ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

(1)29/2013

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 10.01.13 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010 р.
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.2009 р.
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 517.518.124

Я. Журба асп., О. Константінов, канд. фіз.-мат. наук, доц.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: jar86@mail.ru, konstant12@yahoo.com

ПОДВІЙНІ ОПЕРАТОРНІ ІНТЕГРАЛИ РІМАНА-СТІЛТЬЄСА

Встановлені нові достатні умови існування подвійних операторних інтегралів, що підсилюють і розвивають недавні результати С. Альбеверіо та О. Мотовілова.

ВСТУП. У статті досліджуються подвійні операторні інтеграли вигляду:

$$\Phi(T) = \iint\limits_{[a,b)\times[c,d)} F(x,y)dE_1(x)TdE_2(y), \tag{1}$$

де E_1, E_2 – спектральні міри (розклади одиниці) в гільбертовому просторі H, $F(x,y)$ – операторнозначна функція зі значеннями в просторі $L(H)$. лінійних обмежених операторів в H, $T \in L(H)$. У випадку скалярної функції F теорія таких інтегралів побудована в серії робіт М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка [2–4, 9]. Ця теорія знайшла численні застосування в теорії збурень самоспряжених операторів (див., наприклад, [7, 8, 10]). Разом з тим інтеграли вигляду (1) для операторнозначних функцій F практично не досліджувалися. Лише нещодавно у статті С. Альбеверіо і О. Мотовілова [1] отримано деякі достатні умови існування таких інтегралів. Ми підсилюємо результати [1] і розширюємо клас функцій F. Більш того, у данній статті вивчаються властивості відображення (1), як трансформатора класу (S_p, S_q) (лінійного неперервного оператора $\Phi : S_p \to S_q$). Тут S_p – класи Неймана-Шетена компактних операторів. Зауважимо також, що звичайні операторні інтеграли Рімана-Стілтьєса вигляду.

$$\int_a^b K(\lambda)dE_\lambda, \tag{2}$$

де $K : [a,b) \to L(H)$ – розглядалися ще в [2–5, 9].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Пояснимо означення інтегралу (1). Для розбиття $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 = \{x_k\} \times \{y_k\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b,\ \ c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$ введемо інтегральну суму функції $F : [a,b) \times [c,d) \to L(H)$,

$$S(\Lambda) = S\left(F, \Lambda, E_1, E_2, T\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} F(\alpha_i, \beta_j)E_1([x_{i-1}, x_i))TE_2([y_{j-1}, y_j)),$$

де $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i), \beta_j \in [y_{j-1}, y_j), E_i([\alpha,\beta)) = E_i(\beta) - E_i(\alpha).$

Будемо казати, що подвійний операторний інтеграл (1) збігається за операторною нормою, якщо існує границя (за нормою $L(H)$) інтегральних сум: $\Phi = \lim\limits_{|\Lambda|\to 0} S(\Lambda)$, де $|\Lambda|$ – діаметр розбиття Λ.

Основним результатом статті є наступна теорема:

Теорема. Нехай E_1, E_2 – спектральні міри в H, $T \in L(H)$, $F : [a,b) \times [c,d) \to L(H)$. Припустимо, що функція F задовольняє умову Гьольдера з показником $\alpha > \frac{1}{2}$, тобто

$$\left\| F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) \right\| \le C(|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha) \tag{3}$$

І існує таке число $C > 0$, що

$$\left\| F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_2, y_2) \right\| \le C|x_1 - x_2| \times |y_1 - y_2|. \tag{4}$$

Тоді існують повторний та подвійний інтеграли Рімана – Стілтьєса (1). Ці інтеграли рівні між собою і функція $T \to \Phi(T)$ є трансформатором класу (S_p, S_p) для всіх $p \in [1, +\infty]$.

Зауваження 1. Теорема підсилює та узагальнює результати С. Альбеверіо і О. Мотовілова [1], які довели існування інтегралу (1) було доведено у випадку $\alpha = 1$ в (3). Заважимо, що в [1] S_p – властивості таких трансформаторів не вивчалися. Для скалярних функцій F результат теореми встановлено в [2] (в скалярному випадку умова (4) не потрібна). Існування одновимірного інтеграла (2) також встановлено в [2] за умови гьольдеровості K з показником $\alpha > \frac{1}{2}$.

Зауваження 2. За допомогою теореми Наймарка (див., наприклад, [6]) про ділатацію результат теореми переноситься на узагальнені розклади одиниці (неортогональні операторні міри) E_1, E_2.

Доведення. Будемо використовувати абстрактні результати М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка про багатовимірні інтеграли Рімана – Стілтьєса від функцій зі значеннями в банаховому просторі [2, теорема 5]. Зокрема, для доведення існування подвійного інтегралу достатньо довести, що існує таке L>0 , що для довільного розбиття Λ та довільних інтегральних сум $S(\Lambda), S'(\Lambda)$, що відповідають цьому розбиттю, виконується нерівність

$$\left\| S(\Lambda) - S'(\Lambda) \right\| \le L|\Lambda|^{\alpha - \frac{1}{2}} \tag{5}$$

і, крім того, для довільного розбиття $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ та його під розбиття $\Lambda' = \Lambda'_1 \times \Lambda_2$ (або $\Lambda' = \Lambda_1 \times \Lambda'_2$), де підрозбиття Λ'_i містить не більше однієї нової точки між двома точками розбиття Λ_i, існують інтегральні суми $S(\Lambda), S'(\Lambda')$ такі, що

$$\|S(\Lambda)-S'(\Lambda')\|\le L|\partial|^{\alpha-\frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

де $|\partial|$ – максимальна довжина інтервалу, що належить Λ_i', але не належить Λ_i.

Доведемо (5). Нехай $\Lambda=\Lambda_1\times\Lambda_2=\{a=\lambda_0<\lambda_1<...<\lambda_m=b\}\times\{c=\mu_0<\mu_1<...<\mu_n=d\}$, $(x_i,y_j),(x_i',y_j')\in[\lambda_{i-1},\lambda_i)\times[\mu_{j-1},\mu_j)$.

Тоді маємо

$$S(\Lambda)-S'(\Lambda)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(\big(F(x_i,y_j)-F(x_i',y_j')\big)\big(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1})\big)T\left(E_2(\mu_j)-E_2(\mu_{j-1})\right)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(F(x_i,y_j)-F(x_i',y_j)+F(x_i',y_j)-F(x_i',y_j')\big)\big(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1})\big)T\left(E_2(\mu_j)-E_2(\mu_{j-1})\right)=W_1+W_2,$$

де

$$W_1=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(F(x_i,y_j)-F(x_i',y_j)\big)\big(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1})\big)T\left(E_2(\mu_j)-E_2(\mu_{j-1})\right),$$

$$W_2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\big(F(x_i',y_j)-F(x_i',y_j')\big)\big(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1})\big)T\left(E_2(\mu_j)-E_2(\mu_{j-1})\right).$$

Позначимо $\overline{E}(\lambda,\mu):=E_1(\lambda)TE_2(\mu)$. Тоді можна записати $W_1=R_1+R_2+R_3$, де

$$R_1=\sum_{i=1}^{m}\big(F(x_i,y_1)-F(x_i',y_1)\big)\left(\overline{E}(\lambda_i,\mu_0)-\overline{E}(\lambda_{i-1},\mu_0)\right),$$

$$R_2=\sum_{i=1}^{m}\big(F(x_i,y_n)-F(x_i',y_n)\big)\left(\overline{E}(\lambda_i,\mu_n)-\overline{E}(\lambda_{i-1},\mu_n)\right),$$

$$R_3=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}\big(F(x_i,y_j)-F(x_i',y_{j+1})-F(x_i,y_j)+F(x_i',y_{j+1})\big)\big(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1})\big)T\left(E_2(\mu_j)-E_2(\mu_{j-1})\right)$$

З (3) випливає, що для всіх $v\in H$ маємо

$$\|R_1v\|\le C\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_i'|^{\alpha}\left\|\left(\overline{E}(\lambda_i,\mu_0)-\overline{E}(\lambda_{i-1},\mu_0)\right)v\right\|\le$$

$$\le C\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_i'|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\langle(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1}))TE_2(\mu_0)v,TE_2v\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C\max_{j=1}^{m}|x_i-x_i'|^{\alpha-\frac{1}{2}}\sqrt{b-a}\left(\left\langle(E_1(b)-E_1(a))TE_2(\mu_0)v,TE_2(\mu_0)v\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\le C_1|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}\|v\|$$

Отже, $\|R_1\|\le C_1|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Аналогічно $\|R_2\|\le C_2|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

З (4) слідує, що для всіх $v\in H$ маємо

$$\|R_3v\|\le C\sum_{j=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}|x_i-x_i'|\left(y_{j+1}-y_j\right)\left\|\left(\overline{E}(\lambda_i,\mu_j)-\overline{E}(\lambda_{i-1},\mu_j)\right)v\right\|\le$$

$$\le C\sum_{j=1}^{n-1}\left(y_{j+1}-y_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i-x_i'|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{m}\left\langle(E_1(\lambda_i)-E_1(\lambda_{i-1}))TE_2(\mu_j)v,TE_2(\mu_j)v\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C\max_{j=1}^{m}|x_i-x_i'|^{\frac{1}{2}}\sqrt{b-a}\sum_{j=1}^{n-1}\left(y_{j+1}-y_j\right)\|TE_2(\mu_j)v\|\le C_3|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\|v\|$$

Тоді $\|R_3\|\le C_3|\Lambda|^{\frac{1}{2}}\le C_3'|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Отже $\|W_1\|\le L_1|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Аналогічно $\|W_2\|\le L_2|\Lambda|^{\alpha-\frac{1}{2}}$.

Звідси легко випливає (5). Доведення (6) цілком аналогічне. Таким чином, ми довели, що подвійний інтеграл існує. Зауважимо, що існування повторного інтегралу (2) випливає з результатів [2]. Звідси випливає і те, що повторний інтеграл визначає трансформатор класу (S_p,S_p). Нескладно доводиться і рівність подвійного та повторного інтегралу.

Наведемо приклад, що показує істотність умови (4) (у випадку скалярної F ця умова не потрібна). Нехай $H=l_2$, $\{e^{\infty}_{n=1}{}^{n}_{i=1}{}^{n}_{j=1}\}$, $\{u^{\infty}_{n=1}\}$ – ортонормовані базиси H. Функція $F:[0,1)^2\to L(l_2)$, визначена рівністю

$$F(\lambda,\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n(\cdot,e_{nij})\max\left\{0,\frac{1}{n}-\left|\frac{i-1}{n}-\lambda\right|\right\}\max\left\{0,\frac{1}{n}-\left|\frac{j-1}{n}-\mu\right|\right\},$$

$$E_1(\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\cdot,e_{nij})e_{nij}X_{\Delta}\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$E_2(\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\cdot,e_{nij})e_{nij}X_{\Delta}\left(\frac{j}{n}\right)$$

Неважко показати, що виконується умова (3) з показником $\alpha=1$ та послаблена умова (4):

$$\|F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_2,y_2)\|\le C|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}\times|y_1-y_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Проте, легко показати, що інтеграл (1) з одиничним оператором T не існує. Отже, умова (4) теореми істотна.

ВИСНОВКИ. Отримано нові умови існування подвійних операторних інтегралів, що узагальнюють нещодавні результати С. Альбеверіо і О. Мотовілова. Вивчено також властивості таких інтегралів, як трансформаторів класу (S_p, S_p).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ. 1. Альбеверио С., Мотовилов А.К. Операторные интегралы Стилтьеса по спектральной мере и решения некоторых операторных уравнений // Труды Московського Математического Общества – 2011. – т. 72, №1, – С. 63–103. 2. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 1, – С 33–67. 3. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 2, – С. 26–60. 4. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Двойные операторные интегралы Стильтьеса// Проблемы математической физики. – 1966. – № 3, – С. 27–53. 5. Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Интегрирование и дифференцирование эрмитовых операторов и приложение к теории возмущений. – Воронеж. Тр. семинара по функциональному анализу – 1956 – т. 1, – С. 81–105. 6. Маламуд М. М., Маламуд С. М., Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве, Алгебра и анализ. – 2003 – № 3. 7. Пеллер В. В., Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряжённых операторов // Функц. анал. и его прил., – 1985 – № 19, – С. 37–51. 8. Aleksandrov A.B., Peller V.V. Functions of perturbed unbounded self-adjoint operators. Operator Bernstein type inequalities // Indiana Univ. Math. J. – 2010. – Vol. 59, – P. 1451–1490. . 9. Birman M., Solomyak M. Double operator integrals in Hilbert space// Integral equ. oper. theory – 2003. – № 47. – С. 131–168. 10. Potapov D., Sukochev F. A. Lipschitz and commutator estimates in symmetric operator spaces//, Operator Theory 2008, – № 59:1, – С. 211–234.

Надійшла до редколегії 05.11.12

Я. Журба асп., А. Константинов канд. физ.-мат. наук, доц.

ДВОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА-СТИЛТЬЕСА

Установлены новые достаточные условия существования двойных операторных интегралов, усиливающие и развивающие недавние результаты С.Альбеверио и А.Мотовилова

I. Zhurba, PhD graduate, O. Konstantinov, PhD

DOUBLE RIEMANN-STIELTJES OPERATOR INTEGRALS

In paper give new sufficient conditions on the existence of double operator integrals which strengthen and extend recent results of S. Albeverio and A. Motovilov.

УДК 517.518

О. Нестеренко, канд. фіз.-мат. наук,
А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: ChaikovskiyAV@ukr.net

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ДРУГИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ КРАТНИХ АРГУМЕНТІВ

У роботі отримано нові нерівності для других модулів неперервності кратних аргументів.

ВСТУП. Нехай $UC(\mathbb{R})$ – множина всіх рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ дійсних функцій. Визначимо для них другу скінченну різницю та другий (рівномірний) модуль неперервності:

$$\Delta_h^2(f,\ x) := f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),\ x \in \mathbb{R},\ h > 0,\ f \in UC(\mathbb{R});$$

$$\omega_2(f,\ t) = \sup_{h\in(0,\ t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_h^2(f,\ x)\right|,\ t > 0,\ f \in UC(\mathbb{R}).$$

У монографії [2] проведено детальне вивчення рівномірних модулів неперервності різних порядків, зокрема, наведено нерівності для них. У цій же монографії можна знайти й бібліографічні посилання. У даній статті отримано нерівності для других модулів неперервності кратних аргументів, які, наскільки нам відомо, у літературі не зустрічались.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Щоб сформулювати основний результат нашої роботи, для елементів простору $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ і чисел $k \in \mathbb{Z}$ і $n \in \mathbb{N}$ введемо позначення

$$p(k,\ n) := (\ \ldots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n-1,\ \ldots\ ,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$

де перший ненульовий елемент цієї послідовності стоїть на k-ому місці. Через $p(k,\ n)_i$ позначатимемо i-ту координату елемента $p(k,\ n)$, де $i \in \mathbb{Z}$.

Основним результатом даної роботи є така теорема.

Теорема. Якщо для деяких натуральних чисел m, n, $n_1, \ldots, n_m$ та цілих чисел k, $k_1, \ldots, k_m$ і s, $s_1, \ldots, s_m$ виконується рівність $sp(k,\ n) = \sum_{i=0}^{m} s_i p(k_i,\ n_i)$, то справджується нерівність

$$|\, s \,|\ \omega_2(f,\ nt) \le \sum_{i=1}^{m} \left| s_i \right|\ \omega_2(f,\ n_i t),\ t > 0,\ f \in UC(\mathbb{R}).$$

Доведення. Друга скінченна різниця допускає зображення (яке можна отримати, записавши формулу (1.31) з [1] при $m = 2$ і звівши в ній подібні), а саме:

$$\Delta_{nh}^2(f,\ x) = f(x+2nh) - 2f(x+nh) + f(x) = \Delta_h^2(f,\ x) + 2\Delta_h^2(f,\ x+h) + \ldots + (n-1)\Delta_h^2(f,\ x+(n-2)h) +$$
$$+ n\Delta_h^2(f,\ x+(n-1)h) + (n-1)\Delta_h^2(f,\ x+nh) + \ldots + 2\Delta_h^2(f,\ x+(2n-3)h) + \Delta_h^2(f,\ x+(2n-2)h) =$$
$$= \sum_{j=0}^{2n-2} p(k,\ n)_{j+k}\ \Delta_h^2(f,\ jh) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} p(k,\ n)_{j+k}\ \Delta_h^2(f,\ x+jh),\ x \in \mathbb{R},\ h > 0,\ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ f \in UC(\mathbb{R}). \quad (1)$$

Маємо такі рівності (пояснення див. нижче):

$$s\Delta_h^2(f,\ x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} s\,p(k,\ n)_{j+k}\,\Delta_h^2(f,\ x+jh) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{i=1}^{m} s_i\,p(k_i,\ n_i)_{j+k}\,\Delta_h^2(f,\ x+jh) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j_i\in\mathbb{Z}} p(k_i,\ n_i)_{j_i+k_i}\,\Delta_h^2\big(f,\ x+(k_i-k+j_i)h\big) = \sum_{i=1}^{m} s_i\Delta_{n_ih}^2\big(f, x+(k_i-k)h\big).$$

У першій та останній рівностях ми скористались формулою (1), у другій – рівністю з умови теореми, а в третій рівності ми змінили порядок підсумовування та у внутрішніх сумах зробили заміну індексу сумування: $j = k_i - k + j_i$, $1 \le i \le m$. Звідси

$$|\,s\,|\ \omega_2(f,\ nt) = |\,s\,| \sup_{h\in(0,\ t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_{nh}^2(f,\ x)\right| \le \sum_{i=1}^{m}|s_i| \sup_{h\in(0,\ t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_{n_ih}^2\big(f,\ x+(k_i-k)h\big)\right| \le \sum_{i=1}^{m}|\,s_i\,|\ \omega_2(f,\ n_it).$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тоді $\omega_2(f,\ nt) \le n^2\omega_2(f,\ t)$.

Зауваження. Твердження наслідку 1 добре відоме. Для модуля неперервності функції на відрізку див., наприклад, [2, формула (2.24)].

Доведення випливає з теореми та рівності

$$p(1,\ n) = p(1,\ 1) + 2p(2,\ 1) + 3p(3,\ 1) + \ldots + (n-1)\,p(n-1,\ 1) + np(n,\ 1) +$$
$$+ (n-1)\,p(n+1,\ 1) + \ldots + 3p(2n-3,\ 1) + 2p(2n-2,\ 1) + p(2n-1,\ 1).$$

Наслідок 2. Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Тоді

$$\omega_2\big(f,\ (2n-1)t\big) \le 2\omega_2(f,\ nt) + 2\omega_2\big(f,\ (n-1)t\big) + \omega_2(f,\ t).$$

Зауваження. Твердження наслідку 2 є аналогом частинного випадку нерівності з наслідку 1 $\omega_2(f,\ 2nt) \le 4\omega_2(f,\ nt)$ на випадок, коли розглядається непарне кратне аргумента.

Доведення випливає з теореми та рівності

$$p(1,\ 2n-1) = p(1,\ n) + p(2n-1,\ n) + 2p(n+1,\ n-1) - p(2n-1,\ 1).$$

Наслідок 3. Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$, $t > 0$. Тоді

$$2\omega_2(f,\ nt) \le \omega_2\big(f,\ (n+m)t\big) + \omega_2\big(f,\ (n-m)t\big) + 2\omega_2(f,\ mt).$$

Доведення випливає з теореми та рівності

$$p(1,\ n+m) + p(2m+1,\ n-m) = p(1,\ m) + 2p(m+1,\ n) + p(2n+1,\ m).$$

Наслідок 4. Нехай $f \in UC(\mathbb{R})$, $H_1, H_2 \in \mathbb{R}$, $H_1 > H_2 > 0$, $t > 0$. Тоді

$$2\omega_2(f,\ H_1) \le \omega_2(f,\ H_1+H_2) + \omega_2(f,\ H_1+H_2) + 2\omega_2(f,\ H_2).$$

Доведення випливає з наслідку 3, якщо спрямувати $t \to 0$, $n \to \infty$ і $m \to \infty$ так, щоб $nt \to H_1$, $mt \to H_2$, і врахувати неперервність функції ω_2 (див. [2, лема 2.2]).

Зауваження. Нерівність з наслідку 4 встановлена С.В. Конягіним [1, теорема 1].

Приклад. З теореми випливає, що для функції $f \in UC(\mathbb{R})$ і числа $t > 0$ справджуються наступні нерівності:

1) $\omega_2(f,\ 7t) \le 2\omega_2(f,\ 4t) + \omega_2(f,\ 3t) + 2\omega_2(f,\ 2t)$, бо $p(1,\ 7) = p(1,\ 4) + p(7,\ 4) + p(5,\ 3) + p(5,\ 2) + p(7,\ 2)$;

2) $\omega_2(f,\ 7t) \le 2\omega_2(f,\ 4t) + 2\omega_2(f,\ 3t) + \omega_2(f,\ t)$ за наслідком 2;

3) $\omega_2(f,\ 7t) \le 5\omega_2(f,\ 3t) + 4\omega_2(f,\ t)$, бо
$p(1,\ 7) = p(1,\ 3) + p(4,\ 3) + p(5,\ 3) + p(6,\ 3) + p(9,\ 3) + p(4,\ 1) + p(5,\ 1) + p(9,\ 1) + p(10,\ 1)$;

4) $\omega_2(f,\ 7t) \le 4\omega_2(f,\ 3t) + 3\omega_2(f,\ 2t) + \omega_2(f,\ t)$, бо
$p(1,\ 7) = p(1,\ 3) + p(4,\ 3) + p(6,\ 3) + p(9,\ 3) + p(4,\ 2) + p(6,\ 2) + p(8,\ 2) + p(7,\ 1)$;

5) $\omega_2(f,\ 7t) \le 2\omega_2(f,\ 5t) + 3\omega_2(f,\ t)$, бо $p(1,\ 7) = p(1,\ 5) + p(5,\ 5) + p(7,\ 1) - p(5,\ 1) - p(9,\ 1)$;

6) $\omega_2(f,\ 7t) \le \omega_2(f,\ 5t) + \omega_2(f,\ 4t) + 2\omega_2(f,\ 2t)$, бо
$2p(1,\ 7) = p(1,\ 5) + p(1,\ 4) + p(5,\ 5) + p(7,\ 4) + p(5,\ 2) + 2p(6,\ 2) + p(7,\ 2)$;

7) $\omega_2(f,\ 7t) \le \omega_2(f,\ 5t) + 2\omega_2(f,\ 3t) + \omega_2(f,\ 2t) + 2\omega_2(f,\ t)$, бо
$p(1,\ 7) = p(1,\ 5) + p(6,\ 3) + p(9,\ 3) + p(6,\ 2) + p(9,\ 1) + p(10,\ 1)$.

ВИСНОВКИ. Запропоновано досить загальну схему отримання нерівностей для других модулів неперервності кратних аргументів. Як наслідки основного результату одержано як відомі, так і нові нерівності для других модулів неперервності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Конягин С. В. О вторых модулях непрерывности // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 1–3. 2. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – К.: Наукова думка, 1992. – 224 с.

Надійшла до редколегії 23.10.12

А. Нестеренко, канд. физ.-мат. наук, А. Чайковский, канд. физ.-мат. наук

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВТОРАХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ КРАТНИХ АРГУМЕНТОВ

В работе получены новые неравенства для вторых модулей непрерывности кратных аргументов

O. Nesterenko, PhD, A. Chaikovskiy, PhD

INEQUALITIES FOR SECOND MODULUS OF CONTINUITY IN THE CASE OF MULTIPLE ARGUMENTS

New inequalities for second modulus of continuity in the case of multiple arguments are obtained.

УДК 513.88: 517.98

С. Тищенко, канд. фіз.-мат. наук, К. Денісова, студ.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: tish_serg56@mail.ru, Ket31@bigmir.net

АНАЛІТИЧНІ ТА ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБРИ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ВІД ДВОХ ЕРМІТОВИХ ТВІРНИХ

Побудовано топологічну ядерну *- алгебру степеневих рядів від двох ермітових твірних. Досліджено топологічні й аналітичні властивості елементів алгебри. Для вибраних вагових послідовностей описано область збіжності та (для комутуючих змінних) множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. У випадку антикомутуючих твірних алгебра реалізується як алгебра звичайних подвійних степеневих рядів від двох дійсних комутуючих змінних, наводиться її матрична реалізація та описується центр.

ВСТУП. На основі формальних степеневих рядів можна розвинути найбільш загальну форму операторного числення. Так, кожне співвідношення, яке має місце для формальних степеневих рядів, можна перенести на степеневі ряди у довільній асоціативній алгебрі, які збігаються у тому чи іншому сенсі. В якості асоціативної алгебри можна вибрати, наприклад, алгебру лінійних обмежених операторів у гільбертовому просторі.

Робота є розширеним і доповненим варіантом статті [2], в якій побудована топологічна *- алгебра степеневих рядів від антикомутуючих ермітових твірних, вивчені аналітичні властивості її елементів, а також наведений опис її центру, та статті [3], про зображення деякої топологічної *-алгебри, породженої двома комутуючими ермітовими твірними.

У роботі розглядаються окремо випадки комутуючих та антикомутуючих ермітових твірних. У випадку комутуючих змінних для вибраних вагових послідовностей описані область збіжності та множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. Також у роботі наводиться функціональна реалізація алгебри рядів від двох антикомутуючих ермітових твірних у вигляді матрично-значних функцій, елементами яких є звичайні подвійні степеневі ряди від двох дійсних комутуючих змінних із певними граничними умовами.

Основні означення та поняття.

Означення 1. *- алгебра A називається топологічною *- алгеброю, якщо A є топологічним лінійним простором і відображення $A \ni f \mapsto f^* \in A$ (інволюція) неперервне, а відображення $A \times A \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in A$ (множення) є неперервним відносно кожного із співмножників при фіксованому другому (роздільно неперервне).

Означення 2. Нехай $(H_\tau)_{\tau\in T}$ (T – довільна множина індексів) – сім'я комплексних гільбертових просторів із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_\tau := (\cdot,\cdot)_{H_\tau}$ та нормами $\|\cdot\|_\tau := \|\cdot\|_{H_\tau}$. Топологічний простір $A = prlim_{\tau\in T} H_\tau$ називається ядерним, якщо для кожного $\tau \in T$ знайдеться таке $\tau' \in T$, що оператор вкладення $H_{\tau'} \to H_\tau$ є оператором Гільберта - Шмідта.

Означення 3. Топологічний ядерний простір A називається ядерною алгеброю, якщо A є асоціативною алгеброю над полем C та операція множення $A \times A \ni (f,g) \mapsto f \cdot g \in A$ є роздільно неперервною в топології проективної границі.

Означення 4. Ядерною *- алгеброю будемо називати ядерну алгебру з інволюцією *, яка задовольняє умову $\|f^*\|_\tau = \|f\|_\tau$ для всіх $f \in A,\ \tau \in T$.

Означення 5. Елемент f топологічної алгебри A називається цілим, якщо для довільного $\lambda > 0$ множина $\left\{\frac{1}{n!}(\lambda f)^n \in A,\ n = 1,2,\dots\right\}$ є обмеженою в A.

Означення 6. Топологічна алгебра, в якій кожен елемент є цілим, називається топологічною цілою алгеброю.

Означення 7. Множина A_S всіх елементів топологічної алгебри A, які комутують з усіма елементами деякої підмножини $S \subset A$, називається комутантом множини S і позначається A'. Як відомо, комутант є підалгеброю алгебри A.

Означення 8. Центром Z алгебри A називається множина $Z = A \cap A'$.

Означення 9. Нехай Φ – комплексний лінійний простір, в якому задано зліченну систему скалярних добутків $(\varphi,\psi)_n$. Припустимо, що норми $\|\varphi\|_n = \sqrt{(\varphi,\varphi)_n}$, які відповідають цим скалярним добуткам, узгоджені між собою. Позначимо через H_n – поповнення Φ по відповідній нормі. Якщо простір $\bigcap_n H_n$ є повним і при цьому має місце рівність $\bigcap_n H_n = \Phi$, то простір Φ називається зліченно-гільбертовим простором.

Об'єкт дослідження – топологічна *- алгебра степеневих рядів. Формальним степеневим рядом $a(u,v)$ від твірних u та v ("незалежних змінних") називається вираз вигляду [1] $a(u,v) = \sum_{n\in I} a_n u^{n_1} v^{n_2}$, де сумування розповсюджується на множину мультиіндексів $I \ni n = (n_1, n_2)$ з невід'ємними цілими компонентами n_1 та n_2, $a_n \in C$ – комплексні коефіцієнти. Приймемо також позначення $|n| = n_1 + n_2$. Для рядів $a = a(u,v) = \sum_{n\in I} a_n u^{n_1} v^{n_2}$, $b = b(u,v) = \sum_{n\in I} b_n u^{n_1} v^{n_2}$ природно визначаються операції додавання та множення на скаляр (покоефіцієнтно): $a + b = \sum_{n\in I} (a_n + b_n) u^{n_1} v^{n_2}$, $\alpha \cdot a = \sum_{n\in I} (\alpha a_n) u^{n_1} v^{n_2}$ $(\forall a, b;\ \alpha \in \mathbb{C}^1)$. Добуток двох степеневих рядів визначимо за формулою $c = a\cdot b = \sum_{n\in I} c_n u^{n_1} v^{n_2}$, коефіцієнти c_n якого записуються у вигляді згортки відповідних коефіцієнтів рядів a та b: $c_n = \sum_{k, n-k\in I} s(n-k, k)\, a_{n-k} b_k = \sum_{k,n-k\in I} s(k, n-k)\, a_k b_{n-k}$. Вигляд функції $s(p,q)\,(p = (p_1, p_2) \in I, q = (q_1, q_2) \in I)$ залежить від формули комутації твірних, тобто якщо $uv = vu$, то $s(p,q) = 1\ \forall p,\ q \in I$; якщо $uv = -vu$, то $s(p,q) = (-1)^{p_2 q_1}\ \ \forall p, q \in I$.

Таким чином, на множині степеневих рядів визначено структуру лінійного простору над C, а також операцію множення, які у сукупності задовольняють всім аксіомам асоціативної алгебри. Інволюцію * в алгебрі визначимо формулою: $(a(u,v))^* = \left(\sum_{n\in I} a_n u^{n_1} v^{n_2}\right)^* = \sum_{n\in I} t(n)\, \overline{a_n} u^{n_1} v^{n_2}$. Вигляд функції $t(p)\,(p = (p_1, p_2) \in I)$ також залежить від формули комутації твірних: якщо $uv = vu$, то $t(p) = 1\ \forall p \in I$; якщо $uv = -vu$, то $t(p) = (-1)^{p_1 p_2}\ \ \forall p \in I$.

Наділимо множину всіх формальних степеневих рядів топологічною структурою. Для цього при кожному натуральному $\tau \in N$ визначимо гільбертів простір H_τ рядів $a = a(u,v) = \sum_{n\in I} a_n u^{n_1} v^{n_2}$, $b = b(u,v) = \sum_{n\in I} b_n u^{n_1} v^{n_2}$:

$$H_\tau = \left\{ a(u,v) = \sum_{n\in I} a_n u^{n_1} v^{n_2},\ b(u,v) = \sum_{n\in I} b_n u^{n_1} v^{n_2} : (a,b)_\tau = \sum_{n\in I} a_n \overline{b_n} m_n(\tau),\ \|a\|_\tau^2 = (a,a)_\tau = \sum_{n\in I} |a_n|^2 m_n(\tau) < \infty \right\},$$

де $\{m_n(\tau)\}_{n\in I}$ – деяка вагова послідовність. Наявність топологічної структури дозволяє не використовувати слово "формальний" і писати коротко "степеневий ряд". Розглянемо локально-опуклий топологічний простір $U = prlim_{\tau=1,2,\dots} H_\tau$, який як множина співпадає з перетином $\bigcap_{\tau\in N} H_\tau$ зліченного числа гільбертових просторів H_τ (є зліченно-гільбертовим простором). Базис околів нуля в U утворюють множини $W(0;\ \tau,\ \delta) = \{a \in U : \|a\|_\tau < \delta\}$ при довільних $\tau \in N$ та $\delta > 0$. Простір U буде ядерним локально-опуклим топологічним простором. Накладемо на множину всіх вагових послідовностей $\{m_n(\tau)\}_{n\in I}$ наступні дві умови: 1) $\forall \tau \in N,\ \exists \tau_1 \in N$ таке, що $\sum_{n\in I} \dfrac{m_n(\tau)}{m_n(\tau_1)} < \infty$; 2) $m_{n+l}(\tau) \le c(\tau) m_n(\tau) m_l(\tau)$ $(n = (n_1, n_2),\ l = (l_1, l_2) \in I; \tau = 1, 2 \dots;$ $c(\tau) = const)$. Наприклад, легко перевірити, що обидві умови 1) та 2) виконуються для двох вагових послідовностей наступного вигляду: $m_n(\tau) = (1 + |n|^2)^\tau$ та $m_n(\tau) = \tau^{|n|}$.

Покажемо, що $U = prlim_{\tau=1,2,\dots} H_\tau$ є топологічною *- алгеброю, тобто множення (згортка) $a \cdot b$ та інволюція * є неперервними операціями в U. Дійсно, для $\tau_0 = \tau_1$, що задовольняє умову 1), маємо згідно нерівності Коші–Шварца:

$$\|a\cdot b\|_\tau^2 = \sum_{n\in I} \left|(a\cdot b)_n\right|^2 m_n(\tau) = \sum_{n\in I} \left| \sum_{k+m=n} s(m,k)\, a_m b_k \right|^2 m_n(\tau) = \sum_{n\in I} \left| \sum_{k+m=n} s(m,k)\, a_m m_k^{-1/2}(\tau_0)\, b_k m_k^{1/2}(\tau_0) \right|^2 m_n(\tau_0) \le$$

$$\le \sum_{n\in I} \left(\sum_{k+m=n} |a_m|^2 m_k(\tau_0) \right) \left(\sum_{k\in I} |b_k|^2 m_k(\tau_0) \right) m_n(\tau) \le$$

$$\|b\|_{\tau_0}^2 \sum_{n\in I} \sum_{k, n-k\in I} |a_{n-k}|^2 m_k^{-1}(\tau_0)\, m_n(\tau) = \|b\|_{\tau_0}^2 \sum_{k\in I} m_k^{-1}(\tau_0) \left(\sum_{n\in I} |a_n|^2 m_{n+k}(\tau) \right) \le$$

$$\le c(\tau) \|b\|_{\tau_0}^2 \left(\sum_{k\in I} \frac{m_k(\tau)}{m_k(\tau_0)} \right) \sum_{n\in I} |a_n|^2 m_n(\tau) = c(\tau) \|a\|_\tau^2 \cdot \|b\|_{\tau_0}^2 \cdot \left(\sum_{k\in I} \frac{m_k(\tau)}{m_k(\tau_0)} \right) = c_1(\tau, \tau_0) \|a\|_\tau^2 \cdot \|b\|_{\tau_0}^2,$$

де позначено $c_1(\tau, \tau_0) = c(\tau) \sum_{k\in I} \dfrac{m_k(\tau)}{m_k(\tau_0)}$ і $c_1 < \infty$ згідно умови 1). Остаточно маємо: $\|a\cdot b\|_\tau^2 \le c_1(\tau, \tau_0) \|a\|_\tau^2 \|b\|_{\tau_0}^2$. Ця нерівність означає, що операція множення в U є сумісно неперервною. Повторно застосовуючи останню нерівність для довільних $a \in U,\ b = a$, одержимо $\|a^m\|_\tau^2 = \|a \cdot a^{m-1}\|_\tau^2 \le \left(c_1(\tau, \tau_0) \|a\|_{\tau_0}^2\right)^{m-1} \|a\|_\tau^2$. Отже

$$0 \le \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m!} \|a^m\|_\tau^2 \le \|a\|_\tau^2 \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m!} \left(c_1(\tau, \tau_0) \|a\|_{\tau_0}^2\right)^{m-1} = 0.$$

Це означає, що довільний елемент a алгебри $U = prlim_{\tau\in N} H_\tau$ є цілим. Оскільки

$$\|a^*\|_\tau^2 = \sum_{n\in I} \left| t(n)\, \overline{a_n} \right|^2 m_n(\tau) = \sum_{n\in I} |a_n|^2 m_n(\tau) = \|a\|_\tau^2,$$

то інволюція є унітарним оператором в кожному просторі H_τ, а отже є неперервним оператором в алгебрі U.

Сумуючи доведене вище, одержимо, що алгебра U степеневих рядів від двох ермітових твірних є ядерною топологічною *- алгеброю, кожен елемент якої є цілим. Зауважимо також, що як лінійний простір *- алгебра U ізоморфна *- алгебрі подвійних степеневих рядів від двох дійсних комутуючих змінних [4, с.346] із звичайними лінійними операціями, але з інволюцією * й некомутативним множенням, що визначаються формулами вище. Враховуючи цей ізоморфізм, збіжність формального степеневого ряду від антикомутуючих твірних (u,v) далі будемо розуміти як збіжність відповідного подвійного степеневого ряду від дійсних комутуючих змінних (x, y) після заміни $u \to x,\ v \to y$.

Випадок комутуючих змінних. Розглянемо топологічну *- алгебру U , елементами якої є степеневі ряди від двох звичайних комутуючих ермітових змінних $u = x$ та $v = y$ $(x \cdot y = y \cdot x,\ x^* = x,\ y^* = y)$ із заданою умовою спадання їх коефіцієнтів. Легко побачити, що в силу комутації змінних x та y , довільні два ряди $a(x, y) = \sum_{n\in I} a_n x^{n_1} y^{n_2}$ та $b(x, y) = \sum_{n\in I} b_n x^{n_1} y^{n_2}$ також комутують між собою: $a(x, y)\cdot b(x, y) = b(x, y)\cdot a(x, y)$. Це означає, що наша алгебра є комутативною асоціативною *- алгеброю.

Опис множини лінійних неперервних мультиплікативних симетричних функціоналів. Розглянемо випадок вагової послідовності $m_n(\tau) = (1+|n|^2)^\tau$. Оскільки алгебра U як лінійний топологічний простір є перетином зліченої кількості гільбертових просторів H_τ , тобто $U = \bigcap_{\tau=1,2,\ldots} H_\tau$, то згідно загальної теорії для таких просторів, спряжений до U простір U' лінійних неперервних функціоналів є об'єднанням зліченної кількості гільбертових просторів $H_{-\tau}$, тобто $U' = \bigcup_{\tau=0,1,\ldots} H_{-\tau}$ з топологією індуктивної границі. Нехай $l(\cdot) \in U'$ і додатково $l(\cdot)$ є симетричним мультиплікативним функціоналом. Запишемо умови, яким повинен задовольняти функціонал $l(\cdot)$ для довільних $a = a(x, y),\ b = b(x, y)$ із U та довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^1$:

1) лінійність: $l(\alpha a + \beta b) = \alpha l(a) + \beta l(b)$;

2) неперервність (обмеженість): $|l(a)| \le c_l \|a\|_\tau$,(c_l =const, τ – фіксоване натуральне);

3) симетричність - $l(a^*) = \overline{l(a)}$;

4) мультиплікативність: $l(a\cdot b) = l(a) l(b)$.

