

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Суцанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 10.10.11 (протокол № 2)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, 6-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 3172, 239 3222; факс 239 3128

ЗМІСТ

М. Андросенко, О. Кашпіровський Про обмежені розв'язки нескінченної симметричної п'ятидіагональної системи рзницевих рівнянь	4
О. Харитонов Урахування обмеженості тяги при оптимізації міжпланетних перельотів з комбінуванням ділянок великої та малої тяги	7
А. Громик, І. Конет Інтегральні зображення розв'язків початково-крайових задач теплопровідності в обмежених багатозарових просторових середовищах	13
Е. Азізбаєв, Я. Мегралієв Нелокальна за часом крайова задача для рівнянь руху однорідної балки.....	20
М. Серов, Н. Ічанська Оператори Q-умовної інваріантності нелінійних рівнянь теплопровідності.....	24
В. Богданов, Г.ТСулим, Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского деформованого стану	29
О. Дехтяр Врахування обмеженості тяги при оптимізації маневрів космічних апаратів з ядерними двигунами великої потужності	35
В. Каліон, О. Дідківська Рух тривісного еліпсоїда в капілярі, що заповнений в'язкою рідиною.....	41
О. Меліхов Вплив змінної в радіальному напрямку товщини на напружений стан гнучкої ортотропної кільцевої пластини в магнітному полі	47
Ю. Токовий, <u>В. Мелешко</u> Функції напружень тривимірної задачі теорії пружності для суцільного скінченного циліндра	50
Н. Гук, Н. Ободан Про відновлення змінної жорсткості спостережуваної оболонки	55
Мосеєнков Борис Ілліч (18.02.1922 – 26.08.2011)	59
Мелешко В'ячеслав Володимирович (07.10.1951 – 14.11.2011)	60
П'ятецький Василь Олександрович (20.09.1941 – 19.02.2012)	61

CONTENTS

M. Androsenko, O. Kashpirovskij On bounded solutions of infinite summetric five-diagonal system of difference equations	4
O. Kharytonov The effect of engine thrust limitation on the optimization of interplanetary transfers with combination of high- and low-thrust arcs	7
A. Gromyk, I. Konet Integral presentation of initial boundary problems solutions of heat conductivity in the limited multi-layer space areas.....	13
E. Azizbayov, Y. Mehraliyev A Time-nonlocal boundary value problem for equation of homogeneous bar motion	20
M. Serov, N. Ichans'ka Operators Q-conditional symmetry of the nonlinear heat equations	24
V. Bogdanov, G. Sulym The crack growing in compact specimen by plastic-elastic model of planar deformation state	29
O. Dekhtiar A finite-thrust approach to optimization of manoeuvres of space vehicles equipped with high-thrust nuclear thermal propulsion	35
V. Kalion, O. Didkivska. The three-axial ellipsoid motions through a capillary filling the viscous liquid	41
O. Melikhov Affection of changing thickness in radial direction on stressed state of flexible ortotropic ring in magnetic field	47
Yu. Tokovyy, <u>V. Meleshko</u> Stress-functions of the three-dimensional elasticity problem for a solid elastic cylinder of finite length	50
N. Guk, N. Obodan About identification of variable stiffness of the observed shell	55
Borys Illich Moseenkov (18.02.1922 – 26.08.2011)	59
Viatcheslav Volodymyrovich Meleshko (07.10.1951 – 14.11.2011)	60
Vasyl Oleksandrovych Pyatets'kyj (20.09.1941 – 19.02.2012)	61

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕСКІНЧЕННОЇ СИМЕТРИЧНОЇ П'ЯТИДІАГОНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для нескінченної системи різницевих рівнянь $U_{k-2} + U_{k+a} - a(U_{k-1} + U_{k+1}) + \lambda U_k = f_k, k \in Z$ визначено умови для параметрів $a \in R$ та $\lambda \in C$, при яких ця система має єдиний обмежений розв'язок $\{U_k, k \in Z\}$ при довільній обмеженій послідовності $\{f_k, k \in Z\}$. Отримано явне зображення для обмеженого розв'язку. Одержані результати проілюстровано прикладами з теорії сплайнів.

The conditions for parameters $a \in R$ and $\lambda \in C$ are obtained for infinite system of difference equations $U_{k-2} + U_{k+a} - a(U_{k-1} + U_{k+1}) + \lambda U_k = f_k, k \in Z$ upon which the system has unique bound solution $\{U_k, k \in Z\}$ on every bounded sequence $\{f_k, k \in Z\}$. Explicit representations of the solutions are obtained. Results are illustrated with examples from spline theory.

1. Вступ

Розглядається нескінченна симетрична п'ятидіагональна система різницевих рівнянь

$$u_{k-2} + u_{k+2} - a(u_{k-1} + u_{k+1}) + \lambda u_k = f_k, \tag{1}$$

де $k \in Z, a \in R, \lambda \in C$ задані числові параметри, $\{f_k, k \in Z\} = F$ – задана обмежена послідовність комплексних чисел, тобто послідовність із простору $l_\infty(Z)$ з нормою $\|F\|_{l_\infty(Z)} = \sup_{k \in Z} |f_k|, U = \{u_k, k \in Z\}$ – невідома послідовність із $l_\infty(Z)$.

Для зручності система (1) записується у вигляді операторно-різницевого рівняння у просторі $l_\infty(Z)$

$$LU = F, \tag{2}$$

де $L = L(a, \lambda) = (T^{-2} + T^2) - a(T^{-1} + T) + \lambda I, I$ – одиничний оператор в $l_\infty(Z), IU = U, T$ – оператор зсуву координат вектора $u \in l_\infty(Z)$ на одну позицію праворуч. Отже, на одиничних векторах $E_j \in l_\infty(Z), j \in Z$, у яких j -а координата дорівнює 1, а решта координат нульові, дія оператора T та його степенів визначається формулою

$$TE_k = E_{k+1}, T^m E_k = E_{k+m}, k, m \in Z.$$

Метою цієї роботи є знаходження умов на параметри a і λ , при яких система (1) має єдиний обмежений розв'язок U при довільній обмеженій послідовності F , та дослідження зображення обмеженого розв'язку системи (1). Раніше подібні питання для нескінченних стаціонарних систем різницевих рівнянь досліджувалися в працях Дороговцева А.Я. [1], Городнього М.Ф. [2].

2. Основна частина

Умови існування та єдиності обмеженого розв'язку системи (1) дає наступна теорема.

Теорема 1. Для того, щоб система різницевих рівнянь (1) із параметрами $a \in R, \lambda \in C$ мала єдиний обмежений розв'язок U при довільній обмеженій послідовності F необхідно і достатньо, щоб точка $(a, \lambda) \in R \times C$ не належала множині

$$M = \{(a, \lambda : a \in R, \lambda \in R, \lambda_1(a) \leq \lambda \leq \lambda_2(a))\},$$

$$\text{де } \lambda_1(a) = -2(|a| + 1), \quad \lambda_2(a) = \begin{cases} 2 + \frac{a^2}{4}, & \text{якщо } |a| \leq 4, \\ 2(|a| - 1), & \text{якщо } |a| \geq 4 \end{cases}.$$

Зауваження. При довільному фіксованому параметрі $a \in R$ система (1) має єдиний обмежений розв'язок U для всіх значень параметра $\lambda \in C$, окрім тих, що належать проміжку $[\lambda_1(a), \lambda_2(a)]$. Зазначимо, що при $a = 0$ система (1) еквівалентна сукупності двох незалежних трьохдіагональних систем, в яких u_k та f_k , в яких $k \in Z$ є відповідно парним чи непарним. Зауважимо також, що з теореми 1 випливає одержана М.Ф.Городнім [2] умова $\lambda \notin [-2, 2]$ для існування та єдиності обмеженого розв'язку трьохдіагональної системи різницевих рівнянь $u_{k-1} + \lambda u_k + u_{k+1} = f_k$.

Доведення. Внаслідок [2] існування та єдиність обмежених розв'язків системи (1) еквівалентна відсутності у характеристичного рівняння

$$z^2 - az^{-1} + \lambda - az + z^{-2} = 0 \tag{3}$$

коренів з модулем рівним 1. З'ясуємо при яких $a \in R$ та $\lambda \in C$ характеристичне рівняння (3) має хоча б один корінь з модулем рівним одиниці.

Заміною

$$\omega = z + z^{-1} \tag{4}$$

рівняння (3) зведемо до квадратного рівняння

$$\omega^2 - a\omega + \lambda - 2 = 0. \tag{5}$$

Враховуючи властивості функції Жуковського $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1}) = \frac{1}{2}\omega$ [4, с. 28], одержимо, що рівняння (3) матиме хоча б один корінь з модулем рівним 1 тоді і тільки тоді, коли рівняння (5) має корінь з проміжку $[-2, 2]$. Із рівняння (5) знаходимо вираз для λ :

$$\lambda = 2 - \omega^2 + a\omega. \quad (6)$$

Вважаючи a фіксованим дійсним числом, одержимо, що рівняння (3) матиме принаймні один корінь з модулем рівним 1 тоді і тільки тоді, коли параметр λ має зображення (6), в якому величина ω пробігає проміжок $[-2, 2]$. Отже, такі значення λ задовольняють нерівності

$$\lambda_1(a) = \min_{\omega \in [-2, 2]} (2 - \omega^2 + a\omega) \leq \lambda \leq \max_{\omega \in [-2, 2]} (2 - \omega^2 + a\omega) = \lambda_2(a).$$

Теорему 1 доведено.

Зробимо кілька зауважень щодо коренів характеристичного рівняння (3).

1. З симетричності (3) відносно z та z^{-1} випливає, що рівняння (3) має дві пари взаємнозворотніх коренів.

2. При $\lambda = 2 + \frac{a^2}{4}$ рівняння (5), а отже і (3), мають кратні корені. Зокрема, при $a = \pm 4$ та $\lambda = 6$ рівняння (3) має відповідно корені $z = 1$, $z = -1$ кратності 4. Для решти значень $a \in \mathbb{R}$ та $\lambda = 2 + \frac{a^2}{4}$ рівняння (3) має два взаємно обернених корені кратності 2.

3. При $|a| \leq 4$ тричлен $-\omega^2 + a\omega + 2$ не є монотонним на $[-2, 2]$. Тому при $|a| \leq 4$ та $2(|a| - 1) \leq \lambda \leq 2 + \frac{a^2}{4}$ всі чотири корені (3) мають модуль рівний 1. Для решти значень параметрів a і λ з множини M рівняння (3) має два взаємно обернених корені з рівним 1 модулем, один корінь з модулем меншим 1 і обернений до нього корінь з модулем більшим 1.

4. Для значень параметрів $a \in \mathbb{R}$ та $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких рівняння (3) не має коренів з модулем рівним 1 позначимо через z_1 та z_2 корені рівняння (3) з модулями меншими 1. Тоді інші два корені рівняння (3) будуть відповідно дорівнювати z_1^{-1} та z_2^{-1} . При $\lambda = 2 + \frac{a^2}{4}$, $|a| > 4$ пари z_1, z_1^{-1} та z_2, z_2^{-1} будуть співпадати.

Розглянемо питання про зображення розв'язків системи (1), коли $(a, \lambda) \notin M$. Для цього спочатку знайдемо зображення розв'язку системи (1) для випадку, коли правою частиною є одиничний вектор E_0 :

$$L(a, \lambda)G = E_0. \quad (7)$$

Теорема 2. Для довільного фіксованого $a \in \mathbb{R}$ та всіх $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [\lambda_1(a), \lambda_2(a)]$ обмежений розв'язок $G = \{g_k, k \in \mathbb{Z}\}$

системи (7) допускає зображення координат $g_k = \begin{cases} c_1 z_1^{|k|} + c_2 z_2^{|k|}, & \text{якщо } z_1 \neq z_2, \\ (c_1 + |k|c_2) z_1^{|k|}, & \text{якщо } z_1 = z_2 \end{cases}$, де c_1, c_2 – деякі сталі, що залежать від a і λ .

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $z_1 \neq z_2$, тобто $\lambda \neq 2 + \frac{a^2}{4}$, $(a, \lambda) \notin M$. Оскільки за визначенням числа z_1 та z_2 мають модулі менше одиниці, та послідовність G , що фігурує в теоремі 2 є обмеженою для довільних констант c_1, c_2 . Крім того, враховуючи, що z_1, z_2 – корені характеристичного рівняння (3), члени послідовності G при довільних константах c_1, c_2 задовольняють всім однорідним рівнянням системи (7) з номерами $k \in \mathbb{Z}$ такими, що $|k| \geq 2$. Виберемо сталі c_1, c_2 так, щоб виконувалися рівняння системи (7) з номерами $k = 0$ та $k = \pm 1$.

Розглянемо рівняння системи (7) при

$$k = 0 : c_1(2z_1^2 - 2az_1 + \lambda) + c_2(2z_2^2 - 2az_2 + \lambda) = 1$$

та при $k = 1$:

$$c_1((z_1^3 + z_1) - a(z_1^2 + 1) + \lambda z_1) + c_2((z_2^3 + z_2) - a(z_2^2 + 1) + \lambda z_2) = 0.$$

Зауважимо, що при $k = -1$ внаслідок симетрії системи (7) одержується таке саме рівняння як і при $k = 1$.

З урахуванням характеристичного рівняння звідси для c_1 та c_2 одержимо систему рівнянь

$$c_1(z_1 - z_1^{-1}) + c_2(z_2 - z_2^{-1}) = 0, \quad c_1(z_1^2 - z_1^{-2}) + c_2(z_2^2 - z_2^{-2}) = 1,$$

з якої методом Крамера знаходимо $c_1 = (\omega_1 - \omega_2)^{-1} (z_1 - z_1^{-1})^{-1}$, $c_2 = -(\omega_1 - \omega_2)^{-1} (z_2 - z_2^{-1})^{-1}$.

Отже, для випадку $(a, \lambda) \notin M$ та $z_1 \neq z_2$ маємо

$$g_k = g_k(z_1, z_2) = \frac{\frac{z_2^{|k|}}{z_2 - z_2^{-1}} - \frac{z_1^{|k|}}{z_1 - z_1^{-1}}}{(z_2 + z_2^{-1}) - (z_1 + z_1^{-1})} = -\frac{\frac{z_2^{|k|+1}}{1 - z_2^2} - \frac{z_1^{|k|+1}}{1 - z_1^2}}{(z_2 + z_2^{-1}) - (z_1 + z_1^{-1})}.$$

При $z_1 = z_2$ значення $g_k(z_1, z_1)$ визначимо як $\lim_{z_2 \rightarrow z_1} g_k(z_1, z_2)$. Оскільки при $z_2 \rightarrow z_1$ маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0} \right]$, то враховуючи очевидну аналітичність $g_k(z_1, z_2)$ відносно параметрів $(a, \lambda) \notin M$, за правилом Лопітала одержимо

$$g_k(z_1, z_1) = \frac{\frac{d}{dz} \left(\frac{z^{|k|+1}}{1 - z^2} \right) \Big|_{z=z_1}}{\frac{d}{dz} (z + z^{-1}) \Big|_{z=z_1}} = \frac{z_1^2}{(1 - z_1^2)^2} \left(|k| + \frac{1 + z_1^2}{1 - z_1^2} \right) z_1^{|k|},$$

де $|a| > 4$, $\lambda = \frac{a^2}{4} - 2$.

Теорему 2 доведено.

Безпосередньою перевіркою можна встановити наступне твердження.

Теорема 3. Для $(a, \lambda) \notin M$ операторно-різницеve рівняння (2) при $F = \{f_k, k \in Z\} \in l_\infty(Z)$ має єдиний обмежений розв'язок U , який допускає зображення $U = \sum_{k \in Z} f_k T^k G$, тобто $U_n = \sum_{j \in Z} f_j g_{n-j}$, $n \in Z$.

З теореми 3 випливає, що функція $g(n, j) = g_{n-j}$ двох дискретних аргументів $n, j \in Z$ є дискретною функцією Гріна для рівняння (1) в $l_\infty(Z)$.

Розглянемо два приклади нескінчених симетричних п'ятидіагональних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які пов'язані з методами сплайн-функцій [3].

Приклад 1. Побудова інтерполяційного сплайна п'ятої степені. Нехай $f(x)$ – неперервна обмежена на R разом із своїми першими шістьма похідними функція, $F = \{f_k, k \in Z\}$ – послідовність значень функції $f(x)$ в точках $x_k = kh$, $h > 0$, $f_k = f(x_k)$, $k \in Z$. Відповідний інтерполяційний сплайн $S_5(f, x)$ шукаємо у вигляді розвинення в ряд

$$S_5(f, x) = \sum_{k \in Z} \alpha_k B_k^V(x) \tag{8}$$

за базисними В-сплайнами п'ятого степеня $B_k^V(x) = B^V((x - x_k)h^{-1})$, де $B^V(\tau)$ – стандартний В-сплайн п'ятого степеня, який є комбінацією зрізаних степеневих функцій [3]

$$B^V(\tau) = \frac{1}{120} \sum_{k=-2}^2 (-1)^k C_5^{k+2}(\tau - k)_+^5. \tag{9}$$

$$\text{Тут } (t - a)_+^\alpha = \begin{cases} (t - a)^\alpha, & \text{якщо } t > a, \\ 0, & \text{якщо } t \leq a, \end{cases} \quad a \in R, \alpha \geq 0.$$

Зауважимо, що розвинення (9) для $B^V(\tau)$ можна записати у більш компактній формі з трьома доданками

$$B^V(\tau) = \frac{1}{120} (3 - |\tau|)_+^5 - \frac{1}{20} (2 - |\tau|)_+^5 + \frac{1}{8} (1 - |\tau|)_+^5.$$

Враховуючи, що при $|\tau| \geq 3$ сплайн $B^V(\tau)$ обертається в нуль, то для кожного $x \in R$ ряд (8) містить не більше шести відмінних від нуля доданків, а при кожному $x = x_k, k \in Z$, таких доданків рівно п'ять. Запишемо умови інтерполяції функції $f(x)$ в точках $x_k, k \in Z$:

$$S_5(f, x_k) = f_k, \quad \alpha_{k-2} B_{k-2}^V(x_k) + \alpha_{k-1} B_{k-1}^V(x_k) + \alpha_k B_k^V(x_k) + \alpha_{k+1} B_{k+1}^V(x_k) + \alpha_{k+2} B_{k+2}^V(x_k) = f_k.$$

Оскільки для всіх $k \in Z$ маємо

$$B_{k-2}^V(x_k) = B_{k+2}^V(x_k) = B^V(2) = \frac{1}{120}, \quad B_{k-1}^V(x_k) = B_{k+1}^V(x_k) = B^V(1) = \frac{13}{60}, \quad B_k^V(x_k) = B^V(0) = \frac{11}{20},$$

то з умов інтерполяції одержимо

$$\frac{1}{120} \alpha_{k-2} + \frac{13}{60} \alpha_{k-1} + \frac{11}{20} \alpha_k + \frac{13}{60} \alpha_{k+1} + \frac{1}{120} \alpha_{k+2} = f_k, \tag{10}$$

$$\alpha_{k-2} + 26\alpha_{k-1} + 66\alpha_k + 26\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} = 120f_k, \quad k \in Z.$$

Оскільки за припущенням функція $f(z)$ обмежена, то і сплайн $S_5(f, x)$, що її інтерполює, і послідовність параметрів $\{\alpha_k, k \in Z\}$, що визначає сплайн $S_5(f, x)$ також мають бути обмеженими. Таким чином обмежений розв'язок сис-

теми (10) відповідає інтерполяційному сплайну $S_5(f, x)$. Система (10) є системою вигляду (1) із значеннями параметрів $a = -26$, $\lambda = 66$, які задовольняють умовам теореми 1. Характеристичне рівняння для системи (10) має вигляд $z^{-2} + z^2 + 26(z + z^{-1}) + 66 = 0$. Виконуючи підстановку (4), приходимо до квадратного рівняння $\omega^2 + 26\omega + 64 = 0$. Звідси знаходимо $\omega_{1,2} = -13 \pm \sqrt{105}$, $z_1 = -0,43\dots$, $z_2 = -0,042\dots$.

Отже, за теоремою 3 параметри $a_k, k \in Z$, сплайна $S_5(f, x)$ є комбінацією прогресій із знаменниками z_1 та z_2 .

Приклад 2. Задача згладжування експериментальних даних за допомогою кубічних сплайнів [3].

Нехай $\{y_k, k \in Z\}$ – послідовність вимірювань значень функції $f(x)$, де $f \in C^4(R)$ в точках $x_k = kh$, $h > 0$, $k \in Z$. Вважаємо, що у вимірюваннях y_k присутня похибка $y_k - f(x_k) = \varepsilon_k$. Розглядається задача побудови кубічного сплайна $S_3(x)$ "близького" до інтерполяційного, який повинен "виправити" похибки вимірювань. Такий сплайн називають згладжуючим. Для його визначення мінімізується квадратичний функціонал

$$J_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|^2 dx + \rho^{-1} \sum_{k \in Z} (f_k - y_k)^2,$$

що визначений на функціях $f(x)$ із простору Соболева $W_2^2(R)$, $f_k = f(x_k)$, $k \in Z$ [3]. Якщо параметр ρ прямує до нуля, то, очевидно, згладжуючий сплайн $S_3(x)$ буде прямувати до сплайна, що інтерполює у вузлах x_k значення y_k , $k \in Z$. На проміжку $[x_k, x_{k+1}]$, $k \in Z$, для згладжуючого сплайна розглядається розв'язок

$$S_3(x) = f_k(1-\tau) + f_{k+1}\tau + \frac{h^2}{6}\tau(1-\tau)((2-\tau)M_k + (1+\tau)M_{k+1}),$$

де $\tau = (x - x_k)h^{-1}$ – локальна координата, $M_k = S_3''(x_k)$, $k \in Z$. Значення f_k згладжуючого сплайна у вузлах x_k лінійно залежить від y_k та M_k : $f_k = y_k - \rho h^{-1}(M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1})$, $k \in Z$. У свою чергу величини M_k , $k \in Z$ задовольняють системі рівнянь типу (1):

$$M_{k+2} + M_{k-2} - (4-\alpha)(M_{k+1} + M_{k-1}) + (6+4\alpha)M_k = \rho^{-1}h(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}), \quad (11)$$

де $\alpha = \frac{1}{6}\rho^{-1}h^3 > 0$.

Перевіримо виконання умов теореми 1 для системи (10). Оскільки $a = 4 - \alpha$, $\lambda = 6 + 4\alpha$, то при $0 < \alpha \leq 8$ одержи-

$$\text{мо } \lambda - \lambda_2(a) = 6 + 4\alpha - \left(2 + \frac{1}{4}(4-\alpha)^2\right) = 6\alpha - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha}{4}(24 - \alpha) > 0.$$

Якщо $\alpha > 8$, то $|a| = \alpha - 4 > 0$, $\lambda - \lambda_2(a) = \lambda - 2(|a| - 1) = 4\alpha + 6 - 2(\alpha - 5) = 2\alpha + 16 > 32 > 0$.

Таким чином, за теоремою 1 для довільних додатних значень параметрів ρ і h система (11) має єдиний обмежений розв'язок $\{M_k, k \in Z\}$, що відповідає згладжуючому сплайну $S_3(x)$.

3. Висновки

Описано необхідні і достатні умови існування єдиного обмеженого розв'язку нескінченної симетричної п'ятидіагональної системи різницевих рівнянь. Знайдено зображення розв'язку такої системи за допомогою дискретної функції Гріна. Одержані теоретичні результати проілюстровано прикладами з теорії сплайнів.

1. Дороговцев А.Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк. –1992. – 319 с. 2. Городній М.Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора фіз.-мат. наук: спец. 01.01.02 "диференціальні рівняння". – Київ, 2004. – 32 с. 3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Надійшла до редколегії 25.06.11

УДК 629.7.015

О. Харитонов, канд. фіз.-мат. наук

УРАХУВАННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ ТЯГИ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ МІЖПЛАНЕТНИХ ПЕРЕЛЬОТІВ З КОМБІНУВАННЯМ ДІЛЯНОК ВЕЛИКОЇ ТА МАЛОЇ ТЯГИ

На прикладі задачі про виконання перельоту типу Гомана досліджено вплив обмеженості тяги на оптимальну траєкторію та оптимальні параметри рушійної системи космічного апарату з дворежимною ядерною енергосиловою установкою, здатною працювати в режимах великої та малої тяги. Розв'язки, отримані у припущенні обмеженості тяги, порівняно з розв'язками, справедливими для імпульсної апроксимації активних ділянок великої тяги.

The optimal Hohmann-type transfers of the space vehicle with bi-modal nuclear thermal propulsion are considered. The investigation of the effect of the engine thrust limitation on the optimal solution is investigated. The optimal combinations of high- and low-thrust arcs are analyzed for the models of finite and infinite engine thrust.

Вступ. Дана робота продовжує проведення в [4] дослідження ефективності комбінування великої та малої тяги при здійсненні міжпланетних перельотів. Як показано в [4] найбільші переваги від комбінування великої та малої тяги можна отримати при використанні дворежимних ядерних ракетних двигунів (ДЯРД). В той же час, дослідження

маневрів космічних апаратів (КА) з ядерними ракетними двигунами (ЯРД) або ДЯРД має виконуватися із застосуванням підходів, що відрізняються від прийнятих у механіці космічного польоту для розрахунку маневрів КА з двигунами великої тяги. Для КА з ЯРД і ДЯРД підхід імпульсної апроксимації активних ділянок, застосований в [4], буде забезпечувати меншу точність, ніж для КА з традиційними рідинними ракетними двигунами (РРД). Це пов'язано з тим, що двигуни ЯРД і ДЯРД мають набагато більшу питому масу, ніж двигуни РРД. Дійсно, за даними [8] питома маса ДЯРД типу ANERVA більша 20кг/кН, в той час як для типових маршових РРД, що використовуються для міжпланетних перельотів, цей параметр не перевищує 10кг/кН [1]. Тому тривалість активних ділянок великої тяги для перельотів КА з ЯРД і ДЯРД є значною. За даними [8] для КА з ДЯРД ANERVA тривалість першої активної ділянки при виконанні гоманівського перельоту Земля-Марс становить 45,5 хвилин. Враховуючи, що старт відбувається з низької навколосемної кругової орбіти, висотою 400-800км з періодом обертання біля 100 хвилин, застосування імпульсного підходу для розрахунку такого маневру буде дуже неточним. Отже, при аналізі перельотів КА з ДЯРД необхідно урахувати обмеженість тяги двигуна і скінченність тривалості активної ділянки. У статті проведено порівняння результатів розв'язання модельної задачі оптимізації перельоту до малих небесних тіл або сфер впливу планет, отриманих з урахуванням обмеженості тяги, з одержаними раніше [4] за допомогою імпульсної апроксимації. Для розрахунку маневру з обмеженою тягою використано підхід, описаний в [6].

Постановка задачі

Розглянемо задачу максимізації корисного навантаження при переведенні КА з заданої початкової кругової орбіти навколо Землі на геліоцентричну еліптичну орбіту, рух по якій забезпечує зустріч з небесним тілом призначення рис.1. Для розрахунку оптимальної траєкторії застосовується модифікований метод сфер впливу (ММСВ) [2]. Якщо мала тяга не застосовується, двигун великої тяги забезпечує виведення КА на сферу впливу Землі з геоцентричною швидкістю \vec{v}_{∞}^e і подальший рух відбувається вздовж Кеплерової еліптичної орбіти (штрихова крива на рис.1). Внаслідок застосування малої тяги ця швидкість може бути зменшена і для абсолютної величини геоцентричної швидкості на сфері впливу буде справедливо $v_{\infty}^e \in [0, v_{\infty t}^e]$. Крива перельоту з малою тягою зображена на рис.1 суцільною лінією. Оптимальний вибір величини v_{∞}^e становить основний зміст задачі оптимального комбінування участі двигунів великої та малої тяги при формуванні траєкторії перельоту. На відміну від [4], при розрахунку витрат палива під час маневру з великою тягою будемо урахувувати обмеженість тяги.

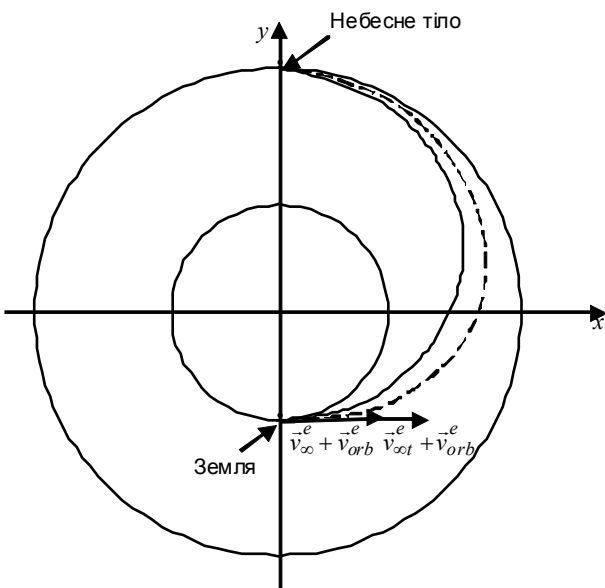


Рис.1. Схема геліоцентричного маневру

Для постановки задачі виконання маневру з обмеженою тягою введемо нерухому систему координат з початком в центрі Землі (рис.2). Геоцентрична швидкість \vec{v}_{∞}^e , яку матиме КА на межі сфери впливу, може розглядатися як гіперболічний надлишок швидкості для деякої геоцентричної гіперболічної орбіти, напрям на перицентр якої співпадає з напрямом осі Ox . Відзначимо, що необхідний напрям вектору \vec{v}_{∞}^e , що визначається розв'язком зовнішньої задачі ММСВ, завжди може бути забезпечений за рахунок відповідного повороту системи координат. Параметр і ексцентриситет гіперболічної орбіти повністю визначаються величиною гіперболічного надлишку швидкості v_{∞}^e та радіусом перицентру r_p . Таким чином, задача, що розглядається, може формулюватися як задача оптимізації маневру по переведенню КА на деяку геоцентричну гіперболічну орбіту, параметри якої мають бути оптимальним чином.

Можлива траєкторія переходу КА з кругової орбіти з радіусом r_0 на гіперболічну з радіусом перицентру r_p схематично зображена на рис.2. Положення КА на круговій орбіті в момент початку і на гіперболічній орбіті в момент завершення маневру визначаються, відповідно, кутівими координатами ω_0 і ϑ_1 . Оптимізація значень ω_0 , ϑ_1 , r_p і v_{∞}^e виконується під час розв'язання загальної варіаційної задачі. Рівняння руху центру мас КА на активних ділянках запишемо, використовуючи модель керування тягою ЯРД [5]:

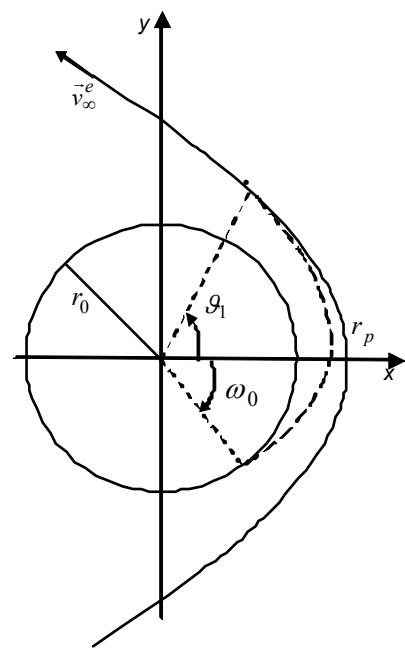


Рис. 2. Схема маневру на активній ділянці великої тяги

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, \quad \dot{y} = v_y, \quad \dot{v}_x = \frac{a_0 \sqrt{Nq} \cos \theta}{m} - c \frac{x}{r^3}, \\ \dot{v}_y &= \frac{a_0 \sqrt{Nq} \sin \theta}{m} - c \frac{y}{r^3}, \quad \dot{m} = -a_0 q, \\ N &\in [N_{\min}, \min(1, Dq)], \quad q \in [q_D, 1]\end{aligned}\quad (2)$$

де t – час; x, y, v_x, v_y – компоненти радіуса-вектора і вектора швидкості центру мас КА; m – поточне значення маси КА; $N(t), q(t), \theta(t)$ – функції керування, відповідно, теплова потужність реактора, секундна масова витрата палива, напрям вектора тяги, $a_0 = P_{\max}/G \cdot M_*$ – параметр тягоозброєності, P_{\max} – максимальна тяга, $M_* = M_0$ – масштаб маси (M_0 – початкова маса), $G_* = 9.81 \text{ м/с}^2$ – масштаб гравітаційного прискорення, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $c = \mu/R_*^2 G_*$ – гравітаційний параметр, μ – гравітаційна стала Землі, R_* – масштаб координат x, y . $D, N_{\min}, N_{\max}, q_{\min}, q_{\max}$ – безрозмірні параметри обмежень на функції керування, q_D – значення секундної масової витрати, що відповідає максимуму ефективної швидкості витікання. Формули переходу до безрозмірних змінних наведені в [5].

Граничні умови запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}x(0) &= r_0 \cos \omega_0, & x(t_1) &= \frac{p(r_p, v_\infty^e) \cos \vartheta_1}{1 + e(r_p, v_\infty^e) \cos \vartheta_1}, \\ y(0) &= r_0 \sin \omega_0, & y(t_1) &= \frac{p(r_p, v_\infty^e) \sin \vartheta_1}{1 + e(r_p, v_\infty^e) \cos \vartheta_1}, \\ v_x(0) &= -v_0 \sin \omega_0, & v_x(t_1) &= -K(r_p, v_\infty^e) \sin \vartheta_1, \\ v_y(0) &= v_0 \cos \omega_0, & v_y(t_1) &= K(r_p, v_\infty^e) (e(r_p) + \cos \vartheta_1), \\ m(0) &= 1, & t_1 &\rightarrow \text{opt},\end{aligned}\quad (3)$$

де $K(r_p, v_\infty^e) = 1/\sqrt{L \cdot p(r_p, v_\infty^e)}$, $p(r_p, v_\infty^e) = Lr_p^2(v_\infty^e)^2 + 2r_p$, $e(r_p, v_\infty^e) = Lr_p(v_\infty^e)^2 + 1$, $L = V_*^2 R_* / \mu$, V_* – масштаб швидкості.

Як показано в [4], застосування моделі ідеального двигуна обмеженої потужності і методу транспортуючої траєкторії дозволяє отримати аналітичний вираз для кінцевої маси КА як функції маси на початку геліоцентричного маневру та абсолютної величини швидкості v_∞^e . Тому функціонал задачі можна подати у вигляді:

$$m_2 = \frac{m(t_1)}{1 + \kappa \cdot m(t_1) \cdot (v_{\text{opt}}^e - v_\infty^e)^2} \rightarrow \max, \quad (4)$$

де t_2 – момент завершення геліоцентричного маневру; $\kappa = 2M_* V_*^2 / N_{el} T$, N_{el} – електрична потужність живлення двигуна малої тяги, T – час виконання геліоцентричного маневру.

Масу корисного навантаження можна обчислити, віднімаючи від кінцевої маси $m(t_2)$ маси баку для збереження робочого тіла та маси рушійних систем великої та малої тяги:

$$m_\pi = m_2 - m_{HT}^{BNRE}(P_{\max}) - m_{LT}^{BNRE}(N_{el}) - \beta(1 - m_2) \quad (5)$$

В (5) P_{\max} – максимальна тяга ЯРД великої тяги, $m_{LT}^{BNRE}(N_{el})$, $m_{HT}^{BNRE}(P_{\max})$ – відповідно, безрозмірні маси рушійних систем малої та великої тяги, що розраховуються за виразами, наведеними в [4].

Розв'язання задачі. З урахуванням результатів попередніх досліджень задач оптимального керування КА з ЯРД великої обмеженої тяги [6], тягу ЯРД будемо вважати постійною за величиною, а саме такою, що відповідає максимуму безрозмірної теплової потужності ($N=1$) і максимуму ефективної швидкості витікання ($q=q_D$). Отже, $P = a_0 \sqrt{q_D}$. Аналіз необхідних умов оптимальності проведемо за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Складемо гамільтоніан:

$$\begin{aligned}H &= \psi_x v_x + \psi_y v_y + \psi_{v_x} \left(\frac{a_0 \sqrt{q_D} \cos \theta}{m} - c \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) + \\ &+ \psi_{v_y} \left(\frac{a_0 \sqrt{q_D} \sin \theta}{m} - c \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \right) - \psi_m a_0 q\end{aligned}\quad (6)$$

де $\psi_x, \psi_y, \psi_{v_x}, \psi_{v_y}, \psi_m$ – спряжені функції.

