon)+V_N(t,\tau_1,\tau_2,\varepsilon)$.

Регулярна частина $U_N(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x,t)$ асимптотики (4) визначається із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку вигляду

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+a_0(x,t)b_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0+b_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0^2=0, \tag{5}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+u_0\frac{\partial u_j}{\partial x}+u_j\frac{\partial u_0}{\partial x}+b_0(x,t)\left(a_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{b_0(x,t)}\right)u_0\right)u_j=F_j(x,t),\quad j=\overline{1,\ N}, \tag{6}$$

де функції $F_j(x,t)$, $j=\overline{1,N}$, знаходяться рекурентним чином за функціями $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, …, $u_{j-1}(x,t)$.

Розв'язок квазілінійного рівняння (5) і лінійних рівнянь (6) можна знайти методом характеристик [3].

Сингулярна частина $V_N(t,\tau_1,\tau_2)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j V_j(t,\tau_1,\tau_2)$ асимптотики (4) визначається із системи диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^1}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_2^3}+\left[\varphi_1'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\left[\varphi_2'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}-V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^1}+3\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_1^1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau_2^3}+\left[\varphi_1'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+\left[\varphi_2'(t)a_0(x,t)-u_0(x,t)\right]\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}-$$
$$-\left[V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+V_j\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_1}+V_0\frac{\partial V_j}{\partial\tau_2}\right]=F_j(x,t,\tau_1,\tau_2),$$

де функції $F_j(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $j=\overline{1,N}$, визначаються рекурентним чином після знаходження функцій $V_0(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $V_1(x,t,\tau_1,\tau_2)$, …, $V_{j-1}(x,t,\tau_1,\tau_2)$.

В околі кожної з кривих $x=\varphi_k(t)$, $k=\overline{1,2}$, головний член сингулярної частини асимптотики можна знайти як розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^1}+3\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_2^3}+\left[\varphi_1'(t)a_0(\varphi_k,t)-u_0(\varphi_k,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\left[\varphi_2'(t)a_0(\varphi_k,t)-u_0(\varphi_k,t)\right]\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}-V_0\left[\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}\right]=0,\ k=\overline{1,2}.$$

Враховуючи, що функція $V_0(t,\tau_1,\tau_2)\in G_2^0$, в якості функції, що визначає головний член сингулярної частини асимптотики, можна розглянути розв'язок $\overline{V}_0(t,\tau_1,\tau_2)$ (допоміжного) рівняння вигляду

$$\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial\tau_1^3}+3\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial\tau_1^2\partial\tau_2^1}+3\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial\tau_1^1\partial\tau_2^2}+\frac{\partial^3 \overline{V}_0}{\partial\tau_2^3}=\left[-\varphi_1'(t)a_0(\varphi_1,t)+u_0(\varphi_1,t)\right]\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial\tau_1}+\left[-\varphi_2'(t)a_0(\varphi_2,t)-u_0(\varphi_2,t)\right]\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial\tau_2}+\overline{V}_0\left[\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial \overline{V}_0}{\partial\tau_2}\right]=0. \quad (7)$$

При цьому двосолітонний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$\overline{V}_0(t,\tau_1,\tau_2)=\overline{V}_0(\xi,\eta)=-2\left[2\kappa_1c_1^2e^{-2\kappa_1\xi}+2\kappa_2c_2^2e^{-2\kappa_2\xi}-2c_1^2c_2^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{\kappa_1\kappa_2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}-\right. \quad (8)$$

$$\left.-\frac{c_1^4c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_2}{2\kappa_1^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-4\kappa_1-2\kappa_2)\xi}-\frac{c_1^2c_2^4(\kappa_1-\kappa_2)^2\kappa_1}{2\kappa_2^2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{(-2\kappa_1-4\kappa_2)\xi}\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{c_1^2}{2\kappa_1}e^{-2\kappa_1\xi}+\frac{c_2^2}{2\kappa_2}e^{-2\kappa_2\xi}+\frac{c_1^2c_2^2(\kappa_1-\kappa_2)^2}{4\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)^2}e^{-2(\kappa_1+\kappa_2)\xi}\right]^{-2},$$

де

$$\xi=\frac{1}{\sqrt6}\frac{\gamma_2(t)\tau_1-\gamma_1(t)\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)},\quad \eta=\frac{1}{6\sqrt6}\frac{\tau_1-\tau_2}{\gamma_2(t)-\gamma_1(t)}. \quad (9)$$

Тут позначено $\kappa_k(t)=\sqrt{6\gamma_k(t)}$, $\gamma_k(t)=-\varphi_k'(t)a_0(\varphi_k(t),t)+u_0(\varphi_k(t),t)$, $k=\overline{1,2}$, $c_k(\eta)=c_k(0)\exp\left(\kappa_k^3(t)\eta\right)$, де $c_k(0)$, $k=\overline{1,2}$, – довільні додатні сталі, $\gamma_k(t)>0$, $t\in[0;T]$, $k=\overline{1,2}$.

Величини $\kappa_k(t)$, $k=\overline{1,2}$, належать множині власних значень оператора Штурма-Ліувілля, що асоційований з рівнянням Кортевега-де Фріза. При цьому припускається, що $\gamma_1(t)\neq\gamma_2(t)$, $t\in[0;T]$.

Для задачі про побудову головного члена асимптотики (4) задачі Коші (2), (3) формули (8), (9) дозволяють отримати достатні умови для функції в початковій умові (3) задачі Коші (2), (3). Дійсно, поклавши $t=0$, $\tau_1=\frac{x}{\varepsilon}$, $\tau_2=\frac{x}{\varepsilon}$ в (8), отримаємо, що функція $u(x,0,\varepsilon)=f(x,\varepsilon)$ має належати множині

$$M^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)=\left\{\frac{-2}{b_0(x,0)}\left[2\kappa_1^0C_1e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+2\kappa_2^0C_2e^{-2\frac{\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-2C_1C_2\frac{\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2}{\kappa_1^0\kappa_2^0}e^{-\frac{2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{C_1^2C_2\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2\kappa_2^0}{2\left(\kappa_1^0\right)^2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)^2}e^{-\frac{4\kappa_1^0+2\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-\frac{C_1C_2^2\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2\kappa_1^0}{2\left(\kappa_2^0\right)^2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)^2}e^{-\frac{2\kappa_1^0+4\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}\right]\times$$

$$\left.\times\left[1+\frac{C_1}{2\kappa_1^0}e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{C_2}{2\kappa_2^0}e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{C_1C_2(\kappa_1^0-\kappa_2^0)^2}{4\kappa_1^0\kappa_2^0(\kappa_1^0+\kappa_2^0)^2}e^{-2\frac{\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}\right]^{-2},C_1,C_2>0,C_1\neq C_2\right\},$$

де $\kappa_k^0=\kappa_k(0)$, $k=\overline{1,2}$.

Множина $M^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$ називається многовидом початкових умов [2] для задачі про побудову головного члена асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (2), (3).

Викладені вище міркування та метод побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (2), (3) дозволяють довести наступні твердження.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови:*

1. *функції* $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)\in C^\infty(R\times[0;T])$ *і такі, що* $a_0(x,t)\neq0$, $b_0(x,t)\neq0$ *для всіх* $(x,t)\in R\times[0;T]$;
2. *існують такі функції* $x=\varphi_k(t)\in C^\infty([0;T])$, $k=\overline{1,2}$, *що* $\varphi_k(0)=0$, $k=\overline{1,2}$, *і для них виконуються умови*

$$\gamma_k(t)=-a_0(\varphi_k(t),t)\varphi_k'(t)+u_0(\varphi_k(t),t)>0,\ t\in[0;T];$$

3. *задача Коші для квазілінійного рівняння (8) з початковою умовою* $u_0(x,0)=g_0(x)$, $x\in R$, *де функція* $g_0(x)\in C^\infty(R\times[0;T])$, *має в просторі* $C^\infty(R\times[0;T])$ *розв'язок;*

*4. в умові (4) початкова функція має вигляд* $f(x,\varepsilon)=g_0(x)+f_0(x,\varepsilon)$ *, де* $f_0(x,\varepsilon)\in M^0_{\varphi_1,\varphi_2}(\varepsilon)$ *.*

*Тоді функція*

$$Y_0(x,t,\varepsilon)=\frac{u_0(x,t)}{b_0(x,t)}+\frac{1}{b_0(x,t)}\overline{V}_0\left(t,\frac{x-\varphi_1(t)}{\varepsilon},\frac{x-\varphi_2(t)}{\varepsilon}\right)$$

*є головним членом асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (2), (3) і задовольняє (при* $\varepsilon\to 0$ *) задачу Коші (2), (3) з точністю* $O(1)$ *.*

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови:*

*1. справджуються умови 1, 2, 4 теореми 1;*

*2. функція* $a(x,t,\varepsilon)$ *має вигляд* $a(x,t,\varepsilon)=a(x,\varepsilon)$ *,* $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$ *, і задовольняє умову* $c_1\le a(x,\varepsilon)\le c_2$ *,* $x\in R$ *, де сталі* $c_1$ *та* $c_2$ *такі, що* $c_1c_2>0$ *0;*

*3. існує розв'язок* $u=u(x,t,\varepsilon)$ *задачі Коші (2), (3), що належить простору* $C^\infty(0,T;S)$ *, і який для деякої сталої* $C$ *, що не залежить від* $\varepsilon$ *, задовольняє нерівність* $\|| u(x,t,\varepsilon)-Y_0(x,t,\varepsilon)\|| \big|_{t=0}\le C\varepsilon$ *, де норму* $\||\cdot\||$ *визначено згідно формули [4]:*

$$\|| f \||=\sqrt{\| f\|^2+\varepsilon^4\| f_{xx}\|^2}\ ,\quad \| f\|=\left(\int_R f^2(x,t,\varepsilon)\,dx\right)^{\frac{1}{2}};$$

*4. розв'язок задачі Коші для рівняння (5) з початковою умовою* $u_0(x,0)=g_0(x)$ *,* $x\in R$ *, де функція* $g_0(x)\in S(R)$ *, належить простору* $C^\infty(0,T;S)$ *.*

*Тоді для точного та наближеного розв'язків задачі Коші (2), (3) має місце оцінка вигляду*

$$\|| u(x,t,\varepsilon)-Y_0(x,t,\varepsilon)\||\le C_0\varepsilon^{3/2},\quad t\in[0;\varepsilon^2 T]\,,$$

*де* $C_0$ *– деяка стала, що не залежить від* $\varepsilon$ *,* $T$ *– деяке додатне число.*

**Приклад.** Розглянемо рівняння (2) для випадку $a(x,t,\varepsilon)=1$ , $b(x,t,\varepsilon)=ch^{-1}x$ з початковою умовою вигляду

$$f(x,\varepsilon)=ch^{-1}x-2ch\,x\left[2\kappa_1^0C_1e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+2\kappa_2^0C_2e^{-2\frac{\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-2C_1C_2\frac{\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2}{\kappa_1^0\kappa_2^0}e^{-\frac{2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-\right.$$

$$\left.-\frac{C_1^2C_2\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2\kappa_2^0}{2\left(\kappa_1^0\right)^2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)^2}e^{-\frac{4\kappa_1^0+2\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}-\frac{C_1C_2^2\left(\kappa_1^0-\kappa_2^0\right)^2\kappa_1^0}{2\left(\kappa_2^0\right)^2\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)^2}e^{-\frac{2\kappa_1^0+4\kappa_2^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{C_1}{2\kappa_1^0}e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{C_2}{2\kappa_2^0}e^{-2\frac{\kappa_1^0}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{C_1C_2(\kappa_1^0-\kappa_2^0)^2}{4\kappa_1^0\kappa_2^0(\kappa_1^0+\kappa_2^0)^2}e^{-2\frac{\left(\kappa_1^0+\kappa_2^0\right)}{\sqrt6}\frac{x}{\varepsilon}}\right]^{-2},$$

де $C_1$ , $C_2$ – деякі фіксовані додатні сталі, $\kappa_k^0=\kappa_k(0)$ , $k=\overline{1,2}$ , $\kappa_k^2(t)=\sqrt6\left(k+ch^{-1}(kt)\right)$, $\gamma_k(t)=k+ch^{-1}(kt)$ , $k=\overline{1,2}$ . Тоді головний член асимптотичного розв'язку задачі (2), (3) у цьому випадку має вигляд

$$Y_0(x,t,\varepsilon)=1-2ch^{-1}x\left[2\kappa_1C_1\exp\left(-2\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)+2\kappa_2C_2\exp\left(-2\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)-\right.$$

$$-2C_1C_2\frac{\left(\kappa_1-\kappa_2\right)^2}{\kappa_1\kappa_2}\exp\left(-2\left(\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)-$$

$$-2C_1^2C_2\frac{\kappa_2\left(\kappa_1-\kappa_2\right)^2}{2\kappa_1^2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)^2}\exp\left(-\left(4\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+2\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)-$$

$$\left.-2C_1C_2^2\frac{\kappa_1\left(\kappa_1-\kappa_2\right)^2}{2\kappa_2^2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)^2}\exp\left(-\left(2\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+4\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{C_1}{2\kappa_1}\exp\left(-2\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)+\frac{C_2}{2\kappa_2}\exp\left(-2\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)+\right.$$

$$\left.+2C_1C_2\frac{\left(\kappa_1-\kappa_2\right)^2}{4\kappa_1\kappa_2\left(\kappa_1+\kappa_2\right)^2}\exp\left(-2\left(\kappa_1\frac{x+t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}+\kappa_2\frac{x+2t}{\sqrt6\varepsilon(\gamma_2(t)-\gamma_1(t))}\right)\right)\right]^{-2},$$

де $\kappa_k^2(t)=\sqrt6\left(k+ch^{-1}(kt)\right)$, $\gamma_k(t)=k+ch^{-1}(kt)$ , $k=\overline{1,2}$ .

**Висновки**

Описано множину початкових умов, для яких задача Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами має асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок. Запропоновано поняття многовиду початкових значень для задачі Коші, при яких такий розв'язок існує. Доведено теорему про оцінку між точним і побудованим асимптотичним розв'язком згаданої вище задачі.

**Список використаних джерел**

1. Маслов В.П., Омельянов Г.А. Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124.
2. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Двофазові солітоноподібні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 11. – С. 1515 – 1530.
3. Самойленко Ю.І. Існування в просторі швидко спадних функцій та властивості розв'язку рівняння з частинними похідними першого порядку з квадратичною нелінійністю // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т. 11, № 1. – С. 316 – 325.
4. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1988. – Т. 13. – Р. 56 – 105.
5. Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
6. Korteweg D.J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
7. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society, 2001. – 243 p.
8. Scott-Russel J. Report on waves. In: Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London. John Murray. – 1834. – P. 311 – 390.

**Надійшла до редколегії 14.15.14**

**Ю. Самойленко, канд. физ.-мат. наук**
**КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**

**ДВУХФАЗОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СОЛИТОНООБРАЗНОЕ РЕШЕНИЕ У РАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ**

***Рассматривается вопрос о построении главного члена двухфазового асимптотического солитонообразного решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега-де Фриза с переменными коэффициентами в общем случае. Описано множество начальных значений, при которых возможно построение такого асимптотического решения.***

**Yu. Samoylenko, PhD**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv**

**TWO PHASE ASYMPTOTIC SOLITON-TYPE SOLUTION TO KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS IN GENERAL CASE**

***The paper deals with a problem of constructing main term of two phase soliton-type solution to Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients in general case. The set of initial values for the problem is described.***

**УДК 517.956**

**П. Самусенко, канд. фіз.-мат. наук, доц., М. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук, проф.**
**НПУ імені М.П. Драгоманова, Київ**

# АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

***За допомогою методу збуреного характеристичного рівняння знайдено асимптотичні розв'язки лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратних коренів характеристичного рівняння. Отримані результати узагальнено для аналогічних систем з періодичними коефіцієнтами.***

**Вступ.** Лінійні сингулярно збурені системи диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x,\ t\in[0;T], \tag{1}$$

де $A(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця $n$-го порядку з дійсними або комплекснозначними нескінченно диференційовними елементами, які на відрізку $[0;T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення $A(t,\varepsilon)=\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t)$, $\varepsilon$ – малий параметр, почали інтенсивно досліджуватись із середини XX століття. Згідно [21, 16, 6] асимптотичні розв'язки системи (1) у випадку простих коренів характеристичного рівняння

$$det(A_0(t)-\lambda E)=0, \tag{2}$$

де $E$ – одинична матриця, можна знайти у вигляді формальних рядів за степенями параметра $\varepsilon$.

Випадок кратних коренів рівняння (2) довгий час залишався недослідженим. Важливим кроком у питанні побудови розв'язків системи (1) стали теореми про асимптотичне розщеплення, доведені у працях Хукухари [17], Й. Сибуйі [22], М. Івано [18 – 20], С.Ф. Фещенка [7, 8]. Таким чином, випадок, коли характеристичне рівняння має кілька коренів був зведений до більш простого випадку, коли це рівняння має лише один корінь. Сама ж проблема кратного кореня була розв'язана в працях М.І. Шкіля [11 – 13]. Він показав, що розв'язки системи (1) зображуються асимптотичними розвиненнями за дробовими степенями $\varepsilon$, показники яких залежать як від кратності коренів характеристичного рівняння та елементарних дільників, що їм відповідають, так і від поведінки збурюючих коефіцієнтів системи.

**Об'єкт і методи досліджень.** У даній роботі для побудови асимптотичних розв'язків системи (1) використовується метод збуреного характеристичного рівняння, запропонований М.І. Шкілем, за допомогою якого випадок кратних коренів характеристичного рівняння зводиться до випадку простих коренів [14, 15].

**Метод збуреного характеристичного рівняння.** Розглянемо систему (1). Згідно методу збуреного характеристичного рівняння вважаємо, що матриця $B_0(t,\varepsilon)=A_0(t)+\varepsilon A_1(t)$ має прості власні значення $w_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, для всіх $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0<<1$. Тоді існує така неособлива матриця $T(t,\varepsilon)$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$, що

$$T^{-1}(t,\varepsilon)B_0(t,\varepsilon)T(t,\varepsilon)=W(t,\varepsilon)\equiv diag\{w_1(t,\varepsilon),w_2(t,\varepsilon),...,w_n(t,\varepsilon)\}.$$

Формальні розв'язки системи (1) шукаємо у вигляді

$$x_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{t}\lambda_i(t,\varepsilon)dt\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{3}$$

де $u_i(t,\varepsilon)$ – $n$-вимірний вектор, а $\lambda_i(t,\varepsilon)$ – скалярна функція, що мають такі формальні розвинення за степенями $\varepsilon$:

$$u_i(t,\varepsilon)=\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ \lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

сталі $a_i$ визначимо нижче.

Підставимо (3) до системи (1):

$$B_0(t,\varepsilon)u_i(t,\varepsilon)+\sum_{s\geq 2}\varepsilon^s A_s(t)u_i(t,\varepsilon)-u_i(t,\varepsilon)\lambda_i(t,\varepsilon)=\varepsilon u_i'(t,\varepsilon).$$

Зрівнюючи коефіцієнти при "однакових" степенях параметра $\varepsilon$, дістаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$(B_0(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)E)\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)=0, \tag{5}$$

$$(B_0(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)E)\tilde{u}_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)+(\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon))', \tag{6}$$

$$(B_0(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)E)\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{u}_i^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde{\lambda}_i^{(s-k)}(t,\varepsilon)+(\tilde{u}_i^{(s-1)}(t,\varepsilon))'-\sum_{k=2}^{s}A_k(t)\tilde{u}_i^{(s-k)}(t,\varepsilon),\ s=2,3,..., \tag{7}$$

з якої і знаходимо $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $s=0,1,...$

Справді, система (5) перетворюється в тотожність, якщо, наприклад,

$$\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)=\varphi_i(t,\varepsilon),\ \tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)=w_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},$$

де $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, – стовпці матриці $T(t,\varepsilon)$.