Нехай $a(x, y) = \sum_{n\in I} a_n x^{n_1} y^{n_2} \in U$. Тоді при кожному $\tau = 1, 2, \ldots$ маємо $\sum_{n\in I} |a_n|^2 (1+|n|^2)^\tau = \|a\|_\tau^2 < \infty$. Використовуючи умови 1), 2) та 4) на функціонал $l(\cdot)$, одержуємо:

$$l\left(a(x, y)\right) = l\left(\sum_{n\in I} a_n x^{n_1} y^{n_2}\right) = \sum_{n\in I} a_n l\left(x^{n_1} y^{n_2}\right) = \sum_{n\in I} a_n l(x^{n_1}) l(y^{n_2}) = \sum_{n\in I} a_n \left[l(x)\right]^{n_1} \left[l(y)\right]^{n_2}.$$

Введемо скорочені позначення: $l(x) = l_1,\ l(y) = l_2$. Тоді $l(a) = l\left(a(x.y)\right) = \sum_{n\in I} a_n l_1^{n_1} l_2^{n_2}.$ Для довільного фіксованого $\tau = 1, 2, \ldots$, використовуючи обмеженість функціоналу $l(\cdot)$ та нерівність Коші-Шварца, знаходимо:

$$|l(a)|^2 = \left|\sum_{n\in I} a_n l_1^{n_1} l_2^{n_2}\right|^2 = \left|\sum_{n\in I} \left(a_n \left(1+|n|^2\right)^{\tau/2}\right)\left(l_1^{n_1} l_2^{n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau/2}\right)\right|^2 \le \sum_{n\in I} |a_n|^2 \left(1+|n|^2\right)^\tau \sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau} =$$

$$= \left(\sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau}\right) \| a(x, y)\|_\tau^2 = \left(\sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau}\right) \| a(x, y)\|_\tau^2 = C_l^2 \| a \|_\tau^2 ,$$

де позначено $C_l^2 = \sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau}$. Із одержаної оцінки $\| l(a)\| \le C_l \| a\|_\tau$ випливає, що необхідною і достатньою умовою обмеженості функціонала $l(\cdot)$ є умова $C_l < \infty$ для довільного фіксованого $\tau = 1, 2, \ldots$. Фактично задача зводиться до того, щоб вказати ті значення l_1 та l_2 , для яких подвійний ряд, що визначає C_l , збігається. Розглянемо спочатку елементи вигляду $a^{(k)} = \sum \delta_n^{(k)} x^{n_1} y^{n_2}$, де $k \in I$ $(k \ne 0)$ – довільний фіксований мультиіндекс, причому $\delta_n^{(k)} = 0$, якщо $n \ne k$ і $\delta_k^{(k)} = 1$, якщо $n = k$. Так як $l(\cdot)$ – симетричний функціонал, то для довільного $n \in I$ маємо: $l(a^{(n)}) = l\left(x^{n_1} y^{n_2}\right) = l_1^{n_1} l_2^{n_2} = l\left(\left(a^{(n)}\right)^*\right) = l\left(x^{n_1} y^{n_2}\right) = \overline{l_1^{n_1} l_2^{n_2}}$, тобто $l_1^{n_1} l_2^{n_2}$, а отже l_1 та l_2 є дійсними. Далі розглянемо можливі випадки для l_1 та l_2 :

Нехай одночасно $|l_1| = 1,\ |l_2| > 1$ або $|l_1| > 1,\ |l_2| = 1$. Розглянемо випадок $|l_1| = 1,\ |l_2| > 1$, тоді $\sum_{n\in I} l_1^{2n_1} l_2^{2n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau} =$

$$= \sum_{n\in I} l_2^{2n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau} = \sum_{n\in I} \frac{\left(l_2^2\right)^{n_2}}{\left(1+\left(n_1+n_2\right)^2\right)^\tau}$$

. Оскільки чисельник дробу зростає як показникова функція з основою $l_2^2 > 1$, а знаменник – як степенева, то ряди в обох випадках

1) розбігаються;

2) $|l_1| = |l_2| = 1$, $\sum_{n\in I} \left(l_1^2\right)^{n_1} \left(l_2^2\right)^{n_2} \left(1+|n|^2\right)^{-\tau} = \sum_{n\in I} \dfrac{1}{\left(1+\left(n_1+n_2\right)^2\right)^\tau}$. Цей ряд, очевидно, збігається;

3) $|l_1| > 1, |l_2| > 1$ ряд розбігається (див. випадок 1));

4) $|l_1| < 1,\ |l_2| < 1$ ряд збігається, так як в чисельнику дробу $\sum_{n\in I} \dfrac{l_1^{2n_1} l_2^{2n_2}}{\left(1+\left(n_1+n_2\right)^2\right)^\tau}$ члени спадають як показникові функції з основами $\left|l_1^2\right| < 1, \left|l_2^2\right| < 1$;

5) $|l_1|<1, |l_2|>1$ або $|l_1|>1, |l_2|<1$. Нехай $|l_1|<1,\quad |l_2|>1$, Тоді $\sum_{n\in I}\left(l_1^2\right)^{n_1}\left(l_2^2\right)^{n_2}\left(1+|n|^2\right)^{-\tau}=\sum_{(n_1=0)n_2=0,1,\dots}\frac{\left(l_2^2\right)^{n_2}}{\left(1+n_2^2\right)^{\tau}}+\ldots=+\infty.$

Очевидно, що ряд розбігається.

Отже, ми довели, що множину M лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів згідно формули $l(a)=\sum_{n\in I}a_n l_1^{n_1}l_2^{n_2}$ можна ототожнити з множиною L на площині R^2: $L=\left\{l=(l_1,l_2)\in R^2 \,\middle|\, |l_1|\le 1, |l_2|\le 1\right\}$.

Опис області збіжності. Знайдемо область збіжності степеневого ряду $a(x,y)=\sum_{n\in I}a_n x^{n_1}y^{n_2}$ з умовою спадання коефіцієнтів $\sum_{n\in I}|a_n|^2\tau^{|n|}<\infty$. Для цього зафіксуємо довільну точку $(x_0,y_0)\in R^2$. Маємо оцінку:

$$\left|\sum_{n\in I}a_n x_0^{n_1}y_0^{n_2}\right|^2=\left|\sum_{n\in I}(a_n\tau^{\frac{|n|}{2}})\left(\frac{x_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{n_1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{n_2}\right|^2\le\sum_{n\in I}(|a_n|^2\tau^{|n|})\sum_{n\in I}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_2}.$$

Для довільної точки $(x_0,y_0)\in R^2$ вибираємо таке τ, що одночасно $\frac{|x_0|}{\sqrt{\tau}}\le q_1<1,\ \frac{|y_0|}{\sqrt{\tau}}\le q_2<1$. Враховуючи, що

$$\sum_{n\in I}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_1}\left(\frac{y_0}{\sqrt{\tau}}\right)^{2n_2}=\sum_{n_1=0}^{\infty}\left(\frac{x_0^2}{\tau}\right)^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left(\frac{y_0^2}{\tau}\right)^{n_2}=\frac{1}{1-\frac{x_0^2}{\tau}}\cdot\frac{1}{1-\frac{y_0^2}{\tau}}=\frac{\tau^2}{(\tau-x_0^2)(\tau-y_0^2)}<\infty,$$

отримаємо, що для довільної фіксованої точки площини $(x_0,y_0)\in R^2$ ряд $\sum_{n\in I}a_n x_0^{n_1}y_0^{n_2}$ збігається, а отже областю збіжності є вся площина R^2.

Випадок антикомутуючих твірних.

Про центр алгебри. Нехай $a=\sum_{\alpha\in I}a_\alpha u^{\alpha_1}v^{\alpha_2}$, b= $b=\sum_{\beta\in I}a_\beta u^{\beta_1}v^{\beta_2}$. Тоді має місце теорема [2]:

Теорема 1. Центр Z алгебри утворює сукупність рядів $a=\sum_{\alpha\in I}a_\alpha u^{\alpha_1}v^{\alpha_2}$, в яких компоненти мультиіндексу $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ є парними.

Матрична реалізація. Як відомо [4, с.157], найпростішою невиродженою парою антикомутуючих твірних є пара 2×2 матриць вигляду: $u=\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & -x\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0 & y\\ y & 0\end{pmatrix}$, де *x, y* >0. Має місце теорема [2]:

Теорема 2. Між алгеброю рядів $\{a(u,v)\}$ від двох антикомутуючих твірних u, v та алгеброю матрично-значних 2×2 функцій $M_a(x,y)$ від двох дійсних змінних x, y вигляду $M_a(x,y)=\begin{pmatrix}a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y)\\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y)\end{pmatrix}$ існує взаємно однозначна відповідність тоді і тільки тоді, коли матричні елементи $a_{ij}(x,y)(i,j=1,2)$ задовольняють наступним граничним умовам: 1) $a_{11}(0,y)=a_{22}(0,y)(y\ge 0)$; 2) $a_{12}(0,y)=a_{21}(0,y)(y\ge 0)$; 3) $a_{12}(x,0)=a_{21}(x,0)(x\ge 0)$.

ВИСНОВКИ. У статті побудовано топологічну ядерну *- алгебра степеневих рядів від двох ермітових твірних. Досліджуються топологічні й аналітичні властивості алгебри. Розглянуто окремо випадки комутуючих та антикомутуючих ермітових твірних. У випадку комутуючих змінних для вибраних вагових послідовностей описано область збіжності та множина лінійних неперервних симетричних мультиплікативних функціоналів. Також дано функціональну реалізацію алгебри рядів від двох антикомутуючих ермітових твірних у вигляді матрично-значних функцій, елементами яких є звичайні подвійні степеневі ряди від двох дійсних комутуючих змінних із певними граничними умовами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. - М.: Наука, 1969. - 475с. 2. Тищенко С.В., Могильна Т.О. Про деяку топологічну *-алгебру степеневих рядів від N анти комутуючих твірних // Вісник КНУ, Серія Мат. Мех. – 2001. – Вип.6. – С.56-61. 3. Тищенко С.В. Зображення деякої топологічної *-алгебри, породженої двома комутуючими ермітовими твірними. // Вісник КНУ, Серія Мат. Мех. – 1996. – С.126-135. 4. Samoilenko Yu.S. Spectral theory of families of self-adjoint operators. - Kluwer Academic Publisher, 1991, Transl. from Russian ed-n.: Naukova Dumka, Kiev, 1984. – 232p.

Надійшла до редколегії 31.10.12

С. Тищенко, канд. физ.-мат. наук, К. Денисова, студ.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРЫ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ОТ ДВУХ ЭРМИТОВЫХ ОБРАЗУЮЩИХ

Построена топологическая ядерная *-алгебра степенных рядов от двух эрмитовых образующих. Исследованы топологические и аналитические свойства элементов алгебры. Для выбранных весовых последовательностей описаны область сходимости и (для коммутирующих переменных) множество линейных непрерывных симметричных мультипликативных функционалов. Для случая антикоммутирумых образующих алгебра реализуется как алгебра обычных двойных степенных рядов от двух действительных коммутирующих переменных, приводится ее матричная реализация и описывается центр.

S. Tyshchenko PhD, K. Denisova, student

ANALYTIC AND TOPOLOGICAL PROPERTIES OF ALGEBRA POWER SERIES FROM TWO HERMITIAN GENERATORS

Topological nuclear *-algebra of power series of two hermitian generators is constructed. Topological and analytic properties elements of algebra are investigated. For choosen weight sequences the domain of convergense and (for commuting variables) the set of linear continious symmetric multiplicative functionals are described. In the case of anticommuting generators algebra realized as algebra of ordinary double power series of two real commuting variables, matrix realization and center are described.

УДК 519.6

К. Шаріпов, канд. фіз.-мат. наук.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: kosnazar61@ukr.net

СУМУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розглянуто некоректну задачу відновлення неперервної функцій двох змінних за наближено заданими коефіцієнтами Фур'є. Ця задача розглянута для двох модельних класів скінченної гладкості: функцій з домінуючою змішаною частинною похідною та функцій Соболевського типу гладкості.

ВСТУП. Нехай $L_{2,N} = L_2(Q^N)$ – простір сумованих з квадратом дійсних функцій від N змінних на кубі $Q^N = [0,1]^N$, $C = C(Q^N)$ – простір неперервних на Q^N функцій, а l_2 – простір числових послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для яких $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$.

Дана стаття присвячена задачі сумування ряду Фур'є неперервних функцій з наближено заданими коефіцієнтами.

Нехай система функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ є ортонормованою в просторі $L_2 = L_2(Q^1)$ відносно стандартного скалярного добутку $\langle \cdot,\cdot \rangle$, а $\sum_{k=1}^{\infty} y_k\, \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, \varphi_k \rangle\, \varphi_k(t)$ є рядом Фур'є функції $y(t) \in C[Q^1]$. Припустимо, що замість коефіцієнтів Фур'є y_k нам відомі їх збурені значення y_k^{δ} і виконано умову $\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_k^{\delta})^2 < \delta^2$. Природньо виникає важлива для застосувань задача: за наближеними значенням y_k^{δ} відновити в даній фіксованій точці t функцію $y(t) \in C(Q^1)$ з рівнем похибки $\varepsilon(\delta)$, що прямує до нуля при $\delta \to 0$.

Відомо (див., наприклад [5, с.268; 6, с.16]), що ця задача є некоректно поставленою, оскільки відхилення функції $y(t) \in C(Q^1)$ від суми її ряду $\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{\delta} \cdot \varphi_k$ в метриці простору $C(Q^1)$ може виявитись як завгодно великим.

Для рішення цієї задачі в [5] А.М.Тихоновим запропоновано стійкий до малих збурень коефіцієнтів Фур'є в метриці простору l_2 загальний метод сумування рядів Фур'є, що базується на ідеї регуляризації [4].

$$T_n^{\alpha}(y^{\delta})(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r(k,\alpha)\, y_k^{\delta}\, \varphi_k(t), \tag{1}$$

з регуляризуючим множником $r(k,\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha \cdot \psi_k}$. При цьому передбачалось, що $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – послідовність додатних чисел, порядок росту яких при $k \to \infty$ не нижчий, ніж $k^{2+\varepsilon}, \varepsilon \ge 0$, а значення параметру регуляризації α узгоджено з похибкою вхідних даних δ, $\alpha = \alpha(\delta)$. У [5] доведено збіжність (1) у випадку, коли $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ система власних функцій першої крайової задачі для звичайних диференційних рівнянь, на класі функцій

$$C_d = \left\{ y(t) \in C(Q^1): \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\langle y, \varphi_k \rangle\right|^2 \psi_k < d \right\}.$$

Згодом, В. А. Ільїн і Е.Г. Позняк [3] у випадку тригонометричної системи функцій та Б.Алієв [1] для більш загального випадку довільної ортонормованої системи рівномірно обмежених функцій:

$$\|\varphi_k\|_C < \infty, \qquad k = 1,2,\dots, \tag{2}$$

отримали оцінку методу сумування $T_n^{\alpha}(y^{\delta})$ при $\psi_k = k^{2s}$, $s > 1/2$, для класу функцій зі швидко спадаючими коефіцієнтами Фур'є.

Визначення. Будемо казати, що ортонормована система $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ належить класу K^{β}, якщо для деякого $\beta \ge 0$ виконується умова $\|\varphi_k\|_C \succ\!\prec k^{\beta}, \quad k = 1,2,\dots$

Приклад. Тригонометрична система функцій належить класу K^{β} при $\beta = 0$ і, таким чином, задовольняє умову (2). В той же час, система поліномів Лежандра не задовольняє умову (2), але належить до класу K^{β} при $\beta = 1$.

В [8] П.Мате і С.В. Переверзєвим було розглянуто метод сумування, що визначається наступним чином

$$T_n^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t) \; = \; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, y_k^{\delta}\, \varphi_k(t), \tag{3}$$

де відносно трикутної матриці $\lambda = \left\{ \lambda_k = \lambda_k^n : \quad k = 1,2....,n, \quad n \in N \right\}$ передбачалось, що існують така сталі c_{λ} і деяке число $\theta \ge 0$, для яких виконується умова $|1-\lambda_k| \le c_{\lambda} \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\theta}$. При цьому для класу функцій $W_{2,1}^{\mu} = \left\{ y(t) \in L_2(Q^1): \quad \|y\|_{W_2^{\mu}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\mu} \left|\langle y, \varphi_k \rangle\right|^2 < \infty \right\}$ у [8] були отримані оцінки похибки методу (3) у випадку довільних ортонормованих систем, що задовольняють різні умови росту. Зокрема, було встановлено, що у випадку систем $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ з класу K^{β} справедлива оцінка

$$\left\| y(t) - T_n^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t) \right\|_C \le c \cdot \delta^{\frac{\mu-\beta-1/2}{\mu}},$$

де стала c не залежить від δ.

Далі в [9], останній результат було узагальнено на випадок класу неперервних функцій $W_{2,1}^{\psi}$, що пов'язаний із заданою системою $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ із класу K^{β} наступним чином

$$W_{2,1}^{\psi} = \left\{ y(t) \in L_2\left(Q^1\right): \quad \|y\|_{W_2^{\mu}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi^2(k) \left| \langle y, \varphi_k \rangle \right|^2 < \infty \right\},$$

де $\psi(k)$ – деяка монотонно зростаюча функція, $\psi(1) = 1$. При цьому для (3) на класі функцій $W_{2,1}^{\psi}$ отримано оцінку

$$\left\| y(t) - T_n^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t) \right\|_C \le c\,\delta \left[\psi^{-1}\left(\frac{1}{\delta}\right) \right]^{\beta+1/2},$$

де стала c не залежить від δ.

Зазначимо, що всі згадані вище результати отримані для класів функцій однієї змінної $(N = 1)$. Для функцій багатьох змінних дослідження з даної проблематики майже не проводились. З відомих нам праць варто згадати [2; 7]. У [7] (2) узагальнено на випадок, коли $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, $t \in R^N$, являє собою фундаментальну систему оператора Лапласа в обмеженій N – вимірній області $(N \ge 4)$, де в якості регуляризуючих множників використовувалися множники вигляду $(1+\alpha\,\lambda_k)^{-s}$, $s = \left[\frac{N}{4}\right] + 1$. У [2] аналогічні дослідження проведені для функцій двох змінних, представлених у вигляді ряду Фур'є за тригонометричним базисом, де в якості регуляризуючих множників пропонувались множники вигляду $\left[\left(1+\alpha \cdot k_1^2\right)\cdot\left(1+\alpha \cdot k_2^2\right)\right]^{-1}$. Зазначимо, що як в [2], так і в [7] автори обмежились встановленням факту збіжності запропонованого методу сумування.

Таким чином, проблема встановлення швидкості збіжності методу сумування рядів Фур'є функцій багатьох змінних (на парі просторів C і l_2) досі залишається відкритою. Саме дослідженню цієї задачі для деяких класів функцій двох змінних присвячена дана стаття, яку можна розглядати в якості продовження [10].

КЛАСС ФУНКЦІЙ З ДОМІНУЮЧОЮ ЗМІШАНОЮ ЧАСТИННОЮ ПОХІДНОЮ. Нехай $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормована система функцій в $L_2\left(Q^1\right)$, що належить класу K^{β}, а $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_{i,j}\,\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)$, $y_{i,j} = \langle y, \varphi_i \cdot \varphi_j \rangle$, є рядом Фур'є функції $y(t,\tau) \in C\left(Q^2\right)$. Припустимо, що замість коефіцієнтів Фур'є $\{y_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ відомо їх збурені значення, а саме: задано послідовність чисел $y^{\delta} := \{y_{i,j}^{\delta}\}_{i,j=1}^{\infty}$, для яких

$$y_{i,j}^{\delta} = y_{i,j} + \delta \cdot \xi_{i,j}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots \quad, \tag{4}$$

де $\delta \in (0,1))$ и $\|\xi\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_{i,j}\right|^2\right)^{1/2} \le 1$.

Розглянемо суму

$$T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\; y_{i,j}^{\delta}\; \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\;. \tag{5}$$

Апроксимуючі властивості методу залежать від рівня дискретизації n и m, а також від властивості множини $\lambda = \left\{\lambda_{i,j} = \lambda_{i,j}^{n,m} : \ i = 1,2,\ldots,n; \quad j = 1,2,\ldots,m; \quad n, m \in N\right\}$. Будемо припускати, що існують така стала c_{θ} і деяке число θ, що виконується умова $\left|1-\lambda_{i,j}\right| \le c_{\theta}\left(\frac{i \cdot j}{n \cdot m}\right)^{\theta}$. У цьому випадку будемо говорити, що метод сумування (5) має порядок θ.

Розглянемо апроксимуючі властивості $T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)$ на класі функцій

$$L_{2,2}^{\mu,\nu} := L_2^{\mu,\nu}\left(Q^2\right) = \left\{ y(t,\tau) \in L_2\left(Q^2\right): \qquad \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i^{2\mu} j^{2\nu} \left| \langle y, \varphi_i \cdot \varphi_j \rangle \right|^2 < \infty \right\},$$

Додатково, будемо припускати, що для n, m, які визначають рівень дискретизації методу $T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)$ і μ, ν, які визначають гладкість по кожній змінній функції з класу $L_{2,2}^{\mu,\nu}$, виконано умову

$$n^{-\mu} \asymp m^{-\nu} \tag{6}$$

Неважко бачити, що функції з $L_{2,2}^{\mu,\nu}$ є узагальненням функцій з домінуючою змішаною частковою похідною порядку $n+m$.

Лема 1. При $\mu > \frac{\beta}{2}$ і $\nu > \frac{\beta}{2}$ для $y(t,\tau) \in L_{2,2}^{\mu,\nu}$ мають місце оцінки

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}, \tag{7}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}, \tag{8}$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}. \tag{9}$$

Доведення. Застосовуючи нерівність Коші-Шварца для доведення (7) отримуємо

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\cdot\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau) \right\|_C = \left\| \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} i^{\mu} j^{\nu}\cdot y_{i,j}\cdot \frac{\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau)}{i^i j^j} \right] \right\|_C \le$$

$$\le \left\| \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} i^{2\mu} j^{2\nu} \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left|\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\right|^2}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{2\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{2\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2\mu-2\beta-1}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}}\, \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{2\nu-2\beta-1}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Діючи аналогічним чином для доведення (8) і (9) відповідно маємо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\cdot\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{2\mu-2\beta-1}}\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2\nu-2\beta-1}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}},$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{n\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{2\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{2\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}}.$$

Лему доведено.

Справедлива теорема:

Теорема 1. Нехай $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \in K^{\beta}$ і дано послідовність збурених значень коефіцієнтів Фур'є (4) функції $y(t,\tau) \in L_2^{\mu,\nu}(Q^2)$ для деяких $\mu > \beta + 1/2$ и $\nu > \beta + 1/2$. Тоді для методу сумування $T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})$ порядку $\theta > \max(\mu,\nu)$ при $l = \max(n,m) \succ\prec \delta^{2/(2\rho+2\beta+1)}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$, має місце оцінка

$$\sup_{\|y\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \le 1} \left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})(t,\tau) \right\|_C \le \breve{c}\cdot\delta^{\frac{2\rho-2\beta-1}{2\rho+2\beta+1}},$$ де стала $\breve{c}$ не залежить від δ.

Доведення. Враховуючи (4) для $y(t,\tau) \in L_2^{\mu,\nu}(Q^2)$ і сумування виразу для $T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})(t,\tau)$ маємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}(y^{\delta})(t,\tau) \right\|_C = \left\| \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\ y_{i,j}^{\delta}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \tag{10}$$

$$\le \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C + \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C + \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C +$$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda_{i,j})\, y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C + \delta \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\ \xi_{i,j}\ y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C.$$

Оцінимо спочатку четвертий доданок правої частини (10). Знаходимо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda_{i,j})\, y_{i,j}\ \varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau) \right\|_C \le \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (1-\lambda_{i,j})^2 \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le \tag{11}$$

$$\le \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(1-\lambda_{i,j}\right)^2 \frac{1}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \left|y_{i,j}\right|^2 i^{2\mu} j^{2\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \times \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(i\ j\right)^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c_\theta \max_{1\le i\le n,\ 1\le j\le m} \left[\left(\frac{ij}{nm}\right)^{2\theta} \frac{1}{i^{2\mu} j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|y_{i,j}\right|^2 i^{2\mu} j^{2\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \left[\sum_{i=1}^{n} i^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{m} j^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c_\theta\, n^{-\mu} m^{-\nu} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} n^{\beta+\frac{1}{2}} m^{\beta+\frac{1}{2}} = c_\theta\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} .$$

Зазначимо, що з властивості множини λ випливає, нерівність $\left|\lambda_{i,i}\right| \le c_\theta + 1$. Тоді для останнього доданку правої частини (10) маємо

$$\delta \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{i,j}\ \xi_{i,j}\ y_{i,j}\ \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \delta \left\| \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\lambda_{i,j}\right|^2 \left|\xi_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le \tag{12}$$

$$\le \delta\left(1+c_\theta\right)\cdot \left\|\xi\right\|_{l_2} n^{\beta+\frac{1}{2}} m^{\beta+\frac{1}{2}} = \left(c_\theta+1\right)\delta\, n^{\beta+\frac{1}{2}} m^{\beta+\frac{1}{2}}.$$

Припустимо, що $\mu \le \nu$. А отже, з умови (6) витікає, що $n \ge m$. Тоді враховуючи умову (6) з (10) – (12) і леми 1 отримаємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^\delta\right)(t,\tau) \right\|_C \le \tag{13}$$

$$\le \frac{\sqrt{2\nu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} n^{-\mu+\beta+1/2} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + \frac{\sqrt{2\mu-2\beta}}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} n^{-\mu+\beta+1/2} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} n^{-2\mu+2\beta+1} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_\theta\, n^{-2\mu+2\beta+1} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + \left(c_\theta+1\right)\delta\, n^{2\beta+1} =$$

$$= c_1\, n^{-\mu+\beta+\frac{1}{2}} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2\ \delta\, n^{2\beta+1},$$

де $c_1 = \dfrac{\sqrt{2\mu-2\beta}+\sqrt{2\nu-2\beta}+1}{\sqrt{(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} + c_\theta$, $\quad c_2 = c_\theta + 1$.

Аналогічним чином, для випадку $\mu \ge \nu$ (при цьому $n \le m$) маємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^\delta\right)(t,\tau) \right\|_C \le c_1\, m^{-\nu+\beta+\frac{1}{2}} \left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2\ \delta\, m^{2\beta+1} . \tag{14}$$

Виберемо тепер $l = \max(n,m)$ так, щоб $l^{-\rho-\beta-1/2} \succ\!\!\prec \delta$, тобто $l \succ\!\!\prec \delta^{-\frac{1}{\rho+\beta+1/2}}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$. Тоді з (13) і (14) отримаємо

$$\sup_{\left\|y\right\|_{L_{2,2}^{\mu,\nu}} \le 1} \left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^\delta\right)(t,\tau) \right\|_C \le \breve{c}\ \delta^{\frac{2\rho-2\beta-1}{2\rho+2\beta+1}},$$

де стала $\breve{c}$ не залежить від δ.
Теорему доведено.

КЛАС ФУНКЦІЙ СОБОЛІВСЬКОГО ТИПУ ГЛАДКОСТІ. У даному розділі вивчаються властивості методу сумування (5) на класі функцій Соболівського типу гладкості, який представлений у наступному вигляді

$$W_{2,2}^{\mu,\nu} := W_2^{\mu,\nu}\left(Q^2\right) = \left\{ y(t,\tau) \in L_2\left(Q^2\right): \quad \left\|y\right\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \left(i^{2\mu}+j^{2\nu}\right)\left|y_{i,j}\right|^2 < \infty \right\}.$$

Лема 2. Для функції $y(t,\tau) \in W_{2,2}^{\mu,\nu}$ при $\mu > 2\beta+1$ і $\nu > 2\beta+1$ виконуються співвідношення

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{\nu-2\beta}}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \left\|y\right\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \tag{15}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{\sqrt{\mu-2\beta}}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \left\|y\right\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \tag{16}$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{1}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \left\|y\right\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \tag{17}$$

Доведення. Спочатку доведемо співвідношення (15). Маємо

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}\ \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sqrt{i^{2\mu}+j^{2\nu}}\ y_{i,j}\ \frac{\varphi_i(t)\cdot\varphi_j(\tau)}{\sqrt{i^{2\mu}+j^{2\nu}}} \right\|_C \le$$

$$\le \left\| \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(i^{2\mu} + j^{2\nu}\right) \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left|\varphi_i(t)\,\varphi_j(\tau)\right|^2}{i^{2\mu} + j^{2\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,2}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{i^{2\beta} j^{2\beta}}{2 i^{\mu} j^{\nu}} \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^{\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \frac{1}{\sqrt{\mu-2\beta-1}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\nu-2\beta}{\nu-2\beta-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\nu-2\beta}{2(\mu-2\beta-1)(\nu-2\beta-1)}}\; n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} .$$

Аналогічним чином доводяться співвідношення (16) и (17) . Відповідно знаходимо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{\mu-2\beta}{2(\mu-2\beta-1)(\nu-2\beta-1)}}\; m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} ,$$

$$\left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} y_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^{\mu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^{\nu-2\beta}} \right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}}\, n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} m^{-\frac{\nu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} .$$

Лему доведено.

Тепер сформулюємо основний результат даного розділу.

Теорема 2. Нехай система функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ класу належить класу K^{β} і дано послідовність збурених значень коефіцієнтів Фур'є вигляду (4) функції $y(t,\tau) \in W_2^{\mu,\nu}(Q^2)$, $\mu > 2\beta+1$ и $\nu > 2\beta+1$. Тоді для методу сумування (5) порядку $\theta > \max\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$ при $l = \max(n,m) \succ\prec \delta^{-\frac{2}{\rho+2\beta+1}}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$ має місце оцінка

$$\sup_{\|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \le 1} \left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) \right\|_C \le \tilde{c} \cdot \delta^{\frac{\rho-2\beta-1}{\rho+2\beta+1}} ,$$

де стала $\tilde{c}$ не залежить від δ.

Доведення. Оцінимо четвертий доданок у правій частині (10) для функцій $y(t,\tau) \in W_2^{\mu,\nu}(Q^2)$, $\mu > 2\beta+1$, $\nu > 2\beta+1$. Враховуючи, що $\theta > \max\left(\mu/2, \nu/2\right)$ для четвертого доданку отримаємо

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(1-\lambda_{i,j}\right) y_{i,j}\, \varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau) \right\|_C \le \tag{18}$$

$$\le \left\| \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left|1-\lambda_{i,j}\right|^2}{\left(i^{2\mu} + j^{2\nu}\right)} \left(i^{2\mu} + j^{2\nu}\right) \left|y_{i,j}\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left|\varphi_i(t)\, \varphi_j(\tau)\right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_C \le$$

$$\le \frac{c_{\theta}}{\sqrt{2}} \max\left[\frac{1}{i^{\mu} j^{\nu}} \left(\frac{ij}{nm}\right)^{2\theta} \right]^{\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} \left[\sum_{i=1}^{n} i^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{m} j^{2\beta} \right]^{\frac{1}{2}} \le \frac{c_{\theta}}{\sqrt{2}}\, n^{-\frac{\mu}{2}} m^{-\frac{\nu}{2}} n^{\beta+\frac{1}{2}} m^{\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} .$$

Нехай $\mu \le \nu$, відповідно $n \ge m$. Тоді, враховуючи умову (6), із співвідношень (10), (18) і леми 2 отримуємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) \right\|_C \le c_3 \cdot n^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \cdot \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2 \cdot \delta \cdot n^{2\beta+1} ,$$

де $c_3 = \dfrac{\sqrt{2\mu-2\beta} + \sqrt{2\nu-2\beta} + 1}{\sqrt{2(2\mu-2\beta-1)(2\nu-2\beta-1)}} + \dfrac{c_{\theta}}{\sqrt{2}}$, $\quad c_2 = c_{\theta} + 1$.

Аналогічним чином, для випадку $\mu \ge \nu$ (відповідно, $n \le m$) маємо

$$\left\| y(t,\tau) - T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau) \right\|_C \le c_3\, m^{-\frac{\mu}{2}+\beta+\frac{1}{2}} \|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}} + c_2\, \delta\, m^{2\beta+1} .$$

Виберемо тепер $l = \max(n,m)$ так, щоб $l^{-\frac{\rho}{2}-\beta-\frac{1}{2}} \succ\prec \delta$, тобто $l \succ\prec \delta^{-\frac{1}{\rho/2+\beta+1/2}}$, $\rho = \min(\mu,\nu)$. Тоді остаточно отримуємо

$$\sup_{\|y\|_{W_{2,2}^{\mu,\nu}}\le 1}\left\| y(t,\tau)-T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)(t,\tau)\right\|_C \le \tilde{c}\cdot\delta^{\frac{\rho-2\beta-1}{\rho+2\beta+1}},$$

де стала $\tilde{c}$ не залежить від δ. Таким чином доведена теорема2.

ВИСНОВКИ. У (10) автором даної статті були вивчені апроксимуючі властивості методу сумування $T_{n,m}^{\lambda}\left(y^{\delta}\right)$ в випадку $n=m$ на класах функції $L_2^{\mu,\nu}\left(Q^2\right)$ и $W_2^{\mu,\nu}\left(Q^2\right)$ при $\mu=\nu$. Оцінки, що доведені у теоремах 1 і 2 при $n=m$ і $\mu=\nu$ співпадають з відповідними оцінками з (10).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алиев Б. Оценка метода регуляризации для задачи суммирования рядов Фурье // Докл. АН Тадж.ССР, –1978. – Т.21, №4. – с.3–6. 2. Жидков Е.П., Семерджиев Х. О регуляризации задачи суммирования кратного тригонометрического ряда Фурье. – Объедин. Ин-т. ядер. исслед. – Р. 88–91. – Дубна, 1975.– 14 с. 3. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, Ч 2 . – М.,: Наука, 1973. – 448 с. 4. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.// Докл. АН СССР – 1963.– Т 151, № 3.– с. 501–504. 5. Тихонов А.Н. Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье // Докл. АН СССР.– 1964.– т. 156, № 2 .– с. 268–271. 6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М., Наука, 1979. – 224 с. 7. Фурлетов Г.И. О суммировании рядов Фурье по фундаментальной системе оператора Лапласа в произвольной N – мерной области ($N>4$) методом $T_s(\alpha\lambda_s)$ // Дифференциальные уравнения, – 1970.– Т.6, №1.– с. 173–189. 8. Mathe P., Pereverzev S.V. Stable summation of orthogonal series with noisy coefficients.// J. of Approximation Theory. – 2002. – Vol. 11.– P. 2060–2076. 9. Sharipov K. On the recovery of continuous functions from noisy fourier coefficients. // Comput. Methods in Appl. Math.– 2011.– Vol. 11.– P. 75–82. 10. Sharipov K . On the recovery of continuous functions from two variables noisy fourier coefficients. // J. of Numerical & Appl. Math.– 2012. – Vol. 109, № 3 .– P.116–124.

Надійшла до редколегії 05.12.12

К. Шарипов, канд. физ.-мат. наук

СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ ФУРЬЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрена некорректная задача восстановления непрерывной функции двух переменных по приближенно заданным коэффициентам Фурье. Эта задача рассмотрена для двух модельных классов конечной гладкости: функций с доминирующей смешанной частной производной и функцией Соболевского типа гладкости.

K. Sharipov, PhD

SUMMATION OF FOURIER SERIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

We consider the ill–posed problem of the recovery of continuous functions of two variables from noisy Fourier coefficients. This problem is considered for two model classes of functions of finite smoothness: functions with dominating mixed partial derivative and functions of Sobolev type.

УДК 517.9 + 51(092)

М. Гордієнко, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

ПРОБЛЕМА МАЛИХ ЗНАМЕНИКІВ І УМОВИ ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНОГО МЕТОДУ КРИЛОВА-БОГОЛЮБОВА-МИТРОПОЛЬСЬКОГО

Проаналізовано питання про зв'язок між класичною проблемою малих знаменників і умовами для правих частин слабко нелінійних диференціальних рівнянь, що описують коливні процеси, і до яких можна застосувати метод Крилова-Боголюбова-Митропольського для побудови асимптотичних розв'язків.

ВСТУП. Одним із актуальних напрямів сучасної математики є теорія слабко нелінійних диференціальних рівнянь, які використовуються для математичного моделювання різноманітніших явищ та процесів в природознавстві і техніці. Відомо, що слабко нелінійні диференціальні рівняння є складним об'єктом для дослідження. Одним з ефективних методів побудови наближених розв'язків слабко нелінійних диференціальних рівнянь є асимптотичні методи, за допомогою яких можна знайти розв'язок відповідної задачі, який задовольняє вихідне рівняння з певною точністю. При записі асимптотичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь використовуються ряди Фур'є, знаменники доданків яких можуть бути як завгодно малими, тому такі ряди можуть бути розбіжними. Саме у цьому полягає суть класичної проблеми малих знаменників. З іншого боку, за допомогою накладання певних умов на праві частини слабко нелінійних диференціальних рівнянь можна домогтися того, що згадані ряди Фур'є будуть збіжними. Розгляду питання про проблему малих знаменників і умови застосування асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського і присвячено дану статтю.

Основна частина. Асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського [1] знайшов широке застосування при дослідженні слабко нелінійних диференціальних рівнянь, які використовуються для математичного опису коливних процесів в техніці. Такі рівняння, як правило, задовольняють умови теореми про існування і єдиність розв'язку, а малий параметр входить в це рівняння регулярним чином. Отже, згідно з класичною теоремою про існування розв'язку, таке рівняння має розв'язок, цей розв'язок є єдиним і відповідно до теореми про неперервну залежність розв'язку від параметра, такий розв'язок неперервно залежить від малого параметра.

Наближений (асимптотичний) розв'язок, що будується для згаданого вище диференціального рівняння, зображується у вигляді степеневого ряду за малим параметром, причому такий ряд при використанні методу Крилова-Боголюбова-Митропольського не містить секулярних доданків, що є однією з переваг даного методу побудови асимптотичних розв'язків розглядуваних слабко нелінійних диференціальних рівнянь.