Вираз для оптимального керування θ_{opt} отримаємо з умов максимуму гамільтоніана (6) стосовно θ :

$$\cos \theta_{opt} = \frac{\psi_{v_x}}{\psi_v}, \quad \sin \theta_{opt} = \frac{\psi_{v_y}}{\psi_v}. \quad (7)$$

Спряжена система рівнянь має вигляд:

$$\dot{\psi}_x = c \frac{\psi_{v_x}(y^2 - 2x^2) - 3\psi_{v_y}xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \dot{\psi}_y = c \frac{\psi_{v_y}(x^2 - 2y^2) - 3\psi_{v_x}xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \dot{\psi}_{v_x} = -\psi_x, \dot{\psi}_{v_y} = -\psi_y, \dot{\psi}_m = \frac{\sqrt{(\psi_{v_y}^2 + \psi_{v_x}^2)}q_D}{m^2}. \quad (8)$$

Умови оптимальності вибору параметрів задачі отримаємо з умов трансверсальності, записаних у формі [3]:

$$-\delta m_2(t_1) - H(t_1)\delta t_1 - \psi_x(0)\delta x(0) - \psi_y(0)\delta y(0) - \psi_{v_x}(0)\delta v_x(0) - \psi_{v_y}(0)\delta v_y(0) + \psi_x(t_1)\delta x(t_1) + \psi_y(t_1)\delta y(t_1) + \psi_{v_x}(t_1)\delta v_x(t_1) + \psi_{v_y}(t_1)\delta v_y(t_1) + \psi_m(t_1)\delta m(t_1) = 0 \quad (9)$$

У початковий момент часу варіації фазових координат залежать від одної незалежної варіації $\delta\omega_0$, тоді як в кінцевий момент t_1 – від чотирьох незалежних варіацій $\delta m(t_1), \delta\vartheta_1, \delta r_p, \delta v_\infty^e$. Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при незалежних варіаціях $\delta t_1, \delta\omega_0, \delta m(t_1), \delta\vartheta_1, \delta r_p, \delta v_\infty^e$, отримуємо умови оптимального вибору відповідних параметрів.

$$\begin{aligned} H &= 0, \\ -\psi_x(0)r_0 \sin \omega_0 + \psi_y(0)r_0 \cos \omega_0 - \psi_{v_x}(0)v_0 \cos \omega_0 - \psi_{v_y}(0)v_0 \sin \omega_0 &= 0, \\ \psi_m(t_1) - \frac{\partial m_2}{\partial m(t_1)} &= 0, \\ -\frac{\partial m_2}{\partial v_\infty^e} + \psi_x(t_1) \frac{\partial x(t_1)}{\partial v_\infty^e} + \psi_y(t_1) \frac{\partial y(t_1)}{\partial v_\infty^e} + \psi_{v_x}(t_1) \frac{\partial v_x(t_1)}{\partial v_\infty^e} + \psi_{v_y}(t_1) \frac{\partial v_y(t_1)}{\partial v_\infty^e} &= 0, \\ \psi_x(t_1) \frac{\partial x(t_1)}{\partial \vartheta_1} + \psi_y(t_1) \frac{\partial y(t_1)}{\partial \vartheta_1} + \psi_{v_x}(t_1) \frac{\partial v_x(t_1)}{\partial \vartheta_1} + \psi_{v_y}(t_1) \frac{\partial v_y(t_1)}{\partial \vartheta_1} &= 0, \\ \psi_x(t_1) \frac{\partial x(t_1)}{\partial r_p} + \psi_y(t_1) \frac{\partial y(t_1)}{\partial r_p} + \psi_{v_x}(t_1) \frac{\partial v_x(t_1)}{\partial r_p} + \psi_{v_y}(t_1) \frac{\partial v_y(t_1)}{\partial r_p} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Похідні, що входять у (10), обчислюються диференціюванням виразів (3) і (4).

Застосування принципу максимуму дозволяє звести задачу оптимального керування (2)-(4) до двоточкової крайової задачі, розв'язання якої зводиться до відшукування 5 початкових значень спряжених функцій $\psi_x(0), \psi_y(0), \psi_{v_x}(0), \psi_{v_y}(0), \psi_m(0)$, трьох параметрів, що визначають початкове та кінцеве положення КА – кутових координат ω_0, ϑ_1 та радіуса перицентру r_p , абсолютної величини геоцентричної швидкості на сфері впливу v_∞ і моменту завершення маневру t_1 . Вказані 10 невідомих визначаються з 4-х крайових умов (3) на правому кінці траєкторії, першого інтегралу $H = 0$ та 5-ти умов трансверсальності (10). Система рівнянь руху (2) і спряжена система рівнянь (8) інтегруються чисельно.

Результати та їх аналіз.

Для проведення розрахунків були обрані такі значення параметрів задачі: радіус кругової навколосемної орбіти старту $h_0 = 400$ км, радіуси кругових геліоцентричних орбіт призначення: $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км (кругова орбіта Марсу), $R_2 = 1000 \cdot 10^6$ км, стартова маса КА $M_0 = 160 \cdot 10^3$ кг, максимальна ефективна швидкість витікання ДЯРД $V_{\max} = 9310$ м/с, баковий коефіцієнт $\beta = 0.1$.

Ефективність оптимізації швидкості на сфері впливу v_∞^e проілюстровано на рис.3. Криві побудовані для двох значень електричної потужності живлення двигуна малої тяги $N_{el} = 0,1$ МВт і 1,5 МВт та для постійного значення теплової потужності реактора $N = 2200$ МВт. Криві, наведені на рис.3, побудовані шляхом розв'язання задачі (2)-(4) при постійних фіксованих значеннях v_∞^e , при цьому третя з умов трансверсальності (10) не використовувалася. Розв'язки, що відповідають максимумам кривих, побудованих шляхом перебору значень v_∞^e (криві, позначені "FT"), в межах прийнятої точності співпадають з розв'язками повної задачі (2)-(4) (при оптимізації значення v_∞^e). Важливість урахування обмеженості тяги проілюстровано завдяки порівнянню з розв'язками, що відповідають імпульсній апроксимації активних ділянок [4]. Як випливає з рис. 3 урахування обмеженості тяги порівняно з імпульсною апроксимацією приводить до незначного відхилення оптимальних значень v_∞^e у бік їх зменшення. Це можна пояснити тим, що урахування гравітаційних втрат зменшує ефективність виконання маневру з великою тягою, отже більша частина енергозатрат переноситься на маневр з малою тягою.

Ефективність оптимізації електричної потужності проілюстровано на рис. 4. Для порівняння наведено криві, що відповідають імпульсній апроксимації активних ділянок. Криві побудовані для достатньо великого значення теплової потужності реактора $N = 2200$ МВт. По осі абсцис відкладені значення N_{el} , що перебиралися з постійним кроком, по осі ординат – значення m_π , у випадку скінченної тяги отримані внаслідок розв'язання задачі (2)-(4), а у випадку імпульсної апроксимації – отримані за рахунок чисельної оптимізації по параметру v_∞^e [4]. Як випливає з цих рисунків,

при обраному значенні N , максимуми корисного навантаження спостерігаються при практично однакових значеннях N_{el} . При виконанні першого маневру включення ділянки малої тяги виявилось неоптимальним, як у випадку застосування імпульсної апроксимації, так і у випадку урахування обмеженості тяги. При виконанні другого маневру були отримані такі значення: при застосуванні імпульсної апроксимації $N_{el\,opt} = 2700$ кВт, при урахуванні обмеженості тяги – $N_{el\,opt} = 2600$ кВт. У той же час, урахування обмеженості тяги приводить до помітного зниження корисного навантаження внаслідок гравітаційних втрат.

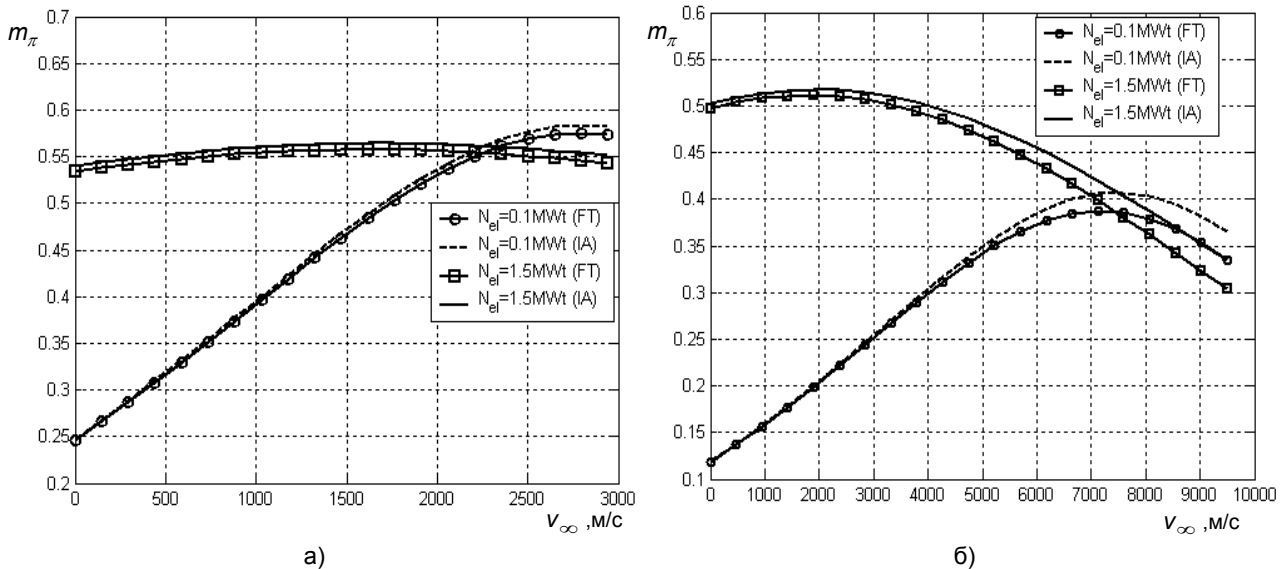


Рис. 3. Залежності маси корисного навантаження від швидкості КА на сфері впливу.

а) переліт до тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км,

б) – з радіусом $R_2 = 1000 \cdot 10^6$ км. FT – урахування обмеженості тяги, IA – імпульсна апроксимація

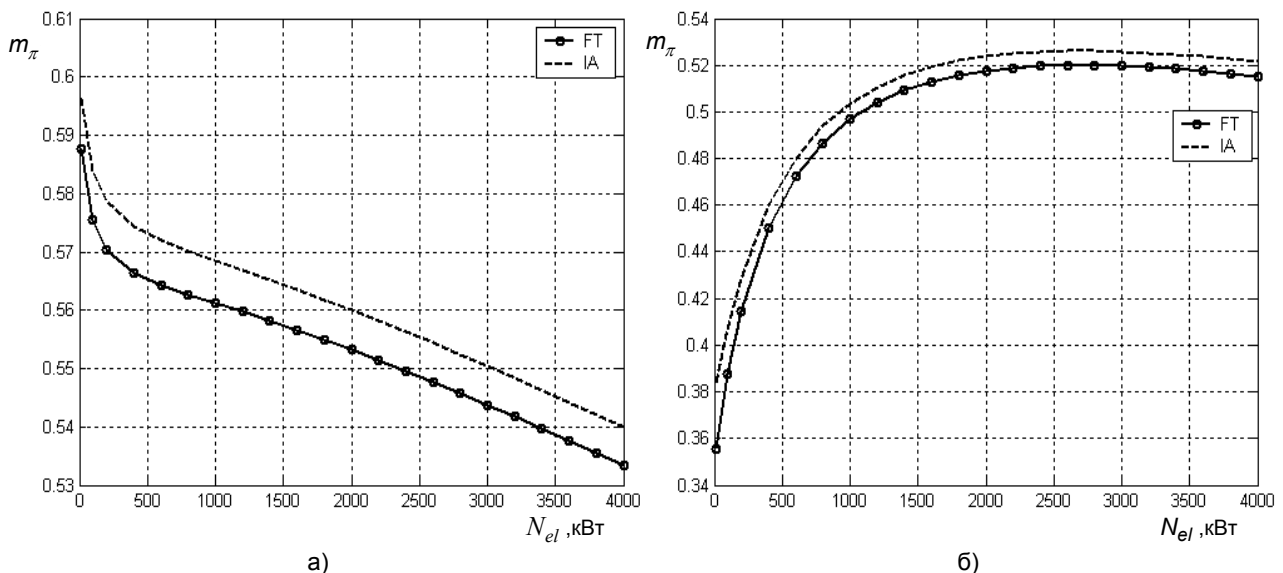


Рис.4. Залежності маси корисного навантаження від електричної потужності.

а) переліт до тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км,

б) – з радіусом $R_2 = 1000 \cdot 10^6$ км. FT – урахування обмеженості тяги, IA – імпульсна апроксимація

Для аналізу впливу гравітаційних втрат на оптимальні параметри проведемо розв'язання задачі при різних значеннях тяги ЯРД великої тяги. Зазначимо, що тяга ЯРД великої тяги визначається через теплову потужність за допомогою співвідношення $P = \hat{\gamma} \sqrt{Nq_D}$ [5], де P – тяга, [Н], N – максимальна теплова потужність ядерного реактора, [Вт], q_D – значення секундної масової витрати, що відповідає максимуму ефективної швидкості витікання, [кг/с], $\hat{\gamma} = 1.37$ – безрозмірний коефіцієнт пропорційності, що використовується у моделі [5].

Максимальна теплова потужність ЯРД змінювалася у діапазоні 1100-4000МВт з кроком 100МВт, що відповідає зміні тяги у діапазоні 220-800кН [8,9]. Вплив урахування гравітаційних втрат на значення функціоналу та на вибір

оптимального значення максимальної теплової потужності N можна проаналізувати за допомогою рис.5, де надано залежності оптимальних мас корисного навантаження (оптимізованих і по v_{∞}^e і по N_{el}) від N . Для першого маневру було отримано оптимальне значення $N_{opt}=1500$ МВт, при цьому значенні завищення значення функціоналу m_{π} при застосуванні імпульсної апроксимації і неврахуванні гравітаційних втрат склало 2,9% (для цього маневру застосування малої тяги неоптимальне, як при врахуванні обмеженості тяги, так і при застосуванні імпульсної апроксимації); для другого маневру $N_{opt}=1300$ МВт, при $N_{el\,opt}=2700$ кВт, $v_{\infty\,opt}^e=999,1$ м/с (при застосуванні імпульсної апроксимації для цього значення N отримано $N_{el\,opt}=2700$ кВт, $v_{\infty\,opt}^e=1192,4$ м/с), відповідне завищення значення функціоналу m_{π} становить 3,0%. Отже, застосування імпульсної апроксимації дозволяє достатньо точно проводити оптимізацію таких параметрів, як v_{∞}^e та N_{el} і веде до незначних завищень значень корисного навантаження внаслідок неврахування гравітаційних втрат.

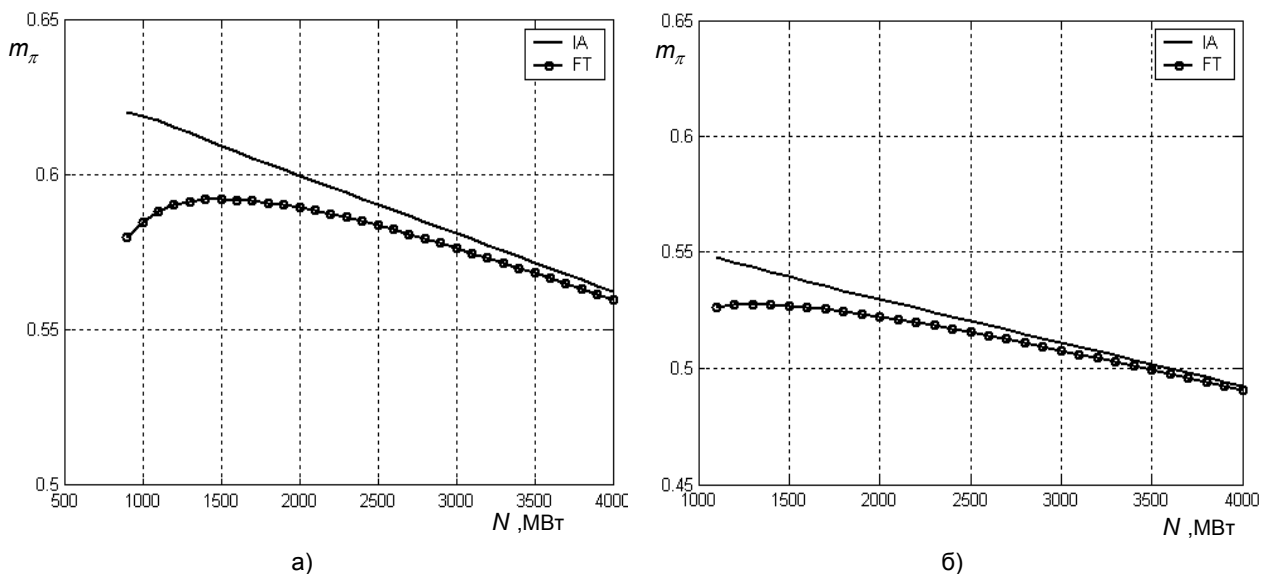


Рис.5. Залежності маси корисного навантаження від теплової потужності.

а) переліт до тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1=227.94 \cdot 10^6$ км,

б) – з радіусом $R_2=1000 \cdot 10^6$ км. FT – врахування обмеженості тяги, IA – імпульсна апроксимація

В той же час, імпульсна апроксимація не дозволяє оцінювати оптимальне значення максимальної теплової потужності. Неврахування гравітаційних втрат веде до того, що завжди буде оптимальною рушійна система, що має найменшу масу (отже, і мінімальну теплову потужність). Таким чином, повне розв'язання сукупної задачі оптимізації керувань та параметрів КА та його рушійної системи при застосуванні імпульсної апроксимації неможливе.

Висновки.

У статті розглянуто задачу оптимального керування рухом космічного апарату при виконанні маневру зустрічі з небесним тілом із комбінуванням великої та малої тяги. Проаналізовано важливість врахування обмеженості тяги і проведено порівняння результатів із класичним підходом імпульсної апроксимації, при якому тяга вважається нескінченною. Показано, що підхід імпульсної апроксимації дозволяє достатньо точно оцінити оптимальний розподіл характеристичної швидкості між ділянками великої та малої тяги. В той же час, оптимізація параметрів підсистеми великої тяги при застосуванні підходу імпульсної апроксимації неможлива. Отже, повне розв'язання сукупної задачі оптимізації керувань та параметрів КА та його рушійної системи можливе лише при врахування обмеженості тяги.

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с. 2. Ильин В.А., Кузмяк Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с. 3. Летов А.М. Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1969. – 359 с. 4. Харитонов О.М. Дослідження ефективності комбінування великої та малої тяги при міжпланетних перельотах // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія: Математика та механіка. – 2011. – №26. – С.27-32. 5. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №5. – С.120–135. 6. Харитонов О.М. Оптимізація маневрів космічних апаратів з двигунами великої обмеженої тяги // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2010., т.7. – №2. – С. 427-434. 7. Kharytonov O.M., Kiforenko B.M. Finite-thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion // 61st International Astronautical Congress, Prague, Czech Republic, September 27-October 1, 2010. Proceedings, Paper IAC-10-C1.9.7. – 11 pp. 8. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al. Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031 // Acta Astronautica, 58 (2006). – P.88-104. 9. Borowski S.K. "Bimodal" nuclear thermal rocket (BNTR) propulsion for future human Mars exploration missions // NASA/CP-2004-212963. – 2004. – vol.1. – P.305-323.

УДК 517.946

А. Громик, викл., І. Конет, д-р фіз.-мат. наук

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки початково-крайових задач теплопровідності в обмежених багатошарових просторових середовищах.

The method of integral transformations builds up the exact analytical solution for initial boundary problems of heat conductivity in the limited multilayered spatial environments.

1. Вступ

Нестационарні (початково-крайові) задачі феноменологічної теорії теплопровідності для кусково-однорідних (багатошарових) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [8,10,19,20]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [11, 14, 15, 17]. Зокрема, в [15] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів, просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові й тришарові просторові середовища та напівобмежені кусково-однорідні просторові середовища розглянуто у працях [2-5,12, 13, 16]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків початково-крайових задач теплопровідності для обмежених багатошарових просторових середовищ у декартовій системі координат.

2. Постановка задачі

Задача про структуру нестационарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \{(t, x, y, z) | t > 0; (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle; z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (I_{j-1}; I_j); I_0 \geq 0; I_k < I_{k+1}; I_{n+1} \equiv l < \infty\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності [9, 21]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j + \chi_j^2 T_j = f_j(t, x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$T_j(t, x, y, z) \Big|_{t=0} = g_j(x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$(a_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, x, y), (a_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}) T_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, x, y), \quad (3)$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} [(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1) T_k - T_{k+1}] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ (v_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (4)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2 , де $a_{xj}, a_{yj}, a_{zj} \geq 0$ – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей $x, y, z (j = \overline{1, n+1})$; $\chi_j^2 \geq 0$ – коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(t, x, y, z) = \{f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), \dots, f_{n+1}(t, x, y, z)\}$ – інтенсивність теплових джерел; $g(x, y, z) = \{g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), \dots, g_{n+1}(x, y, z)\}$ – температура середовища в початковий момент часу; $a_{11}^0, \beta_{11}^0, a_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ – деякі дійсні сталі; $g_0(t, x, y), g_l(t, x, y)$ – задані обмежені неперервні функції в області $(0; +\infty) \times \Omega_2$; $R_k \geq 0$ – коефіцієнти термоопору; $v_k, v_{k+1} \geq 0$ – коефіцієнти теплопровідності; $T(t, x, y, z) = \{T_1(t, x, y, z), T_2(t, x, y, z), \dots, T_{n+1}(t, x, y, z)\}$ – шукана температура.

Зазначимо, що випадки областей $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$, $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; +\infty)$ розглянуто у праці авторів [6], випадки областей $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; b)$, $\Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; +\infty)$ – в [7].

3. Основна частина

3.1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0; +\infty) \times (0; b) \times \{z \in K_n^+\}$

Розглянемо область $\Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; b)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p \right) T_j \Big|_{x=0} = \omega_j(t, y, z), \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{x=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) T_j \Big|_{y=0} = \omega_{1j}(t, x, z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) T_j \Big|_{y=b} = \omega_{2j}(t, x, z), j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

щодо змінної y , де $p \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x = 0$; $\omega_j(t, y, z) = p T_j^c(t, y, z)$, $T_j^c(t, y, z)$ – температура середовища на поверхні $x = 0$; $h_1 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = 0$; $\omega_{1j}(t, x, z) = h_1 T_j^{c1}(t, x, z)$, $T_j^{c1}(t, x, z)$ – температура середовища на поверхні $y = 0$; $h_2 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $y = b$; $\omega_{2j}(t, x, z) = h_2 T_j^{c2}(t, x, z)$, $T_j^{c2}(t, x, z)$ – температура середовища на поверхні $y = b$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [6, 7]:

Припустимо, що розв'язок початково-крайової задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [18, 17].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0; +\infty)$ щодо змінної x [18]:

$$F_{+x}[g(x)] = \int_0^{+\infty} g(x) K_x(x; \sigma) dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \quad (7)$$

$$F_{+x}^{-1}[\tilde{g}(\sigma)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) K_x(x; \sigma) d\sigma \equiv g(x), \quad (8)$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma) + K_x(0; \sigma) \left(-\frac{dg}{dx} + pg\right) \Big|_{x=0}, \quad (9)$$

де ядро перетворення $K_x(x; \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma \cos(\sigma x) + p \sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2 + p^2}}$.

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайової задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'_3 = \{(t, y, z) \mid t > 0; y \in (0; b); z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j + (a_{xj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = \tilde{F}_j(t, \sigma, y, z); z \in I_j \quad (10)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t, \sigma, y, z) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (11)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(t, \sigma, y), \quad (12)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{\omega}_{1j}(t, \sigma, z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) \tilde{T}_j \Big|_{y=b} = \tilde{\omega}_{2j}(t, \sigma, z) \quad (13)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} &= 0, \\ \left[v_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} &= 0; k = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (14)$$

де $\tilde{F}_j(t, \sigma, y, z) = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z) + a_{xj}^2 K_x(0; \sigma) \omega_j(t; y, z); j = \overline{1, n+1}$.

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0; b]$ щодо змінної y [18]:

$$\Lambda_{yk}[g(y)] = \int_0^b g(y) v_k(y) dy \equiv g_k, \quad (15)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}[g_k] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \quad (16)$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0) \left(-\frac{d}{dy} + h_1\right) g \Big|_{y=0} + v_k(b) \left(\frac{d}{dy} + h_2\right) g \Big|_{y=b}, \quad (17)$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}}, \quad \|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор $\Lambda_{\gamma k}$ за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3^n = \{(t, z) \mid t > 0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_{jk}}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{jk}}{\partial z^2} + (a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_{jk} = \tilde{G}_{jk}(t, \sigma, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_{jk}(t, \sigma, z)|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}(\sigma, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(a_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_{1k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t, \sigma); \left(a_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1,k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{1k}(t, \sigma) \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\left(R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k} \right] \Big|_{z=l_p} &= 0, \\ \left(v_p \frac{\partial \tilde{T}_p}{\partial z} - v_{p+1} \frac{\partial \tilde{T}_{p+1,k}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_p} &= 0; p = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \quad (21)$$

де

$$\tilde{G}_{jk}(t, \sigma, z) = \tilde{F}_{jk}(t, \sigma, z) + a_{yj}^2 v_k(0) \tilde{\omega}_{1j}(t, \sigma, z) + a_{yj}^2 v_k(b) \tilde{\omega}_{2j}(t, \sigma, z).$$

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження щодо змінної z [17]:

$$F_{jn}[g(z)] = \int_{l_0}^l g(z) V(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv g_j, \quad (22)$$

$$F_{jn}^{-1}[g_j] = \sum_{j=1}^\infty g_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \equiv g(z), \quad (23)$$

$$F_{jn} \left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz - \frac{\sigma_1 a_1^2}{a_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \left(a_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g \right) \Big|_{z=l_0} + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{a_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \left(a_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g \right) \Big|_{z=l}. \quad (24)$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_j) \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z); \|V(z, \lambda_j)\|^2 = \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z, \lambda_j) \sigma_i(z) dz;$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z); V_m(z, \lambda_j) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{n+1,j} [\omega_{m-1,2}(\lambda_j) \cos(q_{mj} z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_j) \sin(q_{mj} z)]; m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_j) = \omega_{n2}(\lambda_j) \cos(q_{n+1,j} z) - \omega_{n1}(\lambda_j) \sin(q_{n+1,j} z); c_{1k} = 1; c_{2k} = \frac{v_{k+1}}{v_k}; q_{sj} = a_s^{-1} (\lambda_j^2 + k_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj};$$

$$\sigma_k = \prod_{j=k}^n \frac{v_j a_{n+1}}{v_{j+1} a_k^2}; \sigma_n = \frac{v_n a_{n+1}}{v_{n+1} a_n^2}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k1}(q_{sj} l_k) = -v_k^* q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); v_{22}^{k1}(q_{sj} l_k) = v_k^* q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); v_{11}^{k2}(q_{sj} l_k) = R_k q_{sj} \cos(q_{sj} l_k) + \sin(q_{sj} l_k); v_{21}^{k2}(q_{sj} l_k) = q_{sj} \cos(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k2}(q_{sj} l_k) = \cos(q_{sj} l_k); v_{22}^{k2}(q_{sj} l_k) = \sin(q_{sj} l_k); v_k^* = \frac{v_{k+1}}{v_k}; \delta_{sm}^{ks}(q_{kj} l_k; q_{k+1, j} l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{22}^{km}(q_{k+1, j} l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj} l_k) v_{12}^{km}(q_{k+1, j} l_k);$$

$$\omega_{01}(\lambda_j) = -v_{11}^{01}(q_{1j} l_0); \omega_{02}(\lambda_j) = -v_{11}^{02}(q_{1j} l_0); \omega_{sm}(\lambda_j) = \omega_{s-1,2}(\lambda_j) \delta_{sm}^{ks}(q_{sj} l_s; q_{s+1, j} l_s) - \omega_{s-1,1}(\lambda_j) \delta_{2m}^{ks}(q_{sj} l_s; q_{s+1, j} l_s);$$

λ_j – корені трансцендентного рівняння $\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1, l}) \omega_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1} q_{n+1}(\lambda) l \omega_{n2}(\lambda) = 0$, що утворюють дискретний спектр, $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [22].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma, k) \right) \tilde{T}_{1k}(t, \sigma, z) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma, k) \right) \tilde{T}_{2k}(t, \sigma, z) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma, k) \right) \tilde{T}_{n+1,k}(t, \sigma, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{1k}(t, \sigma, z) \\ \tilde{G}_{2k}(t, \sigma, z) \\ \dots \\ \tilde{G}_{n+1,k}(t, \sigma, z) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{1k}(t, \sigma, z) \\ \tilde{T}_{2k}(t, \sigma, z) \\ \dots \\ \tilde{T}_{n+1,k}(t, \sigma, z) \end{pmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{1k}(\sigma, z) \\ \tilde{g}_{2k}(\sigma, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,k}(\sigma, z) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

де $q_j^2(\sigma, k) = a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2$; $a_j^2 \equiv a_{zj}^2$; $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор F_{jn} , який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_j) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_j) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \lambda_j) \sigma_{n+1} dz \right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_j^2 + q_i^2(\sigma, k) + k_i^2 \right) \tilde{T}_{ikj} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{G}_{ikj} - \sigma_1 a_1^2 \left(a_{11}^0 \right)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(t, \sigma) + \sigma_{n+1} a_{n+1}^2 \left(a_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_{lk}(t, \sigma), \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ikj} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}_{ikj}, \quad (29)$$

де $\tilde{T}_{ikj} \equiv \tilde{T}_{ikj}(t, \sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{T}_{ik}(t, \sigma, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$, $\tilde{G}_{ikj} \equiv \tilde{G}_{ikj}(t, \sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{G}_i(t, \sigma, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$,

$\tilde{g}_{ikj} \equiv \tilde{g}_{ikj}(\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{g}_{ik}(\sigma, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz$; $i = \overline{1, n+1}$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$ і покладемо всюди $k_i^2 = q_1^2 - q_i^2$, $i = \overline{1, n+1}$.

Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{T}_{kj}}{dt} + \left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2 \right) \tilde{T}_{kj} = \tilde{G}_{kj}(t, \sigma) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{a_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(t, \sigma) + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{a_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_{lk}(t, \sigma), \quad (30)$$

$$\tilde{T}_{kj}(t, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{kj}(\sigma), \quad (31)$$

де $\tilde{T}_{kj}(t, \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ikj}(t, \sigma)$, $\tilde{G}_{kj}(t, \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{G}_{ikj}(t, \sigma)$, $\tilde{g}_{kj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}_{ikj}(\sigma)$.

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{kj}(t, \sigma) = \int_0^t \exp \left[- \left(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2 \right) (t - \tau) \right] \times & \left[\tilde{G}_{kj}(\tau, \sigma) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{a_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(\tau, \sigma) + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{a_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_{lk}(\tau, \sigma) + \delta_+(\tau) \tilde{g}_{jk}(\sigma) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (32)$$

де $\delta_+(\tau)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $\tau = +0$ [22].

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{jn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots] = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $[\tilde{T}_{kj}(t, \sigma)]$, де функція $\tilde{T}_{kj}(t, \sigma)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{T}_{ik}(t, \sigma, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_{kj}(t, \sigma) \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \tag{34}$$

До функцій $\tilde{T}_{ik}(t, \sigma, z)$ послідовно застосуємо обернені оператори Λ_{yk}^{-1} за правилом (16) та F_{+x}^{-1} за правилом (8). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t, x, y, z) = & \sum_{k=10}^{n+1} \int_0^{t+\infty} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \times [f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau)g_k(\xi, \eta, \zeta)] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ & + \int_0^{t+\infty} \int_0^b \int_0^{l_k} [W_i^1(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z)g_0(\tau, \xi, \eta) + W_i^2(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z)g_l(\tau, \xi, \eta)] d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{xi}^2 \sum_{k=10}^{n+1} \int_0^{t+\infty} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xik}(t-\tau, x, y, \eta, z, \zeta) \omega_k(\tau, \eta, \zeta) \sigma_k d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{yi}^2 \sum_{k=10}^{n+1} \int_0^{t+\infty} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} [W_{yik}^1(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_{1k}(\tau, \xi, \zeta) + W_{yik}^2(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_{2k}(\tau, \xi, \zeta)] \sigma_k d\xi d\zeta d\tau, i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \tag{35}$$

які описують структуру нестационарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти:

фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned} E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = & \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-(\lambda_j^2 + a_{xi}^2 \sigma^2 + a_{yi}^2 \gamma_r^2 + \chi_i^2) t\right] \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2} \times \\ & \times \frac{v_r(y) v_r(\eta)}{\|v_r\|^2} K_x(x; \sigma) K_x(\xi; \sigma) d\sigma; \quad i, k = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна $W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_{n+1} a_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l)$, абсцисної матриці Гріна $W_{xik}(t, x, y, \eta, z, \zeta) = E_{i, k}(t, x, 0, y, \eta, z, \zeta)$, лівої та правої ординатних матриць Гріна $W_{yik}^1(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$, $W_{yik}^2(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, b, z, \zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_i^s(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_{xjk}(t, x, y, \eta, z, \zeta)$, $W_{yjk}^s(t, x, \xi, y, \eta, z)$ ($s = 1, 2$) безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Зауваження 1. У випадку $a_{xi}^2 = a_{yi}^2 = a_{zi}^2 \equiv a_i^2 \geq 0$ формули (35) визначають структуру нестационарного температурного поля в ізотропному обмеженому $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестационарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$) безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестационарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах $z = l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0, z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 5. Параметри p, h_j ($j = 1, 2$) дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0; y = 0, y = b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 6. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, x, y, z), g_j(x, y, z) \omega_j(t, y, z), \omega_{1j}(t, x, z), \omega_{2j}(t, x, z)$ ($j = \overline{1, n+1}$), $g_0(t, x, y)$ та $g_l(t, x, y)$ проводиться безпосередньо.

3.2. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності

в кусково-однорідному середовищі $(0; a) \times (0; b) \times \{z \in K_n^+\}$

Розглянемо область $\Omega_2 = (0; a) \times (0; b)$. У цьому випадку на межі області виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p_1\right)T_j \Big|_{x=0} = \omega_j^1(t, y, z), \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_1\right)T_j \Big|_{x=a} = \omega_j^2(t, y, z); z \in I_j, \tag{36}$$

щодо змінної x та крайові умови (6) щодо змінної y , де $p_1 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x = 0$; $\omega_j^1(t, y, z) = p_1 T_j^{c1}(t, y, z)$, $T_j^{c1}(t, y, z)$ – температура середовища на поверхні $x = 0$; $p_2 \geq 0$ – коефіцієнт теплообміну через поверхню $x = a$; $\omega_j^2(t, y, z) = p_2 T_j^{c2}(t, y, z)$, $T_j^{c2}(t, y, z)$ – температура середовища на поверхні $x = a$.

Вважаємо, що для задачі (1)-(4), (36), (6) виконуються умови узгодженості [6, 7].

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(4), (36), (6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [18, 17].

До задачі (1)-(4), (36), (6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0; a]$ щодо змінної x [18]:

$$Z_{xm}[g(x)] = \int_0^a g(x) w_m(x) dx \equiv g_m, \tag{37}$$

$$Z_{xm}^{-1}[g_m] = \sum_{m=1}^{\infty} g_m \frac{w_m(x)}{\|w_m\|^2} \equiv g(x), \tag{38}$$

$$Z_{xm} \left[\frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\delta_m^2 g_m + w_m(0) \left(-\frac{dg}{dx} + p_1 g \right) \Big|_{x=0} + w_m(a) \left(\frac{dg}{dx} + p_2 g \right) \Big|_{x=a}, \tag{39}$$

де ядро перетворення

$$w_m(x) = \frac{\delta_m \cos(\delta_m x) + p_1 \sin(\delta_m x)}{\sqrt{\delta_m^2 + p_1^2}}, \|w_m\|^2 = \int_0^a w_m^2(x) dx = \frac{a}{2} + \frac{(p_1 + p_2)(\delta_m^2 + p_1 p_2)}{2(\delta_m^2 + p_1^2)(\delta_m^2 + p_2^2)},$$

$\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\delta a) = \frac{\delta^2 - p_1 p_2}{\delta(p_1 + p_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Z_{xm} за правилом (37) внаслідок тотожності (39) крайовій задачі (1)-(4), (36), (6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'_3 = \{(t, y, z) | t > 0; y \in (0; b); z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial T_{jm}}{\partial t} - \left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_{jm} - (a_{xj}^2 \delta_m^2 + \chi_j^2) T_{jm} = F_{jm}(t, y, z), z \in I_j \tag{40}$$

з початковими умовами

$$T_{jm}(t, y, z) \Big|_{t=0} = g_{jm}(t, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{41}$$

крайовими умовами

$$\left(a_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) T_{1m} \Big|_{z=l_0} = g_{0m}(t, y); \left(a_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) T_{n+1,m} \Big|_{z=l} = g_{lm}(t, y), \tag{42}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) T_{jm} \Big|_{y=0} = \omega_{1jm}(t, z); \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) T_{jm} \Big|_{y=b} = \omega_{2jm}(t, z) \tag{43}$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) T_{pm} - T_{p+1,m} \right] \Big|_{z=l_p} &= 0, \\ \left[\left(v_p \frac{\partial T_{pm}}{\partial z} - v_{p+1} \frac{\partial T_{p+1,m}}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=l_p} &= 0, p = \overline{1, n}, \end{aligned} \right. \tag{44}$$

де

$$F_{jm}(t, y, z) = f_{jm}(t, y, z) + a_{xj}^2 w_m(0) \omega_j^1(t, y, z) + a_{xj}^2 w_m(a) \omega_j^2(t, y, z).$$

До задачі (40)-(44) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0; b]$ щодо змінної y . Інтегральний оператор Λ_{y_k} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (40)-(44) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t, z) | t > 0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial T_{jmk}}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 T_{jmk}}{\partial z^2} + (a_{xj}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma^2 + \chi_j^2) T_{jmk} = G_{jmk}(t, z), z \in I_j \quad (45)$$

з початковими умовами

$$T_{jmk}(t, z)|_{t=0} = g_{jmk}(z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (46)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) T_{1mk} \Big|_{z=l_0} = g_{0mk}(t); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) T_{n+1, mk} \Big|_{z=l} = g_{lmk}(t), \quad (47)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) T_{pmk} - T_{p+1, mk} \right] \Big|_{z=l_p} = 0, \\ \left(V_p \frac{\partial T_{pmk}}{\partial z} - V_{p+1} \frac{\partial T_{p+1, mk}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_p} = 0; p = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (48)$$

де $G_{jmk}(t, z) = F_{jmk}(t, z) + a_{yj}^2 v_k(0) \omega_{1jm}(t, z) + a_{yj}^2 v_k(b) \omega_{2jm}(t, z)$.