Нехай $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)q_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ s=0,1,...$ . За побудовою $q_i^{(0)}(t,\varepsilon)=e_i$, $e_i$ – одиничний вектор, $i$-та компонента якого дорівнює $1$, решта компонент – нулі.

Тоді система (6) набуде вигляду

$$(W(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon))q_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)e_i+c_i^{(1)}(t,\varepsilon), \tag{8}$$

де $c_i^{(1)}(t,\varepsilon)=T^{-1}(t,\varepsilon)T'(t,\varepsilon)e_i$ .

Отже,

$$\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)=-\{c_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_i,\ \ \{q_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_i=0,\ \ \{q_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_j=\frac{\{c_i^{(1)}(t,\varepsilon)\}_j}{w_j(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)},\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,n},$$

де $\{\}_i$ – $i$-та компонента відповідного вектора.

Аналогічно, записуючи систему (7) у вигляді

$$(W(t,\varepsilon)-\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon))q_i^{(s)}(t,\varepsilon)=\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)e_i+c_i^{(s)}(t,\varepsilon),\ i=\overline{1,n},\ s=2,3,...,$$

де

$$c_i^{(s)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{s-1}q_i^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde{\lambda}_i^{(s-k)}(t,\varepsilon)+T^{-1}(t,\varepsilon)T'(t,\varepsilon)q_i^{(s-1)}(t,\varepsilon)+(q_i^{(s-1)}(t,\varepsilon))'-\sum_{k=2}^{s}T^{-1}(t,\varepsilon)A_k(t)T(t,\varepsilon)q_i^{(s-k)}(t,\varepsilon),$$

доводимо її сумісність.

**1. Випадок кратних елементарних дільників.** Не обмежуючи загальності, вважаємо, що матриця $A_0(t)$ має одне власне значення $a_0(t)$, якому відповідають два елементарні дільники кратності $p$, $q$, причому $q>p\geq 2$, $p+q=n$ .

Покладаючи в системі (1)

$$x(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a_0(t)dt\right)P(t)y(t,\varepsilon),$$

де $P(t)$ така неособлива матриця, що

$$P^{-1}(t)A_0(t)P(t)=\Omega(t)\equiv diag\{a_0(t)E_p+J_p,a_0(t)E_q+J_q\},$$

$E_p$, $J_p$, $E_q$, $J_q$ – квадратні матриці порядку $p$ та $q$ відповідно, причому $E_p$, $E_q$ – одиничні матриці, а $J_p$, $J_q$ – матриці, елементи першої верхньої наддіагоналі яких дорівнюють $1$, решта їх елементів дорівнюють $0$, дістаємо

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=D(t,\varepsilon)y, \tag{9}$$

$$D(t,\varepsilon)=\sum_{s\geq 0}\varepsilon^s D_s(t),\ \ D_0(t)\equiv J=diag\{J_p,J_q\},\ D_1(t)=P^{-1}(t)(A_1(t)P(t)-P'(t)),\ D_s(t)=P^{-1}(t)A_s(t)P(t),\ s=2,3,...\ .$$

Надалі вважаємо, що система (1) має вигляд (9).

Знайдемо умови, при виконанні яких матриця $B_0(t,\varepsilon)$ має прості власні значення. Для цього, використовуючи метод діаграм Ньютона, проаналізуємо збурене характеристичне рівняння

$$det(B_0(t,\varepsilon)-wE)=0. \tag{10}$$

Запишемо рівняння (10) наступним чином:

$$w^n+\beta_1(t,\varepsilon)w^{n-1}+\beta_2(t,\varepsilon)w^{n-2}+...+\beta_{n-1}(t,\varepsilon)w+\beta_n(t,\varepsilon)=0.$$

За побудовою $\beta_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, – многочлени змінної $\varepsilon$. Нехай

$$a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)\neq 0,\ t\in[0;T], \tag{11}$$

де $a_{ij}^{(1)}(t)$ – відповідний елемент матриці $A_1(t)$.

Тоді

$$\beta_i(t,\varepsilon)=O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0,\ i=\overline{1,q-1},\ \ \beta_q(t,\varepsilon)=-\varepsilon a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)+O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,$$

$$\beta_i(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^2),\ \varepsilon\to 0,\ i=\overline{q+1,n-1},\ \ \beta_n(t,\varepsilon)=\varepsilon^2 a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)+O(\varepsilon^3),\ \varepsilon\to 0.$$

Розглянемо прямокутну систему координат $Oks$, на осі абсцис якої відкладаємо показники степеня $w$, а на осі ординат – показники степеня $\varepsilon$, компонент кожного члену з найменшим показником $\varepsilon$ рівняння (10).

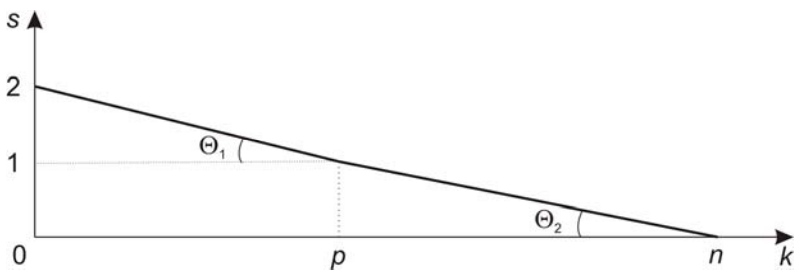


**Рис. 1**

Оскільки $\theta_1=\frac{1}{p},\theta_2=\frac{1}{q},$ то рівняння (10) має дві групи розв'язків, показники степеня головних членів асимптотики за параметром $\varepsilon$ яких відповідно дорівнюють $\frac{1}{p}$ та $\frac{1}{q}$. Записуючи визначальні рівняння [4] для кожної з ланок побудованої діаграми Ньютона

$$w_0^p-a_{p1}^{(1)}(t)=0$$

та

$$w_0^q-a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)=0,$$

знаходимо коефіцієнти головних членів асимптотик:

$$w_0(t)=\sqrt[p]{a_{p1}^{(1)}(t)}$$

та

$$w_0(t)=\sqrt[q]{a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)}.$$

Таким чином, розв'язки рівняння (10) мають вигляд

$$w_i(t,\varepsilon)=\sqrt[p]{a_{p1}^{(1)}(t)}\varepsilon^{\frac{1}{p}}+O(\varepsilon^{\frac{2}{p}}),\ i=\overline{1,p},\ \ w_i(t,\varepsilon)=\sqrt[q]{a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)}\varepsilon^{\frac{1}{q}}+O(\varepsilon^{\frac{2}{q}}),\ i=\overline{p+1,n}.$$

Оскільки

$$(B_0(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)E)\varphi_i(t,\varepsilon)=0,\ i=\overline{1,n},$$

то компонентами $\varphi_i(t,\varepsilon)$ можуть бути алгебраїчні доповнення елементів $i$-го рядка матриці $B_0(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)E$. Кожен з векторів $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, визначається з точністю до скалярного множника. А тому вважаємо, що $T(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} T_1(t,\varepsilon) & T_2(t,\varepsilon) \\ T_3(t,\varepsilon) & T_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, де $T_1(t,\varepsilon)$ та $T_4(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці $p$-го та $q$-го порядку відповідно, причому

$$T_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & ... & O(1) \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) \end{pmatrix}, T_2(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(\varepsilon^{\frac{q-p}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-p}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-p}{q}}) \\ O(\varepsilon^{\frac{q-p+1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-p+1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-p+1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$$T_3(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & \dots & O(1) \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) & \dots & O(\varepsilon^{\frac{1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) & \dots & O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}) \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \dots & O(\varepsilon) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \dots & O(\varepsilon) \end{pmatrix}, T_4(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(1) & ... & O(1) \\ O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$.

Згідно структури матриці $B_0(t,\varepsilon)-w_i(t,\varepsilon)E$

$$det T_1(t,\varepsilon)\neq 0,\ det T_4(t,\varepsilon)\neq 0,\ t\in[0;T],\ \varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$$

і

$$det T_1(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{p-1}{2}}),\ det T_4(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0.$$

Оскільки

$$\min_{0\le j\le p-1}\left(\frac{q-p}{q}+j\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}>0,$$

і

$$det T(t,\varepsilon)=det T_1(t,\varepsilon) det(T_4(t,\varepsilon)-T_3(t,\varepsilon)T_1^{-1}(t,\varepsilon)T_2(t,\varepsilon))$$

то

$$det T(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{p+q-2}{2}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0,$$

[1].

Таким чином $T^{-1}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} V_1(t,\varepsilon) & V_2(t,\varepsilon) \\ V_3(t,\varepsilon) & V_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, де $V_1(t,\varepsilon)$ та $V_4(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці $p$-го та $q$-го порядку відповідно, причому

$$V_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \end{pmatrix}, V_2(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$$V_3(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{p-1}{p}}) \end{pmatrix}, V_4(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \\ . & . & . & . \\ O(1) & O(\varepsilon^{-\frac{1}{q}}) & ... & O(\varepsilon^{-\frac{q-1}{q}}) \end{pmatrix},$$

$t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$.

Оцінимо $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$ та $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $s=0,1,...$ . За побудовою

$$\|\tilde{u}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\|=O(1),\ |\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{\frac{1}{q}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0.$$

Оскільки $\|c_i^{(1)}(t,\varepsilon)\|=O(1)$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$, то

$$\|\tilde{u}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}), |\tilde{\lambda}_i^{(1)}(t,\varepsilon)|=O(1), t\in[0;T], \varepsilon\to 0.$$

Аналогічно оцінюємо $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, $s=2,3...$ При цьому

$$\|\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s+1}{2}\right]\frac{1}{p}}), |\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s-1}{2}\right]\frac{1}{p}}), t\in[0;T], \varepsilon\to 0,$$

де $[a]$ – ціла частина числа $a$.

Тоді

$$\|\varepsilon^s\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{s-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s+1}{2}\right]\frac{1}{p}}), |\varepsilon^s\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^{s-\left[\frac{s}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{s+1}{2}\right]\frac{1}{p}}), t\in[0;T], \varepsilon\to 0,\ s\in N.$$

Покажемо, що побудовані формальні розв'язки (3) системи (1) мають асимптотичний характер. Для цього позначимо через

$$x_i^{(m)}(t,\varepsilon)=u_i^{(m)}(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{t}\lambda_i^{(m)}(t,\varepsilon)dt\right), i=\overline{1,n}, \qquad (12)$$

$m$-наближення, які утворюються з (3) шляхом обривання розвинень (4) на $m$-му члені:

$$u_i^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon), \lambda_i^{(m)}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon), i=\overline{1,n}.$$

За побудовою $\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\neq 0$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$.

Нехай

$$a_i=\begin{cases}0, \operatorname{Re}\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)\le 0,\\ T, \operatorname{Re}\tilde{\lambda}_i^{(0)}(t,\varepsilon)>0, t\in[0;T], \varepsilon\in(0;\varepsilon_0].\end{cases}$$

Тоді вектор-функція (12) задовольняє систему (1) з точністю $O(\varepsilon^{\alpha(m)})$, де

$$\alpha(m)=m+1-\left[\frac{m}{2}\right]\left(1-\frac{1}{q}\right)-\left[\frac{m+1}{2}\right]\frac{1}{p}.$$

У системі (1) покладемо $x_i(t,\varepsilon)=y_i(t,\varepsilon)+x_i^{(m)}(t,\varepsilon)$, де $y_i(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція. Маємо

$$\varepsilon\frac{dy_i}{dt}=A(t,\varepsilon)y_i+O(\varepsilon^{\alpha(m)}). \qquad (13)$$

Нехай $y_i(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)z_i(t,\varepsilon)$. Тоді система (13) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dz_i}{dt}=(W(t,\varepsilon)+\varepsilon F(t,\varepsilon))z_i+O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}), \qquad (14)$$

де $F(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge 2}\varepsilon^{s-1}T^{-1}(t,\varepsilon)A_s(t)T(t,\varepsilon)-T^{-1}(t,\varepsilon)T'(t,\varepsilon)$. При цьому $\|F(t,\varepsilon)\|=O(1)$, $t\in[0;T]$, $\varepsilon\to 0$.

Доведемо існування розв'язку системи (14), що задовольняє умову

$$z_i(a_i,\varepsilon)=0. \qquad (15)$$

Не обмежуючи загальності вважаємо, що $W(t,\varepsilon)=diag\{W_1(t,\varepsilon),W_2(t,\varepsilon)\}$, де $W_1(t,\varepsilon)$ та $W_2(t,\varepsilon)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $W(t,\varepsilon)$ відповідно з недодатними та додатними дійсними частинами. Для визначеності припустимо, що $\operatorname{Re} w_i(t,\varepsilon)\le 0$, $t\in[0;T]$, $i=\overline{1,k}$, і $\operatorname{Re} w_i(t,\varepsilon)>0$, $t\in[0;T]$, $i=\overline{k+1,n}$.

Тоді із системи (14) отримаємо

$$\varepsilon\frac{dz_{i1}}{dt}=W_1(t,\varepsilon)z_{i1}+\varepsilon(F_1(t,\varepsilon)z_{i1}+F_2(t,\varepsilon)z_{i2})+O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}),$$

$$\varepsilon\frac{dz_{i2}}{dt}=W_2(t,\varepsilon)z_{i2}+\varepsilon(F_3(t,\varepsilon)z_{i1}+F_4(t,\varepsilon)z_{i2})+O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}),$$

де $F(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}F_1(t,\varepsilon) & F_2(t,\varepsilon)\\ F_3(t,\varepsilon) & F_4(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, $F_1(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця $k$-го порядку; $z_{i1}$ – вектор, що містить $k$ перших компонент вектора $z_i$, $z_{i2}$ – вектор, що містить решту компонент $z_i$.

Запишемо еквіваленті системи інтегральних рівнянь:

$$z_{i1}(t,\varepsilon)=\int_0^t Z_1(t,\tau,\varepsilon)\left(F_1(\tau,\varepsilon)z_{i1}+F_2(\tau,\varepsilon)z_{i2}+O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}})\right)d\tau, \quad (16)$$

$$z_{i2}(t,\varepsilon)=-\int_t^T Z_2(t,\tau,\varepsilon)\left(F_3(\tau,\varepsilon)z_{i1}+F_4(\tau,\varepsilon)z_{i2}+O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}})\right)d\tau, \quad (17)$$

де $Z_j(t,\tau,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t W_j(t,\varepsilon)dt\right)$, $j=1,2$, – фундаментальні матриці однорідних систем

$$\varepsilon\frac{dz_{i1}}{dt}=W_1(t,\varepsilon)z_{i1},\ Z_1(\tau,\tau,\varepsilon)=E_k,\ \text{та}\ \varepsilon\frac{dz_{i2}}{dt}=W_2(t,\varepsilon)z_{i1},\ Z_2(\tau,\tau,\varepsilon)=E_{n-k}.$$

Використовуючи метод послідовних наближень, доводимо існування та єдиність розв'язку $z=z_i(t,\varepsilon)$ системи (16), (17) [5]. При цьому має місце оцінка

$$\| z_i(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}}),\ t\in[0;T],\ \varepsilon\to 0.$$

Таким чином справедлива така теорема.

**Теорема 1.** Нехай $A_s(t)\in C^{m+1}[0;T]$, $s\ge 0$, матриця $A_0(t)$ має одне власне значення, якому відповідають два елементарні дільники кратності $p$, $q$, причому $q>p\ge 2$, $p+q=n$ і виконується умова (11). Тоді існує таке $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[0;T]$ має $n$ розв'язків $x_i=x_i(t,\varepsilon)$, для яких

$$\| x_i(t,\varepsilon)-x_i^{(m)}(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\alpha(m)-2+\frac{1}{q}}),\ \varepsilon\to 0.$$

**Зауваження 1.** Якщо $a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)\equiv 0,\ t\in[0;T],$ то враховуючи, що $\beta_n(t,\varepsilon)=\varepsilon^2 a_{p1}^{(1)}(t)a_{p+q,p+1}^{(1)}(t)+O(\varepsilon^3)$ для визначення степенів параметра $\varepsilon$, за якими будуються розвинення функцій $w_i(t,\varepsilon)$, слід накласти умову про відмінність від нуля на відрізку $[0;T]$ коефіцієнта при $\varepsilon^3$ виразу $\beta_n(t,\varepsilon)$.

**Зауваження 2.** Зазначимо, що коли матриця $A_0(t)$ має декілька попарно різних власних значень, то використовуючи теореми про асимптотичне розщеплення, замість системи (1) можна досліджувати системи, характеристичні рівняння яких мають лише один корінь відповідної кратності [9, 22].

**2. Системи з періодичними коефіцієнтами.** У даному пункті вважатимемо, що компоненти матриці $A(t,\varepsilon)$ – періодичні функції за змінною $t$ з періодом $T$.

Нехай, як і в п. 1, матриця $A_0(t)$ має одне нульове власне значення, якому відповідають два елементарні дільники кратності $p$, $q$, причому $q>p\ge 2$, $p+q=n$.

Періодичний розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=R_m(t,\varepsilon)y, \quad (18)$$

де $R_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon),$ а $y(t,\varepsilon)$ – нова невідома вектор-функція.

Підставляючи (18) до системи (1), маємо

$$\varepsilon R_m(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt}=(A(t,\varepsilon)R_m(t,\varepsilon)-\varepsilon R_m'(t,\varepsilon))y. \quad (19)$$

Матрицю $R_m(t,\varepsilon)$ знаходимо з тотожності

$$A(t,\varepsilon)R_m(t,\varepsilon)-\varepsilon R_m'(t,\varepsilon)=R_m(t,\varepsilon)(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}S_m(t,\varepsilon)), \quad (20)$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)$ – діагональна матриця вигляду $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda^{(s)}(t,\varepsilon),$ а $S_m(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця $n$-го порядку, яка також підлягає визначенню.

Зрівнюючи коефіцієнти при "однакових" степенях параметра $\varepsilon$, дістаємо

$$B_0(t,\varepsilon)\tilde{R}^{(0)}(t,\varepsilon)-\tilde{R}^{(0)}(t,\varepsilon)\tilde{\Lambda}^{(0)}(t,\varepsilon)=0, \quad (21)$$

$$B_0(t,\varepsilon)\tilde{R}^{(1)}(t,\varepsilon)-\tilde{R}^{(1)}(t,\varepsilon)\tilde{\Lambda}^{(0)}(t,\varepsilon)=\tilde{R}^{(0)}(t,\varepsilon)\tilde{\Lambda}^{(1)}(t,\varepsilon)+(\tilde{R}^{(0)}(t,\varepsilon))', \quad (22)$$

$$B_0(t,\varepsilon)\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)-\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)\tilde{\Lambda}^{(0)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s-1}\tilde{R}^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde{\Lambda}^{(s-k)}(t,\varepsilon)+(\tilde{R}^{(s-1)}(t,\varepsilon))'-\sum_{k=2}^{s}A_k(t)\tilde{R}^{(s-k)}(t,\varepsilon),\ s=\overline{2,m}, \quad (23)$$

$$R_m(t,\varepsilon)S_m(t,\varepsilon)=G(t,\varepsilon), \quad (24)$$

де

$$G(t,\varepsilon)=\sum_{s\ge 0}\varepsilon^s\sum_{k=2}^{s+2}A_k(t)\tilde{R}^{(m+1+s-k)}(t,\varepsilon)-(\tilde{R}^{(m)}(t,\varepsilon))'-\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^s\sum_{k=s+1}^{m}\tilde{R}^{(k)}(t,\varepsilon)\tilde{\Lambda}^{(m+1+s-k)}(t,\varepsilon),\ \ \tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)\equiv 0,\ t\in[0;T],\ s>m.$$

Зрівнюючи у рівностях (21) – (23) відповідні стовпці, маємо систему аналогічну (5) – (7). А тому й оцінки компонент $\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\Lambda}^{(s)}(t,\varepsilon)$, $s=\overline{0,m}$, будуть такими ж, як і оцінки $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $\tilde{\lambda}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$ в п. 1.