При дослідженні поведінки коливних систем з власною частотою ω, що зазнають дії зовнішньої періодичної сили з частотою ν (у нерезонансному випадку), тобто систем вигляду [1, с. 185]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{1}$$

припускається , що функція $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ є 2π -періодичною стосовно νt і зображується формулою

$$f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{2}$$

де $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $n = \overline{-N, N}$, – деякі поліноми від x та $\frac{dx}{dt}$. Природно виникає питання про те, чому функція $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ у правій частині рівняння (1) має бути лише тригонометричним поліномом стосовно νt , а не довільною періодичною функцією, що записується за допомогою ряду Фур'є. Крім того, виникає також питання про те, з яких міркувань накладено обмеження на вигляд коефіцієнтів розкладу (2), тобто чи не можуть функції у правій частині рівняння (1) задовольняти більш загальні умови.

Відповідь на ці питання пов'язана з проблемою малих знаменників [2–5], з якою вчені вперше зустрілися у небесній механіці ще наприкінці XVIII ст., коли вивчали рух планет і супутникових систем. При математичному описі руху таких об'єктів використовувалися звичайні диференціальні рівняння, що містили малий параметр, розв'язки яких записувалися за допомогою рядів Фур'є [6, с. 5]. Такі ряди у фізиці інтерпретуються як лінійна суперпозиція періодичних рухів з різними частотами. У випадку, коли частоти таких рухів знаходяться у так званій близькій співмірності, має місце проблема малих знаменників. Суть цієї проблеми можна пояснити на наступному прикладі [2, с. 93], [6, с. 8–11]. Як відомо, на рух планет Сонячної системи значний вплив (збурення) спричиняють дві найбільші її планети – Юпітер і Сатурн. Їх довгоперіодичне збурення на рух планет Сонячної системи пов'язано з малим знаменником вигляду $2\omega_1 - 5\omega_2$, де $\omega_1 = 299'', 1$ $\omega_2 = 120'', 5$ – кутові швидкості Юпітера і Сатурна, відповідно. Тут $1''$ – кутова секунда, яка використовується в якості одиниці вимірювання плоских кутів і кутових швидкостей в астрономії і яка дорівнює $1/3600$ частині градуса. Величини ω_1 , ω_2 майже співмірні, оскільки $2\omega_1 - 5\omega_2 \approx 0$. Вирази вигляду $m\omega_1 + n\omega_2$ при різних значеннях цілих чисел m , n містяться у знаменнику рядів Фур'є, що побудовані за допомогою теорії збурень і які мають вигляд $\sum_{m,n\neq 0} \frac{a_{mn}}{m\omega_1 + n\omega_2} e^{i(m\omega_1 + n\omega_2)t}$. Тут a_{mn} – деякі коефіцієнти, що визначаються за даними задачі.

Математична природа проблеми малих знаменників полягає у тому, що хоча знаменники доданків ряду Фур'є не перетворюються в нуль, але через те, що ці ряди Фур'є містять нескінченну кількість доданків, знаменники яких можуть бути як завгодно малими, такі ряди можуть бути розбіжними [2, с. 93], [6, с. 31]. Це викликає значні труднощі при вивченні руху згаданих вище систем. Аналогічна проблема має місце також у випадку слабко нелінійних систем більш загального вигляду. Фізична суть проблеми малих знаменників пов'язана з ефектами, які у фізиці називають резонансними.

Проблему малих знаменників у розкладах, що побудовані за допомогою методів теорії збурень, у [7, с. 246–268] дослідили М. М. Боголюбов і М. М. Крилов, коли аналізували вплив зовнішнього збурення на характер коливань. При цьому в якості прикладу вони розглянули (за умов відсутності резонансів) коливну систему, яка описується нелінійним диференціальним рівнянням вигляду

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = \varepsilon f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{3}$$

де m і k – деякі додатні сталі, функція у правій частині записується таким чином

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{n=0}^{N}\left[f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\cos\lambda_n t + f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\sin\lambda_n t\right],$$

$f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ – деякі поліноми функцій від x та $\frac{dx}{dt}$, λ_n – частоти зовнішнього збурення.

Знайшовши покращене перше наближення розв'язку рівняння (3) у вигляді [7, с. 255]

$$x = a\sin\psi + \frac{\varepsilon f_0}{k} + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{q=2}^{N'}\frac{f_q\cos q\psi + g_q\sin q\psi}{\left(1-q^2\right)\omega_0^2} + \frac{\varepsilon}{2m}\sum_{n=0}^{N}\sum_{q=0}^{N'}\frac{\left(f_{nq}^* - g_{nq}^{**}\right)\cos\left(q\psi + \lambda_n t\right)}{\omega_0^2 - \left(q\omega_0 + \lambda_n\right)^2} + \tag{4}$$

$$+\frac{\varepsilon}{2m}\sum_{n=0}^{N}\sum_{q=0}^{N'}\frac{\left(f_{nq}^* + g_{nq}^{**}\right)\cos\left(q\psi - \lambda_n t\right)}{\omega_0^2 - \left(q\omega_0 - \lambda_n\right)^2} + + \frac{\varepsilon}{2m}\sum_{n=0}^{N}\sum_{q=0}^{N'}\frac{\left(f_{nq}^{**} + g_{nq}^{*}\right)\sin\left(q\psi + \lambda_n t\right)}{\omega_0^2 - \left(q\omega_0 + \lambda_n\right)^2} + \frac{\varepsilon}{2m}\sum_{n=0}^{N}\sum_{q=0}^{N'}\frac{\left(g_{nq}^{*} - f_{nq}^{**}\right)\sin\left(q\psi - \lambda_n t\right)}{\omega_0^2 - \left(q\omega_0 - \lambda_n\right)^2},$$

автори зазначають, що формула (4) містить подвійні скінченні суми, до яких входять дільники вигляду $\omega_0^2 - \left(q\omega_0 \pm \lambda_n\right)^2$, де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – власна частота коливань системи (3).

Ясно, що хоча доданки у правій частині (4) і можуть мати малі знаменники, але цей вираз (тригонометричний поліном) у правій частині є коректно визначеним при всіх значеннях незалежних аргументів.

М. М. Крилов і М. М. Боголюбов також зазначають [7, с. 262], що у більш загальному випадку, коли функція у правій частині рівняння (3) має вигляд

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\cos\lambda_n t + f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\sin\lambda_n t\right],$$

де $f_0\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $f_n^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $f_n^{**}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ – деякі функції від x та $\frac{dx}{dt}$, формула для покращеного першого наближення розв'язку рівняння (3) містить не скінченні подвійні суми, а подвійні (нескінченні) ряди, які через наявність у них доданків з малими знаменниками вигляду $\omega_0^2 - \left(q\omega_0 \pm \lambda_n\right)^2$ у загальному випадку є розбіжними.

Якщо зовнішня (збурююча) сила є періодичною за часом t з деяким періодом T, то для частот зовнішнього збурення можна припустити виконання співвідношень вигляду $\lambda_0 = \alpha,\ \lambda_1 = 2\alpha,\ \lambda_2 = 3\alpha, \dots$, де $\alpha = \frac{2\pi}{T}$. Тоді формула для покращеного першого наближення міститиме ряди вигляду [12, с. 263]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{U_{nm} \cos(n\alpha t + m\psi) + V_{nm} \sin(n\alpha t + m\psi)}{\omega_0^2 - (m\omega_0 + n\alpha)^2}. \tag{5}$$

Очевидно, що ряд (5) у загальному випадку є розбіжним через наявність у нього малих знаменників.

М. М. Боголюбов і М. М. Крилов також зазначили, що ще А. Пуанкаре, розглядаючи аналогічно побудовані розклади, показав, що у загальному випадку при фіксованих значеннях U_{nm}, V_{nm} в (5) точки розбіжності ряду (5) стосовно значень α, тобто ті значення α, при яких ряд в (5) є розбіжним, утворюють всюди щільну множину. Тобто, яким би не було дійсне число α завжди знайдеться як завгодно близьке до нього значення α_0, для якого ряд (5) є розбіжним (відповідні пояснення можна знайти в [8, с. 413–416]).

Питання про вплив малих знаменників на збіжність тригонометричних рядів, за допомогою яких записуються асимптотичні наближення для розв'язків слабко нелінійних коливних диференціальних рівнянь (у нерезонансному випадку) розглянуто також у класичній монографії [1] на прикладі нелінійної коливної системи з одним ступенем вільності, що знаходиться під дією зовнішніх періодичних сил, диференціальне рівняння руху якої має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{6}$$

Тут ε – малий додатній параметр, функція $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ є 2π-періодичною стосовно змінної величини νt.

Оскільки функція $\varepsilon f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ є періодичною стосовно величини νt, а отже в її розкладі в ряд Фур'є містяться доданки вигляду $\sin(n\nu + m\omega)t$ і $\cos(n\nu + m\omega)t$, де $n, m \in \mathbb{Z}$, то при побудові асимптотичних розв'язків для рівняння (6) з'являються гармонічні доданки (тригонометричні функції) з комбінаційними частотами вигляду $n\nu + m\omega$. Дійсно, навіть якщо функцію $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ можна подати у вигляді збіжного тригонометричного ряду $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, де $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ – деякі довільні функції від x та $\frac{dx}{dt}$, то відповідні асимптотичні розклади зображуються подвійними рядами

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(n\theta + m\psi)}}{\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta)\, e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi, \tag{7}$$

які через наявність у них доданків з малими знаменниками вигляду $\omega^2 - (n\nu + m\omega)^2$ у загальному випадку є розбіжними.

У [1] також відзначається, що у загальному випадку точки розбіжності ряду вигляду (7) на дійсній осі (величин ν) утворюють всюди щільну множину. Іншими словами, яким би не було значення ν, завжди можна знайти як завгодно близьке до нього таке значення ν_0, для якого ряд (7) є розбіжним.

З іншого боку, майже для будь-якого значення відношення $\frac{\nu}{\omega}$, тобто для всіх точок, крім можливо точок множини, міра якої рівна нулеві, можна знайти такі сталі C і δ, що для всіх цілих чисел $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, виконується нерівність

$$\left|\frac{\nu}{\omega} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{(|p| + |q|)^{2+\delta}}. \tag{8}$$

У цьому можна легко переконатися за допомогою таких міркувань [1]. Нехай маємо деяке дійсне число $\delta > 0$ і довільну (як завгодно малу) величину $\eta > 0$. Оскільки ряд $\sum_{|n|+|m| \geq 1} \frac{1}{(|n| + |m|)^{2+\delta}}$ збігається, то можна знайти таке число $C > 0$, що виконується нерівність $2C \sum_{|n|+|m| \geq 1} \frac{1}{(|n| + |m|)^{2+\delta}} \leq \eta$. Розглянемо для фіксованих значень $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, інтервал I_{nm}, центр якого знаходиться в точці $\frac{n}{m}$, а його ширина рівна $\frac{2C}{(|n| + |m|)^{2+\delta}}$. Тоді для будь-якого дійсного числа x, що не належить жодному з інтервалів I_{nm}, для всіх цілих чисел $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, виконується нерівність

$$\left|x - \frac{n}{m}\right| \geq \frac{C}{(|n| + |m|)^{2+\delta}}. \tag{9}$$

Тоді міру множини точок x, що належать інтервалам I_{nm}, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, можна оцінити таким чином: $\sum_{n,m} mes\, I_{n,m} \leq \eta$. Звідси випливає, що для всіх дійсних значень x, за виключенням тих точок, які належать до множини, міра якої менша за η, виконується нерівність (9). Отже для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, маємо $\left| n\nu + (m \pm 1)\omega \right| \geq \frac{C\omega}{n^{\delta+1}}$. Таким чином, абсолютне значення кожного доданка ряду (7) є меншим за величину

$$\frac{n^{\delta+1}}{C\omega} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(a, \psi, \theta) e^{-i(n\theta + m\psi)} d\theta d\psi \right|.$$

Звідси і з теорії тригонометричних рядів [9] випливає, що у випадку, коли для деякої сталої $C > 0$ частоти ω, ν для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, задовольняють умову вигляду

$$\left| \frac{\nu}{\omega} + \frac{m \pm 1}{n} \right| \geq \frac{C}{|n|^{2+\delta}} \tag{10}$$

ряд (7) буде абсолютно збіжним лише тоді, коли функція $f_0(a, \psi, \theta)$ має достатню кількість неперервних частинних похідних за змінними ψ, θ.

Оскільки зазначена вище умова (10) для частот ω, ν у загальному випадку не виконується, то для збіжності тригонометричних рядів для асимптотичних наближень, що будуються за допомогою методу Крилова-Боголюбова-Митропольського, необхідно виконання умови про те, що функція $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ у правій частині рівнянь вигляду (1), (відповідно, рівнянь (3), (6)), яка описує вплив зовнішніх сил на слабко нелінійну коливну систему, необхідно має володіти такими властивостями: $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ є 2π-періодичною стосовно значення νt і зображується формулою $f\left(\nu t, x, \frac{dx}{dt}\right) = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\nu t} f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, де $f_n\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$, $n = \overline{-N, N}$ – деякі поліноми від x та $\frac{dx}{dt}$.

Це зауваження має місце і при застосуванні інших методів теорії збурень для побудови наближених (асимптотичних) розв'язків слабко нелінійних коливних систем.

Аналогічно, проблема малих знаменників виникає також при застосуванні асимптотичних методів при вивченні коливних систем з багатьма степенями вільності, зокрема, при побудові розкладів за малим параметром для квазіперіодичних розв'язків, коли при записі відповідних асимптотичних рядів виникають малі дільники вигляду (ω, m), де $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ – набір частот, $m = (m_1, m_2, ..., m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Ідеї праць [2–4] було застосовано при дослідженні класичних задач теорії нелінійних коливань. Використовуючи процес заміни змінних з прискореною збіжністю у поєднанні з методом інтегральних многовидів, М.М.Боголюбов встановив [10] існування квазіперіодичних розв'язків слабко нелінійних систем, отримавши для них розклади за малим параметром, які є збіжними в традиційному розумінні, а не асимптотичними. Низку фундаментальних результатів щодо зведення лінійних систем з квазіперіодичними коефіцієнтами до систем зі сталими коефіцієнтами і про поведінку інтегральних кривих в околі достатньо гладких тороїдальних поверхонь отримано у працях М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського і А. М. Самойленка (див., наприклад, [11–13]). Зокрема, в [13] розроблено ефективний метод дослідження задачі про збереження інваріантних торів при збуреннях, за допомогою якого доведено низку глибоких теорем про існування стійких і гіперболічних інваріантних торів та отримано результати про їх гладкість.

Висновки. Проаналізовано зв'язок проблеми малих знаменників та умов застосування асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського. Описано математичне підґрунтя того, що для коректного застосування асимптотичного методу Крилова-Боголюбова-Митропольського для побудови наближених (асимптотичних) розв'язків слабко нелінійних коливних систем, що зазнають зовнішнього періодичного впливу, функція у правій частині відповідного слабко нелінійного диференціального рівняння має бути тригонометричним поліномом, коефіцієнти якого є алгебраїчними поліномами від залежної змінної x та її похідної $\frac{dx}{dt}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504с. 2. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. – 1963. – Т.18, вып. 6(144). – С.91–192. 3. Арнольд В.И. Малые знаменатели. I. Об отображении окружности на себя // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1961. – Вып.25, №1. – С.21–86. 4. Арнольд В.И. Малые знаменатели. II. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1963. – Т.18, вып. 5(113). – С.13–40. 5. Арнольд В.И. Исправления к работе В.Арнольда "Малые знаменатели.I" // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1964. – Вып.28. – С.479–480. 6. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – М.: Наука, 1978. – 128с. 7. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. (Приближенные и асимптотические методы нелинейной механики). – Москва-Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика", 2004. – 352 с. 8. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Т. 1: Новые методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. – 771с. 9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. В 2-х томах. Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615с. 10. Боголюбов Н.Н. О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики // Труды Первой летней математической школы.Т. I. – К.: Наукова думка, 1964. – С. 11–101. 11. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1971. – 248 с. 12. Самойленко А.М. Н.Н.Боголюбов и нелинейная механика // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, вып. 5(299). – С.103–146. 13. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

Надійшла до редколегії 01.03.13

М. Гордиенко, асп

ПРОБЛЕМА МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ И УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА-МИТРОПОЛЬСКОГО

Проанализирован вопрос о связи между классической проблемой малых знаменателей и условиями для правых частей слабо нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы, и к которым можно применить метод Крылова-Боголюбова-Митропольского для построения асимптотических решений.

M. Gordiyenko, PhD-student

THE PROBLEM OF SMALL DENOMINATORS AND CONDITIONS OF APPLYING ASYMPTOTIC KRYLOV-BOGOLYUBOV-MITROPOLSKY TECHNIQUE

The connection between the classical problem of small denominators and conditions for the right side functions of weakly nonlinear differential equations describing the oscillatory motions to which the Krylov-Bogolyubov-Mitropolsky technique may be applied to construct asymptotic solutions are analyzed.

УДК 517.947

А. Громик, канд. техн.наук, викл.,
Подільський державний аграрно-технічний університет, Кам'янець-Подільський,
І. Конет, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Кам'янець-Подільський державний університет, Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ

Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в кусково-однорідному суцільному циліндрі.

ВСТУП. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при математичному моделюванні різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки, техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1, 3, 18, 19, 22].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних областях, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних областях, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7, 8, 20, 21].

Окрім методу відокремлення змінних [23], одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, які породженні диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються, або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [4-6, 11, 13-15, 17].

Гіперболічні крайові задачі в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях розглянуто у працях [9, 10, 12]. У цій статті ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному суцільному циліндрі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$D=\left\{(t,r,\varphi,z);\, t>0;\, r\in(0;R),\, R<+\infty;\, \varphi\in[0;2\pi);\, z\in K_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}\mathrm{I}_j\equiv\bigcup_{j=1}^{n+1}\left(l_{j-1};l_j\right),\, l_0\ge 0;\, l_k<l_{k+1};\, l_{n+1}\equiv l<+\infty\right\}$ 2π – періодичного

щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [23]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j+\chi_j^2u_j=f_j\left(t,r,\varphi,z\right);\;\; z\in I_j;\;\; j=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0}=g_j^1\left(r,\varphi,z\right);\;\frac{\partial u_j}{\partial t}\bigg|_{t=0}=g_j^2\;\left(r,\varphi,z\right);\;\; z\in\mathrm{I}_j;\;\; j=\overline{1,n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_1\bigg|_{z=l_0}=g_0\left(t,r,\varphi\right);\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\bigg|_{z=l}=g_l\left(t,r,\varphi\right), \tag{3}$$

$$u_j\Big|_{r=0}=0;\left(\frac{\partial}{\partial z}+h\right)u_j\Big|_{r=R}=\theta_j\left(t,\varphi,z\right);\, z\in I_j;\, j=\overline{1,n+1}\,, \tag{4}$$

та умовами спряження [17]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k}=0;\;\; j=1,2;\quad k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де $a_{rj},\;a_{zj},\chi_j,\alpha_{js}^k,\beta_{js}^k,h$ – деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k\neq 0;\ \ c_{1k}c_{2k}>0;\ \left|\alpha_{11}^0\right|+\left|\beta_{11}^0\right|\neq 0;\ \left|\alpha_{22}^{n+1}\right|+\left|\beta_{22}^{n+1}\right|\neq 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\left\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^1(r,\varphi,z)\ =\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};\quad g^2(r,\varphi,z)\ =\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\};$$

$\theta(t,\varphi,z)=\left\{\theta_1(t,\varphi,z),\theta_2(t,\varphi,z),\ldots,\theta_{n+1}(t,\varphi,z)\right\}g_0(t,r,\varphi),g_l(t,r,\varphi)$ – задані обмежені неперервні функції;

$u(t,r,\varphi,z)=\left\{u_1(t,r,\varphi,z),\ u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\}$ – шукана функція.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 17, 24].

До задачі (1)–(5) застосуємо скінчене інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [23]:

$$F_m\left[g(\varphi)\right]=\int_0^{2\pi}g(\varphi)\,e^{-im\varphi}d\varphi\equiv g_m, \tag{6}$$

$$F_m^{-1}\left[g_m\right]=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m e^{im\varphi}\right)\equiv g(\varphi), \tag{7}$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right]=-m^2F_m\left[g(\varphi)\right]\equiv -m^2g_m, \tag{8}$$

де $\operatorname{Re}(\ldots)$ – дійсна частина виразу $(\ldots)$ щодо φ, $\varepsilon_0=1;\ \varepsilon_k=2;\ k=1,2,3,\ldots$, i – уявна одиниця

Інтегральний оператор Фур'є F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'=\left\{(t,r,z);\,t>0;r\in(0;R);\,z\in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь B-гіперболічного типу [18]

$$\frac{\partial^2u_{jm}}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm}+\chi_j^2u_{jm}=f_{jm}(t,r,z);\,z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{9}$$

з початковими умовами

$$u_{jm}\Big|_{t=0}=g_{jm}^1(r,z);\ \frac{\partial u_{jm}}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_{jm}^2(r,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}, \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)u_{1m}\Big|_{z=l_0}=g_{0m}(t,r);\quad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1,m}\Big|_{z=l}=g_{lm}(t,r), \tag{11}$$

$$u_{jm}\Big|_{r=0}=0;\left(\frac{\partial}{\partial r}+h\right)u_{jm}\Big|_{r=R}=\theta_{jm}(t,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{12}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)u_{km}-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1,m}\right]\Big|_{z=l_k}=0;\ \ j=1,2;\ \ k=\overline{1,n}. \tag{13}$$

До задачі (9)–(13) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Ганкеля 1-го роду щодо радіальної змінної r [16]:

$$H_\nu\left[g(r)\right]=\int_0^R g(r)\,J_\nu(\beta_kr)\,rdr\equiv g_k, \tag{14}$$

$$H_\nu^{-1}\left[g_k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}gk\,\frac{J_\nu(\beta_kr)}{\left\|J_\nu(\beta_kr)\right\|^2}\equiv g(r), \tag{15}$$

$$H_\nu\left[\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}g\right]=-\beta_k^2g+RJ_\nu(\beta_kR)\left(\frac{dg}{dr}+hg\right)\Big|_{r=R}, \tag{16}$$

де $\left\{\beta_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння Бесселя 1-го роду $\left(\frac{\nu}{R}+h\right)J_\nu(\beta R)-\beta J_{\nu-1}(\beta R)=0,$ які утворюють дискретний спектр, а квадрат норми спектральної функції $\left\|J_\nu(\beta_kr)\right\|^2\equiv\int_0^R J_\nu^2(\beta_kr)\,rdr=\left(\frac{R^2}{2}\right)\left[J_\nu^2(\beta_kR)-2\nu(\beta_kr)^{-1}J_\nu(\beta_kR)J_{\nu+1}(\beta_kr)+J_{\nu+1}^2(\beta_kR)\right].$

Інтегральний оператор H_m за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (9)–(1) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\left\{(t,z);\,t>0;\,z\in K_n^+\right\}$ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2u_{jmk}}{\partial t^2}-a_{zj}^2\frac{\partial^2u_{jmk}}{\partial z^2}+\left(a_{rj}^2\beta_k^2+\chi_j^2\right)u_{jm}=F_{jmk}(t,z);\quad z\in \mathrm{I}_j;\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{17}$$

з початковими умовами

$$u_{jmk}\Big|_{t=0}=g_{jmk}^1(z);\ \frac{\partial u_{jmk}}{\partial t}\Big|_{t=0}=g_{jmk}^2(z);\quad z\in \mathrm{I}_j;\quad j=\overline{1,n+1}, \tag{18}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^{0}\right)u_{1mk}\Big|_{z=l_0}=g_{0mk}(t);\quad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1,mk}\Big|_{z=l}=g_{lmk}(t), \tag{19}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{p}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^{p}\right)u_{pmk}-\left(\alpha_{j2}^{p}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^{p}\right)u_{p+1,mk}\right]\Big|_{z=l_p}=0;\quad j=1,2;\quad p=\overline{1,n}, \tag{20}$$

де

$$F_{jmk}(t,z)=f_{jmk}(t,z)+a_{rj}^{2}RJ_m(\beta_k R)\,\theta_{jm}(t,z);\quad j=\overline{1,n+1}.$$

До задачі (17)–(20) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0;l]$ з n точками спряження щодо змінної z [17]:

$$F_{sn}\left[g(z)\right]=\int_{l_0}^{l}g(z)V(z,\lambda_s)\sigma(z)\,dz\equiv g_s, \tag{21}$$

$$F_{sn}^{-1}\left[g_s\right]=\sum_{s=1}^{\infty}g\frac{V(z,\lambda_s)}{\left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2}\equiv g(z), \tag{22}$$

$$\begin{gathered}F_{sn}\left[\sum_{i=1}^{n+1}a_{zi}^{2}\theta(z-l_{i-1})\,\theta(l_i-z)\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\lambda_s^2 g_s-\sum_{i=1}^{n+1}k_i^2\int_{l_{i-1}}^{l_i}g(z)V_i(z,\lambda_s)\sigma_i\,dz-\\ -a_{z1}^{2}\sigma_1\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\left(\alpha_{11}^{0}\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^{0}g\right)\Big|_{z=l_0}+a_{z,n+1}^{2}\sigma_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{dg}{dz}+\beta_{22}^{n+1}g\right)\Big|_{z=l}.\end{gathered} \tag{23}$$

У формулах (21)-(23) беруть участь величини і функції:

$$V(z,\lambda_s)=\sum_{i=1}^{n+1}V_i(z,\lambda_s)\,\theta(z-l_{i-1})\theta(l_i-z);\quad \sigma(z)=\sum_{i=1}^{n+1}\sigma_i\theta(z-l_{i-1})\,\theta(z-l_i);\quad \sigma_k=\frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2}\prod_{m=k}^{n}c_{1m}c_{2m};\quad k=\overline{1,n};\quad \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{z,n+1}};$$

$$V_m(z,\lambda_s)=\prod_{i=m}^{n}c_{2i}q_{i+1,s}G_m(z,\lambda_s);\quad m=\overline{1,n};\quad V_{n+1}(z,\lambda_s)=\omega_{n2}(\lambda_s)\cos(q_{n+1,s}z)-\omega_{n1}(\lambda_s)\sin(q_{n+1,s}z);$$

$$G_m(z,\lambda_s)=\omega_{m-1,2}(\lambda_s)\cos(q_{ms}z)-\omega_{m-1,1}(\lambda_s)\sin(q_{ms}z);\quad \left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2=\int_{l_0}^{l}V^2(z,\lambda_s)\sigma(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{l_{k-1}}^{l_k}V_k^2(z,\lambda_s)\sigma_k\,dz;$$

$$q_j\equiv q_j(\lambda)=a_{z,o}^{-1}\left(\lambda^2+k_j^2\right)^{1/2};\quad q_{js}=q_j(\lambda_s);\quad v_{ip}^{k1}(q_{js}l_m)=-\alpha_{ip}^{k}q_{js}\sin(q_{js}l_m)+\beta_{ip}^{k}\cos(q_{js}l_m);$$

$$v_{ip}^{k2}(q_{js}l_m)=\alpha_{ip}^{k}q_{js}\cos(q_{js}l_m)+\beta_{ip}^{k}\sin(q_{js}l_m);\quad \omega_{01}(\lambda_s)=v_{11}^{01}(q_{1s}l_0);\ \omega_{02}(\lambda_s)=v_{11}^{02}(q_{1s}l_0);$$

$$\psi_{pm}^{k}(x,y)=v_{11}^{kp}(x)v_{22}^{km}(y)-v_{21}^{kp}(x)v_{12}^{km}(y);\quad \omega_{pm}(\lambda_s)=\omega_{p-1,2}(\lambda_s)\,\psi_{1m}^{p}(q_{ps}l_p,q_{p+1,s}l_p)-\omega_{p-1,1}(\lambda_s)\,\psi_{2m}^{p}(q_{ps}l_p,q_{p+1,s}l_p);$$

де λ_s – корені трансцендентного рівняння $\Delta_n(\lambda)\equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)\,\omega_{n1}(\lambda)-v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}l)\,\omega_{n2}(\lambda)=0$, які утворюють дискретний спектр.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (17) та початкові умови (18) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{r1}^2\beta_k^2+\chi_1^2\right)u_{1mk}\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z2}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{r2}^2\beta_k^2+\chi_2^2\right)u_{2mk}\\ \dotfill\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{z,n+1}^2\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}+a_{r,n+1}^2\beta_k^2+\chi_{n+1}^2\right)u_{n+1,mk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{1mk}(t,z)\\ F_{2mk}(t,z)\\ \dotfill\\ F_{n+1,mk}(t,z)\end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix}u_{1mk}(t,z)\\ u_{2mk}(t,z)\\ \dotfill\\ u_{n+1,mk}(t,z)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_{1mk}^{1}(z)\\ g_{2mk}^{1}(z)\\ \dotfill\\ g_{n+1,mk}^{1}(z)\end{bmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_{1mk}(t,z)\\ u_{2mk}(t,z)\\ \dotfill\\ u_{n+1,mk}(t,z)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}g_{1mk}^{2}(z)\\ g_{2mk}^{2}(z)\\ \dotfill\\ g_{n+1,mk}^{2}(z)\end{bmatrix}. \tag{25}$$

Інтегральний оператор F_{sn}, який діє за правилом (21), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{sn}[\ldots]=\left[\int_{l_0}^{l_1}\ldots V_1(z,\lambda_s)\sigma_1 dz\int_{l_1}^{l_2}\ldots V_2(z,\lambda_s)\sigma_2 dz\ldots\int_{l_n}^{l}\ldots V_{n+1}(z,\lambda_s)\sigma_{n+1}dz\right] \tag{26}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25). Внаслідок тотожності (23) одержуємо задачу Коші

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\lambda_s^2+a_{rj}^2\beta_k^2+\chi_j^2+k_j^2\right)u_{jmks}=\\ =\sum_{j=1}^{n+1}F_{jmks}(t)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\,g_{0mk}(t)+\sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\,g_{lmk}(t),\end{gathered} \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} u_{jmks}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} g^1_{jmks}, \ \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1} u_{jmks}(t)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} g^2_{jmks}, \tag{28}$$

Де $u_{jmks}(t) = \int_{l_{i-1}}^{l_j} u_{jmk}(t,z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_i dz;\ j=\overline{1,n+1};\ F_{jmks}(t) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} F_{jmk}(t,z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};$

$$g^1_{jmks} = \int_{l_{i-1}}^{l_j} g^1_{imk}(z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_i dz;\ j=\overline{1,n+1};\quad g^2_{jmks} = \int_{l_{i-1}}^{l_j} g^2_{imk}(z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_i dz;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\limits_{1\le j\le n+1}\{a^2_{rj}, \beta^2_k+\chi^2_j\} = a^2_{r1}\beta^2_k+\chi^2_1$ і покладемо всюди $k^2_j = (a^2_{r1}\beta^2_k+\chi^2_1)-(a^2_{rj}\beta^2_k+\chi^2_j);\ j=\overline{1,n+1}$. Задача Коші (27), (28) набуває вигляду

$$\frac{d^2u_{msk}(t)}{dt^2} + \Delta^2(\beta_k,\lambda_s)u_{mks}(t) = F_{mks}(t) - \sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)g_{0mk}(t) + \sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)g_{lmk}(t), \tag{29}$$

$$u_{mks}(t)\big|_{t=0} = g^1_{mks},\ \frac{du_{mks}(t)}{dt}\Big|_{t=0} = g^2_{mks}, \tag{30}$$

Де $u_{mks}(t) = \sum_{j=1}^{n+1} u_{jmks}(t),\ \Delta^2(\beta_k,\lambda_s) = \lambda^2_s + a^2_{r1}\beta^2_k + \chi^2_1,\ F_{mks}(t) = \sum_{j=1}^{n+1}F_{jmks}(t),\ g^1_{mks} = \sum_{j=1}^{n+1} g^1_{jmks},\ g^2_{mks} = \sum_{j=1}^{n+1} g^2_{jmks}.$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (29), (30) є функція

$$u_{mns}(t) = \frac{\sin(\Delta(\beta_k,\lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k,\lambda_s)}g^2_{mks} + \frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\beta_k,\lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k,\lambda_s)}g^1_{mks}\int_0^t \frac{\sin(\Delta(\beta_k,\lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\beta_k,\lambda_s)}\Big[F_{mks}(\tau) - \sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\times$$
$$\times g_{0mk}(\tau) + \sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)g_{lmk}(\tau)\Big]d\tau. \tag{31}$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{sn} та F^{-1}_{sn} є одиничним оператором, то оператор F^{-1}_{sn} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F^{-1}_{sn}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_1(z,\lambda_s)}{\|V(z,\lambda_s)\|^2} \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_2(z,\lambda_s)}{\|V(z,\lambda_s)\|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}\cdots\dfrac{V_{n+1}(z,\lambda_s)}{\|V(z,\lambda_s)\|^2}\end{bmatrix}. \tag{32}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента $[u_{mks}(t)]$, де функція $u_{mks}(t)$ визначена формулою (31). Одержуємо єдиний розв'язок задачі (17)-(20):

$$u_{jmk}(t,z) = \sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\beta_k,\lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k,\lambda_s)}g^2_{mks} + \frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\beta_k,\lambda_s)t)}{\Delta(\beta_k,\lambda_s)}g^1_{mks}\right]\frac{V_j(z,\lambda_s)}{\|V(z,\lambda_s)\|^2} + \sum_{s=1}^{\infty}\left\{\int_0^t\frac{\sin(\Delta(\beta_k,\lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\beta_k,\lambda_s)}\times\right.$$
$$\left.\times\Big[F_{mks}(\tau) - \sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)g_{0mk}(\tau) + \sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)g_{lmk}(\tau)\Big]d\tau\right\}\frac{V_j(z,\lambda_s)}{\|V(z,\lambda_s)\|^2};\ j=\overline{1,n+1}. \tag{33}$$

Застосувавши послідовно до функцій $u_{imk}(t,z)$, визначених формулами (33), обернені оператори H^{-1}_m за та F^{-1}_m, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z) = \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho\, d\tau +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g^1_k(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho + \sum_{k=1}^{n+1}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g^2_k(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\, d\xi\, d\alpha\, d\rho +$$
$$+\int_0^t\int_0^R\int_0^{2\pi}\Big[W^0_j(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_0(\tau,\rho,\alpha) + W^l_j(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_l(\tau,\rho,\alpha)\Big]\rho\, d\alpha\, d\rho\, d\tau + \tag{34}$$
$$+a^2_{rj}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{jk}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_k(\tau,\alpha,\xi)\sigma_k\, d\xi\, d\alpha\, d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)–(5).

У формулах (34) застосовано компоненти $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)\cos(m\varphi)$ матриці впливу (функції впливу), компоненти $W^0_j(t,r,\rho,\varphi,z) = -\sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}E_{j1}(t,r,\rho,\varphi,z,l_0)$ нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти $W_j^l(t,r,\rho,\varphi,z) = \sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}E_{j,n+1}(t,r,\rho,\varphi,z,l)$ верхньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна) та компоненти $W_{jk}(t,r,\varphi,z,\xi) = RE_{jk}(t,r,R,\varphi,z,\xi)$ радіальної матриці Гріна (функції Гріна) розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\Delta(\beta_p,\lambda_s)t\right)}{\Delta(\beta_p,\lambda_s)}\frac{J_m(\beta_p r)J_m(\beta_p\rho)}{\left\|J_m(\beta_p r)\right\|^2}\frac{V_j(z,\lambda_s)V_k(\xi,\lambda_s)}{\left\|V(z,\lambda_s)\right\|^2};\ j,k=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_j^0(t,r,\rho,\varphi,z)$, $W_j^l(t,r,\rho,\varphi,z)$, $W_{jk}(t,r,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (34), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [25].

Єдиність розв'язку (34) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу та функцій Гріна).

Можна довести [2], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)–(5), узагальнений розв'язок (34) буде також її класичним розв'язком.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (34) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)-(5) в ізотропному кусково-однорідному суцільному циліндрі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1–1, 1–2, 1–3, …, 3–3).

Зауваження 3. Параметр h дає можливість виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $r = R$ крайової умови 1-го та 2-го роду.

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (34) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z), g_j^1(r,\varphi,z), g_j^2(r,\varphi,z)$, $g_0(t,r,\varphi), g_l(t,r,\varphi), \theta_j(t,\varphi,z)$ проводиться безпосередньо.

ВИСНОВКИ. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі в кусково-однорідному циліндрі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. 2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз., 1958. 3. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1998. 4. Громик А.П., Конет І.М. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2009. 5. Громик А.П., Конет І.М. Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2008. 6. Громик А.П., Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2011. 7. Дейнека В.С. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – К.: Наук. думка, 1998. 8. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. 9. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – 2011. – Вип. 8 (17). – С. 93-108. 10. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях // Математичний вісник НТШ. – 2010. – Т.7. – С. 71–92. 11. Конет І.М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра. – Кам'янець-Подільський : Абетка – Світ, 2007. 12. Конет І.М., Ленюк М.П. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11). – Чернівці: Прут, 2011. – С. 5–17. 13. Конет І.М., Ленюк М.П. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці : Прут, 2001. – 312 с. 14. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці : Прут, 2004. 15. Конет І.М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К.: Ін-т математики НАН України, 1998. 16. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье). – К., 1983. – 56 с. – (Препр. / АН УССР. Институт математики; 83.18). 17. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М.П. Ленюк. – К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 18. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці : Прут, 2003. 19. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957. 20. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. 21. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К.: Наук. думка, 1991. 22. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. 23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. 24. Трантер К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж. Трантер. – М.: Гостехтеориздат., 1956. 25. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965.

Надійшла до редколегії 02.01.13

А. Громик, канд. техн. наук, препод., И. Конет, д-р физ.-мат. наук, проф.

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОМ СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

Методом интегральных преобразований в сочетании с методом главных решений построены точные аналитические решения гиперболических краевых задач в кусочно-однородном сплошном цилиндре.

A. Gromyk PhD (eng), I. Konet, Full Doctor

HYPERBOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN PIECEWISE HOMOGENEOUS SOLID CYLINDER

By means the method of integral transforms in combination with the method of principal solutions the exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems in piecewise homogeneous solid cylinder are obtained

УДК 517.9

О. Чвартацький, асп.,
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
Email: alex.chvartatskyy@gmail.com

ФАКТОРИЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА НЕЛІНІЙНІ ІНТЕГРОВНІ МОДЕЛІ, II

Отримано факторизацію матричних інтегральних операторів бінарних перетворень Вольтерра скінченного порядку. Профакторизовано матричний оператор перетворень Фредгольма скінченного рангу за допомогою матричних фредгольмівських операторів перетворень рангу 1. Наведено застосування в теорії нелінійних інтегрованих моделей.