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (45)-(48) збігається із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (45)-(48) відповідно до формул (34) визначають функції

$$T_{imk}(t, z) = \sum_{j=1}^{\infty} T_{mkj}(t) \frac{V_j(z, \lambda_j)}{\|V_j(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \quad (49)$$

Застосувавши послідовно до функцій $T_{imk}(t, z)$, визначених формулами (49), обернені оператори $\Lambda_{y_k}^{-1}$ та Z_{xm}^{-1} , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t, x, y, z) = & \sum_{k=1000}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) [f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau) g_k(\xi, \eta, \zeta)] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ & + \int_0^a \int_0^b \int_0^l [W_i^1(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) + W_i^2(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z) g_l(\tau, \xi, \eta)] d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{xi}^2 \sum_{k=1000}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} [W_{xik}^1(t - \tau, x, y, \eta, z, \zeta) \omega_k^1(\tau, \eta, \zeta) + W_{xik}^2(t - \tau, x, y, \eta, z, \zeta) \omega_k^2(\tau, \eta, \zeta)] \sigma_k d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{yi}^2 \sum_{k=1000}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} [W_{yik}^1(t - \tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_{1k}(\tau, \xi, \zeta) + W_{yik}^2(t - \tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_{2k}(\tau, \xi, \zeta)] \sigma_k d\xi d\zeta d\tau, \end{aligned} \quad (50)$$

які описують структуру нестационарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (50) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\lambda_j^2 + a_{xi}^2 \delta_r^2 + a_{yi}^2 j_p^2 + \chi_i^2 \right) t \right] \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \frac{w_r(x) w_r(\xi)}{\|w_r\|^2} \frac{v_p(y) v_p(\eta)}{\|v_p\|^2}; i, k = \overline{1, n+1},$$

нижньої аплікатної матриці Гріна $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}} E_{i1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$, верхньої аплікатної матриці Гріна

$W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z) = \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} E_i(t, x, \xi, y, \eta, z, l)$, лівої та правої абсцисних матриць Гріна

$W_{xik}^1(t, x, y, \eta, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, 0, y, \eta, z, \zeta)$, $W_{xik}^2(t, x, y, \eta, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, a, y, \eta, z, \zeta)$; лівої та правої ординатних матриць Гріна

$W_{yik}^1(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$, $W_{yik}^2(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, b, z, \zeta)$ параболічної початково-крайової задачі (1)-(4), (36), (6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$ і функцій Гріна $W_i^s(t, x, \xi, y, \eta, z)$, $W_{xjk}^s(t, x, y, \eta, z, \zeta)$, $W_{yjk}^s(t, x, \xi, y, z, \zeta)$ ($s = 1, 2$) безпосередньо перевіряється, що функції $T_j(t, x, y, z)$, визначені формулами (50), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [22].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри $p_j, h_j, j = 1, 2$, дають можливість виділяти із формул (50) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $x = 0, x = a; y = 0, y = b$ крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (50) в залежності від аналітичного вигляду функцій $f_j(t, x, y, z), g_j(x, y, z), \omega_j^s(t, y, z), \omega_{sj}(t, x, z), j = \overline{1, n+1}, s = 1, 2, g_0(t, x, y)$ та $g_1(t, x, y)$ проводиться безпосередньо.

4. Висновки

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестационарних задач в обмежених багатшарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М., 1964. 2. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67-82. 3. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100-118. 4. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 31-49. 5. Громик А.П., Конет І.М. Математичне моделювання нестационарних процесів теплопровідності в напівобмежених багатшарових просторових середовищах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: Зб. наук. пр. Ін-ту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України та Кам'янець-Подільського нац. ун-ту. 2008. – Вип. 1. – С. 26-41. 6. Громик А.П., Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в обмежених кусково-однорідних просторових середовищах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 10-17. 7. Громик А.П., Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в обмежених багатшарових просторових середовищах // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. – 2010. – Вип. 23-24. – С. 4-11. 8. Дейнека В.С., Сергиенко І.В., Скопечкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998. 9. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964. 10. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992. 11. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К., 1998. 12. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету. Фізико-математичні науки. 2008. – Вип. 1. – С. 48-56. 13. Конет І.М. Інтегральні зображення розв'язків початково-крайових задач теплопровідності в напівобмежених багатшарових просторових середовищах // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. 2009. – Вип. 2. – С. 29-37. 14. Конет І.М., Ленюк М.П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001. 15. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004. 16. Конет І.М., Ленюк М.П. Нестационарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118-134. 17. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997. 18. Ленюк М.П. Інтегральні преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4). 19. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с. 20. Сергиенко І.В., Скопечкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991. 21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972. 22. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 14.06.11

UDC 519.634

E. Azizbayov, c.p.-m.s., Y. Mehraliyev, c.p.-m.s.,
e-mail: azel_azerbaijan@mail.ru, Baku State University

A TIME-NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF HOMOGENEOUS BAR MOTION

Classical solution of boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous bar is studied. By using the Fourier method the problem is reduced to integral equation. By means of contracting mappings principle the local existence and uniqueness of classical solution for the given boundary value problem is proved.

У роботі досліджується класичний розв'язок однієї крайової задачі для рівнянь руху однорідної балки. За допомогою метода Фур'є задачу зведено до інтегрального рівняння. Далі, за принципом стискаючих відображень доведено існування та єдиність класичного розв'язку.

Introduction. Non-local problems are problems wherein instead of giving values of solution or its derivatives on fixed part of boundary, the relation of these values with values of the same functions on another inner or boundary manifolds is given. Theory of non-local boundary value problems is important in itself as a part of general theory of boundary value problems for partial equations and it is important as a field of mathematics that has numerous applications in mechanics, physics, biology and other natural science disciplines.

The most general time non-local conditions were considered by A.A.Kerefov, J.Chabrowsky [10], V.V.Shelukhin [9], G.M.Liberman [6], A.I.Kozhanov [4], Yu.A.Mitropolsky, B.I.Moiseenkov [7], J.M.T. Thompson, H.B. Stewart [11], B.S.Bardin, S.D.Furta [1], D.V.Kostin [5] and others have situated oscillation and wave motions of an elastic bar on an elastic foundation.

Problem statement and its reduction to an integral equation. In domain $D_T = \{(x,t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ we consider equation [5]

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \beta u_{xx}(x,t) + \alpha u(x,t) + u^3(x,t) = 0 \tag{1}$$

under local boundary conditions

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

and non-local boundary conditions

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

where $\beta > 0, \alpha > 0, \delta$ are given numbers, $\varphi(x), \psi(x)$ are given functions and $u(x,t)$ is a unknown function.

Note that the similar equation arises in the theory of crystals [2].

Definition. Function $u(x, t)$ is called a classic solution of the problem (1) – (3) if it is continuous in closed domain D_T together with all its derivatives contained in equation (1), and satisfies boundary conditions (2), (3) in the ordinary sense.

Since system $\{\sin \lambda_k x, \lambda_k = k\pi\}_{k=1}^{\infty}$ forms basis in space $L_2(0,1)$, then it is obvious that classical solution $u(x, t)$ of the problem (1) – (3) can be represented as follows:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \lambda_k = k\pi, \tag{4}$$

where

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx. \tag{5}$$

Applying the Fourier formal method for determining $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$), from (1), (3) we find:

$$u_k''(t) + (\lambda_k^4 - \beta \lambda_k^2 + \alpha) u_k(t) = F_k(t; u), \quad 0 \leq t \leq T; \quad k = 1, 2, \dots, \tag{6}$$

$$u_k(0) + \delta u_k(T) = \varphi_k, \quad u_k'(0) + \delta u_k'(T) = \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

where $F_k(t; u) = -2 \int_0^1 u^3(x, t) \sin \lambda_k x dx$, $\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx$, $\psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx$.

It is obvious that $\lambda_k^4 - \beta \lambda_k^2 + \alpha = \left(\lambda_k^2 - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{4}$. Let assume $\beta^2 < 4\alpha$. Then, by solving problem (6), (7) we find:

$$u_k(t) = \frac{1}{\beta_k \rho_k(T)} \left\{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k(T-t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k(T-t)) \psi_k - \delta \int_0^T F_k(\tau; u) (\sin \beta_k(T+t-\tau) + \delta \sin \beta_k(t-\tau)) d\tau \right\} + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau; u) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

where $\beta_k = \sqrt{\lambda_k^4 - \beta \lambda_k^2 + \alpha}$, $\rho_k(T) = 1 + 2\delta \cos \beta_k T + \delta^2$. It is obvious that

$$u_k'(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} \left\{ \beta_k (-\sin \beta_k t + \delta \sin \beta_k(T-t)) \varphi_k + (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k(T-t)) \psi_k - \delta \int_0^T F_k(\tau; u) (\cos \beta_k(T+t-\tau) + \delta \cos \beta_k(t-\tau)) d\tau \right\} + \int_0^t F_k(\tau; u) \cos \beta_k(t-\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

$$u_k''(t) = F_k(t; u) - \frac{\beta_k}{\rho_k(T)} \left\{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \sin \beta_k(T-t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k(T-t)) \psi_k - \delta \int_0^T F_k(\tau; u) (\sin \beta_k(T+t-\tau) + \delta \sin \beta_k(t-\tau)) d\tau \right\} - \beta_k \int_0^t F_k(\tau; u) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{10}$$

After substitution of expression $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) from (8) into (4), we obtain:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\beta_k \rho_k(T)} \left[\beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k(T-t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t + \delta \sin \beta_k(T-t)) \psi_k - \delta \int_0^T F_k(\tau; u) (\sin \beta_k(T+t-\tau) + \delta \sin \beta_k(t-\tau)) d\tau \right] + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau; u) \sin \beta_k(t-\tau) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \tag{11}$$

Thus, problems (1) – (3) is reduced to the integral equation (11) for unknown function $u(x, t)$.

The following lemma is important for studying the uniqueness of solution of the problem (1) – (3).

Lemma. If $u(x, t)$ is a classical solution of the problem (1) – (3) then functions

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

determined by relation (5), satisfy on $[0, T]$ system (8).

Proof. Let $u(x, t)$ be any classic solution of problem (1) – (3). Multiplying the both hand sides of equations (1) by functions $2 \sin \lambda_k x$, integrating the obtained equality with respect to x from 0 to 1 and using the relations

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 u_{tt}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= \frac{d^2}{dt^2} \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = u_k''(t), \\ 2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= -\lambda_k^2 \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = -\lambda_k^2 u_k(t), \\ 2 \int_0^1 u_{xxxx}(x, t) \sin \lambda_k x dx &= \lambda_k^4 \left(2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \right) = \lambda_k^4 u_k(t), \end{aligned}$$

we get:

$$u_k''(t) + (\lambda_k^4 - \beta \lambda_k^2 + \alpha) u_k(t) = F_k(t; u), \quad 0 \leq t \leq T; \quad k = 1, 2, \dots,$$

Where $F_k(t; u) = -2 \int_0^1 u^3(x, t) \sin \lambda_k x dx$,

From condition (3) we have

$$u_k(0) + \delta u_k(T) = \varphi_k, \quad u'_k(0) + \delta u'_k(T) = \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx.$$

Thus, $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) satisfy equation (6), (7). Hence, as it was noted above, it directly follows before obtaining system (8), that functions $u_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) satisfy on $[0, T]$ system (8). The lemma is proved.

From the lemma it follows that if $u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx$, $k = 1, 2, \dots$, is solution of system (8), the function

$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x$ is the solution of (11).

The following corollary follows from the lemma.

Corollary. Suppose that equation (11) has a unique solution. Then problem (1) – (3) may have at most one solution, i.e. solution of the problem (1) – (3) exists and is unique.

Existence and uniqueness of classical solution. Denote by $B_{2,T}^5$ [10] the set of all functions in D_T of the form

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

where every function $u_k(t)$ is continuous on $[0, T]$ and

$$J(u) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

We define norm in this set as follows:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^5} = J(u).$$

It is known that $B_{2,T}^5$ is a Banach space.

Let consider in $B_{2,T}^5$ operator $\Phi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t, u) \sin \lambda_k x$, where

$$\Phi_k(t, u) = \frac{1}{\beta_k \rho_k(T)} \{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T - t)) \phi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k (T - t)) \psi_k -$$

$$- \delta \int_0^T F_k(\tau; u) (\sin \beta_k (T + t - \tau) + \delta \sin \beta_k (t - \tau)) d\tau \} + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau; u) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots).$$

We have:

$$(\lambda_k^5 \|\Phi_k(t, u)\|_{C[0,T]})^2 \leq 3(\rho(T)(1+|\delta|) \lambda_k^5 |\phi_k|)^2 + 3(\rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon \lambda_k^3 |\psi_k|)^2 + 3T((1+|\delta|) \rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon)^2 \int_0^T (\lambda_k^3 |F_k(\tau; u)|)^2 d\tau$$

or

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\Phi_k(t, u)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{3} \rho(T)(1+|\delta|) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\phi_k|)^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \sqrt{3} \rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{1/2} + \sqrt{3T} (1+|\delta|) \rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |F_k(\tau; u)|)^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad (12)$$

where

$$\rho(T) \equiv \sup_k \rho_k^{-1}(T) \leq 1/(1 + \delta^2 - 2|\delta|), \quad \sup_k \left(\frac{\lambda_k^2}{\sqrt{\lambda_k^4 - \beta \lambda_k^2 + \alpha}} \right) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Suppose that the data of the problem (1) – (3) satisfy the following conditions:

1. $\varphi(x) \in C^4[0, 1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0, 1)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1) = 0$;
2. $\psi(x) \in C^2[0, 1]$, $\psi'''(x) \in L_2(0, 1)$, $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1) = 0$.

Then from (12) we have:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\Phi_k(t, u)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{3} \rho(T)(1+|\delta|) \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3} \rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+ \sqrt{3T} (1+|\delta|) \rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon \|6u_x^3 + 18u \cdot u_x \cdot u_{xx} + 3u^2 \cdot u_{xxx}\|_{L_2(D_T)}. \quad (13)$$

Denote

$$A(T) = \sqrt{3} \rho(T)(1+|\delta|) \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{3} \rho(T)(1+|\delta|) \varepsilon \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)}$$

and rewrite (13) in the form:

$$\|\Phi u\|_{B_{2,T}^5} \leq A(T) + \sqrt{3T}(1+|\delta|)\rho(T)(1+|\delta|)\varepsilon \left\| 6u_x^3 + 18u \cdot u_x \cdot u_{xx} + 3u^2 \cdot u_{xxx} \right\|_{L_2(D_T)}. \tag{14}$$

Theorem. Let conditions 1-2, $\delta \neq \pm 1$, $\beta^2 < 4\alpha$ be fulfilled. Then for rather small values of T the problem (1) – (3) has unique classical solution in the ball $K = K_R(\|u\|_{B_{2,T}^5} \leq A(T)+1)$ of the space $B_{2,T}^5$.

Proof. Let consider in space $B_{2,T}^5$ equation

$$u = \Phi u, \tag{15}$$

where operator Φ is defined by the right side of equation (11). We consider operator Φ in the ball $K = K_R(\|u\|_{B_{2,T}^5} \leq R = A(T)+1)$ from $B_{2,T}^5$.

From (14) we find that for any $u, u_1, u_2 \in K_R$ the following estimates are valid:

$$\|\Phi u\|_{B_{2,T}^5} \leq A(T) + 27\sqrt{3T}(1+|\delta|)\rho(T)(1+|\delta|)\varepsilon R^3, \tag{16}$$

$$\|\Phi u_1 - \Phi u_2\|_{B_{2,T}^5} \leq 81(1+|\delta|)\rho(T)(1+|\delta|)\varepsilon R^2\sqrt{T} \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}. \tag{17}$$

It follows from estimates (16), (17) that for rather small values of T the operator Φ acts in the ball $K = K_R$ and is contractive, therefore in the ball $K = K_R$ it has unique fixed point $\{u\}$, that is a unique solution of equation (15). Consequently, integral equation (11) has a unique solution belonging to the ball $K = K_R$. As an element of the space $B_{2,T}^5$, the function $u(x,t)$ has continuous derivatives $u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ in D_T .

Now show that $u_{tt}(x,t)$ is continuous in D_T . Allowing for (8), from (6) we have:

$$u_k''(t) = \frac{1}{\beta_k \rho_k(T)} \{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T-t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k (T-t)) \psi_k - \\ - \delta \int_0^T F_k(\tau; u) (\sin \beta_k (T+t-\tau) + \delta \sin \beta_k (t-\tau)) d\tau \} + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau; u) \sin \beta_k (t-\tau) d\tau + F_k(t; u), \quad k = 1, 2, \dots$$

Hence we obtain:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq 2(1+\beta+a) \left[\rho(T)(1+|\delta|) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|^2) \right)^{1/2} + \varepsilon \rho(T)(1+|\delta|) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|^2) \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{T}(1+|\delta|)\rho(T)(1+|\delta|)\varepsilon \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |F_k(\tau; u)|^2) d\tau \right)^{1/2} \right] + 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|F_k(t; u)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2}$$

or

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq 2(1+\beta+a) \left(\rho(T)(1+|\delta|) \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \rho(T)(1+|\delta|)\varepsilon \| \psi'''(x) \|_{L_2(0,1)} + \right. \\ \left. + T(1+|\delta|)\rho(T)(1+|\delta|)\varepsilon \left\| 6u_x^3 + 18u \cdot u_x \cdot u_{xx} + 3u^2 \cdot u_{xxx} \right\|_{L_2(D_T)} \right) + 2 \left\| 3u^2 \cdot u_x \right\|_{C[0,T]} \Big|_{L_2(0,1)}.$$

The last relation means that function $u_{tt}(x,t)$ is continuous in D_T .

It is easy to verify that equation (1) and conditions (2), (3) are satisfied in the ordinary sense. So, $u(x,t)$ is solution of the problem (1) – (3) in the ball $K = K_R$ from $B_{2,T}^5$. Since equation (11) has unique solution in the ball $K = K_R$ from $B_{2,T}^5$, by the above mentioned corollary problem (1) – (3) has unique classical solution in the ball $K = K_R$ from $B_{2,T}^5$.

The theorem is proved.

Conclusion. Theorem on existence and uniqueness of solution of time-nonlocal boundary value problem for equation of motion of a homogeneous bar is proved.

1. Бардин Б.С., Фурта С.Д., В сб.: Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф, 1998. с. 13-22. 2. Изюмов Ю.А., Сыромятников В.И. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М.: Наука, 1984. 3. Керэфов А.А. Нелокальные граничные задачи для параболических уравнений. Дифференц. уравнения. 1979, Т.5, № 1, с. 74-78. 4. Кожанов А.И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений. Сибирский журнал индустриальной математики, Том VII, №1(17), 2004, с. 51-60. 5. Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки. Доклады Академии Наук, 2008, том 418, № 3, с. 295-299. 6. Либерман Г.М. Нелокальные задачи для квазилинейных параболических уравнений. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы: В честь акад. О.А. Ладыженской. Т. 1, Новосибирск, 2002, с. 233-254. 7. Митропольский Ю.О., Мосеенков Б.І Дослідження коливаний в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи). – Київ: Видавництво Київ. ун-ту, 1961. – 123 с. 8. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. – Баку, 2010, 168 с. 9. Шелухин В.В. Нелокальные по времени задачи для уравнений гидродинамики и вариационные принципы: Дисс. д.ф.-м.н., Новосибирск, 1992. 10. Chabrowsky J. On nonlocal problems for parabolic equations // Nagoya Math. J. – 1984. – P. 109-131. 11. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear dynamics and chaos. – Chichester; Singapore: Wiley, 1986.

УДК 517.945:519.46

М. Єров, д-р фіз.-мат. наук, проф., Н. Ічанська, канд. фіз.-мат. наук, доц.
k26@pntu.poltava.ua, natasha.ichanska@mail.ru

ОПЕРАТОРИ Q-УМОВНОЇ ІНВАРІАНТНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Досліджено Q-умовну симетрію нелінійних рівнянь теплопровідності відносно інволютивних множин двох операторів. Знайдено нові інволютивні множини з двох операторів відносно яких ці рівняння є Q-умовно інваріантними.

Q-conditional symmetry of equations of nonlinear heat equations with respect to an involute set consisting of two operators was investigated. The new involutes set consisting of two operators Q-conditional symmetry of equations of this class was found.

Вступ

Принципи симетрії відіграють фундаментальну роль у природознавстві. Закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху є наслідком однорідності, ізотропності чотиривимірного простору-часу. По відношенню до диференціальних рівнянь, симетрію можна також розглядати як принцип, за допомогою якого із найрізноманітніших логічно допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) відбираються тільки ті, котрі володіють широкою симетрією. Це пов'язано, перш за все, з тим, що основні фізичні закони, рівняння руху, різні математичні моделі володіють явною чи умовною, геометричною чи негеометричною, локальною чи нелокальною симетріями. Усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвелла і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень. Саме ця властивість виділяє їх із множини інших диференціальних рівнянь. Одними з таких рівнянь є нелінійні рівняння теплопровідності, які внаслідок свого широкого застосування є цікавим об'єктом дослідження багатьох науковців. Задачу дослідження симетрійних властивостей лінійного рівняння теплопровідності займався ще Софус Лі. На прикладі лінійного рівняння теплопровідності Дж. Блумен і І.Д. Коул [12] ввели поняття неklasичної симетрії диференціальних рівнянь.

Виявляється, що є цілі класи рівнянь, що широко застосовуються при описанні конкретних фізичних процесів, які не володіють лівською симетрією, а це означає, що метод Лі для них є малоефективним. І тому актуальною стала задача узагальнити метод Лі з метою побудови принципово нових анзаців і точних розв'язків, які не можуть бути отримані стандартним алгоритмом Лі. В 1969 році Дж. Блумен та І.Д. Коул в [12] ввели поняття неklasичних симетрій для пошуку нових анзаців і точних розв'язків. Продовження розвитку ідей Блумена і Коула спостерігається в працях Олвера та Розенау [18, 19], В.І. Фушича і І.М. Цифри [15]. На основі цих досліджень в працях В.І. Фушича, В.І. Чопика і М.І. Серова [5, 11, 9, 10] було розроблено новий метод знаходження симетрій, який отримав назву метод умовної симетрії. За допомогою цього методу можна одержати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді і зовсім відрізняється, від симетрії всієї множини розв'язків. Результати досліджень умовної симетрії деяких конкретних рівнянь представлені в [6, 10, 14, 17].

Задача дослідження Q-умовної симетрії рівняння теплопровідності розглядалася багатьма авторами. Так, Q-умовну інваріантність лінійного одновимірного рівняння теплопровідності вивчено в [13, 20]. Задачу про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності розв'язано в [3]. В [4, 6, 7, 8, 14, 9] досліджено умовну та Q-умовну симетрію одновимірних (1+1) нелінійних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u). \tag{1}$$

Ця стаття присвячена дослідженню Q-умовної симетрії нелінійних (1+2)-вимірних рівнянь теплопровідності:

$$H(u)u_0 + \Delta u = F(u), \tag{2}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}^1$, $x = (x_0, \bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $H(u)$ та $F(u)$ – довільні гладкі функції. Будь-яке рівняння (2) за допомогою заміни $u \rightarrow \int H(u)du$ можна привести до вигляду

$$u_0 + \nabla(g(u)\nabla u) = f(u), \tag{3}$$

де $g(u)$ та $f(u)$ записуються через $H(u)$ та $F(u)$.

Q-умовну симетрію рівнянь (3) відносно оператора

$$Q = A(x, u)\partial_0 + B^a(x, u)\partial_a + C(x, u)\partial_u, \tag{4}$$

вивчено в [2], де проведено повний опис операторів (4), відносно яких за умови $H(u) \neq 0$ рівняння (2) є Q-умовно інваріантними. В [2] подано результати вичерпної групової класифікації в класі рівнянь (2) з точки зору перетворень еквівалентності, що наведені в теоремі 1.

Теорема 1 Максимальною локальною групою G^\sim точкових перетворень еквівалентності рівнянь (2) є група, що складається з перетворень

$$\begin{aligned} x_0 &\rightarrow \beta_0 x_0 + \alpha_0, \quad x_a \rightarrow \beta_1 \gamma_{ab} x_b + \alpha_a, \quad u \rightarrow \beta_2 u + \alpha_3, \\ H &\rightarrow \beta_0 \beta_1^{-2} H, \quad F \rightarrow \beta_2 \beta_1^{-2} F, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\beta_0 \beta_2 \neq 0$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_l, \gamma_{ab} - 0$ сталі, $(\gamma_{ab}) \in O(2)$, $a, b = 1, 2$, $l = 0, 3$.

Використовуючи результати праць [1, 16, 2] для рівнянь (3), подамо результати групової класифікації у вигляді наступної теореми.

Теорема 2 Для будь-яких значень функцій $H(u)$ та $F(u)$ з точністю до групи еквівалентності (5) групова класифікація нелінійних рівнянь (2) вичерпно описується випадками, що наведені в таблиці 1.

Зауваження. Зазначимо також, що локальними перетвореннями

$$x_0 \rightarrow \frac{1}{\lambda_0 k} e^{\lambda_0 k x_0}, \quad u \rightarrow e^{\lambda_0 x_0} u \quad \text{та} \quad x_0 \rightarrow -\frac{1}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 x_0}, \quad u \rightarrow u - \lambda_0 x_0 \tag{6}$$

Рівняння $u^k u_0 + \Delta u = \lambda_0 u^{k+1} + \lambda u$, $e^u u_0 + \Delta u = \lambda_0 e^u + \lambda$ зводяться, відповідно, до рівнянь $u^k u_0 + \Delta u = \lambda u$, $e^u u_0 + \Delta u = \lambda$.

Тому в таблиці 1 випадки, що мають один номер зводяться один до другого, а саме $3a \rightarrow 3 (k = 1, m = 0)$, $4a \rightarrow 4 (m = 1)$, $6a \rightarrow 6$, $7a \rightarrow 7$.

Таблиця 1. Літвська симетрія нелінійного рівняння теплопровідності

№	$H(u)$	$F(u)$	Літвська симетрія	Зауваження
1	∇	∇	$A = \langle \partial_0, \partial_1, J_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 \rangle$	
2	∇	0	$A + \langle D = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a \rangle$	
3	e^{ku}	λe^{mu}	$A + \langle D_1 = 2(m-k)x_0 \partial_0 + mx_a \partial_a - 2\partial_u \rangle$	$m \neq k$
3a	e^u	$\lambda_0 e^u + \lambda$	$A + \langle D_4 = e^{\lambda_0 x_0} (\partial_0 + \lambda_0 \partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
4	u^k	λu^m	$A + \langle D_2 = 2(m-k-1)x_0 \partial_0 + (m-1)x_a \partial_a - 2u \partial_u \rangle$	$(k, m) \neq (0, 0), m \neq k+1$
4a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1} + \lambda u^m$	$A + \langle D_5 = e^{-\lambda_0 k x_0} (\partial_0 - \lambda_0 u \partial_u) \rangle$	$\lambda \neq 0$
5	1	$\lambda u \ln u$	$A + \langle e^{\lambda x_0} (\partial_a + \frac{\lambda}{2} x_a u \partial_u), e^{\lambda x_0} u \partial_u \rangle$	
6	u^k	0	$A + \langle D, D_3 = kx_a \partial_a - 2u \partial_u \rangle$	$k \neq 0$
6a	u^k	$\lambda_0 u^{k+1}$	$A + \langle D_3, D_5 \rangle$	$k \neq 0$
7	e^u	0	$\langle \partial_0, x_0 \partial_0 + \partial_u, \xi^a(\bar{x}) \partial_a - 2\xi_1^1 \partial_u \rangle$	$\xi_2^1 + \xi_1^2 = 0, \xi_1^1 = \xi_2^2$
7a	e^u	$\lambda_0 e^u$	$A + \langle D_4, \xi^a(\bar{x}) \partial_a - 2\xi_1^1 \partial_u \rangle$	$\xi_2^1 + \xi_1^2 = 0, \xi_1^1 = \xi_2^2$

Тут $\lambda \neq 0, m, k$ – сталі, $\lambda \in \{-1; 1\} \text{ mod } G^\sim$. У випадку 3 стала $k \in \{0; 1\} \text{ mod } G^\sim$ та $m \in \{0; 1\} \text{ mod } G^\sim$. У випадках 1 та 2, наведені алгебри є максимальними, якщо рівняння не є еквівалентним рівнянням, наведеним у випадках 3 – 7.

Розв'яжемо задачу: дослідити Q-умовну інваріантність нелінійних рівнянь теплопровідності відносно інволютивної множини двох операторів

$$Q_a = A^a(x, u) \partial_0 + B^{ab}(x, u) \partial_b + C^a(x, u) \partial_u \tag{7}$$

де $A, B^a, C, A^a, B^{ab}, C^a$ – довільні гладкі функції своїх аргументів, $a, b = 1; 2$.

Оскільки будь-який оператор літвської інваріантності є також оператором Q-умовної інваріантності, з іншого боку дослідження буде проводитися з точки зору перетворень еквівалентності, тому шукаємо оператори Q-умовної інваріантності, які не є еквівалентними літвським. Зазначимо, що функції $H(u)$ та $F(u)$, при яких рівняння (2) зводяться локально заміною до лінійного рівняння теплопровідності ми також не розглядаємо, так як це рівняння досліджено в [3].

З точністю до еквівалентності множин операторів Q-умовної симетрії можливі три різні випадки :

1. Якщо координати операторів Q_a пропорційні, то множина (7) еквівалентна одному оператору (4);

2. Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{vmatrix} \neq 0$ то множина (7) еквівалентна множині операторів вигляду

$$\bar{Q} = \bar{A} \partial_0 + \bar{\partial} + \bar{C} \partial_u, \tag{8}$$

де $\bar{A} = \bar{A}(x, u), \bar{C} = \bar{C}(x, u)$ – довільні гладкі функції;

3. Якщо $\Delta = 0$, то множина (7) еквівалентна множині операторів

$$Q_1 = \partial_0 + C \partial_u, \quad Q_2 = B \partial_1 + \partial_2 + D \partial_u \tag{9}$$

де $C = C(x, u), B = B(x, u), D = D(x, u)$ – довільні гладкі функції.

У даній статті досліджено Q-умовну інваріантність рівняння (2) відносно інволютивної множини двох операторів (8).

Методи дослідження

Нами використовується поняття інваріантності рівняння відносно операторів Q-умовної симетрії [11] та відносно інволютивних множин Q-умовних операторів [21]. Подамо основні означення.

Означення 1 [22] Множина диференціальних операторів першого порядку

$$Q_a = \sum_{i=1}^n \xi_{ai}(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_a(x, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad a = 1, \dots, m, \tag{10}$$

називається інволютивною, якщо існують такі гладкі функції $\mu_{ab}^c(x, u), a, b, c = 1, \dots, m$, що $[Q_a, Q_b] = \sum_{c=1}^m \mu_{ab}^c(x, u) Q_c$.

Означення 2 [21] Диференціальне рівняння з частинними похідними S є Q-умовно інваріантним відносно інволю-

тивної множини диференціальних операторів (10), якщо
$$\left. \begin{matrix} Q_a S \\ r \\ S=0, M \end{matrix} \right| = 0,$$

де M – множина всіх диференціальних наслідків рівнянь $Q_a[u^b] = 0$, порядок яких як диференціальних рівнянь не перевищує порядку рівняння S.

Означення 3 [21] Множини диференціальних операторів першого порядку $Q = \{Q_a\}$ та $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_a\}$ називаються еквівалентними, якщо вони задовольняють умову $\tilde{Q} = A(x,u)Q$, де $A = A(x,u)$ – невідроджена функціональна матриця.

Означення 4 [3] Дві інволютивні множини називаються еквівалентними відносно групи перетворень, якщо існує перетворення з групи, що перетворює одну інволютивну множину в еквівалентну іншій.

Інволютивні множини з двох операторів Q-умовної інваріантності

Дослідимо інваріантність рівняння (2) відносно множини операторів (8). Справедливе наступне твердження.

Теорема 3. Рівняння (2) є Q-умовно інваріантним відносно множини операторів (8), якщо

$$\begin{aligned}
 &A_u^b (\bar{A}^2)_u = \bar{A}^2 A_{uu}^b, \\
 &C^1 C_u^2 + C_1^2 + A^1 C_0^2 = C^2 C_u^1 + C_2^1 + A^2 C_0^1, \\
 &C^1 A_u^2 + A_1^2 + A^1 A_0^2 = C^2 A_u^1 + A_2^1 + A^2 A_0^1, \\
 &\bar{A}^2 C_{uu}^a + 2A^b A_{bu}^a + 2\bar{A}\bar{C}A_{uu}^a + 2(A_b^a + C^b A_u^a)[A_u^b - \frac{A^b}{\bar{A}^2}(\bar{A}^2)_u] - 2A_u^a[(\bar{A}\bar{C})_u + A_b^b - H] = 0, \\
 &C^a \dot{H} - A_0^a H = 3A_u^a F - 2C_b^b A_u^a + 2A_b^a C_u^b - 2A_b^a A_0^b - \\
 &- 2A_u^a \bar{A}_0 \bar{C} + \frac{2A^b}{\bar{A}^2} (A_b^a + C^b A_u^a)[H - A_d^d + \frac{1}{2}(\bar{A}^2)_0 - (\bar{A}\bar{C})_u - \bar{A}\bar{C}_u] + \Delta A^a + 2C^b A_{bu}^a + \bar{C}^2 A_{uu}^a + 2A^b C_{bu}^a + 2\bar{A}\bar{C}C_{uu}^a, \\
 &C^a \dot{F} - C_u^a F = C_0^a H + (A_b^a + C^b A_u^a) \left[\frac{2A^b}{\bar{A}^2} (F - C_d^d - \frac{1}{2}(\bar{C}^2)_u + \bar{A}\bar{C}_0) - 2C_0^b \right] + \Delta C^a + 2C^b C_{bu}^a + \bar{C}^2 C_{uu}^a, \quad a, b, d = 1; 2.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Доведення. Умови Q-умовної інваріантності рівняння (2) відносно операторів (8) мають вигляд

$$\left. \begin{matrix} Q_a S \\ 2 \end{matrix} \right|_{D^k(Q_a u)=0, S=0} = 0, \quad \left. \begin{matrix} Q_a(Q_b u) \\ 1 \end{matrix} \right|_{Q_c u=0} = 0,$$

де $S = Hu_0 + \Delta u - F$. Якщо використати формули продовження, диференціальні наслідки рівнянь $Q_a u = 0$, порядок яких не перевищує порядку рівняння (2), та взяти до уваги те, що функції \bar{A} , \bar{C} , H – не залежать від похідних функції u , то одержимо рівності (11).

Теорему 3 доведено.

У тому випадку, коли функції A^a та C^a залежать тільки від u , система визначальних рівнянь (11) значно спрощується і стає можливим знайти її загальний розв'язок.

Теорема 4. Будь-яка множина операторів

$$\bar{Q} = \bar{A}(u)\partial_0 + \bar{\partial} + \bar{C}(u)\partial_u \tag{12}$$

Q-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності (2) або є еквівалентною множині операторів лівської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності (5) та додаткових перетворень (6) є еквівалентною одній з множин, які наведені в таблиці 2.

Таблиця 2. Оператори Q – умовної інваріантності нелінійного рівняння теплопровідності

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори	Зауваження
1	$-\left(\frac{G_u}{u} + \frac{1}{2}G_{uu}\right)$	$G\left(G_u + \frac{\lambda_0}{u^2}\right)$	$\bar{Q} = -\frac{\bar{a}}{u}\partial_0 + \bar{\partial} + \bar{a}G\partial_u$	$G(u) = \frac{1}{u}P_3(u)$
2	$-\left(\frac{G_u}{u} + \frac{1}{2}G_{uu}\right)$	$G\left(G_u + \frac{\lambda_0}{u^2}\right)$	$\bar{Q} = (\bar{a}t + \bar{b})\partial_0 + \bar{\partial} + \bar{a}G\partial_u$	$G(u) = \frac{1}{1+t^2}P_3(t), t = tg u$

Тут \bar{a} , \bar{b} – сталі вектори такі, що $\bar{a}^2 = \bar{b}^2 = 1$, $\bar{a}\bar{b} = 0$, $P_3(\tau) = \lambda_0 + \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \lambda_3\tau^3$ – довільний многочлен третього порядку відносно τ .

Доведення. У тому випадку, коли функції A^a та C^a залежать тільки від u , система визначальних рівнянь (11) має вигляд

$$C^1 C_u^2 = C^2 C_u^1, \quad C^1 A_u^2 = C^2 A_u^1, \quad A_u^a (\bar{A}^2)_u = \bar{A}^2 A_{uu}^a, \tag{13}$$

$$\bar{A}^2 C_{uu}^a + 2\bar{A}\bar{C}A_{uu}^a + 2A_u^a[\bar{C}\bar{A}_u - \frac{\bar{A}\bar{C}}{\bar{A}^2}(\bar{A}^2)_u] = 2A_u^a[(\bar{A}\bar{C})_u - H], \tag{14}$$

$$C^a \dot{F} - C_u^a F = 2A_u^a \frac{\bar{A}\bar{C}}{\bar{A}^2} [F - \frac{1}{2}(\bar{C}^2)_u] + \bar{C}^2 C_{uu}^a, \tag{15}$$

$$C^a \dot{H} = 3A_u^a F + 2A_u^a \frac{\bar{A}\bar{C}}{\bar{A}^2} [H - (\bar{A}\bar{C})_u - \bar{A}\bar{C}_u] + \bar{C}^2 A_{uu}^a + 2\bar{A}\bar{C}C_{uu}^a. \tag{16}$$

Після інтегрування рівнянь (13) маємо:

$$C^2 = k_1 C^1, A^2 = k_1 A^1 + k_2, A_u^a = m_a (\bar{A})^2. \quad (17)$$

Інтегрування останнього рівняння (17) задає два різні випадки: $\bar{A} = -\frac{\bar{a}}{u}$ та $\bar{A} = \bar{a} \operatorname{tg} u + \bar{b}$, де \bar{a}, \bar{b} – такі сталі вектори, що $\bar{a}^2 = \bar{b}^2 = 1, \bar{a}\bar{b} = 0$.