Якщо стовпці матриці $\tilde{R}^{(s)}(t,\varepsilon)$ позначити через $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, то

$$R_m(t,\varepsilon)=T(t,\varepsilon)(E+\varepsilon\tilde{Q}^{(1)}(t,\varepsilon)+...+\varepsilon^m\tilde{Q}^{(m)}(t,\varepsilon)),$$

де $\tilde{Q}^{(s)}(t,\varepsilon)$, $s=\overline{1,m}$, – квадратна матриця $n$-го порядку зі стовцями $q_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$.

Оскільки для $q_i^{(s)}(t,\varepsilon)$ структурно мають місце такі ж оцінки, що й для $\tilde{u}_i^{(s)}(t,\varepsilon)$, то існує таке $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що для всіх $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_1]$ $det R_m(t,\varepsilon)\ne 0$, причому $\|R_m^{-1}(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{-1+\frac{1}{q}}),\ \varepsilon\to 0$ [3]. А тому з рівності (24) знаходимо $S_m(t,\varepsilon)=R_m^{-1}(t,\varepsilon)G(t,\varepsilon).$

За побудовою

$$\|\varepsilon^{m+1}S_m(t,\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{\alpha(m)-1+\frac{1}{q}}),\ \varepsilon\to 0.$$

Таким чином, система (19) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}S_m(t,\varepsilon))y. \tag{25}$$

Як відомо ([10]), періодичний розв'язок $y=y(y,\varepsilon)$ системи (25) має задовольняти рівняння

$$y(t,\varepsilon)=\varepsilon^m\int\limits_t^{t+T}\left(\Psi_m(s,\varepsilon)\left(\Psi_m^{-1}(T,\varepsilon)-E\right)\Psi_m^{-1}(t,\varepsilon)\right)^{-1}S_m(s,\varepsilon)y(s,\varepsilon)ds, \tag{26}$$

де $\Psi_m(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)$ – фундаментальна матриця однорідної системи $\varepsilon\frac{dy}{dt}=\Lambda_m(t,\varepsilon)y,\ \Psi_m(0,\varepsilon)=E.$

Нехай $\Lambda_m(t,\varepsilon)=diag\{\lambda_{m1}(t,\varepsilon),\lambda_{m2}(t,\varepsilon),...,\lambda_{mn}(t,\varepsilon)\}$. Надалі припускаємо, що

$$\operatorname{Re}\lambda_{mi}(t,\varepsilon)\ne 0,\ t\in[0;T],\ i=\overline{1,n}. \tag{27}$$

Як і раніше, вважаємо, що $\Lambda_m(t,\varepsilon)=diag\{\Lambda_{m1}(t,\varepsilon),\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)\}$, де $\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)$ та $\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)$ – матриці, власними значеннями яких є власні значення матриці $\Lambda(t,\varepsilon)$ відповідно з від'ємними та додатними дійсними частинами.

Тоді систему (26) можна записати наступним чином

$$y_1(t,\varepsilon)=\varepsilon^m\left(E_1-\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)dt\right)\right)^{-1}\int\limits_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s-T}^t\Lambda_{m1}(t,\varepsilon)dt\right)(S_{m1}(t+s,\varepsilon)y_1(s,\varepsilon)+S_{m2}(t+s,\varepsilon)y_2(t+s,\varepsilon))ds, \tag{28}$$

$$y_2(t,\varepsilon)=\varepsilon^m\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)dt\right)-E_2\right)^{-1}\int\limits_0^T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t+s}^t\Lambda_{m2}(t,\varepsilon)dt\right)(S_{m3}(t+s,\varepsilon)y_1(s,\varepsilon)+S_{m4}(t+s,\varepsilon)y_2(t+s,\varepsilon))ds, \tag{29}$$

де $y(t,\varepsilon)=colon(y_1(t,\varepsilon),y_2(t,\varepsilon))$, $S_m(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}S_{m1}(t,\varepsilon) & S_{m2}(t,\varepsilon)\\ S_{m3}(t,\varepsilon) & S_{m4}(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, причому розмірності векторів $y_1(t,\varepsilon)$ та $y_2(t,\varepsilon)$ дорівнюють відповідно порядку матриць $\Lambda_{m1}(t)$, $S_{m1}(t,\varepsilon)$ та $\Lambda_{m2}(t)$, $S_{m4}(t,\varepsilon)$; $E_1$ та $E_2$ – одиничні матриці відповідного порядку.

Оператор, визначений за допомогою (28), (29), відображає множину $P$, $P=\{y(t,\varepsilon)\in C[0;T]:u(t+T,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)\}$, в себе і є оператором стиску. А тому система (28), (29) на множині $P$ має єдиний розв'язок [2].

Таким чином справедлива така теорема.

**Теорема 2.** Нехай $A_s(t)\in C^{m+1}[0;T]$, $s\ge 0$, матриця $A_0(t)$ має одне власне значення, якому відповідають два елементарні дільники кратності $p$, $q$, причому $q>p\ge 2$, $p+q=n$ і виконуються умови (11), (27). Тоді існує таке $\varepsilon_1$, $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$, що система (1) на відрізку $[0;T]$ для всіх $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ має єдиний $T$-періодичний розв'язок (18).

**Результати та їх обговорення.** Результати статті обговорювались на Міжнародній конференції "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", присвяченій 110-річчю з дня народження І.Г. Петровського (30 травня – 4 червня 2011 р., м. Москва) та на Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", присвяченій 80-річчю з дня народження М.І. Шкіля (13, 14 грудня 2012 р., м. Київ).

**Висновки.** У статті побудовано формальну фундаментальну матрицю лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь. При цьому, використовуючи метод збуреного характеристичного рівняння, випадок кратних коренів характеристичного рівняння зведено до випадку простих коренів. Наведений спосіб побудови асимптотичних розв'язків узагальнено для аналогічних систем з періодичними коефіцієнтами.

**Список використаних джерел**

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1988.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., 1977.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., 1976. 4. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К., 2000.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1953.
6. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Пг., 1917.
7. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1955. – Том 7, № 2. – С. 167 – 179.
8. Фещенко С.Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1955. – Том 7, № 4. – С. 252 – 243.
9. Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К., 1966.
10. Хейл Дж. Колебания в нелинейных системах. – М., 1966.
11. Шкиль Н.И. Асимптотическое поведение решений линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения // Укр. матем. журн. – 1962. – Том 16, № 4. – С. 383 – 392.
12. Шкиль Н.И. Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Изв. вузов. Математика. – 1966. – № 1. – С. 163 – 169.
13. Шкиль Н.И. О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами: дис. ... докт. физ.-мат. наук. – К., 1968.
14. Шкиль Н.И. О периодических решениях систем дифференциальных уравнений второго порядка // Arch. Math. (Brno). – 1987. – 23, № 1. – P. 53 – 62.
15. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – К., 1989.
16. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – Vol. 9. – P. 219 – 231.
17. Hukuhara M. Sur les proprietes asymptotiques des solutions d'un systeme d'equations differentielles lineaires contenant un parametre // Mem Fac. Engin. Kyusyu UniVol. – 1937. – Vol. 8. – P. 249 – 280.
18. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, I // Funkcialaj Ekvacioj. – 1963. – Vol. 5. – P. 71 – 134.
19. Iwano M. Asymptotic solutions of a system of linear ordinary differential equations containing a small parameter, II // Funkcialaj Ekvacioj. – 1964. – Vol. 6. – P. 89 – 141.
20. Iwano M., Sibuya Y. Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter // Kodai Math. Semi. Rep. – 1963. – Vol. 15. – P. 1 – 28.
21. Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losunger linearer Differential systeme als Functionen eines Parameteres // Math. Anal. – 1907. – Vol. 63. – S. 277 – 300.
22. Sibuya Y. Sur reduction analitique d'un systeme d'equation differentielles ordinair lineaires contenant un parameter // Journ. Fac. Sci. UniVol. Tokyo. – 1958. – Vol. 7, № 5. – P. 527 – 540.

**Надійшла до редколегії 11.12.13**

**П. Самусенко, канд. фіз.-мат. наук, доц., М. Шкіль, д-р фіз.-мат. наук, проф.**
**НПУ имени М.П. Драгоманова, Киев**

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***С помощью метода возмущенного характеристического уравнения построены асимптотические решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения. Полученные результаты обобщены для аналогичных систем с периодическими коэффициентами.***

**P. Samusenko, PhD, M. Shkil, Full Doctor**
**National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv**

## ASYMPTOTICAL INTEGRATION OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

***Using the perturbed characteristic equation method, the asymptotic solutions of the linear singularly perturbed system of differential equations in the case of multiples roots of the characteristic equation is constructed. The results generalized for similar systems with periodic coefficients.***

**УДК 517.9**

**Т. Тищук, асп.,**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**

# КЛАСИФІКАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ НЕПЕРЕРВНИХ УНІМОДАЛЬНИХ ОПУКЛИХ ВГОРУ ВІДОБРАЖЕНЬ ВІДРІЗКА В СЕБЕ

***Розглядається задача про класифікацію циклів неперервних унімодальних опуклих вгору відображень відрізка в себе за взаємним розміщенням точок циклу. Запропоновано поняття опуклої вгору (опуклої вниз) циклічної перестановки, підозрілого на типовий вектора, типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки. Сформульовано означення ваги опуклої вгору циклічної перестановки, за допомогою якого визначається відношення лінійного порядку на просторі опуклих вгору циклічних перестановок. Дано леми про структуру типового вектора, єдиність типу циклу та відношення лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок.***

**ВСТУП.** Теорія одновимірних динамічних систем посідає особливе місце в загальній теорії динамічних систем у зв'язку з тим, що такі системи допускають достатньо повний опис і при цьому демонструють складні нелінійні ефекти. Прикладом такої динамічної системи є динамічна система, що визначається за допомогою ітерацій неперервного відображення відрізка в себе. Навіть у випадку, коли розглядуване неперервне відображення є унімодальним, тобто в деякому сенсі найпростішим нелінійним відображенням відрізка в себе, відповідна динамічна система, яку воно породжує, демонструє складну поведінку та співіснування періодичних траєкторій довільного періоду [4].

В теорії одновимірних динамічних систем отримано цілу низку глибоких результатів, які знайшли своє застосування, зокрема, у теорії різницевих та диференціально-різницевих рівнянь і теорії крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними [5].

Однією з основних задач теорії динамічних систем є визначення типів траєкторій динамічної системи та встановлення взаємозв'язків між різними типами траєкторій [2,4]. Для періодичних траєкторій дискретних динамічних систем фундаментальним результатом дослідження такої задачі є теорема Шарковського про співіснування періодичних траєкторій різних періодів для неперервних відображень відрізка в себе [3]. За допомогою цієї теореми можна отримати відомості про те, цикли яких періодів є у розглядуваного відображення. Проте цей важливий результат не дає змоги отримати інформацію про взаєморозташування циклів (чи принаймні, їх мінімальних точок), які співіснують відповідно до теореми Шарковського.

У даній статті досліджується задача про упорядкування циклів неперервного відображення відрізка в себе не за періодами (як у теоремі Шарковського), а за взаємним розташуванням точок циклів.

Така класифікація дає змогу, зокрема, розрізняти між собою цикли одного періоду, чого не можна досягнути, використовуючи класифікацію за періодами. Для розв'язання поставленої задачі використовується теорія перестановок. Клас відображень, що досліджується, звужено з неперервних відображень відрізка в себе до унімодальних опуклих вгору неперервних відображень, оскільки динаміка таких відображень є досить складною та відображає практично всі можливі сценарії в теорії одновимірних динамічних систем.

**ПОНЯТТЯ ТИПОВОГО ВЕКТОРА ТА ЙОГО ВАГИ.** Нехай $I=[0;1]$, $f\in C^0\left(I;I\right)$ – довільна неперервна функція, $B=\left\{\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n\right\}$ – періодична траєкторія періоду $n$ (цикл періоду $n$) відображення $f:I\to I$, де $\beta_1=\min\limits_{1\le i\le n}\beta_i$, $f\left(\beta_i\right)=\beta_{i+1}$ для всіх $i=\overline{1,n-1}$ та $f\left(\beta_n\right)=\beta_1$.

Якщо занумерувати елементи множини $B$ так, щоб виконувались нерівності $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$, та вважати, що $f\left(\beta_i\right)=\beta_{j_i}$, де $j_i, i=\overline{1,n}$, то циклу $B$ можна поставити у відповідність циклічну перестановку [1] наступного вигляду

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Для циклічної перестановки (1) її циклічним зображенням є рядок вигляду:

$$\left(1,\ \pi(1),\ \ldots,\ \pi^{n-1}(1)\right). \tag{2}$$

Отже, довільному циклу періоду $n$ неперервного відображення відрізка в себе можна поставити у відповідність єдину циклічну перестановку $\pi$ порядку $n$, циклічним зображенням якої є рядок вигляду (2).

Наприклад, для періодичної траєкторії $A=\left\{\frac{10}{33},\frac{14}{33},\frac{20}{33},\frac{26}{33},\frac{28}{33}\right\}$ періоду 5 кусково-лінійного відображення

$$g\left(x\right)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le\frac{1}{2},\\ -2\left(x-1\right), & \frac{1}{2}<x\le 1,\end{cases} \tag{3}$$

відповідна циклічна перестановка має вигляд

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Розглянемо спеціальний клас циклічних перестановок порядку $n$ вигляду (1), для кожної з яких існує єдине число $i^{\Diamond}\in\left\{2,\ \ldots,\ n-1\right\}$, для якого $\pi\left(i^{\Diamond}\right)=n$ та $j_i<j_{i+1}$ при $1\le i<i^{\Diamond}$ і $j_i>j_{i+1}$ при $i^{\Diamond}\le i<n$. Називатимемо такі циклічні перестановки опуклими вгору циклічними перстановками. Аналогічно, циклічну перестановку порядку $n$ вигляду (1), для якої існує єдине число $i^{\Diamond}\in\left\{2,\ \ldots,\ n-1\right\}$, для якого $\pi\left(i^{\Diamond}\right)=1$ та $j_i>j_{i+1}$ при $1\le i<i^{\Diamond}$ і $j_i<j_{i+1}$ при $i^{\Diamond}\le i<n$, називатимемо опуклою вниз циклічною перестановкою.

Згадана вище циклічна перестановка (4) є опуклою вгору циклічною перестановкою, для якої $i^{\Diamond}=2$.

Надалі розглядатимемо періодичні траєкторії опуклих вгору унімодальних відображень та відповідні їм опуклі вгору циклічні перестановки. Для циклічного зображення (2) опуклої вгору циклічної перестановки $\pi$ порядку $n$ введемо позначення $k_i=\pi^{i-1}\left(1\right)$, $i=\overline{1,n}$. Оскільки $\pi$ – опукла вгору циклічна перестановка, то $k_1=1$ і $k_n=n$. Отже, циклічне зображення (2) перестановки $\pi$ можна записати наступним чином

$$\left(k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n\right). \tag{5}$$

Для опуклої вгору циклічної перестановки (4) циклу $A$ відображення (3) її циклічним зображенням є рядок вигляду

$$\left(1\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ \ 5\right). \tag{6}$$

Розіб'ємо циклічне зображення (5) на блоки двома способами. Спочатку застосуємо наступну схему розбиття: кожне з чисел рядка послідовно порівнюємо з числом $k_{n-1}$ та відносимо у блоки з непарними номерами ті числа, що менші за $k_{n-1}$, а у блоки з парними номерами ті числа, що не менші за $k_{n-1}$. В результаті отримаємо рядок вигляду

$$\left(k_1,\ \ldots,\ k_{m_1}\,|\,k_{m_1+1},\ \ldots,\ k_{m_1+l_1}\,|\ldots|\,k_{m_1+l_1+\ldots+m_s+1},\ \ldots,\ k_n\right), \tag{7}$$

де символ $|$ розділяє сусідні блоки.

Тепер змінимо умову потрапляння в парні та непарні блоки наступним чином: у блоки з непарними номерами віднесемо ті числа, що не більші за $k_{n-1}$, а у блоки з парними номерами ті числа, що більші за $k_{n-1}$. Аналогічно попередньому випадку, отримаємо рядок вигляду

$$\left(k_1, \ldots, k_{m_1'} \mid k_{m_1'+1}, \ldots, k_{m_1'+l_1'} \mid \ldots \mid k_{m_1'+l_1'+\ldots+m_s'+1}, \ldots, k_n\right). \quad (8)$$

За побудовою кількість блоків у рядках (7) та (8) є парною, адже $k_n = n > k_{n-1}$, тобто кожен з рядків закінчується блоком з парним номером $2s$ та $2s'$ відповідно і виконуються наступні рівності

$$\sum_{i=1}^{s}\left(m_i + l_i\right) = n, \qquad \sum_{i=1}^{s'}\left(m_i' + l_i'\right) = n.$$

У випадку циклічного зображення (6) опуклої вгору циклічної перестановки (4) рядки (7) і (8) можна відповідно записати наступним чином

$$\left(1 \mid 3,\ 4,\ 2,\ 5\right), \quad (9)$$

$$\left(1 \mid 3,\ 4 \mid 2 \mid 5\right), \quad (10)$$

де рядок (9) складається з двох блоків, а рядок (10) складається з чотирьох блоків.

Числа $m_1, m_2, \ldots, m_s$ рядка (7) (відповідно числа $m_1', m_2', \ldots, m_s'$ рядка (8)) рівні кількості послідовних точок циклу, що знаходяться на лівій гілці, а числа $l_1, l_2, \ldots, l_s$ рядка (7) (числа $l_1', l_2', \ldots, l_s'$ рядка (8)) – на правій гілці розглядуваного опуклого вгору унімодального відображення.

З чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, $l_1, l_2, \ldots, l_s$ утворимо вектори вигляду

$$\left(m_1,\ l_1,\ m_2,\ l_2,\ \ldots,\ m_s,\ l_s\right), \quad (11)$$

$$\left(m_1',\ l_1',\ m_2',\ l_2',\ \ldots,\ m_s',\ l_s'\right), \quad (12)$$

де вектор (11) відповідає рядку (7), а вектор (12) – рядку (8).

Векторами вигляду (11) і (12) для рядків (9) і (10) є наступні вектори

$$\left(1,\ 4\right), \quad (13)$$

$$\left(1,\ 2,\ 1,\ 1\right), \quad (14)$$

**Означення 1.** Вектори (11), (12), які побудовано з коефіцієнтів рядків (7), (8) відповідно, називаються векторами, що підозрілі на типові для опуклої вгору циклічної перестановки $\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$.

