В І С Н И К
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА 28/2012

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; $\boxed{\text{В.В. Мелешко}}$, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М.Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Сущанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 10.10.11 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством інформації України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 3172, 239 3222; факс 239 3128

© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2012

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.9

І. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, А. Рустамова, асп.
pio@univ.kiev.ua; anna_rustamova@hotmail.com

УМОВИ ІСНУВАННЯ СЛАБКИХ КВАЗІПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛАГРАНЖЕВИХ СИСТЕМ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

Встановлено нові достатні умови існування слабких квазіперіодичних розв'язків для натуральних лагранжевих систем з квазіперіодичною за часом силовою функцією на ріманових многовидах.

We establish new sufficient conditions for the existence of weak Besicovitch quasiperiodic solutions for natural Lagrangian systems on Riemannian manifolds with time-quasiperiodic force function.

Вступ

Нехай $i: M \to \mathbf{E}^n$ – гладке ізометричне вкладення k-вимірного повного зв'язного ріманового многовиду M у евклідів простір $(\mathbf{E}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Домовимося ототожнювати, використовуючи при цьому однакові позначення, множини M та $i(M)$, а також вектори $\xi \in TM$ та $i_* \xi \in \mathbf{E}^n$ (i_* – похідна відображення i). Розглянемо на M натуральну лагранжеву систему з лагранжіаном $L = T + W$, де $T = \|\dot{x}\|^2/2$ – кінетична енергія, $\|\cdot\|$ – норма, породжена скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$, індукованим на дотичному розшаруванні TM скалярним добутком простору $(\mathbf{E}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $W(\omega t, x)$ – квазіперіодична за часом силова функція, породжена гладкою функцією $W: \mathbf{T}^m \times \mathbf{E}^n \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{T}^m = \mathbf{R}^m / 2\pi \mathbf{Z}^m$ – m-вимірний тор) з частотним вектором $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m) \in \mathbf{R}^m$, де $\{\omega_i\}_{i=\overline{1,m}}$ – раціонально незалежні компоненти. Позначимо через $H(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$ простір інтегровних з квадратом евклідової норми функцій $u(\cdot): \mathbf{T}^m \to \mathbf{E}^n$, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle_0 = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbf{T}^m} \langle\cdot,\cdot\rangle d\varphi$ – скалярний добуток у ньому. Простір $H^1_\omega(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$ утворюють інтегровні з квадратом норми функції, які мають узагальнені в сенсі Соболєва похідні $D_\omega h$ за напрямком ω, $\|\cdot\|_1$ – півнорма в $H^1_\omega(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$, породжена скалярним добутком $\langle D_\omega \cdot, D_\omega \cdot\rangle_0 + \langle\cdot,\cdot\rangle_0$.

Застосування варіаційного методу до задачі про квазіперіодичні розв'язки лагранжевої системи $(M; T+W)$ полягає у відшуканні такої функції $x = u(\omega t)$, що $u(\varphi)$ реалізує (локальний) мінімум функціоналу

$$J[u] = \int_{\mathbf{T}^m} \left[\frac{1}{2} \|D_\omega u(\varphi)\|^2 + W(\varphi, u(\varphi)) \right] d\varphi \tag{1}$$

у класі функцій $u \in H^1_\omega(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$, $u(\mathbf{T}^m) \subset M$.

У випадку евклідового простору такому підходові в більш загальному майже періодичному випадку було присвячено праці Ж. Блота [9-12]. Пізніше цей метод був використаний для доведення існування слабких та класичних майже періодичних розв'язків систем варіаційного типу [7,8,13]. В [4] вимога глобальної (щодо x) опуклості силової функції замінена вимогою опуклості в компактній області. У [5;6] зазначений метод було обгрунтовано у випадку, коли ріманова кривина многовиду M недодатна. Мета нашої роботи полягає в тому, щоб дослідити можливість розповсюдження варіаційного методу на квазіперіодичні лагранжеві системи, конфігураційним простором яких є многовид довільної, зокрема, додатної кривини.

Варіаційний метод

Символами ∇_ξ, ∇f позначимо відповідно коваріантну похідну зв'язності Леві-Чівіта за напрямком $\xi \in TM$ та градієнт функції $f(\cdot): M \to \mathbf{R}$ [1]. Визначимо слабкий розв'язок системи $(M; T+W)$ дещо по-іншому, ніж у [5]. Для довільної обмеженої підмножини $A \subseteq M$ покладемо $S_A := C^\infty(\mathbf{T}^m; A)$. Простір H_A визначимо наступним чином. Функція $u(\cdot) \in H_A$, якщо існує послідовність $u_j(\cdot) \in S_A$, обмежена в $H^1_\omega(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$ і збіжна до $u(\cdot)$ за нормою простору $H(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$. Легко показати, що $H_A \subset H^1_\omega(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$. Дійсно, для кожного $n \in \mathbf{Z}^m$ послідовність коефіцієнтів Фурьє $u_{n,j}$, визначеної вище послідовності u_j, збігається до u_n – коефіцієнта Фурьє функції $u(\cdot)$. Тоді існує стала $K > 0$ така, що

$$\sum_{|n| \le N} |n \cdot \omega|^2 \|u_n\|^2 = \lim_{j \to \infty} \sum_{|n| \le N} |n \cdot \omega|^2 \|u_{j,n}\|^2 \le \liminf_{j \to \infty} \sum_{n \in \mathbf{Z}^m} |n \cdot \omega|^2 \|u_{j,n}\|^2 \le K \quad \forall N \in \mathbf{N}.$$

Залишилось взяти до уваги, що $D_\omega u(\cdot) \in H(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$ тоді, й тільки тоді, коли $\sum_{n \in \mathbf{Z}^m} |n \cdot \omega|^2 \|u_n\|^2 < \infty$.

Будемо казати, що $h(\cdot) \in H^1_\omega(\mathbf{T}^m, \mathbf{E}^n)$ є векторним полем вздовж відображення $u(\cdot) \in H_A$, визначеного вище послідовністю $u_j(\cdot) \in S_A$, якщо існує така послідовність $h_j(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{T}^m, TM)$, що $h_j(\varphi) \in T_{u_j(\varphi)} M$, причому послідовності $\max_{\varphi \in \mathbf{T}^m} \|h_j(\varphi)\|$, $\|h_j\|_1$ обмежені, та $\lim_{j \to \infty} \|h - h_j\|_1 = 0$.

© Парасюк І., Рустамова А., 2012

Означення 1. Слабким квазіперіодичним розв'язком системи $(M;T+W)$ назвемо квазіперіодичну функцію Безіковича $u(\omega t)$, природно породжену такою функцією $u(\cdot)\in H_A$, що

$$\langle D_\omega u(\varphi), D_\omega h(\varphi)\rangle_0 + \langle W_x'(\varphi, u(\varphi)), h(\varphi)\rangle_0 = 0 \tag{2}$$

для довільного векторного поля $h(\cdot)$ вздовж $u(\cdot)$.

Отже, застосування варіаційного методу відшукання квазіперіодичного розв'язку зводиться до відшукання функції $u_*(\cdot)\in H_A$, яка набуває значень у відповідно вибраній обмеженій підмножині $A\subset M$ і є сильною границею в $H(\mathbf{T}^m,\mathbf{E}^n)$ мінімізаційної послідовності для усередненого лагранжіана J, обмеженого на простір S_A. Функціонал $J[u]$ визначається рівністю (1). Природно очікувати, що перша варіація J на $u_*(\cdot)$ перетворюється на нуль, тобто

$$J'[u_*](h) := \langle D_\omega u_*(\varphi), D_\omega h(\varphi)\rangle_0 + \langle W_x'(\varphi, u_*(\varphi)), h(\varphi)\rangle_0 = 0 \tag{3}$$

для довільного векторного поля $h(\cdot)$ вздовж $u_*(\cdot)$. В цій ситуації квазіперіодична функція Безіковича $u_*(\omega t)$ є слабким розв'язком ситеми $(M;T+W)$.

Щоб гарантувати збіжність мінімізаційної послідовності $u_j(\cdot)\in S_A$ за нормою $\|\cdot\|_0$, природно накласти деякі умови опуклості як на множину A, так і на функціонал J. Зазвичай такі умови формулюються за допомогою геодезичних відповідної ріманової метрики. Однак зазначений підхід не дає бажаного результату, якщо порушується умова недодатності ріманової кривини. Аби уникнути цієї складності, ми пропонуємо користуватися геодезичними конформно еквівалентної ріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_V|_{T_xM} := e^{V(x)}\langle\cdot,\cdot\rangle|_{T_xM}$, де $V: M\to\mathbf{R}$ – відповідно дібрана гладка функція. У такий спосіб нам удається забезпечити бажану властивість опуклості усередненого лагранжіана J, накладаючи певні умови опуклості на функції $V(\cdot)$ та $W(\varphi,\cdot)$.

Опуклість усередненого лагранжіана

Легко бачити, що коли $V(\cdot)\in C^\infty(M;\mathbf{R})$ є обмеженою функцією на M, то ріманів многовид $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle_V\right)$ з відповідною зв'язністю Леві-Чівіта – повний. Дійсно, стандартна відстань між точками $x_1,x_2\in\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ визначається як $\rho(x_1,x_2):=\inf\left\{l(c): c\in C_{x_1,x_2}\right\}$, де C_{x_1,x_2} – множина всіх кусково диференційовних шляхів $c:[0,1]\mapsto M$, що з'єднують x_1 з x_2, $l(c)$ – довжина c на $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$. Якщо ми позначимо через $l_V(c)$ довжину шляху c на $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle_V\right)$, то $\inf\limits_{x\in M}\sqrt{e^{V(x)}}\,l(c)\le l_V(c)\le\sup\limits_{x\in M}\sqrt{e^{V(x)}}\,l(c)$. Тобто метрики $\rho(\cdot,\cdot)$ та $\rho_V(\cdot,\cdot)$ еквівалентні. Повнота $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle_V\right)$ випливає тепер з теореми Хопфа-Рінова з [2, розд. 5.3].

Для того, щоб розрізняти геодезичні метрик ρ і ρ_V, ми будемо називати їх ρ-геодезичними і ρ_V-геодезичними відповідно. Для всіх $x\in M$ символами $\exp_x(\cdot):T_xM\mapsto M$ та $\exp_x^V(\cdot):T_xM\mapsto M$ позначатимемо відповідно експоненційне відображення ріманового многовиду $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ із зв'язністю Леві-Чівіта ∇ та аналогічне відображення ріманового многовиду $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle_V\right)$ із зв'язністю Леві-Чівіта ∇^V.

Нагадаємо, що множина ріманового многовиду називається опуклою, якщо разом з будь-якими двома точками x_1,x_2 ця множина містить (єдиний) мінімальний відрізок геодезичної, що з'єднує x_1 з x_2 (див., наприклад, [1, розд.11.8] або [2, розд.5.2]). Добре відомо, що для будь-якої точки x_0 відкрита куля досить малого радіуса з центром в точці x_0 є опуклою. Функція $f:D_f\mapsto\mathbf{R}$ з опуклою областю визначення $D_f\subset M$ опукла тоді, і тільки тоді, коли її суперпозиція з довільною натурально параметризованою геодезичною, що міститься в D_f, є опуклою функцією.

Нагадаємо також, що для функції $V(\cdot)$, тензор Гессе $H_V(x)$ в точці x [2, розд.3.5] визначається рівністю

$$\left\langle H_V(x)\xi,\eta\right\rangle := \left\langle \nabla_\xi\nabla V(x),\eta\right\rangle \quad \forall\xi,\eta\in T_xM.$$

Крім того, введемо таку квадратичну форму

$$\left\langle G_V(x)\xi,\xi\right\rangle := \left\langle H_V(x)\xi,\xi\right\rangle - \frac{1}{2}\left\langle\nabla V(x),\xi\right\rangle^2 \quad \forall\xi\in T_xM$$

і позначимо

$$\lambda_V(x) := \min_{\xi\in T_xM\setminus\{0\}}\left\langle H_V(x)\xi,\xi\right\rangle/\|\xi\|^2,\quad \mu_V(x) := \min_{\xi\in T_xM\setminus\{0\}}\left\langle G_V(x)\xi,\xi\right\rangle/\|\xi\|^2.$$

Приймемо наступні гіпотези, щодо умов опуклості функцій $V(\cdot)$ та $W(\varphi,\cdot)$.

H1: існують обмежена функція $V(\cdot)\in C^\infty(M;\mathbf{R})$ та обмежена область $D\subset M$, такі що

$$\lambda_V(x) + \frac{1}{2}\|\nabla V(x)\|^2 \ge 0 \quad \forall x\in D; \tag{4}$$

H2: існує некритичне значення $v\in V(D)$ і зв'язна компонента Ω відкритої множини підрівня $V^{-1}((-\infty,v))$ з наступними властивостями:

(a) для будь-яких $x,y\in\Omega$ область D містить єдиний мінімальний відрізок ρ_V-геодезичної з кінцями x,y;

(б) друга фундаментальна форма $\partial\Omega$ є додатно визначеною в кожній точці $x\in\partial\Omega$ (для всіх $x\in\partial\Omega$ обмеження форми $H_V(x)$ на $T_x\partial\Omega$ є додатно визначеною формою);

(в) функція $V(\cdot)$ задовольняє нерівність

$$\mu_V(x)\geq 2K^*(x)\quad \forall x\in\Omega, \tag{5}$$

де $K^*(x):=\max\limits_{\sigma_x(\xi,\eta)}\dfrac{\langle R(\eta,\xi)\xi,\eta\rangle}{\|\eta\|^2\|\xi\|^2-\langle\eta,\xi\rangle^2}$;

Н3: функція $W(\cdot,\cdot)$ задовольняє наступні нерівності

$$\lambda_W(\varphi,x)+\frac{1}{2}\langle\nabla W(\varphi,x),\nabla V(x)\rangle>0\quad \forall(\varphi,x)\in\mathbf{T}^m\times\overline{\Omega}\quad(\overline{\Omega}:=\Omega\cup\partial\Omega),$$

$$\langle\nabla W(\varphi,x),\nabla V(x)\rangle>0\quad \forall(\varphi,x)\in\mathbf{T}^m\times\partial\Omega,$$

де $\lambda_W(\varphi,x)$ є мінімальним власним значенням форми Гессе $H_W(\varphi,x)$ функції $W(\varphi,\cdot):M\mapsto\mathbf{R}$.

Теорема 1 *Нехай виконані умови (Н1) – (Н3). Тоді існують такі додатні константи C, C_1 та c, що для довільних $u_0(\cdot),u_1(\cdot)\in C^\infty(\mathbf{T}^m;\Omega)$ можна вибрати векторне поле $h(\cdot)\in C^\infty(\mathbf{T}^m;TM)$ вздовж $u_0(\cdot)$ (тобто $h(\varphi)\in T_{u_0(\varphi)}M$ для всіх $\varphi\in\mathbf{T}^m$) таким чином, щоб справджувались наступні нерівності*

$$c\rho(u_0(\varphi),u_1(\varphi))\leq\|h(\varphi)\|\leq C\rho(u_0(\varphi),u_1(\varphi))\quad\forall\varphi\in\mathbf{T}^m,$$

$$\|D_\omega h(\varphi)\|\leq C_1\left[\|D_\omega u_0(\varphi)\|+\|D_\omega u_1(\varphi)\|\right]\quad\forall\varphi\in\mathbf{T}^m,$$

$$J[u_1]-J[u_0]-J'[u_0](h)\geq\frac{\alpha c^2}{2}\int\limits_{T^m}\rho^2(u_0,u_1)\mathrm{d}\varphi\ ,$$

де $\alpha:=\min\left\{\lambda_W(\varphi,x)+\frac{1}{2}\langle\nabla W(\varphi,x),\nabla V(x)\rangle:(\varphi,x)\in\mathbf{T}^m\times\overline{\Omega}\right\}.$

Доведення цієї теореми вимагає декількох допоміжних тверджень і буде наведене в кінці цього розділу.

Твердження 1 *Рівняння Ейлера-Лагранжа для ρ_V-геодезичної на рімановому многовиді $(M,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ має вигляд*

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x}=-\langle\nabla V(x),\dot{x}\rangle\dot{x}+\frac{\|\dot{x}\|^2}{2}\nabla V(x), \tag{6}$$

Доведення. Відрізок ρ_V-геодезичної з кінцевими точками $x_0,x_1\in M$ є екстремаллю функціоналу $\Phi[x(\cdot)]=\int\limits_0^1 e^{V\circ x(t)}\|\dot{x}(t)\|^2\mathrm{d}t$, визначеного на просторі $C^2_{x_0x_1}$ таких двічі неперервно диференційовних кривих $x=x(t)$, $t\in[0,1]$, що $x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$. Ми маємо намір вивести рівняння Ейлера-Лагранжа, використовуючи зв'язність ∇. Розглянемо варіацію $x(\cdot)$, визначену таким гладким відображенням $y(\cdot,\cdot):[0,1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\mapsto M$, що $y(\cdot,\lambda)\in C^\infty_{x_0x_1}$ для довільного фіксованого $\lambda\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ та $y(t,0)\equiv x(t)$. Покладемо $\dot{y}(t,\lambda):=\frac{\partial}{\partial t}y(t,\lambda),\ \ y'(t,\lambda):=\frac{\partial}{\partial\lambda}y(t,\lambda).$ Очевидно, що $\dot{y}(t,0)=\dot{x}(t)$, $y(i,\lambda)\equiv x_i$, та $y'(i,\lambda)=0$, $i=0,1$. Тоді, оскільки $\nabla_{y'}\dot{y}=\nabla_{\dot{y}}y'$, то маємо

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}\int\limits_0^1 e^{V\circ y}\|\dot{y}\|^2dt=\int\limits_0^1\left[e^{V\circ y}\langle\nabla V\circ y,y'\rangle\|\dot{y}\|^2+2e^{V\circ y}\langle\nabla_{y'}\dot{y},\dot{y}\rangle\right]_{\lambda=0}dt=\int\limits_0^1\left[e^{V\circ y}\langle\nabla V\circ y,y'\rangle\|\dot{y}\|^2+2e^{V\circ y}\langle\nabla_{\dot{y}}y',\dot{y}\rangle\right]_{\lambda=0}dt\,.$$

Враховуючи, що

$\frac{\partial}{\partial t}e^{V\circ y}\langle y',\dot{y}\rangle=e^{V\circ y}\langle\nabla V\circ y,\dot{y}\rangle\langle y',\dot{y}\rangle+e^{V\circ y}\langle\nabla_{\dot{y}}y',\dot{y}\rangle+e^{V\circ y}\langle y',\nabla_{\dot{y}}\dot{y}\rangle$ та $\left.e^{V\circ y}\langle y',\dot{y}\rangle\right|_{t=0,1}=0$, отримуємо

$$\int\limits_0^1 e^{V\circ y}\ \langle\nabla_{\dot{y}}y',\dot{y}\rangle\mathrm{d}t=-\int\limits_0^1 e^{V\circ y}\left[\langle\nabla V\circ y,\dot{y}\rangle\langle y',\dot{y}\rangle+\langle y',\nabla_{\dot{y}}\dot{y}\rangle\right]\mathrm{d}t.$$

З цього випливає, що перша варіація функціоналу Φ має вигляд

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}\Phi[y(\cdot,\lambda)]=\Phi'[x(\cdot)](y'(\cdot,0))=\int\limits_0^1\left[e^V\left(\langle\nabla V,y'\rangle\|\dot{x}\|^2-2\langle\nabla V,\dot{x}\rangle\langle\dot{x},y'\rangle-2\langle\nabla_{\dot{x}}\dot{x},y'\rangle\right)\right]_{x=x(t),\lambda=0}\mathrm{d}t,$$

тобто рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд (7).

Твердження 2 *Нехай виконується умова (Н1). Якщо відрізок ρ_V-геодезичної, що з'єднує точки x_0,x_1 множини Ω, належить D, то він міститься в Ω.*

Доведення. Нехай $x(\cdot)\in C^2_{x_0x_1}$ задовольняє (7) і нехай $x(t)\in D$ для всіх $t\in[0,1]$. Тоді

$$\frac{d^2}{dt^2}e^V\bigg|_{x=x(t)}=\left[e^V\left(\langle\nabla_{\dot x}\nabla V,\dot x\rangle+\left\langle\nabla V,-\langle\nabla V,\dot x\rangle\dot x+\|\dot x\|^2\nabla V/2\right\rangle+\langle\nabla V,\dot x\rangle^2\right)\right]\bigg|_{x=x(t)}=$$

$$=\left[e^V\left(\langle\nabla_{\dot x}\nabla V,\dot x\rangle+\|\dot x\|^2\|\nabla V\|^2/2\right)\right]\bigg|_{x=x(t)}\ge\left[e^V\|\dot x\|^2\left(\lambda_V+\|\nabla V\|^2/2\right)\right]\bigg|_{x=x(t)}\ge 0.$$

Отже, функція $e^{V\circ x(\cdot)}$ є опуклою, і це означає, що $V\circ x(t)<v$ для всіх $t\in[0,1]$.

Твердження 3 *За умов (H1) – (H2) відрізок мінімальної ρ_V-геодезичної, що з'єднує будь-які дві точки $x,y\in\Omega$ не містить спряжених точок.*

Доведення. Як відомо [2, розд. 3.6] співвідношення між кривинами по двовимірному напрямку $\sigma_x(\xi_1,\xi_2)$ многовидів $\left(M,e^V\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ та $\left(M,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ має вигляд

$$K_V\left(\sigma_x(\xi_1,\xi_2)\right)=e^{-V}\left[K(\sigma_x(\xi_1,\xi_2))-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left[\langle H_V(x)\xi_i,\xi_i\rangle-\frac{1}{2}\langle\nabla V(x),\xi_i\rangle^2\right]+\frac{1}{4}\|\nabla V(x)\|^2\right],$$

де ξ_1,ξ_2 – ортонормований базис площини $\sigma_x(\xi_1,\xi_2)$. З нерівності (5) випливає, що ця кривина недодатна для будь-якого $x\in\overline{\Omega}$. За теоремою Морса-Шенберга відрізок довільної ρ_V-геодезичної, що міститься в $\overline{\Omega}$ не має спряжених точок.

Твердження 4 *При виконанні умов (H1) –-(H3) існує таке гладке відображення $\zeta(\cdot,\cdot):\Omega\times\Omega\mapsto TM$, що $\zeta(x,y)\in T_xM$ та*

$$\exp_x^V(\zeta(x,y))=y,\quad e^{V(x)/2}\|\zeta(x,y)\|=\rho_V(x,y),\quad \exp_x^V(t\zeta(x,y))\in\Omega\quad\forall t\in[0,1].\tag{7}$$

Доведення. Відомо, що коли для деякого $\xi\in T_xM$ відрізок геодезичної $\exp_x^V(t\xi),\ t\in[0,1]$ не містить спряжених точок, то відображення $\exp_x^V(\cdot)$ є локальним дифеоморфізмом у будь-якій точці $t\xi$, $t\in[0,1]$. З умови (H2.a) для довільних $x,y\in\Omega$ існує єдиний вектор $\zeta(x,y)\in T_xM$, що задовольняє умови (7). Гладкість відображення $\zeta(\cdot,\cdot):\Omega\times\Omega\mapsto TM$ випливає з теореми про неявну функцію. Твердження доведено.

Визначимо відображення

$$\gamma_V(\cdot,\cdot,\cdot):[0,1]\times\Omega\times\Omega\mapsto\Omega,\quad \gamma_V(t,x,y):=\exp_x^V(t\zeta(x,y))\,.$$

Тоді для довільних $x,y\in D$ відображення $\gamma_V(\cdot,x,y):[0,1]\mapsto D$ задовольняє рівняння (6) та крайові умови $\gamma_V(0,x,y)=x$, $\gamma_V(1,x,y)=y$. Зауваживши, що скалярне диференціальне рівняння

$$\frac{d\tau}{ds}=\exp\left(V\circ\gamma_V(\tau,x,y)\right)\int_0^1\exp\left(-V\circ\gamma_V(t,x,y)\right)dt$$

має єдиний строго монотонно зростаючий розв'язок

$$\tau(\cdot,x,y):[0,1]\mapsto[0,1],\quad \tau(0,x,y)=0,\quad \tau(1,x,y)=1,\tag{8}$$

шляхом перепараметризації $t=\tau(s,x,y)$ визначимо гладке відображення

$$\chi(\cdot,\cdot,\cdot):[0,1]\times\Omega\times\Omega\mapsto\Omega,\quad \chi(s,x,y):=\gamma_V(\tau(s,x,y),x,y),$$

яке відіграє важливу роль в подальших міркуваннях. В [5] $\chi(\cdot,\cdot,\cdot)$ називається відображенням зв'язування.

Твердження 5 *Для довільних $x,y\in\Omega$ відображення $\chi(\cdot,x,y):[0,1]\mapsto\Omega$ задовольняє рівняння*

$$\nabla_{x'}x'=\frac{\|x'\|^2}{2}\nabla V(x),\tag{9}$$

де $x'=\frac{dx}{ds}$, та граничні умови $\chi(0,x,y)=x$, $\chi(1,x,y)=y$.

Доведення. Виконання граничних умов випливає з визначення γ_V та (8). Покажемо, що (9) отримується з (6) після заміни незалежної змінної $t=\tau(s)$. Дійсно, нехай $\chi(s)=x\circ\tau(s)$. Тоді (7) має вигляд

$$\frac{1}{\tau'}\nabla_{\chi'}\left(\frac{1}{\tau'}\chi'\right)=\frac{-1}{(\tau')^2}\langle\nabla V(\chi),\chi'\rangle\chi'+\frac{\|\chi'\|^2}{2(\tau')^2}\nabla V(\chi)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{-\tau''}{\tau'}\chi'+\nabla_{\chi'}\chi'=-\left[\frac{d}{ds}V(\chi)\right]\chi'+\frac{\|\chi'\|^2}{2}\nabla V(\chi)\,.$$

З цього випливає (9), оскільки $\tau''/\tau'=\left(V\circ\chi\right)'$.

Твердження 6 *Нехай $u_i(\cdot)\in S_\Omega$, $i=0,1$. Тоді при виконанні умов (H1) – (H2) справедлива нерівність*

$$\frac{d^2}{ds^2}\left\|D_\omega\chi\left(s,u_0(\varphi),u_1(\varphi)\right)\right\|^2\ge 0\quad\forall s\in[0,1],\ \forall\varphi\in\mathbf{T}^m.$$

Доведення. Для довільного фіксованого $\varphi\in\mathbf{T}^m$ покладемо

$$\eta(s,t):=\frac{\partial}{\partial t}\chi\left(s,u_0(\varphi+\omega t),u_1(\varphi+\omega t)\right)\equiv D_\omega\chi\left(s,u_0(\varphi+\omega t),u_1(\varphi+\omega t)\right),\qquad \xi(s,t):=\frac{\partial}{\partial s}\chi\left(s,u_0(\varphi+\omega t),u_1(\varphi+\omega t)\right).$$

Тоді, зважаючи на відомі співвідношення з [2],[3] $\nabla_\eta \xi = \nabla_\xi \eta,\quad \nabla_\eta \nabla_\xi \xi - \nabla_\xi \nabla_\eta \xi = R(\eta,\xi)\xi$ та рівняння (9), маємо

$$\nabla_\xi^2 \eta = \nabla_\eta \nabla_\xi \xi - R(\eta,\xi)\xi = \langle \nabla_\eta \xi, \xi \rangle \nabla V \circ \chi + \frac{\|\xi\|^2}{2} \nabla_\eta \nabla V(\chi) - R(\eta,\xi)\xi$$

і тому

$$\frac{d^2}{ds^2}\|\eta\|^2 = 2\left[\langle \nabla_\xi^2 \eta, \eta\rangle + \|\nabla_\xi \eta\|^2\right] = 2\|\nabla_\xi \eta\|^2 + 2\langle \nabla_\xi \eta, \xi\rangle \langle \nabla V(\chi), \eta\rangle + \|\xi\|^2 \langle \nabla_\eta \nabla V(\chi), \eta\rangle - 2\langle R(\eta,\xi)\xi, \eta\rangle \geq$$

$$\geq 2\|\nabla_\xi \eta\|^2 - 2\|\nabla_\xi \eta\|\|\xi\| |\langle \nabla V(\chi), \eta\rangle| + \|\xi\|^2 \langle \nabla_\eta \nabla V(\chi), \eta\rangle - 2K^*(\chi)\|\xi\|^2\|\eta\|^2.$$

При виконанні (Н2) маємо

$$\frac{d^2}{ds^2}\|\eta\|^2 \geq 2\|\xi\|^2\|\eta\|^2\left[r^2 - |\langle \nabla V \circ \chi, \mathbf{e}\rangle| r + \frac{1}{2}\langle \nabla_{\mathbf{e}} \nabla V \circ \chi, \mathbf{e}\rangle - K^*(\chi)\right] \geq 0,$$

де $r := \dfrac{\|\nabla_\xi \eta\|}{\|\xi\|\|\eta\|}$.

Тепер ми взмозі довести теорему 1. Нехай $u_i(\cdot) \in S_\Omega$, $i = 0,1$. За допомогою відображення зв'язування ми отримаємо наступне представлення

$$J[\chi(s,u_0,u_1)] = J[u_0] + sJ'[u_0](\chi'_s(0,u_0,u_1)) + \frac{s^2}{2}\frac{d^2}{ds^2}|_{s=\theta}\, J[\chi(s,u_0,u_1)] \tag{10}$$

для деякого $\theta \in (0,1)$. Для оцінки знизу доданка з другою похідною використаємо твердження 6, яке разом з умовою (Н3) дає

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{2}\|D_\omega \chi(s,u_0(\varphi),u_1(\varphi))\|^2 + W(\varphi,\chi(s,u_0,u_1))\right] \geq \frac{d}{ds}\langle \nabla W(\varphi,\chi), \chi'_s\rangle =$$

$$= \langle \nabla_{\chi'_s} \nabla W(\varphi,\chi), \chi'_s\rangle + \langle \nabla W(\varphi,\chi), \nabla_{\chi'_s}\chi'_s\rangle = \langle \nabla_{\chi'_s} \nabla W(\varphi,\chi), \chi'_s\rangle + \frac{\|\chi'_s\|^2}{2}\langle \nabla W(\varphi,\chi), \nabla V(\chi)\rangle \geq \alpha\|\chi'_s\|^2.$$

За означенням χ маємо

$$\chi'_s(s,u_0,u_1) = \tau'(s)\dot\gamma_V(\tau(s),u_0,u_1) = \exp(V \circ \gamma_V(\tau(s),u_0,u_1))\int_0^1 \exp(-V \circ \gamma_V(t,u_0,u_1))dt\, \dot\gamma_V(\tau(s),u_0,u_1).$$

Оскільки $\gamma_V(t,x,y)$ є ρ_V-геодезичною, то $\exp(V \circ \gamma_V)\|\dot\gamma_V\|^2$ не залежить від t та

$$e^{V(x)/2}\|\dot\gamma_V(0,x,y)\| = e^{V(x)/2}\|\zeta(x,y)\| = \rho_V(x,y).$$

Отже,

$$\|\chi'_s(s,u_0,u_1)\|^2 = \left[\int_0^1 \exp(-V \circ \gamma_V(t,u_0,u_1))\,dt\right]^2 \exp(V \circ \gamma_V(\tau(s),u_0,u_1))\rho_V^2(u_0,u_1).$$

Тоді, враховуючи (7), маємо, що існують визначені лише функцією $V(\cdot)$ та областю Ω такі додатні константи C, c, що

$$c\rho(u_0,u_1) \leq \|\chi'_s(s,u_0,u_1)\| \leq C\rho(u_0,u_1).$$

Покладемо $h(\varphi) := \chi'_s(0,u_0(\varphi),u_2(\varphi))$. Тоді (10) при $s = 1$ дає

$$J[u_1] - J[u_0] - J'[u_0](\chi'_s(0,u_0,u_1)) \geq \frac{\alpha c^2}{2}\int_{T^m} \rho^2(u_0,u_1)d\varphi.$$

Нарешті, оскільки множина Ω є обмеженою, а відображення χ – гладким, то існує така додатна константа C_1, що

$$\|D_\omega h(\varphi)\| \leq C_1\left[\|D_\omega u_0(\varphi)\| + \|D_\omega u_1(\varphi)\|\right] \quad \forall \varphi \in \mathbf{T}^m.$$

Доведення теореми 1 завершено.

Основна теорема існування

Тепер ми переходимо до основного результату цієї статті.

Теорема 2 *Нехай виконуються умови (Н1) – (Н3). Тоді натуральна система на рімановому многовиді* $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *з лагранжіаном* $L = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle + W(\omega t, x)$ *має слабкий квазіперіодичний розв'язок.*

Доведення. Доведення буде складатися з трьох етапів.

1. Побудова відображення проектування та його гладкої апроксимації. Покладемо $\Omega + \delta = \left(\bigcup_{x\in\Omega} B(x;\delta)\right)$. Оскільки згідно з (Н2) v не є критичним значенням, то $\partial\Omega = V^{-1}(v)$ є регулярною гіперповерхнею з полем одиничних нормалей $\mathbf{v} := \nabla V / \|\nabla V\|$. Як добре відомо [1], для досить малого $\delta > 0$ можна коректно визначити відображення

проектування $P_\Omega : \Omega+\delta \to \overline{\Omega}$ так, щоб $P_\Omega x \in \overline{\Omega}$ була найближчою точкою до $x \in \Omega+\delta$. Якщо $x = X(q),\ q \in Q \subset \mathbf{R}^{k-1}$ є гладким локальним параметричним представленням $\partial\Omega$ в околі точки $x_0 \in \partial\Omega$, то для досить малого $\delta_0 > 0$ відображення $Q \times (-\delta_0, \delta_0) \ni (q,z) \mapsto \exp_{X(q)}\left(z\mathbf{v} \circ X(q)\right)$ вводить локальні координати з наступними властивостями. Локально $\partial\Omega$ визначається рівнянням $z = 0$, кожна натурально параметризована ρ-геодезична $\gamma(s) = \exp_{X(q)}\left(s\mathbf{v} \circ X(q)\right)$ ортогональна до кожної гіперповерхні $z = \mathrm{const}$, ріманова метрика має вигляд $\sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q,z)\mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j + \mathrm{d}z^2$, де $B(q,z) = \left\{b_{ij}(q,z)\right\}_{i,j=1}^{k-1}$ є додатно визначеною симетричною матрицею, функція $V(\cdot)$ набуває вигляду $V(q,z) = v + a(q)z + b(q,z)z^2$, а відображення P_Ω має вигляд

$$P_\Omega(q,z) := \begin{cases} (q,0), & z \in (0,\delta_0), \\ (q,z), & z \in (-\delta_0, 0]. \end{cases}$$

Відображення проектування неперервне на $\Omega+\delta$ та неперервно диференційовне на $(\Omega+\delta)\setminus\partial\Omega$. Більше того, виявляється, що при досить малих $\delta > 0$ на множині $(\Omega+\delta)\setminus\partial\Omega$ похідна $P_{\Omega*}$ є відображенням стиску , тобто

$$\left\|P_{\Omega*}\xi\right\| \le \|\xi\| \quad \forall \xi \in T_x M,\ x \in (\Omega+\delta)\setminus\partial\Omega. \tag{11}$$

Цю нерівність досить довести для довільних $x \in (\Omega+\delta)\setminus\partial\Omega$. Нехай $q = q(s)$, $z = z(s)$ є натуральні рівняння ρ-геодезичної, що починається в точці $x_0 = (q_0, 0) \in \partial\Omega$ у напрямку вектора $\eta = (\dot{q}_0, 0) \in T_{x_0}\partial\Omega$. З (H2) випливає, що $\left\langle \nabla_\eta \nabla V(x_0), \eta \right\rangle = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}|_{s=0}\ V(q(s), z(s)) > 0 \ \Leftrightarrow\ a(q_0)\ddot{z}(0) > 0.$ Оскільки $a(q_0) > 0$ ($\mathbf{v}$ – зовнішня нормаль до $\partial\Omega$) та z-компонента рівнянь геодезичної має вигляд $\ddot{z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q,z)\dot{q}_i^2 \dot{q}_j^2,$ то матриця $B_z'(q_0, 0)$ є додатно визначеною. З цього випливає, що $B(q, z_1) > B(q, z_2)$ для всіх q з околу q_0 та всіх $z_1, z_2 \in (-\delta, \delta)$, таких, що $z_1 > z_2$, при досить малому $\delta \in (0, \delta_0)$.

Позначимо символом $\xi = (\dot{q}, \dot{z})$ дотичний вектор в точці (q,z), де $z \in (0,\delta)$. Тоді

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q,z)\dot{q}_i \dot{q}_j + \dot{z}^2 \ge \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q,z)\dot{q}_i \dot{q}_j \ge \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q,0)\dot{q}_i \dot{q}_j = \|(\dot{q},0)\|^2 = \|P_{\Omega*}\xi\|^2.$$

Введемо гладку апроксимацію відображення проектування наступним чином. Для $\varepsilon \in (0,\delta)$ визначимо

$$\overline{\omega}_\varepsilon(z) := \begin{cases} \exp\left(1/z - 1/(z+\varepsilon)\right), & z \in (-\varepsilon, 0), \\ 0, & z \in \mathbf{R} \setminus (-\varepsilon, 0), \end{cases} \qquad Z_\varepsilon(z) := \int_{-\varepsilon}^{z} \frac{\int_s^0 \overline{\omega}_\varepsilon(t)\mathrm{d}t}{\int_{-\varepsilon}^0 \overline{\omega}_\varepsilon(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s - \varepsilon, \quad z \in (-\delta_0, \delta_0).$$

Очевидно, що функція $Z_\varepsilon(\cdot)$ є гладкою, її похідна $Z_\varepsilon'(z)$ дорівнює одиниці для $z \in (-\delta_0, -\varepsilon]$, монотонно спадає від 1 до 0 на $[-\varepsilon, 0]$ та дорівнює 0 для $z \ge 0$. З цього випливає, що $Z_\varepsilon(z)$ дорівнює z для $z \in (-\delta_0, -\varepsilon]$, монотонно зростає від $-\varepsilon$ до $Z_\varepsilon(0) \in (-\varepsilon, 0)$ на $[-\varepsilon, 0]$ та дорівнює $Z_\varepsilon(0)$ для $z \in [0, \delta_0)$. Тепер локально визначимо

$$P_{\varepsilon,\Omega}(q,z) := \begin{cases} (q, Z_\varepsilon(0)), & z \in (0,\delta_0), \\ (q, Z_\varepsilon(z)), & z \in (-\delta_0, 0], \end{cases}$$

і для кожної точки $x \in \Omega$ такої, що $B(x;\delta) \subset \Omega$ покладемо $P_{\varepsilon,\Omega}(x) = x$. Оскільки $Z_\varepsilon(0) < 0$, то $P_{\varepsilon,\Omega}(\Omega+\delta) \subset \Omega,$ враховуючи нерівність $\left|Z_\varepsilon'(z)\right| \le 1$, для довільного $z \in (-\delta, \delta)$ і довільного дотичного вектора $\xi = (q, \dot{z})$ в точці (q,z) маємо

$$\|\xi\|^2 = \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q,z)\dot{q}_i \dot{q}_j + \dot{z}^2 \ge \sum_{i,j=1}^{k-1} b_{ij}(q, Z_\varepsilon(z))\dot{q}_i \dot{q}_j + \left(Z_\varepsilon'(z)\dot{z}\right)^2 = \left\|(\dot{q}, Z_\varepsilon'(z)\dot{z})\right\|^2 = \left\|P_{\varepsilon,\Omega*}\xi\right\|.$$

З цього випливає, що

$$\left\|P_{\varepsilon,\Omega*}\xi\right\| \le \|\xi\| \quad \forall x \in \Omega+\delta,\ \forall \xi \in T_x M. \tag{12}$$

Крім того, з (H3) випливає

$$W(\varphi, P_{\varepsilon,\Omega}x) \le W(\varphi, x) \quad \forall \varphi \in \mathbf{T}^m, \forall x \in \Omega+\delta \tag{13}$$

для досить малого δ та $\varepsilon \in (0,\delta)$.

2. Мінімізація функціоналу J на $S_{\Omega+\delta}$. Очевидно, що функціонал J, звужений на простір $S_{\Omega+\delta}$, є обмеженим знизу. Покажемо, що

$$J_* := \inf J[S_{\Omega+\delta}] = \inf J[S_\Omega]. \tag{14}$$

Дійсно, якщо $a_j(\cdot) \in S_{\Omega+\delta}$ – така послідовність, що $J[a_j]$ монотонно спадає до J_*, то з (12) та (13) випливає $J_* \le J[P_{\varepsilon/j,\Omega}a_j] \le J[a_j].$ Таким чином, $u_j(\cdot) := P_{\varepsilon/j,\Omega}a_j(\cdot)$ є мінімізаційною як для $J|_{S_\Omega}$, так і для $J|_{S_{\Omega+\delta}}$.