Розглянемо перший випадок, для другого випадку доведення проводиться аналогічно. Підставивши $\bar{A} = -\frac{\bar{a}}{u}$ в рівняння (13), одержуємо $\bar{C} = \bar{a} G(u)$, де $G(u)$ – довільна гладка функція. Після підстановки функцій \bar{A} та \bar{C} в рівняння (14) та (15) отримаємо $H = -\frac{1}{2}(G_{uu} + \frac{2}{u}G_u), F = G(G_u + \frac{\lambda_0}{u^2})$, де λ_0 – довільна стала. Підставивши знайдені H та F в рівняння (16), одержуємо $G_{uuu} = -\frac{6\lambda_0}{u^4}$. Звідки остаточно отримуємо вигляд функції G з пункту 1 таблиці 2: $G = \frac{1}{u}P_3(u)$, де $P_3(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3$ – довільний поліном третього степеня.

Теорему 4 доведено.

Крім розв'язків системи (11), наведених в таблиці 2, можна знайти й інші, коли функції A^a та C^a залежать не тільки від u . Так, наприклад,

$$H(u) = 2 \ln u, \quad F(u) = u(\ln u - \ln^2 u + \lambda), \quad \lambda = \text{const}, \\ A^1 = 1, \quad A^2 = 1, \quad C^1 = 0, \quad C^2 = -e^{x_1 - x_0} u.$$

В результаті одержимо Q-умовні оператори

$$Q_1 = \partial_0 + \partial_1, \quad Q_2 = \partial_0 + \partial_2 - e^{x_1 - x_0} u \partial_u \quad (18)$$

для рівняння

$$2 \ln u u_0 + \Delta u = u(\ln u - \ln^2 u + \lambda). \quad (19)$$

Узагальнення результатів для рівнянь більшої розмірності

Одержувати Q-умовні оператори багатовимірних рівнянь (2) можна з вже відомих операторів літвської або Q-умовної симетрії одновимірних рівнянь (1) шляхом їх узагальнення. Справедливість застосування одного з таких методів узагальнення доводить наступна теорема.

Теорема 5. Якщо оператор

$$Q = A(x_0, \omega, \varphi) \partial_0 + B(x_0, \omega, \varphi) \partial_\omega + C(x_0, \omega, \varphi) \partial_\varphi \quad (20)$$

є оператором літвської або Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння

$$S(\varphi, \varphi_0, \varphi_\omega^2, \varphi_{\omega\omega}) = 0, \quad \varphi = \varphi(x_0, \omega), \quad (21)$$

то оператори $\bar{Q} = \bar{a} A(x_0, \bar{a}\bar{x}, u) \partial_0 + B(x_0, \bar{a}\bar{x}, u) \bar{\partial} + \bar{a} C(x_0, \bar{a}\bar{x}, u) \partial_u$, утворюють множину операторів Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння

$$S(u, u_0, u_a u_a, \Delta u) = 0, \quad (22)$$

де $u = u(x_0, \bar{x}), \bar{a} = \text{const}, (\bar{a})^2 = 1, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доведення. Теорема доводиться методом дослідження умовної симетрії, наведеним в [11]. Для цього треба показати, що $Q_a S = \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u$, де λ_1, λ_2 – деякі диференціальні оператори.

Подіавши продовженим оператором Q_a на рівняння (22) і використавши той факт, що рівняння (21) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (20), тобто $Q_a S = \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u$, одержуємо

$$Q_a S = \alpha_a \lambda_1 S + \lambda_2 Q_a u + \left[\frac{1}{B} (\Delta B + 2B_{bu} u_b + B_{uu} u_b u_b + B_u \Delta u) \alpha_c S_{\Delta u} + \frac{2}{B} (B_b u_b + B_u u_b u_b) \alpha_c S_{u_a u_a} + \right. \\ \left. + \frac{1}{B} (B_0 + B_u u_0) \alpha_c S_{u_0} + \alpha_c - 2(B_b + B_u u_b) \partial_c \right] (\alpha_c Q_a u - \alpha_a Q_c u).$$

що і треба було довести.

Використовуючи теорему 5, з відомих операторів Q-умовної інваріантності (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності [6, 14] шляхом узагальнення $u = \varphi(x_0, \omega), \omega = \bar{a}\bar{x}, \bar{a}^2 = 1$ одержуються нові оператори Q-умовної симетрії для рівняння (2).

Крім методу запропонованого в теоремі 5, можна застосувати й інші методи, наприклад, якщо використати інваріантність рівняння (2) відносно алгебри $AO(3)$. В таблиці 3 наведено деякі результати, що отримані такими способами.

Таблиця 3. Оператори Q –умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності

№	$H(u)$	$F(u)$	Оператори
1	1	λu^3	$Q_a = \frac{1}{3} \alpha_a (\bar{\alpha} \bar{x}) \partial_0 + \partial_a + \frac{\alpha_a u}{\bar{\alpha} \bar{x}} \partial_u$
2	1	$F(u)$	$Q_a = \bar{\alpha} \bar{x} \partial_a + \alpha_a F(u) \partial_u, \quad F \ddot{F} = 2(\dot{F} - 1)$
3	1	$2P_3(u)$	$Q_a = \alpha_a \partial_0 + 3u \partial_a + 3\alpha_a P_3(u) \partial_u, \quad \text{де } P_3(u) = u^3 + \lambda_1 u + \lambda_0$
4	1	$F(u)$	$Q_a = 2\sqrt{\lambda_0} \partial_a + \alpha_a F(u) \partial_u, \quad F \ddot{F} = 2$
5	$\frac{1}{u}$	$\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}$	$Q_a = \alpha_a \partial_0 + \frac{u}{\bar{\alpha} \bar{x}} \partial_a + \alpha_a (\lambda_1 u + \lambda_2) \partial_u, \quad F \ddot{F} = 2(\dot{F} - 1)$
6	$3\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{u}$	$(2\lambda_3 + \frac{\lambda_2}{u})P_3$	$Q_a = \alpha_a \partial_0 + u \partial_a + \alpha_a P_3(u) \partial_u, \quad \text{де } P_3(u) = \lambda_3 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$
7	$\lambda_1 u - \lambda_2$	$\lambda_3 u^3 - 2u$	$Q_a = \frac{1}{3} \alpha_a \lambda_2 \partial_0 + th(\bar{\alpha} \bar{x}) \partial_a + \frac{\alpha_a u}{ch^2(\bar{\alpha} \bar{x})} \partial_u$
8	$\frac{1}{u^4}$	$m^2 u + \frac{\lambda}{u^3}$	$Q_a = 2m \alpha_a e^{-2m \bar{\alpha} \bar{x}} \partial_0 + \partial_a + m \alpha_a u \partial_u$
9	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2$	$\lambda_3 u^3 + 2u$	$Q_a = \alpha_a \lambda_2 \cos^2(\bar{\alpha} \bar{x}) \partial_0 - \frac{1}{2} \sin(2\bar{\alpha} \bar{x}) \partial_a - \alpha_a u \partial_u$
10	$\lambda_1 u^2 + \lambda_2$	$\lambda_3 u^3$	$Q_a = \frac{\alpha_a}{3} \lambda_2 (\bar{\alpha} \bar{x})^2 \partial_0 + \bar{\alpha} \bar{x} \partial_a + \alpha_a u \partial_u$
11	e^u	e^u	$Q_a = \bar{\alpha} \bar{x} \partial_a - 2 \alpha_a \partial_u$
12	e^u	e^u	$Q_a = \partial_a + \alpha_a tg \frac{(\bar{\alpha} \bar{x})}{2} \partial_u$
13	e^u	e^u	$Q_a = \partial_a + \alpha_a th \frac{(\bar{\alpha} \bar{x})}{2} \partial_u$
14	$\frac{2}{\lambda_1 u^{2-n} + \lambda_2}$	$\frac{4-n}{\lambda_3 u^{2-n}}$	$Q_a = \frac{\lambda_2}{4-n} \alpha_a \partial_0 + \partial_a + (2-n) \frac{\lambda_2 \alpha_a}{x} u \partial_u, n \neq 2, 4$
15	$\frac{\lambda_1}{u}$	λ_3	$Q_a = 2k x_a \partial_0 - \partial_a + \frac{2x_a}{x^2} u \partial_u, \text{де } n = 4$
16	$\lambda_1 u^k$	$\lambda_2 u^{k+1}$	$Q_a = 2x_a \partial_0 - x^2 \partial_a + \frac{2x_a}{k} u \partial_u, \text{де } n = 2, k \neq 0$

Тут $m, \lambda, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\alpha}, n, k$ – довільні сталі.

Висновки

Розв'язано задачу знаходження інволютивних множин Q-умовних операторів інваріантності (1+2)-вимірного рівняння теплопровідності вигляду (8).

Зокрема, за умови, що координати операторів залежать тільки від змінної u , проведено повний опис множин двох операторів (7) Q-умовної інваріантності рівняння (2). За відомими операторами лівської та Q-умовної інваріантності (1+1) – вимірного рівняння теплопровідності отримано оператори Q-умовної інваріантності (1+n) – вимірного рівняння теплопровідності.

1. Дородницін В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двух и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19. – С.1215–1223. 2. Ічанська Н.В. Q – умовна інваріантність нелінійних (1+2) – вимірних рівнянь реакції – дифузії // Математичний вісник НТШ – 2010 р. – Т.7. – С.45 –74. 3. Попович Р.О., Корнева І.П. Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності // Симетричні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. – 1998. – Т.19. – С.200–211. 4. Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр.мат.журн. – 1990. – Т.42, №10. – С.1370–1376. 5. Фушич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр.мат.журн.– 1991– 43, №11.– С.1456–1470. 6. Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – Сер.А, №7. – С.24–27. 7. Фушич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности // Доклады АН Украины. – 1992. – №1. – С.26–30. 8. Фушич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – №11. – С.15–18. 9. Фушич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1988. – Сер. А, №9. – С.17–20. 10. Фушич В.И., Чопик В.И. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь // Укр.мат.журн. – 1993. – Т. 45, №10. – С.1433–1443. 11. Фушич В.И., Штельен В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наукова думка. – 1989. – 339с. 12. Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – Vol. 18, №11. – P. 1025–1042. 13. Fushchich W.I., Serov N.I., Shtelen V.M., Popovich R.E. Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. 1992. – №12. – P.27–32. 14. Fushchich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. The Conditional Invariance, Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. – 1993. – №4. – P.37–40. 15. Fushchich W., Tsyfra I. On reduction, exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. –Vol. 20. – P. L 45–L 47. 16. Ibragimov N.H. (Editor) Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions, conservation laws // Boca Raton, FL, Chemical Rubber Company. – 1994. – Vol. 1. 17. Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – Vol. 22, №15. – P. 2915–2924. 18. Olver P., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. – 1987. – Vol.47. – P.263–278. 19. Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat, wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – Vol. 118, №4. – P.172–176. 20. Popovych R.O. On reduction, Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – Vol. 2. – P.437–443. 21. Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2000. – Vol. 30, Part 1. – P.184–189. 22. Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – Vol. 238, №1. – P.101–123.

УДК 620.179

В. Богданов, канд. фіз.-мат. наук, Г. Сулим, д-р фіз.-мат. наук,
e-mail: vladislav_bogdanov@hotmail.com

ДИНАМІЧНИЙ РОЗВИТОК ТРІЩИНИ У КОМПАКТНОМУ ЗРАЗКУ ЗА ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЮ МОДЕЛЛЮ ПЛОСКОГО ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

З використанням різницевих методів досліджується плоский напружений стан тонкого компактного зразка для визначення в'язкості руйнування (тріщиновитримності) в нестационарній пружно-пластичній постановці з урахуванням підростання тріщини за навантаження, яке прикладене до локалізованої області та змінюється з часом за лінійним законом. Тріщина підостає за умови відсутності максимальних напружень в області вістря тріщини. В ролі основного незалежного параметра для виявлення розвитку полів напружень, деформацій, параметра Одквіста, пружних і пластичних складових енергії деформації та інших величин вибрано розрахункове значення коефіцієнта інтенсивності напружень біля тріщини у статичній задачі для пружно деформованого компактного зразка. Виявлені особливості зміни напружень при досягненні згаданими коефіцієнтами інтенсивності напружень певних критичних значень.

On the base of developed method of solving problems of planar stress state in non-stationary plastic-elastic model the problem of crack cleavage was solved when non-stationary pressure is applied. The non-stationary pressure time dependence is linear and area of that pressure has not changed. The crack is growing when maximal stresses in the area of top of crack are absent. There were determined dependences of plastic and elastic deformation energies and areas of plastic deformations for different values of stress intensity.

1. Вступ

У працях В.І.Махненка [7, 8] запропоновано для аналізу процесів руйнування застосувати поряд із експериментальними також і розрахункові методи із використанням квазістатичної пружно-пластичної моделі матеріалу. Ці результати узагальнено у [1–4], де визначальні співвідношення для пружно-пластичного деформування поєднано із динамічними рівняннями у припущенні, що тріщина є нерухомою. Запропоновані моделі дали можливість істотно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів, однак їхнє застосування можна вважати коректним лише у разі повільного підростання тріщини.

У цьому дослідженні методика праці [3] поширена на той випадок, коли тріщина динамічно просувається у пружно-пластичному зразку після його динамічного навантаження.

2. Математичне формулювання задачі

Розглядається деформування компактного (балкового) зразка у формі прямокутника $\Sigma = L \times B$ ($-L/2 \leq x \leq L/2$; $0 \leq y \leq B$) з пропилом-тріщиною початкової довжини $l = l_0$ уздовж відрізка $\{x = 0; 0 \leq y \leq l_0\}$ і контактує з двома нерухомими опорами уздовж $\{L_* \leq |x| \leq L_* + a; y = 0\}$. Товщина w зразка вважається настільки великою, щоб можна було використовувати залежності плоского деформованого стану ($\sigma_{zz} = \text{const}$, $\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{yz} = 0$).

Зверху на тіло падає абсолютно жорсткий ударник, що контактує уздовж відрізка $\{|x| \leq A; y = B\}$. Його дію на тіло замінимо рівномірно розподіленим в області контакту нормальним напруженням $-P$, що змінюється з часом як лінійна функція $P = p_{01} + p_{02}t$. З огляду на симетрію процесу деформування відносно лінії $x = 0$ далі розглядається лише права частина поперечного перерізу (рис. 1а). Вважатимемо, що матеріал є пружно-пластичним із зміцненням, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних $d\varepsilon^p$, а також параметра Одквіста $k = \int d\varepsilon^p$ будемо нижче здійснювати на основі числового розв'язування відповідної динамічної пружно-пластичної задачі. При здійсненні розрахунків використаємо відомі методики дослідження квазістатичної пружно-пластичної [7, 8] моделі, що враховують нестационарність навантаження і застосовують числове інтегрування, зреалізоване в розрахунку динамічної пружної моделі [11]. При розрахунку динамічних полів напружень і деформацій не враховуємо взаємодії хвильових полів, відбиття від межі тіла і можливої при цьому контактної взаємодії між берегами розрізу.

Розглядаються рівняння плоскої динамічної теорії, для якої компоненти вектора зміщень $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння руху середовища густиною ρ мають вигляд

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.$$

Крайові умови задачі, які враховують зміну довжини тріщини, однак виходять із припущення про незмінність області прикладання реакції, розташування опор, а також визначення опорних реакцій за допомогою методів статички, запишуться так:

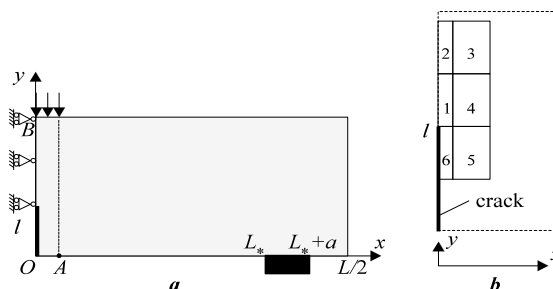


Рис. 1. Геометрична схема задачі (а) і сітка розбиття біля вістря тріщини (б)

$$\begin{aligned}
 x = 0, \quad 0 < y < l: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = 0; \quad l < y < B: & \quad u_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 x = L/2, \quad 0 < y < B: & \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad 0 < x < L^*: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L^* < x < L^* + a: & \quad u_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = 0, \quad L^* + a < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad 0 < x < A: & \quad \sigma_{yy} = -P, \quad \sigma_{xy} = 0; \\
 y = B, \quad A < x < L/2: & \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Початкові умови мають вигляд

$$u_x|_{t=0} = 0, \quad u_y|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_x|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_y|_{t=0} = 0, \quad l|_{t=0} = l_0, \tag{2}$$

В основу визначальних співвідношень механічної моделі покладено теорію неізотермічного пластичного течіння середовища із зміцненням за умови текучості Губера – Мізеса. Ефектами повзучості і температурним розширенням нехтуємо. Тоді, вважаючи компоненти тензора деформацій сумою пружних і пластичних його складових, отримаємо для них

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij} + K\sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda. \tag{3}$$

тут $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – компоненти девіатора тензора напружень; δ_{ij} – символ Кронекера; G – модуль зсуву; $K_1 = (1 - 2\nu)/(3E)$, $K = 3K_1$ – модуль об’ємного стиску, що зв’язує у співвідношенні $\varepsilon = K\sigma + \varphi$ об’ємне розширення 3ε (температурне розширення $\varphi \equiv 0$); E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуасона; $\sigma = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ – середнє напруження; $d\lambda$ – деяка скалярна функція, що визначається умовою пластичності (формою поверхні навантаження) і з огляду на згаданий вище його вибір квадратично залежить від компонент девіатора напружень s_{ij} [8].

Матеріал зміцнюється з коефіцієнтом зміцнення η^* [7]:

$$\sigma_S(T) = \sigma_{02}(T_0) \left(1 + \frac{\kappa(T)}{\varepsilon_0} \right)^{\eta^*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(T_0)}{E}, \quad T_0 = 20^\circ \text{C}, \tag{4}$$

де $\sigma_S(T)$ – межа текучості після зміцнення матеріалу за температури T .

Перепишемо (3) у розгорнутій формі:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{xx} &= d \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{xx} - \sigma) d\lambda, \quad d\varepsilon_{yy} = d \left(\frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{yy} - \sigma) d\lambda, \\
 d\varepsilon_{zz} &= d \left(\frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma \right) + (\sigma_{zz} - \sigma) d\lambda, \quad d\varepsilon_{xy} = d \left(\frac{\sigma_{xy}}{2G} \right) + \sigma_{xy} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{5}$$

причому

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \left\{ 0, \quad (f \equiv \sigma_i^2 - \sigma_S^2(T) < 0); \quad \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}, \quad (f = 0, \quad df = 0) \right\}, \\
 d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left((d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p)^2 + (d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + (d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(d\varepsilon_{xy}^p)^2 \right)^{1/2}, \\
 \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + 6\sigma_{xy}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

На відміну від традиційної плоскої деформації, коли $\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \text{const}$, для уточненого опису деформування зразка з урахуванням можливого приросту поздовжнього видовження $\Delta\varepsilon_{zz}$ подамо його у вигляді [1, 6, 8]

$$\Delta\varepsilon_{zz}(x, y) = \Delta\varepsilon_{zz}^0 + \Delta\chi_x x + \Delta\chi_y y. \tag{7}$$

де невідомі $\Delta\chi_x$ і $\Delta\chi_y$ характеризують згин призматичного тіла (яке моделює в механіці деформівного твердого тіла стан плоскої деформації) в площинах Ozx і Ozy відповідно, а $\Delta\varepsilon_{zz}^0$ – прирости за згаданого згину деформації вздовж волокон $x = y = 0$.

3. Схема розв’язування задачі.

Нехай нестационарна взаємодія відбувається в інтервалі часу $t \in [0, t^*]$. Тоді для кожного моменту часу t з цього інтервалу:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^e &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{yy}^e = \frac{\sigma_{yy} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{zz}^e = \frac{\sigma_{zz} - \sigma}{2G} + K\sigma, \quad \varepsilon_{xy}^e = \frac{\sigma_{xy}}{2G}, \\
 \frac{d\varepsilon_{xx}^p}{dt} &= (\sigma_{xx} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{dt} = (\sigma_{yy} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{zz}^p}{dt} = (\sigma_{zz} - \sigma) \frac{d\lambda}{dt}, \quad \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{dt} = \sigma_{xy} \frac{d\lambda}{dt}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Для числового інтегрування за часом використовувалася квадратурна формула Грегорі [10] порядку $m_1 = 3$ з коефіцієнтами D_n . Після рівномірної дискретизації за часом з вузлами $t_k = k\Delta t \in [0, t^*]$ ($k = \overline{0, K}$) для кожного значення k запишемо відповідні вузлові значення приростів деформацій:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{xx,k} &= B_1 \sigma_{xx,k} + B_2 \sigma_{yy,k} - \beta_{xx}, \quad B_1 = \frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{3} \left(K + \frac{1}{G} + 2D_0 \Delta \lambda_k \right), \\ \Delta \varepsilon_{yy,k} &= B_2 \sigma_{xx,k} + B_1 \sigma_{yy,k} - \beta_{yy}, \quad B_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \left(K - \frac{1}{2G} - D_0 \Delta \lambda_k \right), \\ \Delta \varepsilon_{zz,k} &= \alpha_1 \sigma_{zz,k} + \alpha_2 (\sigma_{xx,k} - \sigma_{yy,k}) - b_{zz}, \quad B_3 = \frac{1}{2G} + D_0 \Delta \lambda_k, \quad \Delta \varepsilon_{xy,k} = B_3 \sigma_{xy,k} - b_{xy}, \\ \beta_{xx} &= b_{xx} - \alpha_2 (b_{zz} + \Delta \varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \quad \beta_{zz} = -(b_{zz} + \Delta \varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \quad \beta_{yy} = b_{yy} - \alpha_2 (b_{zz} + \Delta \varepsilon_{zz}) / \alpha_1, \\ b_{ij} &= \frac{1}{2G} \sigma_{ij,k-1} + \delta_{ij} \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma_{k-1} - \sum_{n=1}^{m_1-1} D_n (\sigma_{ij,k-n} - \delta_{ij} \sigma_{k-n}) \Delta \lambda_{k-n}, \quad (i, j = x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

Функція $\psi = 1/(2G) + \Delta \lambda$, що характеризує умову текучості, з урахуванням (6), (7) дорівнює:

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \frac{1}{2G} \quad (f < 0), \quad \frac{1}{2G} + \frac{3\Delta \varepsilon_f^p}{2\sigma_f} \quad (f = 0, \quad df = 0) \right\}, \\ \Delta \varepsilon_f^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left((\Delta \varepsilon_{xx}^p - \Delta \varepsilon_{yy}^p)^2 + (\Delta \varepsilon_{xx}^p - \Delta \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta \varepsilon_{yy}^p - \Delta \varepsilon_{zz}^p)^2 + 6(\Delta \varepsilon_{xy}^p)^2 \right), \\ \varepsilon_{xx}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{xx} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma, \quad \Delta \varepsilon_{xx}^p = \Delta \varepsilon_{xx} - \Delta \varepsilon_{xx}^e, \\ \varepsilon_{yy}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{yy} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma, \quad \Delta \varepsilon_{yy}^p = \Delta \varepsilon_{yy} - \Delta \varepsilon_{yy}^e, \\ \varepsilon_{zz}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{zz} + \left(K - \frac{1}{2G} \right) \sigma, \quad \Delta \varepsilon_{zz}^p = \Delta \varepsilon_{zz} - \Delta \varepsilon_{zz}^e, \\ \varepsilon_{xy}^e &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy}, \quad \Delta \varepsilon_{xy}^p = \Delta \varepsilon_{xy} - \Delta \varepsilon_{xy}^e. \end{aligned} \tag{10}$$

Урахування під час розрахунків величини $\Delta \varepsilon_{zz}^p$ виявило, що її вплив настільки малий, що без зменшення точності обчислень можна вважати $\Delta \varepsilon_{zz}^p = 0$.

Для урахування фізичної нелінійності, що міститься в залежностях (10), застосовується метод послідовних наближень, який дає можливість нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [8]:

$$\begin{aligned} \psi^{(n+1)} &= \left\{ \psi^{(n)} \rho + \frac{1-\rho}{2G} \quad (Q_i < -Q); \quad \psi^{(n)} \quad (|Q_i| < Q); \quad \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(T)} \quad (Q_i > Q) \right\}, \\ Q_i &= \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(T). \end{aligned} \tag{11}$$

де Q – найбільше відхилення інтенсивності напружень від зміцненої межі текучості; емпірична стала $0 \leq \rho \leq 1$ визначається для різних типів матеріалів.

Розв'язок системи (9) дає вирази для компонент тензора напружень на кожному кроці:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,k} &= A_1 \Delta \varepsilon_{xx,k} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy,k} + Y_{xx}, \quad Y_{xx} = A_1 \beta_{xx} + A_2 \beta_{yy}, \quad A_1 = B_1 / (B_1^2 - B_2^2), \\ \sigma_{yy,k} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx,k} + A_1 \Delta \varepsilon_{yy,k} + Y_{yy}, \quad Y_{yy} = A_2 \beta_{xx} + A_1 \beta_{yy}, \quad A_2 = -B_2 / (B_1^2 - B_2^2), \\ \sigma_{zz,k} &= -\alpha_2 (\sigma_{xx,k} + \sigma_{yy,k}) / \alpha_1 - \beta_{zz}, \quad \sigma_{xy,k} = A_3 \Delta \varepsilon_{xy,k} + Y_{xy}, \quad Y_{xy} = A_3 b_{xy}, \quad A_3 = 1/B_3. \end{aligned} \tag{12}$$

Невідомі $\Delta \chi_x$, $\Delta \chi_y$ і $\Delta \varepsilon_{zz}^0$ в (7) визначаються з умов врівноваженості парних щодо x нормальних напружень σ_{zz}

$$\int_{\Sigma} \int \sigma_{zz}(x, y) \xi dx dy = M_{\xi}, \quad (\xi = 1, x, y) \quad \text{при} \quad M_1 = M_x = M_y = 0, \tag{13}$$

де M_1 – проекція на вісь z головного вектора контактних напружень, а M_x, M_y – відповідні проекції головного моменту зусиль, що діють на опору (кручення, як зазначалося, відсутнє). З огляду на симетрію задачі та $\sigma_{zz}(x, y) = \sigma_{zz}(-x, y)$ це рівняння у разі $\xi = x$ задовольняється автоматично.

Якщо у (13) підставити (7) і (12), з урахуванням симетричності області інтегрування щодо x і парності функцій $\sigma_{xx,k}, \sigma_{yy,k}, b_{zz}$, матимемо $\Delta \chi_x = 0$. Для обчислення $\Delta \varepsilon_{zz}^0$, $\Delta \chi_y$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{zz}^0 L_{\xi 1} + \Delta \chi_y L_{\xi y} = \bar{M}_{\xi}, \quad L_{\xi r} = \int_{\Sigma} \frac{\xi r dx dy}{\alpha_1}, \\ \bar{M}_{\xi} = \int_{\Sigma} \frac{\alpha_2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) - b_{zz}}{\alpha_1} \xi r dx dy, \quad (r, \xi = 1, y). \end{aligned} \tag{14}$$

Інтенсивність напружень і деформацій, що використовуються вище, визначалися для кожної елементарної комірки із числового розв'язку. Незалежним параметром, який характеризує процес навантаження, є час $t_k = k\Delta t$, а відтак і відповідна цьому моменту часу сила $F = 2AP$ контактної взаємодії ударника зі зразком. Оскільки в механіці руйнування в'язкість руйнування (тріщиновитримність) переважно отримують у квазістатичних експериментах та зіставляють її із граничним значенням коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН) K_I , отриманим із пружного розв'язку, то для опису зміни окремих характеристик в ролі незалежного параметра (змінної) будемо вважати наближене значення КІН K_I^e (нижче називатимемо його пружним КІН) для багатьох залежностей для пружної задачі триточкового згину балки з тріщиною [9]:

$$K_I^e = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left(1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left(\frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left(\frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left(\frac{l}{B} \right)^4 \right). \quad (15)$$

Більш вірогідним є використання локального критерію крихкого руйнування: якщо в комірці 1, головне напруження σ_1 досягнуло чи перевищило рівень критичних напружень крихкого руйнування $S_C(k) = [C_1 + C_2 \exp(-A_d k)]^{-1/2}$ за умови, що ефективне напруження $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$ при $\sigma_{02}(T) = a_1 - c(T + 273) + b \exp(-h(T + 273))$ не є від'ємним, то вважається, що ця комірка руйнується [1], довжина тріщини збільшується на висоту цієї комірки і відбувається перебудова сітки так, щоби біля вістря тріщини знову була комірка 1. Параметри a_1, c, b, h, C_1, C_2 , і A_d цих залежностей характеризують властивості досліджуваного полікристалічного матеріалу. Для визначення актуальної довжини l тріщини у кожний розглядуваний момент часу використовувався такий алгоритм. Якщо найбільші значення будь-яких напружень з'являлися не в комірці 1, а в комірці 2, тоді тріщина просувалася на одну комірку вгору. Комірка 2 ставала коміркою 1. Всі напруження перераховувалися для збільшеної тріщини. Так робилося поки всі найбільші напруження не знаходилися в комірці 1.

Обчислені поля деформацій використовувалися для визначення пластичної і пружної складових енергій деформації [5]:

$$U_{ij}^e = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \int \varepsilon_{ij}^e \sigma_{ij} dx dy, \quad U_{ij}^p = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \int \varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij} dx dy, \quad (i, j = x, y). \quad (16)$$

4. Числова реалізація

Для розрахунків математичної моделі компактного зразка із сталі 15X2НМФА застосовано метод скінчених різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей Ox (N елементів) і Oy (M елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Характерний розмір комірок в радіусі 1-2 мм від вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05-мм). Розбиття за часом рівномірне.

Результати розрахунків середніх напружень у комірках поблизу вістря тріщини за відносно невеликих навантажень, коли у дискретизованій задачі пластичні деформації відсутні, зіставлялися із розрахованими для центру комірки на основі класичних одночленних асимптотичних залежностей п. 1.2 [9] з використанням КІН (15). Для комірок 1, 6 (див. рис. 1б) при $x = 0,01$ мм, $y = 3 \pm 0,04$ мм різниця не перевищувала 0,3%.

На рис. 2-9 відображено результати обчислення деяких важливих для механіки руйнування величин за таких значень параметрів: коефіцієнт зміцнення матеріалу $\eta_c = 0,05$; $L = 60$ мм; $B = 10$ мм; $l = 3$ мм; $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с; $A = 2,5$ мм; $p_{01} = 8$ МПа; $p_{02} = 10$ МПа; $M = 60$; $N = 77$. Найменший крок розбиття дорівнював 0,02 мм, а найбільший 2,6 мм ($\Delta x_{min} = 0,02$ мм; $\Delta y_{min} = 0,04$ мм (лише перший шар); $\Delta x_{max} = 2,6$ мм; $\Delta y_{max} = 0,6$ мм), $T = 50^\circ$.

Графіки розрахованої залежності від КІН K_I^e середніх напружень на продовженні осі включення біля його вістря (комірка 1 на схемі рис. 1б) двовимірної моделі компактного зразка (рис. 2) свідчать, що з розвитком процесу деформування зразка в разі перевищення пружним КІН K_I^e рівня $K_I^e = K_{I^*}^e = 78,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{мм}}$, деякі напруження (наприклад σ_{yy}) у цій точці монотонний характер збільшення змінюють на коливний, а в разі перевищення пружним КІН K_I^e рівня $K_I^e = K_{I^{**}}^e = 111,7 \text{ МПа}\sqrt{\text{мм}}$, коливання напружень набувають більшої інтенсивності. Суцільна, суцільна з трикутником, пунктирна, суцільна з хрестиком і суцільна з кружечком лінії стосуються відповідно напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} , напруження текучості σ_S та інтенсивність напружень σ_j .

Обчислення виявили, що при температурі зразка $T = 50^\circ \text{C}$ тріщина починала збільшуватися в разі перевищення пружним КІН рівня $K_I^e = K_{I_c}^e \equiv 60,1 \text{ МПа}\sqrt{\text{мм}}$. Дослідження залежності довжини тріщини від K_I^e (рис. 3) дає можливість стверджувати, що коли інтенсивність напружень набуває значення $K_I^e = K_{I^*}^e$, процес збільшення довжини тріщини стає інтенсивнішим (із набагато більшими приростами довжини із збільшенням K_I^e).

Після досягнення пружним КІН значення $K_I^e = K_{I_d}^e \equiv 169,4 \text{ МПа}\sqrt{\text{мм}}$ напруження σ_{xx} і σ_{yy} починають зменшуватися (див. рис. 2). В цей момент параметр Одквіста (рис. 4) в комірці 1 має коливний характер із затухаючою амплітудою і довжина тріщини досягає $l = 5,94$ мм. З цього моменту, скоріш за все, починається подальше доломлювання зразка.

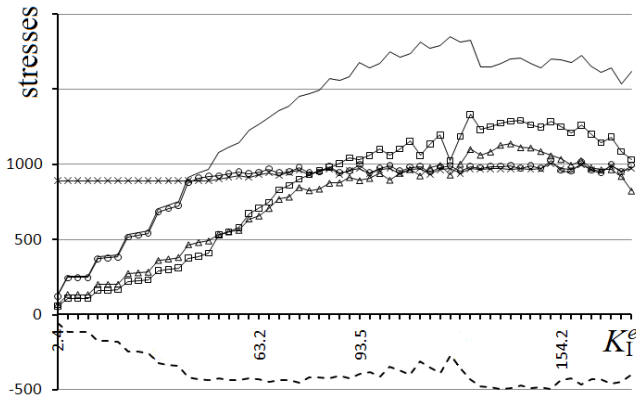


Рис. 2. Залежність напруження у комірці 1 на продовженні осі тріщини від K_I^e

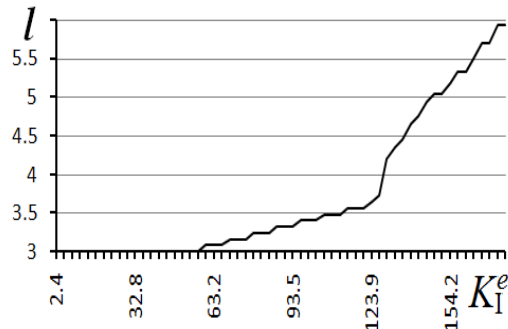


Рис. 3. Залежність довжини тріщини l від K_I^e

Обчислення залежності параметра Одквіста κ , який характеризує накопичену у комірці 1 (без посередньо перед вістрям тріщини) пластичну деформацію від K_I^e , відображає рис. 4. Поки деформування є пружним $\kappa=0$, потім у комірці 1 починають монотонно накопичуватися пластичні деформації і у момент, коли тріщина робить перший стрибок, відбувається зміна розташування комірки 1 у зону з меншими значеннями параметра κ (значення κ стрибком зменшується) і знову йде процес накопичення κ . Через це при перевищенні пружним КІН значення K_{Ic}^e зміна κ , а разом із тим і величина накопиченої в комірці 1 пластичної деформації має осциляційний (немонотонний) характер. У разі, коли $K_I^e = K_{Ic}^e$ амплітуда осциляцій параметру κ збільшується, і, як зазначалося вище, при $K_I^e = K_{Ic}^e$ його зростання уповільнюється.

Рис. 5 і 6 відображають відповідно залежності від температури T середнього напруження σ та параметра Одквіста κ у комірці 1, отримані за фіксованого значення $K_I^e = K_{I0}^e = 75,3 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} = K_{Ic}^e$ у разі врахування розвитку тріщини (суцільні лінії) при досягненні навантаженням такого рівня, а також у припущенні, що тріщина свого первісного розміру не змінює [1] (штрихові лінії). Для порівняння приведено відповідні результати задачі плоского напруженого стану (лінії із трикутником). У тих випадках, коли рівень температури забезпечує можливість збільшення розміру тріщини при заданому $K_I^e = K_{I0}^e$ (зокрема і при $T = 50^\circ$) в разі плоского напруженого стану зразка з нерухою тріщиною в зоні перед кінчиком тріщини властивий вищий рівень середніх напружень і накопичених пластичних деформацій. Якщо ж при певній температурі (у даному випадку це $T < -100^\circ$) рівень напружень для руху тріщини недостатній, то обидва підходи дають однакові результати.