ВСТУП. В сучасній теорії нелінійних інтегровних систем математичної та теоретичної фізики значну роль відіграють алгебричні конструкції, які є результатом роботи великої групи дослідників, зокрема московської та ленінградської шкіл С. П. Новікова і Л. Д. Фаддєєва, а також В. Є. Захарова, А. Б. Шабата, І. М. Гельфанда, Л. А. Дікого, Ю. І. Маніна, В. Г. Дрінфельда, М. Адлера, Р. Хіроти, Дж. Вільсона та багатьох інших (детальний огляд див. в [19]). Так, при побудові точних розв'язків солітонних систем використовується метод одягання Захарова-Шабата [3, 4, 15], метод В. А. Марченка [5], а також метод перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва [17, 18, 22, 23]. Побудова широких класів точних розв'язків нелінійних інтегровних моделей теорії солітонів та їх (2+1)-вимірних узагальнень, які отримуються внаслідок накладання нелокальних редукцій в ієрархії рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі розглядалася в багатьох працях (див. наприклад, [6, 7, 16, 20, 21, 24, 25, 27–29]). При цьому в якості одягаючого оператора використовувався диференціальний оператор перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва. Факторизація диференціального оператора Дарбу-Матвєєва (матричного диференціального оператора першого порядку) за допомогою найпростіших диференціальних операторів типу Дарбу досліджувалась в [30]. Проте, найцікавіші з точки зору фізичних застосувань нелінійні інтегровні системи (нелінійні рівняння Шредінгера, модифіковані рівняння Кортевега-де Вріза, модель Яджими-Ойкави та інші), які отримуються після накладання додаткових редукцій типу ермітового спряження, не підпадають, безпосередньо, під метод одягання за допомогою диференціальних операторів. Для цього в якості одягаючого оператора використовується бінарне перетворення типу Дарбу [1, 8, 26]. Питання факторизації бінарного перетворення в алгебрі формальних символів псевдо-диференціальних операторів розглядалось в [30]. Скалярний інтегральний оператор перетворення Вольтерра скінченного порядку був профакторизований в [9] за допомогою операторів Вольтери першого порядку Також в [9] розглядалось питання факторизації скалярних операторів перетворень Фредгольма скінченого рангу. Метою цієї статті є поширення результатів, отриманих в [9] на матричний випадок.

Структура статті є наступна. В Розділі 2 наводяться необхідні поняття та означення для інтегральних операторів перетворень. В Розділах 3 та 4 досліджується питання факторизації матричних операторів перетворень Вольтери та Фредгольма скінченого порядку та рангу відповідно. У Розділі 5 розглядається застосування матричних інтегральних операторів перетворень для одягання еволюційних диференціальних виразів. В заключних зауваженнях підбивається підсумок отриманих результатів та цілі формулюються завдання для подальших досліджень.

ВИХІДНІ ПОНЯТТЯ ТА ОЗНАЧЕННЯ. Введемо деякі поняття та означення, які ми використовуватимемо в основній частині роботи. Зафіксуємо довільний інтервал (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ і точку $x_0 \in [a,b]$. Розглянемо оператори Вольтерра і Фредгольма з $(N\times N)$-матричними ядрами $A(x,s)$ та $F(x,s)$:

$$A = \int_{x_0}^{x} A(x,s)\cdot ds,\ F = \int_{a}^{b} F(x,s)\cdot ds, \tag{1}$$

які діють на довільну $(N\times 1)$-вектор-функцію $f(x)$ таким чином:

$$A\{f\} = \int_{x_0}^{x} A(x,s)f(s)\cdot ds, \quad F\{f\} = \int_{a}^{b} F(x,s)f(s)\cdot ds. \tag{2}$$

За аналогією з означеннями, що використовувались в [9], введемо означення матричних операторів Вольтерра та Фредгольма скінченного порядку та рангу відповідно.

Означення. Матричний оператор Вольтери A називатимемо оператором порядку K, якщо його ядро можна зобразити наступним чином:

$$A(x,s) = A_1(x)A_2^{\mathrm{T}}(s), \tag{3}$$

де $A_1(x)$, $A_2(s)$ – $(N\times K)$-матричні функції, причому вектор-стовпці кожної з них є лінійно незалежними функціями. Оператор Вольтерра A (1) з ядром (3) надалі позначатимемо так:

$$A := A_1\int_{x_0}^{x} A_2^{T}\cdot ds. \tag{4}$$

Означення. Оператор Фредгольма F вигляду (1) називатимемо оператором Фредгольма рангу $K \in \mathrm{N}$, якщо його ядро можна подати у вигляді:

$$F(x,s) = F_1(x)F_2^{\mathrm{T}}(s), \tag{5}$$

де $F_1(x)$, $F_2(s)$ – $(N\times K)$-матричні функції, кожна з яких складається з лінійно незалежних вектор-стовпців.

Оператор Фредгольма F вигляду (1) з ядром (5) надалі позначатимемо так:

$$F := F_1\int_{a}^{b} F_2^{T}\cdot ds.$$

Означення. Оператори $W = I + A$ і $S = I + F$, де A, F є вольтерівським та фредгольмівським матричними операторами з ядрами вигляду (3), (5), ми називатимемо операторами перетворень порядку K і рангу K відповідно.

В Означенні 3 символом I позначено одиничний оператор.

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВОЛЬТЕРРА. Позначимо через $\hat{\varphi}_K = \hat{\varphi}_K[1] := \hat{\varphi}_K(x) = (\varphi_1[1], \ldots, \varphi_K[1])$ та $\hat{\psi}_K = \hat{\psi}_K[1] := \hat{\psi}_K(x) = (\psi_1[1], \ldots, \psi_K[1])$ $(N \times K)$-матричні функції, складені з лінійно незалежних $(N \times 1)$ вектор-стовпців $\varphi_j[1]$ та $\psi_j[1]$, $j = \overline{1, K}$. Вважатимемо, що елементи матриць $\hat{\varphi}_K[1]$ та $\hat{\psi}_K[1]$ – неперервні та інтегровні з квадратом модуля на інтервалі (a, b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$, тобто, належать простору $\Im := C(a, b) \cap L_2(a, b)$. Розглянемо пару інтегральних операторів Вольтерра порядку K:

$$W_K = W_K[C_K, \hat{\varphi}_K[1], \hat{\psi}_K[1]] := I - \hat{\varphi}_K[1]\Delta_K^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,$$
$$\tilde{W}_K = \tilde{W}_K[C_K, \hat{\varphi}_K[1], \hat{\psi}_K[1]] := I - \hat{\psi}_K[1]\tilde{\Delta}_K^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}_K^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds, \ \ \Delta_K := C_K + \int_{x_0}^{x}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds, x_0 \in [a, b], \ \ \tilde{\Delta}_K^{\mathrm{T}} = \Delta_K^{\blacklozenge}, \tag{6}$$

де $C_K = diag(c_1, \ldots, c_K)$ – невироджена діагональна матриця розмірності $(K \times K)$. Нас цікавитиме питання факторизації операторів (6) за допомогою вольтерівських операторів перетворень порядку 1. Позначимо через W_{11}, $\tilde{W}_{11}$ такі оператори:

$$W_{11} = W[c_1, \varphi_1[1], \psi_1[1]] := I - \varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_1^T[1](s)\cdot ds, \quad \tilde{W}_{11} = \tilde{W}[c_1, \varphi_1[1], \psi_1[1]] := I - \psi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_1^T[1](s)\cdot ds,$$
$$\Delta_{11} := c_1 + \int_{x_0}^{x}\psi_1^T[1]\varphi_1[1]ds. \tag{7}$$

Подіємо операторами перетворень (7) на $(N \times K)$-матричні функції $\hat{\varphi}_K[1]$ та $\hat{\psi}_K[1]$ відповідно:

$$\hat{\varphi}_K[2] := W_{11}\{\hat{\varphi}_K[1]\} = \hat{\varphi}_K[1] - \varphi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds,$$
$$\hat{\psi}_K[2] := \tilde{W}_{11}\{\hat{\psi}_K[1]\} = \hat{\psi}_K[1] - \psi_1[1]\Delta_{11}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\psi}_K[1](s)ds. \tag{8}$$

Використовуючи другі вектор-стовпці $\varphi_2[2]$ та $\psi_2[2]$ матриць $\hat{\varphi}_K[2]$ та $\hat{\psi}_K[2]$ (8) відповідно, визначимо наступну пару операторів перетворень:

$$W_{22} = W[c_2, \varphi_2[2], \psi_2[2]] := I - \varphi_2[2]\Delta_{22}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\cdot ds,$$
$$\tilde{W}_{22} = \tilde{W}[c_2, \varphi_2[2], \psi_2[2]] := I - \psi_2[2]\Delta_{22}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\cdot ds, \ \Delta_{22} := c_2 + \int_{x_0}^{x}\psi_2^{\mathrm{T}}[2]\varphi_2[2]ds. \tag{9}$$

На k-тому кроці, де $1 \le k < K$, отримаємо матричні функції $\hat{\varphi}_K[k]$ та $\hat{\psi}_K[k]$. За допомогою k-тих стовпців $\varphi_k[k]$ та $\psi_k[k]$ будуємо перетворення:

$$W_{kk} = W[c_k, \varphi_k[k], \psi_k[k]] := I - \varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_K^{\mathrm{T}}[k](s)\cdot ds,$$
$$\tilde{W}_{kk} = \tilde{W}[c_k, \varphi_k[k], \psi_k[k]] = I - \psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_K^{\mathrm{T}}[k](s)\cdot ds, \Delta_{kk} := c_k + \int_{x_0}^{x}\psi_K^{\mathrm{T}}[k](s)\varphi_k[k](s)ds, k = \overline{1, K}, \tag{10}$$

і визначаємо нові $(N \times K)$-матричні функції $\hat{\varphi}_K[k+1]$ та $\hat{\psi}_K[k+1]$:

$$\hat{\varphi}_K[k+1] = W_{kk}\{\hat{\varphi}_K[k]\} = \hat{\varphi}_K[k] - \varphi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\psi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\hat{\varphi}_K[k](s)ds,$$
$$\hat{\psi}_K[k+1] = \tilde{W}_{kk}\{\hat{\psi}_K[k]\} := \hat{\psi}_K[k] - \psi_k[k]\Delta_{kk}^{-1}\int_{x_0}^{x}\varphi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\hat{\psi}_K[k](s)ds, \ j = \overline{1, K}, \tag{11}$$

Справедливе таке твердження:

Твердження 1. Оператори Вольтерра K-ого порядку W_K та $\tilde{W}_K$ (6) факторизуються таким чином:

$$W_K = W_{KK} \circ W_{K-1K-1} \circ \ldots \circ W_{22} \circ W_{11}, \ \ \tilde{W}_K = \tilde{W}_{KK} \circ \tilde{W}_{K-1K-1} \circ \ldots \circ \tilde{W}_{22} \circ \tilde{W}_{11}, \tag{12}$$

де оператори W_{kk} та $\tilde{W}_{kk}$ визначаються формулами (7)–(11).

Доведення. Проведемо доведення індукцією за K. Припустимо, що твердження виконується для деякого K. А саме, нехай для операторів W_K та $\tilde{W}_K$, які визначені формулою (6), справджується рівність (12). Доведемо, що тоді вона буде справедливою для операторів W_{K+1}, $\tilde{W}_{K+1}$. Тобто, потрібно перевірити, що:

$$W_{K+1} = W_{K+1K+1} \circ W_{KK} \ldots W_{22} \circ W_{11} = W_{K+1K+1}W_K, \quad \tilde{W}_{K+1} = \tilde{W}_{K+1K+1} \circ \tilde{W}_{KK} \ldots \tilde{W}_{22} \circ \tilde{W}_{11} = \tilde{W}_{K+1K+1}\tilde{W}_K.$$

Перевіримо припущення індукції для оператора $\tilde{W}_{K+1}$. Для W_{K+1} перевірка проводиться аналогічно. Введемо позначення:

$$f[K+1] := \tilde{W}_K\{f\} = f - \hat{\psi}_K\tilde{\Delta}_K^{-1}\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}_K^{\mathrm{T}}(s)f(s)ds, \tag{13}$$

де $f-(N\times 1)$-вектор-функція, кожна компонента якої належить до класу $\Im$. Тоді,

$$\tilde{W}_{K+1K+1}\circ\tilde{W}_K\{f\}=\tilde{W}_{K+1K+1}\{f[K+1]\}=f[K+1]-\psi_{K+1}[K+1]\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1K+1}\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}[K+1](s)f[K+1](s)ds. \quad (14)$$

Використавши те, що $\varphi_{K+1}[K+1]=W_K\{\varphi_{K+1}\}$, а також формулу (13), отримаємо рівність:

$$\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}[K+1](s)f[K+1](s)ds=\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)f(s)ds-\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)f(s)ds\right). \quad (15)$$

Відповідно, з рівностей (13), (14), (15) та того, що $\psi_{K+1}[K+1]=\tilde{W}_K\{\psi_{K+1}\}$, отримуємо:

$$\tilde{W}_{K+1\,K+1}\{f[K+1]\}=f-\hat{\psi}_K\tilde{\Delta}^{-1}_K\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)f(s)ds-\left(\psi_{K+1}-\hat{\psi}_K\tilde{\Delta}^{-1}_K\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)f(s)ds-\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)f(s)ds\right)\right)=f-\left(\hat{\psi}_K,\psi_{K+1}\right)A_{K+1}(x)\int\limits_{x_0}^{x}\begin{pmatrix}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\\ \varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\end{pmatrix}f(s)ds,$$

де $A_{K+1}(x)$ – $(K+1)\times(K+1)$-матрична функція, яка виглядає таким чином:

$$A_{K+1}(x)=\begin{pmatrix}A_{11}(x) & A_{12}(x)\\ A_{21}(x) & A_{22}(x)\end{pmatrix},$$

де $A_{11}(x)$, $A_{12}(x)$, $A_{21}(x)$, $A_{22}(x)$ – $(K\times K)$, $(K\times 1)$, $(1\times K)$, (1×1)-блоки вигляду:

$$A_{11}(x)=\tilde{\Delta}^{-1}_K+\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K,$$

$$A_{12}(x)=-\tilde{\Delta}^{-1}_K\left(\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1},\quad A_{21}(x)=-\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds\right)\tilde{\Delta}^{-1}_K,\ A_{22}(x)=\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1\,K+1}.$$

Шляхом безпосередніх обчислень отримуємо, що

$$A_{K+1}(x)=\begin{pmatrix}\tilde{\Delta}_K & \int\limits_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_K(s)\psi_{K+1}(s)ds\\ \int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\hat{\psi}_K(s)ds & c_{K+1}+\int\limits_{x_0}^{x}\varphi^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\psi_{K+1}(s)ds\end{pmatrix}^{-1}=\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1}.$$

Таким чином, $\tilde{W}_{K+1K+1}\circ\tilde{W}_K=I-\hat{\psi}_{K+1}(x)\tilde{\Delta}^{-1}_{K+1}\int_{x_0}^{x}\hat{\varphi}^{\mathrm{T}}_{K+1}(s)\cdot ds=\tilde{W}_{K+1}.$ Аналогічно перевіряється факторизація для оператора W_{K+1}.

Тепер, використовуючи Твердження 1, ми профакторизуємо вольтеррівські оператори перетворень W_K та $\tilde{W}_K$ (6) у випадку довільної невиродженої матриці C_K. Як відомо з теорії матриць (див., наприклад, [2]), довільну невироджену матрицю розмірності ($K\times K$) можна подати у вигляді добутку таким чином: $C_K=F_KU_KL_K$, де F_K та L_K – нижня та верхня трикутні матриці відповідно. $U_K=diag(u_1,\dots,u_K)$ – діагональна матриця з елементами вигляду $u_1=D_1$, $u_k=\dfrac{D_k}{D_{k-1}}$, $k>1$, де D_k – головний мінор k-го порядку матриці C_K. Таким чином, оператор W_K (6) з довільною невиродженою матрицею C_K можна записати так:

$$\begin{aligned}W_K&=I-\hat{\varphi}_K[1]\left(F_KU_KL_K+\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds\right)^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\cdot ds=\\ &=I-\hat{\varphi}_K[1]L^{-1}_K\left(U_K+\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}_K\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)L^{-1}_Kds\right)^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}F^{-1}_K\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1](s)\cdot ds=\\ &=I-\hat{\varphi}'_K[1]\left(U_K+\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\psi}'^{\mathrm{T}}_K[1](s)\hat{\varphi}'_K[1](s)ds\right)^{-1}\int\limits_{x_0}^{x}\hat{\psi}'^{\mathrm{T}}_K[1](s)\cdot ds,\end{aligned} \quad (16)$$

де $\hat{\varphi}'_K[1]=\hat{\varphi}_K[1]L^{-1}_K$, $\hat{\psi}'^{\mathrm{T}}_K[1]=F^{-1}_K\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K[1]$. Тепер, використавши формулу (16) та Твердження 1, ми отримуємо алгоритм для факторизації оператора W_K (6) з довільною (не обов'язково діагональною) невиродженою матрицею C_K.

ФАКТОРИЗАЦІЯ МАТРИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФРЕДГОЛЬМА. У цьому розділі ми досліджуватимемо факторизації матричних операторів перетворень Фредгольма скінченного рангу. Розглянемо матричні оператори перетворень Вольтерра (6) при $x_0=\pm\infty$:

$$W^+=I-\hat{\varphi}_K(x)(\Delta^-_K(x))^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\cdot ds,W^-=I-\hat{\varphi}_K(x)(\Delta^+_K(x))^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\cdot ds, \quad (17)$$

де $\hat{\varphi}_K=\hat{\varphi}_K(x)$, $\hat{\psi}_K=\hat{\psi}_K(x)$ – $(N\times K)$-матричні функції, елементи яких є неперервними та інтегровними з квадратом модуля на всій осі;

$$\Delta^+_K(x)=C^+_K+\int\limits_{+\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\hat{\varphi}_K(s)ds,\ \Delta^-_K(x)=C^-_K+\int\limits_{-\infty}^{x}\hat{\psi}^{\mathrm{T}}_K(s)\hat{\varphi}_K(s)ds,$$

де C_K^+, C_K^- – $(K\times K)$-сталі матриці. Обернені оператори до W^+, W^- (17) мають вигляд:

$$(W^+)^{-1} = I+\hat{\varphi}_K(x)\int_{-\infty}^{x}(\Delta_K^-(s))^{-1}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds,\ \ (W^-)^{-1} = I+\hat{\varphi}_K(x)\int_{+\infty}^{x}(\Delta_K^+(s))^{-1}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds. \tag{18}$$

Надалі вважатимемо, що матриці C_K^+ та C_K^- є невиродженими та задовольняють співвідношення

$$C_K := C_K^+ = C_K^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\hat{\varphi}_K(s)ds, \tag{19}$$

наслідком якого є рівність: $\Delta_K := \Delta_K^+ = \Delta_K^-$.

Твердження 2. Нехай матриці C_K^- та $C_K^+ = C_K^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\hat{\varphi}_K(s)ds$ –невироджені. Тоді композиції операторів (17) та (18) мають такий вигляд:

$$S_1 := W^+\circ(W^-)^{-1} = I - H_1 = I-\hat{\varphi}_K(x)(\Delta_K^-)^{-1}(x)\int_{-\infty}^{+\infty}C_K^-(\Delta_K^-)^{-1}(s)\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds, \tag{20}$$

$$S_2 := (W^-)^{-1}\circ W^+ = I - H_2 = I-\hat{\varphi}_K(x)(C_K^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds, \tag{21}$$

$$S_3 := (W^+)^{-1}\circ W^- = I + H_3 = I+\hat{\varphi}_K(x)(C_K^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds, \tag{22}$$

$$S_4 := W^-\circ(W^+)^{-1} = I + H_4 = I+\hat{\varphi}_K(x)(\Delta_K^+)^{-1}(x)C_K^+\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta_K^+)^{-1}(s)\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds. \tag{23}$$

Доведення. Доведення цього факту проводиться аналогічно доведенню відповідного твердження з [9] для скалярних фредгольмівських операторів перетворень.

Дослідимо тепер питання факторизації матричного оператора перетворення Фредгольма S_2 рангу K (21) з матрицею $C_K^+ = diag(c_1^-,\dots,c_K^-) + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\hat{\varphi}_K(s)ds$ за допомогою фредгольмівських операторів перетворень рангу 1. Використовуватимемо для матриць $\hat{\varphi}_K$ та $\hat{\psi}_K$, а також їх стовпців ті ж позначення, що й у першому розділі; тобто $\hat{\varphi}_K := \hat{\varphi}_K[1] = (\varphi_1,\dots,\varphi_K) = (\varphi_1[1],\dots,\varphi_K[1])$, $\hat{\psi}_K := \hat{\psi}_K[1] = (\psi_1,\dots,\psi_K) = (\psi_1[1],\dots,\psi_K[1])$. Далі, розглянемо такий оператор перетворень Фредгольма:

$$S_{11} := I - \varphi_1[1](c_1^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ c_1^+ := c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_1[1](s)ds. \tag{24}$$

Введемо матричну функцію $\hat{\varphi}_K[2]$ таким чином:

$$\hat{\varphi}_K[2] := S_{11}\{\hat{\varphi}_K[1]\} = \hat{\varphi}_K[1] - \varphi_1[1](c_1^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[1](s)ds. \tag{25}$$

Побудуємо новий оператор S_{22} за допомогою другого стовпця матричної функції $\hat{\varphi}_K[2]$:

$$S_{22} := I - \varphi_2[2](c_2^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds, c_2^+ = c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_2[2](s)ds. \tag{26}$$

На k-тому кроці $(1\le k<K)$ маємо матричну функцію $\hat{\varphi}_K[k]$. Будуємо перетворення S_{kk}:

$$S_{kk} := I - \varphi_k[k](c_k^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds, c_k^+ = c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_k[k](s)ds. \tag{27}$$

Далі будуємо нову матричну функцію:

$$\hat{\varphi}_K[k+1] := S_{kk}\{\hat{\varphi}_K[k]\} = S_{kk}\circ S_{k-1k-1}\dots\circ S_{22}\circ S_{11}\{\hat{\varphi}_K[1]\} = \hat{\varphi}_K[k](x) - \varphi_k[k](x)(c_k^+)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\varphi}_K[k](s)ds. \tag{28}$$

Через K кроків отримаємо оператори $S_{11},\dots,S_{KK}$. Справедливе таке твердження:

Твердження 3. Оператор S_2 (21) можна зобразити наступним чином $S_2 = S_{KK}\circ S_{K-1K-1}\circ\dots\circ S_{22}\circ S_{11}$, де оператори S_{kk}, $k=\overline{1,K}$ визначаються формулами (24)-(28).

Доведення. Доведення цього твердження проводиться індукцією за K, як і у випадку матричних вольтерівських операторів перетворень (Твердження 1).

Тепер, використовуючи факторизацію оператора S_2 (21), отримаємо факторизацію оператора S_3 (22) з невиродженою діагональною матрицею $C_K^- = diag(c_1^-,\dots,c_K^-)$ та $(N\times K)$-матричними функціями $\hat{\varphi}_K = (\varphi_1,\dots,\varphi_K) = (\varphi_1[1],\dots,\varphi_K[1])$, $\hat{\psi}_K = (\psi_1,\dots,\psi_K) = (\psi_1[1],\dots,\psi_K[1])$. Розглянемо такі два оператори перетворень Фредгольма:

$$S_{11} := I + \varphi_1[1](c_1^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds,\ \ \tilde{S}_{11} := I - \psi_1[1]\left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_1[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds$$

та визначимо матричну функцію $\hat{\psi}_K[2]$ таким чином:

$$\hat{\psi}_K[2] := \tilde{S}_{11}\{\hat{\psi}_K[1]\} = \hat{\psi}_K[1] - \psi_1[1]\left(c_1^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\varphi_1[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^{\mathrm{T}}[1](s)\hat{\psi}_K[1](s)ds.$$

Далі, за допомогою вектор-функцій $\varphi_2[1]$, $\psi_2[2]$ та сталої c_2^- побудуємо оператори перетворень Фредгольма S_{22}, $\tilde{S}_{22}$:

$$S_{22} := I + \varphi_2[1](c_2^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{22} := I - \psi_2[2]\left(c_2^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2^{\mathrm{T}}[2](s)\varphi_2[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds.$$

На k-ому кроці $(1 \le k < K)$ отримаємо матричні функції $\hat{\psi}_K[k]$. Визначаємо оператори:

$$S_{kk} = I + \varphi_k[1](c_k^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{kk} := I - \psi_k[k]\left(c_k^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_k^{\mathrm{T}}[k](s)\varphi_k[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds.$$

Далі, будуємо функції $\hat{\psi}_K[k+1] : \hat{\psi}_K[k+1] := \tilde{S}_{kk}\{\hat{\psi}_K[k]\}$, та оператори:

$$S_{k+1\,k+1} = I + \varphi_{k+1}(c_{k+1}^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}^{\mathrm{T}}[k+1](s)\cdot ds,\ \tilde{S}_{k+1\,k+1} := I - \psi_{k+1}[k+1]\left(c_{k+1}^- + \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_{k+1}^{\mathrm{T}}[k+1](s)\varphi_{k+1}[1](s)ds\right)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{k+1}^{\mathrm{T}}[1](s)\cdot ds.$$

Через K кроків отримаємо оператори S_{kk}, $k = \overline{1,K}$. Справедливе твердження:

Твердження 4. Оператор S_3 (22) допускає наступну факторизацію: $S_3 = S_{KK} \circ S_{K-1\,K-1} \circ \ldots \circ S_{22} \circ S_{11}$.

Доведення. Доведення проводиться як і у випадку Твердження 3 за допомогою індукції за K.

Скориставшись попереднім твердженням, а також фактом з теорії матриць про розклад довільної невиродженої матриці C_K^- в добуток $C_K^- = F_K U_K L_K$, де F_K, L_K – нижня та верхня трикутні матриці, U_K – діагональна матриця, ми можемо профакторизувати оператор S_3 (22) у випадку невиродженої матриці C_K^-. А саме, запишемо оператор S_3 наступним чином:

$$S_3 = I + \hat{\varphi}_K(x)(C_K^-)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds = I + \hat{\varphi}_K(x)L_K^{-1}U_K^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}F_K^{-1}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds = I + \tilde{\hat{\varphi}}_K(x)U_K^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\hat{\psi}}_K^{\mathrm{T}}(s)\cdot ds,$$

де $\tilde{\hat{\varphi}}_K(x) = \hat{\varphi}_K(x)L_K^{-1}$, $\tilde{\hat{\psi}}_K(x) = \hat{\psi}_K(x)F_K^{\blacklozenge\mathrm{T},-1}$. Далі, залишилось скористатись Твердженням 4 про факторизацію оператора S_3 у випадку діагональної матриці C_K^-.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ВИРАЗІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВОЛЬТЕРРІВСЬКИХ ОПЕРАТОРІВ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ. Розглянемо еволюційний диференціальний вираз наступного вигляду:

$$L = \alpha\partial_t - \sum_{i=0}^{n} u_i D^i,\ \alpha \in \mathrm{C}, D := \frac{\partial}{\partial x},$$

коефіцієнти $u_i = u_i(x,t)$ якого є ($N \times N$)-матричними функціями. Під формально транспонованим ми розумітимемо вираз такого вигляду:

$$L^{\tau} = -\alpha\partial_t - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i D^i u_i.$$

Нехай $(N \times K)$-матричні функції $\hat{\varphi}_K = \hat{\varphi}_K(x,t) = (\varphi_1,\ldots,\varphi_K)$, $\hat{\psi}_K = \hat{\psi}_K(x,t) = (\psi_1,\ldots,\psi_K)$ є розв'язками рівнянь: $L\{\hat{\varphi}_K\} = \hat{\varphi}_K\Lambda, L^{\tau}\{\hat{\psi}_K\} = \hat{\psi}_K\tilde{\Lambda},\quad \Lambda, \tilde{\Lambda} \in Mat_{K\times K}(\mathrm{C})$. В наступній теоремі описано структуру операторів $L^{\pm}$, отриманих після одягання L за допомогою вольтеррівських операторів W^+, W^- (17). Вважатимемо, що матриці $C_K^{\pm}$ в операторах (17) задовольняють співвідношення (19), наслідком якого є рівність $\Delta_K^+ = \Delta_K^-$.

Теорема 1. Нехай $(N \times K)$ матричні функції $\hat{\psi}_K$, $\hat{\varphi}_K$ спадають на обох нескінченостях та задовольняють рівність: $\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}\hat{\varphi}_K\Lambda - \tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\psi}_K^{\mathrm{T}}\hat{\varphi}_K)ds$. Тоді:

1. Оператори $L^+ = W^+L(W^+)^{-1}$ та $L^- = W^-L(W^-)^{-1}$ мають вигляд:

$$L^{\pm} = (L^{\pm})_{\ge 0} + \hat{\Phi}_K \mathrm{M}_K \int_{\mp\infty}^{x}\hat{\Psi}_K^{\mathrm{T}}\cdot ds,$$

де $\hat{\Phi}_K = W^{\pm}\{\hat{\varphi}_K\}(C_K^{\mp})^{-1}, \hat{\Psi}_K = (W^{\pm})^{-1,\tau}\{\hat{\psi}_K\}(C_K^{\mp})^{\blacklozenge\mathrm{T},-1},\quad \mathrm{M}_K = C_K^+\Lambda - \tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}C_K^+ = C_K^-\Lambda - \tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}}C_K^-$, а символом $(L^{\pm})_{\ge 0}$ ми позначили диференціальну частину відповідного оператора $L^{\pm}$.

2. Диференціальні частини операторів L^+ та L^- співпадають: $(L^+)_{\ge 0} = (L^-)_{\ge 0}$.

Доведення. Доведення проводиться аналогічно доведенню відповідної теореми з [9] для випадку скалярних інтегральних операторів.

Зауважимо, що Теорема 1 містить два характерні випадки: 1. $\mathrm{M}_K = 0$, 2. $\mathrm{M}_K \ne 0$. Перший випадок реалізовується, наприклад, при $\Lambda = \tilde{\Lambda} = 0$ і ми отримуємо інваріантне перетворення еволюційоного диференціального виразу. Інтегральні оператори перетворень типу (17) для нестаціонарного оператора Дірака, а також їх зв'язок з операторами перетворень оберненої задачі та оператором розсіяння розглянуто в [10]. В [11], [12] розглянуто подібні зв'язки для гіперболічної системи двох рівнянь та нестаціонарного оператора Дірака в конусних змінних. Особливий інтерес становить також другий випадок. Зокрема, наявність в перетвореному операторі інтегральної частини дає змогу будувати розв'язки рівнянь, що містяться в k-редукованій ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (k-cKP) [16, 20, 28], а також її векторних [29] та матричних узагальнень. Побудова розв'язків для деяких представників з k-cKP та їх багатокомпонентних узагальнень за допомогою інтегральних операторів перетворень розглядалася в 13].

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ. Ми отримали факторизацію матричних інтегральних операторів перетворень Вольтерра та Фредгольма, які тісно пов'язані з основними об'єктами оберненої задачі розсіяння [10–12] та методом одягання Захарова-Шабата [4]. Твердження 1 та 2, а також Теорема 1 для матричних інтегральних операторів перетворень є узагальненнями відповідних тверджень з [9]. Окремим питанням стоїть застосування отриманих результатів (зокрема, Теореми 1) для інтегрування матричних нелінійних рівнянь математичної фізики з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса [14]. Цьому питанню будуть присвячені наші подальші дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Теореми типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева--Петвіашвілі (Hk-cKP) // Матем. Студії. – 2006. – Т.25, №1. – С. 38–64. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц – М.: Наука, 1967. – 576 С. 3. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи – М.:Наука, 1980. – 320 с. 4. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т.8, №3. – с. 43–53. 5. Марченко В.А. Нелинейные уравнения и операторные алгебры – Киев: Наук. думка, 1986. – 156 с. 6. Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. – 1999. – №8. – С.19–23. 7. Самойленко А.М., В.Г. Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр.мат.журн. – 1999. – Т.51, №1. – С.78–97. 8. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегродиференціальних операторів і рівнянь Лакса // Вісн. Київ. націон. ун-ту ім.Т. Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С.32–35. 9. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Факторизація інтегральних операторів та нелінійні інтегровні моделі, I. // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2012. – Вип. 77. – С. 20–48. 10. Сидоренко Ю. Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестаціонарної гіперболічної системи рівнянь // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2010. – Вип. 72. – С. 263–274. 11. Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І. Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2010. – №287: Серія фізико-математичні науки. – С. 28–59. 12. Сидоренко Ю., Чвартацький О. Оператори перетворень для гіперболічної системи двох рівнянь. // Математичний вісник НТШ – 2010. – Том 7 – С. 289–317. 13. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень типу Дарбу// Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2011. – Вип.75 – С.181–225. 14. Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. Матричні узагальнення інтегровних систем з інтегро-диференціальними зображеннями Лакса // Карпатські математичні публікації – 2012. – Том 3, №2 – С. 125–144. 15. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с. 16. Cheng Yi. Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. – 1992. – Vol.33. – P. 3774–3787. 17. Crum M.M. Associated Sturm - Liouville systems // Quart. J. Math. Oxford – 1955. – V.2, №6 – P.121–127. 18. Darboux G. Lecons sur la Theorie Generale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II. – Gauthiers-Villars, Paris, 1889 – 210 p. 19. Dickey L.A. Soliton equations and Hamiltonian systems. Adv. Math. Phys., 1991. – V.12. – 310 p. 20. Konopelchenko B., Sidorenko J., Strampp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – V.157. – P.17–21. 21. Liu X., Lin R., Jin B., Zeng Yu. A generalized dressing approach for solving the extended KP and the extended mKP hierarchy // J. Math. Phys. – 2009. – V.50 – 053506-1 – 053506-14. 22. Matveev V.B. Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev-Petviashvily equation depending on the functional parameters. // Lett. Math. Phys. – V.3. – 1979. – P.213–216. 23. Matveev V.B., Salle M.A. Darboux transformations and solitons – Berlin Heidelberg,Springer-Verlag, 1991. – 120 P. 24. Melnikov V.K. On equations for wave interactions // Lett. Math. Phys. – 1983. – Vol.7, No 2. – P. 129–136. 25. Melnikov V.K. A direct method for deriving a multi-soliton solution for the problem of interaction of waves on the x,y plane. // Commun. Math. Phys. – 1987. – Vol. 112, No. 4 – P. 639–652. 26. Oevel W., Schief W. Darboux Theorems and the KP Hierarchy // Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. (ed. P.A. Clarkson) – 1993. – P. 193–205. 27. Oevel W., Strampp W. Wronskian solutions of the constrained KP hierarchy // J. Math. Phys. – 1996. – Vol. 37 – P.6213–6219. 28. Sidorenko J., Strampp W. Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. – 1991. – V.7. – P. L37–43. 29. Sidorenko J., Strampp W. Multicomponent integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – V. 34, №4. – P.1429–1446. 30. Sydorenko Yu.M. Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Матем. студії. – 2003. – Т.19, №2. – С.181–192.

Надійшла до редколегії 25.10.12

А. Чвартацкий, асп

ФАКТОРИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ.

Получена факторизация матричних интегральных операторов бинарных преобразований Вольтера конечного порядка. Профакторизировано матричный оператор преобразования Фредгольма конечного ранга с помощью матричных фредгольмовских операторов преобразований ранга 1. Приведено использование в теории нелинейных интегрируемых моделей.

O.Chvartatskyi, PhD graduate

FACTORIZATION OF INTEGRAL OPERATORS AND NONLINEAR INTEGRABLE EQUATIONS, II

A factorization of the matrix integral Volterra operator of binary transformations is obtained. Matrix finite rank Fredholm integral transformation operators are decomposed into the first rank Fredholm transformation operators. Applications to the theory of nonlinear integrable systems are demonstrated.

УДК 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: sukretna@gmail.com

НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОБМЕЖЕНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Для задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового процесу отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування виходить на обмеження, та побудовано оптимальний синтез у цьому випадку. Запропоновано закон наближеного усередненого синтезу, що забезпечує близьку до оптимальної поведінку керованої системи.

ВСТУП. Робота є продовженням циклу праць [3, 7, 8], в яких досліджуються задачі оптимального керування з напіввизначеними критеріями якості для процесів, що описуються крайовими задачами для гіперболічних рівнянь зі швидко осцилюючими коефіцієнтами. На відміну від праць [3, 8] у даній статті аналізується задача з обмеженнями на керування. А саме, розглянуто випадок, коли оптимальне керування виходить на обмеження та має єдину точку переключення (випадок, коли керування сходить з обмеження, розглянуто у [7]). За цих умов побудовано оптимальне програмне керування та оптимальне керування у формі зворотного зв'язку. Крім того, оскільки отриманий оптимальний синтез не є зручним з точки зору практичного використання (задається за допомогою нескінченних рядів та нерегулярно залежить від малого параметру), у даній статті запропоновано та обґрунтовано закон наближеного усередненого синтезу, що має необхідні екстремальні властивості.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon \in (0,\ 1)$ керований процес у циліндрі $\overline{Q_T} = \Omega \times [t_0,\ T]$ описується крайовою задачею для хвильового рівняння

$$\begin{cases} y^\varepsilon_{tt}(x,t) = A^\varepsilon\left(y^\varepsilon(x,t)\right) + g^\varepsilon(x)v(t),\ \ (x,t)\in Q_T, \\ y^\varepsilon(x,t) = 0,\ \ x\in\partial\Omega,\ \ t\in[t_0,T], \\ y^\varepsilon(x,t_0) = \varphi^\varepsilon_0(x),\ \ y^\varepsilon_t(x,t_0) = \varphi^\varepsilon_1(x),\ \ x\in\Omega; \end{cases} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon := div\left(a^\varepsilon\vec{\nabla}\right)$, $a^\varepsilon = a^\varepsilon(x)$ – вимірна симетрична матриця розмірності $n\times n$, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості, g^ε, $\varphi^\varepsilon_1 \in L_2(\Omega)$, $\varphi^\varepsilon_0 \in H^1_0(\Omega)$, $t_0 \ge 0$, $T > t_0$ – довільні фіксовані моменти часу.

На керування накладено обмеження

$$v\in U = \left\{v\in L_2(t_0,T):\ |v(t)|\le\xi\ \ \text{м.с. на}\ \ [t_0,T]\right\}. \tag{2}$$

Задача оптимального керування полягає у мінімізації критерію якості

$$J(v) = \beta\left(\int_\Omega q^\varepsilon_1(x)y^\varepsilon_t(x,T)dx - \psi_1\right)^2 + \int_{t_0}^T v^2(t)dt, \tag{3}$$

де $\beta > 0$, $\psi_1 \in R$, $q^\varepsilon_1 \in L_2(\Omega)$.

