ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1684-1565

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

24/2010

Засновано 1958 року

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). A table of contexts and the summaries of the articles ale located on the Web-site http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv.

For scientist, professors, students.

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 417.615

Д. Алєксєєнко, асп.

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Побудовано асимптотичні формули для періодичного розв'язку системи лінійних сингулярно збурених диференціальних рівнянь у некритичному випадку як за наявності простих коренів характеристичного рівняння, так і у випадку наявності кратного кореня, якому відповідають прості елементарні дільники.

The asymptotic formulas for periodical solution of linear singular perturbed differential equations system has been constructed in non-critical case. Both with the presence of simple eigenvalues and one multiple eigenvalue the latter being corresponded to the simple elementary divisors.

1. Вступ

Питанням побудови періодичних розв'язків систем диференціальних рівнянь було присвячено роботи багатьох вчених. Зокрема, вагомий внесок було зроблено Чезарі Л., Хейлом Дж., Гамбіллом Е. Серед вітчизняних математиків слід відзначити роботи Самойленка А.М., Штокала Й.З., Яковця В.П., Шкіля М.І., Акименка А.М. В роботі [1] використовуються методи послідовних наближень для побудови формул періодичних розв'язків. Цей підхід використано в даній роботі.

2. Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x = x(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, $A(t,\varepsilon)$ – $(n\times n)$-матриця, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

Нехай виконуються умови:

1) матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ мають розвинення $A(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(t)$, $f(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s f_s(t)$, де функції $A_s(t)$, $f_s(t)$ $(s=0,1,...)$ – диференційовні до $m+1$ $(m\ge 1)$ порядку включно на відрізку $[0;T]$ і є періодичними з періодом $T>0$;
2) відповідна однорідна система є некритичною відносно періоду T.

3. Асимптотичне зображення нормальної фундаментальної системи розв'язків системи (3) у випадку простих коренів характеристичного рівняння

Припускатимемо, що також виконується умова

3) корені характеристичного рівняння

$$\det\left\|A_0(t)-\lambda E\right\| = 0 \tag{2}$$

$\lambda_i(t),\ i=\overline{1,n}$, є простими і мають недодатні дійсні частини на відрізку $[0;T]$.

Тоді, здійснивши у системі

$$\varepsilon\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = A(t,\varepsilon)x \tag{3}$$

підстановку

$$x = U_m(t,\varepsilon)y,\ U_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t), \tag{4}$$

прийдемо до системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon U_m(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = \left(A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)-\varepsilon U_m'(t,\varepsilon)\right)y, \tag{5}$$

де $U_m'(t,\varepsilon)$ – похідна матриці $U_m(t,\varepsilon)$.

Матрицю $U_m(t,\varepsilon)$, згідно [2], визначатимемо з тотожності $A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)-\varepsilon U_m'(t,\varepsilon)\equiv U_m(t,\varepsilon)\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)$, де $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_s(t)$, $\Lambda_s(t)$, $\left(s=\overline{0,m}\right)$ – діагональні матриці, $C_m(t,\varepsilon)$ –неперервна $(n\times n)$-матриця.

Тоді система диференціальних рівнянь (5) набуде вигляду

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)y,\ y_0 = U_m^{-1}(0,\varepsilon)x_0, \tag{6}$$

де $U_m^{-1}(0,\varepsilon)-(n\times n)$ – матриця, обернена до матриці $U_m(0,\varepsilon)$.

Застосувавши до задачі (6) метод послідовних наближень [2], отримуємо для її розв'язку асимптотичну (за параметром ε) формулу $y(t,\varepsilon)=\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)+O\left(\varepsilon^m\right)\right)y_0$, $t\in[0;T]$.

Тоді розв'язок системи (3), згідно (4), можна записати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)+O\left(\varepsilon^m\right)\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)x_0 .$$

Отже, матриця $X(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)+O\left(\varepsilon^m\right)\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$ є нормальною фундаментальною матрицею однорідної системи (3) ($X(0,\varepsilon)=E$).