**Означення 2.** Вектор, що підозрілий на типовий, який не складається лише з повторюваних блоків, що його утворюють, називається типовим вектором опуклої вгору циклічної перестановки $\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right)$.

Кожному підозрілому на типовий вектору вигляду $\left(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s\right)$ поставимо у відповідність число $\sigma$, що визначається з рівності

$$\frac{3}{2}\sigma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{s}\left(\left(-2\right)^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} l_j} 2^{\sum\limits_{j=i+1}^{s} m_j}\left(1-\left(-2\right)^{l_i}\right)\right)}{1-\left(-2\right)^{\sum\limits_{i=1}^{s} l_i} 2^{\sum\limits_{i=1}^{s} m_i}}, \quad (15)$$

яке називатимемо вагою цього підозрілого на типовий вектора.

Вага типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки визначається аналогічно, за допомогою формули (15).

Для опуклої вгору циклічної перестановки (4) підозрілими на типові вектори є вектори (13) і (14), причому кожен з них є її типовим вектором. З формули (15) вагою типового вектора (13) є число $\frac{10}{33}$, а типового вектора (14) – число $\frac{10}{31}$.

Має місце наступна лема.

**Лема 1.** Нехай $\left(m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s\right)$ – підозрілий на типовий вектор для опуклої вгору циклічної перестановки порядку $n$, а $\left(\underbrace{m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s}_{1}, \ldots, \underbrace{m_1, l_1, m_2, l_2, \ldots, m_s, l_s}_{p}\right)$ – підозрілий на типовий вектор для опуклої вгору циклічної перестановки порядку $pn$. Тоді ваги цих векторів рівні.

Доведення леми 1 виконується за допомогою тотожних перетворень формули (15).

**ПОНЯТТЯ ВАГИ ОПУКЛОЇ ВГОРУ ЦИКЛІЧНОЇ ПЕРЕСТАНОВКИ.** Визначивши вагу підозрілого на типовий та типового вектора опуклої вгору циклічної перестановки $\pi$, визначимо вагу цієї перестановки.

**Означення 3.** Вагою опуклої вгору циклічної перестановки $\pi$, яка має один типовий вектор, називатимемо вагу цього типового вектора. Вагою опуклої вгору циклічної перестановки $\pi$, яка має два типових вектори, називатимемо більшу із ваг цих типових векторів.

Вагу опуклої вгору циклічної перестановки $\pi$ позначатимемо $\sigma_\pi$.

Враховуючи, що кожна опукла вгору циклічна перестановка має принаймні один типовий вектор, поняття ваги опуклої вгору циклічної перестановки визначено коректно.

Наприклад, вагою опуклої вгору циклічної перестановки (4) є число $\frac{10}{31}$.

Оскільки компоненти типового вектора (або з одного із типових векторів, якщо таких векторів два) рівні кількості послідовних ітерацій на одній з гілок розглядуваного опуклого вгору унімодального відображення, то заданому циклу єдиним чином можна поставити у відповідність типовий вектор (відповідної опуклої вгору циклічної перестановки) – вектор вигляду (11) або ж вигляду (12).

Рядок вигляду (7) називатимемо типом циклу унімодального опуклого вгору відображення, якщо даному циклу ставиться у відповідність типовий вектор (11). Аналогічно, рядок вигляду (8) називатимемо типом циклу унімодального опуклого вгору відображення, якщо даному циклу ставиться у відповідність типовий вектор (12). Зауважимо, що тип циклу визначається однозначно.

Таким чином, маємо таке підсумкове твердження.

**Лема 2.** Кожен цикл неперервного унімодального опуклого вгору відображення має єдиний тип.

Типом циклу $A$ унімодального опуклого вгору відображення (3) є рядок (10).

**ЛІНІЙНИЙ ПОРЯДОК НА МНОЖИНІ ОПУКЛИХ ВГОРУ ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВОК.** На множині опуклих вгору циклічних перестановок введемо відношення лінійного порядку $\triangleleft$ наступним чином. Будемо говорити, що дві довільні опуклі вгору циклічні перестановки $\pi'$ і $\pi''$ знаходяться у відношенні $\triangleleft$, тобто $\pi' \triangleleft \pi''$, якщо $\sigma(\pi') \le \sigma(\pi'')$.

**Лема 3.** Відношення $\triangleleft$ є відношенням лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок.

**Доведення.** Перевіримо виконання умов повноти, транзитивності та антисиметричності для відношення $\triangleleft$. Умова повноти означає, що для будь-яких $\pi'$ і $\pi''$ опуклих вгору циклічних перестановок виконується одне зі співвідношень $\pi' \triangleleft \pi''$ або $\pi'' \triangleleft \pi'$. Умова тразитивності означає, що зі співвідношень $\pi' \triangleleft \pi''$ і $\pi'' \triangleleft \pi'''$, де $\pi'$, $\pi''$, $\pi'''$ – довільні опуклі вгору циклічні перестановки, випливає співвідношення $\pi' \triangleleft \pi'''$. Умова антисиметричності означає, що якщо для будь-яких опуклих вгору циклічних перестановок $\pi'$ і $\pi''$ мають місце співвідношення $\pi' \triangleleft \pi''$ і $\pi'' \triangleleft \pi'$, то $\pi' = \pi''$. Виконання всіх вище згаданих умов випливає з означення ваги опуклої вгору циклічної перестановки.

**ВИСНОВКИ.** У статті введено означення опуклої вгору (опуклої вниз) циклічної перестановки, вектора, що підозрілий на типовий, типового вектора та ваги опуклої вгору циклічної перестановки, які використовуються для визначення типу циклу унімодального опуклого вгору відображення. Отримано леми про структуру типового вектора, єдиність типу циклу для унімодального опуклого вгору відображення та відношення лінійного порядку на множині опуклих вгору циклічних перестановок, що індуковане вагою опуклої вгору циклічної перестановки.

**Список використаних джерел**

1. Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
2. Федоренко В.В. Канонические периодические траекториии одномерных динамических систем // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Институт математики АН УССР, 1983. – С. 106 – 109.
3. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн., 1964, 16. – №1. – С. 61 – 71.
4. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.
5. Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наукова думка, 1986. – 278 с.

**Надійшла до редколегії 10.12.13**

**Т. Тищук, асп.**
**КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**

## КЛАССИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ВВЕРХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТРЕЗКА В СЕБЯ

***Рассматривается задача о классификации циклов непрерывных унимодальных выпуклых вверх отображений отрезка в себя по взаимному расположению точек цикла. Предложено понятие выпуклой вверх ( выпуклой вниз) циклической перестановки, подозрительного на типичный вектора, типичного вектора выпуклой вверх циклической перестановки и веса выпуклой вверх циклической перестановки.***

**T. Tyshchuk, PhD graduate**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv**

## CLASSIFICATION OF PERIODIC TRAJECTORIES OF CONTINUOUS CONVEX UPWARD UNIMODAL MAPPINGS OF THE INTERVAL

***The problem of classification of cycles of continuous convex upward unimodal mappings of the interval is studied. The concept of a convex upward (convex downward) cyclic permutation, vector suspicious for typical and typical vector of convex upward cyclic permutation are posed. Definition of weight of convex upward cyclic permutation is proposed.***

УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Мосеєнков, канд. фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

# ФОРМУЛА КОШІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ІНТЕГРАЛОМ СКОРОХОДА

***Отримано формулу Коші для зображення розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода та дано її застосування.***

## 1. Вступ

В [2,3,4,5,8] одним з авторів цієї роботи вивчались властивості розв'язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу. Так, в [3] наведено умови існування стохастично обмежених розв'язків, в [5] показано, що за умови періодичності коефіцієнтів, стохастично обмежений розв'язок може бути також періодичним, тобто мати періодичні скінченновимірні розподіли. Основний інструмент цих досліджень становить формула Коші зображення розв'язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді. Для стохастичних диференціальних рівнянь зі стохастичним інтегралом Іто формулу Коші отримано в [1] та [6]. Оскільки стохастичний інтеграл Скорохода дозволяє розглядати підінтегральні вирази з випередженням відносно фільтрації породженої Вінерівським процесом, то зображення розв'язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді для рівнянь з інтегралом Скорохода дає можливість вивчати властивості більш широкого класу рівнянь. Частковий випадок формули Коші для інтегралу Скорохода у випадку відсутності неоднорідності у стохастичному інтегралі записано в [7]. У даній статті отримано формулу Коші у загальному випадку та дано приклад її застосування у випадку початкової умови та неоднорідностей з випередженням. Приклад свідчить, що за умови стійкості з ймовірністю 1 однорідного рівняння розв'язок неоднорідного може бути стохастично обмеженим.

## 2. Позначення, припущення, постановка задачі та допоміжні твердження

Нехай $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ – канонічний імовірнісний простір одновимірного броунівського руху, тобто $\Omega = C_0([0,1])$ – простір неперервних функції що визначені на відрізку $[0,1]$, для яких $x(0) = 0$, $\mathrm{F}$ – борелевська σ-алгебра, $\mathrm{P}$ – вінерівська міра, $\|\xi\|^2 = \mathsf{E}\,\xi^2$. Позначимо через $S$ множину гладких випадкових величин на просторі $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ (див. [7]). Через $\int_0^1 f_s(\omega)\,\delta w_s$ позначимо визначений стохастичний інтеграл Скорохода (див. [7]), $Dom\delta$ – область визначення інтегралу Скорохода.

Нехай $L_s^2([0,1]^m)$ – підпростір в $L^2([0,1]^m)$, що складається з симетричних функцій, $\|g_m\|_2 = \|g_m\|_{L^2([0,1]^m)}$. Для $g_m \in L_s^2([0,1]^m)$ визначено кратний стохастичний інтеграл $I_m(g_m) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_m(s_1,\ldots,s_m)\,dw_{s_1}\ldots dw_{s_m}$ (див. [7]). Для $f_n \in L_s^2([0,1]^n)$ і $g_m \in L_s^2([0,1]^m)$ через $f_n \widetilde{\otimes} g_m$ позначено симетризацію тензорного добутку $f_n \otimes g_m$. Якщо $\sigma \in L^2([0,1])$ то на $\Omega$ існують сімейства перетворень $T^t, A^t : \Omega \to \Omega$, $t \in [0,1]$, які визначено так:

$$T^t(\omega)_s = \omega_s + \int_0^{t\wedge s} \sigma_u\,du,\quad A^t(\omega)_s = \omega_s - \int_0^{t\wedge s} \sigma_u\,du,\quad s,t \in [0,1].$$

Зазначимо, що $T^t A^t = A^t T^t = I$, $I(\omega) = \omega$. Позначимо $\breve{\varepsilon}(f) = \exp\left\{\int_0^\infty f_u\,dw_u - \frac{1}{2}\int_0^\infty (f_u)^2\,du\right\}$ для $f \in L^2([0,\infty))$,

$\breve{\varepsilon}_s^t = \breve{\varepsilon}(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]}) = \exp\left\{\int_s^t f_u\,dw_u - \frac{1}{2}\int_s^t (f_u)^2\,du\right\}$. Нехай $b \in L^1([0,1])$. Тоді $\hat{\varepsilon}_s^t = \exp\left\{\int_s^t b_u\,du\right\}$, $h_s^t = \hat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}_s^t$, $h_s^t = h_0^t (h_0^s)^{-1}$,

$s,t \in [0,1]$. Справедливе зображення $\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} I_m(f_m^{s,t})$, де $f_m^{s,t} = (\sigma \mathrm{I}_{[s,t]})^{\otimes m}$, $(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]})(u) = \sigma_u \mathrm{I}_{[s,t]}(u)$, $f_0^{s,t} = 1$.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$x_t = x_0(\omega) + \int_0^t \left[b_s x_s + \varphi_s(\omega)\right] ds + \int_0^t \left[\sigma_s x_s + \psi_s(\omega)\right] \delta w_s. \qquad (1)$$

Будемо припускати, що випадкові величини, які входять в праву частину (1), зображуються рядами Вінера – Іто, тобто $x_0(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n(r_n)$; $\varphi_t(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n((\varphi_t)_n)$; $\psi_t(\omega) = \sum_{n=0}^\infty I_n((\psi_t)_n)$.

**Означення.** Процес $x_t$, $0 \le t \le 1$, називається розв'язком рівняння (1), якщо $1_{[0,t]}(\bullet)\sigma_\bullet x_\bullet \in Dom\delta$ для кожного $t \in [0,1]$ і якщо співвідношення (1) виконується з ймовірністю 1 для кожного $t \in [0,1]$.

**Лема.** Справедлива рівність

$$I_l(g_l; A^t T^s)\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} I_{l+m}(g_l \,\widetilde{\otimes}\, f_m^{s,t}).$$

***Доведення.*** Враховуючи формулу добутку кратних стохастичних інтегралів, комбінаторні співвідношення і те, що $I_l(g_l;A^tT^s)=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k I_{l-k}((g_l,f_k^{s,t}))$, $(g_l,f_k^{s,t})=\int_0^1\cdots\int_0^1 g_l(s_1,\dots,s_{l-k},s_{l-k-1},\dots,s_l)f_k^{s,t}(s_{l-k+1},\dots,s_l)\,ds_{l-k+1}\dots ds_l$ , маємо

$$I_l(g_l;A^tT^s)\breve{\varepsilon}_s^t=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{l-k}((g_l,f_k^{s,t}))I_m(f_m^{s,t})=\sum_{k=0}^{l}(-1)^kC_l^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{(l-k)\wedge m}r!C_{l-k}^rC_m^rI_{(l-k)+m-2r}((g_l,f_{k+r}^{s,t})\widetilde{\otimes} f_{m-r}^{s,t})=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\sum_{r=0}^{l-k}(-1)^k\frac{r!}{(r+m)!}C_l^kC_{l-k}^rC_{r+m}^rI_{l-(k+r)+m}((g_l,f_{k+r}^{s,t})\widetilde{\otimes} f_m^{s,t})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{l+m}(g_l\widetilde{\otimes} f_m^{s,t})$$, оскільки для $v=k+r$ , $0\le v\le l$ ,

$$\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v-r}\frac{r!}{(r+m)!}C_l^{v-r}C_{l-(v-r)}^rC_{r+m}^r=\frac{l!}{m!v!(l-v)!}\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v-r}C_v^{v-r}=\begin{cases}0, v=\overline{1,l};\\ \dfrac{1}{m!}, v=0.\end{cases}$$

**Наслідок.** $\breve{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}(f;A^tT^s)=\breve{\varepsilon}(f^{s,t}+f)$ .

Позначимо через $\pi_n$ множину всіх перестановок з $n$ елементів, а через $\lambda_n$ – множину всіх розбиттів множини з $n$ елементів на $k$ та $(n-k)$ елементів. Тоді маємо:

$$\breve{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}(f;A^tT^s)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_m(f_m^{s,t})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n(f^{\otimes n};A^tT^s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n(f^{\otimes n};A^tT^s)\breve{\varepsilon}_s^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{n+m}(f^{\otimes n}\widetilde{\otimes} f_m^{s,t})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}f^{\otimes k}\widetilde{\otimes} f_{n-k}^{s,t})=\sum_{n=0}^{\infty}I_n(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi_n}f(\bullet_{\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot f(\bullet_{\sigma(k)})f^{s,t}(\bullet_{\sigma(k+1)})\cdot\ldots\cdot f^{s,t}(\bullet_{\sigma(n)}))=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n(\sum_{k=0}^{n}\sum_{\sigma\in\lambda_n}f(\bullet_{\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot f(\bullet_{\sigma(k)})f^{s,t}(\bullet_{\sigma(k+1)})\cdot\ldots\cdot f^{s,t}(\bullet_{\sigma(n)}))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}I_n((f^{s,t}+f)^{\otimes n})=\breve{\varepsilon}(f^{s,t}+f).$$

**3. Основний результат**

**Теорема**. Нехай виконуються умови

A) $\sum_{n=0}^{\infty}n!2^{2n}\|r_n\|_2^2<\infty$ ; $\sup\limits_{0\le t\le 1}\sum_{n=0}^{\infty}n!2^{2n}\|(\varphi_s)_n\|_2^2<\infty$ ; $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!2^{2(n+1)}\|\widetilde{\psi}_n\|_2^2<\infty$ ;

B) $\sup\limits_{0\le t\le 1}(|b_t|+|\sigma_t^2|)\le L<\infty$ .

Тоді розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$x_t=h_0^tx_0(A^t)+\int_0^t h_s^t\varphi_s(A^tT^s)\,ds+\int_0^t h_s^t\psi_s(A^tT^s)\,\delta w_s\ . \tag{2}$$

***Доведення.*** Перевіримо спочатку існування правої частини в (2) для кожного $t\in[0,1]$ . Покажемо, що $\|x_t\|^2<\infty$ . Для $h_0^tx_0(A^t)$ маємо оцінку

$$\left\|h_0^tx_0(A^t)\right\|^2=\left\|\hat{\varepsilon}_0^t\breve{\varepsilon}_s^t\sum_{n=0}^{\infty}I_n(r_n;A^t)\right\|^2=K\left\|\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}I_{l+m}(r_l\widetilde{\otimes} f_m^{0,t})\right\|^2=K\left\|\sum_{l=0}^{\infty}I_l(\sum_{k=0}^{l}(r_{l-k}\widetilde{\otimes}\frac{1}{k!}f_k^{0,t}))\right\|^2=$$

$$=K\sum_{l=0}^{\infty}l!\left\|\sum_{k=0}^{l}(r_{l-k}\widetilde{\otimes}\frac{1}{k!}f_k^{0,t})\right\|_2^2\le K\sum_{l=0}^{\infty}l!(l+1)\sum_{k=0}^{l}\left\|r_{l-k}\widetilde{\otimes}\frac{1}{k!}f_k^{0,t}\right\|_2^2\le K\sum_{l=0}^{\infty}l!(l+1)\sum_{k=0}^{l}\frac{L^k}{(k!)^2}\|r_{l-k}\|_2^2\le$$

$$\le K\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}2^k(k+1)k!\frac{L^k}{(k!)^2}2^{l-k}(l-k+1)(l-k)!\|r_{l-k}\|_2^2\le K\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n}\frac{L^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}m!2^{2m}\|r_m\|_2^2\le Ke^{4L}\sum_{m=0}^{\infty}m!2^{2m}\|r_m\|_2^2<\infty\ ,$$

де $K=e^{2L}$ . Аналогічно попередньому для $\int_0^t h_s^t\varphi_s(A^tT^s)\,ds$ отримаємо при $K=e^{2L}$ таку нерівність

$$\left\|h_s^t\varphi_s(A^tT^s)\right\|^2=\left\|\hat{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}_s^t\sum_{n=0}^{\infty}I_n((\varphi_s)_n;A^tT^s)\right\|^2\le K\left\|\sum_{l=0}^{\infty}I_l(\sum_{k=0}^{l}((\varphi_s)_{l-k}\widetilde{\otimes}\frac{1}{k!}f_k^{s,t}))\right\|^2=K\sum_{l=0}^{\infty}l!\left\|\sum_{k=0}^{l}((\varphi_s)_{l-k}\widetilde{\otimes}\frac{1}{k!}f_k^{s,t}))\right\|_2^2\le$$

$$\le K\sum_{l=0}^{\infty}l!(l+1)\sum_{k=0}^{l}\frac{L^k}{(k!)^2}\|(\varphi_s)_{l-k}\|_2^2\le K\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n}\frac{L^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}m!2^{2m}\|(\varphi_s)_m\|_2^2\le Ke^{4L}\sum_{m=0}^{\infty}m!2^{2m}\|(\varphi_s)_m\|_2^2<\infty\ .$$