3. Збіжність мінімізаційної послідовності до слабкого розв'язку. Нехай $u_j(\cdot)\in S_\Omega$ є мінімізаційною послідовністю для $J|_{S_\Omega}$. Без обмежень загальності можна вважати, що

$$\left\|D_\omega u_j\right\|_0^2 \le M := 2\sup_{x\in\Omega}\int_{\mathbf{T}^m} W(\varphi,x)\mathrm{d}\varphi - 2\int_{\mathbf{T}^m}\inf_{x\in\Omega} W(\varphi,x)\mathrm{d}\varphi. \tag{15}$$

Нехай $h_j(\cdot)\in C^\infty\left(\mathbf{T}^m;TM\right)$ – послідовність таких гладких відображень, що $h_j(\varphi)\in T_{u_j(\varphi)}M$ для всіх $\varphi\in\mathbf{T}^m$, і, до того ж, існують такі додатні константи K, K_1, що

$$\left\|h_j\right\|_1 \le K_1,\quad \left\|h_j(\varphi)\right\| \le K\quad \forall\varphi\in\mathbf{T}^m,\quad \forall j=1,2,\dots . \tag{16}$$

Покажемо, що

$$\lim_{j\to\infty} J'[u_j](h_j) = 0. \tag{17}$$

З одного боку $J[u_j]$ спадає до $J_* := \inf J[S_\Omega]$. З іншого боку для досить малого $s_0\le 1$ існує таке число $\theta_j\in[-s_0,s_0]$, що

$$J[\exp_{u_j}(sh_j)] = J[u_j] + sJ'[u_j](h_j) + \frac{s^2}{2}\frac{d^2}{ds^2}|_{s=\theta_j} J[\exp_{u_j}(sh_j)]\quad \forall s\in[-s_0,s_0],\quad \forall j\in\mathbf{N},$$

і, крім того, знайдеться така константа $K_2>0$, що

$$\left|\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} J[\exp_{u_j}(sh_j)]\right| \le K_2\quad \forall s\in[-s_0,s_0],\quad \forall j\in\mathbf{N}.$$

Якщо тепер припустити, що $\limsup_{j\to\infty}\left|J'[u_j](h_j)\right|>0$, то тоді можна вибрати такі j та $s_j\in[-s_0,s_0]$, що $\exp_{u_j}(s_jh_j)\in S_{\Omega+\delta},\quad J[\exp_{u_j}(s_jh_j)]<J_*$. Враховуючи (14), приходимо до протиріччя з означенням J_*.

Тепер за теоремою 1 для будь-якої пари $u_{i+j}(\cdot), u_j(\cdot)$ існує таке векторне поле $h_{ij}(\cdot)$ вздовж $u_j(\cdot)$, що

$$J[u_{i+j}] - J[u_j] - J'[u_j](h_{ij}) \ge \frac{\alpha c^2}{2}\int_{\mathbf{T}^m}\rho^2(u_j,u_{i+j})\mathrm{d}\varphi \ge \frac{(2\pi)^k\alpha c^2}{2}\left\|u_{i+j}-u_j\right\|_0^2.$$

Оскільки з (17) випливає, що $J'[u_j](h_{ij})\to 0$ при $j\to\infty$, то послідовність $u_j(\cdot)$ фундаментальна в просторі $H(\mathbf{T}^m;\mathbf{E}^n)$ та, зважаючи на (15), збігається до функції $u_*(\cdot)$ сильно в $H(\mathbf{T}^m;\mathbf{E}^n)$ та слабко в $H^1_\omega(\mathbf{T}^m;\mathbf{E}^n)$. Без обмежень загальності можна вважати, що u_* визначається мінімізаційною послідовністю, що збігається майже скрізь.

Тепер залишається лише довести, що u_* є слабким розв'язком, тобто, що виконується (3). Нехай $h(\cdot)$ векторне поле вздовж $u_*(\cdot)$. За означенням існує послідовність гладких відображень $h_j(\varphi)\in T_{u_j(\varphi)}M$, що задовольняє (16) та (17). Тоді, враховуючи (15), маємо

$$\lim_{j\to\infty}\left|\left\langle D_\omega u_*, D_\omega h\right\rangle_0 - \left\langle D_\omega u_j, D_\omega h_j\right\rangle_0\right| \le \lim_{j\to\infty}\left|\left\langle D_\omega\left(u_*-u_j\right), D_\omega h\right\rangle_0\right| + \sqrt{M}\lim_{j\to\infty}\left\|D_\omega\left(h-h_j\right)\right\|_0 = 0,$$

за теоремою Лебега $\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbf{T}^m}\left[W\left(\varphi,u_j(\varphi)\right)-W\left(\varphi,u_*(\varphi)\right)\right]\mathrm{d}\varphi = 0.$ Отже, $J'[u_*](h) = \lim_{j\to\infty} J'[u_j](h_j) = 0.$

Висновки

Вперше застосовано й обґрунтовано варіаційний метод відшукання слабкого квазіперіодичного розв'язку натуральної системи Лагранжа з квазіперіодичною силовою функцією на многовиді довільної, зокрема, додатної ріманової кривини. Труднощі, пов'язані з відмовою від умови недодатності ріманової кривини, вдалося подолати завдяки використанню спеціальним чином параметризованих геодезичних конформно еквівалентної ріманової метрики $\langle\cdot,\cdot\rangle_V|_{T_xM} := e^{V(x)}\langle\cdot,\cdot\rangle|_{T_xM}$, де $V:\Omega\to\mathbf{R}$ – відповідним чином дібрана гладка функція.

Застосуванню варіаційного методу до відшукання квазіперіодичних розв'язків конкретних лагранжевих систем, зокрема, систем на двовимірній сфері, буде присвячено окрему статтю.

1. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий. – М., 1967. 2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. – М., 1971. 3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. – М., 1986. 4. Захарін С.Ф., Парасюк І.О. Узагальнені та класичні майже періодичні розв'язки лагранжевих систем,опуклих на компакті // Укр. мат. журн. – 1998. – т.50, №12. – С.1601-1608. 5. Захарін С.Ф., Парасюк І.О. Узагальнені квазіперіодичні розв'язки лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Вісн. Київ. Ун-ту. Математика. Механіка – 1999. – Вип.3. – С.15-20. 6. Захарін С.Ф., Парасюк І.О. Про гладкість узагальнених квазіперіодичних розв'язків лагранжевих систем на ріманових многовидах недодатної кривини // Нелінійні коливання. – 1999. – т.2, №2, – С.180-193. 7. Ayachi M. Variational methods and almost periodic solutions of second order functional differential equations with infinite delay // Commun. Math. Anal. – 2010. – Vol.9, №1, – P.15-31. 8. Berger M., Zhang L. A new method for large quasiperiodic nonlinear oscillations with fixed frequenciesfor nondissipative second order conservative systems of second type // Commun. Appl. Nonlinear Anal. – 1996. – Vol.3, №1. – P. 25-49. 9. Blot J. Calculus of variations in mean and convex Lagrangians // Int. J. Math. Anal. Appl. – 1988. – Vol.134, №2. – P. 312-321. 10. Blot J. Calculus of variations in mean and convex Lagrangians II // Bull. Austral. Math. Soc. – 1989. – Vol.40. – P. 457-463. 11. Blot J. Calculus of variations in mean and convex Lagrangians III // Israel J. Math. – 1989. – Vol.67, № 3, – P. 337-344. 12. Blot J. Almost periodically forced pendulum // Funkc. Ekvac. Serio Internacia. – 1993. – Vol.36. – P. 235-250. 13. Ortega R. The pendulum equation: from periodic to almost periodic forcings // Diff. Int. Equat. – 2009. – Vol.22, №9-10. – P. 801-814.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 517.98

В. Романенко, асист., А. Чайковський, доц.
e-mail: Romvik13@ukr.net, ChaikovskiyAV@ukr.net

НАБЛИЖЕННЯ ОБМЕЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАРШОГО ПОРЯДКУ РОЗВ'ЯЗКАМИ ЗАДАЧ КОШІ

Доведено, що обмежений розв'язок деякого абстрактного диференціального рівняння старшого порядку можна на заданому відрізку наблизити розв'язками відповідних задач Коші.

It is proved that bounded solution of the abstract differential equation of higher order could be approximated on the given segment by solutions of corresponding Cauchy problems.

1. Вступ

У статті досліджено питання апроксимації обмеженого на всій осі розв'язку лінійного диференціального рівняння довільного порядку в банаховому просторі вигляду

$$x^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}A_k x^{(k)}(t)+y(t),\ t\in\mathbf{R}, \tag{1}$$

розв'язками задач Коші з нульовими початковими умовами на заданому відрізку. Точність наближення визначається властивостями операторних коефіцієнтів та початковими точками для задач Коші. Отримані результати узагальнюють твердження з [1], для випадку рівняння першого порядку.

2. Основні результати

Нехай $(\mathbf{B},\|\cdot\|)$ – комплексний банахів простір, $L(\mathbf{B})$ – множина лінійних неперервних операторів в $\mathbf{B}$, $\{A_k : 0\le k\le n-1\}\subset L(\mathbf{B})$, оператори $A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ попарно комутують. Позначимо також $T:=\{it : t\in\mathbf{R}\}$.

Лема 1. Нехай виконується умова:

$$\forall z\notin T\ \exists\left(z^n I-\sum_{k=0}^{n-1}A_k z^k\right)^{-1}\in L(\mathbf{B}).$$

Тоді для довільної обмеженої на осі неперервної функції $y:\mathbf{R}\to\mathbf{B}$ існує єдиний обмежений разом з усіма похідними до $m-1$ порядку розв'язок $x\in C^m(\mathbf{R},\mathbf{B})$ диференціального рівняння (1).

Доведення. Позначимо через $\mathbf{B}^m$ декартів добуток m екземплярів простору $\mathbf{B}$; $\mathbf{B}^m$ – комплексний банахів простір з покоординатним додаванням і множенням на скаляр та нормою

$$\|\overline{z}\|_m := \max_{1\le k\le m}\|z_k\|,\quad \overline{z}=(z_1,...,z_m)\in\mathbf{B}^m.$$

З урахуванням правил матричного числення рівняння (1) можна переписати у вигляді рівняння в цьому просторі таким чином:

$$\overline{z}'(t)=H\overline{z}(t)+\overline{f}(t),\ t\in\mathbf{R},$$

$$\overline{z}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ x_1(t)\\ \vdots\\ x_{m-1}(t)\end{pmatrix},\quad \overline{f}(t)=\begin{pmatrix}y(t)\\ \overline{0}\\ \vdots\\ \overline{0}\end{pmatrix},\quad H:=\begin{pmatrix}O & I & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & O & I\\ A_0 & A_1 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

причому на незаповнених місцях матриці H знаходяться нульові оператори. Матриця H визначає в просторі $\mathbf{B}^m$ обмежений оператор, який теж позначатимемо буквою H.

Нехай $z\in T$. Тоді оператор $H-zI$ має обернений, бо дискримінант відповідної матриці, рівний

$$A_0(-1)^{n-1}+A_1(-1)^{n-2}(-z)+A_2(-1)^{n-3}(-z)^2+...+(A_{n-1}-zI)(-z)^{n-1}=(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}A_k z^k-z^n I\right),$$

має обернений оператор за умовою теореми. При цьому аналогічно до відомих формул лінійної алгебри [2, с. 26] обернений оператор можна записати у формі матриці з відповідних мінорів, домноженої на оператор, що обернений до дискримінанта. Тому оператор H з використанням теорії спектральних множин [3] можна подати у вигляді суми операторів H_+ та H_-, спектри звужень яких на відповідні інваріантні підпростори $\mathbf{B}^m_+,\mathbf{B}^m_-$ лежать у правій та лівій півплощині відповідно. Простір $\mathbf{B}^m$ при цьому є прямою сумою підпросторів $\mathbf{B}^m_+,\mathbf{B}^m_-$, проектори на які позначимо P_+,P_-. Шуканий розв'язок буде сумою розв'язків рівнянь у відповідних підпросторах. Як відомо, обмежений на осі розв'язок існує, причому він задається формулою

$$\overline{z}(t)=-\int_t^{+\infty}e^{H_+(t-s)}P_+\overline{f}(s)\,ds+\int_{-\infty}^{t}e^{H_-(t-s)}P_-\overline{f}(s)\,ds,\ t\in\mathbf{R}.$$

© Романенко В., Чайковський А., 2012

Першою координатою цього розв'язку є шукана функція x:

$$x(t) = -\left(\int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s) ds\right)_1 + \left(\int_{-\infty}^{t} e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s) ds\right)_1, \ t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді для довільних* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $y_1 \in C((-\infty, t_2], \mathbf{B})$, $y_2 \in C([t_1, +\infty), \mathbf{B})$, *кожна з задач Коші*

$$u_1^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_1^{(k)}(t) + y_1(t), \ t \ge t_1, \ u_1(t_1) = u_1'(t_1) = ... = u_1^{(n-1)}(t_1) = \overline{0}, \tag{4}$$

$$u_2^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k u_2^{(k)}(t) + y_2(t), \ t \le t_2, \ u_2(t_2) = u_2'(t_2) = ... = u_2^{(n-1)}(t_2) = \overline{0}, \tag{5}$$

має єдиний m *разів неперервно диференційовний розв'язок.*

Доведення аналогічне доведенню леми 1. При цьому розв'язки задач Коші існують і записуються у вигляді

$$u_1(t) = \left(\int_{t_1}^{t} e^{H(t-s)} \overline{f_1}(s) ds\right)_1, \ t \ge t_1; \qquad u_2(t) = \left(\int_{t_2}^{t} e^{H(t-s)} \overline{f_2}(s) ds\right)_1, \ t \le t_2. \tag{6}$$

Теорема 1. *Нехай виконується умова:*

$$\forall z \notin T \ \exists \left(z^n I - \sum_{k=0}^{n-1} A_k z^k\right)^{-1} \in L(\mathbf{B}).$$

Нехай $y \in C(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ *– обмежена на осі функція,* $x \in C^m(\mathbf{R}, \mathbf{B})$ *– відповідний їй обмежений розв'язок рівняння (1), що існує за лемою 1,* $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $t_1 < t_2$, u_1, u_2 *– розв'язки задач Коші (4) та (5), що існують за лемою 2 для функцій* $y_1 := P_- y$, $y_2 := P_+ y$. *Покладемо*

$$u(t) := u_1(t) + u_2(t), \ t \in [t_1, t_2].$$

Тоді існують сталі $C > 0, \ h > 0$, *залежні лише від операторних коефіцієнтів і незалежні від функції* y, *такі, що виконується оцінка*

$$\forall t \in [t_1, t_2] \ : \ \|x(t) - u(t)\| \le C\left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)}\right)\|y\|_\infty. \tag{7}$$

Доведення. Враховуючи розташування спектру операторів H_-, H_+, отримаємо оцінки

$$\exists L > 0 \ \exists h > 0 \ \forall t \in \mathbf{R} : \left\|e^{-H_+ t}\right\| \le L e^{-ht}, \ \left\|e^{H_- t}\right\| \le L e^{-ht}.$$

Використовуючи зображення (3) і (6), отримаємо

$$\|x(t) - u(t)\| = \left\| -\left(\int_t^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s) ds\right)_1 + \left(\int_{-\infty}^{t} e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s) ds\right)_1 + \left(\int_{t_1}^{+\infty} e^{H_+(t-s)} P_+ \overline{f}(s) ds\right)_1 - \left(\int_{-\infty}^{t_2} e^{H_-(t-s)} P_- \overline{f}(s) ds\right)_1 \right\| \le$$

$$\le \left\|\int_{-\infty}^{t_1} e^{H_-(t-s)} \overline{f}(s) ds\right\| + \left\|\int_{t_2}^{+\infty} e^{H_+(t-s)} \overline{f}(s) ds\right\| \le \frac{L}{h}\left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)}\right)\left\|\overline{f}\right\|_\infty = \frac{L}{h}\left(e^{-h(t-t_1)} + e^{h(t-t_2)}\right)\|y\|_\infty, \ t \in [t_1, t_2].$$

Зауваження. 1. Теорема показує, що для довільного відрізка $[a, b]$ та значення $\varepsilon > 0$ можна обрати відрізок $[t_1, t_2] \supset [a, b]$ з настільки великими значеннями $t_2 - b, a - t_1$, що на цьому відрізку обмежений на осі розв'язок та сума розв'язків відповідних задач Коші будуть відрізнятися за нормою не більше, ніж на ε.

2. У випадку, коли один з операторних коефіцієнтів A_k, $k \ne 0$, є необмеженим, то побудований в доведенні леми 1 оператор H не має оберненого при $z = 0$, що легко перевірити безпосередньо. У тому разі, коли необмеженим є оператор A_0, то матричний оператор $(H - zI)^{-1}$ міститиме компоненти вигляду $A_0\left(A_0 - C(z)\right)^{-1}$, де $C(z) \in L(\mathbf{B})$. Норми таких компонент можуть не спадати при $z \to \infty$ за межами деякого сектора, отже оператор H не буде секторіальним [4] і до нього не можна застосувати результат статті [1].

Приклад. Розглянемо рівняння

$$x^{(n)}(t) = A_0 x(t) + y(t), \ t \in \mathbf{R}.$$

Для нього умова теореми 1 набуває вигляду $\forall z \notin T \ \exists \left(z^n I - A_0\right)^{-1} \in L(\mathbf{B})$, тобто при непарних n: $\sigma(A_0) \cap T = \varnothing$, при $n = 4k, \ k \in \mathbf{N}$ – $\sigma(A_0) \cap [0, +\infty) = \varnothing$, при $n = 4k - 2, \ k \in \mathbf{N}$ – $\sigma(A_0) \cap (-\infty, 0] = \varnothing$.

3. Висновки

В роботі дано узагальнення відомих умов апроксимації обмеженого на осі розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку в абстрактному просторі розв'язками відповідних задач Коші на випадок рівнянь старших порядків.

1. Городній М.Ф., Романенко В.М. Апроксимація обмеженого розв'язку одного різницевого рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом розв'язками відповідних крайових задач // Укр. мат. журн. – 2000. – Т.52, №4. – С. 548-552. 2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., 1966. 3. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М., 1976. 4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985.

Надійшла до редколегії 09.11.11

УДК 517.9

Г. Степанюк, асп., О. Чичурін, д-р фіз.-мат. наук, проф.
stepgp@inbox.ru, chichurin@gmail.com

ОДНОПАРАМЕТРИЧНІ СІМ'Ї РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ТРЕТЬОГО СТУПЕНЯ, ЩО ПОВ'ЯЗАНЕ З УЗАГАЛЬНЕНИМ РІВНЯННЯМ АБЕЛЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Будуються диференціальні рівняння другого порядку третього степеня, для яких доводиться наявність двох однопараметричних сімей розв'язків у формі загальних розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. За допомогою еквівалентної системи двох диференціальних рівнянь встановлюється зв'язок між побудованими диференціальними рівняннями і диференціальними рівняннями другого порядку першого степеня, які мають однопараметричні сім'ї розв'язків у формі загальних розв'язків рівнянь Абеля.

There are constructed the second order differential equations of third degree for which existence of two one-parameter solution sets in the form of general solutions to the first order differential equations is proved. By means of equivalent system of differential equations there is demonstrated connection between constructed differential equations and the second order differential equations of the first degree that have one-parameter solution sets in the form of general solutions of Abel equations.

Вступ. Найпростішими з точки зору структури правої частини диференціального рівняння першого порядку в нормальному вигляді, після рівняння Ріккаті, є рівняння вигляду

$$\frac{dw}{dz} = a_0(z)w^3 + a_1(z)w^2 + a_2(z)w + a_3(z). \tag{1}$$

Це рівняння, як і рівняння Ріккаті, часто зустрічається в теорії диференціальних рівнянь та її застосуваннях [1].

Аналітичні властивості розв'язків рівняння (1) суттєво відрізняються від властивостей розв'язків рівняння Ріккаті. Це пояснюється двома причинами: 1) розв'язки рівняння (1) мають рухомі алгебраїчні точки розгалуження другого порядку у той час, як розв'язки рівняння Ріккаті можуть мати лише рухомі полюси першого порядку; 2) рівняння Ріккаті завжди зводиться до однорідного лінійного рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, в той час як для рівняння (1) це можливо лише в окремих випадках. Для відшукання загального розв'язку рівняння Ріккаті достатньо знати один його частинний розв'язок, у той час як для рівняння (1) питання про побудову його загального розв'язку за його частинними розв'язками не розглядалося. З іншого боку, очевидно, що для побудови рівняння вигляду (1) завжди достатньо знати чотири його (різні) частинні розв'язки [2].

У [2, 3] для рівняння Абеля першого роду побудовано диференціальне рівняння другого порядку

$$\begin{aligned} &16w^6a_0^3 + 32w^5a_0^2a_1 + w^4\left(20a_0a_1^2 + 20a_0^2a_2\right) + 2a_1a_2a_3 - 2a_0a_3^2 - 5a_0\left(w'\right)^2 + \\ &+w'(-20w^3a_0^2 - 20w^2a_0a_1 - 3a_1a_2 + 7a_0a_3 + w\left(-6a_1^2 - 2a_0a_2 - 3a_0\right) - a_1) + a_3a_1 + \\ &+w^3\left(4a_1^3 + 22a_0a_1a_2 + 14a_0^2a_3 + 2a_1a_0 - 2a_0a_1\right) + w^2\left(6a_1^2a_2 + 4a_0a_2^2 + 14a_0a_1a_3 + 3a_2a_0 - 3a_0a_2\right) - a_1a_3 + \\ &+w\left(2a_1a_2^2 + 4a_1^2a_3 + 2a_0a_2a_3 + 3a_3a_0 + a_2a_1 - a_1a_2 - 3a_0a_3\right) + \left(3wa_0 + a_1\right)w'' = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

У статтях [3, 4] доведено, що рівняння (2) має однопараметричні сім'ї розв'язків у формі загального розв'язку рівняння (1) і рівняння

$$w' = b_0(z)w^3 + b_1(z)w^2 + b_2(z)w + b_3(z), \tag{3}$$

коефіцієнти $b_i(z)$, $i = \overline{0,3}$, якого відрізняються від функцій $a_i(z)$, $i = \overline{0,3}$, і мають вигляд

$$\begin{gathered} b_0 = 4a_0, b_2 = \frac{b_1^2 + 12a_0a_2 - 4a_1^2}{12a_0}, \qquad b_3 = a_3 + \frac{a_1(b_1 - 2a_1)^2}{36a_0^2}, \\ b_1 = \frac{1}{36a_0}(b_1^3 - 12a_1b_1^2 + 36(a_1^2 + a_0 + a_0a_2)b_1 - 32a_1^3 - 72a_0a_1a_2 - 216a_0^2a_3 - 72a_1a_0 + 72a_0a_1) \end{gathered} \tag{4}$$

або

$$\begin{gathered} b_0 = 4a_0, \quad b_2 = a_2 + \frac{b_1^2 - 4a_1^2}{12a_0}, \quad b_3 = \frac{1}{180a_0^2}(12a_1^3 - 20a_1^2b_1 + a_1(36a_0a_2 + 5b_1^2 + 36a_0) + 36a_0(2a_0a_3 - a_1)), \\ b_1 = \frac{1}{180a_0}(180a_1^2b_1 - 224a_1^3 - 1944a_0^2a_3 - 12a_1(6a_0a_2 + 5b_1^2 + 6a_0) + 5(b_1^3 + 36b_1a_0) + 36a_0(5a_2b_1 + 2a_1)) \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} 152a_1^5 - 112a_1^4b_1 - 2a_1^3(234a_0a_2 - 7b_1^2 + 234a_0) + 36a_1^2(57a_0^2a_3 + 14b_1a_0 + a_0(14a_2b_1 + 13a_1)) - \\ -9a_1(a_0(7b_1^2 + 108a_0) + 12a_0^2(9a_2^2 + 14a_3b_1 - 3a_2) + a_0(a_2(7b_1^2 + 180a_0) + 56b_1a_1 - 36a_0)) + 9a_0((7b_1^2 + 108a_0)a_1 + \\ +108a_0^2(3a_2a_3 - a_3) + 3a_0(a_3(7b_1^2 + 36a_0) + 48a_2a_1 - 12a_1)) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Рівняння (2) як рівняння, що має дві однопараметричні сім'ї розв'язків у формі загального розв'язку рівняння Абеля, будемо називати *узагальненим рівнянням Абеля* другого порядку.

У статті [4] для рівняння (2) побудовано дві еквівалентні системи виду

$$\begin{cases} w' = k_0 + k_1w + k_2w^2 + k_3w^3 + (3a_0w + a_1)u, \\ u' = \alpha u^2 + (p_0w^2 + p_1w + p_2)u + q_0w^3 + q_1w^2 + q_2w + q_3, \end{cases} \tag{7}$$

© Степанюк Г., Чичурін О., 2012

з двома наборами коефіцієнтів $k_i, q_i, i=\overline{0,3}$, p_0, p_1, p_2, що залежать від z, а саме:

$$\alpha = 2a_0,\ p_0 = 6a_0,\quad k_3 = a_0,\quad k_2 = 3p_1 - 11a_1,\ k_1 = \frac{3}{4}p_2 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{7a_1}{4a_0}(p_1 - 4a_1),\ k_0 = a_3 + \frac{a_0 a_1(p_2 - 2a_2) - 4a_1^3 + 4a_1^2 p_1}{4a_0^2},$$

$$q_0 = 5p_1 - 20a_1,\ q_1 = \frac{3}{2}p_2 - 3a_2 + \frac{25a_1 p_1 - 68a_1^2 - 2p_1^2}{2a_0},$$

$$q_2 = \frac{1}{4a_0^2}(28a_1^2 p_1 - 64a_1^3 + 4p_1 a_0 - a_1(16a_0 a_2 + 3p_1^2 + 16a_0) + a_0(2a_2 p_1 + p_1 p_2 + 16a_1 - 4p_1)), \tag{8}$$

$$q_3 = \frac{1}{8a_0^3}(8a_1^3 p_1 - 16a_1^4 - a_1^2(16a_0 a_2 + p_1^2 + 16a_0) + a_1(32a_0^2 a_3 + 4p_1 a_0 + a_0(4a_2 p_1 + 16a_1 - 2p_1)) +$$

$$+a_0(2p_2 a_0 - 4a_2 a_0 - 2p_1 a_1 + a_0(p_2^2 - 4a_2^2 - 8a_3 p_1 + 4a_2 - 2p_2)))$$

та

$$\alpha = 2a_0,\ p_0 = 4a_0,\ k_3 = 4a_0,\ k_2 = 3p_1 - 4a_1,\ k_1 = \frac{3}{4}p_2 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{7a_1}{4a_0}(p_1 - 2a_1),\ k_0 = a_3 + \frac{a_1^2 p_1 - 2a_1^3 + a_0 a_1(p_2 - 2a_2)}{4a_0^2},$$

$$q_0 = 0, q_1 = p_2 - 2a_2 + \frac{5a_1 p_1 - 6a_1^2 - p_1^2}{a_0},\ q_2 = \frac{1}{4a_0^2}(14a_1^2 p_1 - 16a_1^3 - 8a_0^2 a_3 + 4p_1 a_0 - a_1(8a_0 a_2 + 3p_1^2 + 8a_0) +$$

$$+a_0(2a_2 p_1 + p_1 p_2 + 8a_1 - 4p_1)),\ q_3 = \frac{1}{8a_0^3}(4a_1^3 p_1 - 4a_1^4 - a_1^2(8a_0 a_2 + p_1^2 + 8a_0) + 2a_1(8a_0^2 a_3 + 2p_1 a_0 + a_0(2a_2 p_1 + 4a_1 - p_1)) +$$

$$+a_0(2p_2 a_0 - 4a_2 a_0 - 2p_1 a_1 + a_0(p_2^2 - 4a_2^2 - 8a_3 p_1 + 4a_2 - 2p_2))). \tag{9}$$

Між функціями u і w системи (7) і рівняння (2) існує наступний зв'язок: якщо з першого рівняння системи (7) знайти функцію u, тобто записати

$$u = \frac{w' - (k_0 + k_1 w + k_2 w^2 + k_3 w^3)}{3a_0 w + a_1}, \tag{10}$$

а потім підставити (10) у друге рівняння, то в результаті отримаємо рівняння (2).

У даній статті розглядається задача про побудову диференціальних рівнянь з певними (наперед визначенними) властивостями розв'язків в околі їх рухомих особливих точок: для випадку, коли однопараметричні сімейства розв'язків шуканих рівнянь визначаються через загальний розв'язок рівнянь Абеля першого порядка, що має рухомі алгебраїчні особливі точки. Ця задача є однією з актуальних задач сучасної аналітичної теорії диференціальних рівнянь.

Основний результат. Для того, щоб сформулювати основний результат статті, виконаємо наступну процедуру: продиференціюємо друге рівняння системи (7) за z, а потім з системи (7) і отриманого рівняння виключимо функції $w(z)$, $w'(z)$. В результаті отримаємо рівняння другого порядку з поліноміальною правою частиною третього ступеня, яке позначимо (A). Це рівняння не записуємо тут через його громіздкість.

Відомо [5], що рівняння Абеля (1) завжди можна звести до канонічної форми

$$w' = w^3 + i(z), \tag{11}$$

тобто маємо наступні коефіцієнтні рівності

$$a_0(z) = 1,\quad a_1(z) = 0,\quad a_2(z) = 0,\quad a_3(z) = i(z). \tag{12}$$

Для спрощення подальших викладок покладемо

$$p_1(z) = 1,\quad p_2(z) = 0. \tag{13}$$

Враховуючи (12), перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$3ww'' - 5w'^2 + (-20w^3 + 7i)w' + 16w^6 + 14iw^3 - 3i'w - 2i^2 = 0. \tag{14}$$

Рівняння (14) має сім'ю розв'язків, які задовольняють рівняння (11). Наступна сім'я розв'язків отримується з рівнянь (3), (4), (12), тобто

$$w' = 4w^3 + b_1 w^2 + \frac{1}{12}b_1^2 w + i, \tag{15}$$

де коефіцієнт $b_1(z)$ пов'язаний з функцією $i(z)$ співвідношенням

$$b_1 = \frac{1}{36}b_1^3 - 6i. \tag{16}$$

Третя однопараметрична сім'я розв'язків рівняння (14) є загальним розв'язком рівняння, отримується з рівнянь (3), (5), (12) і співвідношення (6):

$$w' = 4w^3 + b_1 w^2 + \frac{1}{12}b_1^2 w + \frac{2}{5}i, \tag{17}$$

де $b_1^2 = 36i'/(7i)$, а функцію $i(z)$ можна визначити як гіпергеометричну функцію [6]:

$$i(z) = InverseFunction[-(7(4\times 5^{2/3}(20C_1 + 189\sqrt{7}\sharp 1^{4/7}) + 63\sqrt{7}\ ,$$

$$Hypergeometric2F1[\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{2},-\frac{189\sqrt{7}\sharp 1^{4/7}}{20C_1}](40 + \frac{378\sqrt{7}\sharp 1^{4/7}}{C_1})^{2/3}\ \sharp 1^{4/7})\sharp 1)/(40\times 2^{2/3}C_1(20C_1\sharp 1^{27/14} + 189\sqrt{7}\sharp 1^{5/2})^{2/3})\&][z + C_2]. \tag{18}$$

Таким чином, отримано наступний результат.

Теорема 1. *Диференціальне рівняння (14) має три однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (11);) (15), (16) та (17), (18).*

Тепер, підставивши (8), (12), (13) у систему (7), отримаємо систему:

$$\begin{cases} w' = w^3 + 3w^2 + 3wu + i(z), \\ u' = 2u^2 + (6w^2 + w)u + 5w^3 - w^2 - i(z), \end{cases} \tag{19}$$

яка еквівалентна рівнянню (14).

Рівняння (А), що відповідає рівнянню (14) і системі (19), має вигляд

$$\begin{aligned}
&368640u^{10} + 884736u^{11} + 324i^4(-136 + 1308u + 1152u^2 + 1026u^3 - 1575u') + 1536u^7(-443u' + 81(u')^2 - 63u'') + 625(u'')^3 + \\
&+96u^5(13917(u')^2 + 1440(u')^3 + u'(60 - 2148u'') + u''(355 + 81u')) + 384u^6(6978(u')^2 + 341u'' - 3u'(193 + 90u'')) + \\
&+3u(183924(u')^4 + 35108(u')^2u'' + u'(176 - 1075u'')u'' + 240(u'')^2 + 14(u')^3(832 + 675u'')) + 6u^3(-247404(u')^3 + 2304(u')^4 - \\
&-28020u'u'' + u''(-144 + 2585u'') + 4(u')^2(-2744 + 7401u'')) + i'(-96768u^7 + 165888u^8 + 8100i^3(-8 + 3u) - 16i' + 625(i')^2 - \\
&-2700i'u' - 336(u')^2 - 38475(u')^3 - 384u^6(-341 + 270u') - 6i^2(64 - 15876u^2 - 14256u^3 + 5184u^4 + 29025u' - 3u(4472 + 5175u')) - \\
&-32u'' + 1875i'u'' - 5400u'u'' + 1875(u'')^2 - 48u^4(-730 + 75i' - 307u' + 432(u')^2 + 150u'') + 96u^5(355 + 81i' - 2148u' + 162u'') + \\
&+3u(35108(u')^2 + 9450(u')^3 - 5i'(-48 + 215u') + u'(176 - 2150u'') + 480u'') + 6u^3(-144 + 2585i' - 28020u' + 29604(u')^2 + 5170u'') - \\
&-6u^2(4371(u')^2 + 10i'(44 + 195u') + 880u'' + 12u'(298 + 325u'')) - 3i(74304u^5 + 6912u^6 + u^3(61484 - 74520u') + \\
&+48u^4(-77 + 360u') + 5(170i' + 48u' + 9855(u')^2 + 340u'') - 2u(64 + 600i' + 30745u' + 16200(u')^2 + 1200u'') + \\
&+2u^2(2512 + 1800i' - 9555u' + 3600u''))) + 3i^2(217728u^7 + 124416u^8 - 160434(u')^2 - 151875(u')^3 - 288u^6(-3241 + 216u') - \\
&-1080u^5(-361 + 288u') - 128u'' - 48u^4(-1592 + 20007u' + 216u'') + 8u^3(-1240 - 168930u' + 21303(u')^2 + 3564u'') + \\
&+6u^2(32 + 11394u' + 33093(u')^2 + 5292u'') - 6u'(64 + 9675u'') + 2u(451251(u')^2 + 13416u'' + u'(8992 + 15525u''))) = \\
&= 145800i^5 + 784(u')^3 + 135324(u')^4 + 18225(u')^5 + 2048u^9(-89 + 540u') + 4608u^8(1 + 492u' - 36u'') + 336(u')^2u'' + 38475(u')^3u'' + \\
&+16(u'')^2 + 2700u'(u'')^2 + 48u^4(12330(u')^3 - 307u'u'' + 5u''(-146 + 15u'') + (u')^2(-4982 + 432u'')) + 2i^3(128 + 538488u^4 + \\
&+373248u^5 + 93312u^6 + 119880u' + 346275(u')^2 - 216u^3(-3052 + 1755u') - 108u^2(89 + 4320u') + 32400u'' - \\
&-18u(352 + 47430u' + 675u'')) + 6u^2(-25404(u')^3 + 30537(u')^4 + 440(u'')^2 + 6u'u''(596 + 325u'') + 3(u')^2(-80 + 1457u'')) + \\
&+3i(691200u^8 + 479232u^9 - 3840u^7(-53 + 72u') - 64u^6(-793 + 28368u' - 108u'') + 192u^5(-7 - 4422u' + 9(u')^2 + 387u'') + \\
&+16u^4(49464(u')^2 - 231u'' + 8u'(-1186 + 135u'')) + 2u^2(-56382(u')^2 + 24570(u')^3 + 8u''(314 + 225u'') - 21u'(16 + 455u'')) - \\
&-2u(329265(u')^3 + 30745u'u'' + 8(u')^2(1588 + 2025u'')) + 8u''(8 + 75u'') - 4u^3(-351465(u')^2 + 8280(u')^3 - 15371u'' + \\
&+6u'(-1324 + 3105u'')) + 5(28062(u')^3 + 9720(u')^4 + 48u'u'' + 170(u'')^2 + (u')^2(112 + 9855u''))).
\end{aligned} \tag{20}$$

Щоб знайти однопараметричні сім'ї розв'язків рівняння (20), зробимо наступне: із системи (8), (10) – (13) визначимо $u = -w,$ або, враховуючи рівність (11), отримаємо

$$u' = u^3 - i(z). \tag{21}$$

Потім з системи (8), (10), (12), (13), (15), (16) знаходимо

$$u = w^2 + \frac{1}{3}(b_1 - 3)w + \frac{1}{36}b_1^2. \tag{22}$$

Підставляючи співвідношення (22)у рівність (15) і враховуючи (16), отримуємо

$$u' = \frac{1}{216}(3(43 + 12u - 5\varphi)b_1^2 - 72(3i + 2(\varphi + 3u(\varphi - 4u - 5) - 3)) + 36(3\varphi - 13 + 2u(\varphi - 14))b_1 - 5b_1^3), \tag{23}$$

де

$$\varphi \equiv \sqrt{36u - 6b_1 + 9}. \tag{24}$$

Таким чином, отримано наступний результат.

Теорема 2. *Диференціальне рівняння (20) має дві однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (21) та (23), (24), (16).*

Тепер, підставивши (9), (12), (13) в систему (7), отримаємо ще одну систему

$$\begin{cases} w' = 4w^3 + 3w^2 + 3wu + i(z), \\ u' = 2u^2 + (4w^2 + w)u - w^2 - 2i(z)w - i(z), \end{cases} \tag{25}$$

що еквівалентна рівнянню (14).

Рівняння, що аналогічне рівнянню (A) у попередньому випадку, і яке відповідає рівнянню (14) та системі (25), позначимо як рівняння (B). Тут не записуємо це рівняння в явному вигляді через його громіздкість. Для того, щоб отримати однопараметричні сім'ї розв'язків рівняння (B), за допомогою методу, що описаний вище у випадку рівняння (20), з системи (9), (10) – (13) знаходимо $u = -w(1+w)$, або, враховуючи рівність (11), маємо:

$$u' = \frac{1}{2}\sqrt{1-4u}(2i - 1 - \sqrt{1-4u} + (3 + \sqrt{1-4u})u). \tag{26}$$

Далі, з системи (9), (10), (12), (13), (15), (16) знаходимо

$$u = \frac{1}{36}\left(12(b_1 - 3)w + b_1^2\right). \tag{27}$$

Підставляючи (27) у рівність (15) і враховуючи (16), отримуємо:

$$u' = \frac{1}{144(b_1-3)^2}(-b_1^4 + 4u(b_1^2 - 3b_1 + 27)b_1^2 - 1296u^2 b_1 + 5184u^3 + 24i(b_1 - 3)(b_1^2 - 6b_1 - 36u + 18)). \tag{28}$$

Таким чином, встановлено наступний результат.

Теорема 3. *Диференціальне рівняння (B) має дві однопараметричні сім'ї розв'язків, що визначаються співвідношеннями (26) та (28), (16).*

Висновок. З допомогою вищевикладеного методу доведено (теореми 1-3), що рівняння (14) і (B) мають однопараметричні сім'ї розв'язків у вигляді загальних розв'язків рівняння Абеля (1) і наведена аналітична форма цих розв'язків.

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. – М.: Наука, 1993. – 462 с. 2. Лукашевич Н.А., Чичурин А.В. Дифференциальные уравнения первого порядка. – Мн.: БГУ, 1999. – 210 с. 3. Чичурин А.В. О существовании отображений между нелинейным уравнением второго порядка и уравнениями Абеля // Вестник Белорусского университета. Сер. 1, Математика. – 2003. – №3. – С. 76 – 80. 4. Чичурин А.В. Использование системы Mathematica при поиске конструктивных методов интегрирования уравнения Абеля // Вучоныя запіскі БрДУ імя А.С.Пушкіна. – 2007. – Т.3, ч.2. – С. 24 – 38. 5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с. 6. http://search.wolfram.com/?query=InverseFunction.

Надійшла до редколегії 17.04.11

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, К. Федоренко, асп.,
e-mail: vsa@univ.kiev.ua

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ НА ПЛОЩИНІ З КОРЕЛЯЦІЙНОЮ ФУНКЦІЄЮ ТИПУ КОШІ

Розглянуто задачу статистичного моделювання однорідних та ізотропних випадкових полів на площині із кореляційною функцією типу Коші. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій таких випадкових полів на основі їх спектрального розкладу.

The problem of statistical simulation of homogeneous and isotropic random fields on the plane with Koshi correlations functions has been considered. It has been constructed the model and algorithm for the statistical simulation of this fields realizations on the base of its spectral decomposition.

Вступ

За допомогою методів Монте-Карло можна згенерувати на комп'ютері реалізації важливих у практичному застосуванні випадкових полів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію. А саме, якщо поле гауссівське, то використовують його математичне сподівання та кореляційну функцію. Цій проблемі на прикладі моделі Коші присвячено подану роботу.

1. Постановка задачі та її розв'язання

Розглядається задача статистичного моделювання реалізацій однорідних та ізотропних випадкових полів на площині з кореляційною функцією типу Коші. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для таких випадкових полів. Вони використовуються у побудованому моделюючому алгоритмі, що розроблений на основі спектрального розкладу полів [1, c. 59] .

Нехай $\xi(x), (x \in R^2)$ − дійснозначне і неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині.

Означення: Випадкове поле $\xi(x)$ називається однорідним, якщо виконуються умови:

1) $E\xi(x) = const$ (припустимо,що $E\xi(x) = 0$);

2) $B(x, y) = B(x - y) = E\xi(x)\overline{\xi}(y) = \int\limits_{R^2} e^{i(\lambda, x-y)}\mu(d\lambda)$,

тобто його кореляційна функція $B(\rho)$ залежить лише від різниці $x - y$, де $\mu(d\lambda)$ − спектральна міра однорідного випадкового поля *ξ(x)* .

Означення: Випадкове поле $\xi(x)$ називається ізотропним, якщо $B(\rho) = B(|x - y|)$,тобто, його кореляційна функція залежить лише від довжини вектора $x - y$ і не залежить від його напрямку.