Відомо, що при довільному керуванні $v\in U$ крайова задача (1) має єдиний розв'язок $y^\varepsilon \in C\left([t_0,T];\ L_2(\Omega)\right)$ [4]. Крім того, задача оптимального керування (1)–(3) має єдиний розв'язок [5].

У подальшому для побудови наближеного синтезу нам знадобиться додаткова інформація про залежність коефіцієнтів задачі (1)–(3) від малого параметру. Тому будемо вважати виконаним таке припущення

Припущення 1. *Нехай мають місце наступні збіжності коефіцієнтів задачі оптимального керування (1)–(3):*

$$\begin{gathered} g^\varepsilon \to g^0,\ \ \varphi^\varepsilon_0 \to \varphi^0_0,\ \ \varphi^\varepsilon_1 \to \varphi^0_1,\ \ q^\varepsilon_1 \to q^0_1\ \ \textit{слабко в}\ \ L_2(\Omega)\ \ \textit{при}\ \ \varepsilon\to 0; \\ a^\varepsilon \to a^0\ \ \textit{при}\ \ \varepsilon\to 0\ \ \textit{в сенсі}\ \ G\textit{-збіжності матриць} \end{gathered} \tag{4}$$

(стосовно G-збіжності матриць див. [1]).

Використовуючи граничні функції в (4), надалі можемо вважати, що задача оптимального керування (1)–(3) визначена також і при $\varepsilon = 0$ (так звана усереднена задача).

ПОБУДОВА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ. Для побудови оптимального синтезу задачі (1)–(3) у явному вигляді скористаємося прийомом із статтей [3, 7, 8] і спочатку перейдемо від задачі оптимального керування для системи з розподіленими параметрами (1)–(3) до нескінченновимірної задачі оптимального керування в термінах коефіцієнтів Фур'є вихідної задачі.

Введемо до розгляду спектральну задачу

$$\begin{cases} A^\varepsilon X + \mu X = 0,\ \ x\in\Omega, \\ X(x) = 0,\ \ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Відомо [9], що спектральна задача (5) має послідовність власних чисел $0 \le \left(\lambda^\varepsilon_1\right)^2 \le \left(\lambda^\varepsilon_2\right)^2 \le \ldots \le \left(\lambda^\varepsilon_k\right)^2 \le \ldots$, для яких $\left(\lambda^\varepsilon_k\right)^2 \to \infty$, $k\to\infty$, при цьому відповідні власні функції $\left\{X^\varepsilon_k(x)\right\}_{k=1}^\infty \subset H^1_0(\Omega)$ утворюють ортономований базис у просторі $L_2(\Omega)$ і ортогональний базис у просторі $H^1_0(\Omega)$. Також будемо вимагати виконання наступного припущення

Припущення 2. *Спектр усередненого оператора $A^0 = div\left(a^0\vec{\nabla}\right)$ простий, тобто $0 \le \left(\lambda^0_1\right)^2 < \left(\lambda^0_2\right)^2 < \ldots < \left(\lambda^0_k\right)^2 < \ldots$*

Розкладемо всі функції задачі (1) – (3) у ряди Фур'є за власним базисом $\left\{X^\varepsilon_k(x)\right\}_{k=1}^\infty$:

$$\begin{gathered} y^\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^\infty y^\varepsilon_k(t)X^\varepsilon_k(x),\quad y^\varepsilon_k(t) = \left(y^\varepsilon(\,\cdot\,,t),X^\varepsilon_k\right); \\ g^\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^\infty g^\varepsilon_k X^\varepsilon_k(x),\quad g^\varepsilon_k = \left(g^\varepsilon(\,\cdot\,),X^\varepsilon_k\right); \\ \varphi^\varepsilon_0(x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi^\varepsilon_{0k}X^\varepsilon_k(x),\quad \varphi^\varepsilon_{0k} = \left(\varphi^\varepsilon_0(\,\cdot\,),X^\varepsilon_k\right);\quad \varphi^\varepsilon_1(x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi^\varepsilon_{1k}X^\varepsilon_k(x),\quad \varphi^\varepsilon_{1k} = \left(\varphi^\varepsilon_1(\,\cdot\,),X^\varepsilon_k\right); \\ q^\varepsilon_1(x) = \sum_{k=1}^\infty q^\varepsilon_{1k}X^\varepsilon_k(x),\quad q^\varepsilon_{1k} = \left(q^\varepsilon_1(\,\cdot\,),X^\varepsilon_k\right); \end{gathered} \tag{6}$$

де тут і далі $(\ \cdot\,,\cdot\ )$ – скалярний добуток у просторі $L_2(\Omega)$. Тоді у термінах коефіцієнтів Фур'є (6) задача оптимального керування (1) – (3) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} \ddot{y}^\varepsilon_k(t) + \left(\lambda^\varepsilon_k\right)^2 y^\varepsilon_k(t) = g^\varepsilon_k v(t), \\ y^\varepsilon_k(t_0) = \varphi^\varepsilon_{0k},\ \ \dot{y}^\varepsilon_k(t_0) = \varphi^\varepsilon_{1k}; \end{cases} \tag{7}$$

$$v\in U, \tag{8}$$

$$J(v) = \beta\left(\sum_{k=1}^\infty q^\varepsilon_{1k}\dot{y}^\varepsilon_k(T) - \psi_1\right)^2 + \int_{t_0}^T v^2(t)dt \to \inf. \tag{9}$$

Задача (7) – це задача Коші для лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, а тому для всіх $k \ge 1$ і $v \in U$ має єдиний розв'язок. Крім того, неважко переконатися у справедливості наступних оцінок

$$\left(y_k^\varepsilon(t)\right)^2 \le 3\left[\left(\varphi_{0k}^\varepsilon\right)^2 + \frac{1}{\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2}\left(\varphi_{1k}^\varepsilon\right)^2 + \frac{T-t_0}{\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2}\left(g_k^\varepsilon\right)^2\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right],$$
$$\left(\dot y_k^\varepsilon(t)\right)^2 \le 3\left[\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2\left(\varphi_{0k}^\varepsilon\right)^2 + \left(\varphi_{1k}^\varepsilon\right)^2 + \left(T-t_0\right)\left(g_k^\varepsilon\right)^2\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right]. \qquad (10)$$

Оцінки (10) та рівність Парсеваля дають змогу записати оцінки для розв'язків крайової задачі (1):

$$\left\|y^\varepsilon(t)\right\|^2 \le 3\left[\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|^2 + \frac{1}{\left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2}\left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|^2 + \frac{T-t_0}{\left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2}\left\|g^\varepsilon\right\|^2\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right], \qquad \left\|y^\varepsilon(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 3\left[\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|^2 + \left(T-t_0\right)\left\|g^\varepsilon\right\|^2\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right],$$
$$\left\|y_t^\varepsilon(t)\right\|^2 \le 3\left[\left\|\varphi_0^\varepsilon\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \left\|\varphi_1^\varepsilon\right\|^2 + \left(T-t_0\right)\left\|g^\varepsilon\right\|^2\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right]. \qquad (11)$$

Відмітимо, що оцінки (11) можна отримати для розв'язків крайової задачі (1) безпосередньо (не переходячи до відповідних коефіцієнтів Фур'є).

Для розв'язання задачі оптимального керування для нескінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь (7)–(9) скористаємося еквівалентною задачею оптимального керування, в якій керований процес описується звичайним диференціальним рівнянням.

Введемо позначення

$$a^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k}^\varepsilon\left[-\lambda_k^\varepsilon\sin\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)y_k^\varepsilon(t) + \cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)\dot y_k^\varepsilon(t)\right] = \left(R_0(\cdot,t),\ y^\varepsilon(\cdot,t)\right) + \left(R_1(\cdot,t),\ \dot y^\varepsilon(\cdot,t)\right),$$
$$\alpha^\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k}^\varepsilon\left[-\lambda_k^\varepsilon\sin\left(\lambda_k(T-t_0)\right)\varphi_{0k}^\varepsilon + \cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t_0)\right)\varphi_{1k}^\varepsilon\right] = \left(R_0(\cdot,t),\ \varphi_0^\varepsilon(\cdot)\right) + \left(R_1(\cdot,t),\ \varphi_1^\varepsilon(\cdot)\right), \qquad (12)$$
$$b^\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^\varepsilon q_{1k}^\varepsilon\cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right), \qquad R_0^\varepsilon(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^\varepsilon\sin\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)q_{1k}^\varepsilon X_k^\varepsilon(x), \qquad R_1^\varepsilon(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_{1k}^\varepsilon\cos\left(\lambda_k^\varepsilon(T-t)\right)X_k^\varepsilon(x).$$

Тоді задача (7) – (9) еквівалентна наступній задачі оптимального керування для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases}\dot a^\varepsilon(t) = b^\varepsilon(t)v(t), \quad a^\varepsilon(t_0) = \alpha^\varepsilon;\\ v \in U,\\ I(v) = \beta\left(a^\varepsilon(T) - \psi_1\right)^2 + \int_{t_0}^{T} v^2(s)ds.\end{cases} \qquad (13)$$

Зауважимо, що внаслідок оцінок (10) та умов на коефіцієнти задачі оптимального керування (1)–(3), функції та стала в (12) означені коректно. Крім того, функція $a^\varepsilon(t)$ допускає почленне інтегрування і диференціювання та $R_0^\varepsilon \in C\left(\left[t_0,T\right];\ H^{-1}(\Omega)\right)$, $R_0^\varepsilon \in C\left(\left[t_0,T\right];\ L_2(\Omega)\right)$.

Отримана задача оптимального керування (13) детально досліджена у [2]. Використавши результати цієї праці отримуємо, що при виконанні припущень

Припущення 3. *При кожному* $\varepsilon \in [0,\ 1)$ *функція* $b^\varepsilon(t)$ *є додатною та строго монотонно зростає на* $\left[t_0, T\right]$.

Припущення 4. *При кожному* $\varepsilon \in [0,\ 1)$ *виконуються нерівності*

$$\frac{\left|\alpha^\varepsilon\right| b^\varepsilon(0)}{\gamma + \int_{t_0}^{T}\left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds} < \xi, \qquad \frac{\left|\alpha^\varepsilon\right| b^\varepsilon(T)}{\gamma + \int_{t_0}^{T}\left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds} > \xi, \qquad \alpha^\varepsilon + \xi\int_{t_0}^{T} b^\varepsilon(s)ds < 0. \qquad (14)$$

оптимальний синтез задачі (13) має вигляд

$$u^\varepsilon\left[t,\ a^\varepsilon(t)\right] = \begin{cases} -\dfrac{\beta b^\varepsilon(t)\left[a^\varepsilon(t) + \xi\int_{\tau^\varepsilon}^{T} b^\varepsilon(s)ds\right]}{1 + \beta\int_{t}^{\tau^\varepsilon}\left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds}, & t \in \left[t_0,\ \tau^\varepsilon\right],\\ \xi, & t \in \left[\tau^\varepsilon,\ T\right];\end{cases} \qquad (15)$$

де $a^\varepsilon(t)$ – розв'язок задачі Коші в (13) з керуванням (15), а точка переключення τ^ε визначається з рівняння

$$\frac{\beta b^\varepsilon(\tau^\varepsilon)\left[a^\varepsilon(t) + \xi\int_{\tau^\varepsilon}^{T} b^\varepsilon(s)ds\right]}{1 + \beta\int_{t}^{\tau^\varepsilon}\left(b^\varepsilon(s)\right)^2 ds} = -\xi, \qquad (16)$$

причому розв'язок рівняння (16) існує, єдиний та є сталим вздовж оптимальної траєкторії, тому це рівняння можна замінити відповідним програмним (при $t = t_0$).

Використовуючи формули (15), (16) та позначення (12), отримуємо оптимальне керування зі зворотнім зв'язком для вихідної задачі (1)–(3)

$$u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}(\cdot,\ t)\right]=\begin{cases}-\dfrac{\beta b^{\varepsilon}(t)\left[\left(R_0(\cdot,t),\ y^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\left(R_1(\cdot,t),\ \dot{y}^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\xi\int_{\tau^{\varepsilon}}^{T}b^{\varepsilon}(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau^{\varepsilon}}\left(b^{\varepsilon}(s)\right)^2 ds}, & t\in\left[t_0,\ \tau^{\varepsilon}\right],\\ \xi, & t\in\left[\tau^{\varepsilon},\ T\right];\end{cases}\tag{17}$$

де $y^{\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (17), а точка переключення τ^{ε} визначається з рівняння

$$\frac{\beta b^{\varepsilon}(t)\left[\left(R_0(\cdot,t),\ y^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\left(R_1(\cdot,t),\ \dot{y}^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\xi\int_{\tau^{\varepsilon}}^{T}b^{\varepsilon}(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau^{\varepsilon}}\left(b^{\varepsilon}(s)\right)^2 ds}=-\xi.\tag{18}$$

НАБЛИЖЕНИЙ УСЕРЕДНЕНИЙ СИНТЕЗ. З формул (17), (18) для оптимального керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) видно, що коефіцієнти цього синтезу виражаються в термінах нескінченних рядів, що не є зручним з точки зору практичних застосувань у реальному часі. Крім того, наявність параметру ε, який може входити у оператор A^{ε} крайової задачі (1) нерегулярно, також може суттєво ускладнювати обчислення. Тому природно виникає задача побудови наближеного керування зі зворотнім зв'язком, яке б реалізувало близьку до оптимальної (в сенсі критерію якості (3)) поведінку керованої системи (1).

Визначимо функції

$$b_N^0(t)=\sum_{k=1}^{N}g_k^0 q_{1k}^0\cos\left(\lambda_k^0(T-t)\right),\qquad R_{0N}^0(x,t)=-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^0\sin\left(\lambda_k^0(T-t)\right)q_{1k}^0X_k^0(x),\qquad R_{1N}^0(x,t)=\sum_{k=1}^{N}q_{1k}^0\cos\left(\lambda_k^0(T-t)\right)X_k^0(x),$$

$$\left(\varphi_0^0\right)_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_{0k}^0X_k^0(x),\qquad \left(\varphi_1^0\right)_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_{1k}^0X_k^0(x).$$

та побудуємо наближений усереднений синтез задачі оптимального керування (1) – (3) за формулою

$$v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}(\cdot,\ t)\right]=\begin{cases}-\dfrac{\beta b_N^0(t)\left[\left(R_{0N}^0(\cdot,t),\ z_N^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\left(R_{1N}^0(\cdot,t),\ \dot{z}_N^{\varepsilon}(\cdot,t)\right)+\xi\int_{\tau_N^0}^{T}b_N^0(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau_N^0}\left(b_N^0(s)\right)^2 ds}, & t\in\left[t_0,\ \tau_N^0\right],\\ \xi, & t\in\left[\tau_N^0,\ T\right];\end{cases}\tag{19}$$

де $z_N^{\varepsilon}(x,t)$ – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням (19), а точка переключення τ_N^0 визначається з рівняння

$$\frac{\beta b_N^0(t)\left[\left(R_{0N}^0(\cdot,t),\ \left(\varphi_0^0\right)_N(\cdot)\right)+\left(R_{1N}^0(\cdot,t),\ \left(\varphi_1^0\right)_N(\cdot)\right)+\xi\int_{\tau_N^0}^{T}b_N^0(s)ds\right]}{1+\beta\int_t^{\tau_N^0}\left(b_N^0(s)\right)^2 ds}=-\xi.\tag{20}$$

Коректність запропонованого наближеного усередненого синтезу обґрунтовує теорема.

Теорема. *Нехай* $q_1^{\varepsilon}\in L_2(\Omega)$, $g^{\varepsilon},\varphi_1^{\varepsilon}\in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0^{\varepsilon}\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, *справедливі оцінки* $\left\|g^{\varepsilon}\right\|\le\sigma$, $\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|_{H_0^1(\Omega)}\le\phi_1$, $\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}\le\phi_0$ *при* $\varepsilon\in[0,1)$ *та виконуються припущення 1 - 4. Тоді оптимальне керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) має вигляд (17), (18) та справджуються наступні оцінки близькості між оптимальним синтезом* $u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]$ *і побудованим за формулами (19), (20) наближеним усередненим синтезом* $v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]$: *для довільного малого* $\eta>0$ *знайдуться такі* $N_0\ge 1$ *та* $\varepsilon_0>0$, *що для довільних* $N\ge N_0$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ *виконуються нерівності*

$$\begin{gathered}\left|v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]-u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]\right|<\eta\ \ \text{для всіх}\ \ t\in[t_0,T],\\ \left\|z_N^{\varepsilon}(\cdot,t)-y^{\varepsilon}(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)}<\eta\ \ \text{для всіх}\ \ t\in[t_0,T],\\ \left|J\left(v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]\right)-J\left(u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]\right)\right|<\eta.\end{gathered}\tag{21}$$

Для доведення теореми аналогічно до [6] можемо показати близькість точок переключення τ^{ε} і τ_N^0 та перейти до встановлення оцінок (21) на меншому часовому інтервалі, на якому керування $u^{\varepsilon}\left[t,\ y^{\varepsilon}\right]$, $v_N^0\left[t,\ z_N^{\varepsilon}\right]$ задаються першими рядками формул (17), (19). Далі доведення проводиться аналогічно [3].

ВИСНОВКИ. Розглянуто задачу оптимального керування з напівввизначеним критерієм якості для хвильового рівняння. Використовуючи метод Фур'є з подальшою заміною вихідної задачі оптимального керування розподіленою системою еквівалентною задачею оптимального керування для звичайного диференціального рівняння, отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування виходить на обмеження, та побудовано оптимальне керування у формі зворотного зв'язку (синтезу) у цьому випадку. На базі побудованого оптимального синтезу сконструйований наближений усереднений синтез, який з практичної точки зору має ряд переваг, та обґрунтована коректність цього синтезу, тобто показано, що наближений синтез реалізує близьке до оптимального значення цільового функціоналу та траєкторії системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов [Текст] / В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. – М.: Физ.-мат. лит., 1993. – 464 с. 2. Капустян О. А. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічної крайової задачі [Текст] / О. А. Капустян // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, № 12. – С. 1704–1709. 3. Капустян О. В., Сукретна А. В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння [Текст] / О.В. Капустян, А. В. Сукретна // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 612–620. 4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с. 5. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Жак – Луи Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с. 6. Сукретна А. В., Капустян О. А. Наближений усереднений синтез задачі оптимального керування для параболічного рівняння [Текст] / А. В. Сукретна, О. А. Капустян // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56, № 10. – С. 1384–1394. 7. Сукретна А. В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння [Текст] / А. В. Сукретна // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094–1104. 8. Сукретна А. В. Синтез оптимального керування для хвильового рівняння з дисипацією [Текст] / А. В. Сукретна // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2012. – 28. – С. 48–52. 9. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [Text] / Roger Temam. – New York, 1997. – XXI + 650 p.

Надійшла до редколегії 31.10.11

А. Сукретная, канд. физ.-мат. наук

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для задачи оптимального управления с полуопределенным критерием качества для волнового процесса получены условия, при выполнении которых оптимальное управление выходит на ограничения, а также построен оптимальный синтез в этом случае. Предложен закон приближенного усредненного синтеза, обеспечивающего близкое к оптимальному поведение управляемой системы.

A. Sukretna, PhD

APPROXIMATE SYNTHESIS OF BOUNDED CONTROL FOR WAVE EQUATION

A. Sukretna . For optimal control problem with semidefinite quality criterion for wave process we receive the conditions under which control is beyond the restrictions, and we construct optimal synthesis in this case. We propose approximated homogeneous synthesis law, which provides control system behavior that is closed to optimal one.

УДК 514.7:621.7

В. Волков, мол. наук. співроб.
Інститут електрозварювання імені Євгена Патона НАН України, Київ..
Email: valentinvolkov@ukr.net

ПРО ІЗОМЕТРІЇ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Досліджуються питання ізометрії та накладання поверхонь обертання. Основним результатом статті є необхідна та достатня умова ізометричності поверхні обертання зрізаного конусу.

ВСТУП. У багатьох випадках технічні вимоги змушують надавати оболонкам складної геометричної форми, яка впливає, поряд з властивостями конструкційних матеріалів, на міцність, стійкість та інші механічні властивості конструкції. Особливо важливі ситуації, коли тонкі оболонки піддають цілеспрямованій формозміні з метою надання їм більш компактної форми. Такі формозміни можуть бути майже оборотними, оскільки реалізуються деформуванням поверхні в плоску область за допомогою згинання, і майже зберігати довжини всіх ліній – "розгортанням" на площину. Важливість застосування в техніці розгортних поверхонь з нульовою гауссовою кривиною обумовлена і технологічними міркуваннями, а саме, зручністю їх виготовлення шляхом відповідного згинання листового матеріалу.

Введемо в тривимірному евклідовому просторі $\Re^3$ декартову систему координат (x, y, z) і визначимо скалярний добуток $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$. Нехай вектор-функція $\bar{r} = \{x = x(u, \nu), y = y(u, \nu), z = z(u, \nu)\}$ задає регулярну поверхню M^2 [1]. У фіксованій точці (u_0, ν_0) за допомогою векторів $\frac{\partial \bar{r}(u_0, \nu_0)}{\partial u}$ та $\frac{\partial \bar{r}(u_0, \nu_0)}{\partial \nu}$ визначається дотичний простір T^2. Сукупність всіх дотичних просторів у точках поверхні $\bar{r} = \bar{r}(u, \nu)$ визначає дотичне розшарування. Надалі змінні на дотичному просторі $T(u, \nu)$ у точці (u, ν) позначатимемо через $du, d\nu$. На дотичному розшаруванні $T\left(M^2\right)$ визначено першу і другу квадратичні форми.

Дві поверхні називаються ізометричними, якщо існує взаємно однозначне гладке відображення поверхонь $f: M^2 \to N^2$, при якому зберігаються довжини відповідних кривих. Відомо, що у випадку, коли регулярні поверхні можна параметризувати так, що їхні перші квадратичні форми є однаковими, то ці поверхні є ізометричними.

У кожній точці регулярної поверхні за допомогою коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм визначається гауссова кривина $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, яка, як відомо, не змінюється при ізометрії.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Основний результат статті становить наступна теорема.

Теорема. Нехай S – зрізаний конус з радіусами R_1, R_2 і кутом конусності α, а M – поверхня, яку отримано обертанням гладкої кривої $z = f(r)$ навколо осі z: $M = \{x = r\cos\nu, y = r\sin\nu, 0 \le \nu \le 2\pi\}$. Тоді поверхня M ізометрична поверхні S тоді і тільки тоді, коли $z = a(R_2 - r)$, де $R_1 \le r \le R_2$, тобто є зрізаним конусом.

При доведенні даної теореми використовується наступна лема.

Лема. Нехай на відрізку $[a, b]$ задано двічі диференційовну функцію $y = f(x)$. Якщо для всіх $x \in [a, b]$ виконується рівність $f'(x) f''(x) = 0$, то $f(x) = const$, або $f(x) = Ax + B$.

Доведення. Позначимо через Σ множину тих точок відрізку, де $f'(x)=0$. Відомо, що Σ – замкнена множина [3]. Якщо $\Sigma=[a,b]$, то $f(x)=const$ на $[a,b]$. Якщо ж , то у цьому випадку $f''(x)=0$ на усьому відрізку [a,b], отже, $f'(x)=const$ на $[a,b]$. Звідки випливає, що $f(x)=Ax+B$.

Припустимо, що множина $\Sigma\neq\varnothing$ і не співпадає з усім відрізком $[a,b]$. Позначимо через $W=[a,b]\setminus\Sigma$. Множина W є відкритою і, взагалі кажучи, незв'язною множиною. Очевидно, що на фіксованій компоненті зв'язності $Q\subset W$ похідна $f'(x)$ відмінна від нуля, а, отже, на цій компоненті зв'язності функція $y=f(x)$ строго зростає або спадає. Оскільки за умовою теореми $f''(x)=0$, то на цій компоненті зв'язності функція має вигляд $f(x)=Ax+B$. Таким чином, на кожній компоненті зв'язності Q множини W функція $y=f(x)$ або строго зростає, або ж строго спадає. Далі, графік функції $y=f'(x)$ на відрізку $[a,b]$ згідно умови леми є неперервною кривою. Однак, як випливає з викладених вище міркувань, на множині Σ дана функція набуває значення 0, а на кожній фіксованій компоненті зв'язності множини $W=[a,b]\setminus\Sigma$ ця функція має стале значення, яке відмінне від нуля. Таким чином, графік похідної $y=f'(x)$ є розривною кривою, що неможливо згідно припущення. Звідси випливає, що випадок, коли множини Σ та $W=[a,b]\setminus\Sigma$ одночасно не є порожніми, неможливий. Лему доведено.

Доведення теореми. <u>Необхідність</u>. Нехай поверхні S і M ізометричні. Оскільки зрізаний конус локально ізометричний площині, то його гаусова кривина дорівнює нулю. Отже, гауссова кривина поверхні M також дорівнює нулю. Оскільки M є поверхнею обертання, то її гауссова кривина обчислюється за формулою

$$K=\frac{f'(r)f''(r)}{r\left[1+f'^2(r)\right]^2}\quad. \tag{1}$$

На підставі доведеної вище леми маємо, що або $f(r)=const$, або ж $f(r)=Ar+B$. У першому випадку поверхня M є циліндром з колом в основі. Враховуючи крайові умови (при ізометрії межі однієї поверхні переходять в межі іншої поверхні), випадок циліндричної поверхні можна виключити з розгляду. Отже, $z=f(r)=Ar+B$. Знову, враховуючи крайові умови, знаходимо, що $z=f(r)=\alpha(R_2-r)$.

<u>Достатність</u>. Нехай Z – зрізаний конус із зазначеними вище граничними умовами. Очевидно, що конус Z ізометричний поверхні S. При такій ізометрії твірні першого конуса перейдуть у твірні другого конуса, що справедливо також і для паралелей. Теорему доведено.

Зауважимо, що поверхня може бути ізометрична конусу S, не будучи при цьому поверхнею обертання.

Згинанням поверхні називається така її неперервна деформація, при якій довжини кривих на поверхні не змінюються. Іншими словами, перша квадратична форма поверхні не змінюється при згинанні.

Поверхня M^2 називається незгинною, якщо всі її перетворення зводяться до руху у R^3. Прикладом такої поверхні може бути сферична поверхня, яка не допускає згинань. Поверхні M_1 і M_2 називаються накладними, якщо їх можна з'єднати за допомогою згинань S_t, $0\le t\le 1$. Проблема згинань поверхонь полягає в пошуку відповіді на питання, за яких умов задана поверхня допускає згинання або є незгинною.

Нехай S – поверхня, що утворена обертанням гладкої кривої $z=f(r)$ навколо осі z (рис.1). Скористаємося полярними координатами u, v для параметричного задання поверхні. Нехай рівняння поверхні має вигляд $x=r\cos\nu$, $y=r\sin\nu$, $z=f(r)$. Тоді її першу квадратичну форму можна записати як $ds^2=\left(1+f'^2(r)\right)dr^2+r^2d\nu^2$.

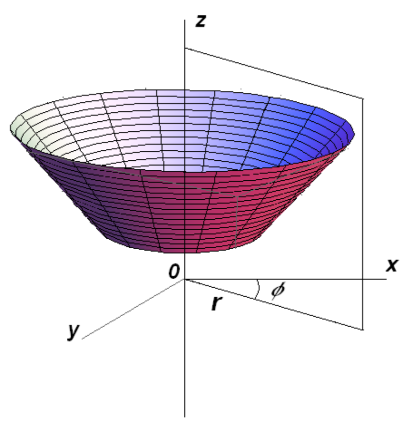


Рис. 1. Поверхня S, що утворена обертанням гладкої кривої $z=f(r)$ навколо осі z

Координатні лінії $\nu=const$ (меридіани) та $r=const$ (паралелі) утворюють ортогональну сітку. Нехай між поверхнями обертання S та M існує така ізометрія, що відповідні меридіани та паралелі переходять одна в одну.

Позначимо через (r,ν) полярні координати на поверхні S, а через (r_1,ν_1) – полярні координати на поверхні M. Очевидно, що $r_1 = const$ та $v_1 = const$. Тоді $r_1=\varphi(r)$, $\nu_1=\psi(\nu)$ та

$$\left(1+f'^2(r)\right)dr^2+r^2d\nu^2=\left(1+f_1'^2(r_1)\right)dr_1^2+r_1^2d\nu_1^2. \tag{2}$$

Співвідношення (2) можна записати таким чином:

$$1+f'^2(r)=\left(1+f_1'^2(r_1)\right)\varphi'^2(r),\quad r=r_1\varphi'(\nu). \tag{3}$$

З другого рівняння (3) випливає рівність $\frac{r}{r_1}=\psi'(\nu)=\frac{1}{k}=const$. Будемо вважати, що $\psi'(\nu)=\frac{1}{k}$, $v_1=\psi(\nu)=\frac{\nu}{k}$, $r_1=\varphi(r)=kr$. Тоді, підставивши ці значення у першу рівність (3) і використовуючи потім рівності $f_1'(r_1)=\frac{df_1}{dr_1}=\frac{1}{k}\frac{df_1}{dr}$, отримуємо $1+f'^2(r)=\left[1+\frac{1}{k^2}\left(\frac{df_1}{dr}\right)^2\right]k^2$, звідки остаточно знаходимо

$$\frac{df_1}{dr}=\sqrt{1-k^2+f'^2(r)}.$$

Таким чином, поверхня M, що накладається на поверхню S, визначається рівняннями

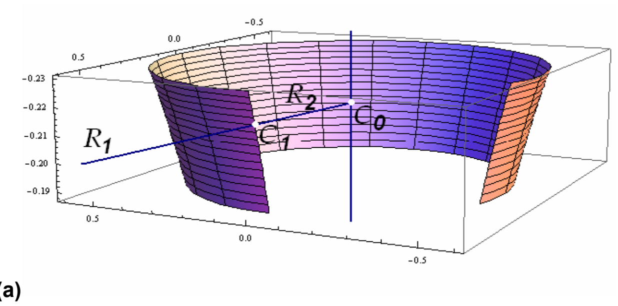
$$x=kr\cos\frac{\nu}{k},\quad y=kr\sin\frac{\nu}{k},\quad z=\int\sqrt{1+f'^2(r)-k^2}dr. \tag{4}$$

Поверхня S може намотуватися на поверхню M, покриваючи її декілька разів (при $k<1$), або розгортуватися, покриваючи тільки частину поверхні M (при $k>1$) [2]; для випадку зрізаного конуса значення $k=1$. З цих міркувань, а також з теореми випливає наступне твердження.

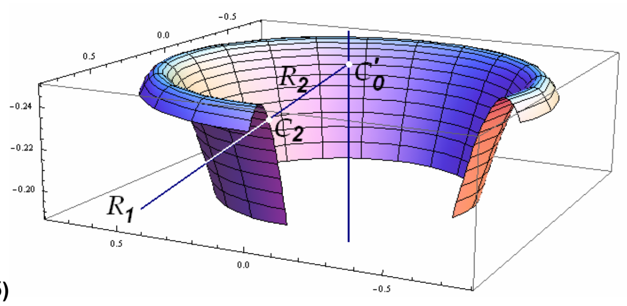
Твердження. Для зрізаного конуса (з колом радіуса r у основі і висотою h) в класі поверхонь обертання накладною поверхнею може бути лише зрізаний конус з тими ж значеннями радіуса і висоти.

Слід зазначити, що на практиці використовуються деформації поверхонь, які близькі до згинань. На рис.2, а,б зображено результат деформації частини зрізаного прямого кругового конуса. Головні кривини поверхонь $k_1=\frac{1}{R_1}$, $k_2=\frac{1}{R_2}$, де R_1, R_2 – відповідно радіуси кривини меридіана і відрізок нормалі до осі обертання; $K=k_1k_2$ – повна (гауссова) кривина. Рис. 1 ілюструє той факт, що гауссові кривини K_1, K_2 в будь-яких відповідних точках поверхонь не можуть бути рівними.

Згинання поверхонь обертання можуть мати більш складний характер; їх властивості тісно пов'язані із властивостями відображень, які використовуються при утворенні таких поверхонь. Розглянемо функцію $f(x)=x^3$, $x\in\Re$. В околі будь-якої точки $x=x_0$, $x_0\neq 0$, функція $f(x)$ задає дифеоморфне відображення, в той час, як в околі точки $x=x_0=0$ ця властивість не має місця: функція $f(x)=x^3$ має особливість – її диференціал в цій точці вироджується. Ця особливість є нестійкою і при малій деформації може зникнути або розпастися на дві стійкі.



(а)



(б)

Рис. 2.: а,б. Деформація зрізаного прямого кругового конуса

Нехай поверхня $\mathrm{Z}:\Re^2\to\Re^3$ в тривимірному просторі отримана обертанням графіка функції $f(x)=(x-a)^3$, де $a\in\Re$. Використовуючи параметр $t\in[0;1+\varepsilon]$, $\varepsilon\geq 0$, запишемо деформацію функції $f(x)=(x-a)^3$ у вигляді:

$$y=t(x-a)^3+k(x-a)(1-t)\cdot \tag{5}$$

Позначимо Z_t поверхню, що отримана обертанням графіка функції $y=t(x-a)^3+k(x-a)(1-t)$ навколо осі oY. При $t=0$ відповідна поверхня обертання Z_t є прямим круговим конусом. При $t=1$ поверхня Z_t є поверхнею, що отримана обертанням навколо осі oY кубічної параболи $y=(x-a)^3$ (рис.3,а). Відповідно, при $t=1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ поверхня обертання Z_t (рис.3,б) задається як: графік функції

$$\mathrm{Z}_t=(1+\varepsilon)\left(\sqrt{x^2-y^2}-a\right)^3+k\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)(-\varepsilon). \tag{6}$$

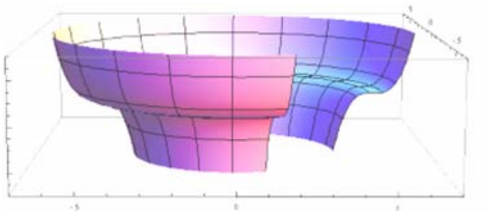


Рис.3,а Поверхня Z_t **при** $t = 1$

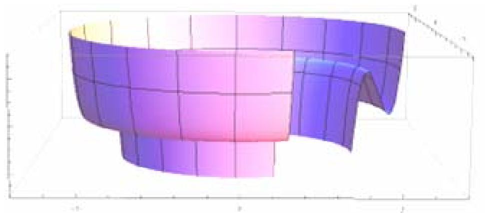


Рис.3,б Поверхня Z_t **при** $t = 1+\varepsilon, \varepsilon > 0$

Як бачимо, складність геометрії поверхні Z_t пов'язана з нестійкістю визначальної функції у точці $x = a$.

У наведеному вище прикладі поверхня обертання має згинання, кількість яких може бути досить великою. Їх наявність в реальних задачах деформування призводить до певних труднощів при математичному описі, що зумовлені виникненням інтегралів, які не обчислюються у квадратурах. На практиці такі згинання можливо наближено описувати тригонометричними функціями, зокрема, функцією вигляду $y = \sin(kx)$, яка є аналітичною і може бути апроксимована поліномами, які зручно знаходити з її розкладу за формулою Тейлора в степеневий ряд засобами чисельного моделювання.

Нами розглянуто модельний приклад, в якому для опису згинань поверхні Z_t використовується функція $y = \sin(1/2\,x)$. При чисельному моделюванні за допомогою системи Wolfram Mathematica ® проведено аналіз характеру збіжності відповідного ряду Тейлора при різних порядках апроксимації поліноміальної функції.

При розкладанні в степеневий ряд функції $y = \sin(1/2\,x)$ встановлено наступну закономірність: збіжність полінома на кожному наступному відрізку кривої синусоїдальної функції, рівному її повного періоду, відповідає збільшенню порядку апроксимації на величину $\Delta n = 16$, яка є сталою на всьому досліджуваному інтервалі.

ВИСНОВКИ. Знайдено необхідні та достатні умови ізометричності поверхні обертання зрізаному конусу. Також показано, що для зрізаного конуса в класі поверхонь обертання накладною поверхнею може бути лише зрізаний конус. Описано приклад чисельного моделювання для поверхонь обертання та встановлено закономірність збіжності апроксимуючого полінома тригонометричної функції при збільшенні порядку апроксимації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Розендорн Э.Р. Теория поверхностей. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 304 с. 2. Финников С.П. Теория поверхностей. – ГТТИ, 1934 – 209 с. 3. S. Sternberg. Lectures on Differential Geometry, Prentice-Hall Mathematics Series, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

Надійшла до редколегії 30.04.13

В. Волков, мл. наук. сотр.

ОБ ИЗОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ

Исследуется вопросы изометрии и наложения поверхностей вращения. Основным результатом статьи есть необходимое и достаточное условие изометричности поверхности вращения усеченного конуса

V. Volkov, researcher

ON ISOMETRIES OF SURFACES OF REVOLUTION

The paper deals with isometry and superposition of surfaces of revolution. The main result is necessary and sufficient condition of the isometricity of the surface of revolution to the blunded cone.

УДК 512.552

В. Журавльов, доц., Т. Журавльова, асп.,
О. Зеленський, канд.фіз.-мат. наук
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: vshur@univ.kiev.ua

ЖОРСТКІ САГАЙДАКИ, АСОЦІЙОВАНІ З ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИМИ МНОЖИНАМИ

Наводиться критерій жорсткості сагайдака, асоційованого зі скінченною частково впорядкованою множиною.

ВСТУП. Один із важливих класів, що виникає в різних питаннях теорії кілець та теорії цілочисельних зображень, це клас черепичних порядків. З точки зору абстрактної теорії кілець черепичний порядок є первинним нетеровим напівдосконалим та напівдистрибутивним кільцем з ненульовим радикалом Джекобсона. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Сагайдак матриці показників співпадає з сагайдаком черепичного порядку з даною матрицею показників. Необхідні відомості про черепичні порядки містяться в [6], [7]. У [2] доведено, що кожен сагайдак, який є сагайдаком матриці показників і має хоча б одну петлю, має нескінченну кількість нееквівалентних матриць показників з таким сагайдаком. Жорсткий сагайдак має єдину з точністю до еквівалентності матрицю показників. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [4].

МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА ЇХ САГАЙДАКИ. Позначимо через $M_n(\mathbb{Z})$ кільце всіх квадратних $n \times n$ – матриць над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$. Нехай $\varepsilon \in M_n(\mathbb{Z})$.

Означення 1. Матриця $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ називається матрицею показників, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для $i, j, k = 1, ..., n$ та $\alpha_{ii} = 0$ для $i = 1, ..., n$. Ці співвідношення називаються кільцевими нерівностями. Матриця показників ε називається зведеною, якщо $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} > 0$ для $i \neq j, i, j = 1, ..., n$.

Нехай $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Покладемо $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij})$, де $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$ для $i \neq j$ та $\beta_{ii} = 1$ для $i = 1, ..., n$ і $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (\beta_{ik} + \beta_{kj})$. З визначення γ_{ij} маємо $0 \leq \gamma_{ij} - \beta_{ij} \leq 1$.