Для $\int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s)\,\delta w_s$ , враховуючи умови існування інтегралу Скорохода з [7], для $K = e^{2L}$ виконується оцінка

$$\left\|\int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s)\,\delta w_s\right\|^2 = \left\|\int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t \sum_{l=0}^{\infty} I_l\Big(\sum_{k=0}^{l}((\psi_s)_{l-k}\,\widetilde{\otimes}\,\frac{1}{k!}f_k^{s,t})\Big)\,\delta w_s\right\|^2 = K\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)!\left\|\sum_{k=0}^{l}((\psi)_{l-k}\,\widetilde{\widetilde{\otimes}}\,\frac{1}{k!}f_k^t)\right\|_2^2 \le$$

$$\le K\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)!\left\|\sum_{k=0}^{l}((\psi)_{l-k}\,\widetilde{\widetilde{\otimes}}\,\frac{1}{k!}f_k^t)\right\|_2^2 \le Ke^{4(L+1)}\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)!\,2^{2(l+1)}\left\|\widetilde{\psi}_l\right\|_2^2 < \infty\ .$$

Покажемо тепер, що вираз у правій частині (2) задовольняє (1). Покладемо $y_t = h_0^t x_0(A^t) + \int_0^t h_s^t \varphi_s(A^t T^s)\,ds$ . В монографії [7] доведено, що $y_t$ становить єдиний розв'язок рівняння

$$y_t = x_0(\omega) + \int_0^t \big[b_s y_s + \varphi_s(\omega)\big]ds + \int_0^t \sigma_s y_s\,\delta w_s\ . \tag{3}$$

Враховуючи лінійну структуру рівняння (1), для доведення теореми залишається показати, що величина $z_t = x_t - y_t = \int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s)\,\delta w_s$ є розв'язком рівняння

$$z_t = \int_0^t b_s z_s\,ds + \int_0^t \big[\sigma_s z_s + \psi_s(\omega)\big]\delta w_s \tag{4}$$

Дійсно, враховуючи, що згідно теореми Гірсанова Е$\left[G(A^t)\breve{\varepsilon}_0^t\right]$=Е$\left[G\right]$ для $G \in L^1(\Omega)$ , рівність $\frac{d}{ds}G(T^t) = \sigma_s\big[D_s G\big](T^t)$ для $G \in S$ і означення інтегралу Скорохода, для $G \in S$ маємо

$$\mathrm{E}\int_0^t \sigma_s z_s\big[D_s G\big]ds = \mathrm{E}\int_0^t \sigma_s \int_0^s h_u^s \psi_u(A^s T^u)\,\delta w_u\big[D_s G\big]ds = \mathrm{E}\int_0^t \sigma_s \int_0^s h_u^s \psi_u(A^s T^u)\Big[D_{us}^2 G\Big]du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \sigma_s \int_0^s \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^s)\psi_u(T^u)\Big[D_{us}^2 G\Big](T^s)\,du\,ds = \mathrm{E}\int_0^t\int_0^s \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^s)\psi_u(T^u)\frac{d}{ds}\big[D_u G\big](T^s)\,du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t\int_u^t \widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^s)\psi_u(T^u)\frac{d}{ds}\big[D_u G\big](T^s)\,ds\,du =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \Big\{\widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^u)\psi_u(T^u)\,\big[D_u G\big](T^s)\Big\}\Big|_u^t du - \mathrm{E}\int_0^t\int_u^t (\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^u)\psi_u(T^u)\,\big[D_u G\big](T^s)\frac{d}{ds}\widehat{\varepsilon}_u^s\,ds\,du =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t \widehat{\varepsilon}_u^t\breve{\varepsilon}_0^t(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}\psi_u(A^t T^u)\,\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t \breve{\varepsilon}_0^u(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}\psi_u\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t\int_0^s b_s\widehat{\varepsilon}_u^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}(T^u)\psi_u(T^u)\,\big[D_u G\big](T^s)\,du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\int_0^t h_u^t\psi_u(A^t T^u)\,\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t \psi_u\big[D_u G\big]du - \mathrm{E}\int_0^t b_s\int_0^s \widehat{\varepsilon}_u^s\breve{\varepsilon}_0^s(\breve{\varepsilon}_0^u)^{-1}\psi_u(A^s T^u)\,\big[D_u G\big]du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t h_u^t\psi_u(A^t T^u)\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t \psi_u\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\int_0^t b_s\int_0^s h_u^s\psi_u(A^s T^u)\,\big[D_u G\big]du\,ds =$$

$$= \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t h_u^t\psi_u(A^t T^u)\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t \psi_u\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\int_0^t \Big(b_s\int_0^s h_u^s\psi_u(A^s T^u)\,\delta w_u\,ds\Big)\,G\right] =$$

$$= \mathrm{E}\big[z_t G\big] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t \psi_u\,\delta w_u\Big)\,G\right] - \mathrm{E}\left[\Big(\int_0^t b_s z_s\,ds\Big)\,G\right]. \tag{5}$$

З (3), (4) та (5) випливає співвідношення Е$\int_0^t (\sigma_s x_s + \psi_s)\,[D_s G]\,ds =$ Е$\big(\,[x_t - x_0 - \int_0^t (b_s x_s + \varphi_s)\,ds]\,G\,\big)$ для $G \in S$ . Для завершення доведення достатньо, [7], показати, що для кожного $t \in [0,1]$ виконується нерівність $\| x_t - x_0 - \int_0^t (b_s x_s + \varphi_s)\,ds \| < \infty$ . Справедливість останньої оцінки випливає з того, що $\| x_t \|^2 < \infty$ і умов теореми. Отже, показано, що $1_{[0,t]}(\bullet)\,[\sigma_\bullet\zeta_\bullet + \psi_\bullet] \in Dom\,\delta$ і що рівність (1) виконується майже для всіх $\omega \in \Omega$ . Теорему доведено.

### 3. Застосування формули Коші

Одне із застосувань формули Коші для лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь полягає у вивченні властивостей розв'язків при $t \to \infty$. Для рівнянь дифузійного типу ця задача досліджувалась, зокрема, в працях [2,3,4,5,8].

Припустимо, що $x_0(\omega) = \breve{\varepsilon}(f^1)$, $\varphi_t(\omega) = \breve{\varepsilon}(f^2)$, $\psi_t(\omega) \equiv 0$, $f_\bullet^i = q_\bullet^i 1_{[0,T]}(\bullet)$, $0 < T < \infty$, $q^i \in L^2([0,\infty))$, $i = 1,2$. Слід зазначити, що функції такого типу формують тотальну множину в просторі $L^2(\Omega)$. Нехай, також, при $0 \le t < \infty$ $b_t - {\sigma_t}^2/2 \le -\gamma < 0$, існують такі $\sigma'_t = d\sigma_t/dt$ і $\sigma_t^{-1} = 1/\sigma_t$, що $\sup\limits_{0 \le t < \infty} (|\sigma_t^{-1}| + |\sigma'_t|) \le L < \infty$. Розглянемо рівняння

$$x_t = \breve{\varepsilon}(f^1) + \int_0^t [b_s x_s + \breve{\varepsilon}(f^2)]\,ds + \int_0^t \sigma_s x_s\,\delta w_s\,. \tag{6}$$

З наслідку леми випливає, що $h_0^t x_0(A^t) = \widehat{\varepsilon}_0^t \breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1)$, $h_s^t \varphi_s(A^t T^s) = \widehat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2)$. При $T < s < t$ випадкові величини $\breve{\varepsilon}(f^i)$ і $\breve{\varepsilon}_s^t$ незалежні, а відтак, $\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^i) = \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\breve{\varepsilon}(f^i)$. Розв'язок рівняння (6) має вигляд $x_t = \widehat{\varepsilon}_0^t \breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2)\,ds + \int_0^t h_s^t\,\delta w_s$. Оскільки $\int_0^t h_s^t\,\delta w_s = h_0^t \int_0^t (h_0^s)^{-1}\,\delta w_s - h_0^t \int_0^t \sigma_s (h_0^s)^{-1}\,ds$, а процес $(h_0^t)^{-1}$ вимірний відносно потоку, що породжений Вінерівським процесом, то інтеграл Скорохода співпадає з інтегралом Іто, тобто $\int_0^t (h_0^s)^{-1}\,\delta w_s = \int_0^t (h_0^s)^{-1}\,dw_s$. За формулою Іто $h_0^t \int_0^t (h_0^s)^{-1}\,dw_s = h_0^t \sigma_0^{-1} - \sigma_t^{-1} + \int_0^t \sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma'_s)\,h_s^t\,ds$. Отже,

$$x_t = -\sigma_t^{-1} + \widehat{\varepsilon}_0^t(\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \sigma_0^{-1}\breve{\varepsilon}(f^{0,t})) + \int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t [\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2) - \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s + \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma'_s)]\,ds\,. \tag{7}$$

При виконанні зроблених припущень $\widehat{\varepsilon}_0^t(\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \sigma_0^{-1}\breve{\varepsilon}(f^{0,t}))$ прямує до нуля майже напевно при $t \to \infty$, а $\int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t [\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2) - \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s + \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma'_s)]\,ds$ – стохастично обмежений процес, як це випливає з [3], оскільки випадкові величини $\breve{\varepsilon}(f^i)$ і $\breve{\varepsilon}(f^{s,t})$ не залежні для $T < s < t$. Отже, розв'язок (7) рівняння (6) буде стохастично обмеженим.

### 4. Висновки

Встановлено формулу Коші зображення розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода. Таке зображення дає можливість досліджувати асимптотичні властивості розв'язків у разі, коли неоднорідності є функціоналами від Вінерівського процесу з випередженням відносно потоку, який породжено Вінерівським процесом. Розглянуто приклад, який демонструє таку можливість у випадку обмеженої за часом неоднорідності експоненціального типу.

**Список використаних джерел**


1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с.
2. Ільченко О.В. Про стаціонарні розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Матем. та мех. – 2003, № 9. – С. 36-40.
3. Ільченко О.В. Стохастично обмежені розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Теорія ймовір. та матем. статист., 2003, Вип. 68. – С. 47-54.
4. Ільченко О.В. Про асимптотичне виродження систем лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь // Теорія ймовір. та матем. статист., 2007, Вип. 76. – С. 39-46.
5. Ільченко О.В. Періодичні розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Матем. та мех. – 2013, № 1(29). – С. 44-47.
6. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
7. Nualart D. The Malliavin Calculus and Related Topics.– Berlin Heidelberg New York: Springer, 2006. – 382 p.
8. Ilchenko A. Asymptotic behavior of solutions of nonhomogeneous linear systems of stochastic differential equations with constant coefficients // Random Operators And Stochastic Equations. – 1992. – vol.1, nomb.1, – p. 79-89.


**Надійшла до редколегії 11.11.13**

**А. Ильченко, канд. физ.-мат. наук, Ю. Мосеенков, канд. физ.-мат. наук**
**КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**

## ФОРМУЛА КОШИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛОМ СКОРОХОДА

***В роботе получена формула Коши представления решений линейного неоднородного стохастического дифференциального уравнения с интегралом Скорохода и приведено ее применение.***

**A. Ilchenko, PhD, Y. Moseenkov, PhD**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv**

## CAUCHY REPRESENTATION FORMULA FOR SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENUOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION WITH SKOROHOD INTEGRAL

***In this paper the Cauchy representation formula for solutions of the linear nonhomogenuous stochastic differential equation with Skorohod stochastic integral is found and application is considered.***

УДК 512.53+512.64

**В. Бондаренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.**
**Інститут математики НАН України, Київ,**
**О. Зубарук, асп.,**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**

# АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ІДЕМПОТЕНТНИХ МАТРИЦЬ З СЕНДВІЧ-СПІВВІДНОШЕННЯМИ

***Описано алгебру Ауслендера для задачі про класифікацію пар ідемпотентних матриць A, B із співвідношеннями ABA=0, BAB=0.***

## 1. ВСТУП

Сучасна теорія зображень має два напрямки. Перший із них продовжує класичну традицію, коли вивчаються самі зображення (опис нерозкладних зображень, їх канонічний вигляд, тощо), а другий пов'язаний в першу чергу з описом категорії зображень. До першого напрямку відноситься і заснована А.В. Ройтером сучасна теорія матричних задач, проте вона відіграє важливу роль в обох випадках.

Якщо говорити про категорії зображень, то основними поняттями тут є сагайдак Ауслендера-Райтен та алгебра Ауслендера, які вивчаються протягом багатьох десятиліть (див., наприклад, [1-10]).

Алгеброю Ауслендера алгебри скінченного зображувального типу називається алгебра ендоморфізмів прямої суми всіх нерозкладних зображень (із кожного класу еквівалентності нерозкладних зображень треба взяти один представник). Якщо зображення розглядати в матричному вигляді, то і алгебра Ауслендера буде реалізовуватись в матричному вигляді і в цьому випадку ми будемо називати її матричною алгеброю Ауслендера.

Ця стаття присвячена обчисленню матричної алгебри Ауслендера для однієї задачі про подібність пари матриць з деякими природними співвідношеннями.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Протягом всієї статті $K$ позначає довільне поле.

Розглянемо задачу про подібність пар ідемпотентних матриць $A^2=A$, $B^2=B$ із співвідношеннями $ABA=0$, $BAB=0$, які ми називаємо сендвіч-співвідношеннями. Ця задача рівносильна задачі про еквівалентність матричних зображень напівгрупи (із нулем) $M$ з системою твірних $0$, $a$, $b$ та визначальними співвідношеннями

1) $0^2=0$, $0a=a0=0$, $0b=b0=0$;
2) $a^2=a$, $b^2=b$;
3) $aba=0$, $bab=0$.

Згідно загального означення матричним зображенням напівгрупи $M$ над полем $K$ є довільний гомоморфізм $T: M \to M_n(K)$, де $M_n(K)$ – напівгрупа (відносно множення) всіх квадратних матриць розміру $n\times n$ над полем $K$ ($n$ називається розмірністю зображення $T$). При цьому ми вважаємо, що $T(0)=0$, і тому зображення $T: M \to M_n(K)$ напівгрупи $M$ однозначно задається парою матриць $R=\{A=T(a),\ B=T(b)\}$, такою, що $A^2=A$, $B^2=B$, $ABA=0$, $BAB=0$.

Матричні зображення $R=\{A,B\}$ і $R'=\{A',B'\}$ напівгрупи $M$ називаються еквівалентними, якщо $A'=CAC^{-1}$ і $B'=CBC^{-1}$ для деякої оборотної матриці $C$. Матричне зображення $R$ називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $M$ (як і для будь-якої скінченної напівгрупи) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Оскільки між зображеннями напівгрупи $M$ та зображеннями її напівгрупової алгебри існує природна взаємно однозначна відповідність, то можна говорити про алгебру Ауслендера як напівгрупи $M$ (означення якої дається саме для алгебр), так і для пар ідемпотентних матриць $A$, $B$ з двома сендвіч-співвідношеннями.

Мета цієї роботи – обчислити алгебру Ауслендера для напівгрупи $M$, або, що те саме, для вказаних пар матриць.

## 3. ФОРМУЛЮВАННЯ КЛАСИФІКАЦІЙНОЇ ТЕОРЕМИ

**Теорема 1.** *Будь-яке матричне зображення напівгрупи $M$ еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to \mathrm{A} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad b \to \mathrm{B} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тут через $E$ позначено одиничні матриці (деякі із них можуть мати розмір $0\times 0$).

**4. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1**

Нехай $R=\{A,B\}$ – матричне зображення напівгрупи $M$ над полем $K$. Можна вважати, що матриця $A$ має жордановий нормальний вигляд $A=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, а $B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$, де розміри блоків обох матриць збігаються.

Спочатку скористаємося рівністю $ABA=0$: $\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, яка еквівалентна рівності $B_{11}=0$, і тоді $B=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$. Рівність $BAB=0$: $\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ еквівалентна наступній рівності:

$$B_{21}B_{12}=0. \tag{1}$$

Нарешті рівність $B^2=B$, тобто $\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}B_{12}B_{21} & B_{12}B_{22}\\ B_{22}B_{21} & B_{21}B_{12}+B_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$, еквівалентна наступним рівностям:

$$B_{12}B_{21}=0, \tag{2}$$

$$B_{12}B_{22}=B_{12}, \tag{3}$$

$$B_{22}B_{21}=B_{21}, \tag{4}$$

$$B_{21}B_{12}+B_{22}^2=B_{22}. \tag{5}$$

Таким чином, наше матричне зображення $R=\{A,B\}$ має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

де блоки $B_{12}$, $B_{21}$ і $B_{22}$ задовольняють співвідношення (1) – (5).

З'ясуємо, коли зображення $R=\{A,B\}$ еквівалентне зображенню $\overline{R}=\{\overline{A},\overline{B}\}$ такого ж вигляду, а саме

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{B}=\begin{pmatrix}0 & \overline{B_{12}}\\ \overline{B_{21}} & \overline{B_{22}}\end{pmatrix}.$$

Нехай $\overline{A}=XAX^{-1}$, $\overline{B}=XBX^{-1}$ для деякої оборотної матиці $X$ (розбиття якої узгоджено з розбиттям матриць $A$ і $B$), що еквівалентно $\overline{A}X=XA$, $\overline{B}X=XB$. Зрозуміло, що $\overline{A}=A$. Спочатку використаємо рівність $\overline{A}X=XA$:

$$\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Маємо $X_{12}=0$, $X_{21}=0$, тобто $X=\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}$. Тепер рівність $\overline{B}X=XB$ має вигляд

$$\begin{pmatrix}0 & \overline{B_{12}}\\ \overline{B_{21}} & \overline{B_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_{11} & 0\\ 0 & X_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix}0 & \overline{B_{12}}X_{22}\\ \overline{B_{21}}X_{11} & \overline{B_{22}}X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & X_{11}B_{12}\\ X_{22}B_{21} & X_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

Звідси $\overline{B_{12}}X_{22}=X_{11}B_{12}$, $\overline{B_{21}}X_{11}=X_{22}B_{21}$, $\overline{B_{22}}X_{22}=X_{22}B_{22}$ або

$$\overline{B_{12}}=X_{11}B_{12}X_{22}^{-1}, \tag{7}$$

$$\overline{B_{21}}=X_{22}B_{21}X_{11}^{-1}, \tag{8}$$

$$\overline{B_{22}}=X_{22}B_{22}X_{22}^{-1}. \tag{9}$$

Отже, ми показали, що матричні зображення $R=\{A,B\}$ та $\overline{R}=\{\overline{A},\overline{B}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли справедливі рівності (7) – (9).

Таким чином, із зазначеного вище випливає, що задача про опис (з точністю до еквівалентності) матричних зображень вигляду (6) напівгрупи $M$, а отже, і взагалі всіх її матричних зображень, рівнозначна задачі про опис матриць $B_{12}$, $B_{21}$ і $B_{22}$ з точністю до еквівалентності, яка задається рівностями (7) – (9).

Переходимо тепер до нашої нової матричної задачі (відносно матриць $B_{12}$, $B_{21}$ і $B_{22}$). Можна було б розглядати цю задачу окремо, але ми робитимемо це (для більшої наглядності) "всередині" матриці B.