Як відомо [6], кореляційну функцію випадкового поля на площині $\xi(x)$ можна подати у вигляді:

$$B(\rho) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)d\Phi(\lambda) ,$$

де $\Phi(\lambda)$ – обмежена неспадна функція, що є спектральною функцією, а $J_0(x)$ - функція Бесселя першого роду порядку 0.

© Вижва З., Федоренко К., 2012

При цьому, спектральна щільність випадкового поля $\xi(x)$ має вигляд [5, с. 14]: $f(\lambda)=\lambda\int_0^\infty xJ_0(\lambda x)B(x)dx$.

Нехай (r,φ) – полярні координати точки x на площині. При цьому відстань між точками $x_1=(r_1,\varphi_1)$ та $x_2=(r_2,\varphi_2)$ буде рівною $\rho=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$. Тоді має місце наступна теорема [1, с. 46]:

Теорема 1. Неперервне в середньому квадратичному однорідне та ізотропне випадкове поле на площині $\xi(r,\varphi)$ можна подати у вигляді спектрального розкладу:

$$\xi(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\nu_k}\left[\cos k\varphi\int_0^\infty J_k(\lambda r)Z_k^1(d\lambda)+\sin k\varphi\int_0^\infty J_k(\lambda r)Z_k^2(d\lambda)\right], \tag{1}$$

де $\nu_k=\begin{cases}1, & k=0\\ 2, & k>0\end{cases}$, $\{Z_k^i(\bullet)\}_{k=0}^\infty$, $i=1,2$ − послідовність дійснозначних ортогональних випадкових мір на підмножинах Бореля із інтервалу $[0,+\infty)$, таких що виконується умова: $MZ_k^i(S_1)Z_n^j(S_2)=\delta_i^j\delta_k^n\Phi(S_1\cap S_1),\ i=1,2,$ для будь-яких множин Бореля S_1 та S_2 з інтервалу $[0,+\infty]$, причому $\Phi(S)=\int_S d\Phi(u)$, а $J_k(x)$ − функція Бесселя першого роду порядку k.

Запропонований метод базується на спектральній теорії випадкових полів на площині, елементи якої наведені вище. За статистичну модель випадкового поля, що розглядається, візьмемо часткову суму ряду (1) [1, с. 59]:

$$\xi_{чсN}(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{N}\sqrt{\nu_k}\left[\cos k\varphi\int_0^\infty J_k(\lambda r)Z_k^1(d\lambda)+\sin k\varphi\int_0^\infty J_k(\lambda r)Z_k^2(d\lambda)\right] \tag{2}$$

При цьому, значення числа доданків ряду N визначається за допомогою нерівності [1, с. 59] , яка є оцінкою наближення випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ частковими сумами $\xi_N(r,\varphi)$ в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як завгодно малому числу ε (точності моделювання). Така нерівність має вигляд:

$$M[\xi(r,\varphi)-\xi_{чсN}(r,\varphi)]^2\le\frac{1}{\pi N}\left(\frac{1}{2}r\mu_1+r^2\mu_2\right)\le\varepsilon, \tag{3}$$

де $\mu_k=\int_0^\infty\lambda^k d\Phi(\lambda)$.

Взагалі кажучи, статистична модель (2) випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ достатньо складна для того ,щоби її безпосередньо використовувати з метою отримати реалізації такого поля. Тому будемо розглядати в якості моделі більш зручну для моделювання наближену формулу вигляду [1, с. 60] :

$$\xi_N(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{N}\sqrt{\nu_k\,|b_k(r)|}(\varsigma_k\cos k\varphi+\eta_k\sin k\varphi), \tag{4}$$

де $\{\zeta_k,\ k=0,1,2,...,N\}$ та $\{\eta_k,\ k=0,1,2,...,N\}$ − набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин, $\nu_k=\begin{cases}1, & k=0\\ 2, & k>0\end{cases}$, а спектральні коефіцієнти визначаються за формулою:

$$b_k(r)=2\int_0^\infty J_k^2(ru)d\Phi(u). \tag{5}$$

Виберемо приклад широко відомої у застосуванні [6, 7] кореляційної функції, яка має назву − модель Коші. Узагальнений вигляд моделі Коші такий:

$$B(\rho)=\left(1+\frac{\rho^2}{a^2}\right)^{-\nu},\ \ (a>0,\nu>0). \tag{5*}$$

Будемо розглядати модель Коші більш детальніше при значеннях параметра $\nu=0,5$ та $\nu=1$. Знайдемо явний вигляд спектральних коефіцієнтів та формул для обчислення кількості доданків N ряду (4) в залежності від заданої точності ε .

1) Модель Коші при $\nu=0,5$

У цьому випадку кореляційна функція має вигляд:

$$B(\rho)=\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}},\ \ (a>0). \tag{6}$$

Їй відповідає спектральна щільність :

$$f(u)=ae^{-au},\ \ a>0. \tag{6*}$$

Щоб знайти спектральні коефіцієнти в цьому випадку, скористаємось формулою (5) та обчислимо інтеграл:

$$b_k(r) = 2a\int_0^\infty J_k^2(ru)e^{-au}du, \quad a>0, \quad k=0,...,N, \quad r>0 \tag{7}$$

Взагалі кажучи, цей інтеграл не обчислюється в явному вигляді, тому для обчислення спектральних коефіцієнтів потрібно знаходити його наближене значення.

Дослідимо залежність N від r та ε. Оскільки, спектральна щільність має вигляд (6*), то:

$$\mu_1 = \int_0^\infty yae^{-ay}dy = a((-\frac{y}{a}e^{-ay})|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{a}e^{-ay}dy) = 0 - \frac{1}{a}e^{-ay}|_0^\infty = \frac{1}{a};$$

$$\mu_2 = \int_0^\infty y^2ae^{-ay}dy = (-y^2e^{-ay})|_0^\infty + \int_0^\infty 2ye^{-ay}dy = 0 + \int_0^\infty 2ye^{-ay}dy = \frac{2}{a}\int_0^\infty aye^{-ay}dy$$

Звідси отримаємо вирази: $\mu_1 = \frac{1}{a}$, $\mu_2 = \frac{2}{a} * \frac{1}{a} = \frac{2}{a^2}$. Отже, із формули (3) маємо наступний вираз для знаходження кількості гармонік N в моделі (4) :

$$N(r,\varepsilon) \ge \frac{1}{\pi\varepsilon}(\frac{1}{2}r\mu_1 + r^2\mu_2) = \frac{1}{\pi\varepsilon}(\frac{1}{2a}r + \frac{2}{a^2}r^2) \Rightarrow N(r,\varepsilon) = \left[1 + \frac{1}{\pi\varepsilon}(\frac{1}{2a}r + \frac{2}{a^2}r^2)\right] \tag{8}$$

2) Модель Коші при $\nu = 1$

Кореляційна функція при $\nu = 1$ має вигляд:

$$B(\rho) = \frac{a^2}{a^2+\rho^2}, \quad (a>0), \tag{9}$$

Знайдемо спектральну щільність: $f(\lambda) = \lambda\int_0^\infty xJ_0(\lambda x)B(x)dx = \lambda\int_0^\infty xJ_0(\lambda x)\frac{a^2}{a^2+x^2}dx$,

$$f(\lambda) = a^2\lambda K_0(a\lambda), \tag{10}$$

де $K_0(x)$ – модифікована функція Ганкеля (функція Макдональда чи модифікована функція Бесселя другого роду) порядку 0. Вираз (10) отримано за допомогою формули 6.532(4) [2].

Щоб знайти спектральні коефіцієнти в цьому випадку, скористаємось формулою (5) та обчислимо інтеграл:

$$b_k(r) = 2\int_0^\infty J_k^2(ru)a^2uK_0(au)du = 2a^2\int_0^\infty uJ_k^2(ru)K_0(au)du.$$

Отже, маємо вираз для спектральних коефіцієнтів:

$$b_k(r) = \frac{2a}{\sqrt{a^2+4r^2}}\left(1 - \frac{2a}{\sqrt{a^2+4r^2}}\right)^k, \quad a>0, \quad r>0, \quad k\ge 0 \tag{11}$$

Цей вираз потримано за допомогою формули 6.522(3) [2]. Щоб дослідити залежність N від r та ε, обчислимо величини:

$$\mu_1 = \int_0^\infty \lambda \; d\,\Phi(\lambda), \; \mu_2 = \int_0^\infty \lambda^2 \; d\,\Phi(\lambda).$$

Оскільки, спектральна щільність має вигляд (10), то обчислимо наступний інтеграл за допомогою формули 6.561(16) [2]:

$$\int_0^\infty x^\mu K_\nu(ax)dx = 2^{\mu-1}a^{-\mu-1}\Gamma(\frac{1+\mu+\nu}{2})\Gamma(\frac{1+\mu-\nu}{2}), \quad [\mathrm{Re}(\mu+1\pm\nu)>0, \mathrm{Re}\,a>0]$$

Тоді:

$$\mu_1 = \int_0^\infty yf(y)dy = \int_0^\infty ya^2yK_0(ay)dy = a^2\int_0^\infty y^2K_0(ay)dy = a^2 2^{2-1}a^{-2-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{2a}$$

$$\mu_2 = \int_0^\infty y^2f(y)dy = \int_0^\infty y^2a^2yK_0(ay)dy = a^2\int_0^\infty y^3K_0(ay)dy = a^2 2^{3-1}a^{-3-1}\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{2}\right) = \left(\frac{2}{a}\right)^2$$

Отже, із формули (3) маємо:

$$N(r,\varepsilon) \ge \frac{1}{\pi\varepsilon}(\frac{1}{2}r\mu_1 + r^2\mu_2) = \frac{1}{\pi\varepsilon}(\frac{\pi}{4a}r + \frac{4}{a^2}r^2) \Rightarrow N(r,\varepsilon) = \left[1 + \frac{1}{\pi\varepsilon}(\frac{\pi}{4a}r + \frac{4}{a^2}r^2)\right] \tag{12}$$

Для кожного із двох випадків ($\nu = 0,5$, $\nu = 1$) було побудовано алгоритми та написано програми для обчислювальної системи Mathematica, за допомогою яких змодельовано на комп'ютері значення реалізацій випадкового поля $\xi_N(r,\varphi)$. Сформулюємо алгоритми для прикладу Коші.

Алгоритм при $\nu = 0,5$:

1) Визначається значення числа доданків $N = N(r,\varepsilon)$, відповідно наперед заданій точності ε, за допомогою рівності (8). В нашому випадку $N = 27$ при $a = 1$ та при заданій точності моделювання $\varepsilon = 3*10^{-2}$.

2) Обчислюються спектральні коефіцієнти (7) при $a=1$:

$$b_k(r)=2\int_0^\infty J_k^2(ru)e^{-u}du \;,\; k=0,1,...,27$$

Цей інтеграл не обчислюється явно, тому для обчислення коефіцієнтів потрібно було знаходити його наближене значення, наприклад, за допомогою програми Mathematica.

3) Моделюються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{\zeta_k,\ k=0,1,2,...,27\}$ та $\{\eta_k,\ k=0,1,2,...,27\}$.

4) Обчислюються значення реалізації у вигляді суми (4) при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(r_i,\varphi_j)=\sqrt{b_0(r_i)}\varsigma_0+\sum_{k=1}^{27}\sqrt{2|b_k(r_i)|}(\varsigma_k\cos k\varphi_j+\eta_k\sin k\varphi_j)\text{ , де }\ \varphi_j=j*\frac{2\pi}{10},\ \ j=0,...,9$$

$$r_i=0.1*i,\ \ i=1,...,10\ ,b_k(r_i)\ ,\ k=0,1,2,...,27\ .$$

5) Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ і порівнюється із заданою кореляційною функцією (6), тобто проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

За допомогою пакету програм GeoR було побудовано програму, яка будує варіограму $\gamma(\rho)=B(0)-B(\rho)$ для отриманих реалізацій $\xi_N(r,\varphi)$ із встановленими параметрами.

На основі моделі (4) та оцінки (3) можна побудувати аналогічний алгоритм статистичного моделювання гауссівського однорідного ізотропного випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ на площині, яке задається кореляційною функцією (9) типу Коші при значенні параметра $\nu=1$.

Алгоритм при $\nu=1$:

1) Визначається значення числа доданків $N=N(r,\varepsilon)$, відповідно наперед заданій точності ε, за допомогою рівності (12). В нашому випадку $N=39$ при $a=1$ при заданій точності моделювання $\varepsilon=4*10^{-2}$.

2) Обчислюються спектральні коефіцієнти за формулою (11) при $a=1$:

$$b_k(r)=\frac{2}{\sqrt{1+4r^2}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{1+4r^2}}\right)^k,\ \ r>0\ ,\ k=0,1,...,39$$

3) Моделюються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{\zeta_k,\ k=0,1,2,...,39\}$ та $\{\eta_k,\ k=0,1,2,...,39\}$.

4) Обчислюються значення реалізації у вигляді суми (4) при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(r_i,\varphi_j)=\sqrt{b_0(r_i)}\varsigma_0+\sum_{k=1}^{39}\sqrt{2|b_k(r_i)|}(\varsigma_k\cos k\varphi_j+\eta_k\sin k\varphi_j)\text{ , де }\ \varphi_j=j*\frac{2\pi}{10},\ \ j=0,...,9$$

$$r_i=0.1*i,\ \ i=1,...,10\ ,b_k(r_i)\ ,\ k=0,1,2,...,39\ .$$

5) Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового поля $\xi(r,\varphi)$ і порівнюється із заданою кореляційною функцією (9) , а також приводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

Як і впершому випадку, було побудовано програму, яка будує варіограми $\gamma(\rho)=B(0)-B(\rho)$ для отриманих реалізацій $\xi_N(r,\varphi)$ із встановленими параметрами.

На рис. 1 зображено варіограми для моделі Коші при значенні параметрів $\nu=0,5$ та $\nu=1$. Одна варіограма – теоретична (суцільна лінія), а друга варіограма – емпірична (хрестики).

Наведені варіограми було проаналізовано на величину середньоквадратичного відхилення емпіричної від теоретичної.

Для знаходження значень теоретичної та емпіричної варіограм використовувався такий прийом – лінійка з програми Surfer. Обидві варіограми помішалася в початок координат (в точку (0,0) лінійки) і для кожного фіксованого ρ_i окремо знаходилися значення як теоретичної $B_t(\rho_i)$, так і емпіричної варіограм $B_e(\rho_i)$. Далі, розраховувалося середньоквадратичне відхилення емпіричної варіограми від теоретичної в програмі Ecxel за формулою:

$$S(\rho_i)=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(B_t(\rho_i)-B_e(\rho_i))^2}\ .$$

Порівнявши варіограми отриманих даних з графіками варіограм, що відповідають кореляційним функціям (5*) типу Коші при значенні параметрів (при $a=1$) $\nu=0,5$ та $\nu=1$, можна зробити висновок, що відхилення отриманої кореляційної функції від початкової є незначним, а саме: не більше 3,7% (в першому випадку при $\nu=0,5$), не більше 4,8% (в другому випадку при $\nu=1$). Результати такого аналізу свідчать про достатньо високу точність моделювання за наведеними алгоритмами, оскільки метод Монте-Карло дає відхилення в межах 5%.

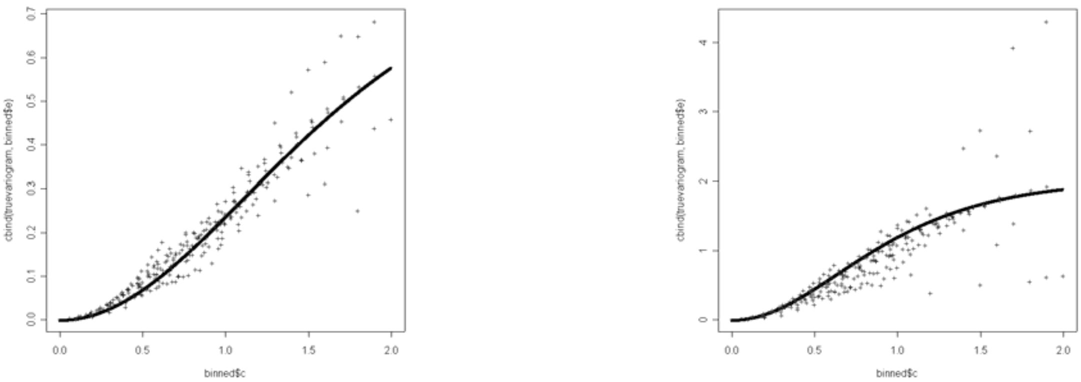


Рис. 1. Емпірична та теоретична варіограми для реалізацій із кореляційною функцією типу Коші при $\nu = 0,5$ (зліва) та при $\nu = 1$ (справа)

Слід зазначити, що наведений алгоритм можна застосовувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу. Тоді випадкові величини $\{\zeta_k(r),\ k = 0,1,2,...,N\}$ та $\{\eta_k(r),\ k = 0,1,2,...,N\}$ мають бути розподілені за відповідним законом.

2. Точність та надійність моделювання випадкових гауссових полів в просторі $L_2(T)$

Розглянемо простір R^d зі стандартною евклідовою метрикою $\rho(\vec{t},\vec{s})$, де $\vec{t}^T = (t_1,...,t_d), \vec{s}^T = (s_1,...,s_d)$. Нехай T – множина вигляду $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t},0) \le L\}$, де $L \ge 0$ деяке число, $\{R^d, A, \nu\}$ – вимірний простір, де A – борелівська σ-алгебра, ν – скінченна міра. Нехай – центроване випадкове поле вигляду

$$X(\vec{t}) = \sum_{r=1}^{N} \int_{R^d} f_r(\vec{t},\vec{\lambda}) dZ_r(\vec{\lambda}), \tag{13}$$

де $Z_r(S), S \in A$ – некорельовані випадкові міри підпорядковані мірі ν, а $f_r(\vec{t},\vec{\lambda})$ такі функції, що при кожному $\vec{t} \in T, f_r(\vec{t},\vec{\lambda}) \in L_2(R^d,\nu)$, а при кожному $\vec{\lambda} \in R^d$ функція $f_r(\vec{t},\vec{\lambda})$ неперервна по $\vec{t}$. Позначимо через $L_p(T)$ − простір функцій $\varphi(\bullet)$, для яких виконується умова: $\int_T |\varphi(\vec{t})|^p \, d\vec{t} < \infty,\ p \ge 1$ (інтегрування проводиться по мірі Лебега).

Нехай А − однозв'язна, з кусково-гладкою межею область в R^d, D_n − розбиття області А на n однозв'язних областей $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ з кусковогладкими межами, $\lambda_i, i = 1,2,...,n$ - фіксовані точки в R^d такі, що $\vec{\lambda}_i \in \Delta_i$. Позначимо:

$$X_n(\vec{t}, A) = \sum_{r=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t},\vec{\lambda}_i) Z_r(\Delta_i). \tag{14}$$

Випадкове поле $X_n(\vec{t}, A)$ називатимемо апроксимаційною моделлю поля $X(\vec{t})$ (А-моделлю). Надалі розглядатимемо гауссові випадкові поля. Зауважимо, що $Z_r(\Delta_i)$ це сумісно гауссові випадкові величини такі, що $EZ_r(\Delta_i) = 0, \quad E(Z_r(\Delta_i))^2 = \nu(\Delta_i)$.

Означення: Апроксимаційною моделлю випадкового поля (А-моделлю) називається сума: $\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} f_r(\vec{t},\vec{\lambda}_i)\theta_{ir}$, де θ_{ir} – це сумісно гауссові незалежні випадкові величини такі, що $E\theta_{ir} = 0, E\theta_{ir}{}^2 = \nu(\Delta_i)$.

Теорема 2. [3, с. 168] **.** Нехай $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ гауссове випадкове поле. Випадкове поле $X_n(\vec{t}, A)$ з (14) є А-моделлю, що наближає поле X з надійністю $1-\alpha, 0 < \alpha < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $L_2(T)$, якщо область А та її розбиття D_n вибрано так, що виконуються нерівності:

$$B(D_n, A) < \delta^2, \tag{15}$$

$$e^{0.5} \frac{\delta}{(B(D_n, A))^{0.5}} \exp\{-\frac{\delta^2}{2B(D_n, A)}\} < \alpha, \tag{16}$$

$$B(D_n, A) = \int_T B(\vec{t}, D_n, A) d\vec{t}, \tag{17}$$

$$B(\vec{t}, D_n, A) = \sum_{r=1}^{N} \Big(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Delta_i} \left| f_r(\vec{t},\vec{\lambda}) - f_r(\vec{t},\vec{\lambda}_i) \right|^2 d\nu(\vec{\lambda}) + \int_{R^d \setminus A} |f_r(\vec{t},\vec{\lambda})|^2 d\nu(\vec{\lambda}).$$

Для однорідних та ізотропних полів в R^d має місце оцінка :

$$B(D_n, A) \le a(L)\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 [1+(d+2)\pi^2] + (\Phi(\infty)-\Phi(\Lambda))b(L),$$

де $a(L) = \dfrac{2\pi^{d/2}L^{d+2}}{(d+2)\Gamma(d/2)}$, $b(L) = \dfrac{2\pi^{d/2}L^d}{d\Gamma(d/2)}$.

Тепер, використовуючи теорему 2, побудуємо апроксимаційні моделі (А-моделі) однорідного та ізотропного випадкового поля з кореляційною функцією типу Коші при значеннях параметра $\nu = 0.5$ та $\nu = 1$.

Приклад 1: Розглянемо наближення однорідного та ізотропного випадкового поля $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$, де $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \le 1 = L\}$, $T \in R^2$ з кореляційною функцією типу Коші при $\nu = 0.5$ та спектральною щільністю $f(u) = ae^{-au}$, $a > 0.$ Не обмежуючи загальності, покладемо за значення параметра $a = 1$. Тоді відповідна спектральна функція цього поля матиме наступний вигляд: $\Phi(u) = 1 - e^{-u}$, $u > 0.$

Нехай $\alpha = 0.05, \delta = 0.05, d = 2.$ Тоді з формули (16) попередньої теореми маємо наступну нерівність:

$$e^{0.5}\frac{0.05}{(B(D_n, A))^{0.5}}\exp\{-\frac{0.0025}{2B(D_n, A)}\} < 0.05. \tag{19}$$

Розв'язуючи цю нерівність в програмі Mathematica, отримаємо, що повинна виконуватися така умова: $B(D_n, A) \le \ 0.0002713 \le 0.0025 = \delta^2$. Тоді покладемо: $B(D_n, A) = 0.00026$.

Далі, використовуючи (15) та (17), маємо наступну нерівність:

$$a(L)\Phi(\Lambda)\left(\frac{\Lambda}{m}\right)^2 [1+(d+2)\pi^2] + (\Phi(\infty)-\Phi(\Lambda))b(L) \le \delta^2,$$

Звідси отримаємо для визначення m вираз:

$$m \ge \Lambda\sqrt{\frac{a(L)\,\Phi(\Lambda)[1+(d+2)\,\pi^2]}{0.00026-(\Phi(\infty)-\Phi(\Lambda))\,b(L)}} = G(\Lambda)\,. \tag{20}$$

Знаходимо за допомогою програми Mathematica з (20) мінімальне значення функції $G(\Lambda)$ по Λ . Тоді отримаємо, що $G(11.29) \approx 6059 = m.$ Отже, виконуються всі умови теореми 1. Тому випадкове поле $X_n(\vec{t}, A), A = \{\vec{\lambda}, \rho(\vec{\lambda}, 0) < 11.29\}$ є А-моделлю, що наближає випадкове поле $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \le 1\}$ із цього прикладу з надійністю 95%, та точністю 5% в просторі $L_2(T)$.

Приклад 2: Аналогічно будемо наближати однорідне та ізотропне випадкове поле $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$, де $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \le 1 = L\}$, $T \in R^2$ з кореляційною функцією типу Коші при $\nu = 1$ та спектральною щільністю $f(u) = a^2\lambda K_0(a\lambda)$, $a > 0.$ Також, не обмежуючи загальності, покладемо за значення параметра $a = 1$. Тоді відповідна спектральна функція цього поля матиме вигляд інтегралу: $\Phi(u) = \int_0^u \lambda\, K_0(\lambda)\, d\lambda, u > 0.$

Нехай $\alpha = 0.05, \delta = 0.05, d = 2.$ У цьому випадку нерівність (19) також має місце. Це рівняння розв'яжемо в програмі Mathematica та отримаємо, що повинна виконуватися, як і в попередньому прикладі, наступна умова: $B(D_n, A) \le \ 0.0002713 \le 0.0025 = \delta^2$. Аналогічно покладемо $B(D_n, A) = 0.00026$. Для обчислення m використовуємо нерівність (20). Тоді знаходимо з виразу (20) за допомогою програми Mathematica мінімальне значення функції $G(\Lambda)$ по Λ . Отримаємо: $G(12.91) \approx 6877 = m.$

Отже, виконуються усі умови теореми 1 і випадкове поле $X_n(\vec{t}, A), A = \{\vec{\lambda}, \rho(\vec{\lambda}, 0) < 12.91\}$ є А-моделлю, що наближає поле $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in T\}$ $T = \{\vec{t}, \rho(\vec{t}, 0) \le 1\}$ із прикладу 2 з надійністю 95%, та точністю 5% в $L_2(T)$.

Висновки

Розроблено достатньо адекватні у застосуванні до прикладних задач алгоритми для статистичного моделювання однорідних та ізотропних випадкових полів на площині з кореляційними функціями (5*) типу Коші при значенні параметрів $\nu = 0,5$ та $\nu = 1$. Для цього використано статистичну модель випадкового поля (4) у вигляді часткової суми ряду, що побудована на основі спектрального розкладу таких полів. При цьому значення числа доданків часткової суми N визначається , відповідно до наперед заданої точності ε , за допомогою рівностей (8) та (12), результати обчислень за якими внесені в таблиці, по яких можна прослідкувати зміну величини N в залежності від r та a .

Обчислено спектральні коефіцієнти для випадкових полів на площині із кореляційною функцією типу Коші при значенні параметрів $\nu = 0,5$ та $\nu = 1$, які використовуються в моделі. Для першого випадку $\nu = 0,5$ спектральні коефіцієнти обчислюються наближено за формулою у вигляді інтегралу (7). Для другого випадку $\nu = 1$ спектральні коефіцієнти мають вигляд аналітичного виразу, за яким обчислено їх точні значення (11).

На базі розробленої моделі (3) побудовано програми в пакеті Mathematica, за допомогою яких згенеровано реалізації випадкового поля, що розглядається. Для отриманих реалізацій з метою перевірки їх на адекватність побудовано та досліджено теоретичні й емпіричні варіограми при використанні пакету прикладних програм GeoR. Такий статистичний аналіз показав достатньо високу точність моделювання з урахуванням можливостей методів Монте-Карло.

1. Вижва З.О. Навчальний посібник з дисципліни Математичні моделі в природознавстві Розділ: Статистичне моделювання випадкових процесів та полів у науках про землю. – К.: Обрії, 2007, 164 с. 2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., Наука, 1971. 3. Козаченко Ю. В., Пашко А. О., Розора І. В. Моделювання випадкових процесів та полів: Монографія / Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка. – К. : Задруга, 2007. – 230 с. 4. Козаченко Ю. В., Погоріляк А. О., Тегза А. М. Моделювання гауссових випадкових процесів та процесів Кокса: Монографія. – Уж. : Карпати, 2012. – 194 с. 5. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей – Новосибирск: ИВМиМГ, 2005. – 259 с. 6. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К.: Вища школа, 1980. – 208 с. 7. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto, 1999. – 695 p. 8. Leonenko N., Olenko A. Tauberian and Abelian Theorems for Long-range Dependent Random Fields// Methodology and Computing in Applied Probability. DOI 10.1007/s11009-012-9276-9. Springer Science+Business Media, LLC, 2012. – 28p.

Надійшла до редколегії 25.05.12

УДК 519.21

І. Дубовецька, асп.
e-mail: idubovetska@gmail.com

МАКСИМАЛЬНА ПОХИБКА ПРОГНОЗУ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Розглядається задача оптимального оцінювання скінченного та нескінченного лінійних функціоналів від невідомих значень періодично корельованої послідовності за її спостереженнями. Знайдено формули для обчислення оптимальних оцінок функціоналів. Визначено найбільші значення середньоквадратичних похибок цих оцінок.

The problem of optimal estimation of finite and infinite linear functionals depending on unknown values of periodically correlated stochastic sequence based on observations of this sequence is considered. Formulas for calculation of optimal estimates of functionals are found. The maximum values of mean-square errors of these optimal estimates are determined.

1. Вступ

У статті Є.Г. Гладишева [1] проведено аналіз спектральних властивостей та зображень періодично корельованих процесів, який базується на зв'язку періодично корельованих та векторних стаціонарних послідовностей. З результатів Є.Г. Гладишева випливає, що задача оцінювання періодично корельованих послідовностей зводиться до відповідної задачі для векторних стаціонарних послідовностей. Основні ідеї зображення періодично корельованих процесів через простіші випадкові послідовності представлені Л. Хардом та А. Міамі [6].

Класичні методи розв'язування задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів із відомими спектральними щільностями запропоновані А.Н. Колмогоровим [2], Н. Вінером [9], А.М. Ягломом [10, 11]. Задача прогнозу векторних стаціонарних послідовностей досліджена Ю.А. Розановим [4]. У випадку, коли повна інформація про точні значення спектральних щільностей відсутня, але задано множину допустимих спектральних щільностей, застосовують мінімаксний метод розв'язування задачі оцінювання. Тобто шукають оцінку, яка мінімізує значення похибки одночасно для всіх щільностей із заданого класу. У. Гренадер [5] вперше застосував мінімаксний підхід до задачі екстраполяції стаціонарних процесів. У роботах М.П. Моклячука [3, 8], М.П. Моклячука і А.Ю.Масютки [7] досліджено задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації стаціонарних процесів і послідовностей.

У даній статті розглядається задача оптимального лінійного оцінювання функціоналів $A_N\zeta=\sum_{j=0}^{N}a(j)\zeta(j)$ та $A\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)\zeta(j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ з класу $\mathrm{K}=\{E\zeta(j)=0,\|\zeta(j)\|^2\le K\}$ за спостереженнями послідовності $\zeta(j)$ при $j<0$. Знайдено формули для обчислення оптимальних оцінок функціоналів $A_N\zeta$ та $A\zeta$, визначено найменш сприятливі в класі K стохастичні послідовності для оптимального оцінювання $A_N\zeta$ та $A\zeta$, обчислено найбільші значення середньоквадратичних похибок цих функціоналів.

2. Періодично корельовані послідовності, які породжуються векторними стаціонарними

Періодично корельовані послідовності є стохастичними послідовностями з періодичною структурою [6].

Означення 1. Послідовність комплекснозначних випадкових величин $\zeta(n),\ M|\zeta(n)|^2<\infty,\ n\in\mathbb{Z}$, називається періодично корельованою з періодом T (T - періодично корельованою), якщо

$$M\zeta(n+T)=M\zeta(n),\ R(n,m)=R(n+T,m+T),n,m\in\mathbb{Z},\tag{1}$$

не існує меншого за $T>0$ числа такого, що виконуються рівності (1).

Теорема Гладишева [1]*. Послідовність $\zeta(n),n\in\mathbb{Z}$, є періодично корельованою з періодом T тоді і лише тоді, коли існує така T -вимірна стаціонарна послідовність $\vec{\xi}(n)=\{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$, що $\zeta(n)$ має зображення*

$$\zeta(n)=\sum_{q=0}^{T-1}e^{2\pi inq/T}\xi_q(n),n\in\mathbb{Z}.$$

Послідовність $\vec{\xi}(n)=\{\xi_k(n)\}_{k=0}^{T-1}$ називають такою, що породжує $\zeta(n)$.

© Дубовецька І., 2012

3. Найбільша похибка оцінки скінченного функціонала $A_N\zeta$

Розглянемо скінченний функціонал $A_N\zeta=\sum_{j=0}^{N}a(j)\zeta(j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)\in \mathrm{K}$. Визначимо оптимальну лінійну оцінку $\hat{A}_N\zeta$ за спостереженнями послідовності $\zeta(j)$ при $j<0$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(\zeta,\hat{A}_N)=E\left|A_N\zeta-\hat{A}_N\zeta\right|^2$ такої оцінки.

Позначимо через Λ клас всіх лінійних оцінок $A_N\zeta$. Теорема Гладишева дає можливість записати наступні перетворення

$$A_N\zeta=\sum_{j=0}^{N}a(j)\zeta(j)=\sum_{j=0}^{N}a(j)\sum_{q=0}^{T-1}e^{2\pi ijq/T}\xi_q(j)=\sum_{j=0}^{N}(\vec{a}(j))^{\mathrm{T}}\vec{\xi}(j)=A_N\vec{\xi},$$

де $\vec{a}(j)=a(j)\vec{e}(j)$, $\vec{e}(j)=(e^{2\pi ij0/T},e^{2\pi ij1/T},...,e^{2\pi ij(T-1)/T})^{\mathrm{T}}$, $\vec{\xi}(j)$ – векторна стаціонарна послідовність, що породжує $\zeta(j)$.

Скориставшись результатами статті [7], можемо переконатися, що для T-періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Функція $\Delta(\zeta,\hat{A}_N)$ має на множині $\mathrm{K}\times\Lambda$ сідлову точку*

$$\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\max_{\zeta\in\mathrm{K}}\Delta(\zeta,\hat{A}_N)=\max_{\zeta\in\mathrm{K}}\min_{\hat{A}_N\in\Lambda}\Delta(\zeta,\hat{A}_N)=\alpha_N^2\cdot K/T,$$

де α_N^2 – найбільше власне значення самоспряженого компактного оператора $Q_N=\{Q_N(p,q)\}_{p,q=0}^{T-1}$ у просторі $\mathbb{C}^{T(N+1)}$, який визначається матрицею, що складена із $T\times T$ блок-матриць

$$Q_N(p,q)=\sum_{u=0}^{\min(N-p,N-q)}a(p+u)\overline{a(q+u)}e(p,q,u),\quad p,q=0,1,...,T-1,$$

$$e(p,q,u)=\vec{e}(p+u)(\vec{e}(q+u))^{*}=\{e^{2\pi i(k(p+u)-l(q+u))}\}_{k,l=0}^{T-1}.$$

Найменш сприятливою в класі K стохастичною послідовністю для оптимального оцінювання $A_N\zeta$ є T-періодично корельована послідовність, що породжена векторною послідовністю одностороннього рухомого середнього порядку $N+1$ і має вигляд

$$\zeta(j)=\sum_{u=j-N}^{j}\vec{\beta}(j,u)\vec{\varepsilon}(u),$$

де вектор-рядок $\vec{\beta}(j,u)=\{\beta_k(j,u)\}_{k=0}^{m-1}$, $u=j-N,...,j$, $\beta_k(j,u)=(\vec{e}(j))^{\mathrm{T}}\Phi_{\bullet k}(j-u)$, $\Phi_{\bullet k}(j-u)$ – k-ий стовпчик матриці $\Phi(j-u)=\{\Phi_{qk}(j-u)\}_{q=0k=0}^{T-1m-1}$, $\Phi_N=(\Phi(0),...,\Phi(N))^{\mathrm{T}}$ – власний вектор, що відповідає α_N^2, складається із $T\times m$ блок-матриць $\Phi(u)$ та однозначно визначається умовою $\left\|\Phi_N\right\|^2=\sum_{u=0}^{N}\left\|\Phi(u)\right\|^2=K/T$, $\vec{\varepsilon}(u)=\{\varepsilon_k(u)\}_{k=0}^{m-1}$ – векторна стаціонарна послідовність із ортогональними значеннями, $E\vec{\varepsilon}(u)\vec{\varepsilon}^{*}(l)=\delta_{ul}I_m$.

Наслідок 1. *Оптимальна мінімаксна оцінка $\hat{A}_N\zeta$ функціонала $A_N\zeta$ дорівнює*

$$\hat{A}_N\zeta=\sum_{j=0}^{N}a(j)\left(\sum_{u=j-N}^{-1}\vec{\beta}(j,u)\vec{\varepsilon}(u)\right),$$

де вектор-рядок $\vec{\beta}(j,u)=\{\beta_k(j,u)\}_{k=0}^{m-1}$, $\beta_k(j,u)=(\vec{e}(j))^{\mathrm{T}}\Phi_{\bullet k}(j-u)$, $\Phi_N=(\Phi(0),...,\Phi(N))^{\mathrm{T}}$ – власний вектор, що відповідає α_N^2, та однозначно визначається умовою $\left\|\Phi_N\right\|^2=K/T$.

Зауваження 1. Для періоду $T=2$ комплекснозначна матриця $e(p,q,u)$ обчислюється за формулою

$$e(p,q,u)=\begin{pmatrix}1 & (-1)^{q+u}\\ (-1)^{p+u} & (-1)^{|p-q|}\end{pmatrix},\quad p,q=0,1,...,N,u=0,1,...,\min(N-p,N-q).$$

Приклад 1. Нехай $K=4$, період $T=2$. Оцінимо функціонал $A_2\zeta=a\zeta(0)+b\zeta(1)+c\zeta(2)$.

Якщо коефіцієнти $A_2\zeta$ однакові $a=b=c=\kappa,\kappa\in\mathbb{R}$, то оператор Q_2 має вигляд

$$Q_2=\kappa^2\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

найбільше власне значення $\alpha_2^2=2\kappa^2(2+\sqrt{2})$.

Якщо ранг стаціонарної послідовності, що породжує $\zeta(j)$, рівний 1, тобто $m=1$, то власний вектор $\Phi_2 = (\Phi(0),\Phi(1),\Phi(2))^{\mathrm{T}}$, який відповідає α_2^2, задається елементами

$$\Phi(0) = 1/2\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2})^{\mathrm{T}},\ \ \Phi(1) = 1/2\cdot(-1,1)^{\mathrm{T}},\ \ \Phi(2) = 1/2\cdot(1,1)^{\mathrm{T}}.$$

Числові вектор-рядки $\vec{\beta}(j,u)$ при $j=0,1,\ u=j-2,-1,$ рівні $\beta(0,-2)=1,\ \ \beta(0,-1)=0,\ \ \beta(1,-1)=0$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка дорівнює

$$\hat{A}_2\zeta = \kappa\varepsilon(-2).$$

Якщо ранг стаціонарної послідовності, що породжує $\zeta(j)$, рівний 2, тобто $m=2$, то власний вектор Φ_2, який відповідає α_2^2, задається елементами

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix},\ \ \Phi(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \ \Phi(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Числові вектор-рядки $\vec{\beta}(j,u)$ при $j=0,1,\ u=j-2,-1,$ рівні $\vec{\beta}(0,-2)=(\sqrt{1/2},\sqrt{1/2}),$ $\vec{\beta}(0,-1)=(0,0),$ $\vec{\beta}(1,-1)=(0,0)$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка дорівнює

$$\hat{A}_2\zeta = \kappa/\sqrt{2}\cdot(\varepsilon_0(-2)+\varepsilon_1(-2)).$$

Максимальне значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}_2\zeta$ в обох випадках дорівнює $4\kappa^2(2+\sqrt{2})$.

Для випадку різних значень числових коефіцієнтів $a=1, b=0, c=-1$ найбільше власне значення оператора Q_2 дорівнює $\alpha_2^2 = 3+\sqrt{5}$. Якщо ранг стаціонарної послідовності, що породжує $\zeta(j)$, рівний 2, тобто $m=2$, то власний вектор Φ_2, який відповідає α_2^2, задається елементами

$$\Phi(0) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1-\sqrt{5} & -1-\sqrt{5}\\ -1-\sqrt{5} & -1-\sqrt{5}\end{pmatrix},\ \ \Phi(1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \ \Phi(2) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Числові вектор-рядки $\vec{\beta}(j,u)$ при $j=0,1,\ u=j-2,-1,$ рівні $\vec{\beta}(0,-2)=(\sqrt{(5-\sqrt{5})/5},\sqrt{(5-\sqrt{5})/5}),$ $\vec{\beta}(0,-1)=(0,0),$ $\vec{\beta}(1,-1)=(0,0)$, тоді оптимальна лінійна мінімаксна оцінка дорівнює

$$\hat{A}_2\zeta = \sqrt{(5-\sqrt{5})/5}(\varepsilon_0(-2)+\varepsilon_1(-2)).$$

Максимальне значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}_2\zeta$ в обох випадках дорівнює $2(3+\sqrt{5})$.

Приклад 2. Нехай $K=2$, період $T=2$. Оцінимо функціонал $A_4\zeta = \zeta(0)-\zeta(1)+\zeta(2)-\zeta(3)+\zeta(4)$.

Найбільше власне значення оператора Q_4 дорівнює $\alpha_4^2 = 4(2+\sqrt{3})$.