Означення 2. Сагайдак $Q(\varepsilon)$ з матрицею суміжності $[Q(\varepsilon)] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)}$ називається сагайдаком зведеної матриці показників ε.

Нехай $[Q] = (q_{ij})$. Тоді маємо $q_{ij} = \min\left(1, \min_{k \neq i,j} (\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij})\right)$; $q_{ii} = \min\left(1, \min_{k \neq i} (\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - 1)\right)$.

Означення 3. Дві матриці показників $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ називаються еквівалентними, якщо одна може бути отримана з іншої перетвореннями наступних двох типів:
(1) віднімання цілого числа від елементів i -ого рядка з одночасним додаванням до елементів i -ого стовпчика цього числа,
(2) одночасна перестановка двох рядків та стовпчиків з тими ж номерами.

Твердження 1. Нехай $\varepsilon = (\alpha_{ij})$ та $\Theta = (\theta_{ij})$ є матрицями показників і Θ отримується із ε перетвореннями типу (1). Тоді $[Q(\varepsilon)] = [Q(\Theta)]$.

Нехай τ – підстановка, яка задає одночасну перестановку рядків та стовпчиків матриці показників ε при перетвореннях другого типу, тобто i -ий рядок та стовпчик матриці ε став $\tau(i)$ -им, $P_\tau = \sum_{i=1}^{n} e_{i\tau(i)}$ – переставна матриця.

Твердження 2. При перетвореннях другого типу матриця суміжності $[\tilde{Q}]$ сагайдака $Q(\Theta)$ змінюється за формулою: $[\tilde{Q}] = P_\tau^T [Q] P_\tau$, де $[Q] = [Q(\varepsilon)]$.

Теорема 1. Сагайдак матриці показників є простим і сильно зв'язним.

Означення 4. Сильно зв'язний простий сагайдак називається допустимим, якщо він є сагайдаком зведеної матриці показників.

Теорема 2. Довільний сильно зв'язний простий сагайдак Q з петлею в кожній вершині є допустимим.

Зауваження 1. Легко бачити, що сагайдак Q з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ не є допустимим.

ЗВЕДЕНІ (0,1)–МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА СКІНЧЕННІ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ.

Означення 5. Під “a накриває b” у частково впорядкованій множині P розуміють, що не існує $x \in P$ такого, що $a > x > b$.

Означення 6. Нехай $P = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ – скінченна частково впорядкована множина з відношенням порядку $\leq$. Діаграмою частково впорядкованої множини P є сагайдак $Q(P)$ з множиною вершин $VQ(P) = \{1, ..., n\}$ і множиною стрілок $AQ(P)$ такою, що в $AQ(P)$ існує стрілка $\sigma : i \to j$ тоді і тільки тоді, коли α_j накриває α_i.

Іншими словами в діаграмі $Q(P)$ існує стрілка $\sigma : k \to l$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_k < \alpha_l$ та не існує елемента α_j, такого, що $\alpha_k \leq \alpha_j \leq \alpha_l$, де $\alpha_j \neq \alpha_k$, $\alpha_j \neq \alpha_l$.

Означення 7. Сагайдак без орієнтованих циклів називається ациклічним сагайдаком.

Означення 8. Стрілка $\sigma : i \to j$ ациклічного сагайдака Q називається зайвою, якщо існує шлях із вершини i у вершину j довжини більшої, ніж 1.

Теорема 3. Нехай Q – ациклічний простий сагайдак без зайвих стрілок. Тоді Q є діаграмою деякої скінченної частково впорядкованої множини P. Навпаки, діаграма $Q(P)$ скінченної частково впорядкованої множини P є ациклічним простим сагайдаком без зайвих стрілок.

Нехай P – довільна частково впорядкована множина. Нагадаємо, що підмножина множини P називається ланцюгом, якщо довільні два її елементи порівнюються. Підмножина множини P називається антиланцюгом, якщо довільні два її елементи не порівнюються.

Ми будемо позначати ланцюг з n елементів через CH_n та антиланцюг з n елементів через ACH_n.

Максимальна кількість $\omega(P)$ елементів в антиланцюгу множини P називається шириною множини P.

Означення 9. Зведена (0,1)-матриця показників ε задає частковий порядок на множині $P_\varepsilon = \{1, ..., n\}$ за правилом: $i \leq j$ тоді й тільки тоді, коли $\alpha_{ij} = 1$.

Навпаки, з кожною скінченною частково впорядкованою множиною $P = \{1, ..., n\}$ ми зв'язуємо зведену (0,1)-матрицю показників $\varepsilon_P = (\lambda_{ij})$ наступним чином: $\lambda_{ij} = 0 \Leftrightarrow i \leq j$, інакше $\lambda_{ij} = 1$.

Легко бачити, що ε_P є дійсно зведеною матрицею показників.

Позначимо через $P_{\max}$ множину всіх максимальних елементів множини P, через $P_{\min}$ – множину всіх мінімальних елементів множини P, і через $P_{\max} \times P_{\min}$ – їх декартів добуток.

Означення 10. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$, отриманий з діаграми $Q(P)$ додаванням стрілок σ_{ij} для всіх $(p_i, p_j) \in P_{\max} \times P_{\min}$ – називається сагайдаком, що асоційований з частково впорядкованою множиною P.

Теорема 4. Сагайдак $Q(\varepsilon_P)$ співпадає з сагайдаком $\tilde{Q}(P)$.

Очевидно, що $\tilde{Q}(P)$ є сильно зв'язним просто влаштованим сагайдаком. Легко перевірити, що сагайдак $Q(\varepsilon_{CH_n})$, асоційований з ланцюгом CH_n, є простим циклом на n вершинах, сагайдак $Q(\varepsilon_{ACH_n})$, асоційований з антиланцюгом CH_n, є повним простим сагайдаком на n вершинах. Зокрема, якщо $P = P_{\min} = P_{\max}$, то отримуємо повний простий сагайдак, що має по одній петлі в кожній вершині.

ДОПУСТИМІ САГАЙДАКИ. Нехай $\varepsilon = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathrm{Z})$ – зведена матриця показників, $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij}) = \varepsilon + E$ та $Q = Q(\varepsilon)$ – сагайдак матриці показників ε з матрицею суміжності $[Q] = (q_{ij})$, де $q_{ij} = \min\limits_k(\beta_{ik} + \beta_{kj}) - \beta_{ij}$. Позначимо $G = \{\beta_{ij} \mid q_{ij} = 1\}$.

Теорема 5.. Множина G є мінімальною системою твірних елементів матриці $\varepsilon^{(1)}$.

Означення 11. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається зваженим, якщо визначено функцію $\omega : AQ \to \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

Теорема 6 [3]. Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє наступним умовам:

- вага стрілки з точки i у точку j менша за вагу шляху з точки i у точку j довжини $l \geq 2$,
- вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжини $l \geq 2$,
- вага будь-якого циклу завжди більша або дорівнює 1,
- вага довільної петлі дорівнює 1,
- через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ ІЗ ЖОРСТКИМ АСОЦІЙОВАНИМ САГАЙДАКОМ.

Означення 12. Допустимий сагайдак Q називається жорстким, якщо $Q = Q(\varepsilon)$ для єдиної з точністю до еквівалентності зведеної матриці показників ε.

Нехай P – скінченна частково впорядкована множина, $\tilde{Q}(P)$– асоційований сагайдак. У теоремах 7, 8 і 9 наводяться достатні умови для множини P, щоб сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не був жорстким.

Частково впорядковану множину зі зв'язною діаграмою будемо називати зв'язною.

Теорема 7 [4]. Нехай P – скінченна зв'язна часткова впорядкована множина, що задовольняє наступним умовам:

- для будь–якого $\alpha_i \in P$ існує якого $\alpha_j \in P$ таке, що α_i і α_j не порівнюються;
- існують $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ такі, що $\alpha_u \nleq \alpha_v$.
- Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.
- **Теорема 8** [4]. Нехай P – скінченна зв'язна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:
- для будь–якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке що α_i і α_j не порівнянні;
- для будь–яких $\alpha_u \in P_{\min}$ і $\alpha_v \in P_{\max}$ має місце нерівність $\alpha_u \leq \alpha_v$;
- існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \varnothing$.

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теорема 9 [4]. Нехай P – скінченна незв'язна частково впорядкована множина. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теореми 7, 8 і 9 можна узагальнити наступним чином.

Теорема 10. Нехай P – скінченна частково впорядкована множина, що задовольняє умовам:

- для будь-якого $\alpha_i \in P$ існує $\alpha_j \in P$ таке що α_i і α_j не порівнянні;
- існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \neq \varnothing$.

Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ не є жорстким.

Теорема 11 [4]. Нехай P – скінченна частково впорядкована множина з єдиним мінімальним елементом. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким.

Наслідок 1. Якщо в скінченній частково впорядкованій множині P існує елемент α, порівняний з усіма елементами цієї множини, то сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким.

Приклад 1. Неважко перевірити, що частково впорядкована множина (Рис. 1) має жорсткий асоційований сагайдак. Ця множина не задовольняє умові наслідку 1.

Для цієї множини виконуються перші дві умови теореми 8 і не виконується третя умова.

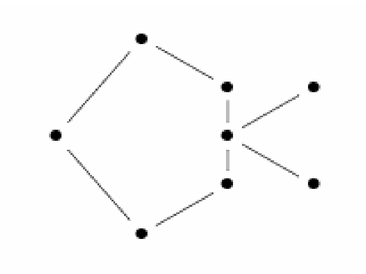


Рис. 1

Теорема 12. [2]. Допустимий сагайдак , який має хоча б одну петлю, не є жорстким.

З доведення цієї теореми випливає, що допустимий сагайдак Q, який має хоча б одну петлю, має нескінченну кількість нееквівалентних матриць показників з даним сагайдаком.

Теорема 13. Для довільного натурального $m > 1$ існує допустимий сагайдак Q_m, для якого існує рівно m попарно нееквівалентних матриць показників, сагайдак яких співпадає з сагайдаком Q_m.

Допустимий сагайдак може мати з точністю до еквівалентності одну, скінченну кількість, більшу за 1, або нескінченну кількість зведених матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

ОСНОВНА ЧАСТИНА. Нехай – допустимий сагайдак. Тоді за теоремою 6 через кожну вершину $a \in VQ$ без петлі проходить цикл C_a одиничної ваги. Розглянемо сагайдак $\bar{Q}$ з множиною вершин VQ і множиною стрілок $A\bar{Q} = \bigcup\limits_{a \in VQ} AC_a$ (об'єднання береться по циклам одиничної ваги, але не обов'язково по всім таким циклам). Очевидно $\bar{Q} = C_{a_1} \cup \ldots \cup C_{a_m}$ для деяких вершин $a_1, \ldots, a_m$.

Теорема 14. Допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників ε з $Q(\varepsilon) = Q$ тоді і тільки тоді, коли існує $\bar{Q}$ – незв'язний сагайдак.

Доведення. Нехай допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників ε з сагайдаком $Q(\varepsilon) = Q$. Нехай $\left\{\varepsilon_\gamma = \left(\alpha_{ij}^{(\gamma)}\right)\right\}$ – множина всіх таких матриць.

Тоді існують індекси i та j, що множина $\left\{\alpha_{ij}^{(\gamma)}\right\}$ необмежена. За теоремою 6 існують вагові функції $\omega_\gamma : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ такі, що $\alpha_{ij}^{(\gamma)} = \omega_\gamma\left(P(i,j)\right)$, де $P(i,j)$ – шлях із вершини i у вершину j у сагайдаку Q (шлях мінімальної ваги). Оскільки множина $\left\{\alpha_{ij}^{(\gamma)}\right\}$ – необмежена, то існує стрілка σ_{kl} така, що множина $\left\{\omega_\gamma\left(\sigma_{kl}\right)\right\}$ – необмежена.

Припустимо, що сагайдак $\bar{Q}$ зв'язний і є об'єднанням m циклів C_a ваги 1. Тоді в $\bar{Q}$ шлях із вершини k в вершину l має спільні стрілки з не більш, ніж m одиничними циклами C_a. З адитивності ваги шляху отримуємо, що вага шляху з k в l не перевищує ваги всіх стрілок сагайдака $\bar{Q}$, тобто m. За умовою теореми 6 вага стрілки $\omega_\gamma\left(\sigma_{kl}\right)$ менша за вагу шляху з вершини k у вершину l. Отже, $\omega_\gamma\left(\sigma_{kl}\right) < m$. Отримана суперечність доводить, що сагайдак $\bar{Q}$ є незв'язним.

Навпаки, нехай сагайдак $\bar{Q}$ – незв'язний: $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2$, $\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2 = \varnothing$. Занумеруємо вершини $\bar{Q}_1$ і $\bar{Q}_2$ числами $1, \ldots, s, s+1, \ldots, s+t$.

Сагайдак Q – допустимий, тоді існує зведена матриця показників $\varepsilon = \left(\alpha_{ij}\right)$ така, що $Q(\varepsilon) = Q$. Відповідно до розбиття $\bar{Q} = \bar{Q}_1 \cup \bar{Q}_2$ маємо $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$.

Можемо вважати, що $\alpha_{ij} \geq 0$ для всіх i, j. Нехай $x \in \mathbb{N}$ і $x > \max\limits_{i,j} \alpha_{ij}$. Розглянемо матрицю $\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_{12} + xU_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \left(\alpha_{ij}^{(x)}\right)$. Це також зведена матриця показників і $Q\left(\varepsilon(x)\right) = Q(\varepsilon) = Q$. Оскільки $\sum\limits_{i,j} \alpha_{ij}^{(x)} \neq \sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}^{(y)}$ при $x \neq y$, то матриці $\varepsilon(x)$ та $\varepsilon(y)$ при $x \neq y$ нееквівалентні. Отже, допустимий сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\varepsilon(x)$ з $Q\left(\varepsilon(x)\right) = Q(\varepsilon) = Q$. Теорема доведена.

Зауваження 2. Вибираючи по-різному одиничні цикли сагайдака Q, будемо отримувати різні $\bar{Q}$. Наведемо приклад.

Приклад 2. Розглянемо сагайдак Q з матрицею суміжності

$$[Q]=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Якщо вибирати в Q одиничні цикли 1–5–1, 2–4–6–2, 3–4–6–3, то $\bar{Q}$ буде незв'язним. Якщо ж вибирати в Q одиничні цикли 1–5–1, 2–4–5–2, 3–4–6–3, то $\bar{Q}$ буде зв'язним. За теоремою 14 сагайдак Q має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників ε з $Q(\varepsilon)=Q$.

Нехай $P=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ – скінченна частково впорядкована множина. Якщо існує розбиття P на дві такі,частково впорядковані множини P' і P'', що $P=P'\cup P''$, $P'\cap P''=\varnothing$, $P_{\max}=P'_{\max}\cup P''_{\max}$, $P_{\min}=P'_{\min}\cup P''_{\min}$, то за теоремою 6 сагайдак $\tilde{Q}(P)=Q$ не є жорстким. Більше того, цей сагайдак має нескінченну кількість нееквівалентних зведених матриць показників $\varepsilon(x)$ таких, що $Q(\varepsilon(x))=\tilde{Q}(P)=Q$. За теоремою 14 існує незв'язний сагайдак $\bar{Q}$.

Теорема 15. Нехай $P=\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ – така скінченна частково впорядкована множина, що для будь-якого розбиття $P=P'\cup P''$, $P'\cap P''=\varnothing$ має місце строге включення $P'_{\max}\cup P''_{\max}\cup P'_{\min}\cup P''_{\min}\supsetneq P_{\max}\cup P_{\min}$. Тоді сагайдак $\tilde{Q}(P)=Q$ – жорсткий.

Доведення. Для частково впорядкованої множини P не існує розбиття $P=P'\cup P''$, $P'\cap P''=\varnothing$, $P'_{\max}\cup P''_{\max}=P_{\max}$, $P'_{\min}\cup P''_{\min}=P_{\min}$. Тому за теоремою 6 сагайдак $\bar{Q}$ – зв'язний. $Q=\tilde{Q}(P)$ – допустимий сагайдак, тому існує $\omega: AQ\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ – вагова функція, що задовольняє умови теореми 6. Нехай $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\in P_{\min}$, $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2}\in P_{\max}$. З нерівностей

$$1\le\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_1}\right)<\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_2}\right)+\omega\left(P\left(\alpha_{i_2},\alpha_{j_2}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_2},\alpha_{i_1}\right),$$

$$1\le\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_1}\right)<\omega\left(P\left(\alpha_{i_1},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_2}\right)+\omega\left(P\left(\alpha_{i_2},\alpha_{j_1}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{j_1},\alpha_{i_1}\right)$$

випливає, що одиничний цикл в $\bar{Q}$ має рівно одну вершину з $P_{\max}$ і одну вершину з $P_{\min}$. Покажемо тепер, що в $\bar{Q}$ $\omega(\alpha_i,\alpha_j)=0$, якщо в діаграмі $Q(P)$ є стрілка з α_i у α_j.

Елементарному еквівалентному перетворенню I-го типу – від елементів i -го рядка матриці показників відняти ціле число t, а до елементів i -го стовпчика додати t, – відповідає перетворення вагової функції: вага кожної стрілки, що виходить з вершини i зменшується на t, а вага кожної стрілки, що входить у вершину t, збільшується на t.

У першому одиничному циклу C_1 з $\bar{Q}$ такими перетвореннями (перетворення над Q, а, отже, і над $\bar{Q}$) ми можемо зробити вагу стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ одиничною. Тоді вага будь-якої іншої стрілки з цього циклу дорівнює 0. Розглянемо тепер одиничний цикл C_2, який має з циклом C_1 спільні вершини. Нехай $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$ – вершини з $P_{\min}$, що належать циклам C_1 та C_2, $\alpha_{j_1},\alpha_{j_2}$ – вершини з $P_{\max}$, що належать циклам C_1 та C_2 відповідно, α_1 і α_2 – спільні вершини циклів C_1 і C_2, $\alpha_1<\alpha_2$. Тоді стрілка ваги 1, яка належить циклу C_2, не може належати шляху від α_1 до α_2. Інакше частину циклу C_2 від α_2 до α_1 ваги 0, можна доповнити частиною циклу C_1 від α_1 до α_2 ваги 0 і отримаємо цикл ваги 0, що неможливо. Отже, стрілка ваги 1 циклу C_2 належить частині цього циклу – ланцюгу, який містить не більше однієї точки циклу C_1. Цей ланцюг містить стрілку від елемента α_{j_2} з $P_{\max}$ до елемента α_{i_2} з $P_{\min}$. Перетвореннями, що відповідають елементарним перетворенням I-го типу, вагу 1 стрілки у ланцюгу можна перемістити на стрілку $\left(\alpha_{j_2},\alpha_{i_2}\right)$. Продовжуючи аналогічні міркування, отримаємо таку вагову функцію ω на $\bar{Q}$, що $\omega\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=1$ лише у тому випадку, коли $\alpha_i\in P_{\max}$, а $\alpha_j\in P_{\min}$.

Нехай $\alpha_i\in P_{\max}$, $\alpha_j\in P_{\min}$ належить циклу C_1. сагайдака $\bar{Q}$, а , α_j належить циклу C_s, причому цикли C_i та C_{i+1} мають спільні вершини для $i=1,...,n$. Індукцією за s легко показати, що вага будь-якої стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ дорівнює 1. База індукції – α_i та α_j належать одному циклу в $\bar{Q}$. Припустимо, вага стрілки з $\alpha_{i_u}\in P_{\max}$ у $\alpha_{jk}\in P_{\min}$ дорівнює 1, якщо α_{i_u} належить циклу C_u, а α_{jk} – циклу C_k, де $u,k<s-1$. Оскільки для $\alpha_{i_k}\in P_{\max}$, що належить циклу C_k, $\omega\left(\alpha_{i2},\alpha_j\right)<\omega\left(\alpha_{i2},\alpha_{jk}\right)+\omega\left(P\left(\alpha_{j_k},\alpha_{ik}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{i_k},\alpha_j\right)=1+0+1$, то $\omega\left(\alpha_{i_2},\alpha_j\right)\le 1$.

З іншого боку $\omega\left(\alpha_{i2},\alpha_j\right)+\omega\left(P\left(\alpha_j,\alpha_{ik}\right)\right)+\omega\left(\alpha_{ik},\alpha_j\right)>\omega\left(\alpha_{i_2},\alpha_{j_2}\right)=1$ або $\omega\left(\alpha_{i_2},\alpha_j\right)+0+1>1$. Отже, $\omega\left(\alpha_{i_1},\alpha_j\right)=1$, тобто, вага будь-якої стрілки з $P_{\max}$ у $P_{\min}$ дорівнює 1.

Розглянемо стрілку $\left(\alpha_k,\alpha_p\right)$, яка є в діаграмі $Q(P)$, але її немає в сагайдаку $\bar{Q}$. Нехай вершина α_k належить циклу C_a, а вершина α_p – циклу C_b, $\alpha_{a_1},\alpha_{a_2}$ – вершини циклу C_a, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$, $\alpha_{b_1},\alpha_{b_2}$ – вершини циклу C_b, які належать $P_{\min}$ та $P_{\max}$. Тоді, $\omega(\alpha_k,\alpha_p) < \omega(P(\alpha_k,\alpha_{a_2})) + \omega(\alpha_{a_2},\alpha_{b_1}) + \omega(P(\alpha_b,\alpha_p)) = 0+1+0=1$. Отже, $(\alpha_k,\alpha_p)=0$.

Таким чином, будь-яка вагова функція $\omega : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$,що задовольняє умови теореми 6, еквівалентна функції, що діє за наступним правилом:

$$\omega(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } \alpha_i \in P_{\max}, \alpha_j \in P_{\min}, \\ 0, \textit{ в інших випадках}. \end{cases}$$

Ця вагова функція визначає зведену (0,1)-матрицю показників $\varepsilon(P) = (\alpha_{ij})$, де $\alpha_{ij}=0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i \le \alpha_j$, $\alpha_{i,j}=1$ в інших випадках. Це означає, що сагайдак $\tilde{Q}(P)$ – жорсткий. Теорема доведена.

З теорем 10 та 15 отримуємо наступне твердження.

Теорема 16 Нехай P – скінченна частково впорядкована множина. Сагайдак $\tilde{Q}(P)$ є жорстким тоді і тільки тоді, коли не існує розбиття множини $P = P' \cup P''$, $P' \cap P'' = \varnothing$, для якого $P_{\max} = P'_{\max} \cup P''_{\max}$, $P_{\min} = P'_{\min} \cup P''_{\min}$; $P'_{\max}, P''_{\max}, P'_{\min}, P''_{\min} \ne \varnothing$.

ВИСНОВКИ. Отримано критерій жорсткості сагайдака, асоційованого зі скінченною частково впорядкованою множиною. Також встановлено критерій існування нескінченної кількості нееквівалентних зведених матриць показників з даним допустимим сагайдаком.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Завадский, А.Г., Кириченко, В.В., Модули без кручения над первичными кольцами,// Зап. науч. семинар. Ленинград. отдел. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ) – 1976. – т. 57. – с. 100–116. 2.. Зеленський О.В. Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників. – Вісник Київського університету. Серія: фізико–математичні науки. – 2007. – No 3. – с.27–31. 3. Журавлёв В.Н., Допустимые колчаны. Фундаментальная и прикладная математика. Том 14, 2008. No 7, с. 121–128. 4. Кириченко В.В., Журавлёв В.Н., Цыгановская И.Н., О жестких колчанах. Фундаментальная и прикладная математика. Том 12, выпуск 8, 2006. Часть 1. С. 105 – 120. 5. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2004, v. 1, 380 p. 6. Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V., Algebras, Rings and Modules, Mathematics and Its Applications, Springer, 2007, v. 2, 400 p. 7. V.V.Kirichenko, A.V.Zelensky, V.N.Zhuravlev, Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings,Algebra and Computation, 15, No 5 & 6 (2005), pp.997–1012.

Надійшла до редколегії 31.10.12

В. Журавлев, доц., Т. Журавлева, асп., А. Зеленский, канд. физ.-мат. наук

ЖЕСТКИЕ КОЛЧАНЫ, АССОЦИРОВАННЫЕ С ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Приведены критерии жесткости колчана, ассоциированном с конечным частично упорядоченным множеством.

V. Zhuravlev, Associate Professor, T. Zhuravleva, PhD graduate, A. Zelensky, PhD

RIGID QUIVERS ASSOCIATED WITH PARTIALLY ORDERED SETS

We give a criterion of rigidity of quiver associated with finite partially ordered set.

УДК 519.21

О. Ільченко, канд. фіз.-мат. наук,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: alvil@i.ua

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Знайдено умови існування періодичних розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами.

ВСТУП. В [4] наведено умови існування стохастично обмежених розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння. Як виявилося, за умови періодичності коефіцієнтів, стохастично обмежений розв'язок може бути також періодичним, тобто мати періодичні всі скінченновимірні розподіли. У даній статті автор встановлює, що при наявності раціональної залежності між періодами коефіцієнтів рівняння, існування єдиного періодичного розв'язку еквівалентно не рівності нулю інтегрального середнього по періоду від показника стійкості лінійної частини. Такий критерій еквівалентний експоненціальній p – стійкості або p – нестійкості, при деякому $p>0$ (див. [5, 6]), розв'язку однорідного рівняння, хоча поширеною для такого класу задач є практика використання стійкості у середньоквадратичному [3, 7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ, ПРИПУЩЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dx(t) = \big(b(t)x(t)+f(t)\big)dt + \sum_{k=1}^{m}\big(\sigma_k(t)x(t)+g_k(t)\big)dw_k(t), \qquad (1)$$

де $b(t)$, $f(t)$, $\sigma_k(t)$, $g_k(t)$ – неперервні і періодичні за $t \in R$ відповідно T_{10}, T_{20}, T_{1k} та T_{2k} періодів дійсні функції; $w_k(t)$ – одновимірні незалежні вінерівські процеси, $t \in R$, $k=\overline{1,m}$.

Під вінерівським процесом $w(t)$, $t \in R$ будемо розуміти процес з незалежними приростами і такий, що для довільних $s,t \in R$ різниця $w(t)-w(s)$ – гауссовська випадкова величина, $w(0)=0$, $\mathrm{M}(w(t)-w(s))=0$, $\mathrm{M}(w(t)-w(s))^2 = |t-s|$.

Пов'яжемо з процесами $w_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, такі потоки σ-алгебр

$$F_t = \sigma a\left\{w_k(s_2)-w_k(s_1): s_1 \le s_2 \le t, k=\overline{1,m}\right\},\ F^t = \sigma a\left\{w_k(s_2)-w_k(s_1): t \le s_1 \le s_2, k=\overline{1,m}\right\}.$$

Означення. Процес $x(t)$, $t\in R$, називається періодичним з періодом T, якщо існує таке $T>0$, що для довільного $n\in N$, борелівських множин $A_k \subset R$, $t_k \in R$, $k=\overline{1,n}$

$$\mathrm{P}\left\{x(t_1+T)\in A_1, x(t_2+T)\in A_2,\ldots,x(t_n+T)\in A_n\right\} = \mathrm{P}\left\{x(t_1)\in A_1, x(t_2)\in A_2,\ldots,x(t_n)\in A_n\right\}. \quad (2)$$

Разом з рівнянням (1) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$dh_s^t = b(t)h_s^t dt + \sum_{k=1}^m \sigma_k(t)h_s^t dw_k(t), \quad (3)$$

яке при $s\le t$ і $h_s^s=1$ має розв'язок (див. [1,5]) $h_s^t = \exp\left\{\int_s^t \left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \sigma_k^2(u)\right)du + \sum_{k=1}^m \int_s^t \sigma_k(u)dw_k(u)\right\}$. Шляхом безпосереднього підрахунку легко отримати, що для довільного $p\in R$ $\mathrm{M}\left(h_s^t\right)^p = \exp\left\{p\int_s^t\left(b(u)-\frac{1}{2}(1-p)\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)\right)du\right\}$.

Надалі будемо припускати, що виконується умова

А) Періоди коефіцієнтів рівняння (1) зв'язані системою несуперечливих співвідношень вигляду $lT_{ij}=mT_{kr}$ для $l,m\in N$, $i,k=0,1$, $j,r=\overline{1,m}$.

Зауваження. Якщо умова А) виконана, то коефіцієнти рівняння (1) мають спільний період T.

Позначимо $\gamma = \frac{1}{T}\int_0^T\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)\right)du$. Для $p>0$ справедливі оцінки

$$\mathrm{M}\left(h_s^t\right)^p \le \exp\left\{p\gamma(t-s)+pL_1+p^2L_3(t-s)\right\}, \quad (4)$$

$$\mathrm{M}\left(h_s^t\right)^{-p} \le \exp\left\{-p\gamma(t-s)-pL_2+p^2L_3(t-s)\right\}, \quad (5)$$

де $L_1 = \sup\limits_{0\le s\le T}\int_0^s\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)-\gamma\right)du$, $L_2 = \inf\limits_{0\le s\le T}\int_0^s\left(b(u)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sigma_k^2(u)-\gamma\right)du$, $L_3 = \sup\limits_{0\le s\le T}\frac{1}{2}\sum_{r=1}^m\sigma_k^2(s)$.

Розв'язок $x_s(t)$, $s\le t$, рівняння (1) зображується (див. [1,4]) у вигляді

$$x_s(t) = h_s^t\left[x(s)+\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\left(f(u)-\sum_{k=1}^m\sigma_k(u)g_k(u)\right)du + \sum_{k=1}^m\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}g_k(u)dw_k(u)\right],\ s\le t. \quad (6)$$

Поведінка розв'язку $x_s(t)$, $s\le t$, визначається інтегральними доданками у (6). Умови збіжності при $t\to+\infty$ цих виразів встановлюються у наступних лемах.

Лема 1. Припустимо що $\varphi(t)$ – неперервна T-періодична функція, $t\in R$. Тоді при $s\le t$ справедлива формула заміни напрямку інтегрування для стохастичних інтегралів

$$h_s^t\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\varphi(u)dw_k(u) = -\int_t^s h_u^t\varphi(u)dw_k(u) - \int_t^s h_u^t\varphi(u)\sigma_k(u)du.$$

Лема 2. Нехай виконуються умови:

1) $\gamma<0$;

2) $\varphi(t)$ – неперервна T-періодична функція, $t\in R$.

Тоді для довільного $t\in R$ майже напевно існують границі

$$\lim_{s\to-\infty} h_s^t\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\varphi(u)du = \int_{-\infty}^t h_u^t\varphi(u)du,\ \lim_{s\to-\infty} h_s^t\int_s^t\left(h_s^u\right)^{-1}\varphi(u)dw_k(u) = -\int_t^{-\infty}h_u^t\varphi(u)dw_k(u) - \int_t^{-\infty}h_u^t\varphi(u)\sigma_k(u)du.$$

Доведення лем 1 і 2 проводиться аналогічно [4] з урахуванням оцінок (4) і (5), які гарантують відповідні викладки.

ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ.

Теорема. Нехай виконується умова а). Для того щоб рівняння (1) мало єдиний T-періодичний розв'язок $\tilde{x}(t)$, $t\in R$ необхідно і достатньо, щоб $\gamma\ne0$. Цей розв'язок задається формулою

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} -\int_t^{-\infty}h_u^t f(u)du - \sum_{k=1}^m\int_t^{-\infty}h_u^t g_k(u)dw_k(u), & \gamma<0; \\ -\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}\left(f(u)-\sum_{k=1}^m\sigma_k(u)g_k(u)\right)du - \sum_{k=1}^m\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}g_k(u)dw_k(u), & \gamma>0. \end{cases}$$

Доведення. Достатність. Розглянемо випадки $\gamma<0$ і $\gamma>0$ окремо.

1) Нехай $\gamma<0$. Покладемо

$$x_{-\infty}(t) = -\int_t^{-\infty}h_u^t f(u)du - \sum_{k=1}^m\int_t^{-\infty}h_u^t g_k(u)dw_k(u),\ t\in R. \quad (7)$$

З леми 2 випливає, що вираз в правій частині (7) існує для кожного $t\in R$. Перевірка того, що $x_{-\infty}(t)$ задовольняє співвідношення (6), а відтак становить розв'язок рівняння (1), проводиться аналогічно [4]. Зазначимо, що цей розв'язок вимірний відносно потоку F_t. Покажемо, що процес $x_{-\infty}(t)$ періодичний. Для цього перевіримо співвідношення (2). Оскільки процес $x_{-\infty}(t)$ марковський, то

$$\mathrm{P}\left\{x\left(t_1\right)\in A_1, x\left(t_2\right)\in A_2,\dots,x\left(t_n\right)\in A_n\right\}=\int_{A_{n-1}}\cdots\int_{A_1}P\{x(t_1)\in dx_1\}\prod_{k=1}^{n-2}P\{t_k,x_k,x(t_{k+1})\in dx_{k+1}\}P\{t_{n-1},x_{n-1},x(t_n)\in A_n\}dx_1\dots dx_{n-1}. \quad (8)$$

З (8) випливає, що періодичність $x_{-\infty}(t)$ еквівалентна періодичності перехідної функції $\mathrm{P}\left\{s,x,x_s(t)\in A\right\}$ та періодичності $\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t)\in A\right\}$.

Перехідна функція для $s\le t$ задається співвідношенням (6). Позначимо $F(t)=f(t)-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(t)g_k(t)$, $w_k^T(t)=w_k(T+t)-w_k(T)$, $t\in R$. Для перехідної функції справедливо наступне

$$\mathrm{P}\left\{s+T,x,x_{s+T}(t+T)\in A\right\}=P\left\{h_{s+T}^{t+T}\left[x+\int_{s+T}^{t+T}\left(h_{s+T}^{u}\right)^{-1}F(u)du+\sum_{k=1}^{m}\int_{s+T}^{t+T}\left(h_{s+T}^{u}\right)^{-1}g_k(u)dw_k(u)\right]\in A\right\}=$$

$$=P\left\{h_{s+T}^{t+T}\left[x+\int_s^t\left(h_{s+T}^{v+T}\right)^{-1}F(v+T)du+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\left(h_{s+T}^{v+T}\right)^{-1}g_k(v+T)dw_k^T(v)\right]\in A\right\}=$$

$$=P\left\{h_s^t\left[x+\int_s^t\left(h_s^v\right)^{-1}F(v)du+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\left(h_s^v\right)^{-1}g_k(v)dw_k(v)\right]\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{s,x,x_s(t)\in A\right\}.$$

Покажемо періодичність $\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t)\in A\right\}$. Маємо: $\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t+T)\in A\right\}=$

$$=\mathrm{P}\left\{-\int_{t+T}^{-\infty}h_u^{t+T}f(u)du-\sum_{k=1}^{m}\int_{t+T}^{-\infty}h_u^{t+T}g_k(u)dw_k(u)\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{-\int_t^{-\infty}h_{v+T}^{t+T}f(v+T)dv-\sum_{k=1}^{m}\int_t^{-\infty}h_{v+T}^{t+T}g_k(v+T)dw_k^T(v)\in A\right\}=$$

$$=\mathrm{P}\left\{-\int_t^{-\infty}h_v^tf(v+T)dv-\sum_{k=1}^{m}\int_t^{-\infty}h_v^tg_k(v+T)dw_k(v)\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{-\int_t^{-\infty}h_v^tf(v)dv-\sum_{k=1}^{m}\int_t^{-\infty}h_v^tg_k(v)dw_k(v)\in A\right\}=\mathrm{P}\left\{x_{-\infty}(t)\in A\right\}.$$

Покажемо, що періодичний розв'язок $x_{-\infty}(t)$ єдиний. Дійсно, якщо $y(t)$ інший періодичний розв'язок рівняння (1), то $z(t)=x_{-\infty}(t)-y(t)$ задовольняє однорідне рівняння (3) і в силу припущення теореми $\lim_{t\to-\infty}\left|z(t)\right|=+\infty\ (\mathrm{P}=1)$, що суперечить періодичності процесів $x_{-\infty}(t)$ і $y(t)$.

2) Нехай $\gamma>0$. Покладемо $x_{+\infty}(t)=-\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}\left(f(u)-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k(u)g_k(u)\right)du-\sum_{k=1}^{m}\int_t^{+\infty}\left(h_t^u\right)^{-1}g_k(u)dw_k(u)$. Умови, що накладені на коефіцієнти рівняння (1), забезпечують існування $x_{+\infty}(t)$ в силу леми 2, оскільки $-\gamma<0$. Процес $x_{+\infty}(t)$ вимірний відносно F^t. У випадку $t\le s$ співвідношення (6) в результаті застосування леми 1, як показано в [4], переходить у таке

$$x_s(t)=\left(h_t^s\right)^{-1}\left[x(s)-\int_s^t h_u^sf(u)du-\sum_{k=1}^{m}\int_s^t h_u^sg_k(u)dw_k(u)\right], t\le s \quad (9)$$

Перевірка того, що $x_{+\infty}(t)$ задовольняє (9), тобто є розв'язком рівняння (1), виконана в [4]. Доведення періодичності $x_{+\infty}(t)$ здійснюється аналогічно випадку $\gamma<0$ з урахуванням того, що перехідна функція задається співвідношенням (9). Єдиність випливає з тих же міркувань, що і у попередньому випадку. Достатність доведена.

Необхідність. Доведемо необхідність умови теореми від супротивного. Припустимо, що $\gamma=0$ і покажемо, що тоді існують неперервні T-періодичні функції $f(t)$, $g_k(t)$ $k=\overline{1,m}$, для яких не існує жодного T-періодичного розв'язку рівняння (1). Розглянемо при $t\ge0$ рівняння

$$dx(t)=\left(b(t)x(t)+L+f(t)\right)dt+\sigma(t)x(t)dw(t),\quad L=1+\sup_{0\le t\le T}\left|f(t)\right| \quad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) при $t\ge0$ має вигляд

$$x(t)=\exp\left\{\psi(t)+\int_0^t\sigma(u)dw(u)\right\}\left[x(0)+\int_0^t\exp\left\{-\psi(u)-\int_0^u\sigma(v)dw(v)\right\}\left(L+f(u)\right)du\right],$$

$$\psi(t)=\int_0^t\left(b(u)-\tfrac{1}{2}\sigma^2(u)\right)du,\ \left|\psi(t)\right|\le K<+\infty,\ t\ge0.$$

Якщо $\sigma(t)$ – неперервна функція і $\sigma(t)\ne0$, $0<t<T$, то для кожного $x(0)\in R$ маємо

$\lim_{t\to+\infty}\left[x(0)+\int_0^t\exp\left\{-\psi(u)-\int_0^u\sigma(v)dw(v)\right\}\left(L+f(u)\right)du\right]=+\infty$ з ймовірністю 1, а відтак, і за ймовірністю.