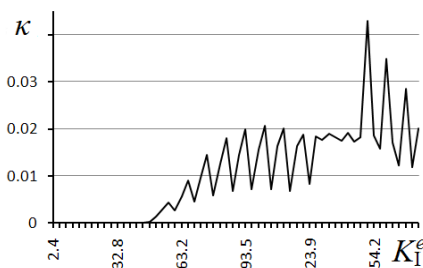


Рис. 4. Залежність параметра Одквіста κ від КІН K_I^e у комірці 1

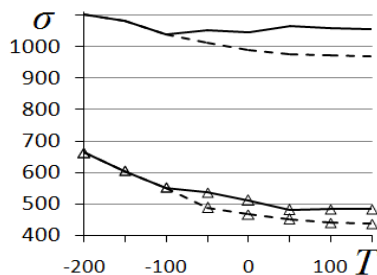


Рис. 5. Залежність середніх напружень σ від температури T у комірці 1

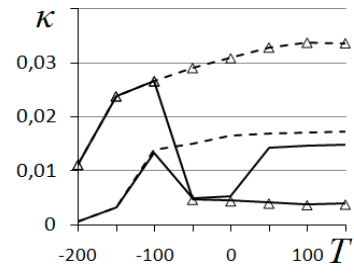
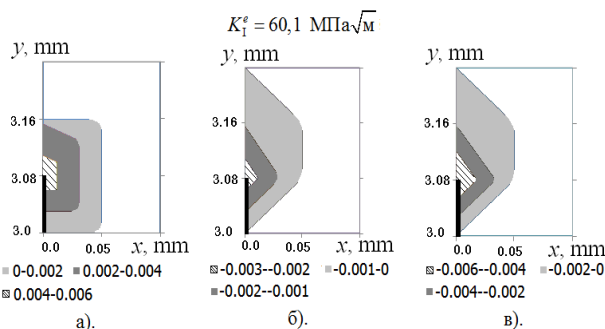


Рис. 6. Залежність параметра Одквіста κ від температури T у комірці 1



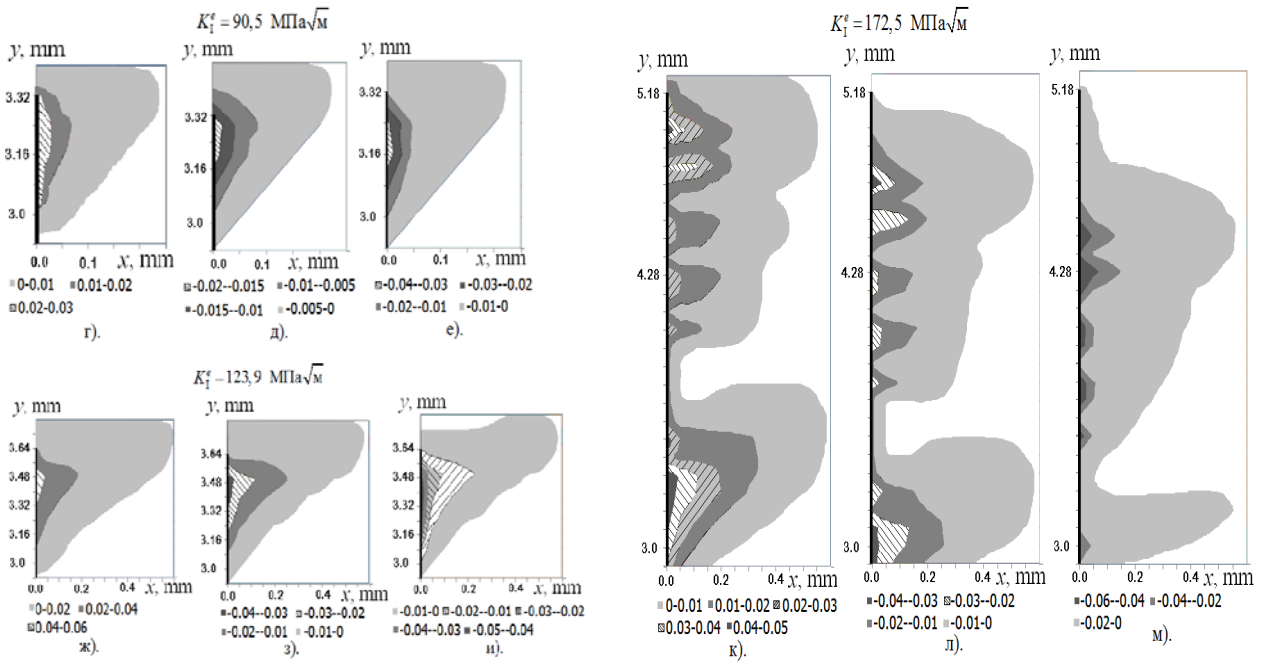


Рис. 7. Діаграми розподілу максимальних досягнутих пластичних деформацій ϵ_{xx}^p (а, г, ж і к), ϵ_{yy}^p (б, д, з і л) і ϵ_{xy}^p (в, е, и і м) у зоні тріщини

Коли тріщина нерухома і інтенсивність напружень набуває значення $K_I^e = 60,1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} < K_{Ic}^e$ (див. рис. 7), пластичні деформації ϵ_{xx}^p , ϵ_{yy}^p і ϵ_{xy}^p виникають перед вістрям тріщини. Коли тріщина починає рухатися і інтенсивність напружень набуває значення $K_{Ic}^e < K_I^e = 90,5 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}} < K_{I*}^e$ максимальні пластичні деформації ϵ_{xx}^p , ϵ_{yy}^p і ϵ_{xy}^p розташовуються поза вістрям тріщини.

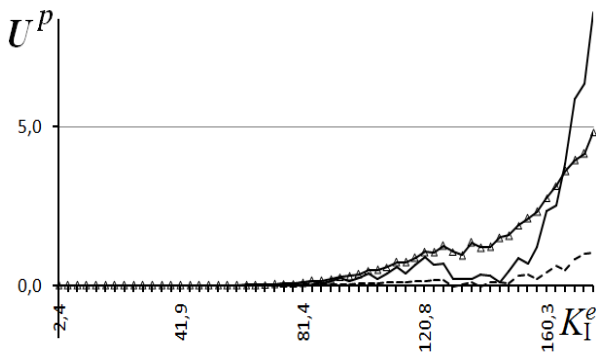


Рис. 8. Енергії пластичних деформацій U_{ij}^p

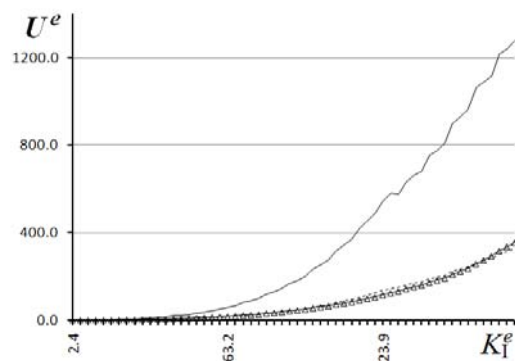


Рис. 9. Енергії пружних деформацій U_{ij}^e

Суцільна, суцільна з трикутником і пунктирна лінії (рис. 8) стосуються відповідно енергій пластичних деформацій U_{xx}^p , U_{yy}^p і U_{xy}^p . Суцільною, суцільною з трикутником і пунктирною лініями (рис. 9) зображені відповідно енергії пружних деформацій U_{xx}^e , U_{yy}^e і U_{xy}^e .

Дослідження розподілу пластичних енергій U_{ij}^p ($i, j = x, y$) (див. рис. 8) з моменту перевищення пружним коефіцієнтом інтенсивності напружень рівня K_{I*}^e свідчить про їх коливний характер. Пружні енергії U_{ij}^e ($i, j = x, y$) (див. рис. 9) збільшуються монотонно, при цьому стрибки виникають, скоріш за все, через дискретну обчислювальну схему.

Коли КІН $K_I^e > 123,9 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ штриховані і темніші зони на діаграмах відповідають вищим значенням деформацій. Помітно, що зони максимальних пластичних деформацій (швидше за все) прилягають до вільної поверхні тріщини і її вістря розташовується у менш пластично деформованому матеріалі (ніби намагається прорватися у таку зону). Якщо приріст довжини тріщини достатньо великий, то до берегів тріщини прилягає низка таких зон підвищеної пластичної деформації. Зрозуміло, що зменшення розмірів сітки розбиття дещо згладить зображені у нижній частині

діаграми розподілу, однак швидше за все така нерівномірність пластичних деформацій може бути властива динамічному характеру просування тріщини.

5. Висновки

Розв'язування задачі плоского деформованого стану для компактного зразка для визначення в'язкості руйнування на триточковий згин у динамічному пружно-пластичному формулюванні з урахуванням підростання тріщини дає можливість набагато точніше визначити поля пластичних деформацій і напружень, аніж при розв'язуванні квазістатичної пружно-пластичної задачі плоского деформованого стану, а також дає можливість адекватно моделювати процес розповсюдження тріщини.

1. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского деформованого стану // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2011. – № 4. – С. 51–56. 2. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2008. – № 3. – С. 51–56. 3. Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану. // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54. 4. Богданов В.Р. Тривимірні динамічні задачі концентрації пластичних деформацій і напружень біля вершини тріщини // Вісник Київського національного університету. Серія фіз.-мат. науки. – 2009. – № 2. – С. 51–56. 5. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 676 с. 6. Боли Б., Уайнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 360 с. 7. Махненко В.И. Совершенствование методов оценки остаточного ресурса сварных соединений конструкций длительного срока эксплуатации. // Автоматическая сварка, – 2003. – № 10–11, – С. 112–121. 8. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: "Наукова думка", 1976. – 320 с. 9. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов. Т.2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: "Наукова думка", 1988. – 620 с. 10. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 399 с. 11. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Planar problem of the impact of a shell on an elastic half-space. // International Applied Mechanics. – Vol. 31. – № 6. – 1995. – P. 483–490.

Надійшла до редколегії 15.11.10

УДК 629.7.015

О. Дехтяр, асп.,
e-mail: oleks.d@gmail.com

ВРАХУВАННЯ ОБМЕЖЕНОСТІ ТЯГИ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ МАНЕВРІВ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ З ЯДЕРНИМИ ДВИГУНАМИ ВЕЛИКОЇ ПОТУЖНОСТІ

Досліджено внутрішню геоцентричну задачу міжпланетного перельоту за модифікованим методом сфер впливу, що полягає в оптимізації маневру (між початковою круговою або еліптичною навколоземною орбітою та гіперболічною орбітою виведення до сфери впливу) космічного апарату, оснащеного ядерним ракетним двигуном великої потужності, в припущенні обмеженості тяги та врахування специфіки керування рушійною системою. Задача розв'язана із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна. Виконано порівняльний аналіз результатів для різних моделей гравітаційних полів та моделі імпульсної апроксимації. Проаналізовано властивості оптимального керування напрямом вектора тяги.

The internal geocentric problem of a space vehicle interplanetary transfer is considered. The Patched Conic Approximation is used. The internal problem consists in the optimization of a finite-thrust manoeuvre between near-earth circular or elliptic orbit and escape hyperbolic orbit. The thrust finiteness and specificity of engine control is taken into consideration. The Pontryagin's maximum principle is applied for solving of the problem. The comparative analysis is done for different models of gravitational field and for the model of impulse approximation. The features of optimal thrust direction control are analysed.

1. Актуальність проблеми та вибір напрямку дослідження

В сучасній механіці космічного польоту розвиваються два головних напрямки: механіка польоту з двигунами великої та механіка польоту з двигунами малої тяги. Для першого напрямку, якому присвячена ця стаття, характерною особливістю є мала тривалість активних ділянок в порівнянні з усією тривалістю польоту. Тому задачі оптимізації маневрів космічних апаратів (КА) з двигунами великої тяги традиційно розв'язують, застосовуючи підхід імпульсної апроксимації (ІА) активних ділянок траєкторії [2], тобто вважають, що швидкість КА змінюється миттєво на нескінченно малій активній ділянці з скінченною витратою маси робочого тіла при необмеженому зростанні сили тяги. Такий підхід можна застосовувати, коли тягоозброєність КА $a_0 = P_{\max}/(M_0 g) \gg 1$, де P_{\max} – максимальна тяга, M_0 – стартова маса, g – прискорення вільного падіння на Землі, однак неприйнятний у випадку проміжних значень тягоозброєності. Міжпланетні експедиції, що плануються у найближчому майбутньому [7], будуть здійснюватися із застосуванням КА з ядерними ракетними двигунами (ЯРД) великої потужності, тягоозброєності яких має порядок одиниці [6, 8]. Тому при розрахунку маневрів КА з ЯРД важливо враховувати обмеженість тяги двигуна.

Задачам оптимізації маневрів КА з двигунами великої обмеженої тяги присвячено порівняно небагато праць, наприклад, [5, 9], що зумовлює актуальність задачі, розглянутої в даній статті.

2. Постановка внутрішньої геоцентричної задачі ММСВ

Розглядається задача синтезу й оптимізації міжпланетного перельоту Земля-Марс, сформульована при використанні модифікованого методу сфер впливу (ММСВ). В якості критерію оптимальності обрано максимізацію корисного навантаження $m_{\pi} \rightarrow \max$. Нехай прийнято плоску кругову модель руху планет навколо Сонця. Відповідно до ММСВ міжпланетну траєкторію розділено на ділянки переважного впливу одного небесного тіла, що дозволило на кожній з ділянок звести задачу до вивчення руху КА в постановці обмеженої задачі двох тіл. Нехай обрано таку схему міжпланетного перельоту, що а) на геліоцентричній ділянці необхідно реалізувати напівеліптичний переліт Гомана та б) міжпланетна траєкторія містить дві активні ділянки – по одній в межах кожної сфери впливу планет.

Для реалізації вимоги (а) на границях сфер впливу планет в планетоцентричних системах координат КА повинен мати задані вектори швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}} = \vec{v}_{\text{IIЕ}} - \vec{v}_{\text{Е}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}} = \vec{v}_{\text{AE}} - \vec{v}_{\text{М}}$, де в геліоцентричній системі координат $\vec{v}_{\text{IIЕ}}$, \vec{v}_{AE} – вектори швидкості КА в периферії та апоцентрі напівеліпса Гомана, а $\vec{v}_{\text{Е}}$, $\vec{v}_{\text{М}}$ – вектори швидкості обертан-

ня Землі та Марсу навколо Сонця. Вектори $\vec{v}_{\text{сфЕ}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}}$, у випадку перельоту Гомана, елементарно визначаються з розв'язку геліоцентричної задачі. Відповідно до ММСВ, при розв'язанні внутрішніх задач радіуси сфер впливу вважаються нескінченними. Тому вектори швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}}$ та $\vec{v}_{\text{сфМ}}$ на сферах впливу можна вважати векторами асимптотичної швидкості КА при русі по деяких планетоцентричних гіперболах.

Тоді, при врахуванні припущення (б), задача по виходу КА на міжпланетну траєкторію зводиться до задачі оптимізації маневру між початковою навколосемною орбітою (круговою або еліптичною) та геоцентричною гіперболічною орбітою з заданим вектором асимптотичної швидкості. Гіперболічна орбіта в загальному випадку має бути обрана оптимальним чином. Розглянемо цю задачу детальніше.

3. Варіаційна постановка задачі маневру на активній ділянці

Далі використовуються безрозмірні величини, формули переходу до яких містяться в [3]. Вважаємо, що величина тяги ЯРД є фіксованою та відповідає максимуму швидкості витікання реактивного струменя. Відповідно до моделі керування тягою ЯРД, запропонованої в [3], тяга характеризується формулою $P_D = a_0 \sqrt{N_{\text{max}} q_D}$, де q_D – рівень витрати робочого тіла, за якого реалізується максимальна швидкість реактивного струменя для максимального значення N_{max} теплової потужності ядерного реактора. У випадку постійного рівня величини тяги задача максимізації корисного навантаження $m_\pi \rightarrow \max$ рівносильна задачі максимальної швидкодії $J = \tau(t_1) \rightarrow \min$.

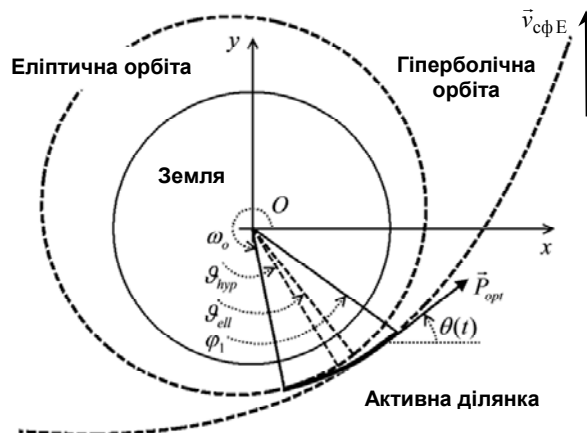


Рис. 1. Схема виконання маневру між еліптичною та оптимальною гіперболічною орбітами.

Схему геоцентричного маневру зображено на рис.1. Для постановки задачі введено інерціальну прямокутну декартову систему координат Oxy з початком координат в центрі Землі. Вісь Oy направлено за вектором асимптотичної швидкості $\vec{v}_{\text{сфЕ}}$. Тоді в Oxy рух КА при виконанні маневру на активній ділянці описується системою рівнянь (1). Функціонал та множина допустимих керувань мають вигляд (2).

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{v}_x = \frac{a_0 \sqrt{N_{\text{max}} q_D} \cos \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_x(x, y), & \dot{t} = 1. \\ \dot{y} = v_y, & \dot{v}_y = \frac{a_0 \sqrt{N_{\text{max}} q_D} \sin \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_y(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

$$\omega_0, \phi_1, g_{\text{hyp}} \rightarrow \text{opt}, \quad J = \tau(t_1) \rightarrow \min, \quad \omega_0, \phi_1, g_{\text{hyp}}, \theta(\tau) \in [0; 2\pi], \quad (2)$$

де x, y, v_x, v_y – складові радіус-вектора та вектора швидкості центра мас КА; τ – час; $\theta(\tau)$ – кут нахилу вектора тяги до осі Ox , g_x, g_y – складові вектора гравітаційного прискорення, ω_0, ϕ_1 – істинні аномалії початку та завершення активної ділянки; g_{hyp} – аргумент перицентру гіперболи. Всі кутові координати відраховуються від осі Ox проти ходу годинникової стрілки.

Для моделі центрального ньютонівського гравітаційного поля (ЦНГП) $\vec{g} = \{C \cdot x / (x^2 + y^2)^{3/2}, C \cdot y / (x^2 + y^2)^{3/2}\}$, де $C = \mu \cdot g \cdot Q_{\text{max}}^4 / P_{\text{max}}^4$ – безрозмірний гравітаційний параметр Землі, μ – гравітаційний параметр Землі; Q_{max} – максимальна витрата робочого тіла в розмірних змінних. У цьому випадку система рівнянь руху КА (1) є системою нелінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, розв'язок якої слід знаходити чисельно.

У випадку, коли траєкторія лежить у межах тонкого сферичного шару ($\Delta r / r_g \ll 1$, де $r_g = \text{const}$ – деякий характерний радіус шару, а Δr – його товщина) можна застосовувати модель центрального однорідного гравітаційного поля (ЦОГП) $\vec{g} = \{C \cdot x / r_g^3, C \cdot y / r_g^3\} = \{c \cdot x, c \cdot y\}$, де $c = C / r_g^3$. В цьому випадку система рівнянь руху КА (1) є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь, розв'язок якої можна записати в квадратурах.

При виконанні маневру мають бути задоволені такі граничні умови:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \frac{p_{ell} \cos \omega_0}{1 + e_{ell} \cos(\omega_0 - \vartheta_{ell})}; & x(t_1) &= \frac{p_{hyp} \cos \phi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\phi_1 - \vartheta_{hyp})}; \\ y(t_0) &= \frac{p_{ell} \sin \omega_0}{1 + e_{ell} \cos(\omega_0 - \vartheta_{ell})}; & y(t_1) &= \frac{p_{hyp} \sin \phi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\phi_1 - \vartheta_{hyp})}; \\ v_x(t_0) &= \frac{-K}{\sqrt{p_{ell}}} (e_{ell} \sin \vartheta_{ell} + \sin \omega_0); & v_x(t_1) &= \frac{-K}{\sqrt{p_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \phi_1); \\ v_y(t_0) &= \frac{K}{\sqrt{p_{ell}}} (e_{ell} \cos \vartheta_{ell} + \cos \omega_0); & v_y(t_1) &= \frac{K}{\sqrt{p_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \phi_1). \end{aligned} \quad \tau(t_0) = 0; \quad \tau(t_1) \rightarrow \min; \quad (3)$$

Тут $K = \sqrt{\mu g_0} Q_{max}^2 / P_{max}^2$ – безрозмірний комплекс розмірних величин, e_{ell} – ексцентриситет початкової орбіти; $p_{ell} = r_{pell}(1 + e_{ell})$ – параметр еліптичної орбіти, що відповідає фіксованому значенню радіуса перицентру r_{pell} ; $\vartheta_{ell} = \arcsin(-K^2 / (v_{cфE}^2 \cdot (r_p + K^2 / v_{cфE}^2)))$ – аргумент перицентру початкової орбіти, що відповідає дотику еліптичної та гіперболічної орбіт при нескінченному зростанні тяги. Параметри гіперболічної орбіти подано через аргумент перицентру гіперболічної орбіти та величину асимптотичної швидкості: $e_{hyp} = -1/\sin \vartheta_{hyp}$ та $p_{hyp} = K^2(1 + e_{hyp}^2) / v_{cфE}^2$.

Таким чином окреслено всі математичні та фізичні припущення стосовно природи об'єкта управління. Тому постановка варіаційної задачі (в даному випадку задачі Майєра) полягає у відшуванні оптимальної програми керування напрямком вектора тяги $\theta_{opt}(t)$ та параметрів $\omega_0, \phi_1, \vartheta_{hyp}$ з множини допустимих керувань (2), що забезпечують переведення КА, рух якого описується системою рівнянь (1), з початкової орбіти на оптимальну гіперболічну орбіту, при виконанні граничних умов (3), за мінімальний проміжок часу (2).

4. Застосування принципу максимуму Понтрягіна до розв'язання задачі

Аналіз оптимального керування виконано за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Згідно принципу максимуму, тільки те керування є оптимальним, яке зумовлює максимум функції Гамільтона (4)

$$\begin{aligned} H &= \psi_x v_x + \psi_y v_y + \psi_\tau + \psi_{vx} \left(\frac{a_0 \sqrt{N_{max} q_D} \cos \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_x(x, y) \right) + \\ &+ \psi_{vy} \left(\frac{a_0 \sqrt{N_{max} q_D} \sin \theta}{1 - a_0 q_D \tau} - g_y(x, y) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\psi_x, \psi_y, \psi_{vx}, \psi_{vy}, \psi_\tau$ є спряженими функціями. Оптимальний закон керування напрямом тяги має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) &= \psi_{vx} / \sqrt{\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2}, \\ \sin \theta(t) &= \psi_{vy} / \sqrt{\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Система спряжених функцій $\dot{\psi} = -\partial H / \partial \bar{x}$ має вигляд

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = \psi_{vx} \frac{C}{r_g^3}, & \dot{\psi}_{vx} = -\psi_x, \\ \dot{\psi}_y = \psi_{vy} \frac{C}{r_g^3}, & \dot{\psi}_{vy} = -\psi_y, \end{cases} \quad \dot{\psi}_\tau = -\frac{a_0^2 \sqrt{N_{max} q_D^3} (\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2)}{(m_0 - a_0 q_D \tau)^2}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_x = C \left(\psi_{vx} \frac{-2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \psi_{vy} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right), & \dot{\psi}_{vx} = -\psi_x, \\ \dot{\psi}_y = C \left(\psi_{vx} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \psi_{vy} \frac{-2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right), & \dot{\psi}_{vy} = -\psi_y, \end{cases} \quad \dot{\psi}_\tau = -\frac{a_0^2 \sqrt{N_{max} q_D^3} (\psi_{vx}^2 + \psi_{vy}^2)}{(m_0 - a_0 q_D \tau)^2}, \quad (7)$$

у випадку ЦОГП та ЦНГП відповідно. Перші чотири рівняння системи спряжених функцій (6) для моделі ЦОГП мають аналітичний розв'язок:

$$\begin{cases} \psi_x = D_2 \sin \sqrt{ct} + D_1 \cos \sqrt{ct}, & \psi_{vx} = (D_2 \cos \sqrt{ct} - D_1 \sin \sqrt{ct}) / \sqrt{c}, \\ \psi_y = D_4 \sin \sqrt{ct} + D_3 \cos \sqrt{ct}, & \psi_{vy} = (D_4 \cos \sqrt{ct} - D_3 \sin \sqrt{ct}) / \sqrt{c}. \end{cases}$$

Тому оптимальний закон керування напрямом тяги (5) постає як функція часу, що дозволяє знайти розв'язок в квадратурах системи рівнянь руху (1) для моделі ЦОГП:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\sqrt{c}t) + v_{x0} \frac{\sin(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}} + \frac{a_0 \sqrt{N_{\max} q_D}}{\sqrt{c}} \cdot \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vx}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau; \\ y(t) = y_0 \cos(\sqrt{c}t) + v_{y0} \frac{\sin(\sqrt{c}t)}{\sqrt{c}} + \frac{a_0 \sqrt{N_{\max} q_D}}{\sqrt{c}} \cdot \int_0^t \frac{\sin(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vy}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau; \\ v_x(t) = -x_0 \sqrt{c} \sin(\sqrt{c}t) + v_{x0} \cos(\sqrt{c}t) + a_0 \sqrt{N_{\max} q_D} \cdot \int_0^t \frac{\cos(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vx}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau; \\ v_y(t) = -y_0 \sqrt{c} \sin(\sqrt{c}t) + v_{y0} \cos(\sqrt{c}t) + a_0 \sqrt{N_{\max} q_D} \cdot \int_0^t \frac{\cos(\sqrt{c}(t-\tau))}{m_0 - a_0 q_D \tau} \frac{\psi_{vy}(\tau)}{\sqrt{\psi_{vx}^2(\tau) + \psi_{vy}^2(\tau)}} d\tau. \end{cases}$$

Для моделі ЦНГП аналітичні розв'язки системи спряжених функцій та системи рівнянь руху знайти не вдається, а тому їх вивчення потребує застосування методів чисельного інтегрування.

Умови трансверсальності записуються так:

$$[\delta\tau - H\delta t + \psi_x \delta x + \psi_y \delta y + \psi_{vx} \delta v_x + \psi_{vy} \delta v_y + \psi_\tau \delta\tau]_{t_0}^{t_1} = 0. \quad (8)$$

Аналіз умов трансверсальності (8) дозволяє зменшити кількість невідомих констант. У випадку моделі ЦОГП константи інтегрування D_2, D_3, D_4 можна подати через $D_1, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$, а у випадку моделі ЦНГП ψ_{x0} – через $\psi_{y0}, \psi_{vx0}, \psi_{vy0}, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$. Застосування принципу максимуму Понтрягіна дозволяє звести оптимізаційну задачу до двоточкової крайової задачі, для розв'язання якої у випадку ЦОГП необхідно знайти 5 констант: $D_1, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$, а у випадку ЦНГП – 7 констант: $\psi_{y0}, \psi_{vx0}, \psi_{vy0}, \omega_0, \vartheta_{hyp}, \phi_1, t_1$. Ці константи знаходяться чисельно за допомогою методу пристрілки з умови мінімізація зваженої нев'язки. Вирази для нев'язки мають вигляд (9) та (10) у випадку ЦОГП та ЦНГП відповідно.

$$\begin{aligned} nev &= \sqrt{nev_1^2 + nev_2^2 + nev_3^2 + nev_4^2 + nev_5^2} \rightarrow 0, \\ nev_1 &= \frac{\rho_{hyp} \cos \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - x_1 = 0; \quad nev_3 = \frac{-K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \varphi_1) - v_{x1} = 0; \quad nev_5 = H = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$nev_2 = \frac{\rho_{hyp} \sin \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - y_1 = 0; \quad nev_4 = \frac{K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \varphi_1) - v_{y1} = 0;$$

$$nev = \sqrt{nev_1^2 + nev_2^2 + nev_3^2 + nev_4^2 + nev_5^2 + nev_6^2 + nev_7^2} \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} nev_1 &= \frac{\rho_{hyp} \cos \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - x_1 = 0; \quad nev_3 = \frac{-K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \sin \vartheta_{hyp} + \sin \varphi_1) - v_{x1} = 0; \quad nev_5 = H = 0; \\ nev_2 &= \frac{\rho_{hyp} \sin \varphi_1}{1 + e_{hyp} \cos(\varphi_1 - \vartheta_{hyp})} - y_1 = 0; \quad nev_4 = \frac{K}{\sqrt{\rho_{hyp}}} (e_{hyp} \cos \vartheta_{hyp} + \cos \varphi_1) - v_{y1} = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$nev_6 = \psi_{x1} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} + \psi_{y1} \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} + \psi_{vx1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial \varphi_1} + \psi_{vy1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial \varphi_1} = 0; \quad nev_7 = \psi_{x1} \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta_{hyp}} + \psi_{y1} \frac{\partial y_1}{\partial \vartheta_{hyp}} + \psi_{vx1} \frac{\partial v_{x1}}{\partial \vartheta_{hyp}} + \psi_{vy1} \frac{\partial v_{y1}}{\partial \vartheta_{hyp}} = 0.$$

Пошук початкових наближень у випадку ЦОГП виконати нескладно, оскільки чотири з п'яти констант мають визначений фізичний зміст. У випадку ж ЦНГП пошук початкових наближень значно ускладнений і потребує розробки спеціальних методів, що ґрунтуються на використанні оптимальних імпульсних розв'язків та розв'язків при врахуванні обмеженості тяги для моделі ЦОГП.

5. Властивості розв'язку задачі для моделі ЦНГП

Проаналізуємо розв'язок задачі у випадку застосування моделі ЦНГП. Параметри маневру та космічного апарату обрано таким чином: вектор швидкості на сфері впливу Землі $v_{c\phi E} = 2945$ м/с; висота перицентра еліптичної орбіти над поверхнею Землі $H_0 = 404$ км, її ексцентриситет $e_{ell} = 0,15$; початкова маса КА $M_0 = 10^5$ кг; тяга двигуна $P_D = 246$ кН, швидкість витікання реактивного струменя $v_{S\max} = 9090$ м/с. Дослідження ефективності оптимізації параметрів маневру та перевірка локальної оптимальності розв'язків містяться в [4].

На рис. 2 та 4 показано схеми виконання маневру для неоптимальних значень координат початку та завершення активної ділянки. Програми керування напрямом тяги (перераховані як кут $\tilde{\theta}(t)$ нахилу вектора тяги до траєкторії), які відповідають таким маневрам, зображені на рис. 3 та 5. Схема виконання оптимального маневру та оптимальна програма $\tilde{\theta}_{opt}(t)$ керування напрямом тяги показані на рис. 6.

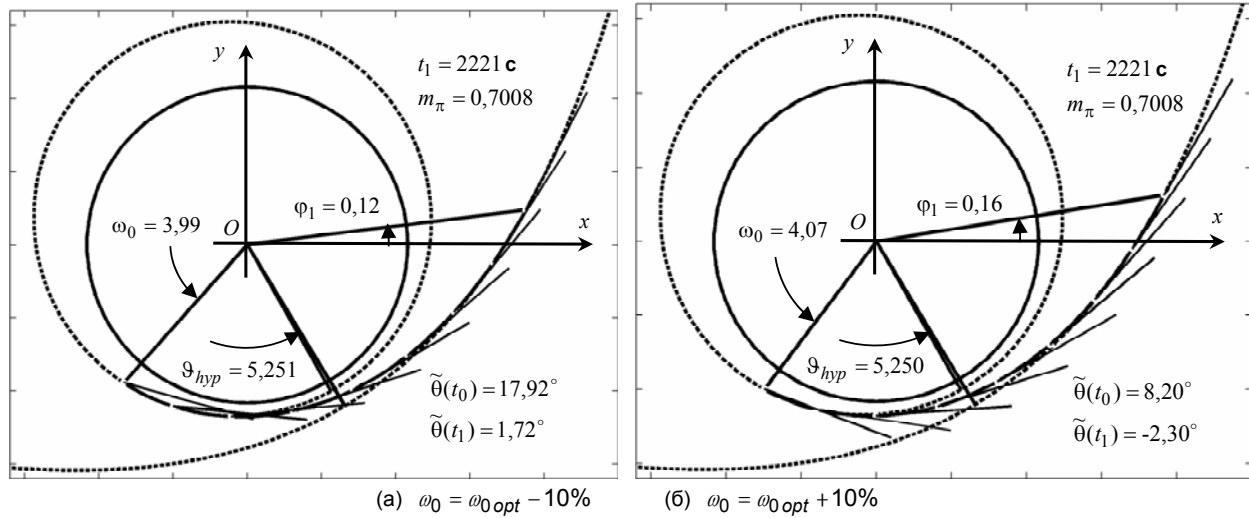


Рис. 2. Схеми виконання маневру для неоптимальних значень істинної аномалії початку активної ділянки

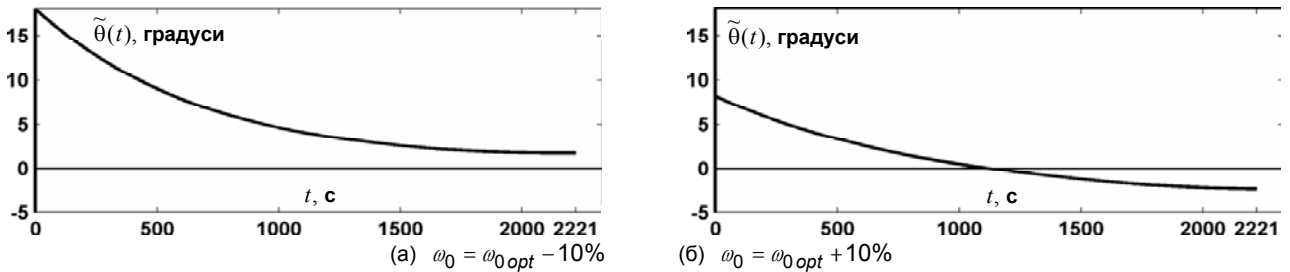


Рис. 3. Програми керування напрямом тяги $\tilde{\theta}(t)$ для неоптимальних значень істинної аномалії початку активної ділянки

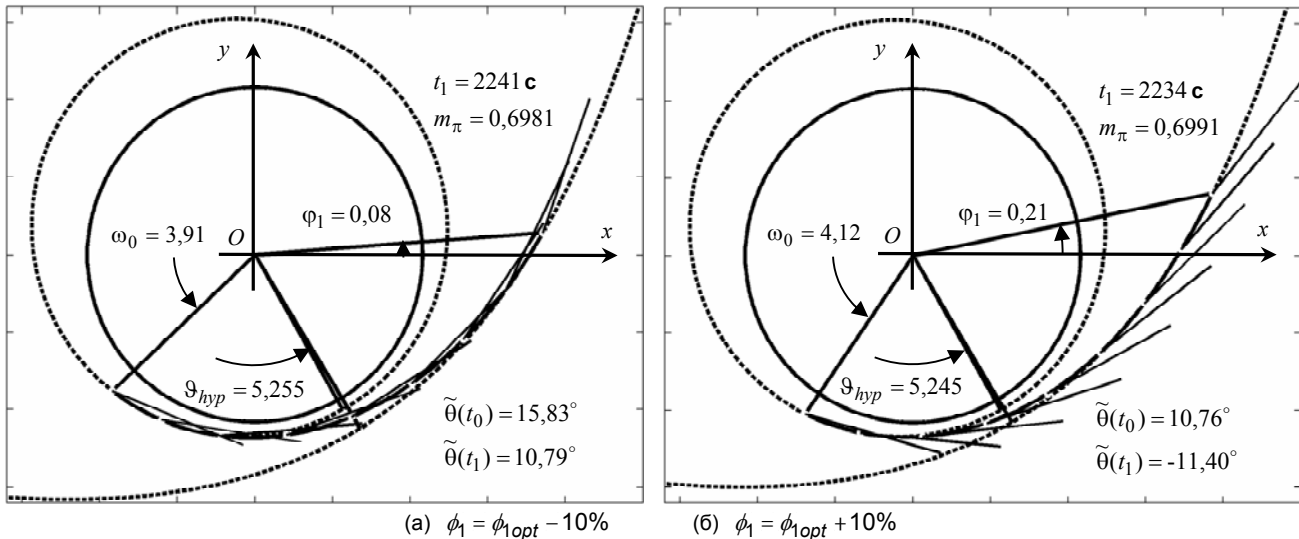


Рис. 4. Схеми виконання маневру для неоптимальних значень істинної аномалії кінця активної ділянки

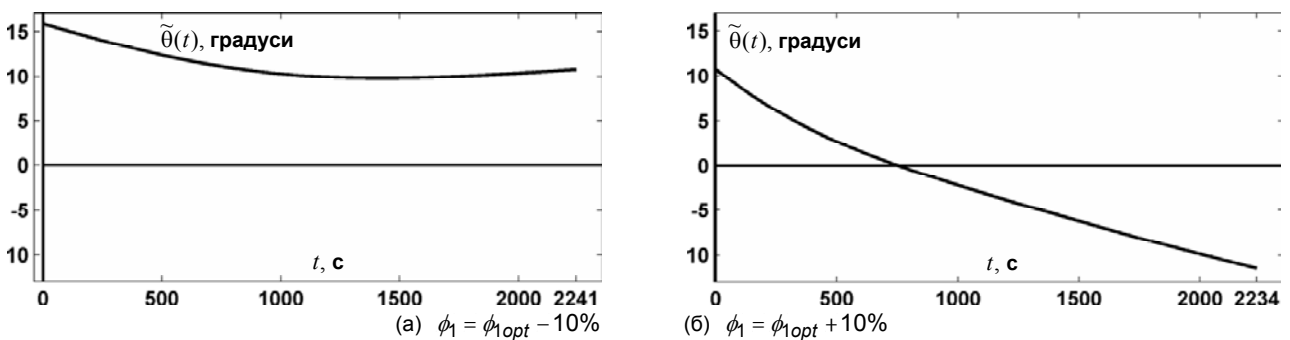


Рис. 5. Програми керування напрямом тяги $\tilde{\theta}(t)$ для неоптимальних значень істинної аномалії кінця активної ділянки

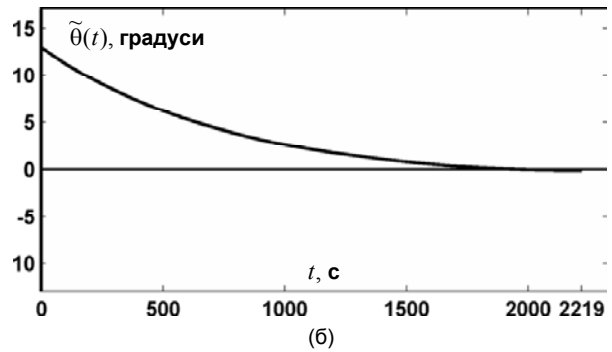
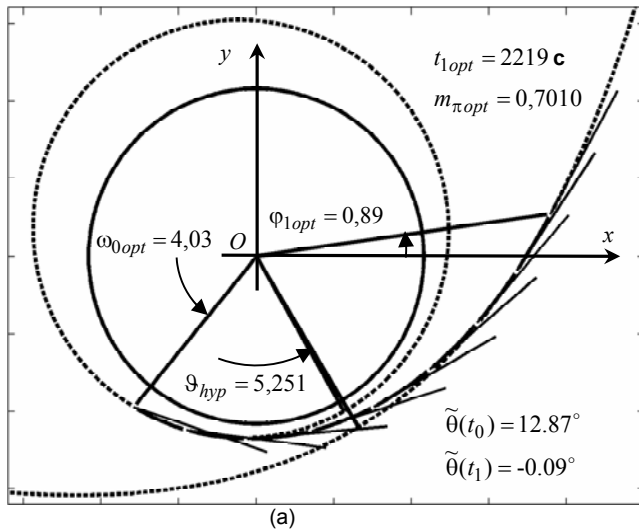


Рис. 6 а) Оптимальна схема виконання маневру та б) оптимальна програма керування напрямом тяги $\tilde{\theta}_{opt}(t)$

З рис. 2-6 видно, що у випадку врахування обмеженості тяги, на протилежному підході ІА, спостерігається зміна напрямку вектора тяги. Крім того, аналізуючи оптимальні та неоптимальні схеми перельоту, слід відзначити, що за умов оптимальності схеми перельоту і оптимального вибору кута між напрямом на перицентр еліптичної орбіти та вектором асимптотичної швидкості гіперболічної орбіти, тяга в кінцевій точці активної ділянки направлена по дотичній до траєкторії, як це показано на рис. 6. Цей висновок підтверджує аналіз умов трансверсальності, виконаний в [1]. Для неоптимальних схем перельоту відхилення кута напрямку тяги в кінцевій точці можуть бути суттєвими.