Якщо ранг стаціонарної послідовності, що породжує $\zeta(j)$, рівний 1, тобто $m=1$, власний вектор $\Phi_4 = (\Phi(0),\Phi(1),\Phi(2),\Phi(3),\Phi(4))^{\mathrm{T}}$, який відповідає α_4^2, задається

$$\Phi(0)=\sqrt{1/6}\cdot(1,1)^{\mathrm{T}},\ \Phi(1)=1/2\sqrt{2}\cdot(-1,1)^{\mathrm{T}},\ \Phi(2)=1/2\sqrt{2}\cdot(1,1)^{\mathrm{T}},\ \Phi(3)=1/2\sqrt{6}\cdot(-1,1)^{\mathrm{T}},\ \Phi(4)=1/2\sqrt{6}\cdot(1,1)^{\mathrm{T}}.$$

Числові вектор-рядки $\vec{\beta}(j,u)$ при $j=0,\dots,4,\ u=j-2,\dots,-1,$ рівні $\beta(0,-4)=\sqrt{1/6},\ \ \beta(0,-3)=0,\ \ \beta(0,-2)=\sqrt{1/2},$ $\beta(0,-1)=0,\ \ \beta(1,-3)=0,\ \ \beta(1,-2)=-\sqrt{1/6},\ \ \beta(1,-1)=0,\ \ \beta(2,-2)=\sqrt{1/6},\ \ \beta(2,-1)=0$. Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка дорівнює

$$\hat{A}_4\zeta = (2+\sqrt{3})/\sqrt{6}\cdot\varepsilon(-2)+1/\sqrt{6}\cdot\varepsilon(-4).$$

У випадку рангу $m=2$, оцінка функціонала дорівнює

$$\hat{A}_4\zeta = (2+\sqrt{3})/2\sqrt{3}\cdot(\varepsilon_0(-2)+\varepsilon_1(-2))+1/2\sqrt{3}\cdot(\varepsilon_0(-4)+\varepsilon_1(-4)).$$

Максимальне значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}_4\zeta$ в обох випадках дорівнює $4(2+\sqrt{3})$.

4. Найбільша похибка оцінки функціонала $A\zeta$

Розглянемо функціонал $A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(j)$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)\in \mathrm{K}$. Теорема Гладишева дає можливість записати наступні співвідношення

$$A\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\zeta(j) = \sum_{j=0}^{\infty} a(j)\sum_{q=0}^{T-1} e^{2\pi ijq/T}\xi_q(j) = \sum_{j=0}^{\infty}(\vec{a}(j))^{\mathrm{T}}\vec{\xi}(j) = A\vec{\xi}.$$

Скориставшись результатами статті [7], можемо переконатися, що для T-періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$ справедлива наступна теорема.

***Теорема 2**. Нехай послідовність коефіцієнтів* $\vec{a}(j)=\{a(j)e^{2\pi ikj/T}\}_{k=0}^{T-1}, j\geq 0,$ *що задає функціонал* $A\vec{\xi}=A\zeta$ *, задовольняє умови*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{T-1}\left|a_k(j)\right|=T\sum_{j=0}^{\infty}\left|a(j)\right|<\infty,\ \ \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left\|\vec{a}(j)\right\|^2=T\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left|a(j)\right|^2<\infty. \quad (2)$$

Тоді функція $\Delta(\zeta,\hat{A})$ *має на множині* $\mathrm{K}\times\Lambda$ *сідлову точку*

$$\min_{\hat{A}\in\Lambda}\max_{\zeta\in\mathrm{K}}\Delta(\zeta,\hat{A})=\max_{\zeta\in\mathrm{K}}\min_{\hat{A}\in\Lambda}\Delta(\zeta,\hat{A})=\alpha^2\cdot K/T,$$

де α^2 *– найбільше власне значення самоспряженого компактного оператора* $Q=\{Q(p,q)\}_{p,q=0}^{T-1}$ *у просторі* ℓ_2 *, який визначається матрицею, що складена із* $T\times T$ *блок-матриць*

$$Q(p,q)=\sum_{u=0}^{\infty}a(p+u)\overline{a(q+u)}e(p,q,u),\ \ p,q\geq 0.$$

Найменш сприятливою в класі K *стохастичною послідовністю для оптимального оцінювання* $A\zeta$ *є T-періодично корельована послідовність, що породжена векторною послідовністю одностороннього рухомого середнього і має вигляд*

$$\zeta(j)=\sum_{u=-\infty}^{j}\vec{\beta}(j,u)\vec{\varepsilon}(u),$$

де вектор-рядок $\vec{\beta}(j,u)=\{\beta_k(j,u)\}_{k=0}^{m-1},\ \ u=j-N,...,j,\ \ \beta_k(j,u)=(\vec{e}(j))^{\mathrm{T}}\Phi_{\bullet k}(j-u),\ \ \Phi_{\bullet k}(j-u)$ *–* k *-ий стовпчик матриці* $\Phi(j-u)=\{\Phi_{qk}(j-u)\}_{q=0k=0}^{T-1m-1}$, $\Phi=(\Phi(0),\Phi(1),...)^{\mathrm{T}}$ *– власний вектор, що відповідає* α^2*, складається із* $T\times m$ *блок-матриць* $\Phi(u)$ *та однозначно визначається умовою* $\left\|\Phi\right\|^2=\sum_{u=0}^{\infty}\left\|\Phi(u)\right\|^2=K/T$ *,* $\vec{\varepsilon}(u)=\{\varepsilon_k(u)\}_{k=0}^{m-1}$ *– векторна стаціонарна послідовність із ортогональними значеннями,* $E\vec{\varepsilon}(u)\vec{\varepsilon}^*(l)=\delta_{ul}I_m$ *.*

***Наслідок 2.** Оптимальна мінімаксна оцінка* $\hat{A}\zeta$ *функціонала* $A\zeta$ *дорівнює*

$$\hat{A}\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}a(j)\left(\sum_{u=-\infty}^{-1}\vec{\beta}(j,u)\vec{\varepsilon}(u)\right),$$

де вектор-рядок $\vec{\beta}(j,u)=\{\beta_k(j,u)\}_{k=0}^{m-1},\ \ \ \beta_k(j,u)=(\vec{e}(j))^{\mathrm{T}}\Phi_{\bullet k}(j-u),\ \ \ \Phi=(\Phi(0),\Phi(1),...)^{\mathrm{T}}$ *– власний вектор, що відповідає* α^2 *, та однозначно визначається умовою* $\left\|\Phi\right\|^2=K/T$ *.*

Приклад 3. Нехай $K=2$, період рівний $T\geq 1$. Оцінимо функціонал $A\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}a^j\zeta(j),\ \ a\in\mathbb{R},\left|a\right|<1.$ Послідовність коефіцієнтів $a^j, j\geq 1$ задовольняє умови (2). Блок-матриці оператора Q визначаються елементами

$$Q_{kl}(p,q)=\sum_{u=0}^{\infty}a(p+u)\overline{a(q+u)}e^{2\pi i(k(p+u)-l(q+u))}=\frac{a^{p+q}}{1-a^2},\ \ k,l=0,...,T-1,p,q=0,1,....$$

У випадку, коли ранг m стаціонарної послідовності, що породжує $\zeta(j)$, задовольняє нерівність $1\leq m\leq T$, найбільше власне значення α^2 оператора Q визначається із систем рівнянь

$$\alpha^2\Phi_{kn}(p)=\frac{a^p}{1-a^2}\sum_{j=0}^{\infty}a^j\sum_{q=0}^{T-1}\Phi_{qn}(j),\ \ k,n=0,...,T-1,p=0,1,.... \quad (3)$$

Тоді із системи (3) маємо $\Phi_{kn}(p)=Ca^p$. З умови нормування послідовності $\Phi(p)$ знаходимо константу C та елементи власного вектора Φ

$$C=1/T\cdot\sqrt{2(1-a^2)/m},\ \ \Phi_{kn}(p)=a^p/T\cdot\sqrt{2(1-a^2)/m},\ k,n=0,...,T-1.$$

Підставивши ці величини у систему (3), отримаємо $\alpha^2=T/(1-a^2)^2$.

Оптимальна лінійна мінімаксна оцінка функціонала $A\zeta$ дорівнює

$$\hat{A}\zeta=\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2(1-a^2)}{m}}\sum_{k=0}^{\infty}a^{2kT}\left(\sum_{u=-\infty}^{-T}a^{-u}\sum_{l=0}^{m-1}\varepsilon_l(u)\right).$$

Максимальне значення середньоквадратичної похибки оцінки $\hat{A}\zeta$ для кожного $1\leq m\leq T$ дорівнює $2/(1-a^2)^2$.

5. Висновки

Отримано формули для обчислення оптимальних оцінок функціоналів $A_N\zeta$ та $A\zeta$ від невідомих значень періодично корельованої послідовності $\zeta(j)$. Встановлено, що максимальну середньоквадратичну похибку дають періодично корельовані послідовності, що породжені векторними послідовностями одностороннього рухомого середнього. Обчислено ці найбільші значення середньоквадратичних похибок.

1. Гладышев Е.Г. О периодически коррелированных случайных последовательностях // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1024-1030. 2. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник статей. – М., 1986. 3. Моклячук М.П. Робастні оцінки функціоналів від

стохастичних процесів : монографія. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. 4. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990. 5. Grenander U. A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – № 3. – P. 371-379. 6. Hurd H.L., Miamee A. Periodically correlated random sequences. – John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007. 7. Moklyachuk M.P., Masyutka O.Yu. Minimax prediction problem for multidimentional stationary stochastic sequences // Theory Stoch. Process. – 2008. – V. 14(30), № 3-4. – P. 89-103. 8. Moklyachuk M.P. Robust prediction problem for periodically correlated stochastic sequences // 5th Conference in Actuarial Science and Finance on Samos, Proceedings. – 2009. – P. 51-65. 9. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary line series. Whis engineering applications. – Cambridge, Mass.: The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1966. 10. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. V. 1: Basic results. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987. 11. Yaglom A.M. Correlation theory of stationary and related random functions. V. 2: Suplementary notes and references. – Springer Series in Statistics. New York etc.: Springer-Verlag, 1987.

Надійшла до редколегії 21.11.11

УДК 519.21

А. Савченко, асп.
e-mail: nebulous@bigmir.net

МОДИФІКОВАНА ОЦІНКА МАКСИМАЛЬНОЇ ВІРОГІДНОСТІ В ПУАССОНІВСЬКІЙ СТРУКТУРНІЙ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ ВИМІРЮВАННЯ

Вивчається пуассонівська структурна модель регресії з похибками вимірювання. Побудовано виправлену $T(q)$ – вірогідну оцінку для коефіцієнтів регресії. Отримано достатню умову строгої консистентності оцінки, коли q залежить від обсягу вибірки і прямує до 1.

The Poisson structural measurement error model of regression is studied. The corrected $T(q)$ – likelihood estimator of regression coefficients is constructed. A sufficient condition for strong consistency of the estimator is presented for the case where q depends on the sample size and tends to 1.

1. Вступ

Розглянемо загальну модель нелінійної регресії з похибками у змінних, де відгук має умовний пуассонівський розподіл відносно прихованої змінної. За невідомого розподілу прихованої змінної, виправлена (CS, Corrected Score) оціночна процедура дає консистентну оцінку [6]. Але відомо, що CS оцінка має нестійку поведінку для малої і середньої вибірки. В [3] та [5] побудовано модифікацію CS оцінки для малої вибірки, що стійкіша для малої і середньої вибірок і асимптотично еквівалентна CS оцінці, коли обсяг вибірки прямує до нескінченності. У даній статті використовується інша ідея модифікувати CS оцінку для малої і середньої вибірок з використанням $T(q)$ – вірогідних оцінок.

$T(q)$ – вірогідна оцінка розглядалась за відсутності похибок у змінних у [4], де вказано, що вона більш стійка для малої та середньої вибірок, ніж оцінка максимальної вірогідності. Пуассонівська модель з похибками вимірювання вивчалась у [2, розділ 7], але іншими методами.

Метою цієї статті є розгляд виправленої $T(q)$ – вірогідної оцінки за наявності похибок вимірювання.

Позначимо через E математичне сподівання випадкових величин, векторів або матриць, D означає дисперсію. Математичне сподівання $E_b f$ береться за умови, що b – істинне значення параметра β. Верхній індекс T означає транспонування.

Структура роботи наступна. У розділі 2 описано модель спостережень. Розділ 3 представлено виправлену $T(q)$ – вірогідну оцінку. У розділі 4 доведено строгу консистентність оцінки. Розділ 5 містить висновки, а в Додатку сформулльвано лему, на якій ґрунтується доведення консистентності.

2. Загальна модель

Розглянемо відгук y з розподілом за умови ξ, рівним $Pois\ (\lambda)$, $P(y=k|\xi)=f(k,\xi,\beta)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $k=0,1,2,...$, з неспостережуваною випадковою пояснювальною змінною $\xi\in\mathrm{R}$, причому $\lambda=\exp(\beta_0+\beta_1\xi)$; $\beta=(\beta_0;\beta_1)^T$. Замість ξ спостерігається сурогатна змінна $x=\xi+\delta$, де $\delta\sim N(0,\sigma_\delta^2)$. Випадкова величина δ називається похибкою вимірювання і вважається незалежною від ξ та y. Вважаємо дисперсію похибки σ_δ^2 відомою. Спостерігаються незалежні копії моделі $z_i=(y_i,x_i)$, $i=\overline{1,n}$, оцінюється вектор β. Припускаємо, що всі експоненційні моменти ξ скінченні, тобто $\forall a\in R$: $E\exp(a\xi)<\infty$. Тоді $E_\beta y=EE_\beta(y|\xi)=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k\lambda^k(\beta)e^{-\lambda(\beta)}}{k!}\right)=\exp(\beta_0)E\exp(\beta_1\xi)$.

Для $u>0$ і $q>0$ введемо перетворення Бокса-Кокса

$$T(q,u)=\begin{cases}(u^{1-q})/(1-q), & q\neq 1;\\ \ln u, & q=1.\end{cases}$$

$T(q)$ – вірогідна оціночна функція визначається як $S^{(q)}(y,\xi,\beta)=\dfrac{\partial}{\partial\beta}T(q,f(y,\xi,\beta))=f^{-q}\dfrac{\partial f}{\partial\beta}=\dfrac{e^{\lambda(q-1)}}{(y!)^{1-q}}\lambda^{y(1-q)}(y-\lambda)(1;\xi)^T$.

Для $q=1$, $S^{(q)}$ збігається з оціночною функцією методу максимальної вірогідності. За відсутності похибки вимірювання, $S^{(q)}$ розглядалась в [4]; з $q=q_n\to 1$ та $\sqrt{n}(q_n-1)\to 0$ при $n\to\infty$, $T(q)$ – вірогідна оціночна функція дає

© Савченко А., 2012

консистентну оцінку β з тою ж ефективністю, що і оцінка максимальної вірогідності (ОМВ), але з кращою поведінкою для малих вибірок. За відсутності похибки вимірювання ОМВ, позначена як $\widehat{\beta}_n$, задається рівністю:

$$\widehat{\beta}_n = \underset{\beta\in\Theta}{\arg\max} \sum_{i=1}^{n} \ln f(y_i, \xi_i, \beta),$$

де параметрична множина $\Theta \subset \mathrm{R}^2$.

3. Побудова оціночного рівняння

Адаптуємо оціночну функцію $S^{(q)}$ до похибок вимірювання, побудувавши таку виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$, що для b (істинного значення оцінюваного вектора) та для всіх β з Θ виконується майже напевно

$$E[S_C^{(q)}(y,x,\beta)\big|y,\xi] = S^{(q)}(y,\xi,\beta). \tag{1}$$

Виправлена $T(q)$ – вірогідна оцінка $\widehat{\beta}_n\ (q)$ визначається як вимірний розв'язок рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} S_C^{(q)}(y_i, x_i, \beta) = 0,\ \beta \in \Theta. \tag{2}$$

Позначимо $h(y,x) = S_C^{(q)}(y,x,\beta)$. Тоді

$$E[h(y,x)\big|y,\xi] = f^{-q}\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\exp(\lambda(q-1))}{\left(y!\right)^{1-q}}(y\lambda^{(1-q)y} - \lambda^{y(1-q)+1})\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+(1-q)y}(q-1)^m y}{m!\left(y!\right)^{1-q}} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+(1-q)y+1}(q-1)^m}{m!\left(y!\right)^{1-q}}\right)\begin{pmatrix}1\\ \xi\end{pmatrix} \tag{3}$$

де $\lambda = \exp(\beta_0 + \beta_1\xi)$. Розв'язок рівняння деконволюції (3) можна знайти у вигляді

$$h(y,x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m y}{m!\left(y!\right)^{1-q}}\begin{pmatrix}\phi_m(x,y)\\ \psi_m(x,y)\end{pmatrix} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m}{m!\left(y!\right)^{1-q}}\begin{pmatrix}\phi_{m+1}(x,y)\\ \psi_{m+1}(x,y)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тут $\phi_m(x,y)$ і $\psi_m(x,y)$ задовольняють наступні рівняння деконволюції:

$$E[\phi_m(x,y)\big|y,\xi] = \lambda^{m+(1-q)y} = \exp((\beta_0+\beta_1\xi)(m+(1-q)y)), \tag{5}$$

$$E[\psi_m(x,y)\big|y,\xi] = \lambda^{m+(1-q)y}\xi = \xi\exp((\beta_0+\beta_1\xi)(m+(1-q)y)). \tag{6}$$

Тепер розв'яжемо рівняння (5). Нехай $a_m = a_m(y) = \beta_0(m+(1-q)y)$, $r_m = r_m(y) = \beta_1(m+(1-q)y)$. Перепишемо (5) у вигляді $E[\phi_m(x,y)\big|y,\xi] = \exp(a_m(y) + r_m(y)\xi)$ і шукаємо $\phi_m(x,y)$ вигляду $\phi_m(x,y) = C_m(y)\exp(r_m(y)x)$. Отримаємо $E[C_m(y)\exp(r_m(y)(\xi+\delta))\big|y,\xi] = C_m(y)\exp(r_m(y)\xi)E\exp(r_m(y)\delta) = \exp(a_m(y)+r_m(y)\xi)$ (під знаком останнього математичного сподівання y вважаємо фіксованим, і математичне сподівання береться відносно випадкового δ; це саме стосується подальшого запису для математичного сподівання у даному розділі статті). Звідси $C_m(y) = \left(E\exp(r_m(y)\delta)\right)^{-1}\exp(a_m(y))$. Нагадаємо, що $\delta \sim N(0,\sigma_\delta^2)$. З рівності $E\exp(r_m\delta) = \exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right)$ маємо

$E\delta\exp(r_m\delta) = \frac{d}{dr_m}E\exp(r_m\delta) = r_m\sigma_\delta^2\exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right)$. Звідси

$$\phi_m(x,y) = C_m(y)\exp(r_m(y)x) = \frac{\exp((\beta_0+\beta_1x)(m+(1-q)y))}{E\exp(\beta_1(m+(1-q)y)\delta)} = \exp\left((\beta_0+\beta_1x)(m+(1-q)y) - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}\right). \tag{7}$$

Далі розв'яжемо (6). Перепишемо (6) у вигляді $E[\psi_m(x,y)\big|y,\xi] = \xi\exp(a_m(y)+r_m(y)\xi)$ і шукаємо $\psi_m(x,y)$ вигляду $\psi_m(x,y) = (C_{1,m}(y) + C_{2,m}(y)x)\exp(r_m(y)x)$. Аналогічно знаходимо

$$\psi_m(x,y) = (C_{1,m}(y) + C_{2,m}(y)x)\exp(r_m(y)x) = (x - \beta_1\sigma_\delta^2(m+(1-q)y))\exp\left((\beta_0+\beta_1x)(m+(1-q)y) - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}\right). \tag{8}$$

Нарешті, отримаємо $h(y,x)$ згідно з (4), (7), (8). Ряди в (4) абсолютно збіжні за ознакою Даламбера. За теоремою Фубіні можемо змінити порядок підсумування і обчислити $E[\phi_m(x,y)\big|y,\xi]$ та $E[\psi_m(x,y)\big|y,\xi]$, тому справді функція (4) з $\phi_m(x,y)$ і $\psi_m(x,y)$, вигляду (7), (8), задовольняє рівняння (1).

Якщо $q=1$, то з (4) отримаємо

$$S_C^{(1)}(y,x,\beta) = y\begin{pmatrix}\phi_0\\ \psi_0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\phi_1\\ \psi_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \exp\left(\beta_0+\beta_1x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right) \\ yx - (x-\beta_1\sigma_\delta^2)\exp\left(\beta_0+\beta_1x - \frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\end{pmatrix}.$$

При побудові оцінки $\widehat{\beta}_n(q),\ q>0,$ не використовується інформація про розподіл ξ.

4. Консистентність оцінки

Нижче "зрештою" означає наступне: для послідовності випадкових величин $\{U_n : n\ge 1\}$ послідовність тверджень $A_n(U_n)$ виконується зрештою за ймовірнісною мірою $P,$ якщо існує така випадкова подія $\Omega_0\subset\Omega,\ P(\Omega_0)=1,$ що $\forall\omega\in\Omega_0\ \exists N(\omega)\ \forall n\ge N(\omega):\ A_n(U_n(\omega))$ справджується.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1. $q=q_n$, причому $0<q_n\le 1,\ \ n\ge 1,$ та $q_n\to 1$ при $n\to\infty.$

2. Параметрична множина Θ – відома компактна множина в R^2 та істинне значення b параметра β є внутрішньою точкою Θ.

3. Існує $K>0$ таке, що $|\xi|\le K$ майже напевно, де K – невідома стала.

4. $D\xi\ne 0.$

Тоді зрештою рівняння (2) *має розв'язок .*

Визначимо оцінку $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}$ як розв'язок (2), якщо існує такий розв'язок; інакше покладемо $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}=0.$

Доведення теореми 4.1 подано нижче.

Теорема 4.2. *За умов теореми* 4.1 *оцінка $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}$ є строго консистентною, тобто $\widehat{\beta}_{CS}^{(q)}\to b$ з ймовірністю* 1 *при $n\to\infty,$ де b є істинним значенням β.*

Доведення теорем 4.1 і 4.2. Використаємо лему О. Усольцевої [1] (див. лему 5.1 в Додатку). Маємо оціночне рівняння $\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)=0,$ в якому $q_n\to 1$ при $n\to\infty,$ де $\begin{pmatrix} S_1(y_i,x_i,\beta,q_n)\\ S_2(y_i,x_i,\beta,q_n)\end{pmatrix}=S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)=S_C^{(q_n)}(y_i,x_i,\beta).$

Позначимо $S_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_C(y_i,x_i,\beta,1),\ \ \Phi_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_C(y_i,x_i\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right).$ Перепишемо оціночне рівняння у вигляді $S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)=0,\ \beta\in\Theta.$ Маємо

$$E_b y^n\exp(\beta_1\xi)=EE_b(y^n\exp(\beta_1\xi)\ \big|\ \ \xi)=\sum_{j=0}^{n} c_j\lambda^j(b)E\exp(\beta_1\xi), \tag{9}$$

де $c_j=c_j(n)$ – відомі коефіцієнти,

$$E_b y|\xi|\exp(\beta_1\xi)=EE_b(y|\xi|\exp(\beta_1\xi)\ \big|\ \ \xi)=E|\xi|\exp(\beta_1\xi)\lambda(b_0,b_1)=\exp(b_0)E|\xi|\exp((\beta_1+b_1)\xi),$$

$$E_b y\xi^2\exp(\beta_1\xi)=EE_b(y\xi^2\exp(\beta_1\xi)\ \big|\ \ \xi)=E\xi^2\exp(\beta_1\xi)\lambda(b_0,b_1)=\exp(b_0)E\xi^2\exp((\beta_1+b_1)\xi),$$

$$E\exp(ax)=E\exp(a\xi+a\delta)=\exp\left(\frac{a^2\sigma_\delta^2}{2}\right)E\exp(a\xi),$$

$$Ex\exp(ax)=E\xi\exp(a\xi)E\exp(a\delta)+E\exp(a\xi)E\delta\exp(a\delta)=\exp\left(\frac{a^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\left(E\xi\exp(a\xi)+a\sigma_\delta^2E\exp(a\xi)\right).$$

Оскільки $\delta\sim N(0,\sigma_\delta^2),$ то з рівності $E\exp(r_m\delta)=\exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right)$ маємо $E\delta^2\exp(r_m\delta)=\frac{d^2}{dr_m^2}E\exp(r_m\delta)=\left(r_m^2\sigma_\delta^4+\sigma_\delta^2\right)\exp\left(\frac{r_m^2\sigma_\delta^2}{2}\right).$ Усі наведені математичні сподівання скінченні згідно умови 3 теореми 4.1.

Розглянемо умову 1 леми 5.1. Те, що $S_C(y_i,x_i,\cdot,1)\in C^1(\Theta)$ майже напевно, випливає з вигляду цієї вектор-функції; належність до класу $\acute{N}^1(\Theta)$ означає, що неперервна диференційованість виконується на деякій відкритій множині, що містить Θ. Тепер введемо норму в R^2: $\|z\|=|z_1|+|z_2|,\ \ z\in R^2.$ Обмежимо наступне математичне сподівання, використовуючи незалежність ξ та δ і нормальний розподіл δ та нерівність $E|\delta|\exp(\beta_1\delta)\le\sigma_\delta\exp(\beta_1^2\sigma_\delta^2),$ яка випливає з нерівності Коші-Шварца:

$$E_b\|S_C(y,x,\beta,1)\|=E_b\left|y-\exp\left(\beta_0+\beta_1\xi+\beta_1\delta-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\right|+E_b\left|y\xi+y\delta-(\xi+\delta-\beta_1\sigma_\delta^2)\exp\left(\beta_0+\beta_1\xi+\beta_1\delta-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\right|\le$$

$$\le E_b|y|+\exp\left(\beta_0-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)E\exp(\beta_1\delta)E\exp(\beta_1\xi)+E_b y|\xi|+E|\delta|E_b y+$$

$$+\exp\left(\beta_0-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\left(E\exp(\beta_1\delta)E|\xi|\exp(\beta_1\xi)+E|\delta|\exp(\beta_1\delta)E\exp(\beta_1\xi)+|\beta_1|\sigma_\delta^2E\exp(\beta_1\delta)E\exp(\beta_1\xi)\right).$$

Усі вирази в правій частині нерівності за умовою 3 теореми 4.1 обмежені зверху. Таким чином, $E_b\|S_C(y,x,\beta,1)\|<\infty.$

В умові 2 леми 5.1 функція

$S_\infty(\beta,b):=E_bS_C(y,x,\beta,1)=E_bS_C^{(1)}(y,x,\beta)=\ E_bE_b\left(S_{\dot N}^{(1)}(y,x,\beta)\Big|\ y,\xi\right)=E_bS^{(1)}(y,\xi,\beta)=E_b(y-\lambda(\beta))(1;\xi)^T\ =$

$=\begin{pmatrix} E\exp(b_0+b_1\xi)-E\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\\ E\xi\exp(b_0+b_1\xi)-E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\end{pmatrix}$ неперервна по $\beta=(\beta_0;\beta_1)^T$ на $\Theta.$

Перевіримо умову 3 леми 5.1. Матриця Якобі

$\dfrac{\partial S_C^{(1)}(y,x,\beta)}{\partial\beta^T}=\exp\left(\beta_0+\beta_1x-\dfrac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)\begin{pmatrix}-1 & -(x-\beta_1\sigma_\delta^2)\\ -(x-\beta_1\sigma_\delta^2) & \sigma_\delta^2-(x-\beta_1\sigma_\delta^2)^2\end{pmatrix}=(a_{ij})_{i,j=1}^2$ є 2×2 матриця. Будемо використовувати матричну норму $\|A\|=\sum\limits_{i,j=1}^{2}|a_{ij}|.$

Обмежимо математичне сподівання норми цієї матриці зверху, використовуючи умову 3 теореми 4.1:

$$E_b\left\|\frac{\partial S_C^{(1)}(y,x,\beta)}{\partial\beta^T}\right\|\le\exp\left(\beta_0-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right)E_b(1+2|x|+2|\beta_1|\sigma_\delta^2+\sigma_\delta^2+2x^2+2\beta_1^2\sigma_\delta^4)\exp(\beta_1x)<\infty.$$

Розглянемо умову 4 леми 5.1. Матриця Якобі

$$\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}=\begin{pmatrix}-E\exp(\beta_0+\beta_1\xi) & -E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\\ -E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi) & -E\xi^2\exp(\beta_0+\beta_1\xi)\end{pmatrix}$$

є симетричною.

Вимагаємо невиродженість матриці $V:=\left.\dfrac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=b}=\dfrac{\partial S_\infty(b,b)}{\partial\beta^T}$,тобто $\det\dfrac{\partial S_\infty(b,b)}{\partial\beta^T}=e^{2b_0}\begin{vmatrix}-Ee^{b_1\xi} & -E\xi e^{b_1\xi}\\ -E\xi e^{b_1\xi} & -E\xi^2e^{b_1\xi}\end{vmatrix}\ne 0.$ Це забезпечується умовою 4 теореми 4.1, а саме $D\xi>0,$ тому що з нерівності Коші-Шварца випливає, що

$$\left(E\xi\exp\left(b_1\xi\right)\right)^2=\left(E\xi\exp\left(\frac{b_1\xi}{2}\right)\exp\left(\frac{b_1\xi}{2}\right)\right)^2<E\xi^2\exp\left(b_1\xi\right)E\exp\left(b_1\xi\right),\qquad(10)$$

якщо $\xi\exp\left(\dfrac{b_1\xi}{2}\right):\exp\left(\dfrac{b_1\xi}{2}\right)=\xi$ не є константою майже напевно, тобто якщо $D\xi>0.$

Для перевірки умови 5 леми 5.1 розв'яжемо систему рівнянь стосовно $\beta:\ S_\infty(\beta,b)=0,$ або

$$\begin{cases}E\exp(b_0+b_1\xi)-E\exp(\beta_0+\beta_1\xi)=0,\\ E\xi\exp(b_0+b_1\xi)-E\xi\exp(\beta_0+\beta_1\xi)=0.\end{cases}$$

Якщо $\beta=b,$ то $S_\infty(b,b)=0.$

Припустимо, що існує таке $\beta\ne b,$ що $S_\infty(\beta,b)=0,$ позначимо $f(\beta)=S_\infty(\beta,b).$ Розглянемо $g(t)=(f(tb+(1-t)\beta),b-\beta),$ тоді за припущенням $g(0)=g(1)=0.$ За теоремою Ролля існує таке $\tau\in(0,1),$ що $g'(\tau)=0$ і

$$(b-\beta)^T\left(\left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=\bar b}\right)(b-\beta)=0,\qquad(11)$$

де точка $\bar b\in(b;\beta)$. З (10) випливає, що $\det\dfrac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}>0$ внаслідок умови 4 теореми 4.1. Звідси, використовуючи критерій Сильвестра, остаточно отримаємо $\left.\dfrac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=\bar b}<0$ для всіх $b\in\Theta,$ це веде до суперечності з рівністю (11).

Таким чином, рівняння $S_\infty(\beta,b)=0$ має єдиний розв'язок на $\Theta.$ Крім того, $S_\infty(\beta,b)=0$ тоді і тільки тоді, коли $\beta=b.$

Розглянемо умову 6 леми 5.1. Для того, щоб показати, що $\sup\limits_{\beta\in\Theta}\|\Phi_n(\beta)\|\xrightarrow{P1}0,$ оцінимо

$$\|\Phi_n(\beta)\|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\|\ \le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sup_{q_n\le\gamma_n\le1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma_n)}{\partial q}\right||q_n-1|,$$

$$|q_n-1|\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{2}\sup_{1-\tilde\delta\le\gamma\le1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma)}{\partial q}\right|\to0,\ n\to\infty.$$

Вимагаємо, щоб для кожного $k=1,2\ \ \exists\tilde\delta>0:\ E\sup\limits_{1-\tilde\delta\le\gamma\le1,\beta\in\Theta}\left|\dfrac{\partial S_k(y_i,x_i,\beta,\gamma)}{\partial q}\right|<\infty.$

Диференціюючи $S_C^{(q)}(y,x,\beta)$ за q, отримаємо вектор. Для першої компоненти ($k=1$) маємо :

$$\frac{\partial S_1(y,x,\beta,q)}{\partial q}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m(y!)^{q-1}y}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+1)^2}{2}\right)+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}\right)\times\left(y\ln y!+(\beta_1^2\sigma_\delta^2 m-\beta_0-\beta_1 x)y^2+\beta_1^2\sigma_\delta^2(1-q)y^3\right)-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+2)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+2)^2}{2}\right)-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+1)^2}{2}\right)\left(\ln y!+(\beta_1^2\sigma_\delta^2 m+\beta_1^2\sigma_\delta^2-\beta_0-\beta_1 x)y+\beta_1^2\sigma_\delta^2(1-q)y^2\right).$$

Оцінимо $x\le|x|\le|\xi|+|\delta|,\ |\beta_0|\le C_0,\ |\beta_1|\le C_1$ та

$$E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+\beta_1(m+(1-q)y)|\delta|\right)\le E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+\beta_1(m+(1-q)y)\delta\right)+$$

$$+E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}-\beta_1(m+(1-q)y)\delta\right)\le 2E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+|\beta_1|(m+(1-q)y)\delta\right).$$

Із рівностей в лемі 5.2 та $\delta=\sigma_\delta\tau$, де $\tau\sim N(0,1)$, випливають нерівності

$$E\sup_{|\beta_1|\le C_1}\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+|\beta_1|(m+(1-q)y)\delta\right)\le C_1\sigma_\delta(m+(1-q)y)\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1,$$

$$E\sup_{|\beta_1|\le C_1}|\delta|\exp\left(-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}+|\beta_1|(m+(1-q)y)\delta\right)\le\frac{C_1^2\sigma_\delta^3(m+(1-q)y)^2}{\sqrt{2\pi}}+C_1\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)+\sigma_\delta\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Використовуючи формулу (9), умови 2 і 3 теореми 4.1, формули суми геометричної прогресії та дії над степеневими рядами, отримаємо $E\sup_{1-\tilde\delta\le q\le 1,\beta\in\Theta}\left|\frac{\partial S_1(y,x,\beta,q)}{\partial q}\right|<\infty.$

Аналогічно оцінюється друга компонента $\frac{\partial S_2(y,x,\beta,q)}{\partial q}$.

Розглянемо умову 7 леми 5.1. Нехай n_0 – такий номер, що при всіх $n\ge n_0$ виконується $q_n\ge 1-\tilde\delta$. Маємо

$$\sup_{n\ge1}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\|\le\sup_{n\ge n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\beta\in\Theta,1-\tilde\delta\le q\le1}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(S_C(y_i,x_i,\beta,q)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)\right\|+$$

$$\sup_{n<n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)\right\|.$$

Доданок $\sup_{n<n_0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(S_C(y_i,x_i,\beta,q_n)-S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)\right\|$ скінченний майже напевно.

Розглянемо

$$\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y,x,\beta,q)-\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y,x,\beta,1)\right)_{11}=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+(1-q)y)(q-1)^m y(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y)^2}{2}\right)-$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+(1-q)y+1)(q-1)^m(y!)^{q-1}}{m!}\exp\left((\beta_0+\beta_1 x)(m+(1-q)y+1)-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2(m+(1-q)y+1)^2}{2}\right)+\exp\left(\beta_0+\beta_1 x-\frac{\beta_1^2\sigma_\delta^2}{2}\right).$$

Аналогічно міркуванням перевірки умови 6 леми 5.1 встановлюється скінченність математичного сподівання, але істинне значення параметра таке, яке присутнє у виразі для λ.

Безпосередньо перевіряється, що при всіх $k,l=1,2$

$$E\sup_{\beta\in\Theta,1-\tilde\delta\le q\le1}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,q)-\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)_{kl}\right|<\infty,$$

де елемент $\left(\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,q)-\frac{\partial}{\partial\beta^T}S_C(y_i,x_i,\beta,1)\right)_{kl}$ знаходиться в k – му рядку і в l – му стовпчику матриці 2×2 .

Тоді $\sup_{n\geq 1}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\| < \infty$ майже напевно.

Усі умови леми 5.1 перевірені, і твердження теорем 4.1 та 4.2 виконуються за лемою 5.1.

5. Додаток

Лема 5.1. ([1]*). Нехай* (Ω, F, P) *– імовірнісний простір,* Θ *– компактна підмножина* R^m*. Спостерігаються незалежні однаково розподілені в* R^k *випадкові вектори* Z_i, $i=\overline{1,n}$, *розподіл яких залежить від* $\beta\in\Theta$*. Для заданої борелевої функції* $q:\Theta\times R^k\to R^m$ *розглянемо* $S_n(\beta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}q(\beta,Z_i)$, $\beta\in\Theta$*. Нехай істинне значення параметра* β *дорівнює* b, *причому* b *є внутрішньою точкою* Θ.

Нехай виконуються наступні умови:

1. $q(\cdot,Z)\in C^1(\Theta)$ *майже напевно;* $E_b\|q(\beta,Z)\|<\infty$, $\beta\in\Theta$.
2. *Функція* $S_\infty(\beta,b):=E_b q(\beta,Z)$ *неперервна за* β *на* Θ.
3. $E_b\left\|\frac{\partial q(\beta,Z)}{\partial\beta^T}\right\|<\infty$, $\beta\in\Theta$.
4. $V:=\left.\frac{\partial S_\infty(\beta,b)}{\partial\beta^T}\right|_{\beta=b}$ *– невироджена матриця.*
5. $S_\infty(\beta,b)=0$, $\beta\in\Theta$, *тоді і тільки тоді, коли* $\beta=b$.

Нехай випадкові вектор-функції $\Phi_n(\beta)=\Phi_n(\beta,\omega)$, $n\geq 1$, *із значеннями в* R^m *задовольняють умови:*

6. *Для всіх* $\beta\in\Theta: \Phi_n(\beta)\to 0$ *з ймовірністю 1 при* $n\to\infty$, $\Phi_n(\cdot)\in C^1(\Theta)$ *майже напевно.*
7. $\sup_{n\geq 1}\sup_{\beta\in\Theta}\left\|\frac{\partial\Phi_n(\beta)}{\partial\beta^T}\right\|<\infty$ *майже напевно.*

Тоді мають місце наступні твердження:
a) зрештою існує розв'язок оціночного рівняння $S_n(\beta)+\Phi_n(\beta)=0$, $\beta\in\Theta$;
b) оцінка $\hat\beta_n$ *параметра* β, *для якої зрештою виконується* $S_n(\hat\beta_n)+\Phi_n(\hat\beta_n)=0$, *є строго консистентною.*

Лема 5.2. *Нехай* $\tau\sim N(0,1)$. *Тоді мають місце рівності*

$$E\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1,\quad E\sup_{|b|\leq C}|\tau|\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=\frac{C^2}{\sqrt{2\pi}}+C+\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Доведення леми 5.2. Якщо $|t|\leq C$, то $\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)$ досягається при $b=t$, а для $|t|\geq C$ при $|b|=C$. Розглянемо

$$E\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+b\tau\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\sup_{|b|\leq C}\exp\left(-\frac{b^2}{2}+bt\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-C}^{C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}+t^2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-C}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{C^2}{2}-Ct\right)dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{C}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-\frac{C^2}{2}+Ct\right)dt=C\sqrt{\frac{2}{\pi}}+1.$$

Аналогічними міркуваннями встановлюється інша рівність леми.

6. Висновки

Вивчено пуассонівську структурну модель регресії з нормально розподіленою похибкою вимірювання за умови, що дисперсія σ_δ^2 похибки вимірювання відома. Щоб оцінити невідомий параметр $b=(b_0;b_1)^T$, побудовано виправлену $T(q)$ –вірогідну оцінку. Дано достатні умови її строгої консистентності.

1. Усольцева О.С.. Конзистентна оцінка в моделі тривалості життя з цензурованими спостереженнями за наявності похибок вимірювання // Теорія ймовірностей та математична статистика – 2010. – 82, С. 156-162. 2. Carrol R.J., Ruppert D., Stefanski L.A.. Measurement error in nonlinear models. – Chapman&Hall, London, 1995. 3. Cheng C.-L., Schneeweiss H.. Polynomial regression with errors in the variables // J. R. Statistical Society B – 1998. – 60, pp. 189-199. 4. Ferrari D., Yang Y.. Maximum L_q –likelihood Estimation // Annals of Statistics – 2010. – 38. P. 753 – 783. 5. Kukush A., Markovsky I., Van Huffel S. Consistent adjusted least squares estimator for errors-in-variables model $AXB=C$ // Metrika – 2003. – 57.– P. 253-285. 6. Kukush A., Schneeweiss H. Comparing different estimators in a non-linear measurement error model // I. Mathematical Methods of Statistics – 2005. – 14. – P. 53-79.

Надійшла до редколегії 29.10.11

УДК 519.21

О. Синявська, асп.
e-mail:olja_sunjavska@ua.fm

ОЦІНКА ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО АНІЗОТРОПНОГО ВІНЕРІВСЬКОГО ПОЛЯ

Побудовано бакстерівську оцінку невідомого параметра Хюрста дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(H)}$. Знайдено області надійності для параметра H та оцінку кубічної розмірності графіка $B^{(H)}$.

Baxter estimate of the unknown Hurst vector parameter of fractional anisotropic Wiener field $B^{(H)}$ is constructed Range of confidence for parameter H and estimate of the box dimension of the graph of $B^{(H)}$ is found.

Вступ

Як відомо,

$$S_n(W) = \sum_{k=1}^{2^n}\left(W\left(\frac{k}{2^n}\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 \to 1, n \ge 1$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$, де $W(t), t \ge 0$ – стандартний броунівський рух. Цей результат встановив відомий французький математик П.Леві. Пізніше Г.Бакстер [4] узагальнив цей результат на певний клас гауссових випадкових процесів. Суми $S_n(\xi)$, де $\xi(t), t \in [0,1]$, – випадковий процес, називають бакстерівськими сумами.

Статистики, побудовані за допомогою бакстерівських сум, успішно застосовують для побудови оцінок параметрів випадкових функцій. Ці статистики дозволяють побудувати сильно консистентні оцінки та неасимптотичні області надійності для певного класу випадкових процесів і полів. Так у [3; 5] методом бакстерівських сум побудовано сильно консистентні оцінки, неасимптотичні області надійності для заданого рівня довіри параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху.