Оскільки для деякого $r>0$ $\mathrm{P}\left\{\exp\left\{\psi(t)+\int_0^t\sigma(u)dw(u)\right\}\ge r\right\}\ge\dfrac{1}{2}$, то для довільного $N>0$ існує таке $\bar{t}$, що $\mathrm{P}\left\{x(t)>N\right\}\ge\dfrac{1}{4}$ при $t>\bar{t}$. Це суперечить періодичності процесу $x(t)$ і унеможливлює існування періодичних розв'язків рівняння (10). Отже $\gamma\ne0$. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ. Встановлено критерій існування періодичних розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з періодичними коефіцієнтами за умови відсутності багаточастотних ефектів між періодичними коефіцієнтами. Умова існування єдиного періодичного розв'язку точна. Вона відповідає детермінованому випадку і полягає у відмінності від нуля інтегрального середнього за періодом від показника стійкості лінійної частини.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ
1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наук. думка, 1968. – 354 с. 2. Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с. 3. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Вища шк., 1992. – 319 с. 4. Ільченко О. В. Стохастично обмежені розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння // Теорія Ймовір. та Матем. Статист., 2003, Вип. 68, С. 47–54. 5 Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1987. – 328 с. 6. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 с. 7. Ichikawa A. Bounded and periodic solutions of a linear stochastic evolution equations // Lect. Notes Math. 1299. – 1988. – Springer – Verlag. – p. 124–130.

Надійшла до редколегії 28.10.12

А. Ильченко, канд. физ.-мат. наук

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Найдены условия существования периодических решений линейного неоднородного стохастического дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами.

A. Ilchenko, PhD

PERIODIC SOLUTIONS OF THE LINEAR NONHOMOGENUOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

Conditions for existence of periodic solutions of the linear nonhomogenuous stochastic differential equation with periodic coefficients are found.

УДК 519.21

І. Сенько, асп.,
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ
Email: ivan_senko@ukr.net

ВЛАСТИВОСТІ ПОКРАЩЕНОЇ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ У ЛІНІЙНІЙ ВЕКТОРНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ ЗА НАЯВНОСТІ ЗАЛЕЖНИХ ПОХИБОК У ЗМІННИХ

Розглянуто покращену оцінку найменших квадратів для множинної векторної лінійної моделі з похибками у змінних для випадку p-залежних похибок. Доведено теореми про слабку та строгу консистентність цієї оцінки.

ВСТУП. Розглядаться множинна векторна лінійна модель регресії, у якій припускається наявність похибок вимірювання як у регресорах, так і у відгуках. Невідомий матричний параметр оцінюється за допомогою покращеної оцінки найменших квадратів. Детальний огляд подібних моделей для одновимірного випадку можна знайти у [4].Також розглядалися різноманітні узагальнення одновимірної моделі для різних умов щодо апріорно відомої інформації про похибки вимірювання. Із посиланнями можна ознайомитися у вступі до [2]. Також у [2] розглядалася подібна задача для випадку сукупно незалежних похибок у змінних. Проте складність та людинозалежність систем, які розглядає сучасне природознавство, передбачає складний взаємний зв'язок між елементами цих систем. Тому, для розв'язання задач, пов'язаних із моделюванням, недостатньо припускати умови, подібні до умов класичних теорем теорії ймовірностей, коли окремі випадкові елементи розглядаються незалежними у сукупності. Тому у даній статті розглядається ситуація, коли похибки вимірювання є залежними між собою, а саме *p*-залежними. Подібний зв'язок між похибками для структурної загальної оцінки найменших квадратів розглядався у [6].

Робота побудована наступним чином. У розділі 2 описано модель спостережень та наведено оцінку, властивості якої досліджуються. У розділі 3 доведено теорему про слабку консистентність. У розділі 4 міститься теорема про строгу консистентність. Розділ 5 включає висновки.

Надалі будуть використовуватися наступні позначення. Усі вектори є стовпцями; $\|z\|$ – евклідова норма вектора $z \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{I}_n$ – одинична матриця розміру $n \times n$, для матриці $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ будемо позначати $\|Z\|$ – операторна норма матриці , що відповідає евклідовій нормі у $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{R}^n$, а $\|Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^2}$ – норма Фробеніуса матриці Z. Через $Z^{\dagger}$ будемо позначати псевдообернену матрицю до матриці Z [1, розд. 1]. Математичне сподівання та дисперсія будуть позначатися символами E та var, відповідно. Для послідовності випадкових матриць $\{X_m \in \mathbb{R}^{n \times d},\quad m \geqslant 1\}$ запис $X_m \xrightarrow{P} X_0, m \to \infty$, де $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times d}$, означає збіжність за ймовірністю. Аналогічно, для матриць означається збіжність майже напевно $X_m \xrightarrow{P1} X_0, m \to \infty$. Позначення $X_m = o_P(1), m \to \infty$ означає, що $X_m \xrightarrow{P} 0, m \to \infty$, а $X_m = O_P(1), m \to \infty$ означає, що послідовність $\{\|X_m\|\}$ є стохастично обмеженою. Для квадратної симетричної матриці V через $\lambda_{\min}(V)$ та $\lambda_{\max}(V)$ позначаються відповідно її найменше та найбільше власні числа. Через const будемо позначати довільну сталу, яка не залежить від кількості вимірювань m.

МОДЕЛЬ СПОСТЕРЕЖЕНЬ. Нехай є деякий невідомий лінійний оператор $\mathfrak{X}$ з $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$, $\mathfrak{X}z = X_0^T z, z \in \mathbb{R}^n$. Тут $X_0 = \left(x_{ij}^0\right)_{i=1, j=1}^{n \quad d}$. Для знаходження цього оператора спостерігаються набори його вхідних і вихідних значень; спостереження містять адитивні випадкові похибки. Позначимо через $a_i^0 \in \mathbb{R}^n, i \geqslant 1$, невипадкові вектори, що задають істинні значення вхідних даних; $b_i^0 \in \mathbb{R}^d, i \geqslant 1$, – це вектори, що задають істинні значення вихідних даних; елементи цих векторів позначатимемо відповідно a_{ij}^0 та b_{ij}^0. Розглядається функціональна модель, тобто a_i^0 та b_i^0 – невипадкові. Для істинних значень виконується рівність $b_i^0 = X_0^T a_i^0, \quad i \geqslant 1$.

Спостерігаються вектори $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}^d$, $1 \leqslant i \leqslant m$, причому $a_i = a_i^0 + \tilde{a}_i, \quad b_i = b_i^0 + \tilde{b}_m$, де $\tilde{a}_i$ та $\tilde{b}_i$ – центровані випадкові похибки вимірювань. Елементи цих векторів будуть позначатися аналогічно через $a_{ij}, \ \tilde{a}_{ij}, \ b_{ij}, \ \tilde{b}_{ij}$. Тоді векторна лінійна модель з похибками у змінних задається рівностями $b_i = X_0^T a_i^0 + \tilde{b}_i, \quad a_i = a_i^0 + \tilde{a}_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$

Використовуючи позначення $A = \left[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m\right]^T = \left(a_{ij}\right)_{i=1, j=1}^{m \ \ n}$ і так само задаючи A_0, $\tilde{A}$, B, B_0, $\tilde{B}$, де $A = A_0 + \tilde{A}$, $B = B_0 + \tilde{B}$, цю модель можна символічно записати у вигляді наближеної рівності $AX_0 \approx B$, за умови, що $A_0 X_0 = B_0$.

Будемо позначати $V_{\tilde{A}} = E\tilde{A}^T\tilde{A}$ – кореляційна матриця сукупних похибок у регресорі. Вона вважається відомою.

Основним припущенням про похибки спостережень є наступне:

1) *Набори похибок $\{\tilde{a}_{ij}, i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ та $\{\tilde{b}_{il}, i \geqslant 1, 1 \leqslant l \leqslant d\}$ незалежні між собою і складаються з центрованих випадкових величин, що мають скінченні другі моменти.*

За допомогою методу Corrected Score [3, розд. 7], може бути побудована покращена оцінка найменших квадратів матричного параметра X_0

$$\hat{X} = \hat{X}_m = \left(A^T A - V_{\tilde{A}}\right)^{\dagger} A^T B. \tag{4}$$

У [2] розглядалася консистентність та строга консистентність цієї оцінки за умови незалежності похибок вимірювання, тобто коли виконувалося наступне припущення.

2) *Рядки матриці $\tilde{A}$ незалежні, тобто незалежними є вектори $\{\tilde{a}_i, i \geqslant 1\}$, та рядки матриці $\tilde{B}$ незалежні, тобто незалежними є вектори $\{\tilde{b}_i, i \geqslant 1\}$.*

Проте, як було сказано у розділі 1, така умова не завжди відповідає потребам сучасних прикладних досліджень. Тому розглянемо випадок, коли похибки вимірювань можуть бути залежними між собою.

Означення 1. Будемо казати, що послідовність випадкових векторів $\{\xi_i, i \geqslant 1\}$ є p-залежною для деякого $p \geqslant 1$, якщо для будь-якого $i \geqslant 1$ набори векторів $\{\xi_1, \dots, \xi_i\}$ та $\{\xi_{i+p}, \xi_{i+p+1}, \dots\}$ є незалежними між собою.

На похибки вимірювання накладається така умова:

2) *Для деякого сталого натурального числа p, яке не залежить від кількості спостережень m, вектори $\{\tilde{a}_i, i \geqslant 1\}$ є p-залежними, а також p-залежними є вектори $\{\tilde{b}_i, i \geqslant 1\}$.*

Приклад 1. Розглянемо випадок, коли кожне наступне вимірювання параметрів $\{a_i\}$ пов'язане із попереднім за допомогою зсуву. А саме, якщо зсув координат векторів відбувається на q елементів вліво, то для $a_i = \left(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}\right)^T$, наступний вектор $a_{i+1} = \left(a_{i,q+1}, a_{i,q+2}, \dots, a_{i,n}, a_{i+1,n-q+1}, a_{i+1,n-q+2}, \dots, a_{i+1,n}\right)^T$, $i \geqslant 1$. Тоді матриці істинних значень A_0 і похибок $\tilde{A}$ будуть блочно-ганкелевими, а самі похибки p-залежними для $p = \left[m/q\right] + 1$. Для зсуву вправо, відповідно, отримуються блочно-тьоплцеві матриці.

СЛАБКА КОНСИСТЕНТНІСТЬ. Для доведення консистентності на моменти похибок у змінних накладається умова:

3) $Ea_{ij}^{\ 4} \leqslant const$; $Eb_{il}^{\ 2} \leqslant const$, $i \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant d$.

На істинні значення змінних у регресорі накладається умова типу Галло [5]:

4)
$$\frac{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right) + m}{\lambda^2_{\min}\left(V_{A_0}\right)} \to 0, \quad m \to \infty,$$

де $V_{A_0} \stackrel{def}{=} A_0^{\ T} A_0$.

Тоді справедлива наступна теорема про слабку консистентність.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення *1), 2), 3)* та *4)*. Тоді $\hat{X} \xrightarrow{P} X_0, m \to \infty.$

Доведення. Із припущення *4)* випливає, що існує таке $m_0 \in \mathbb{N}$, що для будь-якого $m \geqslant m_0$ виконується $\det V_{A_0} \neq 0$. Тоді для $m \geqslant m_0$ існує $\left(A^T A - V_{\tilde{A}}\right)^{-1}$ і рівняння (4) можна еквівалентно перетворити наступним чином:

$$V_{A_0}^{-1}\left(A^T A - V_{\tilde{A}}\right)\hat{X} = V_{A_0}^{-1} A^T A_0 X_0 + V_{A_0}^{-1} A^T \tilde{B},$$

або

$$\left(I_n + V_{A_0}^{-1} A_0^T \tilde{A} + V_{A_0}^{-1} \tilde{A}^T A_0 + V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T \tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right)\right)\hat{X} = X_0 + V_{A_0}^{-1} \tilde{A}^T A_0 X_0 + V_{A_0}^{-1} A^T \tilde{B}. \tag{5}$$

Для консистентності оцінки (4) достатньо показати, що при $m \to \infty$:

$$V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T \tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right) \xrightarrow{P} 0; \tag{6}$$

$$V_{A_0}^{-1} \tilde{A}^T A_0 \xrightarrow{P} 0; \tag{7}$$

$$V_{A_0}^{-1} A^T \tilde{B} \xrightarrow{P} 0. \tag{8}$$

Доведемо (6). Маємо

$$V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T \tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right) = V_{A_0}^{-1} \sum_{j=1}^{m}\left(\tilde{a}_j \tilde{a}_j^T - E\tilde{a}_j \tilde{a}_j^T\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j \geq 0 \\ jp+k \leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k} \tilde{a}_{jp+k}^T - E\tilde{a}_{jp+k} \tilde{a}_{jp+k}^T\right)\right). \tag{9}$$

Використовуючи припущення (ii), знаходимо:

$$E\left\| V_{A_0}^{-1}\cdot \sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}} \left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T - E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T\right)\right\|_F^2 \leqslant \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2 \cdot E\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2} - E\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right)\right)^2 =$$

$$= \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2 \cdot \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \operatorname{var}\left(\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}} \tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right) = \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2 \cdot \sum_{i_1,i_2=1}^{n}\sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}} \operatorname{var}\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right).$$

Із припущення *3)* отримуємо:

$$\operatorname{var}\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right) = E\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right)^2 - \left(E\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right)^2 \leqslant E\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right)^2 \leqslant \sqrt{E\tilde{a}_{jp+k,i_1}^4}\cdot\sqrt{E\tilde{a}_{jp+k,i_2}^4} \leqslant const.$$

Далі, використовуючи співвідношення $\left\|V_{A_0}^{-1}\right\| = \dfrac{1}{\lambda_{\min}\left(V_{A_0}\right)}$, отримуємо оцінку

$$E\left\| V_{A_0}^{-1}\cdot \sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}} \left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T - E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T\right)\right\|_F^2 \leqslant const\cdot\frac{[m/p]+1}{\lambda_{\min}^2\left(V_{A_0}\right)}.$$

Тоді з припущення *4)* маємо: $V_{A_0}^{-1}\cdot \sum_{\substack{j:j\geqslant 0\\ jp+k\geqslant m}} \left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T - E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^T\right) \xrightarrow{P} 0,\quad m\to\infty.$

А отже, $V_{A_0}^{-1}\left(\tilde{A}^T\tilde{A} - V_{\tilde{A}}\right) = \sum_{k=1}^{p} o_P(1) \xrightarrow{P} 0,\quad m\to\infty.$

Доведемо (7). Маємо

$$V_{A_0}^{-1}\tilde{A}^T A_0 = V_{A_0}^{-1}\sum_{j=1}^{m}\tilde{a}_j a_j^{0T} = \sum_{k=1}^{p}\left(V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde{a}_{jp+k}a_{jp+k}^{0T}\right). \tag{10}$$

Оцінимо, із використанням припущень *2)* та *3)*,

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde{a}_{jp+k}a_{jp+k}^{0T}\right\|_F^2 \leqslant \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}E\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde{a}_{jp+k,i_1}a_{jp+k,i_2}^{0T}\right)^2 =$$

$$= \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(a_{jp+k,i_2}^{0T}\right)^2 E\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\right)^2\right) \leqslant \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot const\cdot\left\|A_0\right\|_F^2 \leqslant const\cdot\frac{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)}{\lambda_{\min}^2\left(V_{A_0}\right)}.$$

Тоді з припущення *4)* випливає, що $V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\tilde{a}_{jp+k}a_{jp+k}^{0T} \xrightarrow{P} 0,\quad m\to\infty.$ А отже, $V_{A_0}^{-1}\tilde{A}^T A_0 = \sum_{k=1}^{p}o_P(1)\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$

Доведемо (8). Маємо

$$V_{A_0}^{-1}A^T\tilde{B} = V_{A_0}^{-1}\sum_{j=1}^{m}a_j\tilde{b}_j^T = \sum_{k=1}^{p}\left(V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k}\tilde{b}_{jp+k}^T\right). \tag{11}$$

Тоді з припущень *2)–4)* знаходимо:

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k}\tilde{b}_{jp+k}^T\right\|_F^2 \leqslant \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{d}E\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k,i_1}\tilde{b}_{jp+k,i_2}^T\right)^2 = \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{d}\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left(a_{jp+k,i_1}\right)^2E\left(\tilde{b}_{jp+k,i_2}^T\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\cdot const\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left(\left(a_{jp+k,i_1}^0\right)^2 + 2a_{jp+k,i_1}^0\tilde{a}_{jp+k,i_1} + \left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\right)^2\right) \leqslant const\cdot\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^2\left(\left\|A_0\right\|_F^2 + m\right) \leqslant$$

$$\leqslant const\cdot\frac{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)+m}{\lambda_{\min}^2\left(V_{A_0}\right)} \to 0,\quad m\to\infty.$$

Отже, $V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}a_{jp+k}\tilde{b}_{jp+k}^T \xrightarrow{P} 0,\quad m\to\infty.$ Разом із тим $V_{A_0}^{-1}A^T\tilde{B} = \sum_{k=1}^{p}o_P(1)\xrightarrow{P}0,\quad m\to\infty.$

Зауваження 1. Так само як і у [2] можна отримати порядок збіжності оцінки $\hat{X}$ до істинного значення X_0.

$$\left\|\hat{X} - X_0\right\|_F = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)}+\sqrt{m}}{\lambda_{\min}\left(V_{A_0}\right)}\cdot O_P(1),\quad m\to\infty.$$

СТРОГА КОНСИСТЕНТНІСТЬ. Розглянемо наступну лему, яка є різновидом нерівності Розенталя [7].

Лема 1 *(Нерівність Розенталя для p-залежних випадкових векторів)* Нехай $\{\xi_i, i\geqslant 1\}$ – послідовність p-залежних випадкових векторів з $\mathbb{R}^n$, $E\xi_i = 0, i\geqslant 1$. Тоді:

а) для будь-якого $\gamma\geqslant 2$ та для всіх $m\geqslant 1$ має місце нерівність

$$E\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i\right\|^{\gamma}\leqslant c_1(\gamma,p,n)\cdot\max\left\{\left(\sum_{i=1}^{m}E\|\xi_i\|^2\right)^{\gamma/2},\sum_{i=1}^{m}E\|\xi_i\|^{\gamma}\right\};$$

б) для будь-якого $\gamma\geqslant 2,$ для всіх $m\geqslant 1$ та для будь-якого набору чисел $\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}\subset\mathbb{R}$ має місце нерівність

$$E\left\|\sum_{i=1}^{m}a_i\xi_i\right\|^{\gamma}\leqslant c_2(\gamma,p,n)\cdot\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^2\right)^{\gamma/2}\cdot\sup_{1\leqslant i\leqslant m}E\|\xi_i\|^{\gamma};$$

де $c_1(\gamma,p,n)$ та $c_2(\gamma,p,n)$ не залежать від m та від вибору чисел $a_1,a_2,\ldots,a_m$.

Для доведення строгої консистентності на похибки вимірювання накладаються такі умови:

5) $\exists r>2: E\,|\,\tilde{a}_{ij}\,|^{2r}\leqslant const; E\left|\tilde{b}_{ij}\right|^{r}\leqslant const,\ \ i\geqslant 1,\ \ 1\leqslant j\leqslant n,\ \ 1\leqslant l\leqslant d.$

Для істинних значень припускається виконання наступної умови.

6) Для числа r з умови (vi^0) та деякого $m_0\geqslant 1$ виконується:

$$\sum_{m=m_0}^{\infty}\left(\frac{\left(\lambda_{\max}\left(V_{A_0}\right)\right)^{r/2}}{\lambda_{\min}^{r}\left(V_{A_0}\right)}+\frac{m^{r/2}}{\lambda_{\min}^{r}\left(V_{A_0}\right)}\right)<\infty.$$

Зауваження 2. Розглядати ряд, починаючи з $m=m_0$, потрібно внаслідок того, що матриця V_{A_0} гарантовано буде виродженою для малих значень m, зокрема для $m<n$.

Зауваження 3. Умови *5)* та *6)* є посиленим варіантом умов *3)* та *4)*, відповідно.

Зауваження 4. Умова *6)* з числом $r>2$ виконується, зокрема, коли $m^{-1}V_{A_0}=m^{-1}\sum_{i=1}^{m}a_i^0a_i^{0T}$ прямує до деякої додатно визначеної матриці, коли $m\to\infty$.

Теорема 2 *(Строга консистентність)* Нехай виконуються припущення 1), 2), 5) та 6). Тоді

$$\hat{X}\xrightarrow{P1}X_0,\ m\to\infty.$$

Доведення. Використаємо представлення (5). Тоді для строгої консистентності достатньо довести, що збіжність у (6)–(8) буде майже напевно.

Доведемо, що (6) збігається майже напевно. Використовуючи представлення (9), достатньо показати, що для будь-якого $k,1\leqslant k\leqslant p,$ виконується

$$V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\xrightarrow{P1}0,\quad m\to\infty. \tag{12}$$

Для цього оцінимо момент порядку r для числа $r>2$ з умови (v) за допомогою леми 1 маємо:

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\right\|_F^{r}\leqslant\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^{r}E\left\|\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\right\|_F^{r}\leqslant$$

$$\leqslant const\cdot\left\|V_{A_0}^{-1}\right\|^{r}\max\left(\left(\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{2}\right)^{r/2},\ \sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{r}\right).$$

Використовуючи припущення (ii) та (v), розглянемо окремо:

$$E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{r}=E\left(\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\geqslant m}}\left(\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}-E\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right)^2\right)^{r/2}\leqslant$$

$$\leqslant const\cdot E\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^{r}+r\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^{r-1}E\left|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right|\right)=$$

$$=const\cdot\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\left(E\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^{r}+rE\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^{r-1}E\left|\tilde{a}_{jp+k,i_1}\tilde{a}_{jp+k,i_2}\right|\right)=$$

$$\leqslant const\cdot\sum_{j,k=1}^{n}\left(\sqrt{E\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\,|^{2r}}\sqrt{E\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^{2r}}+r\sqrt{E\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\,|^{2r-2}}\sqrt{E\,|\,\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^{2r-2}}E\sqrt{|\,\tilde{a}_{jp+k,i_1}\,|^2|\,\tilde{a}_{jp+k,i_2}\,|^2}\right)\leqslant const.$$

Далі знаходимо

$$E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{2}\leqslant\left(E\left\|\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right\|_F^{r}\right)^{\frac{2}{r}}\leqslant const.$$

Отже,

$$E\left\|V_{A_0}^{-1}\cdot\sum_{\substack{j:j\geq 0\\ jp+k\leq m}}\left(\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}-E\tilde{a}_{jp+k}\tilde{a}_{jp+k}^{T}\right)\right\|_F^{r}\leqslant const\cdot\frac{m^{r/2}}{\lambda_{\min}^{r}\left(V_{A_0}\right)}.$$

Тоді, використовуючи припущення *6)*, за лемою Бореля-Кантеллі отримуємо (12). А отже, (6) збігається майже напевно.

Доведемо, що (7) *збігається майже напевно.* Використовуючи представлення (10), достатньо показати, що для будь-якого $k, 1 \leqslant k \leqslant p$, виконується

$$V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} \tilde{a}_{jp+k} a_{jp+k}^{0T} \xrightarrow{P1} 0, \quad m \to \infty. \tag{13}$$

За допомогою леми 1 оцінимо момент

$$E \left\| V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} \tilde{a}_{jp+k} a_{jp+k}^{0T} \right\|_F^r \leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r E \left\| \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} \tilde{a}_{jp+k} a_{jp+k}^{0T} \right\|_F^r \leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r const \cdot \left(\sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} \left\| a_{jp+k}^{0} \right\|^2 \right)^{r/2} \sup_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} \left\| \tilde{a}_{jp+k} \right\|^r \leqslant$$

$$\leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r const \cdot \left\| A_0 \right\|_F^r \leqslant const \cdot \frac{\left(\lambda_{\max}\left(V_{A_0} \right) \right)^{r/2}}{\lambda_{\min}^r \left(V_{A_0} \right)}.$$

Тому з припущення (vi) за лемою Бореля-Кантеллі випливає (13), а разом із тим (7) збігається майже напевно.

Доведемо, що (8) збігається майже напевно. Використовуючи представлення (11), достатньо показати, що для будь-якого $k, 1 \leqslant k \leqslant p$, виконується

$$V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \xrightarrow{P1} 0, \quad m \to \infty. \tag{14}$$

Використовуючи припущення *2)* та лему 1, оцінимо момент

$$E \left\| V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r E \left\| \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant$$

$$\leqslant const \cdot \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r \max \left(\left(\sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} E \left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^2 \right)^{r/2}, \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} E \left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \right).$$

Далі, за припущеннями *2)* та *5)* оцінимо для $r \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} E \left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} E \left\| a_{jp+k} \right\|^r E \left\| \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|^r \leqslant const \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} \left(\left\| a_{jp+k}^{0} \right\|^r + E \left\| \tilde{a}_{jp+k} \right\|^r \right) \leqslant const \cdot \left(\left\| A_0 \right\|_F^r + m \right).$$

Тоді

$$\left(\sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} E \left\| a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^2 \right)^{r/2} \leqslant \left(const \left(\left\| A_0 \right\|_F^2 + m \right) \right)^{r/2} \leqslant const \cdot \left(\left\| A_0 \right\|_F^r + m^{r/2} \right).$$

Остаточно отримуємо, що

$$E \left\| V_{A_0}^{-1} \cdot \sum_{\substack{j: j \ge 0 \\ jp+k \le m}} a_{jp+k} \tilde{b}_{jp+k}^{T} \right\|_F^r \leqslant const \left\| V_{A_0}^{-1} \right\|^r \left(\left\| A_0 \right\|_F^r + m^{r/2} \right) \leqslant const \left(\frac{\left(\lambda_{\max}\left(V_{A_0} \right) \right)^{r/2}}{\lambda_{\min}^r \left(V_{A_0} \right)} + \frac{m^{r/2}}{\lambda_{\min}^r \left(V_{A_0} \right)} \right).$$

Отже, за припущенням *6)* справджується (14), а тому збіжність у (8) буде майже напевно.

ВИСНОВКИ. Доведено слабку та строгу консистентність покращеної оцінки найменших квадратів для лінійної множинної моделі регресії з похибками у змінних за умови, коли ці похибки є *p*-залежними. Цікавим висновком є те, що умови на моменти похибок та істинні значення регресорів можуть бути взяті такими самими, як і у випадку повністю незалежних похибок. Подальший інтерес для дослідження становитьзнаходження умов асимптотичної нормальності цієї оцінки для такої моделі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1988. 2. Сенько І.О. Консиситентність покращеної оцінки найменших квадратів у векторній лінійній моделі з похибками вимірювання // Український математичний журнал. – 2012. – №11. 3. Carroll R.J., Ruppert D., and Sefanski L.A. Measurement Error in Nonlinear Models. – London. – 1995. 4. Fuller W.A. Measurement Error Models. – New York. – 1987. 5. Gallo P.P. Consistency of regression estimates when some variables are subject to error // Comm. Statist. B-Theory Methods. – 1982. – №11. 6. Kukush A., Markovsky I., and Van Huffel S. Consistency of the structured total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model // Journal of Statistical Planning and Inference. – 2005. – №2. 7. Rosenthal H.P. On the subspaces of Lp(p>2) spanned by sequences of independent random variables // Israelian Journal of Mathematics. – 1970. – №4.

Надійшла до редколегії 31.10.12

И. Сенько, асп

СВОЙСТВА УЛУЧШЕНОЙ ОЦЕНКИ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЛИНЕЙНОЙ ВЕКТОРНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ ПРИ НАЛИЧКИ ЗАВИСИМЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ В ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрена улучшенная оценка наименьших квадратов для множественной векторной линейной модели с погрешностями в переменных для случая p-зависимых погрешностей. Доказана теорема о слабой и строгой консистентности этой оценки.

I.Senko, PhD graduate

PROPERTIES OF ADJUSTED LEAST SQUARES ESTIMATOR IN A LINEAR VECTOR ERRORS-IN-VARIABLES MODEL WITH DEPENDENT ERRORS

Adjusted least squares estimator for multivariate vector linear errors-in-variables model under assumption of p-dependence of errors is considered. Theorems about weak and strong consistency of this estimator are proved.

УДК 519.21

Н. Стефанська, асп.
КНУ імені Тараса Шевченка, Київ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЛАПЛАСА І ПУАССОНА В КУЛІ

Введено невласний інтеграл Рімана від необмеженої випадкової функції. Розв'язано задачу Діріхле для стохастичних рівнянь Лапласа і Пуассона в кулі, керованих загальними стохастичними мірами. Отримано розв'язки цих рівнянь.

ВСТУП. В [1] розглянуто задачу Діріхле для рівнянь Лапласа і Пуассона в R^3, розв'язки якої записані за допомогою функції Гріна. У цій статті розглядаються стохастичні рівняння Лапласа і Пуассона.

Позначимо через $L_0(\Omega,F,P)$ множину дійснозначних випадкових величин, заданих на довільному повному ймовірносному просторі (Ω,F,P) (точніше кажучи, їх класів P-еквівалентності). Збіжність в L_0 – це збіжність за ймовірністю, тобто збіжність за семінормою $\|\eta\| = \sup\{\delta : P\{|\eta| > \delta\} > \delta\}$.

Нехай $D = D(R^d)$ – множина всіх нескінченно диференційовних функцій $\varphi : R^d \to R$, $d \geq 2$, з компактним носієм.

Означення 1 [3]. *Узагальненою випадковою функцією (у. в. ф.)* називається лінійне неперервне відображення $\xi : D \to L_0$. Множину таких у. в. ф. позначимо $D_r^{'} = D_r^{'}(R^d)$.

Нехай $\mathrm{B} = \mathrm{B}(R^d)$ – σ-алгебра борельових підмножин простору R^d, $S_d = \{|s| = 1\}$ – одинична сфера в R^d, $P = P(S_d)$ – множина визначених і неперервних на одиничній сфері функцій $\psi : S_d \to R$.

Означення 2. *Стохастичною мірою* називається σ-адитивне відображення $\mu : \mathrm{B} \to L_0$.

У [10] розглянуто властивості таких мір, а також визначено та досліджено інтеграл вигляду $\int_A f d\mu$, де $A \in \mathrm{B}$, f – дійсна вимірна функція. Будується він стандартним чином з використанням наближення простими функціями. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна дійсна функція є інтегрованою за μ. Для такого інтеграла має місце аналог теореми Лебега про мажоровану збіжність.

Теорема 1 [3]. Стохастична міра μ визначає у. в. ф. $\dot{\mu}$ за таким правилом:

$$\left(\dot{\mu},\varphi\right) = \int_{R^d} \varphi(x) d\mu(x),\ \varphi \in D. \tag{1}$$

Означення 3 [10]. Нехай $M \subset R^d$ – вимірна за Жорданом множина, $\xi : M \times \Omega \to R$ – вимірна випадкова функція. Будемо говорити, що ξ *інтегрована (за Ріманом) на* M, якщо для будь-якої послідовності розбиття множини $M = \bigcup_{1\leq k\leq k_n} M_k$, $n \geq 1$, $\max_k diamM_k \to 0$ при $n \to \infty$, $x_k \in M_k$, існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$P\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \xi(x_k) m(M_k) = \int_M \xi(x) dx.$$

Тут m позначає міру Жордана, в кожному розбитті множини M_k, $1 \leq k \leq k_n$, вимірні за Жорданом і можуть перетинатись тільки по своїх межах.

Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними (СДРЧП) описують різні процеси в фізичних і біологічних моделях при наявності випадкового впливу.

Для знаходження узагальненого розв'язку рівняння записують в інтегральній (слабкій формі) з наявністю основної функції із відповідного простору і деякого стохастичного інтеграла. У [5] розглянуто параболічні СДРЧП, де в інтегральному записі в якості стохастичної частини використано інтеграл Іто по відрізку часу, а по просторових змінних похідні брались звичайним чином. Аналогічні рівняння в областях вивчені в [9].

У [13] побудовано стохастичний інтеграл по мартингальній мірі $\mathrm{M}_t(A)$, $A \subset R^d$, $t \geq 0$. Рівняння, яке записане в слабкій формі, містило інтеграл по $\mathrm{M}(dx,dt)$, а шуканими об'єктами були у. в. ф., визначені на основних функціях Шварца в R^{d+1}. Узагальнення цього інтеграла для розв'язку хвильового рівняння в багатовимірному випадку наведено в [8]. М'які розв'язання стохастичного рівняння Пуассона розглянуто в [11].

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ.

Означення 4. Випадкова функція $\xi : K \times \Omega \to R$ називається *обмеженою за ймовірністю* на множині K, якщо

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{x\in K} P\{|\xi(x)| > c\} = 0 \text{ або ж } \lim_{c\to\infty} \sup_{x\in K} \|c\xi(x)\| = 0.$$

Нехай на обмеженій множині $K \subset R^d$ задано необмежену допустиму випадкову функцію $\xi : K \times \Omega \to R$. Це означає, що існує така множина $Z \subset K$, $m(Z) = 0$, що поза будь-яким її околом функція $\xi(x)$ обмежена за ймовірністю. Візьмемо довільну послідовність жорданових множин $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K$ (вичерпні множини) таких, що будь-яка доповнююча множина $K \setminus K_n$ містить строго Z і сама міститься в деякому ε_n-околі множини Z, причому $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Якщо для інтегралів $I_n(\xi) = \int_{K_n} \xi(x) dx$ при $n \to \infty$ існує границя за ймовірністю, яка не залежить від вибору послідовності множин K_n, то будемо говорити, що *невласний інтеграл* $I(\xi)=\int_K \xi(x)dx$ *існує*, або *збігається за ймовірністю*, і покладемо

$$I(\xi)=\int_K \xi(x)dx = P\lim_{n\to\infty}\int_{K_n}\xi(x)dx .$$

Для дійсної функції дане визначення співпадає з визначенням у звичайному сенсі невласного інтеграла Рімана [2].

Побудова вичерпної послідовності володіє такою властивістю: якщо множина Z замкнена, $K_1\subset K_2\subset\ldots$ і $K_1^{'}\subset K_2^{'}\subset\ldots$ – дві вичерпні послідовності, то будь-яка множина K_n із першої послідовності міститься в деякій множині $K_{n'}^{'}$ із другої послідовності, і навпаки. Тому, маючи дві вичерпні послідовності множин, завжди можна побудувати змішану вичерпну послідовність $K_{i_1}\subset K_{i_1^{'}}^{'}\subset K_{i_2}\subset K_{i_2^{'}}^{'}\subset\ldots$. Звідси слідує, що із наявності границі за ймовірністю інтегралів вигляду $I_n(\xi)=\int_{K_n}\xi(x)dx$ по кожній вичерпній послідовності вже існує збіг цих границь: границя за ймовірністю по змішаній послідовності має співпадати із границями за ймовірністю по послідовностях $K_1\subset K_2\subset\ldots$ і $K_1^{'}\subset K_2^{'}\subset\ldots$, звідки випливає рівність цих границь.

Теорема 2. Нехай необмежена випадкова функція ξ інтегровна на обмеженій множині K в невласному сенсі, $f:K\to R$ – невипадкова обмежена рівномірно неперервна на K функція. Тоді $f\xi$ інтегровна на K в невласному сенсі**.**

Доведення. Візьмемо послідовність вичерпних множин $K_n\uparrow K$, на кожній з яких функція ξ обмежена за ймовірністю. З означення обмеженості функції f $\exists C>0:\left|f(x)\right|\le C$. Згідно леми 3.6 [10] отримаємо, що $\left\|\int_{K_n\setminus K_l} f(x)\xi(x)\right\|\le 16\sup_{A\subset(K_n\setminus K_l)}\left\|C\int_A\xi(x)dx\right\|$. Якщо ліва частина цієї нерівності не прямує до нуля при $n,l\to\infty$, то побудуємо послідовність множин $E_j\uparrow K$, $j\to\infty$, таку для якої, що інтеграли по цих множинах від ξ утворюють нефундаментальну послідовність. □

Теорема 3. Нехай необмежена випадкова функція ξ інтегровна на обмеженій множині K в невласному сенсі, $f_n:K\to R$ – невипадкові обмежені рівномірно неперервні на K такі функції, що $\sup_{n\ge1,x\in K}\left|f_n(x)\right|=C<\infty$, $\sup_{x\in K_l}\left|f_n(x)\right|\to 0$, $K_l\subset K$, ξ інтегровна на кожній K_l. Тоді $\int_K f_n(x)\xi(x)dx\xrightarrow{P}0$, $n\to\infty$.

Доведення. Припустимо, що твердження невірне. Використовуючи лему 3.7 [10], можна знайти $\varepsilon_0>0$, підпослідовність f_{n_j}, $j\ge 1$, обмежені неперетинні множини $K_j\subset K\setminus K_l$ для яких $\left\|\int_{K_j} f_{n_j}(x)\xi(x)\right\|>\varepsilon_0$. Лема 3.6 [10] показує, що знайдуться такі обмежені неперетинні множини $A_j\subset K\setminus K_l$ для яких $\left\|C\int_{A_j}\xi(x)dx\right\|>\frac{\varepsilon_0}{16}$. Остання нерівність суперечить інтегровності у невласному сенсі ξ на K. □

Інтегровна на обмеженій множині K необмежена випадкова функція ξ породжує у. в. ф. за правилом

$$(\xi(x),\varphi(x))=\int_K\xi(x)\varphi(x)dx,\ \varphi\in D. \tag{2}$$

Множину таких функцій позначимо через $D_r^o=D_r^0(R^d)$.

Теорема 4. Нехай G – довільна множина з $\mathrm{B}(R^d)$, $\beta=\beta(G)$ – σ-алгебра борельових підмножин на G, μ – стохастична міра на (G,β), $K\subset R^d$ – обмежена множина. Необмежена (невипадкова) функція $f(x,g):K\times G\to R$ вимірна, інтегровна за Ріманом по dx на K в невласному сенсі при кожному фіксованому $g\in G$, $\left|f(x,g)\right|\le h(g)$ і $\int_K\left|f(x,g)\right|dx\le h_1(g)$ для функцій $h,h_1:G\to R$, які є інтегровними за μ на G. Тоді випадкова функція $\eta(x)=\int_G f(x,g)d\mu(g)$ інтегровна на K в сенсі означення 4 і $\int_K dx\int_G f(x,g)d\mu(g)=\int_G d\mu(g)\int_K f(x,g)dx$.