6. Порівняння розв'язків для моделей ЦНГП, ЦОГП та імпульсної апроксимації

Виконаємо порівняння розв'язків, отриманих у випадку врахування обмеженості тяги для моделей ЦОГП та ЦНГП з підходом ІА для різних значень тяги ЯРД без врахування зміни маси рушійної системи.

На рис. 7 показано залежність параметрів активної ділянки для різних значень тяги ЯРД. Для моделі ІА масу корисного навантаження знаходимо за формулою Цюлковського $m_{\pi imp} = m_0 \exp((v_{0 imp} - v_{1 imp})/v_S)$, а тривалість виконання імпульсу розраховуємо з умови вигорання пального $t_{1 imp} = (m_0 \exp((v_{0 imp} - v_{1 imp})/v_S)) / a_0 q_D$, де $v_{0 imp}$, $v_{1 imp}$ – швидкість КА в перицентрі еліпса та гіперболи, що дотикаються, а v_S – швидкість реактивного струменя, кутову координату виконання імпульсу розраховуємо з умови дотику еліптичної та гіперболічної орбіт при нескінченному зростанні тяги: $\vartheta_{imp} = \arcsin(-K^2 / (v_{сфЕ}^2 \cdot (r_p + K^2 / v_{сфЕ}^2)))$.

З графіків видно, що підхід ІА значно переоцінює корисне навантаження m_{π} , а протяжність активної ділянки, навіть для недосяжних на даний час значень тяги, суттєво відрізняється від моделі імпульсу.

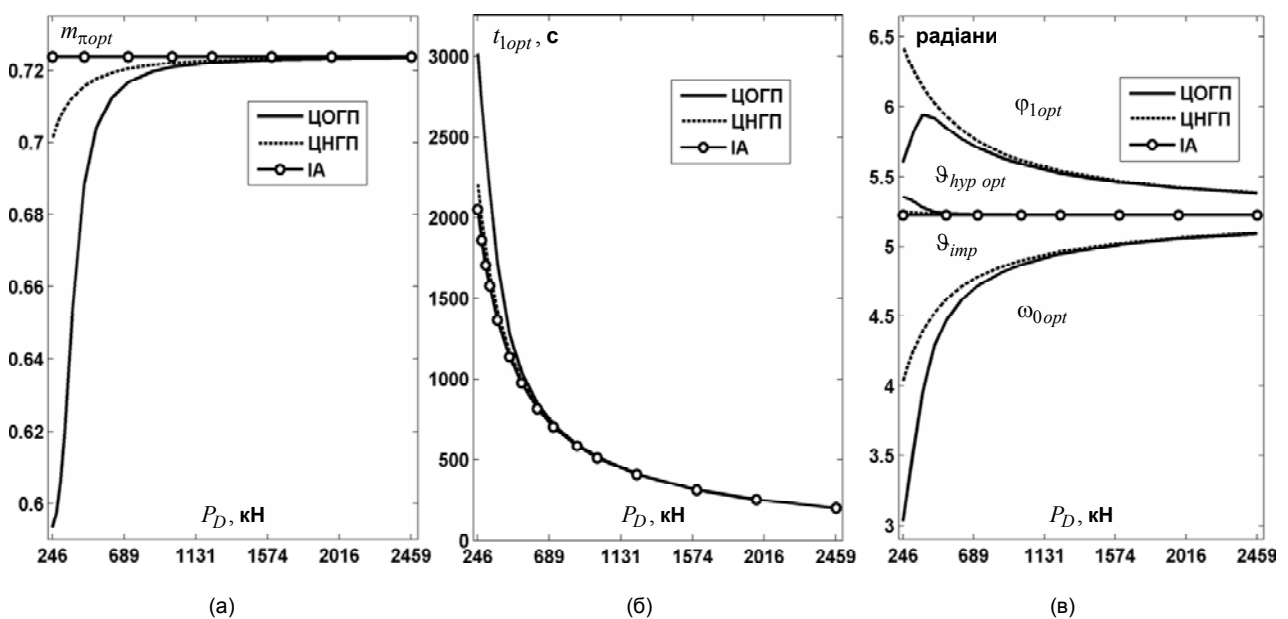


Рис. 7 Порівняння розв'язків для ЦНГП, ЦОГП та ІА:

- а) оптимальна маса корисного навантаження $m_{\pi opt}$; б) тривалість маневру t_{1opt} в безрозмірних величинах,
- в) оптимальні значення кутових координат ω_{0opt} , ϕ_{1opt} , $\vartheta_{hyp opt}$ в радіанах

7. Висновки

Розв'язано внутрішню геоцентричну задачу міжпланетного перельоту із врахуванням обмеженості тяги для моделей центрального однорідного та центрального ньютонівського гравітаційних полів. Задача, на відміну від класичних робіт, сформульована як задача оптимального перельоту з заданої планетоцентричної орбіти (кругової або еліптичної) на оптимальну гіперболічну орбіту. Виявлено, що у випадку врахування обмеженості тяги спостерігається зміна напрямку вектора тяги. До того ж за умови оптимальної схеми виконання маневру тяга в кінцевій точці активної ділянки направлена по дотичній до траєкторії. Проведено порівняльний аналіз отриманих результатів для моделей центрального однорідного та центрального ньютонівського гравітаційних полів з підходом імпульсної апроксимації та підтверджено важливість врахування обмеженості тяги.

1. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полёта (проблемы оптимизации). – М.: Наука, 1975. – 704 с. 2. Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с. 3. Харитонов А.М. К проблеме оптимизации орбитальных маневров космических аппаратов с ядерными ракетными двигателями // Проблемы управления и информатики. – 2005. – №5. – С. 120–135. 4. Харитонов О.М., Дехтяр О.Т. Оптимізація маневру переведення космічного апарату на сферу впливу планети при старті з еліптичної планетоцентричної орбіти // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 3. С. 81-84. 5. Azimov, D.M., Bishop, R.H., Transfer between Circular and Hyperbolic Orbits using Analytical Maximum Thrust Arcs, J. Spacecraft Rockets, 2003, vol. 40, no. 3, pp. 433-436. 6. Borowski, S.K., An overview of NTR /BNTR propulsion concepts, vehicle designs and future missions applications, in Proceedings of Space Nuclear Conference, San Diego, California, June 2005. 7. Rapp D. Human Missions to Mars: Enabling Technologies for Exploring the Red Planet. – Chichester, UK: Praxis Publishing Ltd, 2008. – 521 pp. 8. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al., Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031, // Acta Astronaut. – 2006. –58. – pp. 88-104. 9. Willis E.A. Optimal finite-thrust transfer between planet-approach and departure asymptotes with specified intermediate orbit, // NASA Technical note, NASA TN D-4534-1968. –1968.

Надійшла до редколегії 31.10.11

УДК 532.5

В. Каліон, канд. фіз.-мат. наук, О. Дідківська, студ.,
e-mail: vitaliy.kalio@gmail.com

РУХ ТРИВІСНОГО ЕЛІПСОІДА В КАПІЛЯРІ, ЩО ЗАПОВНЕНИЙ В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ

Розглядається використання теорії збурень до розв'язання задачі про рух крові у дуже вузьких капілярах. В якості моделі червоного кров'яного тільця (або еритроцита) використовується тривісний еліпсоїд. Модель плазми крові – ньютонівська в'язка рідина. Результати порівнюються із результатами інших авторів.

Applications of perturbation method to the problems of blood flow in very narrow capillaries are examined. The red blood cell (or erythrocyte) was modeled with three-axial ellipsoid. The plasma of blood was modeled with Newtonian viscous fluid. The results were compared with results of other authors.

Вступ

Експериментальні дослідження процесів поширення поживних речовин в організмі людини зустрічаються з істотними труднощами, що обумовлені малими розмірами об'єктів, які досліджуються, похибками вимірів й, що особливо неприємно, неможливістю виміряти безпосередньо деякі параметри, як, наприклад, тиск плазми між еритроцитом та стінкою капіляра, натяг мембрани еритроцита при його переміщенні по дрібних судинах тощо Застосування математичного моделювання й обчислювальних засобів при дослідженні поширення речовин (особливо кисню) в організмі дозволило подолати ці труднощі й знайти ефективні підходи до розв'язання проблеми транспорту речовин в організмі людини. У зв'язку з обмеженістю можливостей комп'ютерів важливим є питання оптимізації розв'язання подібних математичних моделей.

До цього часу при моделюванні руху еритроцитів у вузьких капілярах усі автори використовують вісесиметричні моделі [1, 3-4]. Використання вісесиметричної моделі в якості моделі еритроциту пов'язано з роботою Дж.М. Фітц-Джеральда [3], який вперше побудував математичну модель й поставив задачу про усталений рух тривісного еліпсоїда у вузькому циліндричному капілярі. який він також показав, що з плином часу невісесиметрична форма еритроцита переходить у вісесиметричну. У той же час на усіх відомих мікрофотографіях [2] видно, що більшість еритроцитів у капілярах має суто невісесиметричну форму.

Проведені у статті дослідження дозволяють оцінити внесок "невісесиметричності" у витратні характеристики течії крові у вузьких капілярах та пояснити невідповідність математичної моделі Фітц-Джеральда й картини руху реальних еритроцитів.

Метод дослідження

Рух рідини в щілині, між еліпсоїдом та стінкою, товщина якої $H(\varphi, z) = R_0 - R_E(\varphi, z) \ll R_0$, з врахуванням припущень, що характерні для теорії мастильного шару, описується системою рівнянь Рейнольдса, яка в циліндричній системі координат (R, φ, Z) має вигляд

$$\frac{\partial P}{\partial R} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \mu \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial P}{\partial Z} = \frac{\mu}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial V_Z}{\partial R} \right), \quad \frac{\partial(RV_R)}{\partial R} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(RV_Z)}{\partial Z} = 0, \quad (1)$$

де V_R, V_φ, V_Z – компоненти швидкості, P – тиск.

Граничні умови для системи (1) в системі відліку, що пов'язана з центром еліпсоїда, записуються у вигляді

$$R = R_0, \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = -W_E; \quad R = R_E(\varphi, Z), \quad V_R = 0, \quad V_\varphi = 0, \quad V_Z = 0. \quad (2)$$

Тут W_E – постійна швидкість руху еліпсоїда в нерухомій системі координат.

Перейдемо до безрозмірного вигляду рівнянь (1), (2), приймаючи в якості масштабу для довжин величину R_0 , для швидкості – V_* (поки невизначена), для тиску – $P_* = \mu V_* / R_0$. Вводячи для безрозмірних величин позначення

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad z = \frac{Z}{R_0}, \quad v_R = \frac{V_R}{V_*}, \quad v_\varphi = \frac{V_\varphi}{V_*}, \quad v_Z = \frac{V_Z}{V_*}, \quad p = \frac{PR_0}{\mu V_*}, \quad r_E = \frac{R_E}{R_0}, \quad w_E = \frac{W_E}{V_*},$$

отримаємо

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_Z}{\partial r} \right), \quad \frac{\partial (rv_R)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (rv_Z)}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

$$r = 1, \quad v_R = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_Z = -w_E; \quad r = r_E(\varphi, z), \quad v_R = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_Z = 0. \quad (4)$$

Перші три рівняння системи (3) проінтегруємо один раз за r і отримаємо, з урахуванням (4), залежності між компонентами швидкості й градієнта тиску:

$$v_Z = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \left[(1-r_E^2) \frac{\ln r}{\ln r_E} - (1-r^2) \right] + w_E \left(\frac{\ln r}{\ln r_E} - 1 \right), \quad v_\varphi = \frac{\partial p}{\partial \varphi} \cdot \left[(1-r_E) \frac{\ln r}{\ln r_E} - (1-r) \right],$$

де $p = p(\varphi, z)$.

Останнє рівняння системи (3) – рівняння нерозривності, проінтегруємо також один раз за r . Покладемо $r = 1$ і врахуємо граничну умову:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{r_E}^1 v_\varphi dr + \frac{\partial}{\partial z} \int_{r_E}^1 v_Z r dr = 0.$$

Першу інтегральну умову отримаємо з умови постійності витрати рідини через довільний переріз. Запишемо її в безрозмірному вигляді, підставимо отриманий вище вираз для v_Z та виконаємо інтегрування за r :

$$w_m + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{1-\eta_2^2}{2} + \frac{(1-\eta_2)^2}{\ln \eta_2} \right] d\varphi = -\frac{2}{\pi} w_E \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta_2}{\ln \eta_2} d\varphi,$$

$$\text{де } \eta_2 \equiv r_E^2 = \frac{1-z^2}{c^2 + \frac{\sin^2 \varphi}{a^2}}, \quad \eta_1 = \sqrt{\eta_2}, \quad a = \frac{A}{R_0}, \quad b = \frac{B}{R_0}, \quad c = \frac{C}{R_0}.$$

Для того, щоб швидкість руху тіла в капілярі була постійною необхідно, щоб проекція на вісь z головного вектора гідродинамічних сил, що діють на тіло, була нульовою. Перетворимо цей вираз, підставивши до нього (4) та v_Z й обчисливши необхідні похідні. Маємо другу інтегральну умову:

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-c}^c \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} \left[\frac{1-\eta_2}{\ln \eta_2} + \left(1 + \frac{1-\eta_2}{\eta_2 \ln \eta_2} \right) \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{4w_E}{\eta_2 \ln \eta_2} \left[\eta_2 + \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} dz d\varphi = 0.$$

Таким чином розв'язання системи рівнянь звелось до розв'язання крайової задачі з двома інтегральними умовами. Остання, в свою чергу, точно розв'язується дуже важко. Тому задля раціоналізації і спрощення розв'язку використаємо метод малого параметру (малий параметр ε доведеться взяти не зовсім очевидний).

Вважаючи узагальнену швидкість $w_E = 1$ (тобто вибираючи в якості масштабу швидкості – швидкість тіла w_E), перепишемо отриману крайову задачу в наступному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[F(\eta_1) \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial z} \left[F(\eta_2) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [G(\eta_2)], \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -c < z < c; \quad (5)$$

$$z = -c, \quad p = 0; \quad z = c, \quad p = \text{const} = -\Delta p; \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\text{де } F(\eta) = I_2(1, \eta) = - \left[\frac{1-\eta^2}{2} + \frac{(1-\eta)^2}{\ln \eta} \right], \quad G(\eta) = I_1(1, \eta) + \eta = \frac{1-\eta}{\ln \eta}; \quad (6)$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_{20}}{1 - \varepsilon \sin^2 \varphi}, \quad \eta_{20} = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right), \quad \varepsilon = 1 - \frac{a^2}{b^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{\eta_2}. \quad (7)$$

З урахуванням цих позначень інтегральні умови (3),(4) набувають вигляду

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-c}^c \left\{ \frac{\partial p}{\partial z} \left[G(\eta_2) + (\eta_2 + G(\eta_2)) \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] + \frac{4}{\ln \eta_2} \left[1 + \frac{1}{\eta_2} \left(\frac{\partial r_E}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} dz d\varphi = 0, \quad (8)$$

$$w_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial p}{\partial z} F(\eta_2) d\varphi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(\eta_2) d\varphi. \quad (9)$$

Всі ці співвідношення містять малий параметр ε . Вважаючи $a \leq b$ (чого завжди можна досягти відповідним вибором осей прямокутної системи координат), переконуємося, що $0 \leq \varepsilon < 1$. Розглянемо випадок, коли $\varepsilon \ll 1$ і розв'язок крайової задачі може бути отримано методом збурень.

Оскільки розклад в ряд за малим параметром ε функцій, що входять в рівняння (5) під знаком похідної, можна подати наступним чином

$$F(\eta_1) = F(\eta_{10}) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta_{10} F'(\eta_{10}) + \frac{\varepsilon^2}{8} \cdot \sin^4 \varphi \cdot [\eta_{10}^2 F''(\eta_{10}) + 3\eta_{10} F'(\eta_{10})] + \dots, \quad (10)$$

$$F(\eta_2) = F(\eta_{20}) + \varepsilon \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta_{20} F'(\eta_{20}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sin^4 \varphi \cdot [\eta_{20}^2 F''(\eta_{20}) + 2\eta_{20} F'(\eta_{20})] + \dots, \quad (11)$$

$$G(\eta_2) = G(\eta_{20}) + \varepsilon \cdot \sin^2 \varphi \cdot \eta_{20} G'(\eta_{20}) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \sin^4 \varphi \cdot [\eta_{20}^2 G''(\eta_{20}) + 2\eta_{20} G'(\eta_{20})] + \dots, \quad (12)$$

То будемо шукати розв'язок крайової задачі у вигляді

$$\rho(\varphi, z) = \psi_0(z) + \varepsilon [\psi_1(z) \sin^2 \varphi + g_1(z)] + \frac{\varepsilon^2}{2} [\psi_2(z) \sin^4 \varphi + g_2(z) \sin^2 \varphi + k_2(z)] + \dots. \quad (13)$$

Відмітимо, що граничні умови при $\varphi = 0$ й $\varphi = \pi/2$ при цьому виконуються автоматично.

Підставляючи (10) – (13) в (5) і збираючи члени з однаковими степенями ε й $\sin^2 \varphi$, отримуємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $\psi_0(z), \psi_1(z), g_1(z), \psi_2(z), g_2(z), k_2(z), \dots$, розв'язок кожного з яких залежить від розв'язку попереднього:

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} \right] = 4 \frac{d}{dz} [G(\eta_{20})], \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_1}{dz} \right] - 32F(\eta_{10})\psi_1 = \frac{d}{dz} \left[4G_1(\eta_{20}) - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} \right], \quad (15)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{dg_1}{dz} \right] = -16F(\eta_{10})\psi_1, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_2}{dz} \right] - 128F(\eta_{10})\psi_2 = 64F_1(\eta_{10})\psi_1 + \frac{d}{dz} \left\{ 4[G_2(\eta_{20}) + 2G_1(\eta_{20})] - [F_2(\eta_{20}) + 2F_1(\eta_{20})] \frac{d\psi_0}{dz} + 2F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_1}{dz} \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{dg_2}{dz} \right] - 32F(\eta_{10})g_2 = -\frac{d}{dz} \left[F_1(\eta_{20}) \frac{dg_1}{dz} \right] - 48[2F(\eta_{10})\psi_2 + F(\eta_{10})\psi_1], \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{dk_2}{dz} \right] = -16F(\eta_{10})g_2, \quad (19)$$

$$\text{де } F_1(\eta) = \eta F'(\eta), \quad F_2(\eta) = \eta^2 F''(\eta), \quad G_1(\eta) = \eta G'(\eta), \quad G_2(\eta) = \eta^2 G''(\eta). \quad (20)$$

Граничні умови для цих рівнянь повинні бути такими, щоб виконувались умови для тиску при $z = \mp c$ й інтегральна умова (8). З перших умов отримуємо

$$\psi_0(-c) = 0, \quad \psi_1(-c) = 0, \quad g_1(-c) = 0, \quad \psi_2(-c) = 0, \quad g_2(-c) = 0, \quad k_2(-c) = 0, \quad \dots, \quad (21)$$

$$\psi_1(c) = 0, \quad \psi_2(c) = 0, \quad g_2(c) = 0, \quad \dots, \quad (22)$$

а остання, після розкладу підінтегрального виразу в ряд за малим параметром і виконання інтегрування за φ , розпадається на такі інтегральні умови:

$$\int_{-c}^c \left[G(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + \frac{4}{\ln \eta_{20}} \right] dz = 0, \quad (23)$$

$$\int_{-c}^c \left[G(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + 2G_1(\eta_{20})\psi_0 - \frac{4}{\ln^2 \eta_{20}} \right] dz = 0, \quad (24)$$

$$\int_{-c}^c \left\{ G(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_2}{dz} + 4 \frac{dg_2}{dz} + 8 \frac{dk_2}{dz} \right) + 2G_1(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_0}{dz} + 3 \frac{d\psi_1}{dz} + 4 \frac{dg_1}{dz} \right) + \frac{d\psi_0}{dz} [2\eta_{20} + 2G(\eta_{20}) + 3G_1(\eta_{20})] + \frac{4}{\ln \eta_{20}} \left(2 - \frac{3}{\ln \eta_{20}} + \frac{6}{\ln^2 \eta_{20}} \right) \right\} dz = 0. \quad (25)$$

Після розв'язання (14) – (25) обчислюємо невідомі інтегральні параметри

$$\Delta p = -\psi_0(c) - \varepsilon g_1(c) - \frac{\varepsilon^2}{2} k_2(c) - \dots, \quad w_m = w_{m0} + \varepsilon w_{m1} + \frac{\varepsilon^2}{2} w_{m2} \dots. \quad (26)$$

Тут, як слідує з (9) після інтегрування за φ , маємо

$$w_{m0} = \frac{1}{4} F(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - G(\eta_{20}), \quad w_{m1} = \frac{1}{8} F(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + \frac{1}{8} F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - \frac{1}{2} G_1(\eta_{20}),$$

$$w_{m2} = \frac{1}{32} F(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_2}{dz} + 4 \frac{dg_2}{dz} + 8 \frac{dk_2}{dz} \right) + \frac{1}{16} F_1(\eta_{20}) \left(3 \frac{d\psi_1}{dz} + 4 \frac{dg_1}{dz} + 3 \frac{d\psi_0}{dz} \right) + \frac{3}{32} F_2(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - \frac{3}{8} [G_2(\eta_{20}) + 2G_1(\eta_{20})]. \quad (27)$$

Очевидно, що величини, які визначаються формулами (27), мають бути константами. Ця умова може слугувати для перевірки правильності розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР).

Розглянемо розв'язок отриманої крайової задачі для СЗДР, обмежуючись в ній рівняннями, що відповідають нульовому і першому наближенням до розв'язку вихідної, вже двовимірної, крайової задачі.

Для нульового наближення маємо рівняння (14). Проінтегрувавши його один раз і порівнявши результат з першою з формул (27), маємо

$$\frac{1}{4} F(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - G(\eta_{20}) = const = w_{m0},$$

звідки отримуємо $\frac{d\psi_0}{dz} = 4 \frac{w_{m0} + G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})}$ і, продовжуючи інтегрування з урахуванням (21), знаходимо

$$\psi_0(z) = 4 \int_{-c}^z \frac{w_{m0} + G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz, \quad -\Delta p_0 \equiv \psi_0(c) = 4 \left[w_{m0} \int_{-c}^c \frac{dz}{F(\eta_{20})} + \int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz \right].$$

Залишається визначити константу w_{m0} , для чого використаємо умову (23). Маємо

$$w_{m0} = - \int_{-c}^c \left[\frac{G^2(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} + \frac{1}{\ln \eta_{20}} \right] dz \left[\int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz \right]^{-1}.$$

Таким чином, в нульовому наближенні, що відповідає тілу – еліпсоїду обертання, розв'язання задачі зводиться до квадратур. Очевидно, що

$$w_{m0} = -y_3^{(0)}(c) / y_2^{(0)}(c), \quad \Delta p_0 = -4 \left[w_{m0} \cdot y_1^{(0)}(c) + y_2^{(0)}(c) \right]. \quad (28)$$

Диференціальні рівняння першого наближення – це рівняння (15),(16). Додавши перше з них до другого, помноженого на 2, отримаємо

$$\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20}) \right] = 0,$$

звідки, використовуючи співвідношення (21),(22),(24),(27), знайдемо послідовно

$$F(\eta_{20}) \left(\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} \right) + F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20}) = const = 8w_{m1},$$

$$\frac{d\psi_1}{dz} + 2 \frac{dg_1}{dz} = \frac{8w_{m1} - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})},$$

$$\psi_1(z) + 2g_1(z) = \int_{-c}^z \frac{8w_{m1} - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz,$$

$$-\Delta p_1 \equiv g_1(c) = 4w_{m1} \int_{-c}^c \frac{dz}{F(\eta_{20})} - \frac{1}{2} \int_{-c}^c \frac{F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz,$$

$$w_{m1} = - \frac{\int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} \left[4G_1(\eta_{20}) - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} \right] dz + 2 \int_{-c}^c \left[G_1(\eta_{20}) \psi_0 - \frac{2}{\ln^2 \eta_{20}} \right] dz}{8 \int_{-c}^c \frac{G(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} dz}.$$

Таким чином, як і в випадку нульового наближення, визначення інтегральних характеристик звелось до квадратур. Не важко переконатися, що

$$w_{m1} = -\frac{1}{8} y_3^{(1)}(c) / y_2^{(0)}(c), \quad \Delta p_1 = - \left[4w_{m1} y_1^{(0)}(c) + \frac{1}{2} y_2^{(1)}(c) \right]. \quad (29)$$

Таким чином, з врахуванням (28)-(29) із точністю до малих другого порядку малості можна знайти

$$w_m = w_{m0} + \varepsilon w_{m1}, \quad \Delta p = \Delta p_0 + \varepsilon \Delta p_1. \quad (30)$$

Однак визначення розподілу тиску на поверхні тіла потребує знання функцій $\psi_0(z), \psi_1(z), g_1(z)$. Якщо для визначення $\psi_0(z)$ достатньо розв'язати задачу Коші, то окреме визначення $\psi_1(z), g_1(z)$ приводить до необхідності розв'язання крайової задачі для рівняння (15) або (16).

Записавши рівняння (15) у вигляді $\frac{d}{dz} \left[F(\eta_{20}) \frac{d\psi_1}{dz} + F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} - 4G_1(\eta_{20}) \right] = 32F(\eta_{10}) \psi_1$, замінимо його системою

$$\frac{du}{dz} = 32F(\eta_{10}) \psi_1, \quad \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{1}{F(\eta_{20})} \left[u - F_1(\eta_{20}) \frac{d\psi_0}{dz} + 4G_1(\eta_{20}) \right], \quad (31)$$

з граничними умовами $\psi_1(-c) = 0, \quad \psi_1(c) = 0$.

З метою розв'язання крайової задачі (31) багаторазово (для різних значень u_0) на відрізку $-c \leq z \leq c$ розв'язувалася наступні задачі Коші ($b=1,2$):

$$\frac{dy_1^{(b)}}{dz} = \frac{4[w_{m0} + G(\eta_{20})]}{F(\eta_{20})}, \quad \frac{dy_2^{(b)}}{dz} = \frac{y_3^{(b)} + 4G_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} - \frac{F_1(\eta_{20})}{F(\eta_{20})} \frac{dy_1^{(b)}}{dz}, \quad \frac{dy_3^{(b)}}{dz} = 32y_2^{(b)}F(\eta_{20});$$

$$z = -c, \quad y_1^{(b)} = 0, \quad y_2^{(b)} = 0, \quad y_3^{(b)} = u_0.$$

Числові результати та їх аналіз

Результати числового експерименту представлені в таб.1 та на рис. 2.1 – 2.3. В таб. 1 наведені деякі інтегральні характеристики течії, що визначаються за формулами (30), як от: безрозмірна різниця тисків Δp , ефективна в'язкість η й параметр перетікання w_m , – в околі еритроцита, що рухається в циліндричному капілярі під дією постійної різниці тисків, коли моделлю червоного кров'яного тільця є тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$, а також у випадку еліпсоїдів обертання $abc = (0,9; 0,9; 1,0)$, $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ та для "ефективного" еліпсоїда обертання $abc = (0,944; 0,944; 1,0)$. "Ефективний" еліпсоїд дістав свою назву від того, що він має той же самий переріз у площині $z = 0$, що й тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Таблиця 1

№ п.п.	Напівосі еліпса			Безрозмірна різниця тисків	Ефективна в'язкість	Безрозмірний параметр перетікання
	a	b	c			
1.	0,9	0,99	1,00	38,4623	2,6043	0,92310
2.	0,99	0,99	1,00	142,9727	9,0546	0,98688
3.	0,944	0,944	1,00	46,8131	3,1430	0,93088
4.	0,9	0,9	1,00	30,9246	2,1895	0,88276

Звертає на себе увагу менша величина безрозмірної різниці тисків й ефективної в'язкості, при русі тривісного еліпсоїду, порівняно з безрозмірною різницею тисків й ефективною в'язкістю при русі еліпсоїда обертання, що має той самий переріз. При цьому, що безрозмірні параметри перетікання для них відрізняються менше ніж на 1%.

Тому представляється важливим поряд із інтегральними характеристиками течії, розглянути її локальні характеристики, а це перш за все профіль тиску у мастильному шарі між еритроцитом і стінкою капіляру.

На рис. 2.1 представлено графік залежності приведенного тиску $(p + \Delta p) / \Delta p$ від приведенної повздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ й кута φ на проміжку $[0, 90^\circ]$ для тривісного еліпсоїда $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

На рис. 2.2 також наведено залежності приведенного тиску $(p + \Delta p) / \Delta p$ від приведенної повздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ при фіксованих значеннях кута φ $[0, 45^\circ, 90^\circ]$ для того ж тривісного еліпсоїда. На цьому ж рисунку також наведені значення тиску для еліпсоїдів обертання $abc = (0,9; 0,9; 1,0)$, $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ та $abc = (0,944; 0,944; 1,0)$. Останній еліпсоїд обертання має той же самий переріз в площині $z = 0$, що й тривісний еліпсоїд $abc = (0,9; 0,99; 1,0)$.

Крім того на рис. 2.2 точками наведено результати розрахунків приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ з статей Річарда Скейлака [1,2] (сірі трикутники) та з дисертаційної роботи В.А. Каліона [1] (чорні круги). Звертає на себе увагу повний збіг усіх результатів.

За рахунок того, що екстремальні значення приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ на рис. 2.2 значно перевищують усі інші, на рис. 2.3 наведено ті ж самі результати, але в більшому масштабі. (Тому екстремальні значення приведенного тиску для еліпсоїда обертання $abc = (0,99; 0,99; 1,0)$ на рис. 2.3 відсутні).

З останнього рисунка очевидно, що максимальні значення профілю тиску при різних кутах φ для тривісного еліпсоїда суттєво менші ніж для еліпсоїда обертання, що відповідає значенню $a = 0,9$ ($\varphi = 0$) або $a = 0,99$ ($\varphi = 90^\circ$). Звернемо також увагу, що профіль приведенного тиску для еліпсоїда обертання при $a = 0,944$ (його площа перерізу при $z = 0$ дорівнює площі перерізу тривісного еліпсоїда) майже збігається з профілем приведенного тиску для тривісного еліпсоїда при $\varphi = 90^\circ$ ($a = 0,99$).

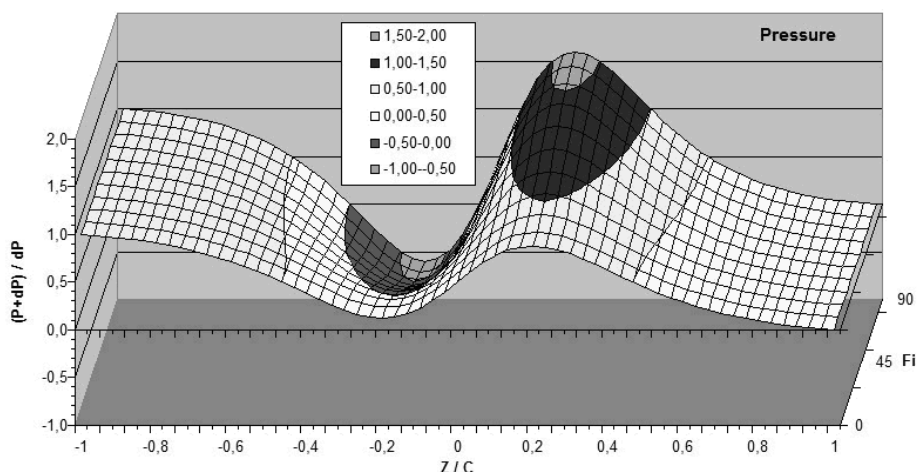


Рис. 2.1. Залежність приведенного тиску $(p + \Delta p) / \Delta p$ від приведенної повздовжньої координати z/c на відрізку $[-1, 1]$ й кута φ на проміжку $[0, 90^\circ]$ для тривісного еліпсоїда.

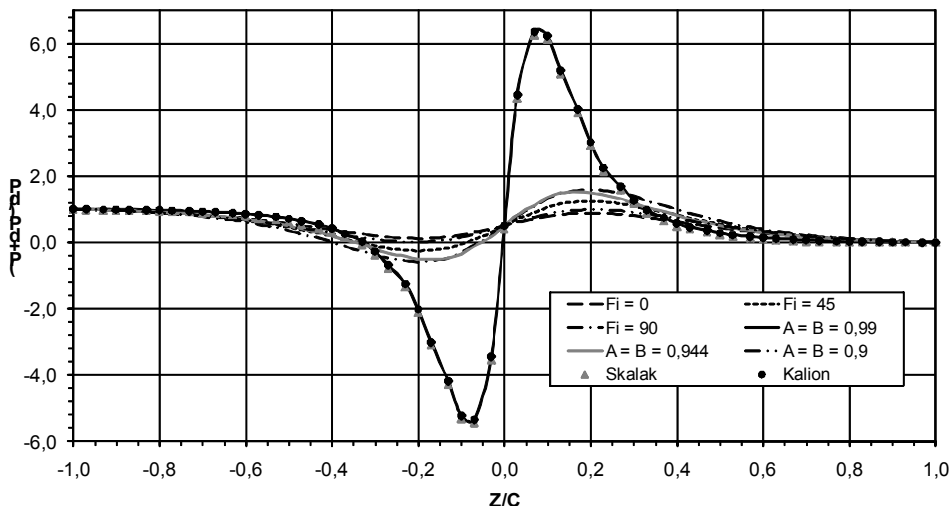


Рис. 2.2. Залежності приведенного тиску від повздожньої координати для тривісного еліпсоїда при різних значеннях кута ϕ , а також для різних еліпсоїдів обертання. Кругами й трикутниками позначені дані інших авторів

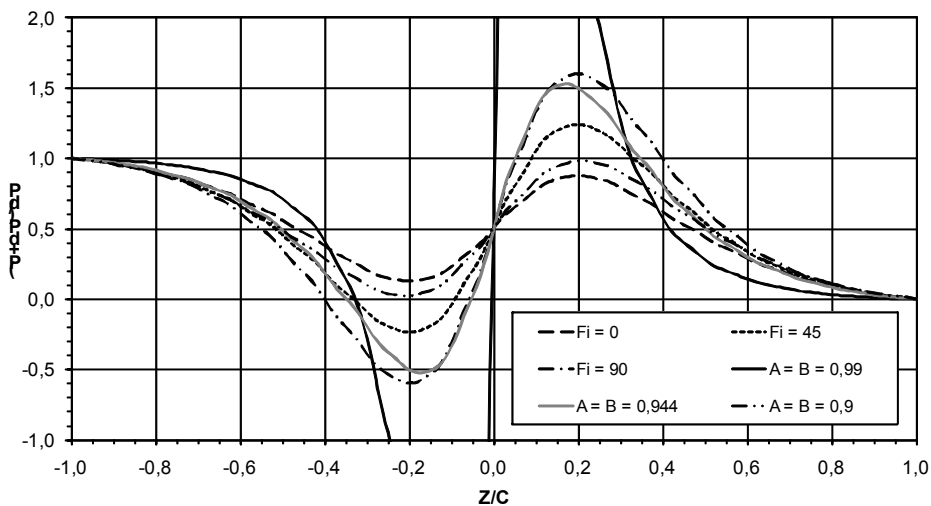


Рис. 2.3. Залежності приведенного тиску від повздожньої координати для тривісного еліпсоїда при різних значеннях кута ϕ , а також для різних еліпсоїдів обертання. (Позначення співпадають з рис.2.2)

Висновки

Результати розрахунків за побудованою математичною моделлю руху крові у дуже вузьких капілярах в нульовому наближенні (вісесиметричний еритроцит) повністю співпадають з існуючими результатами інших авторів. Профілі тиску й інтегральні характеристики при однаковій витраті рідини для тривісного еліпсоїда виявляються кращими за профілі тиску й інтегральні характеристики для еліпсоїда обертання, що має таку ж саму площу поперечного перерізу. А отже, проведене чисельне моделювання руху крові у дуже вузьких капілярах підтверджує можливість невісесиметричного руху еритроцитів у дуже вузьких капілярах й ставить під сумнів висновки, що були зроблені в роботі Дж.М. Фітц-Джеральда [3].

1. Калион В.А. Математические модели движения кровяных телец и их линейных агрегатов в капиллярах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1984. 2. Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения. – М., 1981. 3. Фитц-Джеральд Дж.М. Механика движения эритроцитов в очень узких капиллярах // Механика. – 1971. – № 4. – С. 90-118. 4. Tozeren H., Skalak R. Flow of elastic compressible spheres in tubes // J. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 95. – № 6. – P. 743-760. 5. Zarda P.R., Chien S., Skalak R. Elastic deformations of red blood cells // J. Biomechanics. – 1977. – Vol. 10. – № 2. – P. 211-221.