Дробовим анізотропним вінерівським полем з параметром Хюрста $H = (H_1, \ldots, H_m), 0 < H_i < 1, 1 \le i \le m$ називається гауссове випадкове поле $B = \left\{B^{(H)}(t) : t \in R^m\right\}$ з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією:

$$EB^{(H)}(t)B^{(H)}(s) = \frac{1}{2^m}\prod_{i=1}^{m}\left(\left|t_i\right|^{2H_i} + \left|s_i\right|^{2H_i} - \left|t_i - s_i\right|^{2H_i}\right),$$

де $t = (t_1, \ldots, t_m), s = (s_1, \ldots, s_m) \in R^m$. В [6] знайдена кубічну розмірність графіка реалізацій $B^{(H)}$ на довільному m-вимірному паралелепіпеді, а саме доведено, що вона дорівнює $m + 1 - \chi$, де $\chi = \min(H_1, \ldots, H_m)$.

Постановка задачі

За спостереженням дробового анізотропного вінерівського поля $\left\{B^{(H)}(t) : t \in R^m\right\}$ на ребрах

$$E_i = \left\{(t_1, \ldots, t_m) \middle| t_1 = 1, \ldots, t_{i-1} = 1, 0 \le t_i \le 1, t_{i+1} = 1, \ldots, t_m = 1\right\}, 1 \le i \le m,$$

одиничного m-вимірного паралелепіпеда потрібно побудувати сильно консистентну оцінку векторного параметра $H \in \prod_{i=1}^{m}\left(0, H_i^*\right]$ і кубічної розмірності графіка реалізації цього поля, вказати області надійності для заданого рівня довіри. Величини $H_i^*, 1 \le i \le m$, вважаються відомими і належать інтервалу $(0,1)$.

Основна частина

Для розв'язування цієї задачі оцінювання застосуємо метод бакстерівських сум, оскільки цей метод дозволяє побудувати неасимптотичні області надійності для параметра, що оцінюється.

Звуження поля B на E_i позначимо $B_i^{(H)}(t_i), 0 \le t_t \le 1, i = \overline{1,m}$, з коваріаційною функцією:

$$EB^{(H)}(t_i)B^{(H)}(s_i) = \frac{1}{2^m}\prod_{i=1}^{m}\left(\left|t_i\right|^{2H_i} + \left|s_i\right|^{2H_i} - \left|t_i - s_i\right|^{2H_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\left|t_i\right|^{2H_i} + \left|s_i\right|^{2H_i} - \left|t_i - s_i\right|^{2H_i}\right), \quad (1)$$

тобто $B_i^{(H)}$ є дробовим броунівським рухом з параметром Хюрста H_i.

Розглянемо послідовність бакстерівських сум з приростами другого порядку:

$$\widehat{S}_n^{(i)} = \sum_{k=1}^{2^n}\left(\Delta_2 B^{(H)}\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2 = \sum_{k=1}^{2^n}\left(B_i^{(H)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - 2B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2, n \ge 1.$$

Теорема 1. Нехай $B_i^{(H)}(t_i), i = \overline{1,m}$, – звуження дробового анізотропного вінерівського поля з параметром Хюрста $H = (H_1, \ldots, H_m), H_i \in \left(0, H_i^*\right], H_i^* < 1$ та коваріаційною функцією (1). Тоді статистика $\widehat{H}_n^{(i)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 \widehat{S}_n^{(i)}}{n}\right), n \ge 1$, є сильно консистентною оцінкою параметра $H_i, 1 \le i \le m$.

© Синявська О., 2012

Доведення. Обчислимо $E\widehat{S}_n^{(i)}$:

$$E\widehat{S}_n^{(i)} = E\sum_{k=1}^{2^n}\left(B_i^{(H)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - 2B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) + B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2 = E\sum_{k=1}^{2^n}\left(\left(B_i^{(H)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)^2 + \right.$$

$$+4\left(B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)^2 + \left(B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2 - 4B_i^{(H)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - 4B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right) +$$

$$\left. + 2B_i^{(H)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right)B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right) = 2^n\left(\frac{4}{\left(2^{n+1}\right)^{2H_i}} - \frac{1}{2^{2H_i n}}\right) = 2^{n(1-2H_i)}\left(\frac{4}{2^{2H_i}} - 1\right).$$

Знайдемо тепер $\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(i)}$: $\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(i)} = E\left(\widehat{S}_n^{(i)}\right)^2 - \left(E\widehat{S}_n^{(i)}\right)^2, n \ge 1$.Для подальшого обчислення використаємо формулу [1, с. 29] для математичного сподівання добутку випадкових величин, які мають сумісний гауссовий розподіл з нульовим середнім значенням:

$$E(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4) = E(\eta_1\eta_2)E(\eta_3\eta_4) + E(\eta_1\eta_3)E(\eta_2\eta_4) + E(\eta_1\eta_4)E(\eta_2\eta_3).$$

Тоді

$$\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(i)} = \sum_{k,j=1}^{2^n}\left(E\left(\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2 E\left(\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)^2 + 2\left(E\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)^2\right) - \left(E\sum_{k=1}^{2^n}\left(\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\right)^2 =$$

$$= 2\sum_{k,j=1}^{2^n}\left(E\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)^2 = 2\sum_{k=1}^{2^n}\left(E\left(\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2\right)^2 + 4\sum_{\substack{k,j=1\\k>j}}^{2^n}\left(E\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right)\right)^2.$$

Знайдемо спочатку $E\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right)$. Маємо:

$$E\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\Delta_2 B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right) = E\left(B_i^{(H)}\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - 2B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right) + B_i^{(H)}\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\left(B_i^{(H)}\left(\frac{j+1}{2^n}\right) + B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}\right) - \right.$$

$$\left. - 2B_i^{(H)}\left(\frac{j}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = -3\left|\frac{k-j}{2^n}\right|^{2H_i} + 2\left|\frac{(k-j)+\frac{1}{2}}{2^n}\right|^{2H_i} - \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{2^n}\right|^{2H_i} - \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{2^n}\right|^{2H_i} + 2\left|\frac{(k-j)-\frac{1}{2}}{2^n}\right|^{2H_i}.$$

Зробимо заміну $k - j = l, 1 \le l \le 2^n - 1$. Отримаємо:

$$\operatorname{Var}\widehat{S}_n^{(i)} = 2^{n(1-4H_i)}2\left(\frac{4}{2^{2H_i}} - 1\right)^2 + 4\sum_{l=1}^{2^n-1}\left(2^n - l\right)\left(-3\left|\frac{l}{2^n}\right|^{2H_i} + 2\left|\frac{l+\frac{1}{2}}{2^n}\right|^{2H_i} - \frac{1}{2}\left|\frac{l+1}{2^n}\right|^{2H_i} - \frac{1}{2}\left|\frac{l-1}{2^n}\right|^{2H_i} + 2\left|\frac{l-\frac{1}{2}}{2^n}\right|^{2H_i}\right)^2 =$$

$$= 2^{n(1-4H_i)}\left(2\left(2^{2-2H_i} - 1\right)^2 + 4\sum_{l=1}^{2^n-1}\left(1 - \frac{l}{2^n}\right)\left(-3(l)^{2H_i} + 2\left(l+\frac{1}{2}\right)^{2H_i} - \frac{1}{2}(l+1)^{2H_i} - \frac{1}{2}(l-1)^{2H_i} + 2\left(l-\frac{1}{2}\right)^{2H_i}\right)^2\right).$$

Покладемо: $S_n = 2^{n(2H_i-1)}\widehat{S}_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Var} S_n^{(i)}$ збігається для всіх значень параметра $H_i < 1$, а тому [2, с. 24] $S_n^{(i)} - ES_n^{(i)} \to 0, n \to \infty$ з ймовірністю одиниця. Звідси отримаємо:

$$2^{n(2H_i-1)}\widehat{S}_n^{(i)} \to 2^{2-2H_i} - 1, n \to \infty,$$

$$(2H_i - 1) + \frac{\log_2 \widehat{S}_n^{(i)}}{n} \to 0, n \to \infty,$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 \widehat{S}_n^{(i)}}{n}\right) \to H_i, 1 \le i \le m, \text{ з ймовірністю 1 при } n \to \infty.$$

Отже, статистика

$$\widehat{H}_n^{(i)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 \widehat{S}_n^{(i)}}{n}\right), n \ge 1$$

є сильно консистентною оцінкою параметра Хюрста $H_i, 1 \le i \le m$. Теорему доведено.

Таким чином, $\widehat{H}_n = \left(\widehat{H}_n^{(1)}, \ldots, \widehat{H}_n^{(m)}\right)$ є сильно консистентною оцінкою параметра H.

Тепер можна побудувати оцінку кубічної розмірності випадкового поля $B^{(H)}$.

Означення 1. [6] Нехай $F \subset R^{m+1}$ деяка обмежена підмножина і для $\delta > 0$ $N_\delta(F)$ – мінімальна кількість множин з діаметром, що не перевищує δ, які покривають F. Кубічною розмірністю множини F називається границя

$$\dim_b F = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{\log \delta^{-1}},$$

якщо вона існує та скінченна.

Теорема 2. [6] Нехай $H = (H_1, \ldots, H_m), 0 < H_i < 1, 1 \le i \le m, \chi = \min(H_1, \ldots, H_m), I^m$ – одиничний куб. Тоді

$$P\left\{\dim_b \Gamma\left(B^{(H)}\Big|_{I^m} \right) = m + 1 - \chi\right\} = 1,$$

де $\Gamma(f)$ – графік функції f.

Позначимо кубічну розмірність $B^{(H)}$ через d: $d = m + 1 - \chi$.

Покладемо: $\widehat{H}_n^{\min} = \min\left(\widehat{H}_n^{(1)}, \widehat{H}_n^{(2)}, \ldots, \widehat{H}_n^{(m)}\right)$. Тоді $\widehat{d}_n = m + 1 - \widehat{H}_n^{\min} \to d$ з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$. Отже, внаслідок теореми 1, $\widehat{d}_n$ є сильно консистентною оцінкою кубічної розмірності дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(H)}$.

Нехай (Ω, F, P) – імовірнісний простір.

Лема 1. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – випадкові події і $P(A_i) = 1 - p_i, p_i \in [0,1], 1 \le i \le m$. Тоді справедлива нерівність:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) \ge 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_m. \tag{2}$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції. Нехай $m = 2$, $P(A_1 \cup A_2) = c$. За формулою включення-виключення отримаємо, що

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) = (1 - p_1) + (1 - p_2) - c \ge 1 - p_1 - p_2.$$

Отже, нерівність (2) для $m = 2$ виконується.

Припустимо, що нерівність (2) при $m = k \ge 2$ справедлива:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \ge 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_k.$$

Покажемо, що при $m = k + 1$ нерівність (2) також виконується. Нехай $P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \widetilde{c}$. Маємо:

$$P((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) + P(A_{k+1}) - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}) \ge$$
$$\ge (1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_k) + P(A_{k+1}) - \widetilde{c} \ge 1 - p_1 - p_2 - \ldots - p_k - p_{k+1},$$

що і доводить справедливість нерівності (2) при $m = k + 1$. Отже, нерівність (2) виконується при будь-якому натуральному $m \ge 2$.

У [3] на основі бакстерівських статистик побудовано інтервал надійності для параметра Хюрста дробового броунівського руху $\xi^{(H)}(t), t \in R$. Цей інтервал надійності для рівня довіри $1 - p$ має вигляд

$$\left(\widehat{\theta}_n - \alpha(p), \widehat{\theta}_n + \beta(p)\right),$$

де $\widehat{\theta}_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 S_n(\xi)}{n}\right)$ – бакстерівська оцінка параметра $H \in \left(0, H^*\right]$,

$$\alpha(p) = -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\left(2^{2-2H^*} - 1\right) - \frac{K_0\sqrt{A_n(H^*)}}{\sqrt{2^n}}\varphi_+(p)\right)}{n}, \quad \beta(p) = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\left(2^{2-2H^*} - 1\right) + \frac{K_0\sqrt{A_n(H^*)}}{\sqrt{2^n}}\varphi_+(p)\right)}{n},$$

$$K_0 = \inf_{\tau \in \left(0, \frac{1}{2}\right)} \frac{\sqrt{2e^{-\tau}(1 - 2\tau)^{-0.5} + 1}}{\sqrt{2}\tau} \approx 3.47,$$

$$A_n(H^*) = \left(2^{2-2H^*} - 1\right)^2 + 2\sum_{l=1}^{2^n - 1}\left(-3(l)^{2H^*} + 2\left(l + \frac{1}{2}\right)^{2H^*} - \frac{1}{2}(l+1)^{2H^*} - \frac{1}{2}(l-1)^{2H^*} + 2\left(l - \frac{1}{2}\right)^{2H^*}\right)^2,$$

$$\varphi_+(p) = \ln\left(1 + \frac{2}{p} + \sqrt{\left(1 + \frac{2}{p}\right)^2 + 1}\right).$$

Покладемо $A_i = \left\{ H_i \in \left(\widehat{H}_n^{(i)} - \alpha_i\left(\frac{p}{m}\right), \widehat{H}_n^{(i)} + \beta_i\left(\frac{p}{m}\right) \right) \right\}, 1 \le i \le m$, де $\widehat{H}_n^{(i)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 \widehat{S}_n^{(i)}}{n}\right), n \ge 1$,

$$\alpha_i(t) = -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\left(2^{2-2H_i^*}-1\right) - \frac{K_0\sqrt{A_n\left(H_i^*\right)}}{\sqrt{2^n}}\varphi_+(t)\right)}{n},\ \beta_i(t) = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\left(2^{2-2H_i^*}-1\right) + \frac{K_0\sqrt{A_n\left(H_i^*\right)}}{\sqrt{2^n}}\varphi_+(t)\right)}{n}, t \in (0,1).$$

Внаслідок леми 1 маємо, $P\left\{ H \in \prod_{i=1}^{m} \left(\widehat{H}_n^{(i)} - \alpha_i\left(\frac{p}{m}\right), \widehat{H}_n^{(i)} + \beta_i\left(\frac{p}{m}\right) \right) \right\} \ge 1 - p$.

Перейдемо тепер до оцінювання інтервалу надійності кубічної розмірності d.

Лема 2. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – набори дійсних чисел. Тоді справедлива наступна нерівність

$$\left|\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) - \min(b_1, b_2, \ldots, b_n)\right| \le \max_{1 \le i \le n}\left|a_i - b_i\right|. \tag{3}$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Перевіримо правильність нерівності (3) при $n = 2$. Тоді якщо $\min(a_1, a_2) = a_i$ та $\min(b_1, b_2) = b_i, i = 1,2$, то нерівність очевидна. Нехай тепер $\min(a_1, a_2) = a_1, \min(b_1, b_2) = b_2$ (випадок $\min(a_1, a_2) = a_2, \min(b_1, b_2) = b_1$ розглядається аналогічно). Якщо $a_1 \le b_2 \le b_1$, то $b_2 - a_1 \le b_1 - a_1$. Якщо $b_2 < a_1 \le a_2$, то $a_1 - b_2 \le a_2 - b_2$. Отже, нерівність (3) для $n = 2$ виконується.

Припустимо, що для довільних наборів $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ та $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ дійсних чисел нерівність справедлива при $n \ge 3$. Покажемо, що тоді нерівність буде виконуватись і для $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$:

$$\left|\min(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) - \min(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n)\right| = \left|\min\left(a_n, \min\left(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1},\right)\right) - \min\left(b_n, \min\left(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\right)\right)\right| \le$$

$$\le \max\left\{\left|a_n - b_n\right|, \left|\min(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) - \min(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})\right|\right\} \le \max\left\{\left|a_n - b_n\right|, \max_{1 \le i \le n-1}\left|a_i - b_i\right|\right\} = \max_{1 \le i \le n}\left|a_i - b_i\right|.$$

Отже, нерівність (3) справедлива для будь-якого n. Лему доведено.

З леми 2 випливає, що інтервал

$$\left(\widehat{d}_n - a\left(\frac{p}{m}\right), \widehat{d}_n + a\left(\frac{p}{m}\right)\right),$$

де $a_i(p) = \max_{1 \le i \le m}\left\{\alpha\left(\frac{p}{m}\right), \beta\left(\frac{p}{m}\right)\right\}$, $a(p) = \max_{1 \le i \le m} a_i(p)$, є інтервалом надійності кубічної розмірності d дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(H)}$ з рівнем довіри $1 - p$.

Висновок

За допомогою бакстерівських статистик отримано сильно консистентну оцінку невідомого параметра Хюрста H для дробового анізотропного вінерівського поля $B^{(H)}$. Побудовано неасимптотичні області надійності для рівня довіри $1 - p$ та знайдено оцінку кубічної розмірності графіка $B^{(H)}$.

1. Ибрагимов И.А., Розанов Ю.А. . Гауссовские случайные процессы – М.: Наука, 1970. – 384 с. 2. Ламперти Дж. Случайные процессы. Обзор математической теории. – Киев: Вища школа. Головное изд-во: Пер. с англ., 1983. – 224 с. 3. Курченко О.О. Одна сильно конзистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху // Теорія ймовірностей і математична статистика. – 2002. – Вип. 67. – с. 45-54. 4.Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes // Proc. Amer. Math. Soc. – Vol. 7 (3). – 1956. – P. 522-527. 5. Breton J-C., Nourdin I., Peccati G. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion // Electronic Journal of Statistics. – Vol. 3. – 2009. – P. 416-425. 6. Kamont A. On the fractional anisotropic Wiener field // Probability and Mathematical Statistics. – Vol. 16. Fasc. 1. – 1996. – P. 85-98.

Надійшла до редколегії 09.11.11

УДК 512.5, 519.61

І. Дудченко, канд. фіз.-мат. наук, М. Плахотник, канд. фіз.-мат. наук

АЛГОРИТМ ЗНАХОДЖЕННЯ ІНДЕКСУ ТА ВІДПОВІДНОГО ВЛАСНОГО ВЕКТОРА МАТРИЦІ СУМІЖНОСТІ СИЛЬНО ЗВ'ЯЗНОГО САГАЙДАКА

Описано числовий алгоритм знаходження індексу та відповідного йому додатного власного вектора для матриці суміжності сильно зв'язного сагайдака без петель та кратних стрілок.

The numerical algorithm for calculating index and correspond eigen vector of adjacency matrix of strongly connected simply laced quiver is described in the article.

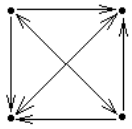
1. Вступ

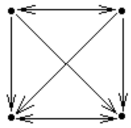
Будемо слідувати П. Габріелю (P. Gabriel), який в [10], присвяченій скінченно вимірним алгебрам над алгебраїчно замкненим полем з нульовим квадратом радикала, запропонував називати орієнтований граф сагайдаком (див. [11, § 11.10]). Сильно зв'язним сагайдаком називається такий сагайдак, для якого з кожної вершини існує орієнтований шлях в кожну іншу.

© Дудченко І., Плахотник М., 2012

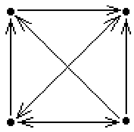
Одним зі способів задання сагайдака $[Q]$ є його матриця суміжності Q, для якої, як і для довільної матриці, визначено поняття характеристичного многочлена, спектру, індексу (найбільшого за модулем власного числа) власних векторів. Всі ці параметри матриці ми також для простоти називатимемо відповідними параметрами сагайдака.

Ідея виділення сильнозв'язних сагайдаків, безумовно, не нова, оскільки це поняття введене не нами та вивчалося, наприклад в [7], де, зокрема, наведено перелік сагайдаків, котрі мають не більше чотирьох вершин. Цікаво, що цей перелік має помилку. О.Г. Ганюшкін звернув увагу на те, що в цьому списку є неточності. Так сагайдаки з номерами 18 та 22 збігаються. Дійсно, сагайдаки, які в книзі [7] занумеровано як 18 та 22 мають вигляд





Ці сагайдаки ізоморфні, оскільки збігаються, якщо в одному з них ліву верхню та ліву нижню вершину переставити місцями. Крім того, пропущено сагайдак



Має місце критерій, який зводить питання про ізоморфність сильно зв'язних сагайдаків до питання про рівність їх характеристичних многочленів та власних векторів, що відповідають індексові.

Теорема 1. Сильно зв'язні сагайдаки на чотирьох вершинах ізоморфні тоді і лише тоді, коли їх характеристичні многочлени збігаються, а ліві та праві додатні власні вектори однієї норми збігаються з точністю до перестановки компонент [3].

Сильно зв'язні сагайдаки та їх матриці суміжності були використані при вивченні алгебр Фуджити в [4-6].

Наведене вище свідчить про актуальність задачі про дослідження матриць суміжності сильно зв'язних сагайдаків без петель та кратних стрілок.

2. Побудова та доведення коректності алгоритму

У цій статті запропоновано алгоритм, який за матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака без петель та кратних ребер дозволяє знайти його індекс та додатний власний вектор, що відповідає індексові. Задача, яка розв'язується, є коректною в тому сенсі, що такий вектор завжди існує і єдиний з точністю до дійсного множника.

Перенумерації вершин сагайдака Q, заданої перестановкою σ, відповідає задана цією самою перестановкою перенумерація рядків та стовпців матриці. Отриману таким чином матрицю називатимемо результатом дії перестановки σ на матрицю $[Q]$, або на сагайдак Q.

Наведемо декілька простих зауважень, які корисно використовувати про формулюванні, розумінні та доведенні коректності роботи того алгоритму, який буде запропоновано.

Зауваження 1. Нехай маємо сагайдак Q та його матрицю суміжності $[Q]$. Тоді степені матриці $[Q]$ мають такий геометричний зміст: для натурального t елемент a_{ij} матриці $[Q]^t$ дорівнює кількості різних шляхів довжиною t в графі Q, які виходять з вершини i та закінчуються у вершині j.

Завуваження 2. Сума матриць суміжності двох сагайдаків є матриця суміжності сагайдака, отриманого об'єднанням ребер вихідних сагайдаків.

Зауваження 3. Умова нерозкладності матриці $[Q]$ суміжності сагайдака Q рівносильна умові сильної зв'язності цього сагайдака.

У цьому зауваженні під нерозкладністю матриці розуміється поняття, запропоноване в [2, с. 352]. Матриця $[Q]$ називається розкладною, якщо існує така перестановка, що результатом її дії на матрицю $[Q]$ є матриця $[Q]'$ вигляду

$$[Q]' = \begin{pmatrix} [Q_1] & 0 \\ [Q_2] & [Q_3] \end{pmatrix} \qquad (1)$$

де $[Q_1]$ та $[Q_3]$ – квадратні матриці, причому відповідні їм сагайдаки Q_1 та Q_3 є компонентами зв'язності сагайдака Q.

Задача про визначення найбільшого власного числа відома давно. Так, в [1, розд. 6, § 12] розв'язано задачу про знаходження індексу та відповідного власного вектору матриці в припущенні, що всі власні числа матриці дійсні, а індекс має кратність 1, як корінь характеристичного многочлену. Нагадаємо, що для знаходження індексу матриці A та відповідного йому вектора необхідно взяти довільний вектор x_0, який не є власним, і розглянути ітераційну послідовність $x_{i+1} = Ax_i$. Відомо, що ця послідовність зі швидкістю $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^n$ збігається до власного вектору матриці A, який відповідає індексу.

Зауважимо, що цей алгоритм можна застосовувати навіть тоді, коли не всі власні числа матриці дійсні, але найбільше за модулем дійсне власне число має кратність один і модулі (комплексні норми) всіх інших власних чисел менші за модуль даного власного числа (у відповідних доведеннях коректності алгоритму базис достатньо вважати складеним з комплексних векторів). Крім цього, для невід'ємних та, зокрема, додатних матриць мають місце важливі теореми, доведені Перроном та Фробеніусом на початку 20-го століття.

Теорема Перрона. Додатна матриця $A=(\alpha_{ij})$ розміру n завжди має дійсне і до того ж додатне власне число r, яке є простим коренем характеристичного многочлену і за модулем більше за модуль кожного іншого характеристичного числа. Цьому числу r відповідає власний вектор $z=(z_1,\dots,z_n)$ матриці A з додатними координатами $(z_i>0\ \forall i)$.

Ця теорема, відповідно до посилання в [2], вперше була сформульована та доведена в [12] та [13].

Теорема Фробеніуса. Нерозкладна невід'ємна матриця $A=(\alpha_{ij})$ розміру n завжди має додатне власне число r, яке є простим коренем характеристичного многочлена. Модулі всіх інших власних чисел не більші за r. Цьому максимальному власному числу відповідає власний вектор з додатними координатами.

Якщо при цьому матриця A має h характеристичних чисел $\lambda_0=r,\ \lambda_1,\dots,\lambda_{h-1}$, модулі яких дорівнюють r, тоді всі ці числа є різними коренями рівняння $\lambda^h-r^h=0$. При $h>0$ матрицю A перестановкою рядків можна звести до вигляду

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_{1,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{2,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & A_{h-1,h} \\ A_{h,1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ця теорема, відповідно до посилання в [2], вперше була сформульована та доведена в [8] та [9].

Наслідком теореми Фробеніуса [2, с. 347 заув. 3] є таке твердження.

Твердження 1. Нерозкладна невід'ємна матриця не може мати двох лінійно незалежних невід'ємних власних векторів.

Враховуючи, наведені факти, запропонуємо алгоритм знаходження індексу сильно зв'язного сагайдака. Алгоритм має такий вигляд.

1. За матрицею $A=[Q]$ суміжності сагайдака Q будується матриця $B=A+A^2+\ldots+A^k$, де k вибано так, щоб матриця B була додатною.
2. Для матриці B застосовується алгоритм з [1].
3. Знайдений власний вектор матриці B є власним вектором матриці A, котрий відповідає індексу матриці A, а тому за цим вектором можна знайти і сам індекс матриці A.

Доведемо коректність запропонованого алгоритму.

Лема 1. Нехай A – матриця суміжності сильно зв'язного сагайдака. Тоді існує таке натуральне k, що матриця $B=A+A^2+\ldots+A^k$ додатна.

Доведення. Лема є наслідком сильної зв'язності сагайдака Q, а також зауважень 1 і 2.

Для скорочення викладок, позначимо $f(x)=x+x^2+\ldots+x^k$.

Лема 2. Кожен власний вектор матриці A є власним вектором матриці B, причому власним векторам матриці A, які відповідають різним додатним власним числам, відповідають власні вектори матриці B, що відповідають різним власним числам матриці B, що знаходяться в тому самому відношенні більше/менше, що і відповідні власні числа матриці A.

Доведення. Те, що власний вектор матриці A є власним вектором матриці B випливає з того, що наслідком рівності $Av=\lambda v$ є рівність $Bv=f(\lambda)v$. Відповідне відношення між власними числами випливає з монотонності функції $x+x^2+\ldots+x^k$ при додатних значеннях аргументу.

Лема 3. Матриця B має таке дійсне власне число кратності 1, що норми всіх інших власних чисел матриці B менші за нього.

Доведення. Лема випливає з зауваження 3 та теореми Перрона.

Лема 4. Власний вектор матриці B, який відповідає індексу матриці B, є власним вектором матриці A, який відповідає індексу матриці A.

Доведення. Нехай v – додатний власний вектор матриці B, що відповідає власному числу λ, тобто виконується рівність $Bv=\lambda v$.

Покажемо, що у цьому разі вектор Av також буде власним вектором матриці B. Дійсно, оскільки за побудовою $B=f(A)$, то матриці B та A комутують, звідки маємо, що $B(Av)=A(Bv)=\lambda Av$, що і потрібно.

Оскільки за побудовою матриця B додатна, то вона задовольняє умови твердження 1, тобто всі невід'ємні власні вектори матриці B лінійно залежні. Звідси випливає лінійна залежність векторів Av та v, тобто виконання рівності $Av=\mu\cdot v$ для деякого додатнього числа μ.

Враховуючи, що з побудови матриці B та рівності $Av=\mu\cdot v$ випливає рівність $Bv=f(\mu)v$, маємо $\lambda=f(\mu)$.

Покажемо, що число μ є індексом матриці A. Якщо це не так, тоді існує більше власне число μ_1 матриці A та відповідний власний вектор v_1. Не обмежуючи загальності число μ_1 можна вважати індексом матриці A і тоді за теоремою Фробеніуса вектор v_1 буде невід'ємним. Але в цьому разі вектор v_1 буде власним вектором матриці B, що відповідатиме власному числу $\lambda_1=f(\mu_1)$. З монотонності функції f маємо нерівність $\lambda_1>\lambda$, яка суперечить тому, що число λ є індексом матриці B і, в свою чергу, доводить лему.

З доведених лем випливає така теорема.

Теорема 2. Запропонований вище алгоритм знаходження індексу та відповідного власного вектору матриці суміжності сильно зв'язного сагайдака коректний.

3. Висновки

Побудовано алгоритм знаходження індексу та відповідного власного вектора матриці суміжності сильно зав'язного сагайдака без петель та кратних стрілок. Коректність та збіжність цього алгоритму строго доведено.

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы // Наука. – Москва. – 2003. – 630 С. 2. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц // Наука. – Москва. – 1966. – 576 С. 3. Дудченко И.В. Сильносвязные колчаны, их индексы и собственные векторы // Київ. – 2007. – С. 28. (Препр./ НАН Украины. Институт математики). 4. Дудченко И.В. Властивості алгебр Фуджити // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. – Серія фіз.-мат. науки. – 2005. – № 6. – С. 126-130. 5. Дудченко И.В. Алгебри Фуджити // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Серія фіз.-мат. науки. – 2011. – №1. 6. Дудченко И.В. Алгебри Фуджити // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – Серія фіз.-мат. науки. – 2011. – №2. 7. Харари Ф. Теория графов, пер. с англ., М., 1973. 8 Frobenius G., Uber Matrizen aus nicht-negativen Elementen // Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse. – Berlin, 1912 – S. 456-477. 9 Frobenius G., Uber Matrizen aus positiven Elementen // Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klas-Klasse. – Berlin, 1908. – S. 471-476; Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys-math. Klasse. – Berlin, 1909. – S. 514-518. 10 Gabriel P., Unserlegbare Darstellungen 1 // Man. Math., 1972, v.6, p.71-103. 11 Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V., Algebras, Rings and Modules, V.I, Mathematics and Its Applications // V.575, Kluwer Academic Publishers, 2004, 380 p. 12 Perron O., Jacobischer Kettenbruchalgorithmus//Math. Ann. – 1907. – Bd. 64. – S. 1-76. 13 Perron O., Ueber Matrizen // Math. Ann. – 1907. – Bd. 64. – S. 248-263.

Надійшла до редколегії 17.10.11

УДК 512.534

Т. Жуковська, асп.,
e-mail: t.zhukovska@ukr.net

ВІДНОШЕННЯ ҐРІНА НА ДЕЯКИХ НАПІВГРУПАХ ЧАСТКОВИХ ІН'ЄКТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ БУЛЕАНУ

Вивчається будова відношень Ґріна на напівгрупі $IF(B_n)$ стискуючих, напівгрупі $IO(B_n)$ монотонних та напівгрупі $IC(B_n)$ стискуючих монотонних ін'єктивних перетворень, впорядкованих, за включенням булеану B_n, множини $N=\{1,2,...,n\}$. Показано, що для напівгруп $IF(B_n)$ і $IC(B_n)$ усі відношення Ґріна збігаються з відношенням рівності.

The structure of Green's relations on the semigroup $IF(B_n)$ of order-decreasing injective transformations, on the semigroup $IO(B_n)$ of order-preserving injective transformations and on the semigroup $IC(B_n)$ of order-decreasing order-preserving injective transformations of ordered by inclusion of boolean B_n of set $N=\{1,2,...,n\}$ is studied. We proved that all Green's relations for semigroups $IF(B_n)$ and $IC(B_n)$ are coinciding with the identity relation.

Вступ

Для кожної частково впорядкованої множини $(M,\leq)$ природно виділяються два типи перетворень цієї множини (у загальному випадку також часткові, тобто визначені на деякій підмножині з M), у певному сенсі узгоджені з даним частковим порядком. Часткове перетворення α множини M називається *стискуючим* (або *з пониженням порядку*) (англ.: order–decreasing), якщо для довільного x із області визначення $dom\alpha$ перетворення α виконується нерівність $\alpha(x)\leq x$, і називається *монотонним* (або *із збереженням порядку*) (англ.: order–preserving), якщо для довільних $x,y\in dom\alpha$ із $x\leq y$ випливає $\alpha(x)\leq\alpha(y)$.

Як монотонні, так і стискуючі часткові перетворення множини $(M,\leq)$ утворюють відносно композиції перетворень напівгрупи, які позначаються відповідно $PO(M,\leq)$ і $PF(M,\leq)$ (або просто $PO(M)$ і $PF(M)$, якщо відомо, про який частковий порядок йдеться). Зрозуміло, що кожна з них є піднапівгрупою напівгрупи $PT(M)$ усіх часткових перетворень множини M. Виділимо ще напівгрупу $PC(M)=PO(M)\bigcap PF(M)$ всіх *стискуючих часткових перетворень із збереженням порядку*. Зрозуміло, що напівгрупи перетворень множини M, узгоджених із частковим порядком на M, почали вивчатися з найпростішого випадку – коли M є скінченним ланцюгом. Так, напівгрупа O_n монотонних скрізь визначених перетворень n –елементного ланцюга вперше з'явилася ще в [1], а напівгрупа F_n скрізь визначених перетворень такого ланцюга – у книзі [9]. Комбінаторика напівгрупи F_n ґрунтовно вивчена в [7]. Особливо інтенсивно вивчення напівгруп перетворень скінченного ланцюга йшло протягом останніх двадцяти років (див. останню главу книги [5] і наведену там бібліографію). Але для інших часткових порядків такі напівгрупи почали вивчатися лише зовсім недавно (див. [2; 10]).

На перетворення множини M можуть накладатися додаткові обмеження. Зокрема, досить глибоко вивчена напівгрупа IO_n монотонних часткових ін'єктивних перетворень n –елементного ланцюга (виділимо тут [4; 7]).

Елементи a і b напівгрупи S називаються L*–еквівалентними*, якщо вони породжують один і той же лівий головний ідеал (тобто aLb тоді й лише тоді, коли $S^1a=S^1b$). Аналогічно, за допомогою рівності $aS^1=bS^1$, визначається R –відношення. Через породжених елементами a і b двосторонніх головних ідеалів визначається J –відношення (тобто aJb тоді й лише тоді, коли $S^1aS^1=S^1bS^1$). Крім того, через H позначається перетин відношень L і R, а через D – найменше з відношень еквівалентності, яке містить кожне з відношень L і R (воно збігається з деморганівським добутком $L\circ R=R\circ L$ відношень L і R).

Ці п'ять відношень – L, R, J, H і D –- називаються відношеннями Ґріна на напівгрупі S. Усі вони є відношенням еквівалентності. Для скінченних напівгруп відношення J і D збігаються. Відношення Ґріна дозволяють визначити на напівгрупі щось на кшталт локальної системи координат, тому вони відіграють велику роль при вивченні бу-

© Жуковська Т., 2012

дови напівгруп. Вивченню цих відношень для конкретних напівгруп присвячена величезна література (серед робіт, які безпосередньо стосуються до теми нашої роботи, вкажемо лише [3; 6; 8], де вивчалися відношення Ґріна для напівгруп монотонних перетворень скінченного ланцюга).

Нагадаємо, що рангом $rank\alpha$ елемента α напівгрупи перетворень (S,M) називається потужність $|\alpha(M)|$ його образу $\alpha(M)$. Перетворення ми виконуємо зліва направо, тобто $(\varphi\psi)(x)=\psi(\varphi(x))$.

Через B_n позначимо булеан множини $N=\{1,2,...,n\}$ – впорядковану за включенням множину всіх підмножин множини N, а через $IS(B_n)$ – напівгрупу всіх часткових ін'єктивних перетворень множини B_n.

У роботі вивчаються відношення Ґріна на трьох напівгрупах перетворень булеану: $IF(B_n)=PF(B_n)\cap IS(B_n)$, $IO(B_n)=PO(B_n)\cap IS(B_n)$ та $IC(B_n)=PC(B_n)\cap IS(B_n)$.

Ми дотримуємося позначень із [5]. Зокрема, через $im\alpha$ позначається образ елемента α, тобто множина його значень.

Напівгрупа $IF(B_n)$

Теорема 1. *Усі R–класи напівгрупи $IF(B_n)$ одноелементні.*

Доведення. Припустимо, що елементи α і β належать до одного R–класу напівгрупи $IF(B_n)$. Тоді $\alpha\cdot IF(B_n)=\beta\cdot IF(B_n)$, а тому повинні існувати такі елементи γ і γ', для яких виконуються рівності

$$\beta=\alpha\gamma,\quad \alpha=\beta\gamma'. \tag{1}$$

Зокрема, α і β будуть належати і до одного R–класу напівгрупи $IS(B_n)$, а тому $dom\alpha=dom\beta$. Візьмемо тепер довільний елемент A із $dom\alpha$. Із першої з рівностей (1) випливає, що $\beta(A)=\gamma(\alpha(A))$, а позаяк перетворення γ – стискуюче, то $\beta(A)\subseteq\alpha(A)$. Аналогічно з другої з рівностей (1) випливає, що $\alpha(A)\subseteq\beta(A)$. Тому $\beta(A)=\alpha(A)$. Оскільки елемент $A\in dom\alpha$ – довільний, то $\alpha=\beta$.

Теорема 2. *Всі L–класи напівгрупи $IF(B_n)$ одноелементні.*

Доведення. Припустимо, що елементи α і β належать до одного L–класу напівгрупи $IF(B_n)$. Аналогічно доведенню попередньої теореми звідси випливає рівність $im\alpha=im\beta$ та існування таких елементів δ і δ', для яких виконуються рівності

$$\beta=\delta\alpha,\quad \alpha=\delta'\beta. \tag{2}$$

Оскільки елементи напівгрупи $IF(B_n)$ є частковими ін'єкціями, то для довільних $\mu\in IF(B_n)$ та $A'\in im\mu$ однозначно визначено прообраз $\mu^{-1}(A')$. Тоді для кожного $A\in im\alpha$ з першої з рівностей (2) випливає, що $\delta^{-1}\left(\alpha^{-1}(A)\right)=\beta^{-1}(A)$ і $\delta^{-1}\left(\beta^{-1}(A)\right)=\alpha^{-1}(A)$. Позаяк перетворення δ є стискуючим, то $\beta^{-1}(A)\supseteq\alpha^{-1}(A)$. Аналогічно з другої з рівностей (2) випливає, що $\beta^{-1}(A)\subseteq\alpha^{-1}(A)$. Тому $\beta^{-1}(A)=\alpha^{-1}(A)$. Звідси і з рівності $im\alpha=im\beta$ слідує, що $\alpha=\beta$.

З теорем 1 і 2 безпосередньо випливають такі наслідки:

Наслідок 1. *Усі D–класи напівгрупи $IF(B_n)$ є одноелементними.*

Наслідок 2. *Усі відношення Ґріна на напівгрупі $IF(B_n)$ збігаються з відношенням рівності.*

Напівгрупа $IO(B_n)$

Теорема 3. *Для того, щоб елементи α і β напівгрупи $IO(B_n)$ належали до одного R–класу, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $dom\alpha=dom\beta$ і для довільних A_1, A_2 із $dom\alpha$ виконувалася умова:*

$$\alpha(A_1)\subset\alpha(A_2) \text{ тоді й лише тоді, коли } \beta(A_1)\subset\beta(A_2). \tag{3}$$

Доведення. Необхідність. Нехай елементи α і β належать до одного R–класу напівгрупи $IO(B_n)$. Тоді повинні існувати такі елементи γ і γ', для яких виконуються рівності

$$\beta=\alpha\gamma,\quad \alpha=\beta\gamma'. \tag{4}$$

Тому α і β будуть належать і до одного R–класу напівгрупи $IS(B_n)$, звідки випливає рівність $dom\alpha=dom\beta$.

Припустимо тепер, що для елементів $A_1,A_2\in dom\alpha$ виконується включення $\alpha(A_1)\subset\alpha(A_2)$. Тоді з першої з рівностей (4) та монотонності перетворення γ випливає, що

$$\beta(A_1)=\gamma(\alpha(A_1))\subset\gamma(\alpha(A_2))=\beta(A_2).$$

Аналогічно з другої з рівностей (4) та монотонності перетворення γ' випливає, що коли $\beta(A_1)\subset\beta(A_2)$, то $\alpha(A_1)\subset\alpha(A_2)$. Тому $\alpha(A_1)\subset\alpha(A_2)$ тоді й лише тоді, коли $\beta(A_1)\subset\beta(A_2)$.

Достатність. Із рівності $dom\alpha=dom\beta$ та ін'єктивності перетворень α і β випливає, що $|im\alpha|=|im\beta|$. Тому кожне з перетворень

$$\gamma: im\alpha\to im\beta,\ \ \alpha(A)\mapsto\beta(A),$$

та

$$\gamma': im\beta\to im\alpha,\qquad \beta(A)\mapsto\alpha(A),$$

є ін'єктивним. Крім того, з умови (3) випливає, що кожне з цих перетворень є монотонним. Тому γ і γ' належать напівгрупі $IO(B_n)$. Оскільки ці перетворення задовольняють рівності (4), то α і β належать до одного R–класу.

Наслідок 3. *Нехай* $\alpha \in IO(B_n)$, *а* φ *– довільний автоморфізм* $im\alpha$ *частково впорядкованої за включенням множини. Тоді* $\alpha R \alpha\varphi$.