Підставивши (1) в (5), отримаємо $B_{22}^2=B_{22}$. Тоді, використовуючи перетворення (9), зведемо матрицю $B_{22}$ до наступного (жорданового) вигляду

$$B_{22}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Далі, розбивши матриці $B_{12}$ і $B_{21}$ відповідно до розбиття на блоки матриці $B_{22}$, отримуємо наступний вигляд матриці $B$:

$$B=\begin{pmatrix}0 & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & E & 0\\ B_{31} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

де $B_{12}$, $B_{13}$, $B_{21}$ і $B_{31}$ – деякі матриці (формально матрицю $\mathrm{B}$ потрібно було б замінити іншим символом, наприклад, $\mathrm{B}_1$, але для зручності і за традицією в теорії матричних задач ми зберегли старе позначення; це ж стосується матриць $B_{12}$, $B_{13}$, $B_{21}$ і $B_{31}$).

Скористаємося умовою $B^2=B$. Маємо

$$\begin{pmatrix}0 & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & E & 0\\ B_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}B_{12}B_{21}+B_{13}B_{31} & B_{12} & 0\\ B_{21} & B_{21}B_{12}+E & B_{21}B_{13}\\ 0 & B_{31}B_{12} & B_{31}B_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & B_{12} & B_{13}\\ B_{21} & E & 0\\ B_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо

$$B_{12}B_{21}=0, \tag{11}$$

$$B_{13}=0, \tag{12}$$

$$B_{21}B_{12}=0, \tag{13}$$

$$B_{31}=0. \tag{14}$$

Таким чином, матриця $B$ має вигляд (врахувавши рівності (12) і (14)):

$$B=\begin{pmatrix}0 & B_{12} & 0\\ B_{21} & E & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

де $B_{12}$ та $B_{21}$ – деякі матриці.

Допустимими перетвореннями приведемо матрицю $B_{12}$ до наступного канонічного вигляду:

$$B_{12}=\begin{pmatrix}0 & E\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Зауважимо, що з формальних міркувань ця канонічна форма відрізняється від канонічної форми (10), що в принципі не є суттєвим.

Розіб'ємо матрицю $B_{21}$ на блоки відповідно до розбиття матриці $B_{12}$, а саме представимо матрицю $B_{21}$ у вигляді

$$B_{21}=\begin{pmatrix}B_{31} & B_{32}\\ B_{41} & B_{42}\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Тоді, підставивши у рівності (11) та (13) вигляди матриць (15) і (16), маємо співвідношення $\begin{pmatrix}0 & E\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{31} & B_{32}\\ B_{41} & B_{42}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{41} & B_{42}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix}B_{31} & B_{32}\\ B_{41} & B_{42}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & B_{31}\\ 0 & B_{41}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Звідси $B_{31}=0$, $B_{41}=0$ і $B_{42}=0$.

Враховуючи вище отримані рівності, маємо наступний вигляд матриці $B$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_{32} & E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

де $B_{32}$ – деяка матриця.

Привівши матрицю $B_{32}$ до канонічного вигляду $B_{32}=\begin{pmatrix}0 & E\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ і підставивши цей вираз у матрицю $B$ (зробивши відповідне розбиття матриці A), отримуємо матричне зображення напівгрупи $M$ вказаного в умові теореми вигляду.

Отже, теорема 1 доведена.

### 5. АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ІДЕМПОТЕНТНИХ МАТРИЦЬ $A^2=A$, $B^2=B$ З СЕНДВІЧ-СПІВВІДНОШЕННЯМИ $ABA=0$, $BAB=0$

Використовуючи теорему 1, опишемо (в матричному вигляді) алгебру Ауслендера для пар ідемпотентних матриць $A^2=A$, $B^2=B$ з сендвіч-співвідношеннями $ABA=0$, $BAB=0$ над полем $K$. Для цього розглянемо наступне матричне зображення напівгрупи $M$ над полем $K$, яке за теоремою 1 є (з точністю до перестановки рядків та стовпців) прямою сумою нерозкладних зображень (кожне з яких зустрічається один раз):

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Нехай $X$ – елемент матричної алгебри Ауслендера, тобто матриця $X$ така, що $AX = XA$ та $BX = XB$.

Спочатку розглянемо співвідношення $AX = XA$. Маємо:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\x_{61}&x_{62}&x_{63}&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\x_{71}&x_{72}&x_{73}&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\x_{61}&x_{62}&x_{63}&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\x_{71}&x_{72}&x_{73}&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}&x_{16}&x_{17}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}&x_{25}&x_{26}&x_{27}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}&x_{35}&x_{36}&x_{37}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&0&0&0&0\\x_{51}&x_{52}&x_{53}&0&0&0&0\\x_{61}&x_{62}&x_{63}&0&0&0&0\\x_{71}&x_{72}&x_{73}&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

тобто матриця $X$ має вигляд

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер рівність $BX = XB$. Маємо:

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&0&0&0&0\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&0&0&0&0\\0&0&0&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&x_{74}&x_{75}&x_{76}&x_{77}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&x_{47}\\0&0&0&x_{54}&x_{55}&x_{56}&x_{57}\\0&0&0&x_{64}&x_{65}&x_{66}&x_{67}\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&x_{11}&0\\0&0&0&0&0&x_{21}&0\\0&0&0&0&0&x_{31}&0\\0&0&x_{44}&x_{44}&x_{45}&x_{46}&0\\0&0&x_{54}&x_{54}&x_{55}&x_{56}&0\\0&0&x_{64}&x_{64}&x_{65}&x_{66}&0\\0&0&x_{74}&x_{74}&x_{75}&x_{76}&0\end{pmatrix},$$

а отже,

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} \end{pmatrix}.$$

З цих міркувань слідує наступна теорема:

**Теорема 2.** *Матрична алгебра Ауслендера для пар ідемпотентних матриць $A^2=A$, $B^2=B$ з сендвіч-співвідношеннями $ABA=0$, $BAB=0$ над полем $K$ складається з усіх матриць вигляду*

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & x_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{33} & x_{45} & x_{46} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{55} & x_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{77} \end{pmatrix},$$

*де $x_{ij}$ – елементи поля $K$.*

## 6. ВИСНОВКИ

Описана матрична алгебра Ауслендера для задачі про класифікацію пар ідемпотентних матриць $A$ і $B$ із співвідношеннями $ABA=0$ і $BAB=0$.

**Список використаних джерел**

1. Assem I., Brown P. Strongly simply connected Auslander algebras – Glasqow Math. J. – 1997. – 39, no. 1. – p.21–27.
2. Bautista R., Larrión F. Auslander-Reiten quivers for certain algebras of finite representation type. – J. London Math. Soc. (2). – 1982. – 26, no. 1. – p.43–52.
3. Bongartz K., Gabriel P. Covering spaces in representation-theory. – Invent. Math. – 1981. – 65, no. 3. – p.331–378.
4. Brenner S., Butler M. Wild subquivers of the AuslanderReiten quiver of a tame algebra. Trends in the representation theory of finite-dimensional algebras. – Contemp. Math. – 1997. – 229. – p.29–48.
5. Dieterich E. Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings. – Math. Z. – 1983. – 184, no. 1. – p.43–60.
6. Gabriel P. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. Representation theory, I. – Lecture Notes in Math. – 1979. – 831. – p.1-71.
7. Geiss C., Leclerc B., Schröer J. Auslander algebras and initial seeds for cluster algebras. – J. Lond. Soc. – 2007. – 75, no. 3. – p.718–740.
8. Igusa K., Platzeck M., Todorov G., Zacharia D. Auslander algebras of finite representation type. – Comm. Algebra, – 1987. – 15, no. 1-2. – p.377–424.
9. Leszczyński Z., Skowroński A. Auslander algebras of tame representation type. Representation theory of algebras. – 1994, p.475–486.
10. Riedtmann C. On stable blocks of Auslander-algebras. – Trans. Amer. Math. Soc., – 1984. – 283, no. 2. – p.485–505.

**Надійшла до редколегії 27.11.13**

**В. Бондаренко, д-р физ.-мат. наук**
**Институт математики НАН Украины, Киев,**
**О. Зубарук, асп.**
**КНУ имени Тараса Шевченко, Киев**

### АЛГЕБРА АУСЛЕНДЕРА ДЛЯ ПАР ИДЕМПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ С СЕНДВИЧ-СООТНОШЕНИЯМИ

***Описана алгебра Ауслендера для задачи о классификации пар идемпотентных матриц A, B с соотношениями ABA=0, BAB=0.***

**V. Bondarenko, Full Doct.**
**Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,**
**O. Zubaruk, PhD graduate**
**Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv**

### THE AUSLANDER ALGEBRA FOR THE PAIRS OF IDEMPOTENT MATRICES WITH SANDWICH RELATIONS

***We describe the Auslander algebra for the problem of classification of pairs of idempotent matrices A, B with the relations ABA=0, BAB=0.***

**УДК 512.552.1**

**С. Лисенко, асп., В. Лучко, канд. фіз.-мат. наук, А. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук**
**КНУ імені Тараса Шевченка, Київ**

# ОРТОГОНАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ НА АСОЦІАТИВНИХ АЛГЕБРАХ

***Нехай K – поле і A – асоціативна алгебра над K (не обов'язково з одиницею). Лінійний оператор T на A будемо називати ортогональним, якщо T(x)T(y)=xy для довільних x, y із A. Вивчаються асоціативні алгебри з нетривіальним ортогональним оператором T і група O(A) всіх бієктивних ортогональних операторів на A для деяких класів алгебр. Доведено, що радикал Джекобсона J(A) інваріантний відносно дії такої групи. Структура групи O(A) досліджена для деяких класів алгебр A.***

**ВСТУП.** В статтях [1] – [3] вивчались ортогональні оператори на алгебрах Лі (лінійний оператор $T:L\to L$ на алгебрі Лі $L$ називається ортогональним або Лі-ортогональним, якщо виконується умова $[T(x),T(y)]=[x,y]$ для довільних $x,y\in L$). В цих працях, зокрема, доведено, що прості скінченновимірні алгебри Лі характеристики 0 мають лише тривіальні ортогональні оператори $\pm E$ , де $E$ – тотожній оператор на $L$ . Аналогічним способом ортогональні оператори можна визначити і на асоціативних алгебрах над довільними полями: лінійний оператор $T: A \to A$ на асоціативній алгебрі $A$ будемо називати ортогональним, якщо $T(x)\cdot T(y)=xy$ для довільних елементів $x.y \in A$ . Якщо ми перейдемо до приєднаної алгебри Лі $L(A)$ для асоціативної алгебри $A$ , то лінійний оператор $T$ на алгебрі Лі $L(A)$ буде ортогональним в зазначеному вище сенсі

В одному із основних тверджень цієї статті – теоремі 1, доведено, що радикал Джекобсона алгебри $A$ інваріантний відносно бієктивних ортогональних операторів на алгебрі $A$ , тому кожен такий оператор індукує ортогональний оператор на напівпростій алгебрі $A/J(A)$ . В теоремі 2 дано опис таких операторів на однопороджених нільпотентних алгебрах скінченної розмірності над довільним полем характеристики не рівної 2. Позначення в роботі стандартні, асоцітивні алгебри (не обов'язково з одиницею) розглядаються над довільним полем. Через $J(A)$ позначається радикал Джекобсона алгебри $A$ . Для довільної алгебри $A$ над полем $K$ лівий анулятор визначається як $Ann^l(A)=\{x\in A: xA=0\}$ , аналогічно правий анулятор $Ann^r(A)=\{x\in A: Ax=0\}$ . Двосторонній анулятор асоціативної алгебри $A$ є перетином лівого і правогоануляторів $Ann\ (A)=Ann^l(A)\cap Ann^r(A)$ . Через $Z(A)$ позначається центр алгебри $A$ , через $GL(A)$ позначається група всіх бієктивних лінійних операторів на $A$ (як на векторному просторі над полем $K$ .

**ОСНОВНА ЧАСТИНА.**

**Лема 1**. Нехай $A$ – асоціативна алгебра над довільним полем $K$ і $T$ – ортогональний лінійний оператор на $A$ . Тоді

1) якщо $a\in A$ – нільпотентний елемент, то елемент $T(a)$ також нільпотентний;

2) якщо $a$ – оборотній елемент, то і $T(a)$ оборотній;

3) якщо $Ann^l(A)=0$ або $Ann^r(A)=0$ , то тоді $KerT=0$ .

*Доведення*. 1) Нехай $a$ – нільпотентний елемент і $a^n=0$ для деякого $n\ge 1$ . Якщо $n=2k$ , то

$$\underbrace{T(a)\cdot T(a)\cdot ...\cdot T(a)}_{2k}=\underbrace{(a\cdot a)\cdot ...\cdot (a\cdot a)}_{k}=a^{2k}=0 .$$

Якщо ж $n=2k+1$ , то аналогічно можна показати, що $T(a)^{2k+2}=T(a)^{n+1}=0$ .

2) Нехай $a\in A$ – оборотній елемент. Тоді $ab=ba=1$ для деякого $b\in A$ . Маємо $T(a)T(b)=ab=1$ і $T(b)T(a)=ba=1$ . Останнє означає, що $T(a)$ оборотній і $T(b)=T(a)^{-1}$ .

3) Нехай, наприклад, $Ann^l(A)=0$ і $x\in KerT$ . Тоді $T(x)=0$ і для довільного елемента $y\in A$ маємо $T(x)T(y)=0=xy$ , тобто $x\in Ann^l(A)$ і тому $x=0$ . Аналогічно можна довести, що $KerT=0$ для випадку $Ann^r(A)=0$ . Лему 1 доведено.

**Лема 2.** Нехай $A$ – асоціативна алгебра над довільним полем $K$ . Тоді

1) якщо $A$ – алгебра з одиницею і $T$ – бієктивний ортогональний оператор на $A$ , то $T(1)^2=1$ , $T(1)\in Z(A)$ і дія $T$ на $A$ зводиться до множення елементів із $A$ на $T(1)$ .

2) Множина всіх бієктивних ортогональних операторів на $A$ утворює групу відносно взяття суперпозиції. Цю групу будемо позначати через $O(A)$ .

3) Якщо $A^2=A$ , то групи $O(A)$ і $AutA$ мають одиничний перетин в групі $GL(A)$ і для довільного $\theta\in AutA$ справедливо $\theta^{-1}O(A)\theta\subseteq O(A)$ .

*Доведення.* 1) Із співвідношень

$$T(x)\cdot T(1)=x\cdot 1=x\ ,\ T(1)\cdot T(x)=1\cdot x=x$$

випливає з огляду на бієктивність $T$ на $A$ , що $T(1)\in Z(A)$ . Оскільки $T(1)\cdot T(1)=1\cdot 1=1$ , то $T(1)^2=1$ і тому $T(1)^{-1}=T(1)$ . Але тоді $T(1)\cdot T(x)=1\cdot x=x$ і тому $T(x)=T(1)^{-1}\cdot x=T(1)\cdot x$ для довільного елемента $x\in A$ . Таким чином, дія $T$ на $A$ зводиться до множення на елемент $T(1)$ із $Z(A)$ .

2) Якщо $T$ і $S$ – ортогональні бієктивні оператори на $A$ , то $T(S(x))\cdot T(S(y))=S(x)\cdot S(y)$ з огляду на ортогональність $T$ . Далі $S(x)\cdot S(y)=xy$ і тому $TS$ – ортогональний оператор на $A$ . З ортогональності тотожного лінійного оператора $E$ на $A$ отримаємо за допомогою аналогічних міркувань, що $T^{-1}$ ортогональний оператор. Таким чином, $O(A)$ – група відносно суперпозиції відображень.

3) Нехай $T$ – бієктивний ортогональний оператор на $A$ і $\theta$ – автоморфізм алгебри $A$ . Тоді маємо співвідношення

$$(\theta^{-1}T\theta)(x)\cdot(\theta^{-1}T\theta)(y)=\theta^{-1}(T\theta(x))\cdot\theta^{-1}(T\theta(y))=\theta^{-1}(T(\theta(x))\cdot T(\theta(y)))=\theta^{-1}(\theta(x)\theta(y))=xy .$$

Це означає, що $\theta^{-1}T\theta$ – ортогональний оператор на $A$ і підгрупа $O(A)$ повної лінійної групи $GL(A)$ інваріантна відносно $AutA$ при дії спряженням в $GL(A)$.

Далі, нехай $T=\theta\in AutA\cap O(A)$. Тоді $T(x)\cdot T(y)=xy=T(xy)$, оскільки $T$ – автоморфізм і ортогональний оператор одночасно. З рівності $T(xy)=xy$ для довільних $x,y\in A$ при умові $A^2=A$ випливає, що $T=E$ – тотожній оператор. Таким чином, $O(A)\cap AutA=E$ при умові $A^2=A$. Зауважимо, що в загальному випадку із доведення леми випливає, що кожен лінійний оператор із перетину $O(A)\cap AutA$ діє тотожньо на квадраті $A^2$ алгебри $A$.

**Наслідок 1**. Нехай $A$ – асоціативна алгебра з 1 над довільним полем $K$. Тоді група $O(A)$ всіх бієктивних ортогональних операторів на $A$ ізоморфна мультиплікативній групі всіх елементів періоду 2 із центру $Z(A)$. Зокрема, $O(A)$ або одинична, або абелева періоду 2.

**Наслідок 2.** Нехай $A$ – напівпроста скінченно вимірна алгебра над полем $K$. Тоді $O(A)=\{\pm E\}$.

**Теорема 1**. Нехай $A$ – асоціативна алгебра над довільним полем $K$ і $J=J(A)$ – радикал Джекобсона алгебри $A$. Тоді

1) якщо $T$ – бієктивний ортогональний оператор на $A$, то $T(J)\subseteq J$;

2) якщо $T$ – довільний ортогональний оператор на $A$ і $A^2=A$, то $T(J)\subseteq J$.

*Доведення.* 1) Візьмемо довільний елемент $T(a)\in T(J)$ для деякого $a\in J$ і довільний елемент $b\in A$. Оскільки $T$ – бієктивний, то $b=T(c)$ для деякого $c\in A$. Тоді отримаємо співвідношення

$$T(c)\cdot T(a)=c\cdot a=b\cdot T(a)\in J.$$

Останнє означає, що $AT(J)\subseteq J$. Аналогічно можна показати, що $T(J)A\subseteq J$. Із цих співвідношень легко випливає, що $J+T(J)$ – двосторонній ідеал алгебри $A$ і при цьому виконується співвідношення

$$(J+T(J)/J)^2\subseteq J/J=\overline{0},$$

тобто $J+T(J)/J$ – ідеал з нульовим квадратом напівпростої алгебри $A/J$. Але тоді

$$J+T(J)/J=\overline{0} \text{ і } T(J)\subseteq J.$$

Зауважимо також, що для асоціативних алгебр з одиницею твердження 1 теореми випливає з того, що дія $T$ на $A$ зводиться до множення на $T(1)$.

2) Для довільних елементів $T(a)\in T(A)$ і $T(b)\in T(J)$ маємо $T(a)T(b)=ab\in J$. Звідси випливає, що $T(A)^2T(J)\subseteq J$ (безпосередня перевірка). Покажемо тепер, що $T(A)^2=A^2$. Дійсно, включення $T(A)^2\subseteq A^2$ очевидне. Візьмемо довільний елемент $a$ із $A^2$. Тоді за означенням $a=\sum a_ia_j$ – скінченна сума, де $a_i,a_j\in A$. Звідси отримаємо

$$a=\sum a_ia_j=\sum T(a_i)T(a_j)\in T(A)^2$$

і тому $A^2\subseteq T(A)^2$. За умовою теореми $A^2=A$ і тоді маємо $AT(J)=A^2T(J)\subseteq J$. Далі, повторюючи міркування із доведення частини 1 теореми, неважко переконатися, що $AJ\subseteq J$ і $JA\subseteq J$. Теорему 1 доведено.