УДК 539.3

О. Меліхов, асп.
e-mail: cfyzv@ukr.net

ВПЛИВ ЗМІННОЇ В РАДІАЛЬНОМУ НАПРЯМКУ ТОВЩИНИ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН ГНУЧКОЇ ОРТОТРОПНОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ПЛАСТИНИ В МАГНІТНОМУ ПОЛІ

Розглянуто нелінійну задачу магнітопружності ортотропної кільцевої пластини з анізотропною електропровідністю. Отримано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформівний стан гнучких кільцевих пластин в механічному та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Проведено аналіз впливу змінної товщини в радіальному напрямку на напружений стан пластини.

The nonlinear problem of magnetoelastic ortotropic circular plate with anisotropic electroconductivity is considered. The resolving system of differential equation for stress-strain state flexible ring plates in mechanical and magnetic fields was obtained. Numerical example is given. The analysis of affection of changing thickness in radial direction on strain state of plate is analyzed.

Вступ

У багатьох галузях науки та техніки використовуються нові матеріали з новими електромагнітними властивостями. Ці матеріали експлуатуються в умовах взаємодії електромагнітних та механічних полів. Це обумовлює великий інтерес до фізики спряжених полів.

У статті розглянуто деформування гнучкої ортотропної кільцевої пластини в магнітному полі.

Постановка задачі. Основні рівняння

Припускаючи, що на тіло діє зовнішнє магнітне поле, рівняння магнітопружності у лагранжевих змінних в області зайнятій тілом (внутрішня задача), запишуться наступним чином [1,3]:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \operatorname{rot} \bar{H} = -\bar{J} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0; \operatorname{div} \bar{D} = 0;$$

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = \rho (\bar{f} + \bar{f}^{\wedge}) + \operatorname{div} \rho_e, \quad (2)$$

де \bar{E} – напруженість електричного поля; \bar{H} – напруженість магнітного поля; \bar{D} – електрична індукція; \bar{B} – магнітна індукція; \bar{J} – густина електричного струму; ρ – густина матеріалу; \bar{f} – об'ємна механічна сила; \bar{f}^{\wedge} – об'ємна сила Лоренца; \bar{V} – швидкість деформування.

Для розглядуваного випадку квадратичної нелінійності [1, 4] припускаємо, що деформації та зсуви малі в порівнянні з кутами повороту елемента, а самі кути значно менші одиниці. Вважаємо, що пружні властивості матеріалу тіла ортотропні, його головні напрямки пружності співпадають з напрямками координатних ліній, електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності σ_{ij} , магнітної проникності μ_{ij} , діелектричної проникності ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). При цьому, виходячи з кристалографії [2], для розглядуваного класу ортотропних тіл з ромбічною кристалічною структурою тензори σ_{ij} , μ_{ij} , ε_{ij} мають діагональний вигляд. В цьому випадку матеріальні співвідношення, узагальнений закон Гука та вирази пондемоторних сил запишуться відповідно у вигляді [3, 5]

$$\bar{B} = \mu_{ij} \bar{H}; \bar{D} = \varepsilon_{ij} \bar{E}; \quad (3)$$

$$\bar{J} = \sigma_{ij} (\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}); \quad (4)$$

$$\rho \bar{f}^{\wedge} = \sigma_{ij} (\bar{E} + \bar{V} \times \bar{B}) \times \bar{B} + \bar{J}_{cm} \times \bar{B}. \quad (5)$$

При дослідженні деформації круглої ортотропної пластини в магнітному полі пластини віднесена до циліндричної системи координат r, θ, z так, щоб серединна площина пластини була віднесена до полярної системи координат та центр пластини знаходився в початку координат.

Розглядаємо кільцеву пластину в одновимірній постановці за просторовою координатою r . Виходячи з двовимірних рівнянь для осесиметричної задачі, покладаємо, що

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0; \quad v = 0; \quad E_r = 0; \quad B_\theta = 0; \quad S = 0; \quad H_\theta = 0;$$

$$f_\theta = 0; \quad f_\theta^{\wedge} = 0; \quad h = h(r),$$

тут S – зсувне зусилля.

З врахуванням діагонального вигляду тензорів електропровідності, повна система рівнянь, яка дозволяє описати геометрично нелінійну модель магнітопружності ортотропних кільцевих пластин, складається з [1, 6, 7] рівнянь магнітопружності:

$$\frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + r(f_r + \rho f_r^{\wedge}) = r \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + r(f_z + \rho f_z^{\wedge}) = r \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta + rQ_r - rN_r\vartheta_r = 0; \tag{6}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r};$$

$$\sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] = -\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{H_r^- - H_r^+}{h};$$

виразів для деформацій:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \vartheta_r^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \vartheta_r; \quad \chi_r = \frac{\partial \vartheta_r}{\partial r}; \tag{7}$$

де $\vartheta_r = -\frac{\partial w}{\partial r}$ – кут повороту нормалі;

співвідношень пружності:

$$N_r = \frac{e_r h}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_r + \nu_\theta \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_r \varepsilon_r); \tag{8}$$

$$M_r = \frac{e_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} (\chi_r + \nu_\theta \chi_\theta); \quad M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} (\chi_\theta + \nu_r \chi_r).$$

Тут позначено: $\nu_r = \nu_{\theta r}$, $\nu_\theta = \nu_{r\theta}$, $e_r \nu_\theta = e_\theta \nu_r$; ν_r , ν_θ – коефіцієнти Пуасона; e_r , e_θ – модулі Юнга; u , w – переміщення; N_r , N_θ – тангенційні зусилля; M_r , M_θ – згинні t моменти; Q_r – перерізує зусилля; χ_r , χ_θ – головні кривизни серединної поверхні пластини; B_r^\pm – відомі значення компонент тангенційних складових магнітної індукції на поверхнях пластини.

Компоненти сили Лоренца мають вигляд:

$$\rho f_r^\wedge = -h J_{\theta cm} B_z + \sigma_1 h \left[E_\theta B_z - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z \right];$$

$$\rho f_z^\wedge = 0,5 h J_{\theta cm} (B_r^+ + B_r^-) - \sigma_2 h \left[0,5 E_\theta (B_r^+ + B_r^-) - \right. \tag{9}$$

$$\left. - 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z \right].$$

Розв'язувальна система рівнянь магнітопружності ортотропної кільцевої пластини

При побудові розв'язувальної системи рівнянь в якості шуканих функцій вибираємо $u, w, \nu_r, N_r, Q_r, M_r, B_z, E_\theta$, які також будемо використовувати при заданні початкових умов. Після відповідних перетворень співвідношень (6) – (9) отримуємо наступну розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в нормальній формі:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1 - \nu_r \nu_\theta}{e_r h} N_r - \frac{\vartheta_r}{r} u - 0,5 \vartheta_r^2;$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\vartheta_r; \tag{10}$$

$$\frac{\partial \vartheta_r}{\partial r} = \frac{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}{e_r h^3} M_r - \frac{\nu_\theta}{r} \vartheta_r;$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} = \frac{1}{r} (\nu_\theta - 1) N_r + \frac{e_\theta h}{r^2} u - (f_r + \rho f_r^\wedge) + h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} = -\frac{1}{r} Q_r - (f_z + \rho f_z^\wedge) + h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} = \frac{1}{r} (\nu_\theta - 1) M_r + \frac{e_\theta h^3}{12r^2} \vartheta_r + Q_r + N_r \vartheta_r;$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] + \frac{B_r^+ + B_r^-}{h};$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta.$$

Отримана зв'язана нелінійна система гіперболо-параболічних рівнянь магнітопружності восьмого порядку в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами описує симетричну деформацію гнучких кільцевих пластин змінної вздовж радіуса товщини.

Крайові умови для функцій, що характеризують механічну частину задачі, задаються як і в звичайній теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних функцій можуть задаватися через електричні поля або комбінації електричних та магнітних полів. Початкові умови задаються в класичному вигляді.

Методика розв'язання

Методика розв'язку нелінійної задачі магнітопружності кільцевої пластини змінної жорсткості вздовж радіальної координати полягає в послідовному використанні схеми Ньюмарка, метода квазілінеаризації та метода дискретної ортогоналізації [1, 8].

Для розділення змінних за часовою координатою застосовуємо неявну схему Ньюмарка, за допомогою якої нелінійна крайова задача зводиться до послідовності нелінійних одномірних крайових задач на кожному часовому кроці.

Наступний етап розв'язку послідовності нелінійних крайових задач магнітопружності базується на застосуванні методу квазілінеаризації, за допомогою якого нелінійна крайова задача зводиться до послідовності лінійних крайових задач. Потім кожна з лінійних крайових задач послідовності на відповідному часовому інтервалі розв'язується чисельно за допомогою стійкого методу дискретної ортогоналізації.

Числовий приклад

Досліджено напружено-деформівний стан металевої (боро-алюміній) кільцевої пластини змінної товщини h , внутрішнього радіуса r_0 , зовнішнього r_1 , під дією нормальної складової механічного навантаження P_z , зовнішнього магнітного поля із заданим вектором магнітної індукції, та рівномірно розподіленого стороннього струму $J_{\theta 0}$. Контур пластини закріплені наступним чином:

$$u = 0; Q_r = 0; M_r = 0; B_z = 0,1 \sin \omega t \text{ при } r = r_0;$$

$$u = 0; w = 0; M_r = 0; B_z = 0; \text{ при } r = r_1,$$

де ω – кругова частота.

Параметри пластини:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,49 \text{ м}; r_1 = 0,86 \text{ м}; P_z = 3 \cdot 10^{-2} \text{ М}; e_r = 22,9 \text{ Н/М}_2; e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/М}_2; \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/М}; \\ \nu_r &= 0,262; \nu_\theta = 0,32; \rho = 2600 \text{ кг/М}^3; \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}; \sigma_1 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{М)}^{-1}; \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 \text{ (Ом} \cdot \text{М)}^{-1}; \\ B_r^\pm &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ Т}; J_{\theta 0} = -5 \cdot 10^5 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу $t = 10^{-2} \text{ с}$, крок інтегрування за часом $\Delta t = 10^{-3} \text{ с}$.

Досліджено вплив зміни товщини на напружено-деформівний стан кільцевої пластини. Товщина задана таким чином: $h = 2 \cdot 10^{-2} \left(1 + \alpha \frac{r}{r_1}\right)$, де $\alpha = \{-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3\}$.

Результати розв'язку задачі подано нижче у вигляді графіків.

На рис. 1 подано прогин пластини $w(t)$ на внутрішньому краї пластини для різних α , де лінії 1, 2, 3, 4, 5, 6 відповідають значенням $\alpha = \{-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3\}$ відповідно. Найбільший прогин відбувається, коли $\alpha = -0,3$, тобто пластини найбільш тонка, найменший – при $\alpha = 0,3$.

З рис.1 бачимо, що зі зменшенням товщини пластини збільшується прогин, що добре узгоджується із загальною теорією оболонки. Слід відмітити, що при $\alpha = -0,3$ прогин зростає настільки, що стан пластини наближається до межі дії нелінійної теорії пластин та оболонки, оскільки відношення w до h наближається до 10.

На рис. 2 подано розподіл складової електричного поля E_2 на внутрішньому краї пластини для різних α , де лінії 1, 2, 3, 4, 5, 6 відповідають значенням $\alpha = \{-0,3; -0,2; -0,1; 0,1; 0,2; 0,3\}$ відповідно.

Результати розподілу складової електричного поля добре узгоджуються із результатами для прогину.

Отримані результати дозволяють робити висновки про вплив товщини пластини на її напружено-деформівний стан. Можна стверджувати, що магнітопружну нелінійну задачу для кільцевої пластини треба розв'язувати у зв'язаному вигляді.

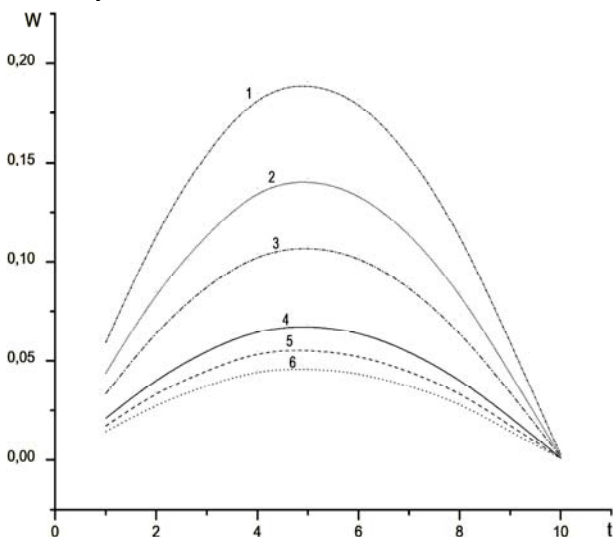


Рис. 1

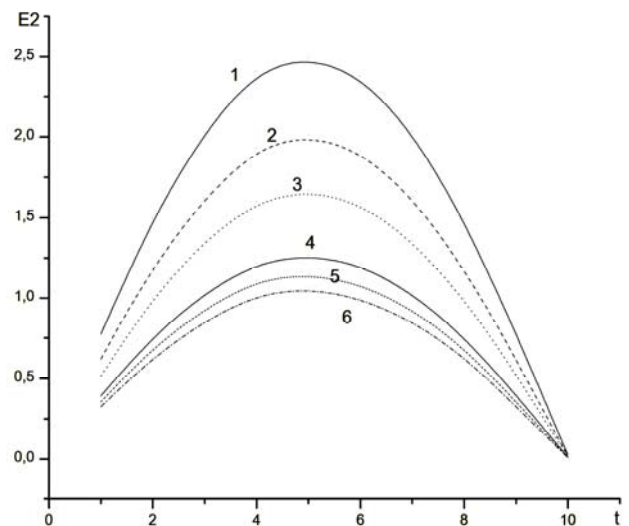


Рис. 2

Висновки

В статті розглянута нелінійна задача магнітопружності ортотропної кільцевої пластини із врахуванням ортотропної електропровідності. Наведена розв'язувальна система нелінійних диференціальних рівнянь, що описує напружено-деформівний стан гнучких кільцевих пластин з ортотропною електропровідністю, які знаходяться в силовому та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Розглянуто вплив зміни товщини на напружено-деформівний стан кільцевої пластини.

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності: підручник. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2010. – 403 с. 2. Келли А., Гровс Г. Кристаллографія і дефекти в кристаллах. – М.: Мир, 1974. 3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Електродинаміка сплошних сред. – М.: Наука, 1982. 4. Мольченко Л.В., Лоос І.І., Індіамінов Р.Ш. Магнітопружність кінчної оболонки з урахуванням ортотропної електропровідності в геометрично нелінійній постановці // Вісн. КНУ, 2007. Вип. 2. – С. 85-90. 5. Стрэттон Д.А. Теорія електромагнетизма. – М.: Л.: ГТИИ, 1980. 6. Шапавалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. МТТ. – 1968. – № 1. С. 56-62. 7. Molchenko L.V. A Method for Solving Two-Dimensional Nonlinear Boundary value Problems of Magneto elasticity for Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 5. – P. 490-495. 8. Molchenko L.V., Loos I.I., Plyas I.V. Stress Analysis of a Flexible Ring Plate with Circumferentially Varying Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 5. – P. 567-572.

Надійшла до редколегії 01.11.11

УДК 539.3

Ю. Токовий, канд. фіз.-мат. наук, **В. Мелешко**, д-р фіз.-мат. наук

**ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА**

Розглянуто застосування запропонованого Дж. Дуголом подання компонентів вектора переміщень через три гармонічні функції для побудови аналітичного розв'язку неосесиметричної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини. Розв'язок задачі будується у вигляді суперпозиції двох частин, для кожної з яких застосовується свій спосіб подання через гармонічні функції, що дозволяє задовольнити крайові умови для напружень на торця та бічній поверхні циліндра.

An application of the Dougall's representation for the displacement-vector components in terms of three harmonic functions to solution of the non-axisymmetric elasticity problem for a solid cylinder of finite length is considered. The solution is suggested in a form of superposition of two parts with their own representation through the harmonic functions. This allows for satisfaction of the boundary conditions in terms of boundary tractions on the both ends and lateral surface of the cylinder.

1. Вступ

З того часу (1863 р.) як Г. Ері запропонував підхід до розв'язування плоскої задачі теорії пружності шляхом зведення до бігармонічного рівняння для функції напружень, а Е. Бельтрамі вивів (1892 р.) рівняння суцільності в напруженнях, застосування потенціальних функцій виявилось ефективним підходом до розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла, який дозволив побудувати розв'язки низки важливих з теоретичної та прикладної точок зору двовимірних задач. Однак застосування цього підходу у просторі трьох змінних виявилось набагато складнішим у порівнянні з двовимірними задачами. Зокрема при розв'язуванні неосесиметричних задач для тіл обертання, наприклад кругового циліндра, отримано значно менше загальних розв'язків, ніж для випадку осесиметричного напружено-деформованого стану [7, 9, 12]. Це пов'язано з тим, що застосування даного підходу у тривимірних задачах теорії пружності вимагає зведення вихідної системи рівнянь до більшої кількості ключових рівнянь (як правило гармонічних чи бігармонічних), для яких можна було б зручно побудувати "каталоги" загальних розв'язків у певних системах координат. Окрім того, застосування таких загальних розв'язків до розв'язування задач для обмежених тіл вимагає наявності у них достатньої кількості вільних сталих, які б дозволили повністю задовольнити крайові умови на усій поверхні досліджуваного тіла.

Одним із перших у часі підходом до побудови загального розв'язку задачі теорії пружності для циліндра у тривимірній постановці виявився запропонований Дж. Дуголом [15] спосіб подання компонентів вектора переміщень $u_r(r, \theta, z)$, $u_\theta(r, \theta, z)$ та $u_z(r, \theta, z)$ через три гармонічні скалярні функції наступними співвідношеннями:

$$u_r = r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4(1-\nu)\varphi \right) + \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (1)$$

Тут

$$\nabla^2 \varphi(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla^2 \omega(r, \theta, z) = 0, \quad \nabla^2 \psi(r, \theta, z) = 0; \quad (2)$$

r, θ, z – циліндричні координати; ν – коефіцієнт Пуассона; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа. По-

дання (1) дозволяє тотожно задовольнити рівняння Ляме задачі та виявляється зручним у задоволенні крайових умов на бічній поверхні безмежно довгого циліндра.

Слід зауважити, що для тривимірних задач теорії пружності Дж. Дугол запропонував декілька різних варіантів подання вектора переміщень через гармонічні функції. Зокрема, ним було розглянуто подання [14, с. 141], яке у циліндричній системі координат має вигляд

$$u_r = \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial r} + (3-4\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 2z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad u_\theta = -2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{3-4\nu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2z}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial z}, \quad (3)$$

$$u_z = \frac{\partial \omega}{\partial z} - (3-4\nu) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

де функції $\varphi(r, \theta, z)$, $\omega(r, \theta, z)$, $\psi(r, \theta, z)$ задовольняють рівняння (2). Побудовані у такий спосіб переміщення та відповідні до них напруження виявляються зручними для задоволення крайових умов, наприклад, на плоских сторонах безмежного шару.

Окрім Дж. Дугола, загальний розв'язок тривимірної задачі у циліндричних координатах через три незалежні бігармонічні функції було дано Б.Г. Галеркіним [3]. Проте при застосуванні цього подання до розв'язування задачі для довгого циліндра, відповідні вирази для напружень виявляються доволі громіздкими і складними у використанні [7, с.102]. Деякі задачі згину кругового циліндра можуть бути розв'язані за допомогою подання, запропонованого П.Ф. Папковичем [7, с.105] через чотири гармонічні функції. Для розв'язування неосесиметричної задачі теорії пружності для циліндричних тіл також використовують відоме подання Буссінеска [13] через бігармонічну векторну функцію $\Phi(r, \theta, z) = (\Phi_r(r, \theta, z), \Phi_\theta(r, \theta, z), \Phi_z(r, \theta, z))$. У випадку $\Phi_r = \Phi_\theta = 0$, $\Phi_z = \mathcal{L}(r, z)$ з цього подання нескладно отримати представлення для функції Лява $\mathcal{L}(r, z)$ осесиметричної задачі [9]. У випадку навантаження довгого суцільного чи порожнистого циліндра неосесиметричним температурним полем із застосуванням термопружного потенціалу зручним у застосуванні виявляється подання Папковича-Нейбера [16]. Коли ж навантаження на бічних поверхнях циліндра пропорційні $\cos\theta$ чи $\sin\theta$ зручно використовують функції Соляніка-Красса [12]. Відомі також підходи, в основі яких лежить застосування узагальнених аналітичних функцій комплексного аргументу [1] чи безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь задач [2]. Огляди інших методів розв'язування просторових задач дано в [6, 8].

Наведені способи подання розв'язків тривимірних задач теорії пружності через допоміжні функції, як правило, застосовувалися для знаходження напружено-деформованого стану видовженого або ж безмежно довгого циліндра, коли ігнорується потреба задоволення крайових умов на торцях та пов'язані з цим крайові ефекти у сенсі принципу Сен-Венана. Як зазначалося, за відповідної побудови потенціальних функцій ці подання дозволяють справдити рівняння рівноваги й суцільності задач та задовольнити крайові умови на бічній поверхні циліндра або ж на плоских поверхнях півпростору чи шару. Однак при розгляді циліндра скінченної довжини виникає потреба одночасного задоволення крайових умов і на його бічній поверхні, і на плоских торцях, що не вдається зробити внаслідок недостатньої кількості вільних констант у розглянутих способах подання розв'язку.

Один із відомих способів подолання цієї проблеми ґрунтується на використанні методу однорідних розв'язків [10], який полягає у розвиненні заданих на бічній поверхні та торцях циліндра крайових умов для компонентів тензора напружень у ряди за повними системами неортогональних комплексних однорідних розв'язків і знаходженні тим чи іншим (як правило – наближеним) способом комплексних коефіцієнтів в отриманих рядах. При цьому виникають принципові математичні ускладнення, пов'язані за неортогональністю комплексних власних функцій відповідних однорідних задач.

Іншим підходом до розв'язання тривимірної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини є метод суперпозиції [4, 5], основна ідея якого полягає у побудові загального розв'язку задачі у вигляді суми розв'язків у ряди за повними тригонометричними (у коловому та осьовому напрямках) та циліндричними (у радіальному напрямку) системами функцій з довільними нескінченими послідовностями коефіцієнтів, що є достатнім для задоволення повного набору крайових умов на торцях та бічній поверхні циліндра. Зокрема в [4, 5] розглянуто тривимірну задачу про напружений стан пружного шару з циліндричної порожниною. При цьому розв'язок подано у вигляді суперпозиції "циліндричної" (дозволяє задовольнити крайові умови на циліндричній поверхні порожнини) та "шарової" (дозволяє задовольнити крайові умови на площинах, що обмежують шар) складових. Для побудови шарової складової використано метод власних вектор-функцій, застосування якого для скінченного циліндра, з одного боку, має переваги у зручності задоволення крайових умов для дотичних напружень, але з іншого – вимагає застосування складного математичного апарату.

У даній статті пропонується застосування методу суперпозиції до побудови розв'язку тривимірної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини під дією зовнішніх силових навантажень на торцях та бічній поверхні. Розв'язок подано у вигляді суперпозиції двох складових, перша з яких визначається за допомогою подання (1) і дозволяє задовольнити крайовим умовам на циліндричній поверхні, а друга, знайдена з використанням подання (3), – дозволяє задовольнити крайові умови на торцях циліндра. Знайдено відповідні вирази для потенціальних гармонічних функцій Дугола, які містять набори невідомих коефіцієнтів достатні для задоволення відповідних крайових умов, а також подано вирази через ці функції компонентів тензора напружень.

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу теорії пружності в напруженнях для суцільного ізотропного циліндра \mathcal{C} , який займає область $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-h \leq z \leq h$. За відсутності масових сил ця задача описується [7, с.107] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (4)$$

та рівняннями суцільності в напруженнях

$$\begin{aligned} (1+\nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu) \left(\nabla^2 \sigma_r - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \right) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} &= 0, \\ (1+\nu) \left(\nabla^2 \sigma_\theta + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_\theta) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} &= 0, \\ (1+\nu) \left(\nabla^2 \tau_{\theta z} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \tau_{\theta z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta \partial z} &= 0, \\ (1+\nu) \left(\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} \right) + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r \partial z} &= 0, \\ (1+\nu) \left(\nabla^2 \tau_{r\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{4}{r^2} \tau_{r\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут σ_i, τ_{ij} ($i, j = \{r, \theta, z\}, i \neq j$) – компоненти тензора напружень; $\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$.

Циліндр \mathcal{C} знаходиться під дією зовнішніх силових навантажень на бічній поверхні $r = a$ та торцях $z = \pm h$, розділених симетрично відносно площини $z = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, \theta, z) = f_r(\theta, z), \quad \tau_{r\theta}(a, \theta, z) = f_{r\theta}(\theta, z), \quad \tau_{rz}(a, \theta, z) = f_{rz}(\theta, z), \\ \sigma_z(r, \theta, \pm h) = g_z(r, \theta), \quad \tau_{rz}(r, \theta, \pm h) = \pm g_{rz}(r, \theta), \quad \tau_{\theta z}(r, \theta, \pm h) = g_{\theta z}(r, \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

за умов обмеженості поля напружень на осі циліндра $r = 0$ та його 2π -періодичності за кутовою змінною θ (вважатимемо для спрощення викладу що крайові умови (6) є парними функціями кутової координати). Припускаємо також, що функції (6) допускають розвинення у ряди Фур'є за осьюовою та коловою змінними й у ряди Бесселя та Діні за радіальною змінною.

Зауважимо, що задля побудови статично визначеного розв'язку задачі теорії пружності (4)–(6) система силових навантажень циліндра \mathcal{C} не може бути довільною, а має забезпечувати виконання певних умов рівноваги. Ці умови можна встановити на основі безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги (4) з урахуванням крайових умов (6) та зроблених припущень про характер функцій, що задають крайові умови. Вказані умови рівноваги записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \int \int \sigma_{\theta} dr d\theta dz = \int_0^{2\pi} \left(a \int_{-h}^h f_r dz + \int_0^a r (g_{rz}^+ - g_{rz}^-) dr \right) d\theta, \\ a^2 \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h f_{r\theta} d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 (g_{\theta z}^- - g_{\theta z}^+) dr dz, \quad a \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h f_{rz} d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^a r (g_z^- - g_z^+) dr dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Перша з умов (7) вказує на те, що результат колових напружень в об'ємі циліндра повинен врівноважуватись рівнодійним за окружністю значенням головного вектора радіальних зусиль, заданих на бічній поверхні, та різниці головних векторів дотичних зусиль на торцях в напрямку бічної поверхні. Друга умова виражає рівність головного вектора дотичних зусиль на бічній поверхні в кутовому напрямку різниці головних моментів від дотичних зусиль на торцях в кутовому напрямку. І, нарешті, третя умова виражає рівність головного вектора дотичних зовнішніх зусиль на бічній поверхні в осьовому напрямку різниці головних векторів нормальних осьових зусиль на торцях циліндра. У випадку осьової симетрії (напружений стан не залежить від окружної координати) аналогічні до (7) умови були отримані в роботі [11]. Слід зауважити, що умова, яка відповідає першій умові (7) в осесиметричному випадку, відіграє важливе значення при визначенні компонентів тензора напружень у випадку несиметричного відносно площини $z = 0$ напруженого стану скінченного циліндра.

3. Побудова розв'язку задачі

Для побудови розв'язку поставленої задачі (4)–(6) подамо компоненти вектора переміщень у вигляді

$$u_r = u_r^I + u_r^{II}, \quad u_{\theta} = u_{\theta}^I + u_{\theta}^{II}, \quad u_z = u_z^I + u_z^{II}. \quad (8)$$

Тут складові з верхнім індексом "I" повинні забезпечити задоволення крайових умов на бічній поверхні циліндра $r = a$, а складові з верхнім індексом "II" – на торцях $z = \pm h$. Унаслідок подання (8) кожен з компонент тензора напружень, які виражаються через переміщення (8) фізичними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{G} = \frac{2\nu\theta}{1-2\nu} + 2\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{\sigma_{\theta}}{G} = \frac{2\nu\theta}{1-2\nu} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \frac{\sigma_z}{G} = \frac{2\nu\theta}{1-2\nu} + 2\frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \frac{\tau_{r\theta}}{G} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad \frac{\tau_{rz}}{G} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \frac{\tau_{\theta z}}{G} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (9)$$

можна подати в аналогічному до (8) вигляді. Тут G – модуль зсуву; $\theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$.

Для визначення складових у (8) з верхнім індексом "I" скористаємося поданням (1), позначивши функції Дюгола тим же верхнім індексом. Тоді на основі співвідношень (1) та (9) отримаємо наступні вирази для напружень:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^I}{G} &= (2-4\nu) \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + 2r \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi^I}{\partial \theta}, \\ \frac{\sigma_{\theta}^I}{G} &= (2-4\nu) \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \omega^I}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi^I}{\partial \theta}, \\ \frac{\sigma_z^I}{G} &= -4 \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial z^2} - 2r \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{rz}^I}{G} &= r \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial z^3} - r \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r^2 \partial z} - (3-4\nu) \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial \theta \partial z}, \\ \frac{\tau_{r\theta}^I}{G} &= \frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial \theta \partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega^I}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^I}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\tau_{\theta z}^I}{G} &= -\frac{\partial^3 \varphi^I}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{4(1-\nu)}{r} \frac{\partial^2 \varphi^I}{\partial \theta \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \omega^I}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2 \psi^I}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Прийнявши до уваги зроблені вище припущення щодо характеру функцій, що задають крайові умови, розвинемо гармонічні функції $\varphi^l(r, \theta, z)$, $\omega^l(r, \theta, z)$, $\psi^l(r, \theta, z)$ у ряди за тригонометричними системами за коловою та осьюовою змінними. Відокремивши таким чином змінні у рівняннях (2), знаходимо вирази для функцій Дугола у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi^l(r, \theta, z) &= A_0^l + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^l \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^l r^m \cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm}^l \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \cos m\theta \cos k_n z, \\ \omega^l(r, \theta, z) &= C_0^l + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^l \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} \cos k_n z + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^l r^m \cos m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} D_{nm}^l \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \cos m\theta \cos k_n z, \\ \psi^l(r, \theta, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} E_m^l r^m \sin m\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} F_{nm}^l \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \sin m\theta \cos k_n z, \end{aligned} \quad (11)$$

де $k_n = n\pi / h$, I_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) – модифіковані функції Бесселя першого роду порядку m , а $A_0^l, C_0^l, A_m^l, C_m^l, E_m^l, B_n^l, D_n^l, B_{nm}^l, D_{nm}^l, F_{nm}^l$ – невідомі коефіцієнти, які слід знайти з крайових умов (6). Підставивши вирази (11) у формули (10), знайдемо компоненти тензора напружень. Наприклад, радіальні напруження набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^l}{G} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n^2 B_n^l \left\{ (1+2\nu) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} + k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right\} + k_n^2 D_n^l \left\{ \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \frac{1}{k_n r} \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} \right\} \right] \cos k_n z + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m^l + E_m^l \right] m(m-1) r^{m-2} \cos m\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[k_n^2 B_{nm}^l \left\{ (2\nu - m - 1) \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} - k_n r \frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \right\} + \right. \\ &\left. + k_n^2 D_{nm}^l \left\{ \left(1 + \frac{m(m-1)}{k_n^2 r^2} \right) \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} - \frac{1}{k_n r} \frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \right\} + \frac{m}{r} F_{nm}^l \left\{ \frac{m-1}{r} \frac{I_m(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} + k_n \frac{I_{m+1}(k_n r)}{I_{m+1}(k_n a)} \right\} \right] \cos m\theta \cos k_n z. \end{aligned} \quad (12)$$

Зауважимо, що вираз у першій стрічці (12), що не залежить від окружної змінної, співпадає з точністю до позначення констант із "циліндричною" складовою радіальних напружень для осесиметричної задачі теорії пружності для скінченного циліндра [11].

Тепер знайдемо напруження, що відповідають у виразах (8) складовим з верхнім індексом "II". Підставивши вирази (3), у яких функції Дугола позначимо тим же верхнім індексом, у формули (9), знаходимо наступні подання компонентів тензора напружень:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^{II}}{G} &= (6-8\nu) \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r^2} + 4z \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial r^2 \partial z} - 8\nu \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \omega^{II}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r \partial \theta} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \psi^{II}}{\partial \theta}, \\ \frac{\sigma_{\theta}^{II}}{G} &= (8\nu-6) \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r^2} - 6 \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + \frac{4z}{r} \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r \partial z} + \frac{4z}{r^2} \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial \theta^2 \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega^{II}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial \theta^2} - \frac{4}{r} \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r \partial \theta} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \psi^{II}}{\partial \theta}, \\ \frac{\sigma_z^{II}}{G} &= 4z \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial z^3} - 2 \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \omega^{II}}{\partial z^2}, \\ \frac{\tau_{rz}^{II}}{G} &= 2 \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r \partial z} + 2z \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial r \partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial \theta \partial z}, \\ \frac{\tau_{r\theta}^{II}}{G} &= \frac{6-8\nu}{r} \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial r \partial \theta} - \frac{6-8\nu}{r^2} \frac{\partial \varphi^{II}}{\partial \theta} + \frac{4z}{r} \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial r \partial \theta \partial z} - \frac{4z}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial \theta \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \omega^{II}}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial z^2} - 4 \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r^2}, \\ \frac{\tau_{\theta z}^{II}}{G} &= \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi^{II}}{\partial \theta \partial z} + \frac{4z}{r} \frac{\partial^3 \varphi^{II}}{\partial \theta \partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \omega^{II}}{\partial \theta \partial z} - 2 \frac{\partial^2 \psi^{II}}{\partial r \partial z}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тепер, розвинувши функції $\varphi^{II}(r, \theta, z)$, $\omega^{II}(r, \theta, z)$, $\psi^{II}(r, \theta, z)$ у тригонометричні ряди за коловою змінною та в ряди за відповідними функціями Бесселя, знаходимо шляхом відокремлення змінних у рівняннях (2) наступні вирази для функцій Дугола:

$$\begin{aligned} \varphi^{II}(r, \theta, z) &= A_0^{II} z + B_0^{II} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_{0j}^{II} \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + B_{0j}^{II} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_{mj}^{II} \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + B_{mj}^{II} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right] \frac{J_m(\lambda_j r)}{J_{m+1}(\lambda_j a)} \cos m\theta, \\ \omega^{II}(r, \theta, z) &= C_0^{II} z + D_0^{II} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{0j}^{II} \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + D_{0j}^{II} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right] \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{mj}^{II} \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + D_{mj}^{II} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right] \frac{J_m(\lambda_j r)}{J_{m+1}(\lambda_j a)} \cos m\theta, \\ \psi^{II}(r, \theta, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[E_{mj}^{II} \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + F_{mj}^{II} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right] \frac{J_m(\lambda_j r)}{J_{m+1}(\lambda_j a)} \sin m\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

де J_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) – функції Бесселя першого роду порядку m ; λ_j ($j = 1, 2, \dots$) – додатні корені трансцендентного рівняння $J_1(\lambda a) = \lambda a$; $A_0^{II}, B_0^{II}, C_0^{II}, D_0^{II}, A_{0j}^{II}, B_{0j}^{II}, A_{mj}^{II}, B_{mj}^{II}, C_{0j}^{II}, D_{0j}^{II}, C_{mj}^{II}, D_{mj}^{II}, E_{mj}^{II}, F_{mj}^{II}$ – вільні сталі коефіцієнти, які

слід знайти з крайових умов (6). Як і в попередньому випадку, підставивши (14) у (13), знайдемо вирази для компонентів тензора напружень. Наприклад, вираз для радіальних напружень має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r''}{G} = & -2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{0j}'' \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + D_{0j}'' \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + A_{0j}'' \left\{ 3 \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2 \lambda_j z \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} + B_{0j}'' \left\{ 3 \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2 \lambda_j z \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} \right] \frac{\lambda_j^2 J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} + \\ & + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_{0j}'' \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + D_{0j}'' \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + A_{0j}'' \left\{ (3-4\nu) \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2 \lambda_j z \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} + B_{0j}'' \left\{ (3-4\nu) \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2 \lambda_j z \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} \right] \frac{\lambda_j J_1(\lambda_j r)}{r J_0(\lambda_j a)} + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\frac{m(m-1)}{r^2} - \lambda_j^2 \right) \left\{ C_{mj}'' \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + D_{mj}'' \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} + 2 \frac{m(m-1)}{r^2} \left\{ E_{mj}'' \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + F_{mj}'' \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} + \right. \\ & + A_{mj}'' \left\{ (3-4\nu) \frac{m(m-1)}{r^2} - 3\lambda_j^2 \right\} \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2\lambda_j z \left(\frac{m(m-1)}{r^2} - \lambda_j^2 \right) \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \left. \right\} + \\ & + B_{mj}'' \left\{ (3-4\nu) \frac{m(m-1)}{r^2} - 3\lambda_j^2 \right\} \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2\lambda_j z \left(\frac{m(m-1)}{r^2} - \lambda_j^2 \right) \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \left. \right\} \frac{J_m(\lambda_j r)}{J_{m+1}(\lambda_j a)} \cos m\theta + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(C_{mj}'' - 2mE_{mj}'' \right) \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + \left(D_{mj}'' - 2mF_{mj}'' \right) \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + A_{mj}'' \left\{ (3-4\nu) \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2\lambda_j z \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} + \right. \\ & \left. + B_{mj}'' \left\{ (3-4\nu) \frac{\text{sh } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} + 2\lambda_j z \frac{\text{ch } \lambda_j z}{\text{ch } \lambda_j h} \right\} \right] \frac{\lambda_j J_{m+1}(\lambda_j r)}{r J_{m+1}(\lambda_j a)} \cos m\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Вираз у перших двох стрічках (15), що не залежить від колової змінної, співпадає з точністю до позначення з "шаровою" складовою радіальних напружень у випадку осесиметричної задачі [11].