Зауважимо, що елементи напівгрупи $IO(B_n)$ є частковими ін'єкціями. Тому для довільних $\mu \in IO(B_n)$ та $A \in im\mu$ однозначно визначено прообраз $\mu^{-1}(A)$.

Теорема 4. *Елементи* α *і* β *напівгрупи* $IO(B_n)$ *належать до одного* L*–класу тоді й лише тоді, коли виконується рівність* $im\alpha = im\beta$ *і для довільних* A_1, A_2 *із* $im\alpha$ *виконується умова:*

$$\alpha^{-1}(A_1) \subset \alpha^{-1}(A_2) \text{ тоді й лише тоді, коли } \beta^{-1}(A_1) \subset \beta^{-1}(A_2). \quad (5)$$

Доведення. Необхідність. Нехай елементи α і β належать до одного L–класу. Подібно як у доведенні попередньої теореми звідси випливає рівність $im\alpha = im\beta$ та існування таких елементів δ і δ', для яких виконуються рівності

$$\beta = \delta\alpha, \quad \alpha = \delta'\beta. \quad (6)$$

Нехай $im\alpha = \{A_1,..., A_k\}$. Позначимо $P_i = \alpha^{-1}(A_i)$, $Q_i = \beta^{-1}(A_i)$, $i = 1,...,k$. Тоді $dom\alpha = \{P_1,...,P_k\}$, $dom\beta = \{Q_1,...,Q_k\}$.

Із рівностей (6) та ін'єктивності перетворень випливає, що для всіх i

$$\delta(P_i) = Q_i, \quad \delta'(Q_i) = P_i. \quad (7)$$

У свою чергу з рівностей (7) та монотонності перетворень δ і δ' випливає, що $P_i \subset P_j$ тоді і тільки тоді, коли $Q_i \subset Q_j$. Отже, умова (5) виконується.

Достатність. Нехай

$$im\alpha = im\beta = \{A_1,..., A_k\}, \quad P_i = \alpha^{-1}(A_i), \quad Q_i = \beta^{-1}(A_i), \quad i = 1,...,k.$$

Тоді $dom\alpha = \{P_1,...,P_k\}$, $dom\beta = \{Q_1,...,Q_k\}$. Із умови (5) випливає, що кожне з ін'єктивних відображень

$$\delta : dom\beta \to dom\alpha, \quad Q_i \mapsto P_i, \quad i = 1,...,k,$$

та

$$\delta' : dom\alpha \to dom\beta, \quad P_i \mapsto Q_i, \quad i = 1,...,k,$$

є монотонним, а тому належить напівгрупі $IO(B_n)$. Безпосередньо перевіряється, що δ і δ' задовольняють рівності (6). Тому α і β належать до одного R–класу.

Наслідок 4. *Нехай* $\alpha \in IO(B_n)$, *а* ψ *– довільний автоморфізм* $dom\alpha$ *частково впорядкованої за включенням множини. Тоді* $\psi\alpha R \alpha$.

Наслідок 5. *Елементи* α *і* β *напівгрупи* $IO(B_n)$ *будуть належати до одного* H *–класу тоді і лише тоді, коли виконуються такі умови:*

1) $dom\alpha = dom\beta$;

2) $im\alpha = im\beta$;

3) $\alpha(A_1) \subset \alpha(A_2) \Leftrightarrow \beta(A_1) \subset \beta(A_2)$ *для довільних* $A_1, A_2 \in dom\alpha$;

4) $\alpha^{-1}(A_1') \subset \alpha^{-1}(A_2') \Leftrightarrow \beta^{-1}(A_1') \subset \beta^{-1}(A_2')$ *для довільних* $A_1', A_2' \in im\alpha$.

Доведення. Це безпосередньо випливає з рівності $H = L \cap R$ та теорем 3 і 4.

Теорема 5. *Якщо елементи* α *і* β *напівгрупи* $IO(B_n)$ *належать до одного* D*–класу, то* $dom\alpha \cong dom\beta$ *і* $im\alpha \cong im\beta$ *як частково впорядковані за включенням множини.*

Доведення. Оскільки $D = R \circ L$, то $\alpha D \beta$ тоді й лише тоді, коли існує такий елемент μ, що $\alpha R \mu$ і $\mu L \beta$. Із теорем (3) і (4) тепер випливає, зокрема, що елементи α, β, і μ мають однаковий ранг. Нехай

$$dom\alpha = \{A_1,..., A_k\}, \ im\alpha = \{C_1,...,C_k\},$$
$$dom\beta = \{A_1',..., A_k'\}, \ im\beta = \{C_1',...,C_k'\},$$
$$dom\mu = \{A_1'',..., A_k''\}, \ im\mu = \{C_1'',...,C_k''\},$$

причому

$$\alpha(A_i) = C_i, \quad \beta(A_i') = C_i', \quad \mu(A_i'') = C_i'', \quad i = 1,...,k.$$

На підставі теореми (3) можемо покласти $A_i = A_i''$ ($i = 1,...,k$) і матимемо, що $C_i \subset C_j$ тоді й лише тоді, коли $C_i'' \subset C_j''$. З другого боку на підставі теореми (4) можемо покласти $C_i' = C_i''$ ($i = 1,...,k$) і матимемо, що $A_i' \subset A_j'$ тоді й лише тоді, коли $A_i'' \subset A_j''$. Таким чином, $A_i \subset A_j$ тоді й лише тоді, коли $A_i' \subset A_j'$, тобто $dom\alpha$ і $dom\beta$ ізоморфні як частково впорядковані за включенням множини. Аналогічно $C_i \subset C_j$ тоді й лише тоді, коли $C_i' \subset C_j'$, тобто $im\alpha$ і $im\beta$ також ізоморфні.

Зауваження. Умови теореми (5) не є достатніми для належності елементів α і β напівгрупи $IO(B_n)$ до одного D–класу. Справді, для елементів

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2\} & 1 & 3 & \emptyset \\ \{1,2,3\} & \{1,2\} & 1 & \emptyset \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \beta = \begin{pmatrix} \{1,2\} & 1 & 3 & \emptyset \\ \{1,2,3\} & 1 & \{1,2\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

напівгрупи $IO(B_3)$ маємо навіть $dom\alpha = dom\beta$ і $im\alpha = im\beta$. Однак легко перевіряється, що ці елементи не належать до одного D–класу.

Напівгрупа $IC(B_n)$

Теорема 6. *Усі відношення Ґріна на напівгрупі $IC(B_n)$ збігаються з відношенням рівності.*

Доведення. Оскільки $IC(B_n)$ є піднапівгрупою $IF(B_n)$, то з рівностей (1) випливає, що кожен R –клас напівгрупи $IC(B_n)$ буде міститися в деякому R –класі напівгрупи $IF(B_n)$. Але тоді з теореми (1) випливає, що на напівгрупі $IC(B_n)$ R –відношення збігається з відношенням рівності. Аналогічно з теореми (2) випливає, що L –відношення також збігається з відношенням рівності. Для решти відношень Ґріна твердження теореми випливає з рівностей $H = L \cap R,\ \ D = L \circ R$ і $J = D.$

Висновки

В роботі розглянуто відношення Ґріна на трьох напівгрупах часткових ін'єктивних перетворень булеану: $IF(B_n)$, $IO(B_n)$ та $IC(B_n)$. Показано, що для напівгруп $IF(B_n)$ і $IC(B_n)$ усі відношення Ґріна співпадають з відношенням рівності. Для відношень Ґріна $L,\ R$ і H на напівгрупі $IO(B_n)$ знайдено необхідні і достатні умови належності елементів до одного класу та встановлено необхідні умови належності елементів даної напівгрупи до одного D –класу.

1. Айзенштат А.Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. матем. ж. – 1962. – Т. 3, № 4. – С. 161-169. 2. Стронська Г.О. Напівгрупа стискуючих перетворень булеану скінченної множини // Вісник Київського університету. Серія: Фіз.–мат. науки. – 2006. – № 2. – С. 57-62. 3. Fernandes V.H. Semigroups of order-preserving mapping on a finite chain: a new class of divisors // Semigroup Forum. – 1997. – Vol. 54, № 2. – P. 230-236. 4. Fernandes V.H. The monoid of all injective order-preserving partial transformations on a finite chain // Semigroup Forum. – 2001. – № 62. – P. 178-204. 5. Ganyushkin O., Mazorchuk V. Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction. – Algebra and Applications. – London: Springer–Verlag, 2009. – № 9. – XII, 314 p. 6. Ganyushkin O., Mazorchuk V. On the Structure of IO_n // Semigroup Forum. – 2003. – № 66. – P. 455-483. 7. Howie J. Combinatorial and arithmetical aspects of the theory of transformation semigroups // Seminario do Centro de Algebra, University of Lisbon. – 1992. – P. 1-14. 8. Laragji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // J. Algebra. – 2004. – Vol. 278. № 1. – P. 342-359. 9. Pin J. Variétés de langages formels. – Paris: Masson,1984. – 160 p. 10. Stronska A. Nilpotent subsemigroups of a semigroup of order-decreasing transformations of a rooted tree // Algebra and Discrete Mathematics. – 2006. – № 4. – P. 126-140.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 512.552

Т. Журавльова, асп.

ТОЧНА ПОСЛІДОВНІСТЬ МОДУЛІВ І ГОМОМОРФІЗМІВ НАД ЧЕРЕПИЧНИМ ПОРЯДКОМ

Побудована точна послідовність модулів над черепичним порядком. Описані ядра цієї послідовності.

The exact sequence of modules over tiled order has been built. Kernels of this sequence are described.

1. Вступ

Нехай A – кільце, M – правий A -модуль. Для довільних A -під модулів X_1, X_2 модуля M існує коротка точна послідовність $0 \to X_1 \cap X_2 \to X_1 \oplus X_2 \to X_1 + X_2 \to 0.$

В [4] Jansen W. і Odenthal C. для обчислення глобальної розмірності черепичного порядку використовували коротку точну послідовність з трьома незвідними модулями, а Sakai Y. в [1] отримав точну послідовність $0 \to X_1 \cap X_2 \cap X_3 \to (X_1 \cap X_2) \oplus (X_2 \cap X_3) \oplus (X_1 \cap X_3) \to X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \to X_1 + X_2 + X_3 \to 0$ і в окремих випадках знайшов ядро ψ точної послідовності $\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} (X_i \cap X_{i-1}) \xrightarrow{\psi} \overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} X_i \to \sum_{i=1}^{m} X_i \to 0.$

У даній статті ми поширюємо точну послідовність для більшої кількості незвідних модулів над черепичним порядком.

2. Необхідні теоретичні відомості

Означення 1. Модуль M називається дистрибутивним, якщо для довільних його підмодулів K, L, N справедлива рівність $K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$

Очевидно, що підмодуль та фактор-модуль дистрибутивного модуля є дистрибутивним. Модуль називається напівдистрибутивним, якщо він є прямою сумою дистрибутивних модулів. Кільце A називається напівдистрибутивним справа (зліва), якщо правий (лівий) регулярний модуль A_A $({}_A A)$ є напівдистрибутивним. Напівдистрибутивне справа та зліва кільце називається напівдистрибутивним.

Очевидно, що кожний ланцюговий модуль є дистрибутивним модулем та кожний напівланцюговий модуль є напівдистрибутивним модулем.

Означення 2. Кільце ендоморфізмів нерозкладного проективного модуля над напівдосконалим кільцем називається головним кільцем ендоморфізмів.

Ми будемо писати $SPSD$ -кільце A для напівдосконалого напівдистрибутивного кільця A .

Означення 3. Кільце A називається напівмаксимальним, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним), тобто всі головні кільця ендоморфізмів кільця A є дискретно нормованими кільцями.

Твердження 1. [2] Напівмаксимальне кільце є прямим добутком скінченного числа первинних напівмаксимальних кілець.

Теорема 1. [2] Наступні умови для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A еквівалентні:

(a) кільце A – напівдистрибутивне;

© Журавльова Т., 2012

(b) кільце A є прямим добутком напівпростого артінового кільця та напівмаксимального кільця.

Теорема 2. [2] Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду $A=\begin{pmatrix} \vartheta & \pi^{\alpha_{12}}\vartheta & \cdots & \pi^{\alpha_{1n}}\vartheta \\ \pi^{\alpha_{21}}\vartheta & \vartheta & \cdots & \pi^{\alpha_{2n}}\vartheta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\vartheta & \pi^{\alpha_{n2}}\vartheta & \cdots & \vartheta \end{pmatrix}$, де $n \geq 1, \vartheta -$ дискретно нормоване кільце з простим елементом π, α_{ij} – цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij}+\alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ij}=0$ для всіх i.

Означення 4. Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

З теорем 1 та 2 отримуємо, що черепичний порядок – це первинне нетерове справа $SPSD$-кільце з ненульовим радикалом Джекобсона.

Позначимо через $M_n(B)$ кільце всіх $n \times n$ матриць над кільцем B.

Означення 5. Цілочисельна матриця $\varepsilon=\left(\alpha_{ij}\right) \in M_n(Z)$ називається

- матрицею показників, якщо $\varepsilon -$ матриця показників і $\alpha_{ij}+\alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ та $\alpha_{ii}=0$ для всіх i, j, k;
- зведеною матрицею показників, якщо $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>0$ для всіх $i, j, i \neq j.$

Ми використовуємо наступне позначення: $A=\{\vartheta, \varepsilon(A)\}$, де $\varepsilon(A)=\left(\alpha_{ij}\right) -$ матриця показників кільця A, тобто $A=\sum_{i, j=1}^{n} e_{ij} \pi^{\alpha_{ij}} \vartheta,$ де $e_{ij} -$ матричні одиниці. Якщо черепичний порядок зведений, тобто $A / R(A)$ є прямим добутком тіл, то $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}>0$ при $i \neq j,$ тобто матриця показників $\varepsilon(A)$ є зведеною. Тут $R(A) -$ радикал Джекобсона кільця A.

Черепичний порядок A має класичне кільце часток $Q=M_n(D),$ де $D -$ класичне тіло часток дискретно нормованого кільця $\vartheta.$

Означення 6. Нехай $A -$ черепичний порядок. Правою (лівою) A-браткою називається правий (лівий) A-модуль, який є скінченнопородженим вільним ϑ-модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проективні A-модулі є A-гратками.

Серед всіх A-граток виділяються так звані незвідні A-гратки, тобто A-гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q-модулі U (відповідно V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відповідно $S_l(A)$) відносно включення. Будь-яка права (відповідно ліва) незвідна A-гратка M (відповідно N), яка лежить в U (відповідно в V), є A-модулем з ϑ-базисом $(\pi^{\alpha_1} e_1, \ldots, \pi^{\alpha_1} e_n),$ причому

$$\begin{cases} \alpha_i+\alpha_{ij} \geq \alpha_j,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j+\alpha_{ij} \geq \alpha_i,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases}, \quad (1)$$

де літера T означає операцію транспонування.

Для наших цілей досить розглянути зведений черепичний порядок $A.$ У цьому випадку елементи $S_r(A)$ $\left(S_l(A)\right)$ знаходяться в бієктивній відповідності з цілочисельними рядками векторів $\vec{a}=\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ (стовпчиками векторів $\vec{a}^T=\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)^T$), де $\vec{a}$ і $\vec{a}^T$ задовольняють умови (1) Ми будемо записувати $\varepsilon(M)=\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ або $M=\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$, якщо $M \in S_r(A).$

Нехай $\vec{b}=\left(\beta_1, \ldots, \beta_n\right).$ Відношення порядку $\vec{a} \prec \vec{b}$ в $S_r(A)$ визначається наступним чином: $\vec{a} \prec \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i$ для $i=1, \ldots, n.$

Оскільки кільце A є напівдистрибутивним, то $S_r(A)$ та $S_l(A)$ є дистрибутивними гратками відносно додавання та перетину.

Твердження 2. [5] Нехай $\Lambda -$ черепичний порядок, $M -$ незвідний і непроективний Λ-модуль, $X -$ максимальний підмодуль модуля M. Тоді існує проективний підмодуль M, який не є підмодулем $X.$

Твердження 3. [5] Нехай $X_1, \ldots, X_s -$ всі максимальні підмодулі незвідного і не проективного Λ-модуля M з $\varepsilon(M)=\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ та $\varepsilon\left(X_i\right)=\varepsilon(M)+e_{ij},$ де $e_k=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1,0, \ldots, 0)$. Тоді $P(M)=\bigoplus_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji}$ та $M=\sum_{i=1}^{s} \pi^{\alpha_{ji}} P_{ji}.$

Лема 1. [5] Нехай $M_1, M_2, M_3 -$ підмодулі дистрибутивного модуля M та $\varphi: M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \rightarrow M_1+M_2+M_3 -$ епіморфізм прямої суми незвідних модулів на їх суму, визначений за правилом: $\left(x_1, x_2, x_3\right) \mapsto x_1+x_2+x_3.$ Тоді $\ker \varphi=\left\{\left(m_{12}-m_{31}, m_{23}-m_{12}, m_{31}-m_{23}\right) \mid m_{12} \in M_1 \cap M_2, m_{23} \in M_2 \cap M_3, m_{31} \in M_3 \cap M_1\right\}.$

Теорема 3. [5] Нехай $M_1,\ldots,M_n$ – підмодулі дистрибутивного модуля $M=\sum_{i=1}^{n}M_i$ та епіморфізм $\varphi:\oplus_{i=1}^{n}M_i\mapsto M$ діє за правилом $\varphi(m_1,\ldots,m_n)=m_1+\ldots+m_n$. Тоді $\ker\varphi=\left\{(y_1,\ldots,y_n)\mid y_i=\sum_{j\neq i}m_{ij}, m_{ij}=-m_{ji}\in M_i\cap M_j\right\}$.

Наслідок 1. [5] Нехай M – незвідний Λ-модуль і $P(M)=\oplus_{i=1}^{s}\pi^{\alpha_{ji}}P_{ji}$, $M=\sum_{i=1}^{s}\pi^{\alpha_{ji}}P_{ji}$. Тоді ядро епіморфізму $\varphi:P(M)\mapsto M$ має вигляд $\ker\varphi=\left\{(y_1,\ldots,y_n)\mid y_i=\sum_{k\neq i}m_{ik}, m_{ik}=-m_{ki}\in\pi^{\alpha_{ji}}P_{ji}\cap\pi^{\alpha_{jk}}P_{jk}\right\}$.

3. Основні результати

Ядро K як підмодуль в $\oplus_{i=1}^{n}M_i$ можна формально записати у вигляді $K=\sum_{i<j}M_i\cap M_j(e_i-e_j)$, де $e_k=(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,0,\ldots,0)$.

За теоремою 3 розв'язки рівняння $m_1+m_2+\ldots+m_n=0$ подаються у вигляді: $m_1=m_{12}+m_{13}+\ldots+m_{1n}$, $m_2=-m_{12}+m_{23}+\ldots+m_{2n}$, … $m_k=-m_{1k}-m_{2k}-\ldots-m_{k-1k}+m_{kk+1}+\ldots+m_{kn}$, … $m_n=-m_{1n}-m_{2n}-\ldots-m_{n-1n}$.

Тоді $(y_1,\ldots,y_n)=(m_{12}+m_{13}+\ldots+m_{1n},-m_{12}+m_{23}+\ldots+m_{2n},\ldots,-m_{1n}-m_{2n}-\ldots-m_{n-1n})=(m_{12},-m_{12},0,\ldots,0)+(m_{13},0,-m_{13},0,\ldots,0)+\ldots+(m_{1n},0,\ldots,0,-m_{1n})+(0,m_{23},-m_{23},0,\ldots,0)+\ldots+(0,\ldots,0,m_{n-1n},-m_{n-1n})$.

Нехай $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)\in Z^n$. Покладемо $m_{e_i}=(0,\ldots,0,m,0,\ldots,0)$. Тоді $(y_1,\ldots,y_n)=m_{12}(e_1-e_2)+m_{13}(e_1-e_3)+\ldots+m_{1n}(e_1-e_n)+m_{23}(e_2-e_3)+\ldots+m_{n-1n}(e_{n-1}-e_n)=\sum_{1\le i<j\le n}m_{ij}(e_i-e_j)$.

Тому $\ker\varphi=\sum_{1\le i<j\le n}(M_i\cap M_j)(e_i-e_j)$.

Нехай $M_{ij}=M_i\cap M_j$. Задамо на множині $\{M_{12},M_{13},\ldots,M_{1n},M_{23},\ldots,M_{n-1n}\}$ відношення порядку наступним чином: $M_{ij}\le M_{kl}$ тоді і тільки тоді, коли $j<l$ або $i\le k$, $j=l$.

Розглянемо епіморфізм $\psi:\oplus_{i<j}M_{ij}\to\ker\varphi$, що діє за правилом $\psi(m_{12},m_{13},m_{23},\ldots,m_{n-1n})=m_{12}(e_1-e_2)+m_{13}(e_1-e_3)+m_{23}(e_2-e_3)+\ldots+m_{n-1n}(e_{n-1}-e_n)$.

Оскільки $\psi(m_{12},m_{13},m_{23},\ldots,m_{n-1n})=(m_{12}+m_{13}+\ldots+m_{1n},-m_{12}+m_{23}+\ldots+m_{2n},\ldots,-m_{1n}-m_{2n}-\ldots-m_{n-1n})$, то його зручно записати формально у вигляді $\psi(m_{12},\ldots,m_{n-1n})=(m_{12},\ldots,m_{n-1n})\cdot A$, де $A=(a_{ij})-(C_n^2\times n)$ матриця, $a_{ij}\in\{-1,0,1\}$.

Наприклад, при $n=3: M_{12}<M_{13}<M_{23}$ і $\psi(m_{12},m_{13},m_{23})=(m_{12},m_{13},m_{23})\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

При такому записі $\ker\varphi=im\psi=(M_{12},M_{13},M_{23},\ldots,M_{n-1n})\cdot A$ або $\ker\varphi=\oplus_{i<j}M_{ij}\cdot A$.

Позначимо $M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap\ldots\cap M_{i_k}=M_{i_1i_2\ldots i_k}$. На множині $\{M_{i_1i_2\ldots i_k}$ де $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n\}$, задамо відношення порядку індуктивно: $M_{i_1\ldots i_k}\le M_{j_1\ldots j_k}$ тоді і тільки тоді, коли або $i_k<j_k$ або $i_k=j_k$, $M_{i_1\ldots i_{k-1}}\le M_{j_1\ldots j_{k-1}}$.

Позначимо через $m_{i_1,\ldots,i_k}$ елемент з $M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap\ldots\cap M_{i_k}$. Якщо $i_1<\ldots<i_k$, то цей елемент будемо позначити через $m_{i_1\ldots i_k}$.

Теорема 4. Для довільних підмодулів $M_1,\ldots,M_n$ дистрибутивного модуля M справедлива точна послідовність модулів і гомоморфізмів $0\to\bigcap_{i=1}^{n}M_i\to\oplus_{k=1}^{n}\left(\bigcap_{i\neq k}M_i\right)\xrightarrow{f_{n-1}}\ldots\xrightarrow{f_{k+1}}\oplus_{i_1<\ldots<i_k}\left(M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap\ldots\cap M_{i_k}\right)\xrightarrow{f_k}\ldots$

$$\xrightarrow{f_3}\bigoplus_{i<j}\left(M_i\cap M_j\right)\xrightarrow{f_2}\oplus_{i=1}^{n}M_i\xrightarrow{f_1}\sum_{i=1}^{n}M_i\to 0.$$

Доведення. Для доведення теореми нам достатньо довести точність коротких точних послідовностей $0 \to K_2 \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^{n} M_i \to 0$, $0 \to K_{m+1} \to \bigoplus_{i_1<\ldots<i_m} \left(M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_m}\right) \xrightarrow{f_m} K_m \to 0$, $2 \le m < n-1$, $0 \to K_n \to \bigoplus_k \left(\bigcap_{i \ne k} M_i\right) \xrightarrow{f_{n-1}} K_{n-1} \to 0$, де $K_m = \ker f_{m-1}, K_n = \ker f_{n-1} \simeq \bigcap_{i=1}^{n} M_i$.

Лема 2. Ядра $K_m^{(n)}$, $2 \le m \le n-1$, виражаються тільки через модулі $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_m}$, тобто $K_m^{(n)} = \overline{M}_m^{(n)} \cdot A_m^{(n)}$, де $\overline{M}_m^{(n)}$ – вектор-рядок, елементами якого є модулі $M_{i_1 i_2 \ldots i_m}$, записані у порядку зростання, $A_m^{(n)} = \left(a_{ij}\right) - C_n^m \times C_n^{m-1}$ – матриця, $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Більше того, $A_m^{(n)} = \begin{pmatrix} A_m^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^m E & A_{m-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$, $m \le n-1$.

Доведення. Доведемо спочатку індукцією за n, що $K_3^n = \overline{M}_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)}$ та $A_3^{(n)} = \begin{pmatrix} A_3^{(n-1)} & 0 \\ -E & A_2^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

База індукції $n = 4$. Маємо

$$K_2^{(4)} = (M_1 \cap M_2)(e_1 - e_2) + (M_1 \cap M_3)(e_1 - e_3) + (M_1 \cap M_4)(e_1 - e_4) + (M_2 \cap M_3)(e_2 - e_3) + (M_2 \cap M_4)(e_2 - e_4) +$$

$$+(M_3 \cap M_4)(e_3 - e_4) = (M_{12}, M_{13}, M_{23}, M_{14}, M_{24}, M_{34}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \overline{M}_2 \cdot A_2^{(4)}.$$

Епіморфізм φ в точній послідовності $0 \to K_3^{(4)} \to M_{12} \oplus M_{13} \oplus M_{23} \oplus M_{14} \oplus M_{24} \oplus M_{34} \xrightarrow{\varphi} K_2^{(4)} \to 0$ діє за правилом

$$\varphi(m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) = (m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) \cdot A_2^{(4)} =$$
$$= (m_{12} + m_{13} + m_{14}, -m_{12} + m_{23} + m_{24}, -m_{13} - m_{23} + m_{34}, -m_{14} - m_{24} - m_{34}).$$

Тому $K_3^{(4)} = \ker \varphi$ є розв'язком системи $(m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) \cdot A_2^{(4)} = 0.$

Останнє рівняння системи $-m_{14} - m_{24} - m_{34} = 0$ має розв'язок $m_{14} = m_{14,24} + m_{14,34} = 0$, $m_{24} = -m_{14,24} + m_{24,34} = 0$, $m_{34} = -m_{14,34} - m_{24,34} = 0$, де $m_{ij,kl} \in M_{ij} \cap M_{kl}$.

Тоді система перших трьох рівнянь набуває вигляду

$$m_{12} + m_{13} + (m_{14,24} + m_{14,34}) = 0, \quad -m_{12} + m_{23} + (-m_{14,24} + m_{24,34}) = 0, \quad -m_{13} - m_{23} + (-m_{14,34} - m_{24,34}) = 0.$$

Позначимо $\tilde{m}_{12} = m_{12} + m_{14,24}$, $\tilde{m}_{24} = m_{13} + m_{14,34}$, $\tilde{m}_{23} = m_{23} + m_{24,34}$. Оскільки $m_{ij,kl} \in M_{ij} \cap M_{kl} \subset M_{ik}$, то $\tilde{m}_{ik} \in M_{ik}$. Отримали систему $\tilde{m}_{12} + \tilde{m}_{13} = 0$, $-\tilde{m}_{12} + \tilde{m}_{23} = 0$, $-\tilde{m}_{13} - \tilde{m}_{23} = 0$.

Звідси $\tilde{m}_{12} = -\tilde{m}_{13} = \tilde{m}_{23} = m_{123} \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Тоді

$$m_{12} = \tilde{m}_{12} - m_{14,24} = m_{123} - m_{124}, \; m_{13} = \tilde{m}_{13} - m_{14,34} = -m_{123} - m_{134},$$
$$m_{23} = \tilde{m}_{23} - m_{24,34} = m_{123} - m_{234}, \; m_{14} = m_{14,24} + m_{14,34} = m_{124} + m_{134},$$
$$m_{24} = -m_{14,24} + m_{24,34} = -m_{124} + m_{234}, \; m_{34} = -m_{14.34} - m_{24,34} = -m_{134} - m_{234}$$

або $(m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{14}, m_{24}, m_{34}) = (m_{123}, m_{124}, m_{134}, m_{234}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Отже, маємо: $K_3^{(4)} = (M_{123}, M_{124}, M_{134}, M_{234}) \cdot A_3^{(4)}$, де $A_3^{(4)} = \begin{pmatrix} A_3^3 & 0 \\ -E & A_2^3 \end{pmatrix}$.

Припустимо, що $K_3^{(n)} = M_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)}$ і $A_3^{(n)} = \begin{pmatrix} A_3^{(n-1)} & 0 \\ -E & A_2^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Оскільки $K_2^{(n+1)} = \sum_{1 \le i < j \le n+1} M_{ij}(e_i - e_j) = \sum_{i<j \le n} M_{ij}(e_i - e_j) + \sum_{i \le n} M_{in+1}(e_i - e_{n+1})$, то $A_2^{(n+1)} = \begin{pmatrix} A_2^{(n)} & 0 \\ -E & -U \end{pmatrix}$, де $U = (1, 1, \ldots, 1)^T$.

Нехай $K_3^{(n+1)}$ – ядро епіморфізму $\theta: \bigoplus\limits_{i<j} M_{ij} \to K_2^{(n+1)}$, де $K_2^{(n+1)} = \bar{M}_2^{(n+1)} A_2^{(n+1)}$.

Позначимо $\bar{M}_2^{(n+1)} = (\bar{M}_2^{(n)}, \bar{M}_2^{[n+1]})$, де $\bar{M}_2^{(n)} = (M_{12}, M_{13}, M_{23}, ..., M_{n-1n}), \bar{M}_2^{[n+1]} = (M_{1n+1}, M_{2n+1}, ..., M_{nn+1})$.

Для знаходження $K_3^{(n+1)}$ маємо систему $\bar{m}A_2^{(n+1)} = 0$, де $\bar{m} \in M_2^{(n+1)}, \bar{m} = (\bar{m}_2^{(n)}, \bar{m}_2^{[n+1]})$. З урахуванням блочного вигляду $A_2^{(n+1)}$ отримуємо $(\bar{m}_2^{(n)}, \bar{m}_2^{[n+1]}) \cdot \begin{pmatrix} A_2^{(n)} & 0 \\ -E & -U \end{pmatrix} = 0$ або $\bar{m}_2^{(n)} A_2^{(n+1)} + \bar{m}_2^{[n+1]} E = 0,\ -\bar{m}_2^{[n+1]} U = 0$.

Розглянемо останнє рівняння $m_{1n+1} + m_{2n+1} + ... + m_{nn+1} = 0$. Розв'язки цього рівняння утворюють ядро епіморфізму $\psi : \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \to \sum\limits_{i=1}^{n} M_{in+1}$. Тому $\ker\psi = K_2^{(n)} = \bigoplus\limits_{i<j} (M_{in+1} \cap M_{jn+1}) A_2^{(n)} = \bigoplus\limits_{i<j\le n} M_{ijn+1} A_2^{(n)}$. Тоді $\bar{m}_2^{[n+1]} = \bar{m}_3^{[n+1]} A_2^{(n)}$.

Система $\bar{m}_2^{(n)} A_2^{(n)} + \bar{m}_2^{[n+1]} E = 0$ набуває вигляду $\bar{m}_2^{(n)} A_2^{(n)} + \bar{m}_3^{[n+1]} A_2^{(n)} E = 0$ або $(\bar{m}_2^{(n)} + \bar{m}_3^{[n+1]}) A_2^{(n)} = 0$.

Позначимо $m_{ij} + m_{ijn+1} = \tilde{m}_{ij} \in M_{ij}$. Тоді $\bar{m}_2^{(n)} + \bar{m}_3^{[n+1]} = \tilde{m}_2^{(n)} = (\tilde{m}_{12}, \tilde{m}_{13}, \tilde{m}_{23}, ..., \tilde{m}_{n-1n})$. Отримаємо $\tilde{m}_2^{(n)} A_2^{(n)} = 0$. За припущенням індукції $\tilde{m}_2^{(n)} = \bar{m}_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)}$. Тому $\bar{m}_2^{(n)} = \bar{m}_3^{(n)} \cdot A_3^{(n)} - \bar{m}_3^{[n+1]}$.

Таким чином, $(\bar{m}_2^{(n)}, \bar{m}_2^{[n+1]}) = (\bar{m}_3^{(n)}, \bar{m}_3^{[n+1]}) \cdot \begin{pmatrix} A_3^{(n)} & 0 \\ -E & A_2^{(n)} \end{pmatrix} = 0$ і тому $A_3^{(n+1)} = \begin{pmatrix} A_3^{(n)} & 0 \\ -E & A_2^{(n)} \end{pmatrix} = 0.$

Доведемо тепер індукцією за t, що $K_t^{(n)} = \bar{M}_t^{n} \cdot A_t^{(n)}$, де $A_t^{(n)} = \begin{pmatrix} A_t^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^t E & A_{t-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

База індукції $t = 3$ вже розглянута. Припустимо, що $K_l^{(n)} = \bar{M}_l^{n} \cdot A_l^{(n)}$ і $A_l^{(n)} = \begin{pmatrix} A_l^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^l E & A_{l-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$ для всіх $l \le t$.

$K_{t+1}^{(n)}$ є множиною розв'язків системи рівнянь $\bar{m}_t^{(n)} \cdot A_t^{(n)} = 0$ (тут $\bar{m}_t^{(n)} = (m_{12...t}, ..., m_{n-t+1...n}) = (\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]})$) або $(\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]}) \cdot \begin{pmatrix} A_t^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^t E & A_{t-1}^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0.$ Звідси отримуємо систему $\bar{m}_t^{(n-1)} A_t^{(n-1)} + \bar{m}_t^{[n]} (-1)^t E = 0,\ \bar{m}_t^{[n]} A_{t-1}^{(n-1)} = 0.$

За припущенням індукції $\bar{m}_t^{[n]} = \bar{m}_{t+1}^{[n]} A_t^{(n-1)}$. Тоді перша рівність системи набуває вигляду $\bar{m}_t^{(n-1)} A_t^{(n-1)} + \bar{m}_{t+1}^{[n]} A_t^{(n-1)} (-1)^t E = 0$ або $(\bar{m}_t^{(n-1)} + (-1)^t \bar{m}_{t+1}^{[n]}) A_t^{(n-1)} = 0.$

Позначимо $m_{i_1...it} + (-1)^t m_{i_1...i_t n} = \tilde{m}_{i_1...i_t} \in M_{i_1...it}$, $\bar{m}_t^{(n-1)} + (-1)^t \bar{m}_{t+1}^{[n]} = \tilde{m}_t^{(n-1)}$. Отримаємо рівність $\tilde{m}_t^{(n-1)} A_t^{(n-1)} = 0.$

За припущенням індукції $\tilde{m}_t^{(n-1)} = \bar{m}_{t+1}^{(n-1)} A_{t+1}^{(n-1)}$. Тоді $\bar{m}_t^{(n-1)} = \tilde{m}_t^{(n-1)} - (-1)^t \bar{m}_{t+1}^{[n]} = \bar{m}_{t+1}^{(n-1)} A_{t+1}^{n-1} + (-1)^{t+1} \bar{m}_{t+1}^{[n]}$.

Отже, $(\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]}) = (\bar{m}_{t+1}^{(n-1)}, \bar{m}_{t+1}^{[n]}) \cdot \begin{pmatrix} A_{t+1}^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^{t+1} E & A_t^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Це означає, що $K_{t+1}^{(n)}$ виражається лише через $(M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_{t+1}})$. Дійсно, $K_{t+1}^{(n)} = \left\{ \bar{m}_t^{(n)} \mid \bar{m}_t^{(n)} A_t^{(n)} = 0 \right\}$.

Ми показали, що $\bar{m}_t^{(n)} = (\bar{m}_t^{(n-1)}, \bar{m}_t^{[n]})$ залежать від $\bar{m}_{t+1}^{(n)} = (\bar{m}_{t+1}^{(n-1)}, \bar{m}_{t+1}^{[n]})$, а саме $\bar{m}_t^{(n)} = \bar{m}_{t+1}^{(n)} A_{t+1}^{(n)}$, де $A_{t+1}^{(n)} = \begin{pmatrix} A_{t+1}^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^{t+1} E & A_t^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

За лемою 2 $K_{n-1}^{(n)} = \bar{M}_{n-1}^{(n)} \cdot A_{n-1}^{(n)}$. Тому існує епіморфізм $\xi : \bigoplus\limits_{k=1}^{n} \left(\bigcap\limits_{i \ne k} M_i \right) \to K_{n-1}^{(n)}$, що діє за правилом $\xi(\bar{m}_{n-1}^{(n)}) = \bar{m}_{n-1}^{(n)} A_{n-1}^{(n)}$, $(\bar{m}_{n-1}^{(n)} = (m_{12...n-1}, m_{12...n-2n}, ..., m_{23...n}))$. $K_n = \ker\xi = \left\{ \bar{m}_{n-1}^{(n)} \in \bigoplus\limits_{i_1<...<i_{n-1}} M_{i_1...i_{n-1}} \mid \bar{m}_n - 1^{(n)} A_{n-1}^{(n)} = 0 \right\}$.

Позначимо $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = (m_{12...n-2n}, m_{12...n-3n}, ..., m_{23...n})$ (елементами $\bar{m}_{n-1}^{[n]}$ є $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = m_{i_1...i_{n-2}n}$). Тоді рівність $\bar{m}_{n-1}^{(n)} A_{n-1}^{(n)} = 0$ набуває вигляду $(m_{12...n-1}, \bar{m}_{n-1}^{[n]}) \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1}^{(n-1)} & 0 \\ (-1)^{n-1} E & A_{n-2}^{(n-1)} \end{pmatrix} = 0$ або $m_{12...n-1} A_{n-1}^{(n-1)} + \bar{m}_{n-1}^{[n]} \cdot (-1)^{n-1} E = 0,\ \bar{m}_{n-1}^{[n]} A_{n-2}^{(n-1)} = 0$.

За лемою 2 розв'язком рівняння $\bar{m}_{n-1}^{[n]} A_{n-2}^{(n-1)} = 0$ є $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = \bar{m}_n^{[n]} A_{n-1}^{(n-1)}$, де $\bar{m}_{n-1}^{[n]} = m_{12...n}$. Маємо рівняння $m_{12...n-1} \cdot A^{(n-1)}_{n-1} + m_{12...n} \cdot A_{n-1}^{(n-1)} \cdot (-1)^{n-1} E = 0$ або $(m_{12...n-1} + (-1)^{n-1} m_{12...n}) A_{n-1}^{(n-1)} = 0.$

Оскільки $A_{n-1}^{(n-1)} = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n-11})^T$, де $a_{i1} \in \{-1, 0, 1\}$, то $m_{12...n-1} + (-1)^{n-1} m_{12...n} = 0$ і $m_{12...n-1} = (-1)^n m_{12...n}$.

Отже, $\overline{m}_{n-1}^{(n)} = m_{12\ldots n} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n \\ A_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$. Тому $K_n = \ker \xi = M_n^{(n)} \cdot A_n^{(n)} = M_{12\ldots n} \cdot A_n^{(n)}$, де $A_n^{(n)} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ A_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

Очевидно, що $K_n \simeq M_{12\ldots n} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$. Таким чином, маємо короткі точні послідовності

$$0 \to K_2^{(n)} \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \sum M_i \to 0, \qquad 0 \to K_{m+1}^{(n)} \to \bigoplus_{i_1<\ldots<i_m}^{n} M_{i_1\ldots i_m} \to K_m^{(n)} \to 0, \qquad 2 \le m < n-1,$$

$$0 \to K_n^{(n)} \to \bigoplus_{k=1}^{n} (\bigcap_{i \ne k} M_i) \to K_{n-1}^{(n)} \to 0.$$

З комутативної діаграми

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_n^n \arrow[r] & \oplus M_{i_1\ldots i_{n-1}} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[rr] \arrow[dr] & & \oplus M_{i_1 i_2} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \oplus M_i \arrow[r] & \sum M_i \arrow[r] & 0 \\
& & & K_{n-1}^{(n)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & K_3^{(n)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_2^{(n)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 \quad \cdots \quad 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

отримуємо точну послідовність $0 \to M_{i_1\ldots i_n} \to \oplus M_{i_1\ldots i_{n-1}} \to \oplus M_{i_1\ldots i_{n-2}} \to \ldots \to \oplus M_{i_1 i_2} \to \oplus M_i \to \sum M_i \to 0.$

Теорему доведено.