**Лема 3.** Нехай $A$ – асоціативна алгебра над довільним полем і $T$ – бієктивний ортогональний оператор на $A$. Тоді $T(Ann\,A)\subseteq Ann(A)$ і $T$ індукує бієктивний ортогональний оператор на ідеалі $Ann\,A$ і на фактор-алгебрі $A/Ann\,A$.

*Доведення*. Для довільних елементів $x\in Ann\,A$ і $y\in A$ маємо співвідношення

$$x\cdot y=0=T(x)T(y).$$

Якщо елемент $y$ пробігає алгебру $A$, то $T(y)$ також пробігає всю алгебру $A$ і тому $T(x)\in Ann\,A$, тобто $T(Ann\,A)\subseteq Ann\,A$. Припустимо, що для деякої алгебри $A$ і лінійного ортогонального оператора $T$ включення $T(Ann\,A)\subset Ann\,A$ строге. Візьмемо довільний елемент $x\in Ann\,A\setminus T(Ann\,A)$. Оскільки $T$ сюр'єктивний, то існує елемент $y\in A$ такий, що $T(y)=x$. З огляду на співвідношення $T(Ann\,A)\subseteq Ann\,A$, яке було доведене вище, маємо, що $y\notin Ann\,A$. Але тоді існує елемент $z\in A$ такий, що $yz\neq 0$ (або $zy\neq 0$) Звідси отримаємо $yz=T(y)T(z)=x\cdot T(z)=0$, що неможливо (випадок $zy\neq 0$ розглядається аналогічно). Отримана суперечність показує, що $Ann\,A\subseteq T(Ann\,A)$ і тому $T(Ann\,A)=Ann\,A$. Оскільки лінійний оператор $T$ на $Ann\,A$, очевидно, ін'єктивний, то звуження $T$ на $Ann\,A$ є бієктивним ортогональним оператором.

Легко бачити, що індукований оператором $T$ на фактор-алгебрі $A/Ann\,A$ лінійний оператор $\overline{T}$ є ортогональним. Покажемо, що $\overline{T}$ бієктивний. Дійсно, якщо $T(x_1+Ann\,A)=T(x_2+Ann\,A)$, то $T(x_1-x_2)\in Ann\,A$. Але, як неважко переконатися, із умови $T(x)\in Ann\,A$ випливає (з урахуванням бієктивності $T$ на $A$ і на $Ann\,A$), що $x\in Ann\,A$.

Тому $x_1 - x_2 \in Ann\,A$, тобто $x_1 + Ann\,A = x_2 + Ann\,A$ і $T$ ін'єктивний на фактор-алгебрі $A / Ann\,A$. Оскільки $T$ бієктивний на $A$, то $\overline{T}$, очевидно, сюр'єктивний на $A / Ann\,A$ і тому $\overline{T}$ – бієктивний лінійний оператор на $A / Ann\,A$.

**Наслідок 1.** Якщо $A$ – нільпотентна асоціативна алгебра над довільним полем і $T$ – ортогональний бієктивний оператор на $A$, то $T$ індукує бієктивні ортогональні оператори на всіх ненульових елементах ануляторного ряду алгебри $A$ (властивості ануляторів ідеалів див. [4, с.260-261]).

**Приклад 1.** Нехай

$$A = K < x, y \mid xy = y, x^2 = x, y^2 = 0, yx = 0 >$$

– двовимірна асоціативна алгебра над полем $K$. Покажемо, що $O(A) = \pm E$, де $E$ – тотожній оператор на $A$. Дійсно, в базисі $\{x, y\}$ запишемо

$$T(x) = \alpha_{11}x + \alpha_{21}y\,,\ T(y) = \alpha_{12}x + \alpha_{22}y\,.$$

Тоді $T(x)T(y) = xy = y$ і тому після перемноження отримаємо

$$(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y)(\alpha_{12}x + \alpha_{22}y) = \alpha_{11}\alpha_{12}x + \alpha_{11}\alpha_{22}y = y\,.$$

Але тоді $\alpha_{11}\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1$. Звідси отримаємо $\alpha_{12} = 0$ і $\alpha_{22} = \alpha_{11}^{-1}$. Із умови $T(x)T(x) = x \cdot x = x$ аналогічно отримаємо

$$(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y)(\alpha_{11}x + \alpha_{21}y) = \alpha_{11}^2 x + \alpha_{11}\alpha_{21}y = x$$

і тому $\alpha_{11}^2 = 1$, $\alpha_{11}\alpha_{21} = 0$, тобто $\alpha_{21} = 0$. Таким чином,

$$\alpha_{11} = \pm 1,\ \alpha_{22} = \pm 1,\ \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0 \text{ і } O(A) = \pm E\,.$$

**Теорема 2.** Нехай $A$ – асоціативна нільпотентна алгебра над полем $K$ характеристики $\neq 2$, яка породжена одним елементом, $A = K < a \mid a^{n+1} = 0 >$. Тоді $O(A)$ складається з лінійних операторів на $A$, які мають в базисі $\{a, a^2, ..., a^n\}$ алгебри $A$ матриці вигляду

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\alpha_{ni} \in K$, $\alpha_{nn} \neq 0$.

*Доведення.* Нехай $T \in O(A)$ – довільний невироджений ортогональний лінійний оператор на $A$. Запишемо $T(a^i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a^j$, $i = 1, ..., n$. Тоді із умови ортональності $T$ отримаємо

$$T(a)T(a) = a \cdot a = a^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j1} a^j \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j1} a^j\,.$$

Порівнюючи коефіцієнти при степенях $a^m$ в лівій і правій частині останньої рівності отримаємо співвідношення

$$\alpha_{11}^2 = 1,\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{11} = 0\,,\ ...,\ \sum_{s=1}^{m} \alpha_{s1} \cdot \alpha_{m-s,1} = 0\,,\ ...,\ \sum_{s=1}^{n} \alpha_{s1} \cdot \alpha_{n-s,1} = 0\,.$$

Оскільки характеристика основного поля $K$ не дорівнює 2, то отримаємо послідовно $\alpha_{11} = \pm 1$, $\alpha_{21} = 0$, ..., $\alpha_{n-1,1} = 0$. Таким чином,

$$T(a) = \alpha_{11}a + \alpha_{n,1}a^n$$

для $\alpha_{11} = \pm 1$.

Далі, із співвідношення

$$T(a)T(a^2) = a \cdot a^2 = a^3 = (\alpha_{11}a + \alpha_{n,1}a^n) \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} a^j\,,$$

враховуючи очевидну рівність $\alpha_{n,1}a^n \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} a^j = 0$, отримаємо, що $\alpha_{11}a \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} a^j = a^3$.

Звідси, порівнюючи коефіцієнти при степенях $a$, маємо

$$\alpha_{22} = \alpha_{11}^{-1},\ \alpha_{12} = 0,\ \alpha_{32} = 0\,,\ ...,\ \alpha_{n-1,2} = 0\,.$$

Таким чином, $T(a^2) = \alpha_{11}^{-1}a + \alpha_{n2}a^n$. Аналогічно $T(a^i) = \alpha_{11}^{-1}a + \alpha_{n,i}a^n$ для $i = 3, ..., n-1$.

Знайдемо ще $T(a^n)$. Із умови

$$T(a)T(a^n) = a \cdot a^n = 0 = (\alpha_{11}a + \alpha_{n,1}a^n) \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,n} a^j$$

знаходимо, що $\alpha_{1n}=0$, …, $\alpha_{n-1,n}=0$. Це означає, що $T(a^n)=\alpha_{nn}a^n$ і оскільки $T$ – невироджений лінійний оператор на $A$, то $\alpha_{nn}\neq 0$.

Ми довели, що $T$ в базисі $\{a,...,a^n\}$ має матрицю вигляду (1) вказаного в формулюванні теореми.

Навпаки, нехай $T$ в базисі $\{a,a^2,...,a^n\}$ нільпотентної алгебри $A$ має матрицю вигляду (1). Безпосередньо перевіряється, що тоді

$$T(a^i)T(a^j)=a^i\cdot a^j \text{ для } i,j=1,...,n.$$

Звідси за лінійністю знаходимо, що $T(x)T(y)=xy$ для довільних елементів $x,y\in A$, тобто $T$ – ортогональний лінійний оператор на $A$. Теорему 2 доведено.

**Зауваження 1.** Якщо $A$ – нільпотентна асоціативна алгебра з нульовим квадратом, тобто $A^2=0$, то, очевидно, кожен лінійний оператор на $A$ буде ортогональним і тому $O(A)=GL(A)$ – повна лінійна група на векторному просторі $A$.

**Твердження 1**. Нехай $A=K<x,y,z\,|\,xy=z,x^2=y^2=z^2=0,yx=0,xz=yz=0>$ – некомутативна нільпотентна асоціативна алгебра розмірності 3 над $K$. Тоді $O(A)$ складається з лінійних операторів, які в базисі $\{x,y,z\}$ мають матриці вигляду $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{-1} & 0\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$, де $\alpha_{33}\neq 0$, $\lambda\neq 0$, $\alpha_{31},\alpha_{32}$ – довільні елементи поля $K$.

*Доведення*. Якщо позначимо базисні елементи алгебри $A$ через $x=e_{12}$, $y=e_{23}$, $z=e_{13}$, то, як неважко переконатися, алгебра $A$ ізоморфна асоціативній алгебрі $N_3(K)$ всіх строго трикутних матриць порядку 3 з коефіцієнтами в полі $K$.

Нехай $T\in O(A)$ – довільний ортогональний оператор на $A$. Позначимо

$$T(x)=\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z,$$
$$T(y)=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z,$$
$$T(z)=0x+0y+\alpha_{33}z$$

Зауважимо, що $T(z)\subseteq Kz$, оскільки $Kz$ – анулятор алгебри $A$ і тому $Kz$ інваріантний відносно $T$ за лемою 3. Виберемо довільні елементи

$$a=u_1x+v_1y+w_1z \text{ і } b=u_2x+v_2y+w_2z$$

із $A$. За правилом множення базисних елементів отримаємо $ab=u_1v_2z$. Далі

$$T(a)=u_1(\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z)+v_1(\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z)+w_1\alpha_{33}z, \tag{2}$$

і

$$T(b)=u_2(\alpha_{11}x+\alpha_{21}y+\alpha_{31}z)+v_2(\alpha_{12}x+\alpha_{22}y+\alpha_{32}z)+w_2\alpha_{33}z \tag{3}$$

і тому, як неважко переконатися,

$$T(a)T(b)=(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}v_1)(\alpha_{21}u_2+\alpha_{22}v_2)z.$$

Із рівності $T(a)T(b)=ab$ отримаємо (з урахуванням рівностей (2) і (3)), що

$$(\alpha_{11}u_1+\alpha_{12}v_1)(\alpha_{21}u_2+\alpha_{22}v_2)=u_1v_2,$$

де остання рівність виконується для довільних елементів $u_i,v_i\in K$, $i=1,2$.

Покладаючи $u_1=1$, $v_2=1$, $v_1=0$, $u_2=0$, отримаємо що $\alpha_{11}\alpha_{22}=1$. Далі, покладаючи

$$u_1=1,\ u_2=1,\ v_1=0,\ v_2=0,$$

знаходимо $\alpha_{11}\alpha_{21}=0$. Оскільки $\alpha_{11}\neq 0$, то $\alpha_{21}=0$. Аналогічно, покладаючи $u_1=0$, $u_2=0$, $\nu_1=1$, $\nu_2=1$, отримуємо $\alpha_{12}=0$

Зауважимо, що $\alpha_{33}\neq 0$, оскільки лінійний оператор $T$ невироджений. Покладемо $\alpha_{11}=\lambda$. Тоді $\alpha_{22}=\lambda^{-1}$ і матриця лінійного оператора $T$ має вигляд $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{-1} & 0\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$.

Навпаки, якщо $T$ – лінійний оператор на алгебрі $A$, матриця якого в базисі $\{x,y,z\}$ має вигляд $\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{-1} & 0\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}$, то, як неважко перевірити, виконується рівність $T(a)T(b)=ab$ для довільних $a,b\in A$.

**ВИСНОВКИ.** Описаний у статті підхід до вивчення ортогональних операторів на асоціативних алгебрах може бути застосований і для вивчення більш широких класів кілець. Найбільш цікавими є нескінченновимірні асоціативні алгебри, які збігаються зі своїм квадратом.

**Список використаних джерел**

1. А.П. Петравчук, С.В. Білун. Про ортогональні оператори на скінченовимірних алгебра Лі // Вісник Київського нац. ун-ту. Серія фіз.-мат. науки (2003) №3. – С.60-64.
2. S.Bilun, D.Maksimenko, A.Petravchuk, On the group of Lie-orthogonal operators on a Lie algebra// Methods of Functional Analysis and Topology, (2011) v.17, no.3. – P.199-203.
3. D.R. Popovich, Lie-orthogonal operators, Linear Algebra Appl., 438 (2013), № 5. – P. 2090-2106.
4. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. – 496 с.

Надійшла до редколегії 27.11.13

С .Лисенко, асп., В. Лучко, канд. физ.-мат. наук, А. Петравчук, д-р физ.-мат. наук
КНУ имени Тараса Шевченко, Киев

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

***Пусть K – поле и A – ассоциативная алгебра над K (не обязательно с единицей). Линейный оператор T на A будем называть ортогональным, если T(x)T(y)=xy для пороизвольных x, y из A. Изучаются ассоциативные алгебры с нетривиальным ортогональным оператором T и группа O(A) всех биективных ортогональных операторов на A для некоторых классов алгебр. Доказано, что радикал Джекобсона J(A) инвариантный относительно действия такой группы. Структура группы O(A) исследована для некоторых классов алгебр A.***

S. Lysenko, PhD graduate, V. Luchko, PhD, A. Petravchuk, Full Doctor
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

## ORTHOGONAL OPERATORS ON ASSOCIATIVE ALGEBRAS

***Let K be a field and A an associative algebra over K (not necessarily with unit). A linear operator T on A will be called orthogonal if T(x)T(y)=xy for all x, y in A. Associative algebras with a nontrivial orthogonal operator $T$ and groups O(A) of bijective orthogonal operators on A are studied for some classes of algebras. It is proved that the Jacobson radical J(A) is invariant under such a group. The structure of the othogonal group O(A) is investigated for some types of algebrasA.***

УДК 539.3

В. Будак, д-р техн. наук, проф.,
В. Карнаухов, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
В. Січко, канд. фіз.-мат. наук, доц., А. Завгородній, канд. фіз.-мат. наук
Миколаївський національний університет ім. В.О. Сухомлинського, Миколаїв

# ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА ТОВСТОЇ ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ ПРИ ГАРМОНІЧНОМУ МЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

***Методом скінченних елементів розв'язано просторову задачу про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової циліндричної панелі з жорстко защемленими торцями. Непружна поведінка матеріалу описується концепцією комплексних характеристик. Вважається, що механічні і теплофізичні властивості матеріалу не залежать від температури. Досліджено вплив структурної неоднорідності на амплітудно- і температурно-частотні характеристики панелі, на її власну частоту, максимальний прогин, максимальну температуру і на коефіцієнт демпфування панелі.***

**Вступ.** В сучасній техніці широко застосовуються товсті циліндричні панелі, для розрахунку динамічного стану яких виникає потреба у використанні просторової постановки задач механіки деформівного твердого тіла [8]. Для циліндричних тіл з полімерних матеріалів і композитів на їх основі необхідно враховувати їх в'язкопружні властивості. При гармонічному навантаженні, особливо на резонансних частотах, в таких елементах конструкцій може мати місце суттєве підвищення температури дисипативного розігріву в результаті гістерезисних втрат в матеріалі. В [1] розглянуто задачу про коливання і дисипативний розігрів циліндричної панелі з шарнірно обпертими торцями. Для її розв'язування використано метод Фур'є в поєднанні з методом дискретної ортогоналізації. Більш широкі можливості для розв'язування спряжених задач термомеханіки відкриває використання методу скінченних елементів (МСЕ). В даній статті цей метод застосовано для дослідження коливань і дисипативного розігріву непружної товстої тришарової циліндричної панелі з середнім полімерним демпфуючим шаром і двома зовнішніми металічними шарами при її навантаженні гармонічним за часом поверхневим тиском $P_0 \cos \omega t$ з частотою, близькою до резонансної. Для моделювання непружної поведінки матеріалу використовується концепція комплексних характеристик, розвинута в [3]. Вважається, що торці панелі жорстко защемлені, а характеристики матеріалу не залежать від температури. При цьому задача розпадається на декілька окремих задач: 1) задачу про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) задачу розрахунку дисипативної функції; 3) задачу теплопровідності з відомим джерелом тепла, яке співпадає з дисипативною функцією.

***Зазначимо, що в літературі відсутні розв'язки задач про резонансні коливання і дисипативний розігрів циліндричних шаруватих тіл в просторовій постановці.***

**Постановка зв'язаної задачі і її розв'язок методом скінченних елементів.** Розглядається товста тришарова циліндрична панель, середній шар якої є ізотропним в'язкопружним з незалежними від температури комплексними характеристиками, а два зовнішніх шари є ізотропними металічними. Така структурна неоднорідність широко використовується в багатьох галузях техніки для пасивного демпфування вільних і вимушених коливань елементів конструкцій. Для дослідження вимушених коливань такої панелі в просторовій постановці використаємо рівняння, представлені, наприклад, в монографії [4]. Для загального випадку неоднорідних матеріалів в цих рівняннях потрібно дійсні параметри Ляме замінити на комплексні.

Для жорстко защемлених торців зміщення на них дорівнюють нулю, а на поверхнях між шарами виконуються умови контакту – рівність зміщень і напружень.

***Температурне поле дисипативного розігріву знаходиться з рівняння енергії, наведеного в [3, 4]. В цих же працях дано початкові і граничні умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює $T_c$. Дисипативна функція $D$ в рівнянні енергії визначається стандартною формулою [3]:***

$$D = \frac{\omega}{2}\left(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}\right).$$

Для оцінки ефективності пасивного демпфування вимушених коливань використовується інтегральна характеристика, яка є відношенням дисипованої за цикл енергії $D$ до накопиченої енергії $U_T$ [3]. У випадку однорідних станів при дійсному коефіцієнті Пуассона і незалежному від координат модулі зсуву ця характеристика зводиться до звичайного тангенсу кута втрат матеріалу.

При використанні МСЕ задача механіки і теплопровідності зводиться відповідно до знаходження стаціонарних точок функціоналів $Э_m$ і $Э_T$, наведених в роботі [3].

Розв'язок варіаційної задачі механіки знаходиться МСЕ з використанням 24-вузлових шестигранних ізопараметричних елементів.