Зауважимо, що внаслідок розгляду обмеженого за осьовою змінною шару ($-h \leq z \leq h$), для повноти розв'язку до виразів для нормальних напружень слід додати ще один доданок у вигляді довільної сталої, який, вочевидь, задовольнятиме рівняння (4), (5). При цьому цей сталий доданок повинен бути однаковим для радіальних та окружних напружень, що випливає з першого рівняння (4) та другого, третього і останнього рівнянь (5).

4. Висновок

З використанням методу суперпозиції запропоновано підхід до розв'язання тривимірної задачі теорії пружності для суцільного циліндра скінченної довжини під дією заданого на бічній поверхні та торцях силового навантаження. Побудовано подання компонентів вектора переміщень (8) та аналогічного подання для компонентів тензора напружень з використанням представлень Дж. Дугола (1), (3) та урахуванням довільного сталою доданку, який постає з умов повноти розв'язку для обмеженої області. Запропоновані подання володіють достатньою кількістю ступенів свободи (послідовностями довільних коефіцієнтів у розвиненнях за повними ортогональними системами функцій) для задоволення крайових умов на усій поверхні циліндра. Підстановка отриманих виразів для напружень у крайові умови (6), праві частини яких слід розвинути у відповідні ряди за повними системами тригонометричних та Бесселевих функцій, призведе до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів у розвиненнях напружень. Аналіз та розв'язання цієї системи, від існування та єдиності розв'язку якої залежить успіх побудови розв'язку поставленої задачі з використанням запропонованого методу, є метою наших подальших досліджень.

1. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. – М., 1978. 2. Вигак В.М., Рычагивский А.В. Решение трехмерной задачи теории упругости для слоя // Прикл. мех. – Т. 38, No 9. – P. 78-86. 3. Галеркин Б.Г. К общему решению задач теории упругости в трех измерениях с помощью функций напряжений и перемещений // Док. АН ССР, сер. А. – 1931. – No 10. – С. 281-286. 4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К., 1978. 5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985. 6. Каландия А.И. и др. Линейная теория упругости / А.И. Каландия, А.И. Лурье, Г.Ф. Манджавидзе // Механика в СССР за 50 лет. – М., 1972. – Т. 3. – С. 5-70. 7. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – М., 1975. 8. Лурье А.И. Теория упругости. – М., 1970. 9. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л., 1935. 10. Мелешко В.В. Однородные решения для упругого прямоугольного бруса. – В кн. Актуальные аспекты физико-механических исследований. К 70-летию академика НАН Украины В.Т. Гринченко, К., 2007. – С. 205-229. 11. Мелешко В.В., Токовий Ю.В., Барбер Дж.Р. Осесимметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, No 1. – С.120–137. 12. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. – М., 1987. 13. Boussinesq J. Applications des potentiels. – Paris, 1885. 14. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1904. – V. 41, No 8. – P. 129-228. 15. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic rod of circular section // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. – 1914. – V. 49, No 17. – P. 895-978. 16. Youngdahl C.K. On the completeness of a set of stress functions appropriate to the solution of elasticity problems in general cylindrical coordinates // Int. J. Eng. Sci. – 1969. – V. 7, No 1. – P. 61-79.

Надійшла до редколегії 07.12.11

УДК 539.3

Н. Гук, д-р фіз.-мат. наук, Н. Ободан, д-р техн. наук

ПРО ВІДНОВЛЕННЯ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ СПОСТЕРЕЖУВАНОЇ ОБОЛОНКИ

Розглянуто обернену задачу відновлення функції жорсткості циліндричної оболонки в варіаційній постановці. Запропоновано підхід до розв'язання задачі в умовах багатоекстремальності функціонала-нев'язки. Подано результати ідентифікації функції змінної товщини та кривини оболонки.

The problem of identification of inflexibility of cylindrical shell in the variation formulation is studied. The approach to take into account the multiextremal's functional-discrepancy is proposed for decision of inverse problem. Results of identification of variable thickness and curvature of shell are presented.

Вступ

Визначення властивостей спостережуваних об'єктів у теорії пружності пов'язують зазвичай з постановкою та розв'язанням обернених задач механіки деформівного твердого тіла [2]. При цьому розв'язок відшукується в класі функцій, близьких за значеннями й властивостями до деякого базового розв'язку, відомого як розв'язок еталонної задачі. Такій підхід забезпечує можливість застосування регуляризуючих алгоритмів [5, 1]. Для їхнього ефективного використання область визначення розв'язків оберненої задачі повинна бути компактною, регуляризуючий оператор – близький до точного, бо тоді відповідна задача оптимізації зводиться до задачі локальної оптимізації [1] і може бути розв'язана з використанням початкового наближення, яке повинне бути близьким до дійсного розв'язку.

Тим часом, реальні властивості системи, зокрема тонкостінної, можуть суттєво відрізнятись від еталонних, у зв'язку із чим методи регуляризації стають неефективними.

У тому випадку, коли діапазон можливих розв'язків оберненої задачі великий і (або) залежність розв'язків прямої задачі від розв'язків оберненої задачі немонотонна, зазначені особливості проявляються суттєво [4].

Розглянуті нижче задачі про відновлення дійсної жорсткості і (або) геометрії тонкостінної циліндричної оболонки мають такі властивості:

- 1) залежність функцій, що характеризують напружено-деформований стан, від зміни жорсткості й геометрії оболонки може бути нелінійною (при змінній товщині та кривизні);
- 2) діапазон можливих розв'язків оберненої задачі (функції, що описують товщину, кривизну й модуль пружності) не є малий.

Постановка оберненої задачі

Для спостережуваної тонкостінної оболонки розглядається обернена задача, яка полягає у визначенні невідомої вектор-функції $H(X)$ з компонентами, що характеризують товщину, кривизну оболонки й модуль пружності матеріалу, з якого вона виготовлена, за відомими (вимірюваними) значеннями деформацій оболонки в деяких точках γ_r її граничних поверхонь

$$\sigma_{\gamma_r} = \sigma_{\gamma_r}^*, r = \overline{1, N}, \quad (1)$$

де $\sigma = \{ \varepsilon_{ilr}, \chi_{ilr} \}$ – вектор-функція, компонентами якої є тангенціальні та вигинні деформації серединної поверхні оболонки; σ^* – вимірювані значення цієї ж функції, отримані з показань датчиків вимірювання деформацій, встановлених на граничних поверхнях оболонки; N – число точок спостереження.

Математичні моделі прямої і оберненої задач

Для визначення розрахункових значень деформацій σ_{γ_r} у точках γ_r поверхні використовується математична модель спостережуваної деформівної оболонки змінної жорсткості (геометрії), яка описується системою нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\nabla_j (C_1^{ijkl}(H) \nabla_k u_l) - \nabla_j \left[C_1^{ijkl} \left(B_{kl}(H) w - \frac{1}{2} w_{,\varepsilon_k} w_{,\varepsilon_l} \right) \right] + q_i = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon^2 \nabla_{ij} (C_2^{ijkl}(H) \nabla_{kl} w) - C_1^{ijkl}(H) \varepsilon_{kl} (B_{ij}(H) + \nabla_{ij} w) - q = 0, \quad (3)$$

де $\nabla_j (\cdot) = (\cdot)_{,x_j} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial x_j}$; $\nabla_{ij} (\cdot) = (\cdot)_{,x_i x_j} = \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$; $B_{ij}(H), C_1^{ijke}(H), C_2^{ijke}(H)$ – невідомі функції оберненої задачі,

що описують кривизну серединної поверхні оболонки, жорсткість оболонки на розтягування – стискання і вигинну жорсткість; $u_i(X, H)$ – тангенційні переміщення точок серединної поверхні оболонки в поздовжньому й окружному напрямках x_1, x_2 , що збігаються з лініями кривизни серединної поверхні оболонки; $w(X, H)$ – нормальні переміщення точок серединної поверхні оболонки; $X = \{x_1, x_2\}$ – вектор просторових координат, пов'язаних із

серединною поверхнею оболонки; $\varepsilon = \frac{h^2}{12R^2}$ – параметр; h, R – номінальні значення товщини й радіуса кривизни

оболонки; L – довжина оболонки; q_i, q – складові розподілених поверхневих навантажень; $i, j, k, l = 1, 2$, якщо $i \neq j$, то $k \neq l$, і по черзі $k = 1, l = 2$; $k = 2, l = 1$, прийнята угода про підсумовування по індексах, що повторюються.

В якості граничних умов вважаємо виконаними умови $w|_{\Gamma_0} = 0$ на деякій частині контуру Γ_0 , решта умов на границі Γ є природними [3].

Тоді обернена задача визначення невідомої вектор-функції $H(X)$ може бути записана у варіаційній постановці в такий спосіб:

$$H = \arg \inf_{H(X) \in \bar{H}} J, \tag{4}$$

$$J = \int_{\Omega} (\sigma(X, H) - \sigma^*)^2 d\Omega, \quad H(X) \in \bar{H}, \quad \sigma(X, H) \in \sigma^0,$$

де \bar{H}, σ^0 – області визначення функцій $H(X), \sigma(X, H)$.

Компоненти вектор-функції $\sigma(X, H)$ формуються з геометричних співвідношень теорії оболонок у результаті підстановки в них компонент функції переміщень $U(u_1, u_2, w)$, отриманих зі співвідношень (2), (3).

Метод розв'язування прямої і оберненої задач

Розв'язок оберненої задачі $H(X)$ й відповідної їй прямої задачі $U(X, H)$ подамо у вигляді:

$$H = H_0 + \Delta H, \quad U(X, H) = U_0(X, H_0) + \Delta U(X, H_0, \Delta H),$$

де $U_0(X, H_0)$ – деякий неособливий розв'язок прямої задачі, що характеризує відомий стан оболонки; $\Delta U(X, H_0, \Delta H)$ – приріст до функції $U_0(X, H_0)$, який викликано зміною невідомої функції оберненої задачі H .

Тоді для опису стану оболонки запишемо функції $\sigma(X, H)$ у вигляді:

$$\sigma(X, H) = \sigma_0(X, U_0(H_0)) + \Delta \sigma(X, H_0, \Delta H),$$

а функціонал у варіаційному формулюванні (4) подамо в такий спосіб:

$$J = \int_{\Omega} ((\sigma_0(X, U_0(H_0)) + \Delta \sigma(X, H_0, \Delta H)) - \sigma^*)^2 d\Omega \rightarrow \min_{H_0, \Delta H}.$$

У [3] показано, що, якщо виконується умова

$$\|\Delta H\| \leq \mu \|H_0\|, \quad \mu < 1, \tag{5}$$

то $\|\Delta U\| \leq \mu \|U_0\|$, а, отже, і $\|\Delta \sigma\| \leq \mu \|\sigma_0\|$.

Тому, у випадку виконання умови (5) у нульовому наближенні маємо:

$$H_0^* = \arg \inf_{H_0} J_0, \tag{6}$$

$$J_0 = \int_{\Omega} (\sigma_0(X, U(H_0)) - \sigma^*)^2 d\Omega.$$

Для опису розв'язків H_0 будемо використовувати функціональний простір Соболева $W_{2\Omega}^1$ з нормою:

$$\|H\|_{W_{2\Omega}^1}^2 = \int_{\Omega} H^2 d\Omega + \int_{\Omega} (H')^2 d\Omega.$$

Введемо параметри $\delta_1^2 = \left(\int_{\Omega} H^2 d\Omega \right)$, $\delta_2^2 = \int_{\Omega} (\partial H / \partial x_1)^2 + (\partial H / \partial x_2)^2 d\Omega$, і зобразимо розв'язок H_0 як

$H_0 = H_0(\delta_1, \delta_2)$. Тоді

$$H_0^*(\delta_1, \delta_2) = \arg \min_{\delta = \{\delta_1, \delta_2\} \in \bar{\Delta}} \int_{\Omega} (\sigma_0(X, U(\delta_1, \delta_2)) - \sigma^*)^2 d\Omega, \tag{7}$$

де $\bar{\Delta}$ – двовимірний простір зміни параметрів δ_1, δ_2 .

В якості функції H_0 може бути обрана будь-яка двохпараметрична функція $H_0 = f(\delta_1, \delta_2)$. Тоді розв'язок задачі (7) описує множину розв'язків H_0 з фіксованими значеннями δ_1, δ_2 .

Для побудови функції J_0 використовується метод скінчених елементів стосовно системи (2), (3). При відомому початковому стані $U_0(X, H_0)$ й заданому ΔH прирости вузлових переміщень визначаються з системи:

$$K(U_0, H_0, \Delta H) \Delta U = R(U_0, H_0), \tag{8}$$

де $U_0 = \{U_{0s}\}$, $\Delta U = \{\Delta U_s\}$, $s = \overline{1, S}$ – вектори вузлових переміщень і приростів; $H_0 = \{H_{0j}\}$, $\Delta H = \{\Delta H_j\}$, $j = \overline{1, M}$ – вектори вузлових значень невідомої функції оберненої задачі й прирощень; $K(U_0, H_0, \Delta H_0)$ – матриця жорсткості, $R(U_0, H_0)$ – вектор правих частин.

Для побудови розв'язку задачі (7) використовується метод продовження по параметрах δ_1, δ_2 , так, щоб на кожному кроці виконувалася умова (5), вузлові переміщення на кроці t ($t = 1, 2, 3, \dots$) процесу методу продовження визначаються в такий спосіб:

$$U_0^t = U_0^{t-1} + \left. \frac{dU}{d\delta_i} \right|_{U=U_0} \Delta \delta_i^t, \quad \text{де} \quad \left. \frac{dU}{d\delta_i} \right|_{U=U_0} = K^{-1} R \frac{dH_0}{d\delta_i}; \quad i = 1, 2.$$

Рух по параметру δ_i при фіксованому значенні δ_j , $i, j = 1, 2$; $i \neq j$, триває, якщо на попередньому кроці ітераційного процесу продовження розв'язку прямої задачі U_0^{t-1} в точці $\delta^{t-1} = (\delta_1^{t-1}, \delta_2^{t-1})$ є неособливим, тобто виконується умова $\det K \neq 0$. У тому випадку, коли зазначена умова не виконується, здійснюється зміна параметра продовження.

Значення параметра $\mu(\delta_1, \delta_2)$ обчислюється за формулою $\mu = \|\sigma_0(H_0) - \sigma^*\| / \|\sigma_0\|$.

Для одержання розв'язку задачі (6) визначаються прирости компонент вектора початкового наближення $\{H_{0j}\}$ з використанням ітераційної процедури методу Ньютона: $\Delta H^{(d)} = -Q|_{H^{(d-1)}} \Delta(H^{(d-1)})$, де $Q = (G^T G)^{-1} G^T$; d – номер кроку ітераційного процесу методу Ньютона.

Компоненти матриці градієнта G визначаються чисельно з використанням різницевого аналога:

$$G = \left\| \frac{\partial \Delta(X_r, H)}{\partial H_j} \right\| = \frac{\sigma(X_r, H_j + \Delta H_j) - \sigma(X_r, H_j)}{\Delta H_j},$$

де $\Delta(X_r, H) = (\sigma(X_r, \{H_j\}) - \sigma_r^*)$ – лінеаризована функція нев'язки; ΔH_j – приріст до j -ої компоненти вектора невідомих оберненої задачі.

Аналіз результатів

Вибір виду двохпараметричної функції $H_0 = f(\delta_1, \delta_2)$ здійснюється з урахуванням специфіки задачі. Так, для розв'язання задачі відновлення функції змінної товщини оболонки функцію $H_0 = f(\delta_1, \delta_2)$ обрано у вигляді $H_0(\delta_1, \delta_2) = h[(1 - \delta_1) + \delta_1 \cos m x_2 \sin n \pi x_1]$, де $-\pi \leq x_2 \leq \pi$; $0 \leq x_1 \leq 1$; $\delta_1 = h_{\max} - h_{\min} / h_{\max} + h_{\min} < 1$; $\delta_2^2 = (\pi^2 n^2 + m^2)$; h – номінальне значення товщини оболонки; h_{\max} , h_{\min} – найбільше й найменше значення товщини оболонки; у розрахунках використовувалося співвідношення $n/m = L/\pi R$.

На рис. 1 для оболонки ($L/R = 4$, $R/h = 100$; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$) подано залежність $\|\sigma(X_r, H(\delta_1, \delta_2))\|_{l_2}$ від значень параметра δ_2 , криві побудовано для оболонок, що перебувають під дією рівномірного зовнішнього тиску (суцільна крива відповідає випадку, коли значення параметра $\delta_1 = 0.2$, пунктирна – $\delta_1 = 0.1$).

З аналізу рис. 1 видно, що зміна функції $\|\sigma(X_r, H(\delta_1, \delta_2))\|_{l_2}$ залежно від значень параметра δ_2 носить немонотонний характер, тому функціонал задачі (6) є багатоекстремальним, а початкове наближення може бути отримано у вигляді:

$$H_0 = \arg \inf_{\delta_1, \delta_2} (\min J_0).$$

Проведено ідентифікацію змінної товщини відкритої оболонки ($L/R = 4$, $R/h = 100$; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$; φ – фіксований кут розхилу оболонки; $\varphi = \pi/2$), поздовжні кромки якої жорстко защемлені, на криволінійних кромках реалізовано умови вільного краю. На рис. 2, 3 наведено результати відновлення товщини оболонки для випадків, коли відхилення від номінальних значень товщини спостерігаються в деякій локальній області (відповідає рис. 2) і в усій області (відповідає рис. 3). Для розглянутих випадків мінімальне відхилення товщини від номінального значення становить 6% (на рис. позначене світлим кольором), максимальне – 25% (позначене темним кольором). Для розглянутих випадків розподілу функції товщини відносна похибка відновлення не перевищувала 2%.

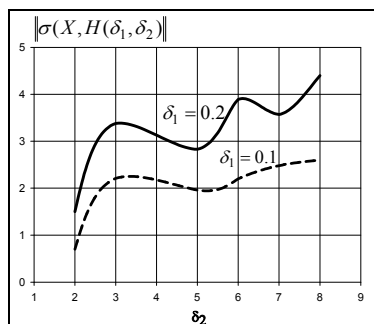


Рис. 1. Залежність норми вектора значень деформацій від параметра змінюваності товщини

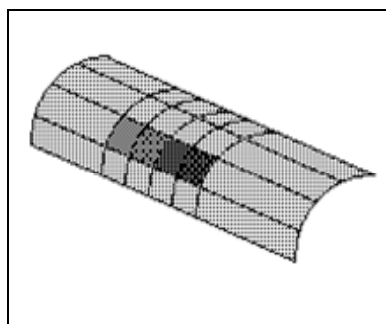


Рис. 2. Результат ідентифікації відхилень значень товщини оболонки в локальній області

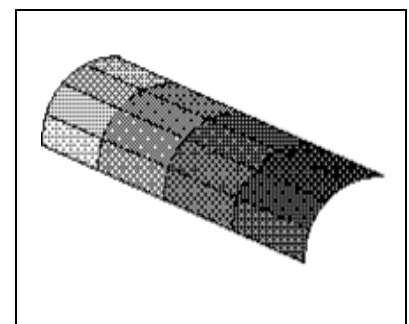


Рис. 3. Результат ідентифікації відхилень значень товщини оболонки в усій області Ω

Зміна кривизни оболонки досліджувалася як визначення початкового прогину поверхні оболонки ($L/R = 4$, $R/h = 200$; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0.3$), у якості навантаження було обрано дію рівномірного осьового стискування

($R = 0.4R_{крит}$), початкове наближення $H_0 = f(\delta_1, \delta_2)$ обрано у вигляді: $H_0 = \delta_1(a + b \cos \delta_2 x_2)$; $a + b = 1$, де R_{max} , R_{min} – найбільше й найменше значення радіуса кривизни оболонки; $\delta_1 = (R_{max} - R_{min}) / (R_{max} + R_{min}) < 1$; $\delta_2 = 2, 4, 6, 8, 10 \dots$

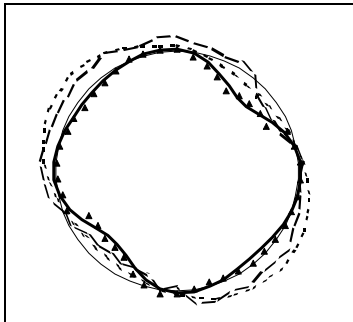


Рис. 4. Результат ідентифікації початкового прогину регулярної форми

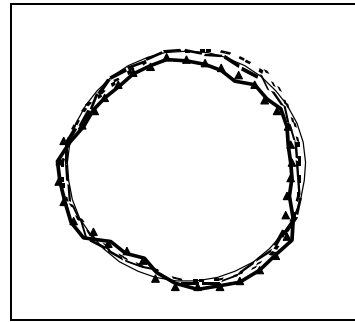


Рис. 5. Результат ідентифікації початкового прогину довільної форми

На рис. 4 наведений результат відновлення початкового прогину регулярної форми, на рис. 5 – результат відновлення прогину довільної форми (результат реконструкції позначений маркером ▲), тут же показано початкове наближення, отримане з розв'язку задачі (7) (позначено пунктирною лінією), і результат 1 ітерації методу Ньютона (позначений штрих-пунктирною лінією). Можна відзначити, що незалежно від характеру розподілу початкового прогину оболонки спостерігається задовільний результат відновлення функції прогину, погрішність не перевищує 4 %.

Висновки

Запропонований алгоритм дозволяє ефективно розв'язувати задачу відновлення змінної жорсткості та кривизни тонкостінної спостережуваної оболонки для широких областей можливих розв'язків, що описуються у просторі Соболева.

1. Алифанов О.М., Артюхин М.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М., 1988. 2. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М., 2007. 3. Воронич И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. – М., 1989. 4. Ободан Н.І., Гук Н.А. Обернена задача визначення зовнішніх навантажень при деформації тонкостінних оболонок // Вісник 5. Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2011. – № 1. – С. 47–50. 6. Тихонов А.Н., Иванов В.К., Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – М., 1970.

Надійшла до редколегії 05.03.12

МОСЕЄНКОВ БОРИС ІЛЛІЧ
(18.02.1922 – 26.08.2011)

18 лютого 2012 р. виповнилося б 90 років від дня народження Бориса Ілліча Мосеєнкова – відомого українського математика і педагога, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, доцента кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Борис Ілліч народився в селі Смолка, що на Житомирщині, у сім'ї селянина-бідняка. Закінчивши 7 класів сільської школи у 1936 р., він продовжив навчання у Залізничному технікумі матеріально-технічного забезпечення. Згодом працював на залізничному транспорті.

У січні 1942 р. Бориса Ілліча призвали до лав Радянської Армії і вже з 15 березня він бійцем у складі 42-ї Ударної бригади брав участь у бойових діях на Північно-Західному Фронті. 11 квітня 1942 р. в боях під м. Стара Руса Борис Ілліч був тяжко поранений. Після лікування продовжував службу на Північно-Західному, Прибалтійському та Ленінградському фронтах.

З 1 вересня 1946 р. Борис Ілліч – студент механіко-математичного факультету Київського державного університету ім. Т.Г.Шевченка, де набирається нових знань, із захопленням слухаючи змістовні лекції блискучих вчених: академіка Ішлінського О.Ю., члена-кореспондента Коваленка А.Д., професорів Букреева Б.Я., Крейна С.Г., Кільчевського М.О., Латишевої К.Я., Митропольського Ю.О., Положія Г.М. та інш.

Після закінчення з відзнакою університету у 1951 р. Мосеєнков Б.І. вступає до аспірантури, його науковим керівником стає професор Ю.О.Митропольський. По завершенні аспірантури у 1954 р. Бориса Ілліча зараховують асистентом кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь, а згодом, у 1960 р., – доцентом цієї кафедри. Завершивши у 1992 році викладацьку роботу, Борис Ілліч ще сім років працював на посаді старшого наукового співробітника науково-дослідної частини механіко-математичного факультету.

Борис Ілліч пропрацював на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь майже п'ятьдесят років. Він мав справжній талант педагога, міг чітко і ясно донести до студентів нові математичні поняття і ідеї. Борис Ілліч намагався викладати так, щоб у кожній його лекції – чи це нормативний курс з "Вищої математики" на хімічному факультеті чи спеціальний курс з "Асимптотичних методів" на механіко-математичному факультеті, відчувалися логічна послідовність викладу матеріалу, математична чіткість і одночасно глибока повага до слухачів. Його завжди оточували студенти старших курсів і аспіранти, які мріяли про подальшу наукову роботу.

Мосеєнков Б.І. отримав фундаментальні наукові результати з теорії асимптотичних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Після успішного захисту у березні 1955 р. кандидатської дисертації на тему "Про деякі резонансні явища в системах з розподіленими параметрами", він продовжував наполегливі наукові дослідження, підсумком яких стали результати про нестационарні коливні режими в системах з розподіленими параметрами та про цікаві і важливі для практики процеси і явища, що виникають при проходженні через резонанс. Розроблена ним методика побудови асимптотичних розв'язків дозволила розв'язки низку нових задач, що мали важливе значення для практики, зокрема, про поперечні коливання стержня двоякої жорсткості в різних режимах обертання та за наявності зовнішніх збурень різного типу.

Свої наукові результати Борис Ілліч підсумував у чотирьох монографіях, одна з яких видана у США, та понад 60-ти наукових і науково-методичних працях. Вагомим є внесок Мосеєнкова Б.І. також у створення оригінального учбового посібника "Курс обыкновенных дифференциальных уравнений" (1974 р., колектив авторів).

Борис Ілліч брав участь у міжнародному співробітництві з освітніх та наукових програм – він читав лекції в університетах Болгарії, Угорщини, Німеччини та Чехословаччини.

Понад 15 років Мосеєнков Б.І. присвятив адміністративній роботі на механіко-математичному факультеті, виконуючи обов'язки декана факультету (з червня 1969 рок по березень 1970 року) та впродовж багатьох років – заступника декана. З березня по вересень 1960 року та з грудня 1970 по жовтень 1974 року він виконував обов'язки завідувача кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь. На цих посадах проявилися такі риси його характеру як доброта, чуйність та повага до людей. Жодна людина, будь-то викладач факультету, студент чи інша людина, які зверталися до нього за порадою або допомогою, не залишались без його уваги.

Мосеєнков Б.І. користувався великим авторитетом як викладач, і як науковець – він був членом вченої ради університету, членом спеціалізованих рад із захисту дисертацій у Київському університеті та Інституті математики АН УРСР, членом навчально-методичних рад і комісії Мінвузу України, членом редколегій таких престижних наукових журналів, як "Известия вузов СССР. Математика", "Вісник Київського університету" та ін.

Мосеєнков Б.І. нагороджений орденами "Отечественной войны I степени", "За мужество III степени", медалями "За боевые заслуги", "За Победу над Германией", "Ветеран труда", "Захиснику Вітчизни", "За доблесну працю" та понад 20-тю ювілейними медалями, Грамотою Верховної Ради УРСР.



МЕЛЕШКО В'ЯЧЕСЛАВ ВОЛОДИМИРОВИЧ
(07.10.1951 – 14.11.2011)



В'ячеслав Володимирович Мелешко народився у м. Дніпропетровськ. Все своє життя він наслідував своїх батьків – викладачів вузів, та діда – Кононенка П.П. – славетного будівельника, лауреата Ленінської премії. З дитинства В'ячеслав був цілеспрямованою особистістю, він завжди вчився лише на відмінно. У 1973 р. закінчив з відзнакою механіко-математичний факультет Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, у 1976 р. захистив кандидатську дисертацію на тему: "Установившиися колебания пьезокерамических тел конечных размеров" (науковий керівник – А.Ф. Улітко), у 1984 р. – докторську дисертацію на тему: "Закономерности установившихся волновых процессов в конечных упругих телах и волноводах" (науковий консультант – В.Т. Грінченко). З 1976 р. по 1986 р. працював у Інституті механіки НАН України, з 1986 р. по 2002 р. – у Інституті гідромеханіки НАН України, з 1990 р. – завідувачем новоствореного відділу вихрових рухів. У 2002 році В.В.Мелешко очолив кафедру теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Професор В.В. Мелешко був талановитим вченим. Його наукові інтереси стосувалися широкого кола наукових проблем механіки, зокрема, гідромеханіки, акустики твердого тіла, вихрової динаміки, теорії зміщування, хаотичної адвекції, теорії пружності, де він отримав низку фундаментальних наукових результатів пріоритетного характеру. В'ячеслав Володимирович був новатором у науці, започаткувавши такі нові напрями фундаментальних досліджень у нашій країні, як хаотична адвекція – так звана "лагранжева" турбулентність, та хаотичне зміщування рідин; теорія мікрорідини та її застосування у мікропроцесорній техніці. Характерною особливістю наукових праць В.В. Мелешка є глибоке знання історії питання, яке він досліджував. Він віднайшов праці вчених, які вважалися втраченими, часто вражав своїх колег своєю глибокою обізнаністю з історією проблеми. У своїх наукових працях він гармонійно поєднував розвиток наукових ідей видатних вчених минулого і можливості сучасних інформаційних технологій, демонстрував постійний інтерес як до класичних дослідів "з сургучем і мотузкою", так і до великомасштабних натурних експериментів. Професор В.В. Мелешко є автором понад 170 наукових праць, серед яких дві монографії: "Гармонические колебания и волны в упругих телах" (1981, спільно з В.Т. Грінченко), "Динамика вихревых структур" (1993, спільно з М.Ю. Константиновим). Серед його учнів 10 кандидатів і 1 доктор наук.

Професор В.В. Мелешко був добре відомим у наукових центрах світу, мав високий науковий авторитет: він був членом Національного комітету України з теоретичної і прикладної механіки (з 2000 р.), Програмного комітету Європейських конференцій з механіки рідини (з 2001 р.), Американського Фізичного Товариства (з 2009 р.), редакційних колегій наукових видань "Applied Mechanics Reviews", "Journal of Engineering Mathematics", "Thermomechanics", "Прикладна гідромеханіка", "Акустичний вісник", "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка", "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки". В'ячеслав Володимирович виступав з науковими доповідями на багатьох наукових конференціях, серед яких 19-й (Киото, Японія), 20-й (Чикаго, США), 21-й (Варшава, Польща) та 22-й (Аделаїда, Австралія) Міжнародні конгреси з теоретичної та прикладної механіки (ІСТАМ), конференції Європейського товариства з механіки (Euromech) (Кембридж, Великобританія, 1991; Варшава, Польща, 1994; Геттінген, Німеччина, 1997; Стамбул, Турція, 1998; Кортона, Італія, 1999; Ейндховен, Нідерланди, 2000), конференції Міжнародного союзу з теоретичної та прикладної механіки (ІУТАМ) (Москва, Росія, 2006; Копенгаген, Данія, 2008).

Наукову і науково-організаційну роботу В'ячеслав Володимирович успішно поєднував з викладацькою діяльністю: він натхненно і яскраво читав курси лекцій: "Теоретична механіка", "Детерміновані та хаотичні коливання", "Колівання та хвилі в пружних системах", "Бігармонічні проблеми механіки", "Історія механіки" (Київський національний університет імені Тараса Шевченка), "Hydrodynamics of Stirring and Mixing" (Технологічний університет м. Ейндховен, Університеті м. Твене, Нідерланди), "Advanced Dynamics" (Іллойський університет, США), "Introduction to Vortex Dynamics" (Інститут фізики атмосфери, Німеччина). Він також співробітничав з вченими Вашингтонського університету (США), Політехнічного університету м. Турін (Італія), Університету м. Піза (Італія), Університету м. Модена (Італія), Ростовського державного університету (Росія), Науково-дослідного університету ім. Дж. Неру (Індія), Національного Тайваньського університету (Китай).

Вічні людські цінності були для В'ячеслава Володимировича основою поведінки у сім'ї, на роботі, у житті. Він був відкритою людиною, вірним другом, дарував людям книги, свої яскраві ідеї, людське тепло, ніжну турботу, друзів робив щасливими, був люблячим чоловіком і батьком. В.В. Мелешко мав глибокі знання з багатьох розділів механіки і математики, спілкування з ним завжди збагачувало людей новими знаннями. Колеги і друзі називали його "ходячою енциклопедією". В'ячеслав Володимирович мав велике зібрання наукових книг вчених минулого і сьогодення, якими щедро ділився з колегами і учнями. Він багато і наполегливо працював, намагаючись виконати роботу у найкращий спосіб, завжди прагнув до досконалості, як справжній вчений і учитель. Працювати з ним завжди було надзвичайно цікаво і приємно – нічого не робив лише для себе, все для інших. Він був гідним представником школи з механіки, створеної членом-кореспондентом НАН України А.Ф. Улітком і академіком НАН України В.Т. Грінченком.

Вихрова секція Міжнародного конгресу з теоретичної і прикладної механіки (ІСТАМ-2012, Китай) буде присвячена пам'яті двох видатних вчених і близьких друзів – американському професору Хасану Арефу і українському професору В'ячеславу Володимировичу Мелешку.

П'ЯТЕЦЬКИЙ ВАСИЛЬ ОЛЕКСАНДРОВИЧ
(20.09.1941 – 19.02.2012)

Василь Олександрович П'ятецький народився у с. Стукалівка Гребінківського р-ну Полтавської обл. Майже 50 років його життя було пов'язано з механіко-математичним факультетом. Закінчивши у 1966 р. з відзнакою механіко-математичний факультет і аспірантуру кафедри теоретичної механіки, він розпочав у 1969 р. викладацьку діяльність в якості асистента кафедри теоретичної механіки. Під керівництвом академіка АН УРСР Кільчевського М.О. виконав наукові дослідження і у 1973 р. успішно захистив кандидатську дисертацію на тему "Колебания и устойчивость недетерминированных неавтономных систем". З 1985р. і до останніх днів свого життя працював доцентом кафедри теоретичної та прикладної механіки.

Свою основною справою Василь Олександрович вважав виховання і підготовку фахівців з механіки. І все своє життя він присвятив вихованню фахівців-механіків у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Більше трьох десятиліть В.О.П'ятецький читав основні нормативні курси кафедри теоретичної та прикладної механіки, серед яких "Теоретична механіка", "Варіаційне числення та теорія оптимального керування механічних систем", та низку спеціальних курсів з теорії стійкості, прикладної теорії гіроскопів, теорії стійкості періодичних систем. Глибокі знання і обдарованість В.О. П'ятецького дозволяли йому викладати практично будь-який курс, закріплений за кафедрою. Це виділяло Василя Олександровича серед колег і викликало велику повагу до нього і щире вдячність студентів.

Маючи рідкісне обдарування просто, дохідливо і красиво викладати математичні основи механіки, знаходити легко зрозумілі наочні приклади із застосування математики до розв'язання інженерних проблем, В.О.П'ятецький був чудовим пропагандистом механіки і прикладної математики.

Василь Олександрович значну увагу приділяв методичній роботі. Протягом багатьох років він брав активну участь у роботі навчально-методичної комісії механіко-математичного факультету, неодноразово працював членом і заступником голови предметної комісії з математики приймальних комісій університету, керував педагогічною практикою студентів-механіків. Він опублікував низку науково-методичних посібників і методичних розробок для студентів механіко-математичного факультету, був одним з авторів першого учбового плану підготовки бакалаврів-механіків за болонською системою, створенню і подальшому вдосконаленню якого він віддав багато сил і енергії.

Викладацьку і навчально-методичну роботу Василь Олександрович поєднував з плідною науковою роботою. Його наукові інтереси стосувалися проблем аналітичної механіки систем з випадковими збуреннями, теорії гіроскопічних приладів, параметричних коливань в'язкопружних тіл. Він опублікував понад 70 статей, був співавтором 3 авторських свідоцтв. В.О.П'ятецький брав участь у виконанні держбюджетних дослідницьких тем і декількох госпдоговірних тем науково-дослідних робіт на замовлення КБ "Електрон", КБ заводу "Арсенал" та інших підприємств.

Василь Олександрович брав активну участь в громадському житті механіко-математичного факультету: протягом багатьох років був членом редколегії журналу Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, членом вченої ради механіко-математичного факультету, понад 30 років сумлінно виконував обов'язки вченого секретаря кафедри теоретичної та прикладної механіки.

Василь Олександрович був скромною людиною, його поважали співробітники механіко-математичного факультету, він заслужено користувався високим авторитетом як колег, так і студентів факультету. Протягом багатьох років (1979 – 1986) він очолював профспілкову організацію механіко-математичного факультету.

Талановитий і досвідчений педагог, ветеран університету, відкрита і щира, скромна людина, вірний товариш – П'ятецький Василь Олександрович пішов з життя 19 лютого 2012 року.

Колектив механіко – математичного факультету



ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі – "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферується в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкovanого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

- текст має бути поданий у вигляді файлу формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;
- поля – "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
- комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
 - шрифт статті – Arial, розмір 9;
 - інтервал між рядками – одинарний;
 - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
 - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
 - індекс УДК (для природничих факультетів), (Arial, 8 pt, Bold);
 - перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
 - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
 - анотація (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
 - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
 - список літератури (Arial, 7 pt, звичайний);
 - дата надходження до редколегії, наприклад, " **Надійшла до редколегії 09.11.05** ". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняти по правому краю).

Додаткові вимоги до тексту статті:

- кожен аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;
- джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
- *усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;*
 - не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
 - на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;
 - усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
 - усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
 - формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:			Define Size:	
Text	Times New Roman		Full	9 pt
Function	Times New Roman		Subscript/Superscript	7 pt
Variable	Times New Roman	italic	Sub-Subscript/Superscript	6 pt
L.C.Greek	Symbol		Symbol	14 pt
UC.Greek	Symbol		Sub-Symbol	9 pt
Vector-matrix	Times New Roman	bold		
Number	Times New Roman			

Літери латинської абетки, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери грецької – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Re (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською. Згідно із наказом Держспоживстандарту України від 10.11.06 № 3232 **при складанні списку літератури необхідно застосовувати національний стандарт, ідентичний ГОСТ 7.1.–2003** "Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання". Не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок.

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вчитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Назва**, **Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштова адреса та контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск 27

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



Формат 60x84^{1/8}. Ум. друк. арк. 7,5. Наклад 300. Зам. № 212-6194.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № М 1.
Підписано до друку 17.09.12

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 3222; (38044) 239 3172; тел./факс (38044) 239 3128
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
[http: vpc.univ.kiev.ua](http://vpc.univ.kiev.ua)

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02