Наслідок 2. Нехай Λ – черепичний порядок і $M_1,\ldots,M_n$ – незвідні Λ-модулі. Тоді справедлива точна послідовність модулів та гомоморфізмів

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{k=1}^{n} (\bigcap_{i \ne k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1<\ldots<i_k} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}) \xrightarrow{f_k} \ldots$$

$$\xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i<j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^{n} M_i \to 0.$$

4. Висновки

У статті отримано узагальнення точної послідовності цілком розкладних модулів над черепичним порядком, наведеної в [4]. Показано, що для довільних підмодулів $M_1,\ldots,M_n$ дистрибутивного модуля M справедлива точна послідовність модулів і гомоморфізмів

$$0 \to \bigcap_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{k=1}^{n} (\bigcap_{i \ne k} M_i) \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_{k+1}} \bigoplus_{i_1<\ldots<i_k} (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots \cap M_{i_k}) \xrightarrow{f_k} \ldots$$

$$\xrightarrow{f_3} \bigoplus_{i<j} (M_i \cap M_j) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \xrightarrow{f_1} \sum_{i=1}^{n} M_i \to 0.$$

1. Fujita H., Sakai Y. Frobenius full matrix algebras and Gorenstein tiled orders // Comm. Algebra. – 2006. – Vol. 34. – P. 1181–1203. 2. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules : In 2 vol. – Kluwer Acad. Publish., 2004. – Vol.1. 3. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules : In 2 vol. – Kluer Acad. Publish., 2004. – Vol.2. 4. Jansen W., Odenthal C. A tiled order having large global dimension // Journal of Algebra. – 1997. – №192. – P. 572-591. 5. Zhuravlev V., Zhuravlev D. Tiled Orders of width 3 // Algebra and Discrete Math. – 2009. – Vol.1, №1. – C. 111-123.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 519.856

М. Андросенко, канд. фіз-мат. наук

МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІОНАЛУ З НЕВІДОМОЮ ФУНКЦІЄЮ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Досліджується задача мінімізації функціоналу, що залежить від невідомої функції розподілу випадкової величини. Доведено твердження про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

Minimization problem of functional depending on unknown distribution function of random variable is studied. Theorem on continuous dependence of minimum point on distribution function is proved.

Вступ

При вивченні економічних систем природним чином виникає задача мінімізації функціоналу, що залежить від функції розподілу деякої випадкової величини. У статті доведено теореми про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

© Андросенко М., 2012

Основна частина

Нехай $X \subset R^n, Y \subset R^m$ – компактні множини у відповідних скінченновимірних просторах, $D\left(R^m\right)$ – простір функцій розподілу, що зосереджені на Y з метрикою Леві-Прохорова, який є повним сепарабельним простором [1]. Метрику в R^n будемо позначати через $\|\cdot\|$, а метрику в $D\left(R^m\right)$ – через $\rho(\cdot)$. Вважатимемо, що на прямому добутку цих просторів введена метрика одним із природних способів.

Припустимо, що функціонал $\varphi(x,H)$, де $x \in X, H \in D(R)$, є неперервним за сукупністю змінних та строго опуклим донизу при кожній фіксованій функції H. Ставиться задача

$$\varphi(x,H) \to \min,\ x \in X, \tag{1}$$

де функція розподілу H невідома, але є можливість спостерігати вибірку випадкової величини, яка має цей розподіл.

Розглянемо приклад функціоналу, який залежить від функції розподілу, але множина точок мінімуму якого є незмінною на широкому класі функцій розподілу. Нехай (Ω, F, P) – імовірнісний простір, $f(x,\omega) = \xi(\omega) r(x) + \eta(\omega)$, де $\xi(\omega), \eta(\omega)$ – випадкові величини на Ω, причому $\xi(\omega) > 0$. Припустимо, що $\xi(\omega), \eta(\omega)$ мають скінченні математичні сподівання. Для компактної множини $X \subset R$ розглянемо задачу

$$F(x,H_1,H_2) \to \min, x \in X,$$

де $F(x,H_1,H_2) = Mf(x,\omega)$. Тут $Mf(x,\omega)$ – математичне сподівання величини $f(x,\omega)$, H_1 і H_2, відповідно, функції розподілу випадкових величин $\xi(\omega)$ і $\eta(\omega)$.

Тоді $F(x,H_1,H_2) = r(x) M\xi(\omega) + M\eta(\omega) = \beta r(x) + \gamma$, де β, γ – сталі, причому $\beta > 0$. Звідси легко упевнитися, що множина $X = \{x \in X : F(x,H,H) = \min F(x,H,H)\}$ є однією і тією самою для всіх функцій розподілу H_1, H_2 відповідних випадкових величин $\xi(\omega), \eta(\omega)$.

Сформулюємо і доведемо твердження, які є теоретичним підґрунтям при розв'язанні задачі (1). При доведені першого з них буде використана така властивість строго опуклої донизу функції: якщо x_0 – точка мінімуму неперервної строго опуклої донизу функції, то $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0:\ \|x_0 - x\| < \varepsilon$ як тільки $\left|f(x_0) - f(x)\right| < \delta$. Цю властивість назвемо α-властивістю.

Теорема 1. *Нехай x_0 – точка мінімуму функціоналу $\varphi(x,H_0)$, а x_* – точка мінімуму функціоналу $\varphi(x,H_*)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ таке, що як тільки $\rho(H_0,H_*) < \delta$, то і $\|x_0 - x_*\| < \varepsilon$.*

Доведення. Внаслідок неперервності $\varphi(x,H)$ за сукупністю змінних $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$:

$$\rho(H_0,H_*) < \delta\ \Rightarrow\ \left|\varphi(x,H_0) - \varphi(x,H_*)\right| < \varepsilon\ \ \forall x \in X. \tag{2}$$

Якщо розглянути послідовність функцій розподілу $H_k \to H_0, k \to \infty$, то згідно (2) послідовність функцій $\varphi_k(x) = \varphi(x,H_k)$ рівномірно збігається до функції $\varphi_0(x) = \varphi(x,H_0)$, $k \to \infty$. Звідси випливає, що $\min\limits_{x \in X} \varphi_k(x) \to \min\limits_{x \in X} \varphi_0(x)$, $H_k \to H_0$. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0:\ \rho(H_0,H_*) < \delta\ \Rightarrow\ \left|\varphi(x_0,H_0) - \varphi(x_*,H_*)\right| < \varepsilon, \tag{3}$$

причому δ можна вибрати так, щоб одночасно виконувалася умова (2).

Далі $\left|\varphi(x_1,H_*) - \varphi(x_0,H_0)\right| \ge \left|\varphi(x_1,H_*) - \varphi(x_0,H_*)\right| - \left|\varphi(x_0,H_*) - \varphi(x_0,H_0)\right|$. Звідси, враховуючи умови (2) і (3), маємо $\left|\varphi(x_0,H_*) - \varphi(x_*,H_*)\right| \le 2\varepsilon$. Як наслідок α-властивості, для строго опуклого донизу функціоналу $\varphi(x,H_*)$ отримуємо, що $\|x_0 - x_*\| < \varepsilon'$, причому $\varepsilon' = \varepsilon'(\varepsilon(\delta)) \to 0$, $\delta \to 0$. Таким чином, точка мінімуму функціоналу $\varphi(x,H_0)$ неперервно залежить від функції розподілу, що й треба було довести.

Наступне твердження стосується класу неперервних функціоналів.

Нехай X, X дві множини з R^n. Відстанню між такими множинами називається величина $d(X_1,X_2) = \inf\limits_{x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2} \|x_1 - x_2\|$. Позначимо $X_0 = \left\{x : \varphi(x,H_0) = \min\limits_{x \in X} \varphi(x,H_0)\right\}$, $X_k = \left\{x : \varphi(x,H_k) = \min\limits_{x \in X} \varphi(x,H_k)\right\}$.

Теорема 2. *Якщо $\varphi(x,H)$ неперервний за сукупністю змінних фунціонал і $\rho(H_k,H_0) \to 0,\ k \to \infty$, то існує така підпослідовність номерів k_l, що $d\left(X_0, X_{k_l}\right) \to 0,\ k_l \to \infty$.*

Доведення. Нехай $H_k \to H_0, k \to \infty$ в метриці Леві-Прохорова. Тоді

$$\min_{x \in X} \varphi(x,H_k) \to \min_{x \in X} \varphi(x,H_0),\ k \to \infty. \tag{4}$$

Внаслідок компактності множини X існує така підпослідовність x_{k_l} деякої послідовності точок глобального мінімуму функціоналів $\varphi\left(x,H_k\right)$, що $x_{k_l}\to x_*$. Покажемо, що x_* є однією з точок глобального мінімуму функціоналу $\varphi\left(x,H_0\right)$. Справді,

$$\left|\min_{x\in X}\varphi\left(x,H_0\right)-\varphi\left(x_*,H_0\right)\right|\le\left|\min_{x\in X}\varphi\left(x,H_0\right)-\varphi\left(x_{k_l},H_{k_l}\right)\right|+\left|\varphi\left(x_{k_l},H_{k_l}\right)-\varphi\left(x_*,H_0\right)\right|.$$

Обидва доданки останньої рівності прямують до нуля при $k\to\infty$ внаслідок відповідно (4) та неперервності функціоналу за сукупністю змінних. Отже, $\varphi\left(x_*,H_0\right)=\min_{x\in X}\varphi\left(x,H_0\right)$ і тому $d\left(X,X\right)\to 0,\ k\to\infty$, що й треба було довести.

Висновки

Для випадків строго опуклого та неперервного функціоналу, що залежить від функції розподілу випадкової величини, сформульовано і доведено твердження про неперервну залежність точки мінімуму функціоналу від функції розподілу.

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Надійшла до редколегії 05.09.11

УДК 517.977

А. Сукретна, канд. фіз.-мат. наук
sukretna@gmail.com

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДИСИПАЦІЄЮ

Для задачі оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового процесу з дисипацією отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування не виходить на обмеження, та побудовано оптимальний синтез у цьому випадку. Запропоновано закон наближеного усередненого синтезу, що забезпечує близьку до оптимальної поведінку керованої системи.

For optimal control problem with semidefinite quality criterion for wave process with dissipation we receive the conditions under which control isn't beyond the restrictions, and we construct optimal synthesis in this case. We propose approximated homogeneous synthesis law, which provides control system behavior that is closed to optimal one.

Вступ

Задача побудови оптимального керування у формі зворотного зв'язку (або синтезу) для розподілених систем у замкненій формі з одного боку вимагає розв'язку з точки зору практики, а з іншого – не може бути розв'язана в загальному випадку. Практична користь таких задач цілком зрозуміла, оскільки саме керування зі зворотнім зв'язком дає змогу здійснювати гнучке управління різноманітними технологічними процесами, причому це управління можна вибрати оптимальним з точки зору того чи іншого критерію (вартості процесу, використання існуючих ресурсів тощо), а наявність замкнутої формули для керування дозволяє реалізовувати керуючий вплив у реальному часі. Щодо можливості отримання таких керувань з математичної точки зору, то, на жаль, наявні математичні методи, в основі яких лежать метод динамічного програмування Р. Беллмана [1] та метод варіаційних нерівностей Ж.–Л. Ліонса [2], дають змогу довести задачу до кінцевої формули оптимального синтезу лише в окремих випадках. Так при застосуванні методу динамічного програмування ми приходимо до крайових задач для рівнянь типу Ріккаті, а метод варіаційних нерівностей дозволяє побудувати необхідні умови оптимальності в термінах прямої та спряженої задач, залишаючи поза своєю увагою шляхи розв'язання отриманої системи.

У світлі сказаного, побудова закону оптимального синтезу у доведеному до формули вигляді навіть для окремого класу задач оптимального керування розподіленою системою є актуальною задачею, що розв'язується у даній роботі для задачі оптимального керування, в якій керований процес описується крайовою задачею для хвильового рівняння з дисипацією, а критерій якості є напіввизначеним. Робота є продовженням циклу робіт [3 – 6].

Постановка задачі

Нехай $\Omega\subset R^n$ – обмежена область з гладкою межею і для $\varepsilon\in(0,1)$ керований процес у циліндрі $\overline{Q_T}=\left[t_0,\ T\right]$ описується крайовою задачею для хвильового рівняння з дисипацією

$$\begin{cases} y_{tt}^{\varepsilon}(x,t)+2\gamma y_t^{\varepsilon}(x,t)=A^{\varepsilon}y^{\varepsilon}(x,t)+g^{\varepsilon}(x)v(t),\ (x,t)\in\Omega\times\left(t_0,T\right),\\ y^{\varepsilon}(x,t)=0,\ x\in\partial\Omega,\ t\in\left[t_0,T\right],\\ y^{\varepsilon}\left(x,t_0\right)=\varphi_0^{\varepsilon}(x),\ y_t^{\varepsilon}\left(x,t_0\right)=\varphi_1^{\varepsilon}(x),\ x\in\Omega; \end{cases} \tag{1}$$

де $A^{\varepsilon}:=div\left(a^{\varepsilon}\vec{\nabla}\right),\ a^{\varepsilon}=a^{\varepsilon}(x)$ – вимірна симетрична матриця розмірності $n\times n$, яка задовольняє умови рівномірної еліптичності та обмеженості, $g^{\varepsilon},\varphi_1^{\varepsilon}\in L_2(\Omega),\ \ \varphi_1^{\varepsilon}\in H_0^1(\Omega),\ \ \gamma>0,\ \ t_0\ge 0,\ \ T>t_0$ – довільні фіксовані моменти часу.

На керування накладені обмеження

$$v\in U=\left\{v\in L_2\left(t_0,T\right):\ \left|v(t)\right|\le\xi\ \text{ м.с. на }\left[t_0,T\right]\right\}. \tag{2}$$

© Сукретна А., 2012

Задача оптимального керування полягає у мінімізації критерію якості

$$J(v)=\alpha\left(\int_{\Omega} q_0^{\varepsilon}(x)y^{\varepsilon}(x,T)dx-\psi_0\right)^2+\beta\left(\int_{\Omega} q_1^{\varepsilon}(x)y_t^{\varepsilon}(x,T)dx-\psi_1\right)^2+\int_{t_0}^{T} v^2(t)dt, \tag{3}$$

де $\alpha,\beta\geq 0,\ \ \alpha+\beta\neq 0,\ \ \psi_0,\psi_1\in R,\ \ q_0^{\varepsilon},q_1^{\varepsilon}\in L_2(\Omega).$

Відомо, що при довільному керуванні $v\in U$ крайова задача (1) має єдиний розв'язок $y^{\varepsilon}\in C\left(\left[t_0,T\right];\ L_2(\Omega)\right)$ [7]. Крім того, задача оптимального керування (1) – (3) має єдиний розв'язок [2]. У [4, 5] цей розв'язок побудовано у випадку відсутності дисипації ($\gamma=0$).

Побудова оптимального керування зі зворотнім зв'язком

Слідуючи ідеї статей [4, 5], побудуємо оптимальний синтез задачі (1) – (3) у явному вигляді. Для цього спочатку перейдемо від задачі оптимального керування для системи з розподіленими параметрами (1) – (3) до нескінченновимірної задачі оптимального керування в термінах коефіцієнтів Фур'є вихідної задачі.

Введемо до розгляду спектральну задачу

$$\begin{cases} A^{\varepsilon}X+\mu X=0,\ x\in\Omega, \\ X(x)=0,\ x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Відомо [8], що спектральна задача (4) має послідовність власних чисел $0\leq\left(\lambda_1^{\varepsilon}\right)^2\leq\left(\lambda_2^{\varepsilon}\right)^2\leq\ldots\leq\left(\lambda_k^{\varepsilon}\right)^2\leq\ldots,$ для яких $\left(\lambda_k^{\varepsilon}\right)^2\to\infty,\ k\to\infty,$ при цьому відповідні власні функції $\left\{X_k^{\varepsilon}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$ утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\Omega)$ і ортогональний базис у просторі $H_0^1(\Omega)$. Розкладемо всі функції задачі (1) – (3) у ряди Фур'є за власним базисом $\left\{X_k^{\varepsilon}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\begin{gathered} y^{\varepsilon}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} y_k^{\varepsilon}(t)X_k^{\varepsilon}(x),\quad y_k^{\varepsilon}(t)=\left(y^{\varepsilon}(\cdot,t),X_k^{\varepsilon}\right); \\ g^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad g_k^{\varepsilon}=\left(g^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right); \\ \varphi_0^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{0k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad \varphi_{0k}^{\varepsilon}=\left(\varphi_0^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right);\quad \varphi_1^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{1k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad \varphi_{1k}^{\varepsilon}=\left(\varphi_1^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right); \\ q_0^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} q_{0k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad q_{0k}^{\varepsilon}=\left(q_0^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right);\quad q_1^{\varepsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty} q_{1k}^{\varepsilon}X_k^{\varepsilon}(x),\quad q_{1k}^{\varepsilon}=\left(q_1^{\varepsilon}(\cdot),X_k^{\varepsilon}\right); \end{gathered} \tag{5}$$

де тут і далі $\left(\,\cdot\,,\cdot\,\right)$ – скалярний добуток у просторі $L_2(\Omega)$.

Зазначимо, що при побудові оптимального керування зі зворотнім зв'язком наявність параметру ε не є суттєвою, тому для спрощення ми опустимо параметр ε у подальших викладках, поновивши його у кінцевій формулі для оптимального синтезу. З урахуванням цього, у термінах коефіцієнтів Фур'є задача оптимального керування (1) – (3) перепишеться у вигляді

$$\begin{cases} \ddot{y}_k(t)+2\gamma\dot{y}_k(t)+\lambda_k^2 y_k(t)=g_k v(t), \\ y_k\left(t_0\right)=\varphi_{0k},\ \dot{y}_k\left(t_0\right)=\varphi_{1k}; \end{cases} \tag{6}$$

$$v\in U, \tag{7}$$

$$J(v)=\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} q_{0k}y_k(T)-\psi_0\right)^2+\beta\left(\sum_{k=1}^{\infty} q_{1k}\dot{y}_k(T)-\psi_1\right)^2+\int_{t_0}^{T} v^2(t)dt\to\inf. \tag{8}$$

Задача (6) – це задача Коші для лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, а тому для всіх $k\geq 1$ і $v\in U$ має єдиний розв'язок. Надалі для скорочення викладок будемо вважати, що виконується нерівність

$$\lambda_1^2>\gamma^2. \tag{9}$$

За умови (9) для довільного $k\geq 1$ характеристичне рівняння для лінійного однорідного рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню в (6), має два комплексно-спряжені корені з ненульовою дійсною частиною $-\gamma.$ Зауважимо, що це твердження залишається справедливим для досить великих k і у випадку, якщо нерівність (9) не виконується. Крім того, неважко переконатися у справедливості наступних оцінок

$$\begin{gathered} y_k^2(t)\leq 3\left[\left(1+\frac{\gamma}{\omega_k}\right)^2\varphi_{0k}^2+\frac{1}{\omega_k^2}\varphi_{1k}^2+\frac{1}{2\gamma\omega_k^2}g_k^2\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right], \\ \dot{y}_k^2(t)\leq 3\left[\left(\omega_k+\frac{\gamma^2}{\omega_k}\right)^2\varphi_{0k}^2+\left(1+\frac{\gamma}{\omega_k}\right)^2\varphi_{1k}^2+\frac{1}{2\gamma}g_k^2\left(1+\frac{\gamma}{\omega_k}\right)\int_{t_0}^{T} v^2(s)ds\right]; \end{gathered} \tag{10}$$

де $\omega_k=\sqrt{\lambda_k^2-\gamma^2}.$

Оцінки (10) та рівність Парсеваля дають змогу записати оцінки для розв'язків крайової задачі (1):

$$\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2 \le 3\left[\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1^{\varepsilon}}\right)^2\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{2\gamma\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\left\|g^{\varepsilon}\right\|^2\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right],$$

$$\left\|y^{\varepsilon}(t)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le 3\left[2\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left(2\gamma^2+\frac{2\gamma^3}{\omega_1^{\varepsilon}}+\frac{\gamma^4}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)^2\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2+\left(1+\frac{\gamma^2}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{2\gamma}\left(1+\frac{\gamma^2}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)\left\|g^{\varepsilon}\right\|^2\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right], \qquad (11)$$

$$\left\|y_t^{\varepsilon}(t)\right\|^2 \le 3\left[\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}+\left(2\gamma^2+\frac{\gamma^4}{\left(\omega_1^{\varepsilon}\right)^2}\right)\left\|\varphi_0^{\varepsilon}\right\|^2+\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1^{\varepsilon}}\right)^2\left\|\varphi_1^{\varepsilon}\right\|^2+\frac{1}{2\gamma}\left\|g^{\varepsilon}\right\|^2\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1^{\varepsilon}}\right)\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds\right];$$

(тут ми поновили параметр ε). Зауважимо також, що подібні оцінки можна було б отримати для розв'язків крайової задачі (1) безпосередньо (не переходячи до відповідних коефіцієнтів Фур'є).

Повернемось до розв'язання задачі оптимального керування (6) – (8). Використовуючи фундаментальну систему розв'язків лінійних однорідних рівнянь, які відповідають рівнянням в (6), задачу оптимального керування (6) – (8) для нескінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь можна звести до еквівалентної задачі оптимального керування, в якій керований процес описується двовимірною системою звичайних диференціальних рівнянь. Дійсно, введемо позначення

$$a_1(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_0^k\left[\left(\cos\left(\omega_k(T-t)\right)+\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\right)y_k(t)+\frac{1}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\dot{y}_k(t)\right],$$

$$\alpha_1=e^{-\gamma(T-t_0)}\sum_{k=1}^{\infty}q_0^k\left[\left(\cos\left(\omega_k(T-t_0)\right)+\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\right)\varphi_{0k}+\frac{1}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\varphi_{1k}\right],$$

$$a_2(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}q_1^k\left[-\left(\omega_k+\frac{\gamma^2}{\omega_k}\right)\sin\left(\omega_k(T-t)\right)y_k(t)+\left(\cos\left(\omega_k(T-t)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\right)\dot{y}_k(t)\right], \qquad (12)$$

$$\alpha_2=e^{-\gamma(T-t_0)}\sum_{k=1}^{\infty}q_1^k\left[-\left(\omega_k+\frac{\gamma^2}{\omega_k}\right)\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\varphi_{0k}+\left(\cos\left(\omega_k(T-t_0)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t_0)\right)\right)\varphi_{1k}\right],$$

$$b_1(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_kq_{0k}}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right),\qquad b_2(t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^{\infty}g_kq_{1k}\left(\cos\left(\omega_k(T-t)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k}\sin\left(\omega_k(T-t)\right)\right).$$

Тоді задача (6) – (8) еквівалентна наступній задачі оптимального керування для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases}\dot{a}_1(t)=b_1(t)v(t), \quad a_1(t_0)=\alpha_1,\\ \dot{a}_2(t)=b_2(t)v(t), \quad a_2(t_0)=\alpha_2;\\ v\in U,\\ J(v)=\alpha\left(a_1(T)-\psi_0\right)^2+\beta\left(a_2(T)-\psi_1\right)^2+\int_{t_0}^{T}v^2(s)ds.\end{cases} \qquad (13)$$

Зауважимо, що внаслідок оцінок (10) та умов на коефіцієнти задачі оптимального керування (1) – (3), функції та сталі в (12) означені коректно. Крім того, функції $a_1(t),\ a_2(t)$ допускають почленне інтегрування та диференціювання.

Отримана задача оптимального керування (13) аналогічна тій, що отримується у випадку відсутності дисипації (тобто при $\gamma=0$) [4], і може бути розв'язана за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. В результаті отримуємо керування:

$$u(t)=-\frac{1}{\Delta(t_0)}\left[A(t,t_0)\left(\alpha_1-\psi_0\right)+B(t,t_0)\left(\alpha_2-\psi_1\right)\right], \qquad (14)$$

де

$$\Delta(t_0)=\left(1+\alpha\int_{t_0}^{T}b_1^2(s)ds\right)\left(1+\beta\int_{t_0}^{T}b_2^2(s)ds\right)-\alpha\beta\int_{t_0}^{T}b_1(s)b_2(s)ds\ge 1>0,$$

$$A(t,t_0)=\alpha b_1(t)+\alpha\beta b_1(t)\int_{t_0}^{T}b_2^2(s)ds-\alpha\beta b_2(t)\int_{t_0}^{T}b_1(s)b_2(s)ds,$$

$$B(t,t_0)=\alpha b_2(t)+\alpha\beta b_2(t)\int_{t_0}^{T}b_1^2(s)ds-\alpha\beta b_1(t)\int_{t_0}^{T}b_1(s)b_2(s)ds.$$

При виконанні нерівності

$$\frac{\alpha}{\omega_1}\|q_0\|\|g\|\left[1+\frac{\beta}{\gamma}\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1}\right)^2\|q_1\|^2\|g\|^2\right]|\alpha_1-\psi_0|+\beta\left(1+\frac{\gamma}{\omega_1}\right)\|q_1\|\|g\|\left[1+\frac{\alpha}{\gamma\omega_1^2}\|q_0\|^2\|g\|^2\right]|\alpha_2-\psi_1|\le\xi \qquad (15)$$

керування (14) задовольняє обмеження $|u(t)|\le\xi,$ і тому є програмним оптимальним керуванням задачі (13).

Використовуючи граничний перехід Красовського [9], ми можемо на базі програмного оптимального керування (14) побудувати оптимальний синтез для задачі оптимального керування (13):

$$u\left[t,\,a_1,\,a_2\right]=-\frac{1}{\Delta(t)}\left[A(t,t)\left(a_1-\psi_0\right)+B(t,t)\left(a_2-\psi_1\right)\right], \qquad (16)$$

де $a_1=a_1(t),\ a_2=a_2(t)$ – розв'язки задачі Коші в (13) з керуванням $v(t)=u\left[t,\,a_1(t),\,a_2(t)\right],$ що задається формулою (16).

Повертаючись до вихідної задачі оптимального керування (1) – (3) і поновлюючи параметр ε у формулах, приходимо до оптимального синтезу задачі (1) – (3) у випадку відсутності обмежень

$$u\left[t,\ y^\varepsilon\right]=-\frac{1}{\Delta^\varepsilon(t)}\Big[\left(A^\varepsilon(t,t)R_{11}^\varepsilon(\cdot,t)+B^\varepsilon(t,t)R_{12}^\varepsilon(\cdot,t),\ y^\varepsilon(\cdot,t)\right)+\left(A^\varepsilon(t,t)R_{21}^\varepsilon(\cdot,t)+B^\varepsilon(t,t)R_{22}^\varepsilon(\cdot,t),\ y_t^\varepsilon(\cdot,t)\right)\Big]+$$
$$+\frac{A^\varepsilon(t,t)\psi_0+B^\varepsilon(t,t)\psi_1}{\Delta^\varepsilon(t)}, \qquad (17)$$

де

$$R_{11}^\varepsilon(x,t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^\infty q_{0k}^\varepsilon\left[\cos\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)+\frac{\gamma}{\omega_k^\varepsilon}\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)\right]X_k^\varepsilon(x),$$
$$R_{12}^\varepsilon(x,t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^\infty \frac{q_{0k}^\varepsilon}{\omega_k^\varepsilon}\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)X_k^\varepsilon(x),$$
$$R_{21}^\varepsilon(x,t)=-e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon\left(\omega_k^\varepsilon+\frac{\gamma^2}{\omega_k^\varepsilon}\right)\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)X_k^\varepsilon(x), \qquad (18)$$
$$R_{22}^\varepsilon(x,t)=e^{-\gamma(T-t)}\sum_{k=1}^\infty q_{1k}^\varepsilon\left[\cos\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)-\frac{\gamma}{\omega_k^\varepsilon}\sin\left(\omega_k^\varepsilon(T-t)\right)\right]X_k^\varepsilon(x),$$

$y^\varepsilon=y^\varepsilon(x,t)$ – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням $v(t)=u\left[t,\ y^\varepsilon\right].$

Зауважимо, що всі ряди в (18) означені коректно та визначають функції наступних класів: $R_{11}^\varepsilon\in C\left([t_0,T];\,L_2(\Omega)\right),$ $R_{12}^\varepsilon\in C\left([t_0,T];\,H_0^1(\Omega)\right),$ $R_{21}^\varepsilon\in C\left([t_0,T];\,H^{-1}(\Omega)\right),$ $R_{22}^\varepsilon\in C\left([t_0,T];\,L_2(\Omega)\right).$

Наближений усереднений синтез

З формули (17) для оптимального керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) видно, що коефіцієнти цього синтезу записуються у вигляді нескінченних рядів, що не є зручним для практичних обчислень у реальному часі. Крім того, наявність параметру $\varepsilon,$ який може входити у оператор A^ε крайової задачі (1) нерегулярно, також може суттєво ускладнювати ці обчислення. Тому природно виникає задача побудови наближеного керування зі зворотнім зв'язком, яке б реалізувало близьку (в сенсі критерію якості (3)) поведінку керованої системи (1).

Надалі будемо вимагати виконання припущення.

Припущення. *Нехай мають місце наступні збіжності коефіцієнтів задачі оптимального керування (1) – (3):*

$$g^\varepsilon\to g^0,\ \varphi_0^\varepsilon\to\varphi_0^0,\ \varphi_1^\varepsilon\to\varphi_1^0,\ q_0^\varepsilon\to q_0^0,\ q_1^\varepsilon\to q_1^0\ \textit{слабко в}\ L_2(\Omega)\ \textit{при}\ \varepsilon\to 0;$$
$$a^\varepsilon\to a^0\ \textit{при}\ \varepsilon\to 0\ \textit{в сенсі}\ G\textit{-збіжності матриць} \qquad (19)$$

(стосовно G-збіжності матриць див. [10])

Введемо до розгляду усереднений оператор $A^0=div\left(a^0\vec{\nabla}\right).$ Нехай $\left\{\left(\lambda_k^0\right)^2\right\}_{k=1}^\infty$ та $\left\{X_k^0(x)\right\}_{k=1}^\infty$ – власні значення та відповідні їм власні функції спектральної задачі (4) з оператором $A^0,$ причому вважатимемо, що спектр усередненого оператора A^0 простий, тобто

$$0\le\left(\lambda_1^\varepsilon\right)^2<\left(\lambda_2^\varepsilon\right)^2<\ldots<\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2<\ldots. \qquad (20)$$

Тоді задача оптимального керування (1) – (3) визначена також і при $\varepsilon=0.$

Побудуємо наближений усереднений синтез задачі оптимального керування (1) – (3) за наступним правилом: у формулі (17) в коефіцієнтах $A^\varepsilon,\ B^\varepsilon,\ R_{ij}^\varepsilon\ (i,j=1,2)$ формально замінимо всі ряди на скінченні суми за k від 0 до N, числа $\left(\lambda_k^\varepsilon\right)^2$ на $\left(\lambda_k^0\right)^2$ та всі коефіцієнта Фур'є за ортонормованою системою $\left\{X_k^\varepsilon(x)\right\}_{k=1}^\infty$ на коефіцієнти Фур'є за системою $\left\{X_k^0(x)\right\}_{k=1}^\infty$ відповідних граничних функцій з припущення (19). Отримаємо деяке керування $v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right],$ де z_N^ε – розв'язок крайової задачі (1) з керуванням $v(t)=v_N\left[t,\ z_N^\varepsilon\right].$

Коректність запропонованого наближеного усередненого синтезу обґрунтовує теорема.

Теорема. *Нехай* $q_0^\varepsilon, q_1^\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $g^\varepsilon, \varphi_1^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_0^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *справедливі оцінки* $\|g^\varepsilon\| \le \sigma$, $\|\varphi_1^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \le \phi_1$, $\|\varphi_0^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \le \phi_0$ *при* $\varepsilon \in [0,1)$ *та виконуються припущення (9), (15), (19), (20). Тоді оптимальне керування зі зворотнім зв'язком задачі (1) – (3) має вигляд (17) та справджуються наступні оцінки близькості між оптимальним синтезом* $u^\varepsilon\left[t, y^\varepsilon\right]$ *і побудованим наближеним усередненим синтезом* $v_N\left[t, z_N^\varepsilon\right]$: *для довільного малого* $\eta > 0$ *знайдуться такі* $N_0 \ge 1$ *та* $\varepsilon_0 > 0$, *що для довільних* $N \ge N_0$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *виконуються нерівності*

$$\left|v_N\left[t, z_N^\varepsilon\right] - u^\varepsilon\left[t, y^\varepsilon\right]\right| < \eta \text{ для всіх } t \in [t_0, T],$$

$$\left\|z_N^\varepsilon(\cdot,t) - y^\varepsilon(\cdot,t)\right\|_{H_0^1(\Omega)} < \eta \text{ для всіх } t \in [t_0, T],$$

$$\left|J\left(v_N\left[t, z_N^\varepsilon\right]\right) - J\left(u^\varepsilon\left[t, y^\varepsilon\right]\right)\right| < \eta.$$

З урахуванням оцінок (11), вигляду наближеного усередненого синтезу $v_N\left[t, z_N^\varepsilon\right]$ та формули для оптимального синтезу (17) доведення цієї теореми може бути проведене подібно до [4].

Зазначимо, що аналогічно [5] можна розглянути випадок виходу керування на обмеження $\pm\xi$. Однак оскільки наявність дисипації суттєво ускладнює вигляд коефіцієнтів у керуванні (14), то рівняння для визначення точки переключення, а також питання про кількість точок переключення потребують окремого вивчення, що буде предметом наступних досліджень.

Висновки

У роботі розглянуто задачу оптимального керування з напіввизначеним критерієм якості для хвильового рівняння з дисипацією. Використовуючи метод Фур'є з подальшою заміною вихідної задачі оптимального керування розподіленою системою еквівалентною задачею оптимального керування для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, отримано умови, при виконанні яких оптимальне керування не виходить на обмеження, та побудовано оптимальне керування у формі зворотного зв'язку (синтезу) у цьому випадку. На базі побудованого оптимального синтезу сконструйовано наближений усереднений синтез, який з практичної точки зору має ряд переваг, та обґрунтовано коректність цього синтезу, тобто показано, що наближений синтез реалізує близьке до оптимального значення цільового функціоналу та траєкторії системи.

1. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с. 2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с. 3. Капустян Е.А., Наконечный А.Г. Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 44 – 57. 4. Капустян О.В., Сукретна А.В. Усереднений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 5. – С. 612 – 620. 5. Сукретна А.В. Обмежений наближений синтез оптимального керування для хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, № 8. – С. 1094 – 1104. 6. Сукретна А.В. Наближений синтез оптимального обмеженого керування для параболічного процесу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – 22. – С. 50 – 55. 7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с. 8. Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. – New York, 1997. 9. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с. 10. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физ.-мат. лит., 1993. – 464 с.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 620.179

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук, Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

ДИНАМІЧНИЙ РОЗВИТОК ТРІЩИНИ У КОМПАКТНОМУ ЗРАЗКУ ЗА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ПЛОСКОГО ДЕФОРМОВАНОГО І НАПРУЖЕНОГО СТАНІВ ІЗ РОЗВАНТАЖЕННЯМ МАТЕРІАЛУ

З використанням різницевих методів досліджується плоский деформований і напружений стани відповідно товстого і тонкого компактного зразка із врахуванням процесу розвантаження матеріалу для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестаціонарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладено до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Тріщина підростає за умови відсутності максимальних напружень в області вістря тріщини. Виявлено особливості зміни напружень.

On the base of developed method of solving problems of planar deformation and stress states in non-stationary plastic-elastic model with the counting of the process of unloading of the material the problems of crack cleavage were solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing when maximal stresses in the area of top of crack are absent. There were determined dependences of plastic and elastic deformation energies and areas of plastic deformations for different values of stress intensity.

1. Вступ

У працях [2-9] запропоновано для аналізу процесів руйнування застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи із використанням динамічної пружно-пластичної моделі матеріалу. У [6] розв'язано задачу плоского деформованого стану. Просторовий напружено-деформований стан матеріалу визначається в [3]. У [4] розв'язано задачу плоского напруженого стану з тріщиною, що рухається за умови відсутності максимальних напружень на вістрі тріщини. У [5] і [7] розглянуто плоскі задачі відповідно напруженого і деформованого стану з

© Богданов В., Сулим Г., 2012

тріщиною, що рухається за локальним критерієм крихкого руйнування. У [2], [8] і [9] в'язкість руйнування визначено відповідно на основі розв'язку плоского напруженого стану, плоского деформованого стану і просторової задач за припущення, що тріщина є нерухомою. Запропоновані моделі дали можливість істотно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів. У [13] визначено напружено-деформований стан жорсткопластичної криволінійної пластини змінної товщини з довільним отвором при динамічному навантаженні.

У цьому дослідженні на відміну від задачі [4] динамічного розвитку тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану враховується процес розвантаження матеріалу.

2. Математичне формулювання задачі

Розглядається деформування компактного (балкового) зразка у формі прямокутника $\Sigma = L \times B$ ($-L/2 \le x \le L/2$; $0 \le y \le B$) з пропилом-тріщиною початкової довжини $l = l_0$ уздовж відрізка {$x = 0$; $0 \le y \le l_0$} що контактує з двома нерухомими опорами уздовж {$L_* \le |x| \le L_* + a$; $y = 0$}. У разі плоского деформованого стану вважаємо, що товщина w зразка є настільки великою, що можна використовувати залежності плоского деформованого стану ($\sigma_{zz} = \mathrm{const}$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$). У разі ж плоского напруженого стану вважаємо, що товщина w зразка вважається настільки малою, щоб можна було використовувати залежності плоского напруженого стану ($\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$).

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка {$|x| \le A$; $y = B$}. Його дію на тіло замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція $P = p_{01} + p_{02} t$. З огляду на симетрію процесу деформування відносно лінії $x = 0$ далі розглядається лише права частина поперечного перерізу (рис. 1a). Вважаємо, що матеріал є пружно-пластичним із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних $d\varepsilon_i^p$, а також параметра Одквіста $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$ буде нижче здійснюватися на основі числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі. При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої при цьому контактної взаємодії між берегами розрізу.

Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища густиною ρ мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

Крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, однак виходять із припущення про незмінність області прикладання реакції, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статики, запишуться так:

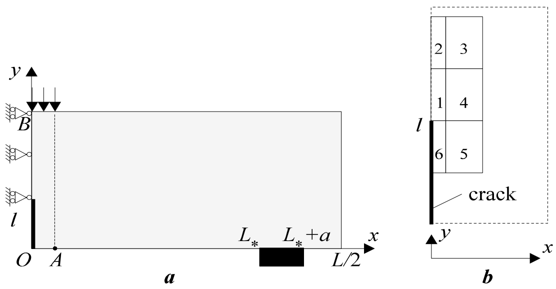


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

$$\begin{array}{lll}
x = 0, & 0 < y < l: & \sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{xy} = 0; \\
x = 0; & l < y < B: & u_x = 0,\ \sigma_{xy} = 0; \\
x = L/2, & 0 < y < B: & \sigma_{xx} = 0,\ \sigma_{xy} = 0; \\
y = 0, & 0 < x < L_*: & \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = 0; \\
y = 0, & L_* < x < L_* + a: & u_y = 0,\ \sigma_{xy} = 0; \\
y = 0, & L_* + a < x < L/2: & \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = 0; \\
y = B, & 0 < x < A: & \sigma_{yy} = -P,\ \sigma_{xy} = 0; \\
y = B, & A < x < L/2: & \sigma_{yy} = 0,\ \sigma_{xy} = 0.
\end{array} \tag{1}$$

Початкові умови мають вигляд

$$u_x\big|_{t=0} = 0,\ u_y\big|_{t=0} = 0,\ \dot{u}_x\big|_{t=0} = 0,\ \dot{u}_y\big|_{t=0} = 0,\ l\big|_{t=0} = l_0, \tag{2}$$

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичної течії середовища із зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса. Ефектами повзучості і температурним розширенням нехтуємо [15]. Тоді, вважаючи компоненти тензора деформацій сумою його пружних і пластичних складових [1], отримаємо для них

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}, \ \ \varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \ \ d\varepsilon_{ij}^{p} = s_{ij} d\lambda. \tag{3}$$

Тут $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K_1 = (1-2\nu)/(3E)$, $K = 3K_1$ – модуль об'ємного стиску, що зв'язує у співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ об'ємне розширення 3ε (температурне розширення $\varphi \equiv 0$); E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуасона; $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ – середнє напруження; $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і з огляду на згаданий вище його вибір квадратично залежить від компонент девіатора напружень s_{ij} [15]. Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення η_* [12]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0)\left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0}\right)^{\eta_*}, \ \ \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \ \ T_0 = 20^\circ \mathrm{C}, \tag{4}$$

де $\sigma_S(T)$ – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури T.

Перепишемо (3) у розгорнутій формі:

$$d\varepsilon_{xx} = d\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{xx} - \sigma)d\lambda, \ d\varepsilon_{yy} = d\left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{yy} - \sigma)d\lambda,$$

$$d\varepsilon_{zz} = d\left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma\right) + (\sigma_{zz} - \sigma)d\lambda, \ d\varepsilon_{xy} = d\left(\frac{\sigma_{xy}}{2G}\right) + \sigma_{xy} d\lambda, \tag{5}$$

$$d\lambda = \left\{0, \ (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0); \ \ \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, \ (f = 0, \ df = 0)\right\},$$

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\left(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + \left(d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p\right)^2 + 6\left(d\varepsilon_{xy}^p\right)^2\right)^{1/2}, \tag{6}$$

де $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + 6\sigma_{xy}^2\right)^{1/2}$ – у випадку плоскої деформації,

$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{xx}\right)^2 + \left(\sigma_{yy}\right)^2 + 6\sigma_{xy}^2\right)^{1/2}$ – у випадку плоского напруженого стану.

На відміну від традиційної плоскої деформації, коли $\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \mathrm{const}$, для уточненого опису деформування зразка з урахуванням можливого приросту поздовжнього видовження $\Delta\varepsilon_{zz}$ подамо його у вигляді [1, 6, 8]

$$\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \Delta\varepsilon_{zz}^0 + \Delta\chi_x x + \Delta\chi_y y, \tag{7}$$

де невідомі $\Delta\chi_x$ і $\Delta\chi_y$ характеризують згин призматичного тіла (яке моделює в механіці деформівного твердого тіла стан плоскої деформації) в площинах Ozx і Ozy відповідно, а $\Delta\varepsilon_{zz}^0$ – прирости за згаданого згину деформації вздовж волокон $x = y = 0$.

3. Схема розв'язування задачі.