***Як локальна система координат, в якій визначаються апроксимуючі функції і проводиться інтегрування, використана нормалізована система координат. Для побудови базисних функцій, які апроксимують складові вектора зміщень і температуру в межах елементу, використано алгебраїчні та тригонометричні поліноми. При цьому припускається, що амплітудні значення компонент вектора зміщень і значення температури апроксимуються виразами:***

$$w = \sum_{i=1}^{24} L_i w_i, \quad u = \sum_{i=1}^{24} L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{24} L_i v_i,$$

$$T = \sum_{i=1}^{24} L_i T_i. \tag{1}$$

***Тут*** $w_i, u_i, v_i, T_i$ ***– вузлові значення зміщень і температури,*** $L_i$ ***– апроксимуючі функції, які є комбінацією алгебраїчних*** $N_j,\ j = 1,2,...,8,$ ***і тригонометричних*** $H_k,\ k = 1,2,3,$ ***поліномів [6,7,9]***

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1),\ N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1),\ N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1),$$

$$N_5 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta),\quad N_6 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi),\ N_7 = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta);\ N_8 = \frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi), \tag{2}$$

$$H_1 = \frac{\sin(\theta-\theta_2)-\sin(\theta-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_2)-\sin(\theta_1-\theta_3)+\sin(\theta_2-\theta_3)},\quad H_2 = \frac{\sin(\theta-\theta_3)-\sin(\theta-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_3)-\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_1)},$$

$$H_3 = \frac{\sin(\theta-\theta_1)-\sin(\theta-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_1)-\sin(\theta_3-\theta_2)+\sin(\theta_1-\theta_2)}.$$

При застосуванні МСЕ об'єм тіла розбивається на $M$ скінченних елементів. Використовуючи методику, викладену в [6], для визначення вузлових значень компонент вектора зміщень одержимо $3n$ ($n$ – число вузлових точок) лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial Э_m}{\partial w_j} = 0,\quad \sum_{m=1}^{M}\frac{\partial Э_m}{\partial u_j} = 0,\quad \sum_{m=1}^{M}\frac{\partial Э_m}{\partial v_j} = 0,\ j = 1,2,...,n. \tag{3}$$

Сумуючи вирази (3) по всіх скінченних елементах, одержимо для загальної глобальної нумерації вузлів систему рівнянь, в якій інтегрування по об'єму області замінено сумою інтегралів по об'ємах окремих скінченних елементів, а інтегрування по поверхні – сумою інтегралів по гранях елементів, на яких задано граничні умови в напруженнях. Для обчислення інтегралів, які входять в коефіцієнти системи (3), застосовуються квадратурні формули Гауса [2,5]. За знайденими вузловими значеннями зміщень обчислюються деформації, напруження і дисипативна функція в точках інтегрування Гауса, в яких вказані величини мають найвищу точність.

Варіаційна задача для функціоналу $Э_T$ розв'язується на тій же сітці скінченних елементів. При цьому похідна за часом $\partial T/\partial t$ не варіюється, а замінюється виразом $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}$ і в подальшому реалізується неявна схема розв'язування нестаціонарної задачі теплопровідності.

**Аналіз числових результатів.** Конкретні розрахунки проводились для товстої циліндричної панелі із зовнішнім радіусом $\mathrm{R} = 0{,}11\text{м}$, товщиною $\mathrm{h} = 0{,}02\text{м}$ і довжиною $l = 0{,}1\text{м}$. Вибирались такі механічні характеристики матеріалу: $\nu = 0{,}32$, $G = G' + iG''$, $G' = 0.968 \cdot 10^9\ Па$, $G'' = 0.871 \cdot 10^8\ Па$, $\rho = 0.936 \cdot 10^3\ кг/м^3$. Панель знаходиться в умовах теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого $T_c = 20^0 C$. Коефіцієнт тепловіддачі між навколишнім середовищем і панеллю постійним вважається сталими і рівний $\alpha_T = 25\ \dfrac{Вт}{м^2\ {}^0C}$. При розрахунках температури дисипативного розігріву теплофізичні характеристики вибрані такими: $\lambda = 0.5\ \dfrac{Вт}{м\ {}^0C}$, $c\rho = 1{,}5\ \dfrac{МДж}{м^3\ {}^0C}$.

На рис.1,2 представлено амплітудно-частотні і температурно-частотні характеристики (АЧХ і ТЧХ) циліндричної панелі з жорстко защемленими торцями в околі першого резонансу при $P_0 = 0.2 \cdot 10^5\ Па$.

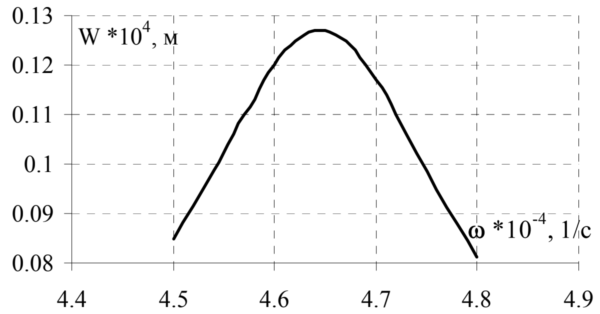


**Рис.1. Амплітудно-частотна характеристика циліндричної панелі**

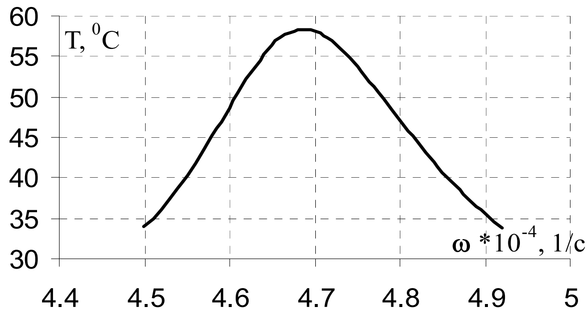


**Рис.2. Температурно-частотна характеристика циліндричної панелі**

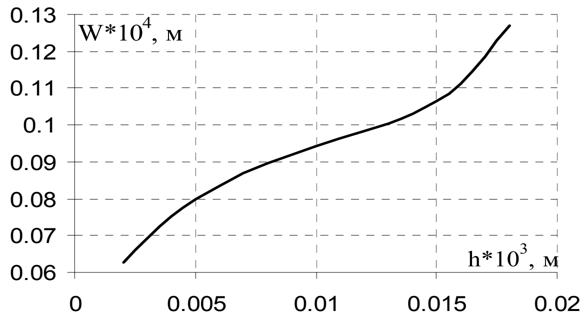


**Рис.3. Залежність максимальної амплітуди від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі**

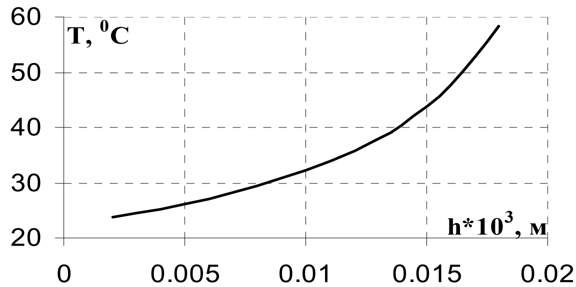


**Рис. 4. Залежність максимальної температури від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі**

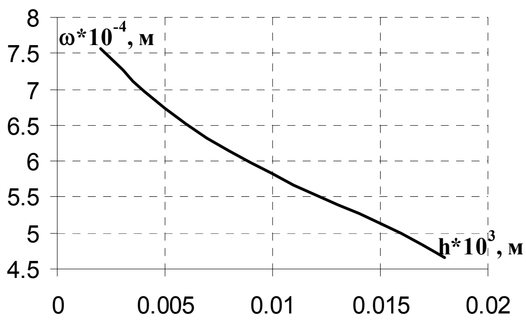


**Рис. 5. Залежність власної частоти від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі**

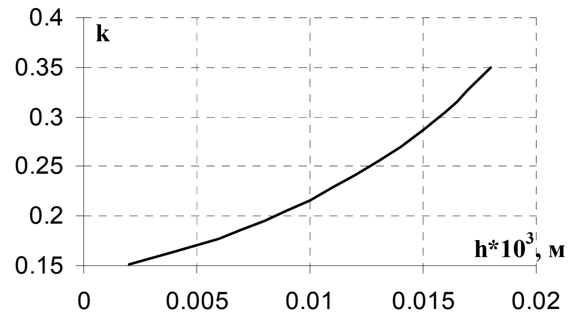


**Рис. 6. Залежність коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі**

На рис. 3,4,5,6 показано відповідно залежність максимальної амплітуди, максимальної температури, першої власної частоти та коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього шару циліндричної панелі.

Як видно з представлених числових результатів, структурна неоднорідність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики циліндричної панелі.

**Висновки.** У статті для незалежних від температури механічних і теплофізичних властивостей матеріалу методом скінченних елементів розв'язано тривимірну зв'язану задачу про резонансні коливання і дисипативний розігрів товстої тришарової непружної циліндричної панелі при дії на неї гармонічного за часом рівномірного тиску. Для цього випадку задачу зведено до розв'язування послідовності таких трьох задач: 1) динамічної задачі про вимушені резонансні коливання товстої в'язкопружної циліндричної панелі; 2) розрахунку дисипативної функції; 3) розв'язування тривимірної нестаціонарної задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Для розв'язування першої і третьої задач розроблено скінченно-елементний метод. Для випадку жорстко защемлених торців панелі розраховано амплітудно–, температурно-частотні характеристики коливань по першій основній згинній моді, а також залежності максимальної амплітуди коливань, максимальної температури дисипативного розігріву, власної частоти і коефіцієнта демпфування від товщини внутрішнього демпфуючого шару панелі.

Результати розрахунків показали, що структурна неоднорідність суттєво впливає на вказані динамічні характеристики.

**Список використаних джерел**

1. Завгородній А.В. Вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів товстостінної в'язкопружної циліндричної панелі // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2009. – №4. – С. 102 – 105.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
3. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 320 с.
5. Козлов В.И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязко-упругого материала // Прикл. механика. – 1996. – 32, №6. – С.82-89.
6. Козлов В.И. Якименко С.Н. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел вращения при осесимметричном гармоническом деформировании // Прикл. механика. – 1989. – 25, №5. – С.22-28.
7. Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Неосесимметричное термонапряженное состояние слоистых тел вращения из ортотропных материалов при неизотермическом нагружении // Механика композитных материалов. – 2004. – 40, №6. – С.731 – 752.
8. Hamid R. Hamidzaden, Reza N.Jazar. Vibrations of Thick Cylindrical Structurals. – New York–Dordrecht – Heidelberg – London: Springer, 2010. – 201 p.
9. Hensen J.S., Heppler G.K. A Mindlin shell element which satisfien rigid body requirements // AIAA J. – 1985. – 22, №2. – P. 288 – 295.

**Надійшла до редколегії 27.02.14**

**В. Будак, д-р техн. наук, проф., В. Карнаухов, д-р физ.-мат. наук, проф.**
**Институт механики им.С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев,**
**В. Сичко, канд. физ.-мат. наук, доц., А. Завгородний, канд. физ.-мат. наук**
**ННУ им. В.О. Сухомлинского, Николаев**

## ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОЛСТОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ МЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

***Методом конечных элементов решена пространственная задача о вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве толстой трёхслойной цилиндрической панели с жёстко защемлёнными торцами. Неупругое поведение материала описывается концепцией комплексных характеристик. Считается, что механические и теплофизические свойства материала не зависят от температуры. Исследовано влияние структурной неоднородности на амплитудно- и температурно-частотные характеристики панели, на её собственную частоту, максимальный прогиб, максимальную температуру и на коэффициент демпфирования панели.***

**V. Budak, Full Doctor (eng), Professor., V. Karnaukhov, Full Doctor, Professor.**
**S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,**
**V. Sichko, Ph.D., A. Zavgorodniy, Ph.D.**
**Mykolayiv State University named after Sukhomlynskyi, Mykolayiv**

## THE THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF A THICK THREE-LAYER CYLINDRICAL PANEL UNDER HARMONIC MECHANIC LOADING

***By a finite element method a three–dimensional problem on the forced resonance vibrations and dissipative heating of a thick three–layer cylindrical panel with rigidly clamped ends is solved. The nonelastic material behavior is described by a conception of the complex characteristics. It is supposed that the mechanical and thermophysical material properties do not depend on a temperature. An influence of a structural inhomogeneity on the amplitude– and temperature–frequency characteristics, on the natural frequency, maximum deflection, maximum temperature and damping coefficient of the panel are studied.***

# ДО 75-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ КУЛІНІЧА ГРИГОРІЯ ЛОГВИНОВИЧА

9 грудня 2013 року виповнилося 75 років відомому українському вченому, доктору фізико-математичних наук, заслуженому професору Київського національного університету імені Тараса Шевченка, академіку Академії наук вищої школи України Кулінічу Григорію Логвиновичу.

Народився Григорій Логвинович на хуторі Лучищів біля села Жеревці Лугинського району Житомирської області в багатодітній сім'ї залізничника. У 1956 році закінчив середню залізничну школу №32 на станції Білокоровичі Олевського району Житомирської області, з 1956 по 1959 рік працював на електростації Білокоровичського гарнізону, проходив дійсну службу в рядах Радянської Армії, мріяв про військову кар'єру. У 1959 році при виконанні службових обов'язків отримав поранення і став інвалідом Армії III групи.

Доля розпорядилась так, що замість двох військових училищ, до яких вступав Григорій Логвинович, він у грудні 1964 році закінчив з відзнакою механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка. Як одного з кращих студентів, під час навчання Кулініч Г.Л. був Ленінським стипендіатом, його у січні 1965 року зараховують до аспірантури при кафедрі теорії ймовірностей (науковий керівник – академік А.В. Скороход). У 1968 році Григорій Логвинович захистив кандидатську дисертацію "Про граничну поведінку розподілу розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь", де він вперше у вітчизняній і зарубіжній літературі розпочав систематичне дослідження властивостей нестійких розв'язків СДР. Кулініч Г.Л. в термінах існування просторових усереднень коефіцієнтів рівняння отримав необхідні та достатні умови слабкої збіжності у рівномірній топології нормованого розв'язку до вінерівського процесу, до узагальненого процесу дифузійного типу, достатні умови слабкої збіжності у рівномірній топології до бесселівського процесу, дифузійного процесу та споріднених з ним інших марківських процесів.

У жовтні 1966 року Григорій Логвинович починає працювати на механіко-математичному факультеті Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка на посаді асистента кафедри математичного аналізу. Згодом він працює на посаді старшого викладача кафедри математичного аналізу (з 1968 року), доцента кафедри теорії ймовірностей (з 1970 року), професора кафедри загальної математики (з жовтня 1981 р. і до теперішнього часу). Протягом 1981 – 2003 років Г.Л.Кулініч завідував кафедрою загальної математики. За його ініціативи у 1989 році на кафедрі загальної математики було відкрито нову спеціалізацію – математичне моделювання. Для студентів, які спеціалізувалися на кафедрі загальної математики з математичного моделювання, Григорій Логвинович розробив низку змістовних спеціальних курсів, серед яких такі: "Математичні моделі випадкових величин та процесів", "Асимптотичний аналіз нестійких стохастичних систем", "Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь", "Якісний аналіз стохастичних коливних систем".

Педагогічну діяльність Г.Л.Кулініч плідно поєднує з науковою. У 1981 році він успішно захистив докторську дисертацію на тему "Асимптотичні задачі стохастичних диференціальних рівнянь". Г.Л.Кулініч – відомий у всьому світі фахівець з теорії випадкових процесів та їх застосувань. Його фундаментальними працями створено два нові перспективні наукові напрямки цієї теорії: асимптотична теорія стохастичних диференціальних рівнянь при нерегулярній поведінці коефіцієнтів; теорія інваріантних множин стохастичних диференціальних рівнянь. Він – фундатор методу просторового усереднення коефіцієнтів стохастичних диференціальних рівнянь і детермінованого методу стабілізації нестійких стохастичних систем. Г.Л.Кулініч – автор понад 150 наукових праць, двох монографій "Асимптотичний аналіз нестійких розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь Іто" та "Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто", співавтор і редактор двох учбових посібників з грифом Міністерства освіти і підручника (у двох книгах) з "Вищої математики" для студентів природничих факультетів університетів і вищих технічних навчальних закладів, співавтор тринадцяти навчально-методичних праць.

Під керівництвом Г.Л.Кулініча захищено 18 кандидатських дисертацій, багато з яких працюють на викладацьких посадах механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серед його учнів є громадяни Гвінеї, В'єтнаму, Естонії, Казахстану, Росії, Туркменістану.

Про наукові і педагогічні досягнення Григорія Логвиновича Кулініча говорять його численні звання, нагороди, почесні грамоти, подяки та медалі. У 1983 році йому присвоєно вчене звання професора кафедри загальної математики, у 1994 році – звання кращого викладача року Київського національного університету імені Тараса Шевченка, у 1999 році він нагороджений знаком "Відмінник освіти України", у 2006 році обраний академіком Академії наук вищої школи України, у 2009 році удостоєний звання "Заслужений професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка".

Колектив механіко-математичного факультету щиро вітає Григорія Логвиновича зі знаменною датою і бажає йому козацького здоров'я, наснаги та нових творчої успіхів.

**Редколегія**

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ
## для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі – "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv,  а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського  http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html

**Загальні вимоги.**

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:
- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows.** Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

**Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника**

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

– текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;
– поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
– комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
  - шрифт статті – Arial, розмір 9;
  - інтервал між рядками – одинарний;
  - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
  - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
  - класифікаційний індекс Універсальної десяткової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);
  - відомості про авторів, що містять такі елементи
    перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
  - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання…", "Деякі питання…", "Проблеми…", Шляхи…" тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку);), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
  - анотація, резюме (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок ..."отримано задовільні результати …"; анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії'); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
  - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
  - *список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);*
  - дата надходження до редколегії, наприклад, " **Стаття надійшла до редколегії 09.11.05 "**. (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняна праворуч).

**Додаткові вимоги до тексту статті:**

– кожну абревіатуру слід уводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абревіатурою;
– джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
– *усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;*

– не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
– на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
– усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
– усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій віддтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;

– формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

| **Define Style:** | | | | **Define Size:** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Text | Times New Roman | | | Full | **9** pt | |
| Function | Times New Roman | | | Subscript/Superscript | **7** pt | |
| Variable | Times New Roman | italic | | Sub-Subscript/Superscript | **6** pt | |
| L.C.Greek | Symbol | | | Symbol | **14** pt | |
| UC.Greek | Symbol | | | Sub-Symbol | 9 pt | |
| Vector-matrix | Times New Roman | bold | | | | |
| Number | Times New Roman | | | | | |

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (К) або градусах Цельсія (оС), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

**Вимоги до складання списку літератури**

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовок бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

**Розбиття статті на розділи**

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. Пристатейним бібліографічним спискам передує рубрика СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

**Фонди, гранти**

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

**Застереження**

Неприпустимим є:
– подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
– подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
– подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
– затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

**Відомості про авторів**

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows ***ФАЙЛ>СВОЙСТВА***, обрати закладку ***ДОКУМЕНТ*** та заповнити поля ***Название, Автор***. У полі ***Заметки*** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання

# ВІСНИК

## КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

## МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

**Випуск 1(31)**

**Друкується за авторською редакцією**

**Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"**



**Формат 60x84$^{1/8}$. Ум. друк. арк. 7,6. Наклад 300. Зам. № 214-7176.**
**Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.**
**Підписано до друку 05.11.14**

**Видавець і виготовлювач**
**Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"**
**01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43**
**☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128**
**e-mail: vpc@univ.kiev.ua**
**http: vpc.univ.kiev.ua**
**Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02**