Доведення. Внутрішній інтеграл в правій частині існує за умовою. За теоремою 7.3.5 [12] існує внутрішній інтеграл в лівій частині. Візьмемо послідовність вичерпних множин $K_n\uparrow K$. На кожній із множин K_n функція f є обмеженою. За теоремою 4.1 [10] маємо $\int_{K_n}dx\int_G f(x,g)d\mu(g)=\int_G d\mu(g)\int_{K_n}f(x,g)dx$. Тепер використовуємо аналог теореми Лебега і умову обмеженості функцією h_1. □

Означення 5. Нехай $t=\varphi(u):R^k\to R^d$ – взаємно однозначне відображення, що визначене на замкнутій жордановій множині G, $G\subset R^k$. Випадкова функція $\xi(t)$ визначена і неперервна на T, $T=t(G)\subset R^d$. Візьмемо довільне розбиття множини G, $G=\bigcup_i B_i$, $i\ge1$, $\max_i diamB_i\to 0$ при $i\to\infty$, $\tau_i\in B_i$. Розглянемо відображення $\tau_i+\Delta u\to\varphi(\tau_i)+\varphi'(\tau_i)\Delta u$. Тоді $T=\bigcup_i E_i$, E_i – образи множин B_i, E_i – жорданові множини. Будемо говорити, що ξ *інтегровна (за Ріманом) по поверхні* T, якщо існує границя за ймовірністю інтегральних сум

$$P\lim_{i\to\infty}\sum_i\xi(\varphi(\tau_i))\left\|\left[\frac{d\varphi(\tau_i)}{du_1},\ldots,\frac{d\varphi(\tau_i)}{du_d}\right]\right\|\left|B_i\right|=\int_G\xi(\varphi(u))\left\|\left[\frac{d\varphi(u)}{du_1},\ldots,\frac{d\varphi(u)}{du_d}\right]\right\|du=\int_T\xi(t)d\sigma_t.$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ. Нехай μ – стохастична міра на борельових підмножинах одиничної сфери $\{|t|=1\}$ в R^d. Позначимо $d\sigma_t$ – елемент площі сфери в R^d, $\omega_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ – площа одиничної сфери в R^d.

Розглянемо задачу Діріхле для стохастичного рівняння Лапласа в кулі

$$\Delta\eta(x)=0\,,\ |x|<1,\ \eta=\dot{\mu}\ \text{на множині}\ \{|x|=1\} \tag{3}$$

відносно невідомої вимірної випадкової функції $\eta(x)$. Рівняння (3) в слабкому сенсі має вигляд

$$(\eta(x),\Delta\varphi(x))=0\,,\ |x|<1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\}\,,\ \varphi\in D\,, \tag{4}$$

$$P\lim_{r\to 1-}\int_{|t|=1}\eta(rt)\psi(t)\,d\sigma_t=\int_{|t|=1}\psi(t)\,d\mu(t)\,,\ \psi\in P\,. \tag{5}$$

Теорема 5. Функція $\eta(x)=\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)$ є розв'язком задачі (4)–(5).

Доведення. Розглянемо властивості випадкової функції $\eta(x)$. Для кожного x, $|x|<1$, підінтегральна функція обмежена і неперервна, тому інтеграл визначено. Перевіримо інтегровність $\eta(x)$ за Ріманом у невласному сенсі. Візьмемо зростаючі вимірні за Жорданом многочлени K_n, $K_n\subset K_{n+1}$, $K_n\subset\{|x|<1\}$, $\bigcup\limits_{n\ge1}K_n=\{|x|<1\}$. На кожній K_n функція $\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}$ обмежена по множині $|s|=1$, тобто $K_n\subset\{|x|\le 1-\delta_n\}$, $\delta_n\to 0+$. Для $B_k=K_n\setminus K_{n-1}$ маємо перевірити збіжність ряду

$$\sum_{k\ge1}\int\limits_{B_k}\eta(x)dx=\frac{1}{\omega_d}\sum_{k\ge1}\int\limits_{B_k}dx\int\limits_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)\overset{(I)}{=}\frac{1}{\omega_d}\sum_{k\ge1}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\int\limits_{B_k}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\overset{(II)}{=}$$

$$=\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\sum_{k\ge1}\int\limits_{B_k}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx=\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\int\limits_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx.$$

Згідно теореми 4.1 [10] на кожній B_k зміна порядку інтегрування законна, тому перехід (I) справедливий. Друга рівність очевидна, так як зовнішній інтеграл не залежить від k. Останній інтеграл є обмеженою функцією. Для $|s|=1$ маємо

$$\int\limits_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\le\int\limits_{|x|<1}\frac{2}{|s-x|^{d-1}}dx\le\int\limits_{|s-x|<2}\frac{2}{|s-x|^{d-1}}dx=4\omega_d<\infty\,. \tag{6}$$

Отже, $\eta(x)$ – інтегровна за Ріманом у невласному сенсі на $\{|x|<1\}$ і за теоремою 2 породжує у. в. ф.

Доведемо гармонічність функції $\eta(x)$ (як узагальненого лінійного функціонала). Маємо:

$$(\Delta\eta(x),\varphi(x))=(\eta(x),\Delta\varphi(x))=\int\limits_{|x|<1}\eta(x)\Delta\varphi(x)=\int\limits_{|x|<1}\Delta\varphi(x)\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)\overset{(I)}{=}$$

$$=\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\int\limits_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx\overset{(II)}{=}\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\int\limits_{|x|<1}\varphi(x)\Delta\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\overset{(III)}{=}\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\times 0=0.$$

В (I) ми використали можливість перестановки порядку інтегрування, яка пояснюється так. Для кожного $\delta>0$ є потрібна в теоремі 4 обмеженість, і ми маємо

$$\int\limits_{|x|\le1-\delta}\eta(x)\Delta\varphi(x)dx=\int\limits_{|x|\le1-\delta}\Delta\varphi(x)dx\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\mu(s)=\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\int\limits_{|x|\le1-\delta}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx.$$

За теоремою 2 для інтегровної за Ріманом функции η інтегровною буде $\eta\Delta\varphi$. При $\delta\to0$ перший вираз прямує до $\int\limits_{|x|<1}\eta(x)\Delta\varphi(x)dx$, а останній за аналогом теореми Лебега – до $\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}d\mu(s)\int\limits_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx.$ Використовуючи нерівність (6), знаходимо $\int\limits_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}\Delta\varphi(x)dx\le C\int\limits_{|x|<1}\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}dx\le 4\omega_d C.$

Рівність (II) справедлива завдяки формулі Гріна (див. [7], гл. 4, п. 4.52) (та нульовому граничному значенні φ). Функція $\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}$ гармонічна (див. п. 4.56д [7]). Скориставшись означенням гармонічної функції, отримаємо перехід (III). Залишилось перевірити граничну умову. За теоремою 1.10 [6] для неперервної на одиничній сфері функції f при $|x_0|=1$ справджується рівність

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\omega_d}\int\limits_{|s|=1}f(s)\frac{1-|x|^2}{|s-x|^d}d\sigma_s=f(x_0),|x_0|=1. \tag{7}$$

У данному випадку для $\psi \in P$, при $r \to 1-$, маємо

$$\lim_{r\to 1-}\int_{|t|=1}\eta(rt)\psi(t)d\sigma_t = \lim_{r\to 1-}\frac{1}{\omega_d}\int_{|t|=1}\psi(t)d\sigma_t\int_{|s|=1}\frac{1-|rt|^2}{|s-rt|^d}d\mu(s)\overset{(I)}{=}\lim_{r\to 1-}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|t|=1}\frac{1-|rt|^2}{|s-rt|^d}\psi(t)d\sigma_t\overset{(II)}{=}$$

$$=\lim_{r\to 1-}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|t|=1}\frac{1-r^2}{|rs-t|}\psi(t)d\sigma_t\overset{(III)}{=}\lim_{r\to 1-}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|t|=1}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)d\sigma_t.$$

За теоремою (4) зміна порядку інтегрування (I) виконується. В (II) використано, що $|s-rt|=|rs-t|$, при $|t|=|s|=1$. При фіксованому s, $rs=x$, $r=|x|$ справедлива рівність (III).

Гармонічна функція набуває найбільше значення на сфері. Оскільки $\psi \in P$, тоді підінтегральна функція $\frac{1}{\omega_d}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)$ обмежена.

Отже, маємо $\left|\frac{1}{\omega_d}\int_{|t|=1}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)d\sigma_t\right| \le \max_t|\psi(t)|\frac{1}{\omega_d}4\omega_d = 4C, C=const.$

За аналогом теореми Лебега і рівністю (7) справджується співвідношення

$$P\lim_{r\to 1-}\frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}d\mu(s)\int_{|t|=1}\frac{1-|x|^2}{|t-x|^d}\psi(t)d\sigma_t = \frac{1}{\omega_d}\int_{|s|=1}\psi(s)d\mu(s).$$

Нехай ν – стохастична міра на борельових підмножинах відкритої кулі $|x|<1$ в R^d, $\dot{\nu}$ – у. в. ф., яка визначається аналогічно за правилом $\left(\dot{\nu},\varphi\right)=\int_{|x|<1}\varphi(x)d\nu(x)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\}$, $\varphi\in D$.

Розглянемо задачу Діріхле для стохастичного рівняння Пуассона в кулі вигляду

$$\Delta\eta(x) = -\dot{\nu}(x),\ |x|<1,\ \eta=0 \text{ на множині } \{|x|=1\}, \tag{8}$$

яка в слабкому сенсі запишеться наступним чином

$$\left(\eta(x),\Delta\varphi(x)\right) = -\int_{|x|<1}\varphi(x)d\nu(x),\ |x|<1,\ \operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\},\ \varphi\in D, \tag{9}$$

$$P\lim_{n\to\infty}\int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi_n(y)dy = 0, \tag{10}$$

де $\varphi_n\in D$, $\operatorname{supp}\varphi_n\subset\{1-\varepsilon_n\le|x|\le 1\}$ для $\varepsilon_n\to 0+$, $\varphi_n\to\delta_{\{|y|=1\}}$ при $n\to\infty$ в слабкому сенсі (тобто $\lim_{n\to\infty}\int_{|y|\le 1}\varphi_n(y)f(y)dy = \int_{|y|=1}f(y)d\sigma_y$ для будь-якої неперервної f,

функція $h(x)=\sup_n\left|\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi_n(y)dy\right|$ інтегровна за мірою $d\nu(x)$.

Теорема 6. У. в. ф. η із значеннями в D_r', яка задана рівністю

$$\left(\eta,\varphi(x)\right) = \int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi(y)dy, \tag{11}$$

де $\Im(x,y)$ – функція Гріна для даної області, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|\le 1\}$, $\varphi\in D$, є розв'язком задачі (9), (10).

Доведення. Для функції Гріна справджується нерівність

$$0<\Im(x,y)<\frac{1}{\omega_d|x-y|^{d-2}}, \text{ при } d\ge 3. \tag{12}$$

Тому для $\varphi\le C$ маємо $\left|\int_{|y|<1}\Im(x,y)\varphi(y)dy\right|\le C\int_{|y|<1}\Im(x,y)dy<\infty.$ Вираз в (11) визначено коректно.

Перевіримо виконання рівності (9) для функції η.

Враховуючи умову (11), отримуємо:

$$\left(\eta(x),\Delta_x\varphi(x)\right) = \int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Im(x,y)\Delta_y\varphi(y)dy \overset{(I)}{=} \int_{|x|<1}d\nu(x)\int_{|y|<1}\Delta_y\Im(x,y)\varphi(y)dy \overset{(II)}{=} -\int_{|x|<1}\varphi(x)d\nu(x).$$

Рівність (I) справедлива завдяки відповідній формулі Гріна [7, гл. 4, п. 4.52], (та нульовому граничному значенню φ). В (II) використано, що для функції Гріна в кулі при кожному x в сенсі узагальнених функцій буде $\Delta_y\Im(x,y)=-\delta(x-y)$, де δ − функція Дірака [1,§ 29].

Покажемо виконання граничної умови (10). Для кожного x, $|x|<1$ маємо

$$\int_{|y|\le 1}\Im(x,y)\varphi_n(y)dy = \int_{|y|>1-\delta_n}\Im(x,y)\varphi_n(y)dy.$$

При досить великому n, $|x|<1-\delta_n$, а функція Гріна $\Im(x,y)$ неперервна на області інтегрування. З умови слабкої збіжності $\varphi_n \to \delta_{|y|=1}$ останній інтеграл прямує до $\int\limits_{|y|=1} \Im(x,y)\,d\sigma_y \overset{(I)}{=} \int\limits_{|y|=1} 0\cdot d\sigma_y = 0$. Рівність (I) справедлива, так як функція Гріна рівна нулеві на межі області (див. умову (2), § 29 в [1]). За аналогом теореми Лебега і інтегровністю функції $h(x)$ за мірою $d\nu(x)$ маємо виконання умови (10).

ВИСНОВОК. Побудовано розв'язки (в слабкому сенсі) задачі Діріхле для стохастичних рівнянь Лапласа і Пуассона в одиничній кулі. В записах цих розв'язків використовується інтеграл Рімана від випадкової функції за дійсною мірою і інтеграл від дійсної функції за загальною стохастичною мірою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М., 1981. 2. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2 т. – М., 1983. – Т. 2. 3. Радченко В. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами // Укр. мат. журн. – 2008. – № 12. – С. 1675–1685. 4. Радченко В.Н. Интегралы по общим случайным мерам. – К., 1999. 5. Розовский Б.Л. Эволюционные стохастические системы. – М., 1983. 6. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах– М., 1974. 7. Шилов Г.Е. Математический анализ: Функции нескольких вещественных переменных: В 3 ч. – М., 1972. – Ч. 1-2. 8. Dalang R. Extending martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous SPDE's // Electron. J. Probab. – 1999. – Vol. 4, № 6. – P. 1–29. 9. Kim K. On stochastic partial differential equations with variable coefficients in C^1 domains // Stochastic processes and their applications. – 2004. – V. 112, № 2. – P. 261–283. 10. Radchenko V. Riemann integral of random function and parabolic equation with a general stochastic measure // Теор. ймовірн. та матем. статист. – 2012. – № 87. – С. 163–175. 11. Sanz-Sole M., Torrecilla I. A fractional Poisson equation: existence, regularity and approximations of the solution // Stochastics and Dynamics. – 2009. – Vol. 9, № 4. – P. 519–548. 12. Turpin P. Convexites dans les espaces vectoriels topologiques generaux // Diss. Math. – 1976. – V. 131. – 220 p. 13. Walsh J. An introduction to stochastic partial differential equations // Lect. Notes Math. – 1984. – V. 1180. – P. 236–434.

Надійшла до редколегії 25.02.13

Н. Стефанская, асп.

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА В ШАРЕ**

Введен несобственный интеграл Римана от неограниченной случайной функции. Решена задача Дирихле для стохастических уравнений Лапласа и Пуассона в шаре, управляемыми общими мерами. Получены решения этих уравнений.

N. Stefanska, PhD graduate

**THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR LAPLACE
AND POISSON STOCHASTIC EQUATIONS IN THE BALLS**

The improper Riemann integral of unbounded random function is introduced. The Dirichlet problem for Laplace and Poisson stochastic equations in the balls, driven by general stochastic measure, is solved. Solutions of the considered equations are obtained.

ДО 75-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АНАТОЛІЯ МИХАЙЛОВИЧА САМОЙЛЕНКА

2 січня 2013 року виповнилось 75 років видатному українському математику, академіку Національної академії наук України Анатолію Михайловичу Самойленку.

Народився Анатолій Михайлович в селі Потіївка на Житомирщині. По закінченню середньої школи в місті Малин він вступає на геологічний факультет Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка. Невдовзі серйозне захоплення математикою вносить корективи в подальші життєві плани юнака: він приймає рішення продовжити навчання уже на механіко-математичному факультеті.

У 1960 році А.М. Самойленко з відзнакою закінчує університет і за запрошенням академіка Ю.О. Митропольського вступає до аспірантури Інституту математики АН УРСР. Вибір теми дисертації – "Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з "нерегулярною" правою частиною" був повністю закономірний: саме в той час бурхливо розвивалась, набираючи світової популярності, Київська школа з нелінійної механіки, заснована академіками М.М. Криловим і М.М. Боголюбовим.

По закінченню аспірантури А.М. Самойленко протягом наступних 11 років працює в Інституті математики АН УРСР. Захистивши у 1968 році докторську дисертацію на тему: "Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем", він стає самим молодим в Україні доктором наук.

У період з 1974 по 1987 рік А.М. Самойленко очолює кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка. З його приходом на кафедрі істотно активізується науково-дослідна робота, підготовка кандидатів і докторів наук, а організований ним семінар з диференціальних рівнянь стає відомим не лише в Україні, але й далеко за її межами. У 1978 році Анатолія Михайловича обирають членом-кореспондентом АН УРСР.

Невдовзі, після повернення у 1987 році до Інституту математики АН УРСР, А.М. Самойленко стає його директором і ось уже впродовж 25 років очолює цей провідний математичний центр України. За цей час Анатолій Михайлович зарекомендував себе не лише, як видатний вчений, але й вмілий організатор науки. За його ініціативи та при безпосередній участі в якості голови оргкомітету, було проведено велику кількість авторитетних міжнародних конференцій, серед яких – два Українських математичних конгреси (2001р., 2009р.), в кожному з яких взяли участь більш, ніж півтисячі математиків, як українських, так і закордонних. А.М. Самойленко є головним редактором журналів "Український математичний журнал", "Нелінійні коливання", "Український математичний вісник", "Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка", членом редколегій журналів "Доповіді Національної академії наук України", "Вісник Національної академії наук України", "У світі математики", "Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics", "Miskolc Mathematical Notes", "Georgian Mathematical Journal", "International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations".

Математичний талант і неабиякі організаторські здібності Анатолія Михайловича здобули йому заслужений авторитет і повагу наукової спільноти. Його обрано академіком Національної академії наук України (1995), дійсним членом Європейської академії наук (2002), членом-кореспондентом Accademia Peloritana dei Pericilanti (Мессіна, Сіцилія, 2006),), дійсним членом Наукового товариства імені Т. Шевченка (1996), іноземним членом АН Республіки Таджикистан (2011). З 2006 року і по сьогодні Анатолій Михайлович обіймає відповідальну посаду академіка-секретаря відділення математики НАН України.

Наукові досягнення Анатолія Михайловича широко відомі фахівцям з теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії нелінійних коливань. Він по праву вважається основоположником цілої низки важливих напрямів досліджень в цих класичних розділах математики. Так, у 1965 році він запропонував і обґрунтував новий ефективний метод відшукання періодичних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь, який відомий нині як "чисельно-аналітичний метод Самойленка". Надалі цей метод одержав всесвітнє визнання та глибокий розвиток і широке застосування при вивченні нелінійних крайових задач в багатьох працях як самого автора, так і його учнів, а відповідні результати знайшли своє втілення в монографіях А.М. Самойленка і М.Й. Ронто "Чисельно-аналітичні методи дослідження періодичних розв'язків" (Київ: Наук. думка, 1976 [Англ. пер.: Numerical-analytic methods of investigating periodic solutions. M: Mir, 1980]), "Чисельно-аналітичні методи в теорії крайових задач звичайних диференціальних рівнянь" (Київ: Наук. думка, 1972 [Англ. пер.: Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2000), А.М. Самойленка і Б.П. Ткача "Чисельно-аналітичні методи в теорії періодичних розв'язків рівнянь з частинними похідними" (Київ: Наук. думка, 1992).

У середині 1960-х А.М. Самойленко під впливом класичних праць А.Н. Колмогорова, В.І. Арнольда, М.М. Боголюбова, Ю. Мозера провів інтенсивні і плідні дослідження низки актуальних задач теорії багато-частотних нелінійних коливань, що пов'язані з відомою проблемою малих знаменників. За допомогою методу послідовних замін змінних, що володіє прискореною збіжністю, і техніки зглажування йому вдалося одержати глибокі результати з теорії скінчено-гладких неконсервативних систем нелінійної механіки і, зокрема, довести теореми про випрямлення майже паралельного векторного поля на торі довільної розмірності, про існування лінеаризуючого дифеоморфізму в околі тороїдального многовиду, який замітається квазіперіодичною траєкторією, про звідність лінійних квазіперіодичних систем з майже постійними коефіцієнтами, а також про міру звідних систем цього класу. Ці результати стали складовою частиною широко відомої монографії М.М. Боголюбова, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка "Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике". Киев: Наук. думка, 1969. [Англ. пер.: Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics. Berlin, New York: Springer Verlag, 1976].

Важливе місце в наукових пошуках А.М. Самойленка належить дослідженню актуальних проблем теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем, де ним розроблено ефективний метод дослідження задачі про збереження інваріантних торів при збуреннях. В основу запропонованого ним підходу А.М.Самойленко вклав введене ним же поняття функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі. (У сучасній математичній літературі це поняття відоме як функція Гріна-Самойленка). За допомогою апарату функцій Гріна йому вдалося не лише довести теореми існування стійких і гіперболічних інваріантних торів в рамках теорії збурень, але і одержати оптимальні результати про ступінь їх гладкості, при цьому Анатолій Михайлович розвинув і обґрунтував проективно-ітеративний метод відшукання інваріантних торів у вигляді збіжної послідовності тригонометричних поліномів. Завершенням циклу праць з цього напряму стала монографія А.М. Самойленка "Элементы математической теории многочастотных колебаний" (М.: Наука, 1987 [Англ. пер.: Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991]).

Ще один загально визнаний цикл праць Анатолія Михайловича пов'язаний з теорією систем з імпульсною дією. Першою його працею з цього напряму, що стала широко відомою, є сумісна з А.Д. Мишкісом стаття в журналі "Математичний збірник" за 1967 рік. Особливо активне формування згаданої вище теорії при участі А.М. Самойленка і його учнів відбулося у 1970-80 роках. Монографія А.М. Самойленка і М.О. Перестюка "Диференціальні рівняння з імпульсною дією" є першою в світовій літературі книгою, в якій було викладено широкий спектр результатів, що склали основу теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Згодом, у 1995 році ця монографія була доповнена новими результатами і перевидана англійською мовою у видавництві World Scientific.

Талант і досвід А.М. Самойленка, як вченого і організатора науки, лідера Київської математичної школи яскраво відображаються у його вмінні одночасно керувати дослідницькою роботою відразу в кількох напрямах. Так, у сумісних працях з В.Л. Куликом розроблено теорію знакозмінних функцій Ляпунова для вивчення дихотомії, глобально обмежених розв'язків та інваріантних многовидів лінійних розширень динамічних систем на торі. Глибокі результати отримані Анатолієм Михайловичем спільно з С.І. Трофимчуком з теорії майже періодичних імпульсних систем. Сумісно з О.А. Бойчуком розвинуто теорію нетерових крайових задач для систем з запізненням, рівнянь з імпульсною дією, сингулярно збурених систем, яка отримала ефективне застосування при дослідженні задач про обмежені на всій осі розв'язки неавтономних систем, що володіють властивістю експоненціальної дихотомії на півосях. Ще один напрям досліджень А.М. Самойленка стосується резонансних явищ в багаточастотних системах, включаючи системи з повільно змінними параметрами. Виведені ним витончені оцінки осцилюючих інтегралів, які виникають при вивченні процесу проходження траєкторією резонансних підмножин фазового простору, стали основою для одержання у співавторстві з Р.І. Петришиним нових глибоких результатів з обґрунтування методу усереднення в коливних системах з числом частот більше двох. Розробка математичного апарату для вивчення зліченних систем диференціальних рівнянь в просторі обмежених числових послідовностей здійснена в сумісних дослідженнях А.М. Самойленка і Ю.В. Теплинського. В останнє десятиліття Анатолієм Михайловичем і О.М. Станжицьким було одержано низку важливих результатів в новій галізу, що лежить на перетині теорії ймовірностей і диференціальних рівнянь, – якісній теорії стохастичних диференціальних рівнянь, а в сумісних працях з А.К. Прикарпатським і Я.А. Прикарпатським висвітлено нові алгебро-аналітичні аспекти досить широкого класу динамічних систем і їх збурень. Всі згадані вище дослідження А.М. Самойленка і його учнів знайшли своє застосування в їх сумісних монографіях.

Не може не викликати захоплення той факт, що загальне число наукових публікацій ювіляра складає понад шістсот і включає в себе три десятки монографій, 15 підручників і навчальних посібників. Його учнями захищено 33 докторські і 82 кандидатські дисертації. Особливу повагу заслуговує педагогічна діяльність професора А.М. Самойленка в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України "КПІ" та інших вищих навчальних закладах. Володіючи яскравим лекторським талантом, Анатолій Михайлович завжди справляв незабутнє враження на слухачів своїм вмінням чітко, ясно і емоційно викласти матеріал розроблених ним оригінальних лекційних курсів.

Багаторічна наукова, педагогічна і громадська діяльність А.М. Самойленка відмічена низкою високих нагород і звань. Він нагороджений орденами Дружби народів (1984), "За заслуги" ІІІ ступеня (2003), "Князя Ярослава Мудрого" V ступеня (2008),), "Князя Ярослава Мудрого" IV ступеня (2013), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987); є лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської премії імені М. Островського (1968), премій Національної академії наук України імені М.М. Крилова (1981), М.М. Боголюбова (1998), М.М. Лаврентьєва (2000), М.В. Остроградського (2004), Ю.О. Митропольського (2009); удостоєний звань "Заслужений діяч науки і техніки України" (1998), "Соросівський професор" (1996); є почесним доктором Київського національного університету імені Тараса Шевченка та інших вищих навчальних закладів України.

Анатолій Михайлович повний творчих задумів і оригінальних ідей. Бажаємо йому міцного духовного і фізичного здоров'я, нових успіхів, яскравої і плідної діяльності на славу математики.

М. Городній, І. Парасюк, М. Перестюк, В. Самойленко, О. Станжицький

ДО 60-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ІГОРЯ ОСТАПОВИЧА ПАРАСЮКА

18 січня 2013 року виповнилось 60 років від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Ігоря Остаповича Парасюка.

Ігор Остапович народився у місті Львів у сім'ї видатного математика і фізика-теоретика академіка НАН України Остапа Степановича Парасюка.

Життєвий і науковий шлях І.О. Парасюка тісно пов'язано з Київським національним університетом імені Тараса Шевченка. Після закінчення у 1975 році механіко-математичного факультету він вступає до аспірантури при кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь.

На кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка І.О. Парасюк працює з 1978 року на посадах асистента (1978–1986 рр.), доцента (1986–1991, 1994–1996 рр.), а з 1996 року – на посаді професора.

Окрім викладацької діяльності Ігор Остапович веде активні наукові пошуки. Перші праці І.О. Парасюка були присвячені обґрунтуванню методу Гальоркіна в теорії інваріантних торів нелінійних систем, дослідженню одновимірного оператора Шредінгера з гладким квазіперіодичним потенціалом та лінійних квазіперіодичних гамільтонових систем.

У 1979 році під керівництвом А.М. Самойленка Ігор Остапович захищає кандидатську дисертацію "Побудова і дослідження квазіперіодичних розв'язків деяких класів диференціальних рівнянь".

Згодом коло його наукових інтересів розширюється, зокрема, низку праць присвячено якісному аналізу сферично симетричних розв'язків рівнянь нелінійної теорії поля, дослідженню питань існування обмежених розв'язків та інваріантних многовидів нелінійних систем, проблемам КАМ-теорії, застосуванню варіаційних методів для виявлення квазіперіодичних розв'язків різних класів задач, дослідженню сингулярних крайових задач на півосі для звичайних диференціальних рівнянь.

У 1982 році І.О. Парасюку було присуджено Медаль Академії наук УРСР для молодих учених.

У своїй докторській дисертації "Коізотропні інваріантні тори гамільтонових систем" (1995 р.) І.О. Парасюк описав виявлений ним новий тип багаточастотних нелінійних коливань у гамільтонових системах – квазіперіодичні рухи на коізотропних інваріантних торах, для вивчення яких він розробив неформальну теорію збурень, що є розвитком класичної теорії Колмогорова – Арнольда – Мозера.

Перебуваючи у докторантурі, І.О. Парасюк разом з А.М. Самойленком та М.О. Перестюком працював над оновленим україномовним підручником з диференціальних рівнянь. Книга побачила світ у 1994 році і ввібрала в себе досвід, набутий авторами за час викладання курсу "Диференціальні рівняння" для студентів механіко-математичного факультету впродовж 70-х – 80-х років. У 2003 році вийшло з друку друге (доповнене) видання підручника. У 2005 році підручник "Диференціальні рівняння" відзначено Премією імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У 2010 році вийшло з друку третє оновлене та доповнене видання підручника "Диференціальні рівняння", а у 2012 році цей підручник було видано англійською мовою.

За плідну педагогічну діяльність у 2006 році І.О. Парасюка нагороджено знаком МОН України "Відмінник освіти України", а у 2008 році визнано кращим викладачем року Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Ігор Остапович веде активну наукову діяльність. У своїх працях, тематика яких стосується теорії багаточастотних коливань та інваріантних многовидів динамічних систем, І.О. Парасюк розробив теорію коізотропних інваріантних торів гамільтонових систем, обчислив асимптотику резонансних зон рівняння Шредінгера з неаналітичним квазіперіодичним потенціалом, обґрунтував варіаційний метод відшукання квазіперіодичних розв'язків лагранжевих систем. Кількість його наукових публікацій сягає понад 100 робіт. Під його науковим керівництвом захищено 5 кандидатських дисертацій.

Ігор Остапович входить до складу спеціалізованих вчених рад по захистах докторських дисертацій при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка та Інституті математики НАН України, є членом редколегії Українського математичного журналу. Він член Київського та Американського математичних товариств.

У 1997–2002 роках І.О. Парасюк був заступником голови, а з 2006 по 2010 рік – головою експертної ради з математики Вищої атестаційної комісії України. Відзначений Подякою голови ВАК України (2008 р.). У 2008–2010 роках очолював науково-методичну комісію з математики і механіки Міністерства освіти і науки України, в даний час – він член експертної ради з природничих та математичних наук Державної акредитаційної комісії МОН України.

З 2003 по 2007 роки І.О. Парасюк обіймав посаду декана механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. За вагомий особистий внесок у підготовку висококваліфікованих фахівців та плідну наукову діяльність І.О. Парасюк у 2009 році нагороджений Почесною Грамотою Кабінету Міністрів України

У 2012 році Ігорю Остаповичу Парасюку (разом з А.М. Самойленком, М.О. Перестюком, С.А. Кривошеєю, В.В. Маринцем, М.П. Моклячуком) присуджено Державну Премію України у галузі освіти за цикл навчально-методичних праць "Диференціальні рівняння".

Колектив механіко-математичного факультету щиро вітає Ігоря Остаповича з ювілеєм і бажає йому міцного здоров'я, наснаги та нових творчих успіхів.

А. Самойленко, М. Перестюк, М. Городній, О. Бойчук, О. Станжицький, О. Капустян, В. Самойленко

ДО 60-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИКОЛИ ВАЛЕНТИНОВИЧА КАРТАШОВА

18 жовтня 2012 р. виповнилося 60 років талановитому українському вченому в галузі теорії ймовірностей і математичної статистики Миколі Валентиновичу Карташову.

М.В. Карташов народився 18 жовтня 1952 року у м. Очаків. Середню освіту одержав, навчаючись спочатку в школі у м.Очаків, а потім у Республіканській спеціалізованій школі-інтернаті фізико-математичного профілю при Київському державному університеті ім.Т.Г.Шевченка. У 1970 році поступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету ім.Т.Г. Шевченка, який закінчив з відзнакою у 1975 році.

Наукові інтереси майбутнього вченого формувались під впливом завідувача кафедрою теорії ймовірностей і математичної статистики професора Ядренка М.Й. та професора Сільвестрова Д.С.

Навчаючись під керівництвом професора Сільвестрова Д.С. у аспірантурі Київського державного університету ім.Т.Г. Шевченка (1975–1978), М.В.Карташов проводив дослідження оцінок швидкості збіжності у теоремі відновлення та їх застосування у задачах теорії масового обслуговування. У 1978 році Микола Валентинович успішно захистив кандидатську дисертацію "Кількісні оцінки швидкості збіжності у теоремі відновлення та їх застосування у теорії масового обслуговування".

У цей же час багато сил та енергії Микола Валентинович віддає розвитку шкільної математичної освіти, організації математичних олімпіад для школярів, виданню збірників задач з математичних олімпіад для школярів.

Закінчивши аспірантуру, Микола Валентинович починає працювати на кафедрі теорії ймовірностей і математичної статистики Київського університету спочатку асистентом (1978–1987), згодом доцентом (1987–1989) і професором (з 1989 р. по теперішній час).

Педагогічну діяльність Микола Валентинович поєднує з плідною науковою роботою. Карташов М.В. розробляє критерії рівномірної ергодичності і сильної стійкості ланцюгів Маркова із загальним фазовим простором. Запропоновані ним операторні методи оцінки асимптотики моментів рідких подій на траєкторіях загальних ланцюгів Маркова дозволяють суттєво розширити класи випадкових процесів, які допускають укрупнення. Ним одержано оцінки геометричної асимптотики марківських моментів на однорідних ланцюгах Маркова. У 1986 році Микола Валентинович Карташов успішно захищає докторську дисертацію "Рівномірні граничні теореми для ергодичних випадкових процесів".

Математичний доробок М.В. Карташова складають 134 наукові публікації. Серед них монографія "Strong Stable Markov Chains", VSP, Utrecht, 1996. У цій монографії представлено розроблені автором нові підходи у дослідженні задач ергодичності і стійкості для однорідних ланцюгів Маркова у дискретному часі із значеннями у вимірному просторі. Розглянуто різноманітні методи точної оцінки швидкості збіжності у ергодичних теоремах і теоремах стійкості для широкого класу ланцюгів. Розроблені методи базуються на класичній теорії збурень лінійних операторів у банахових просторах і дають нові результати навіть для скінченних ланцюгів.

Микола Валентинович завжди створює умови для наукових досягнень своїх учнів. Під його керівництвом захистили дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук 9 молодих науковців.

Питання застосувань теорії ймовірностей і математичної статистики також знаходяться у колі інтересів Миколи Валентиновича. Варто згадати його дослідження з розробки пакетів статистичного програмного забезпечення та низки нових методів для оцінки надійності атомних електростанцій (1979–1990, 1993–1994); розробки системи управління базою даних, призначеної для моніторингу, оцінки та прогнозу демографічних процесів в Україні (1992–2000); оцінки радіаційного ризику для здоров'я людини у зв'язку із Чорнобильською катастрофою, особливо ризику захворювання на рак щитовидної залози (1995–2000); розробки програмного забезпечення для управління фінансовою діяльністю підприємств та організацій України.

Микола Валентинович – чудовий педагог. Він читає курси лекції з дисциплін "Теорія ймовірностей", "Математична статистика з елементами теорії випадкових процесів", "Додаткові розділи теорії ймовірностей", "Марківські процеси в актуарній математиці". Його курс лекцій з теорії ймовірностей є зразком математичної чіткості, послідовності, прозорості і, в той же час, глибини викладу.

Професор Карташов М.В. – автор 29 навчально-методичних посібників, у тому числі трьох підручників з теорії ймовірностей та математичної статистики. Зокрема, чудовий підручник "Імовірність, процеси, статистика" (2007) інтенсивно використовують студенти математичних факультетів університетів України як при вивченні основ теорії ймовірностей і математичної статистики, так і при вивченні більш складних та глибоких тем із додаткових розділів теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів.

У свої 60 років Микола Валентинович продовжує активну наукову, педагогічну й організаційну роботу, постійно живе у творчих пошуках і планах. Творчу діяльність поєднує з читанням лекцій і доповідей на різних міжнародних конференціях. Він є членом редколегії журналу "Теорія ймовірностей та математична статистика", а також членом спеціалізованої вченої ради із захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Колектив механіко-математичного факультету і вся математична громадськість України щиро вітають Миколу Валентиновича зі славним ювілеєм і бажають йому міцного здоров'я, наснаги і подальших творчих успіхів.

В. Королюк, М. Городній, О. Борисенко, О. Василик, В. Голомозий,
Ю. Козаченко, Р. Майборода, Ю. Мішура, М. Моклячук, І. Парасюк, О. Пономаренко,
К. Ральченко, Л.Сахно, Г. Шевченко, Р. Ямненко, Т. Яневич

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html

Загальні вимоги

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows.** Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

– текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;

– поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.

– комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
  - шрифт статті – Arial, розмір 9;
  - інтервал між рядками – одинарний;
  - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
  - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;

– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
  - **класифікаційний індекс Універсальної десяткової класифікації (УДК); (Arial, 8 pt, Bold);**
  - **відомості про авторів, що містять такі елементи**

перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);

  - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання…", "Деякі питання…", "Проблеми…", Шляхи…" тощо і стисло відображає зміст і за формою має бути зручною для складання бібліографічних описів, бібліографічних покажчиків і здійснення бібліографічного пошуку);), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
  - **анотація, резюме** (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок ..."отримано задовільні результати …"; **анотацію мовою публікації розміщують перед її текстом, після назви; анотацію українською мовою у виданнях іншими мовами, крім української, подають після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії; крім анотації, рекомендовано подавати резюме; резюме подають мовою, відмінною від мови публікації; якщо резюме подають кількома мовами, то їх розміщують після відомостей про дату надходження авторського оригіналу до редколегії**); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
  - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
  - список літератури під рубрикою СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ (Arial, 7 pt, звичайний);
  - дата надходження до редколегії, наприклад, " **Стаття надійшла до редколегії 09.11.05** ". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняна праворуч).

Додаткові вимоги до тексту статті:

– кожну абревіатуру слід уводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абревіатурою;

– джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

– усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;

– не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;

– на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;

– усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);

– усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій віддтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;

– формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:				**Define Size:**		
Text	Times New Roman			Full	**9** pt	
Function	Times New Roman			Subscript/Superscript	**7** pt	
Variable	Times New Roman	italic		Sub-Subscript/Superscript	**6** pt	
L.C.Greek	Symbol			Symbol	**14** pt	
UC.Greek	Symbol			Sub-Symbol	9 pt	
Vector-matrix	Times New Roman	bold				
Number	Times New Roman					

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (К) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською; **пристатейні бібліографічні списки (бібліографічний опис у пристатейних бібліографічних списках складають згідно з ДСТУ ГОСТ 7.1, заголовок бібліографічного запису – згідно з ДСТУ ГОСТ 7.80); н**е допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок. **Пристатейним бібліографічним спискам передує рубрика** СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

– подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
– подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
– подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
– затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows ***ФАЙЛ>СВОЙСТВА***, обрати закладку ***ДОКУМЕНТ*** та заповнити поля ***Название, Автор***. У полі ***Заметки*** занести ім'я, прізвище, поштову адресу, місце роботи (назву установи чи організації, їхнє місцезнаходження); будь-які контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск (1)29

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Формат $60x84^{1/8}$. Ум. друк. арк. 7,3. Наклад 300. Зам. № 213-6741.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М1.
Підписано до друку 15.10.13

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02