Нехай нестаціонарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $t \in [0, t_*]$. Як і в [6, 7, 9] у разі плоскої деформації та аналогічно [2, 4, 5] у разі плоского напруженого стану із використанням для числового інтегрування за часом квадратурної формули Грегорі [16] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n, отримуємо вирази для напружень і приростів деформацій

Для врахування фізичної нелінійності застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [2, 4–7, 9]:

$$\psi^{(n+1)} = \left\{\psi^{(n)} p + \frac{1-p}{2G} \ \ (Q_i < -Q); \ \ \psi^{(n)} \ \ (|Q_i| < Q); \ \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} \ \ (Q_i > Q)\right\},$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T), \ \ \psi = 1/(2G) + \Delta\lambda. \tag{8}$$

де Q – найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміцненої межі текучості; емпірична стала $0 \le p \le 1$ визначається для різних типів матеріалів.

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначено для кожної елементарної комірки із числового розв'язку. Незалежним параметром, який характеризує процес навантаження, є час $t_k = k\Delta t$, а відтак і відповідна цьому моменту часу сила $F = 2AP$ контактної взаємодії ударника зі зразком. Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її із граничним значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_{I}, отриманим із пружного розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра (змінної) будемо вважати наближене значення КІН K_{I}^{e} (нижче називатимемо його пружним КІН) для багатьох залежностей для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [14]:

$$K_{\mathrm{I}}^{e}=12F\frac{\sqrt{l}}{BH}\left(1{,}93-3{,}07\frac{l}{B}+14{,}53\left(\frac{l}{B}\right)^{2}-25{,}11\left(\frac{l}{B}\right)^{3}+25{,}8\left(\frac{l}{B}\right)^{4}\right). \tag{9}$$

Більш вірогідним є використання локального критерію крихкого руйнування: якщо в комірці 1 головне напруження σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $S_C(\kappa)=\left[C_1+C_2\exp(-A_d\kappa)\right]^{-1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{eff}=\sigma_i-\sigma_{02}$ при $\sigma_{02}(T)=a_1-\ c(T+273)+b\exp(-h(T+273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [1], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається перебудова сітки так, щоби біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри a_1, c, b, h, C_1, C_2, і A_d цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу. Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовувався такий алгоритм. Якщо найбільші значення будь-яких напружень з'являлися не в комірці 1, а в комірці 2, то тріщина просувається на одну комірку вверх. Комірка 2 стає коміркою 1. Всі напруження перераховувалися для збільшеної тріщини. Так робилося поки всі найбільші напруження не знаходилися в комірці 1. Процес розвантаження матеріалу відбувався за таким алгоритмом: якщо в будь-якій комірці абсолютне значення напруження ставало меншим ніж максимальне значення, то пластичні деформації далі не збільшуються і зміцнення матеріалу припиняється. Знов пластичні деформації починають збільшуватися і зміцнення матеріалу продовжується, коли абсолютне значення напружень перевищує максимальні значення.

4. Числова реалізація

Для розрахунків математичної моделі компактного зразка із сталі 15Х2НМФА застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей *Ox* (N елементів) і *Oy* (M елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір комірок в радіусі 1-2 мм від вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05· мм). Використання методу скінчених різниць обґрунтовується в [10], причому забезпечується точність розрахунків з похибкою не більше ніж $O\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta t)^2\right)$. Розбиття за часом рівномірне.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за відносно невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичні деформації відсутні, зіставлялися із розрахованими для центру комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей п. 1.2 [14] з використанням КІН (9). Для комірок 1, 6 (див. рис. 1б) при $x=0{,}01\,\text{мм},\ \ y=3\pm0{,}04\,\text{мм}$ різниця не перевищувала 0,3%.

На рис. 2 – 4 відображено результати обчислення деяких важливих для механіки руйнування величин за таких значень параметрів: коефіцієнт зміцнення матеріалу η_*=0,05; *L*=60 мм; *B*=10·мм; l =3 мм; $\Delta t=\ 5\cdot10^{-4}$ с; A =2,5 мм; $p_{01}=8$ МПа; $p_{02}=10$ МПа; M =60; N =77. Найменший крок розбиття дорівнював 0,02 мм, а найбільший 2,6 мм ($\Delta x_{\min}$ =0,02 мм; $\Delta y_{\min}$ =0,04 мм (лише перший шар); $\Delta x_{\max}$ =2,6 мм; $\Delta y_{\max}$ =0,6 мм), T =50°.

Графіки розрахованої залежності від КІН K_{I}^{e} середніх напружень на продовженні осі включення біля його вістря (комірка 1 на схемі рис. 1б) двовимірної моделі компактного зразка (рис. 2) свідчать, що напруження для задач плоского деформованого стану із розвантаженням матеріалу (суцільні лінії) і без розвантаження (пунктирні лінії) відрізняються, коли значення пружного КІН K_{I}^{e} перевищує рівень $K_{\mathrm{I}}^{e}=K_{\mathrm{I}*}^{e}=\ 99{,}6\ \text{МПа}\sqrt{\text{м}}$. Суцільна, суцільна з трикутником, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень σ_{xx}, σ_{yy}, напруження текучості σ_S та інтенсивність напружень σ_i для задачі із врахуванням процесу розвантаження. Пунктирна, пунктирна з трикутником, пунктирна з хрестиком і пунктирна з кружечком лінії стосуються відповідно таких же напружень, але для задачі без розвантаження матеріалу.

Обчислення виявили, що при температурі зразка $T=50\ ^\circ\text{C}$ тріщина починала збільшуватися в разі перевищення пружним КІН рівня $K_{\mathrm{I}}^{e}=K_{\mathrm{I}c}^{e}\equiv60{,}1\ \ \text{МПа}\sqrt{\text{м}}$, а починаючи (рис. 3) із значення $K_{\mathrm{I}}^{e}=117{,}8\ \ \text{МПа}\sqrt{\text{м}}$ довжина тріщини для задачі плоскої деформації із врахуванням процесу розвантаження матерыалу (суцільна лінія) зростає бистріше ніж для відповідної задачі без розвантаження.

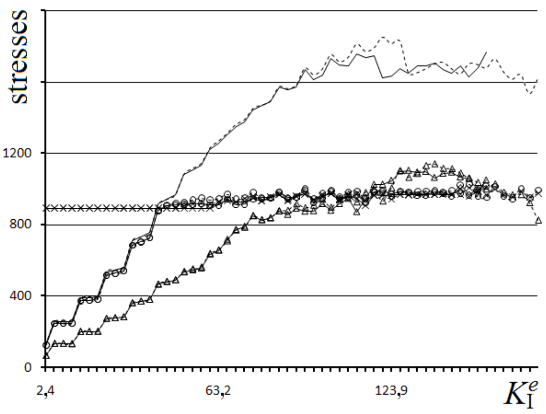


Рис. 2. Залежність напруження у комірці 1 на продовженні осі тріщини від K_{I}^{e}

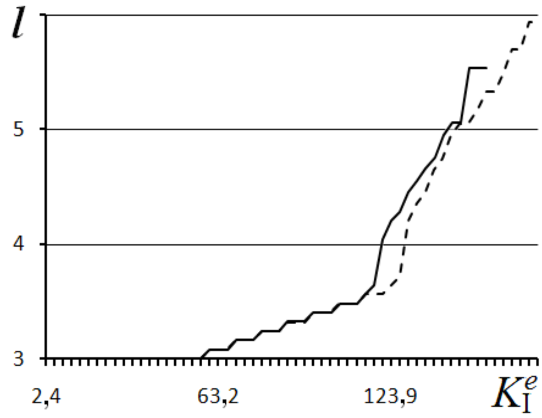


Рис. 3. Залежність довжини тріщини l від K_{I}^{e}

Обчислення залежності параметра Одквіста κ, який характеризує накопичену у комірці 1 (безпосередньо перед вістрям тріщини) пластичну деформацію від K_{I}^{e} із врахуванням розвантаження матеріалу (суцільна лінія) і без розвантаження (пунктирна лінія) відображає рис. 4. Поки деформування є пружним κ=0. Потім у комірці 1 починають монотонно накопичуватися пластичні деформації і у момент, коли тріщина робить перший стрибок, відбувається зміна розташування комірки 1 у зону з меншими значеннями параметра κ (значення κ стрибком зменшується) і знову йде процес накопичення κ. Через це при перевищенні пружним КІН значення $K_{\mathrm{I}c}^{e}$ зміна κ, а разом із тим і величина накопиченої в комірці 1 пластичної деформації має осциляційний (немонотонний) характер.

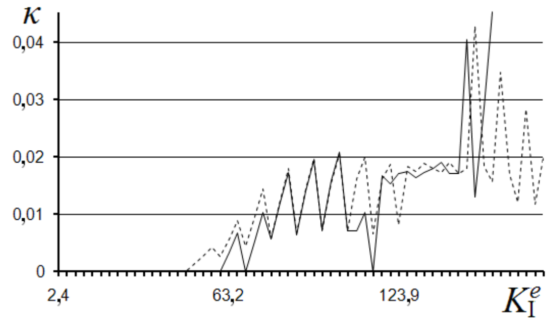


Рис. 4. Залежність параметра Одквіста κ від КІН K_{I}^{e} у комірці 1

Напруження, довжина тріщини і параметр Одквіста для задач плоского напруженого стану із врахуванням процесу розвантаження матеріалу і без розвантаження практично співпадають.

5. Висновки

Розв'язування задач плоского деформованого і напруженого станів для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням процесів підростання тріщини і розвантаження матеріалу дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичних пружно-пластичних задач плоского деформованого і напруженого станів, а також дає можливість адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини.

1. Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г. Теория пластичности.– М.: Металлургия, 1987. – 352 с. 2. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник Київського Київ. нац. ут-ту ім. Т.Г.Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56. 3. Богданов В.Р. Тривимірна динамічна задача концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського Київ. нац. ут-ту ім. Т.Г.Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56. 4. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану // Вісник Київ. нац. ун–ту. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54. 5. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'я-зування задачі плоского напруженого стану // Вісник Львівського нац. ут-ту ім. І.Франка. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204. 6. Богданов В.Р., Сулым Г.Т. О решении за-дачи плоского деформированного состоя-ния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении // Теоретическая и прикладная механика, Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66. 7. Богданов В.Р., Сулым Г.Т. Моделирование подростания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния // Збірник наукових праць "Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій", Дніпропетровськ . – 2011. – № 15. – С. 33–44. 8. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану // Физико-химическая механіка матеріалов. – 2010. – № 6. – С. 16–24. 9. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання тривимірної динамічної задачі // Международный научно-технический сборник "Надежность и долговечность машин и сооружений". – 2010. – № 33. – С. 153–166. 10. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 360 с. 11. Зюкина Е.Л. Консервативные разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного волнового уравнения.// Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, – Казань, – т.26. – 2004 – С. 151–160. 12. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: "Наукова думка", 1976. – 320с. 13. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным отверстием. Прикл. Механика. – 2010. – 46, №3. – С. 70 – 76. 14. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наукова думка, 1988. – 620 с. 15. Сборник: Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948. – 460 с. 16. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с.

Надійшла до редколегії 17.10.11

ДО 65-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ВІТАЛІЯ ІВАНОВИЧА СУЩАНСЬКОГО

14 листопада 2011 р. виповнилося 65 років видатному українському математику Віталію Івановичу Сущанському, одному із засновників сучасної київської алгебраїчної школи.

Віталій Іванович Сущанський народився в селі Ходорків Попільнянського району Житомирської області. Закінчивши з відзнакою механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г.Шевченка у 1969 р., він вступив до аспірантури. Його науковим керівником став засновник кафедри алгебри і математичної логіки Лев Аркадійович Калужнін. Захистивши у 1971 р. кандидатську дисертацію на тему "Сплетения элементарных абелевых групп и их применение", Віталій Іванович почав працювати на кафедрі алгебри та математичної логіки. Роботі на рідній кафедрі він віддав 33 роки, пройшовши шлях від асистента до її завідувача. У 1991 р. В.І. Сущанський захистив докторську дисертацію "Сплетения, изометрии полуконечных бэровских метрик и финитно аппроксимируемые группы", а в 1993 р. отримав звання професора.

Започаткований у Київському університеті Л.А.Калужніним напрям досліджень вінцевих добутків груп був успішно продовжений і розвинений як самим В.І.Сущанським, так і його учнями. У своїх перших працях, які стали основою його кандидатської дисертації, Віталій Іванович розвинув нові підходи до розгляду й характеризації вербальних підгруп у вінцевих добутках груп. Ці дослідження були в руслі тодішнього розвитку комбінаторної теорії груп і, зокрема, теорії многовидів груп. Результати В.І.Сущанського дозволили отримати відповіді на відкриті питання про будову низки важливих групових многовидів, а розроблені Віталієм Івановичем методи дослідження вербальних підгруп стали класичними і досі успішно застосовуються при вивченні різних класів груп.

Найбільш відомим результатом Віталія Івановича є знайдені ним наприкінці семидесятих років минулого століття приклади двопороджених нескінченних *p*-груп. Існування таких груп дало негативну відповідь щодо розв'язання загальної проблеми Бернсайда і стало основою розвитку нового напряму в математиці – теорії нескінченно ітерованих вінцевих добутків груп підстановок.

У подальших працях В.І.Сущанського було закладено не тільки основи цього напряму, а також показано, що мова нескінченно ітерованих вінцевих добутків груп підстановок є тим алгебраїчним апаратом, який може ефективно використовуватися при дослідженні груп автоморфізмів кореневих дерев, груп ізометрій метричних просторів Бера, груп автоматних підстановок.

Наприкінці восьмидесятих років XX-го століття Віталій Іванович побудував нові серії нескінченних періодичних груп, що дозволило, зокрема, знайти приклад не локально скінченної *p*-групи, яка розкладається в добуток локально скінченних підгруп і, тим самим, отримати розв'язок відомої проблеми зі знаменитого Коурівського зошита. В.І.Сущанський отримав низку й інших глибоких результатів з теорії факторизації нескінченних груп.

У дев'яності роки з ініціативи Віталія Івановича розпочинаються дослідження з кількох нових для київської алгебраїчної школи напрямів: теорії напівгруп перетворень, теорії скінченних метричних просторів, теорії груп та напівгруп автоматів, з яких математиками, які так чи інакше співпрацювали з В.І.Сущанським, було отримано низку цікавих і важливих результатів.

Серед наукових досягнень Віталія Івановича останнього десятиліття слід відзначити результати стосовно характеристики класів спряженості в групах автоморфізмів кореневих дерев, побудови автоматів, напівгрупи яких мають проміжний ріст, явного зображення вільних груп нескінченними унітрикутними матрицями, характеристики деяких класів нескінченних локально скінченних груп, алгебри Лі, що асоційовані з певними вінцевими добутками груп підстановок.

Творчий доробок В.І.Сущанського нараховує 8 наукових і науково-популярних монографій, близько 130 наукових та понад 50 науково-популярних статей. Багато його наукових праць стали класичними. Їх результати використовують у своїх дослідженнях як відомі математики сучасності, так і молоді науковці, котрі роблять лише свої перші наукові кроки.

Віталій Іванович щедро ділиться своїми науковими ідеями і знаннями з молодими науковцями: під його керівництвом успішно захищено 34 кандидатські дисертації, він був науковим консультантом 5 докторських дисертацій.

В.І.Сущанський був серед засновників і нині є членом редколегій наукових журналів "Математичні студії" та "Algebra and Discrete Mathematics". Він співзасновник, а нині головний редактор єдиного в Україні науково-популярного математичного журналу для школярів та студентів "У світі математики". Він відігравав провідну роль у створенні в Україні спеціалізованих вчених рад з захисту кандидатських і докторських дисертацій з алгебри, теорії чисел, дискретної математики, математичної логіки та теорії алгоритмів.

Щиро бажаємо Віталію Івановичу міцного здоров'я, бадьорості і нових творчих здобутків! Многая літа!

О. О. Безущак, М. Ф. Городній, Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко, Я. В. Лавренюк, А. С. Олійник, М. О. Перестюк, А. П. Петравчук, В. Г. Самойленко

ОСТАП СТЕПАНОВИЧ ПАРАСЮК
(20.12.1921 – 22.11.2007)

20 грудня 2011 року виповнилось 90 років від дня народження видатного математика і фізика-теоретика, академіка НАН України Остапа Степановича Парасюка.

О.С. Парасюк народився в с. Білки поблизу містечка Перемишляни Львівської області. У 1934 – 1936 рр. навчався в польській гімназії у Перемишлянах, потім – у Львівській українській гімназії, а згодом – у Львівському ліцеї. Захоплення фізикою і математикою почалося ще в перших класах Перемишлянської гімназії. Тому природнім був вступ у 1939 р. на фізико-математичний факультет Львівського університету, серед професорів якого було багато тих, із ким Остап Степанович був знайомий ще по ліцею, зокрема, Зенон Храпливий, Володимир Левицький, Йосип Коба та ін. Але були й нові імена – світила європейскої та світової науки – С.Банах, А.Мазур, Г.Штейнгауз. На факультеті тоді працював науковий семінар, яким керував Стефан Банах. Молодий студент намагався не пропустити жодного засідання, він із захопленням слухав доповіді про найсучасніші проблеми математики. Пам'ять про цю романтичну пору, про атмосферу високої творчості залишилася у Остапа Степановича на все життя. На жаль, навчання в університеті було перервано – у 1941 р. Львів окупували німці і закрили університет. Лише у 1942 р. було дозволено викладання у Політехнічному інституті з технічних дисциплін. Парасюк О.С. відвідував ці курси, але рівень викладання був не таким високим, як в університеті. Талановитий юнак почав учитися самостійно. Саме тоді він знайомиться з основами квантової механіки та електродинаміки.

У 1944 році радянські війська вступили до Львова, Остапа Степановича, як і інших місцевих юнаків, мобілізували до війська. Він воював у складі 4-го Українського фронту, День Перемоги зустрів під Прагою.

Після демобілізації у грудні 1945 року він поновився у Львівському університеті, який закінчив екстерном у 1947.

У 1947 – 1949 рр. Остап Степанович – аспірант нещодавно відкритого у Львові відділення Інституту математики АН УРСР, де займається проблемами технічної механіки. У вересні 1949 р. він захищає кандидатську дисертацію на тему: "Пластичні зони при концентрації напруження навколо отворів" (керівник – академік Г.М.Савін). У 1949 – 1951 рр. О.С. Парасюк – старший науковий співробітник відділу теорії пружності відділення Інституту математики у Львові, одночасно – викладач Львівського університету. У 1951 р. у зв'язку з організацією Львівського філіалу АН УРСР О.С.Парасюка призначають заступником директора новоствореного Інституту машинознавства та автоматики, він бере активну участь в організації роботи Інституту, але при цьому не полишає високу науку – вивчає квантову електродинаміку, знайомиться з працями М.М.Боголюбова, зокрема, з тими, в яких той намагається осмислити проблему розбіжностей квантової теорії поля з математичної точки зору.

За рекомендацією Б.Д.Делоне талановитий науковець отримав запрошення в докторантуру Математичного інституту ім. В.А.Стєклова. У січні 1953 р. щаслива доля зводить Остапа Степановича з М.М.Боголюбовим – у перший день його перебування у Москві в кабінеті директора Математичного інституту ім. В.А.Стєклова відбулося знайомство з Миколою Миколайовичем. Починаючи з 1953 р., Остап Степанович під керівництвом академіка М.М. Боголюбова працює над проблемою усунення розбіжностей у квантовій теорії поля, публікує у співавторстві з ним праці, які вже сьогодні вважаються класичними (О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функцій, ДАН СССР, 1955, т. 100, № 3; О вычитательном формализме при умножении причинных функцій, Изв. АН СССР. Сер. мат., 1956, т. 20, №5; Об аналитическом продолжении обобщенных функцій, ДАН СССР, 1956, т. 109, №4; Об умножении причинных функций в квантовой теории поля (нім. мовою), Acta Math., 1957, т. 97, №. 3/4. Побудована ними так звана віднімальна процедура відома нині як *R*-операція Боголюбова – Парасюка.

У травні 1955 р. О.С.Парасюк захищає докторську дисертацію "Теорія множення польових операторів", а невдовзі його переводять до Києва в Інститут математики, де з 1956 р. працює у відділі математичної фізики; з 1963 р. – завідувачем відділу теоретичної фізики, згодом – заступником директора Інституту математики. У 1966 р. Остап Степанович брав безпосередню участь у створенні нової академічної установи – Інституту теоретичної фізики АН УРСР, де очолював відділ математичних методів у теоретичній фізиці і працював до останніх днів свого життя. О.С.Парасюк виконував значну науково-організаційну роботу – він був членом Президії АН УРСР, академіком-секретарем Відділення фізики і астрономії.

У 1956 р. почалася науково-педагогічна діяльність Остапа Степановича у Київському державному університеті ім. Т.Г.Шевченка – він працював (за сумісництвом) на механіко-математичному факультеті професором кафедри математичної фізики, з 1957 до 1960 року – завідувачем кафедри математичного аналізу, викладав курси математичного і функціонального аналізу, спеціальні курси з теорії динамічних систем, топології, квантової теорії поля, теорії узагальнених функцій та ін. Згодом, з 1965 до 1973 року читав лекції з квантової теорії поля та теорії елементарних частинок на фізичному факультеті на організованій ним кафедрі квантової теорії поля.

Академік О.С.Парасюк – яскравий представник школи М.М. Боголюбова з сучасної математичної фізики і сам є засновником наукової школи з математичної та теоретичної фізики в Україні, він був незаперечним лідером у цій галузі науки. Його наукові досягнення отримали світове визнання і відіграють істотну роль у розвитку сучасних фізико-математичних досліджень в Україні, наукові надбання Остапа Степановича не старіють. Під керівництвом О.С.Парасюка в Києві з 1957 р. почав працювати науковий семінар з математичних проблем теоретичної фізики, який став великою школою для багатьох українських фізиків-теоретиків. Серед учнів О.С.Парасюка чимало всесвітньовідомих вчених – академік НАН України Д.Я.Петрина, член-кореспондент НАН України В.І.Фущич, доктори фізико-математичних наук В.П.Гачок, А.У.Клімик, В.А.Яцун.

Як відомо, місію розвитку найкращих традицій в науці і, мабуть, найголовніше, збереження і піднесення честі науковця бере на себе насамперед порівняно невелика група найавторитетніших вчених, чиє життя і творчість можуть бути взірцем для тих, хто вирішив присвятити себе науці. Безумовно, Остап Степанович відносився до когорти саме таких вчених – Вчених з великої літери.

А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, В. І. Герасименко, П. І. Голод, В. Г. Самойленко

ВІЛЬГЕЛЬМ ІЛЛІЧ ФУЩИЧ
(18.12.1936 – 07.04.1997)

18 грудня 2011 року виповнюється 75 років з дня народження Вільгельма Ілліча Фущича – видатного вченого, засновника української школи групового аналізу. Доля розпорядилась так, що цей талановитий математик прожив лише шістдесят років, але за своє відносно коротке життя він встиг зробити у науці досить багато. Досить згадати про дев'ять монографій та майже 350 наукових праць, і великий загін його учнів, які плідно працюють в університетах та науково-дослідницьких установах України і багатьох інших держав.

В.І. Фущич народився 18 грудня 1936 року в селі Сільце Закарпатської області. Дитинство його припало на роки, що були дуже важкими для нашої країни і особливо для Закарпаття, яке було об'єктом зазіхань відразу кількох держав і неодноразово переходило з одних рук у інші. Легко уявити, як непросто було в таких умовах дістати якісну середню освіту, а згодом поступити до університету та аспірантури, і кінець-кінцем – досягти вершин світової науки. Але, мабуть, правдою є те, що справжній талант здатний прокласти собі дорогу за будь-яких умов, і життя та творчість Вільгельма Ілліча є прекрасним прикладом цього.

Після закінчення середньої школи у м. Іршаві в 1953 р. В.І. Фущич поступив до Ужгородського державного університету на фізико-математичний факультет, після закінчення якого у 1958–1960 рр. викладав на кафедрі теоретичної фізики Ужгородського університету, де зробив свої перші наукові кроки під керівництвом Ю.М.Ломсадзе. У 1960–1963 рр. В.І. Фущич навчався в аспірантурі Інституту математики (науковий керівник – академік Остап Степанович Парасюк). Після закінчення аспірантури з листопада 1963 р. працював молодшим, а з січня 1965 р. – старшим науковим співробітником Інституту математики АН України. У лютому 1964 р. захистив кандидатську дисертацію на тему "Аналітичні властивості амплітуд народження як функції переданого імпульсу", а у квітні 1971 р. – докторську дисертацію на тему "Теоретико-групові основи узагальненої релятивістської квантової механіки і *P*-, *T*-, *C*-перетворення". Звання професора йому присуджено у 1980 р., а у 1987 р. обрано членом-кореспондентом НАН України. У 2001 р. В.І. Фущичу (посмертно) присуджено Державну премію України в галузі науки і техніки.

Наукові інтереси Вільгельма Ілліча стосувалися квантової механіки, квантової теорії поля, зображення груп і алгебр Лі, підгрупової структури груп Лі та інш. Але основна тема його праць – це дослідження симетрій рівнянь математичної фізики. Він створив і виплекав наукову школу симетрійного аналізу в Україні, виховав потужну когорту науковців та педагогів, які плідно працюють у наукових і вищих учбових закладах України та багатьох інших країн. Серед його учнів десять докторів та більш як 50 кандидатів наук – результат, яким би могли пишатися цілі інститути. П'ять учнів В.І. Фущича викладають у Польщі, три працюють в Америці, не ображені і деякі інші держави. Але більшість з його учнів працює в Україні.

Протягом багатьох років В.І. Фущич читав спеціальні курси у Київському університеті ім. Тараса Шевченка та Національному педагогічному університеті ім. Михайла Драгоманова. Потрібно відзначити особливу рису викладання Вільгельма Ілліча – на його заняттях рівною мірою працювали і викладач, і студент. Інколи Вільгельм Ілліч сам читав лекції, але в більшості випадків студенти готували доповіді на запропоновані ним теми, а Вільгельм Ілліч, як Майстер ставив необхідні акценти та давав необхідні пояснення. Саме через таке викладання В.І. Фущич діставав можливість оцінити здібності студентів і запросити кращих з них до аспірантури. Зазвичай таке запрошення ставало початком плідної співпраці, яка відкривала молодій людині шлях до великої науки.

У 1994 р. Вільгельм Ілліч заснував міжнародний часопис "Journal of Nonlinear Mathematical Physics", який швидко став відомим серед фахівців. Це був перший англомовний математичний журнал в Україні. Зараз цей журнал видається закордоном.

У 1995 році В.І. Фущич започаткував серію міжнародних наукових конференцій "Симетрія в нелінійній математичній фізиці". Ці конференції стали регулярними, проводились у Києві кожні два роки з 1995 по 2009 рр. Вони набули великої популярності і збирали сотні учасників, загалом більше ніж з 50 країн.

Вільгельм Ілліч отримав багато яскравих наукових результатів. Зважаючи на кількість його публікацій немає технічної можливості проаналізувати їх в цій коротенькій статі. Але, щоб зрозуміти вагомість його внеску у світову науку, досить лише згадати концепцію умовної симетрії, яка стала базою для відкриття принципово нових можливостей інтегрування багатовимірних нелінійних диференціальних рівнянь і систем, та неліївський підхід до дослідження симетрії багатовимірних нелінійних диференціальних рівнянь.

Зусиллями учнів В.І. Фущича створено інтернет-сторінку, присвячену пам'яті Вільгельма Ілліча, де можна знайти його розширену біографію, список та електронні версії робіт, а також численні фотографії. У видавництві "Наукова думка" НАН України опубліковані вибрані праці вченого (Фущич В.І. Вибрані праці // Під ред. В.М.Бойка, М.Л.Горбачука, І.О.Луковського, А.Г.Нікітіна, Р.О.Поповича, А.М.Самойленка. – Київ: Наук. думка, 2005. – 448 с.)

В. М. Бойко, А. Г. Нікітін, В. Г. Самойленко

МИХАЙЛО ЙОСИПОВИЧ ЯДРЕНКО
(16.04.1932 – 28.09.2004)

Ядренко Михайло Йосипович, член-кореспондент Національної Академії Наук України (з 1990 року), завідувач кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету Національного університету імені Тараса Шевченка (з 1964 по 1998 роки) – видатний український математик.

Коло інтересів Михайла Йосиповича Ядренка було надзвичайно широким. Міжнародній науковій спільноті він був відомий як визначний вчений, один із засновників теорії випадкових полів. Михайло Йосипович мав унікальні здібності викладача, педагога, і вченого, які притягували до нього талановиту молодь. Для студентів та аспірантів він був неперевершеним учителем, а його лекції – зразком того, як треба пояснювати, доводити, будувати навчальний курс. Школярі, що цікавились математикою, також слухали лекції Михайла Йосиповича – по телебаченню, на математичних гуртках, читали його популярні статті, знали як організатора шкільних олімпіад з математики. Він вів величезну організаційну роботу – завідував кафедрою у Київському університеті імені Тараса Шевченка, був віце-президентом Українського математичного товариства, членом бюро відділення математики Національної академії наук та інших незчисленних рад, редколегій, комітетів.

Всі, хто спілкувався та співпрацював з Михайлом Йосиповичем, мав з ним справи, бачили одну і ту ж доброзичливу, щиру, глибоко порядну людину. Його життєва мудрість допомагала поєднувати людей з різними знаннями, характерами, світоглядами, створювати потужне силове поле, в якому вирувало наукове життя. Київська математична школа з теорії ймовірностей та її багатьох застосувань, започаткована Б.В.Гнеденком, завдяки Михайлу Йосиповичу збагатилась талановитими вченими, безпосередніми учнями Михайла Йосиповичами і не тільки. Серед них: Ю. В. Козаченко, В. Л. Гірко, Ю. Д. Попов, В. В. Анісімов, Д. С. Сільвестров, М. М. Леоненко, М. П. Моклячук, Н. М. Зінченко, О. І. Кльосов, А. Б. Качинський та багато інших. Можна без перебільшення стверджувати, що ентузіазм Михайла Йосиповича у підготовці наукових кадрів був вирішальний для розвитку ймовірнісної наукової школи.

Михайло Йосипович народився 16 квітня 1932 року у селі Дрімайлівка Ніжинського району Чернігівської області. Середню школу закінчив у Чернігові, з золотою медаллю. У 1950-1955 роках, навчаючись на механіко-математичному факультеті Київського університету, захопився теорією ймовірностей. Опублікував першу наукову роботу, присвячену властивостям випадкових блукань. Своїми вчителями Михайло Йосипович завжди називав Бориса Володимировича Гнєденка та Йосипа Ілліча Гіхмана.

У 1955-1958 роках, в аспірантурі Київського університету, Михайло Йосипович починає вивчення нової на той час області теорії ймовірностей – вивчає поведінку випадкових функцій багатьох змінних, тобто випадкових полів. Його кандидатська дисертація присвячена теорії однорідних та ізотропних полів.

Закінчивши аспірантуру, Михайло Йосипович починає працювати на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Київського університету. Багато сил та енергії він віддає розвитку шкільної математичної освіти, організації математичних олімпіад для школярів, виданню навчальних посібників з елементарної математики та комбінаторики, збірників олімпіадних задач.

У цей час на механіко-математичному факультеті створюється кафедра теорії ймовірності та математичної статистики. Після від'їзду до Донецька її засновника та першого завідувача Й.І. Гіхмана, завідувачем кафедри став Михайло Йосипович. Більше тридцяти трьох років під його керівництвом на кафедрі проводяться дослідження в галузі теорії випадкових полів, асимптотичних методів теорії ймовірностей, теорії стохастичних диференціальних рівнянь, прикладних ймовірнісних та статистичних задач.

Завдяки ініціативі Михайла Йосиповича з 1970 року почав виходити науковий журнал "Теорія ймовірностей та математична статистика". Це видання відіграло значну роль у розвитку Київської школи теорії ймовірностей. З 1974 року Американське математичне товариство друкує повний його переклад англійською мовою. У 1968 році Михайло Йосипович також засновує видання періодичного науково-популярного збірника "У світі математики". З 1995 року цей збірник перетворюється на науково-популярний, методичний та історико-математичний журнал для всіх шанувальників математики – від школяра до професора. Незмінним головним редактором цього журналу з 1970 року був Михайло Йосипович.

Наукова спадщина Михайла Йосиповича складає більше 200 публікацій. Особливо треба відзначити його монографію "Спектральна теорія випадкових полів" (1980), яка стала настільною книгою спеціалістів з теорії ймовірностей та математичної статистики. Її англійський переклад видруковано у США.

Разом з А.М.Ягломом, М.Й.Ядренко є засновником спектральної теорії випадкових полів. Ця теорія дозволяє зображати випадкові поля, кореляційні функції яких є інваріантними відносно деяких груп перетворень, у вигляді рядів або стохастичних інтегралів за випадковими мірами з ортогональними значеннями. Вона тісно пов'язана з теорією зображень груп, теорією ортогональних функцій, теорією додатньо-визначених ядер. Михайло Йосипович побудував спектральну теорію для однорідних та ізотропних полів у евклідовому та гільбертовому просторах, на сфері, а також у просторі Лобачевського. Ці роботи мають важливі застосування у фізиці та статистиці.

У 1958-1960 роках Михайло Йосипович розпочав вивчення полів, що є узагальненням одновимірних процесів Маркова. З його робіт, зокрема, випливає "виродженість" класу звичайних однорідних ізотропних марковських полів (усі такі поля є насправді випадковими константами). Ці результати отримали великий науковий резонанс і привели до створення нового напрямку, пов'язаного з узагальненням поняття марковського поля.

Михайло Йосипович отримав ряд визначних результатів про локальні властивості вибіркових функцій випадкових полів – неперервність, аналітичність, квазіаналітичність. Він встановив ряд необхідних і достатніх умов абсолютної неперервності та сингулярності мір, породжених гауссовими випадковими полями.

Створена Михайлом Йосиповичем спектральна теорія дозволила йому та його учням розробити ефективні методи розв'язку задач статистики випадкових полів – екстраполяції, фільтрації, інтерполяції та оцінки коефіцієнтів регресії.

Питання застосувань теорії ймовірностей також знаходились у колі інтересів Михайла Йосиповича. Варто відмітити його дослідження в галузях контролю якості продукції та оптимальних методів профілактики, статистичного моделювання шумів у надпровідниках, аналізу датчиків випадкових чисел, теорії надійності, статистичного моделювання розподілів з випадковою інтенсивністю.

За роботи з теорії випадкових полів Михайлу Йосиповичу були присуджені премія НАН України імені академіка М.М.Крилова (1993) та Державна премія України (2004). У 1990 році він був обраний членом-кореспондентом Національної академії наук України.

Михайло Йосипович був чудовим педагогом. Його навчальні курси були еталоном математичної чіткості, послідовності, прозорості і, в той же час, глибини викладу. Значна частина відомих українських математиків познайомилась з теорією ймовірностей та математичною статистикою на лекціях Михайла Йосиповича. Один з кращих підручників з основ теорії ймовірностей та математичної статистики написаний М.Й.Ядренком у співавторстві з Й.І.Гіхманом та А.В.Скороходом (1979). Унікальний збірник задач з теорії ймовірностей, створений ним разом з А.В.Скороходом, А.Я.Дороговцевим та Д.С.Сильвестровим (1976), був перекладений англійською мовою і виданий у США у 1997 році.

Михайло Йосипович завжди радів успіхам своїх учнів, створював умови для їх наукових досягнень. Багатьом розмова з ним допомагала краще зрозуміти власні результати, відкривала нові горизонти для досліджень. Під керівництвом Михайла Йосиповича захистили дисертації 44 кандидати фізико-математичних наук, з яких 11 стали докторами фізико-математичних наук. Учні М.Й.Ядренка продовжують його дослідження в галузі прогнозування, інтерполяції та екстраполяції випадкових полів (Ю.Д. Попов, М.П. Моклячук), займаються дослідженням випадкових процесів та полів у просторах Орліча (Ю.В. Козаченко) та на банахових гратках (І.К. Мацак), вивченням марковських та напівмарковських процесів (В.В. Анісімов, Д.С. Сильвестров), дослідженням асимптотичної поведінки функціоналів від випадкових полів (М.М. Леоненко, Н.М. Зінченко), розвитком теорії випадкових матриць та операторів (В.Л.Гірко), теорією кратних сум випадкових величин (О.І.Кльосов), статистикою випадкових полів (М.М.Леоненко, В.В.Анісімов, А.Г.Наконечний), застосуванням теорії випадкових полів у геології, геохімії, екології (А.Б. Качинський)

У 90-ті роки минулого століття зміни економічного ладу в країні викликали потребу у фахівцях нових спеціальностей – фінансової та актуарної (страхової) математики. У 1995 році Михайло Йосипович вперше в Україні почав читати лекції з актуарної математики і теорії ризику у страхуванні. Разом із своїми учнями він опублікував перший навчальний посібник українською мовою з економетрики, фінансової та страхової математики. Створення системи підготовки фахівців з цих дисциплін у рамках навчальної спеціальності "статистика" було метою міжнародного проекту під керівництвом Михайла Йосиповича, який здійснювався у 1997-2001 роках у рамках програми TEMPUS-TACIS Європейського Союзу.

Неможливо перелічити всі громадські обов'язки, які брав на себе Михайло Йосипович. Він був одним з двох головних редакторів журналу "Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика", заступником головного редактора журналу "Теорія ймовірностей та математична статистика", членом редколегії журналу "Random Operators and Stochastic Equations". М.Й. Ядренко мав звання Заслуженого діяча науки та техніки України, був нагороджений орденом "За заслуги" III ступеня та багатьма медалями.

Працювати з школярами, розшукувати і підтримувати талановиту молодь, було для М.Й. Ядренка душевною потребою. Більше 40 років він займався організацією шкільних математичних олімпіад різних рівнів, математичних гуртків для школярів і студентів. З 1970 року він очолював журі Всеукраїнських олімпіад для школярів. Він організував також заочну фізико-математичну олімпіаду журналу "У світі математики".

Але насамперед М. Й. Ядренко завжди залишався зразком професора, інтелігента "старої закалки". Його коло інтересів не обмежувалось лише математикою, він добре знав літературу, цікавився політичним життям, з ним можна було поговорити про нові книги, історію України, події в суспільному житті. Михайло Йосипович пам'ятав величезну кількість історій, фактів про відомих математиків, визначних громадських діячів. Навіть в транспорті він не втрачав часу даремно – читав, робив помітки. Перед початком лекцій завжди заходив на кафедру з найсвіжішими газетами, які пропонував колегам переглянути доки він читатиме лекцію. Мов чарівник діставав зі свого роздутого портфеля щось цікаве з математики (новий закордонний журнал, ксерокопію статті з новою тематикою, щойно надруковану й подаровану колегами книгу) або новий популярний журнал чи художню книгу.

Минають роки, змінюється склад кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, та назавжди залишиться неперевершеним вклад у розбудову математичної школи з теорії ймовірностей в Київському університеті зокрема і в Україні загалом, що був реалізований відданим патріотом України, професором Михайлом Йосиповичем Ядренком.

В. С. Королюк, О. К. Закусило, М. Ф. Городній, Г. С. Багро, О. Д. Борисенко, О. І. Василик, М. В. Карташов, Ю. В. Козаченко, О. О. Курченко, Т. М. Лапіда, Р. Є. Майборода, Ю. С. Мішура, М. П. Моклячук, А. Я. Оленко, О. І. Пономаренко, Л. М. Сахно, Г. М. Шевченко, Р. Є. Ямненко, Т. О. Яневич, В. А. Вишенський, Г. Л. Кулініч, В. І. Михайловський, В. М. Радченко

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ
для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі – "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows.** Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

– текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;

– поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.

– комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
- шрифт статті – Arial, розмір 9;
- інтервал між рядками – одинарний;
- перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
- відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;

– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
- індекс УДК (для природничих факультетів), (Arial, 8 pt, Bold);
- перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
- назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання…", "Деякі питання…", "Проблеми…", Шляхи…" тощо), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
- анотація (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок ..."отримано задовільні результати …"); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
- основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
- список літератури (Arial, 7 pt, звичайний);
- дата надходження до редколегії, наприклад, " **Надійшла до редколегії 09.11.05** ". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняти по правому краю).

Додаткові вимоги до тексту статті:

– кожну абревіатуру слід уводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абревіатурою;

– джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

– *усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;*

– не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;

– на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;

– усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);

– усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;

– формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:				**Define Size:**		
Text	Times New Roman			Full	**9** pt	
Function	Times New Roman			Subscript/Superscript	**7** pt	
Variable	Times New Roman	italic		Sub-Subscript/Superscript	**6** pt	
L.C.Greek	Symbol			Symbol	**14** pt	
UC.Greek	Symbol			Sub-Symbol	9 pt	
Vector-matrix	Times New Roman	bold				
Number	Times New Roman					

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською. Згідно із наказом Держспоживстандарту України від 10.11.06 № 3232 **при складанні списку літератури необхідно застосовувати національний стандарт, ідентичний ГОСТ 7.1.–2003** "Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання". Не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок.

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

– подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
– подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
– подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
– затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows ***ФАЙЛ>СВОЙСТВА***, обрати закладку ***ДОКУМЕНТ*** та заповнити поля ***Название, Автор***. У полі ***Заметки*** занести ім'я, прізвище, поштова адреса та контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск 28

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

Формат 60х84$^{1/8}$. Ум. друк. арк. 7,5. Наклад 300. Зам. № 212-6195.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М 2.
Підписано до друку 17.09.12

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02