4. Побудова періодичного розв'язку системи (1)

За формулою Коші [3] матрицю $X(t,\varepsilon)X^{-1}(\tau,\varepsilon)$ можна записати у вигляді:

$$X(t,\varepsilon)X^{-1}(\tau,\varepsilon)=X(t,\tau,\varepsilon),\ 0\le\tau\le t\le T .$$

Зробимо в системі (1) заміну

$$x=\tilde{X}(t,\varepsilon)y \text{ , де } \tilde{X}(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon) .$$

Отримаємо

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)}{\mathrm{dt}}y+\varepsilon\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}=A(t,\varepsilon)\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)y+\varepsilon f(t,\varepsilon) .$$

За побудовою $A(t,\varepsilon)\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)-\varepsilon\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)}{\mathrm{dt}}=\varepsilon^{m+1}U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)U_m^{-1}(t,\varepsilon)\tilde{\mathrm{X}}(\mathrm{t},\varepsilon)$, де $C_m(t,\varepsilon)$ – неперервна матриця.

Тоді після нескладних перетворень, прийдемо до інтегрального рівняння

$$x=\tilde{X}(t,\varepsilon)x_0+\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+\varepsilon^m\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)U_m(\tau,\varepsilon)C_m(\tau,\varepsilon)U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)d\tau .$$

Запишемо послідовні наближення

$$x_0(t,\varepsilon)=\tilde{X}(t,\varepsilon)x_0+\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau,\ x_k(t,\varepsilon)=\tilde{X}(t,\varepsilon)x_0+\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+$$
$$+\varepsilon^m\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)U_m^{-1}(t,\varepsilon)x_{k-1}(\tau,\varepsilon)d\tau,\quad k=1,2,\ldots .$$

Тоді, ряд $x_0(t,\varepsilon)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k(t,\varepsilon)-x_{k-1}(t,\varepsilon)\right)$ рівномірно збігається при $t\in[0;T]$ і досить малих ε.

Справді, використовуючи метод математичної індукції, отримуємо

$$\left\|x_0(t,\varepsilon)\right\|\le a,\ \left\|x_k(t,\varepsilon)-x_{k-1}(t,\varepsilon)\right\|\le\varepsilon^{mk}\frac{a(bt)^k}{k!}\le\varepsilon^{mk}\frac{a(bT)^k}{k!}, \text{ де } \left\|\tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)U_m^{-1}(t,\varepsilon)\right\|\le b .$$

Таким чином, отримане інтегральне рівняння має єдиний неперервний розв'язок, який можна записати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=\tilde{X}(t,\varepsilon)x_0+\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+O\left(\varepsilon^m\right).$$

Враховуючи умову періодичності, маємо $x_0=\left(E-\tilde{X}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\int_0^T \tilde{X}(T,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+O\left(\varepsilon^m\right)$.

Тому, приходимо до асимптотичної (за параметром ε) формули

$$x(t,\varepsilon)=\tilde{X}(t,\varepsilon)\left(E-\tilde{X}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\int_0^T \tilde{X}(T,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+\int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau+O\left(\varepsilon^m\right) \quad (7)$$

де $\tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$, $0\le\tau\le t\le T$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Отриманий результат можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо для системи диференціальних рівнянь (1) виконуються умови 1) – 3), то система (1) має єдиний T – періодичний розв'язок, для якого на відрізку $t\in[0;T]$ вірною є асимптотична за параметром ε ($0<\varepsilon\le\varepsilon_0$) формула (7).

5. Побудова асимптотичних формул періодичного розв'язку системи (1) у випадку кратного кореня характеристичного рівняння, якому відповідають прості елементарні дільники

Нехай виконуються умови 1), 2) пункту 1, а також умова

4) характеристичне рівняння (2) має p простих коренів $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,p}$ і один $n-p$-кратний корінь $\lambda_{p+1}(t)$, якому відповідають $n-p$ простих елементарних дільників, і $\mathrm{Re}\lambda_i(t)\le 0$, $i=\overline{1,p+1}$.

З умови 4) випливає, що існує така неособлива матриця $T(t)$, що

$$T^{-1}(t)A_0(t)T(t)=J(t) \tag{8}$$

де $J(t)=diag\{J_1(t),J_2(t)\}$, $J_1(t)=diag\{\lambda_1(t),...,\lambda_p(t)\}$, $J_2(t)=\lambda_{p+1}(t)E_{n-p}$. [2]

Зробивши у матричній формі системи (3) підстановку

$$X=U_m(t,\varepsilon)Y \tag{9}$$

де $U_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t)$, прийдемо до системи

$$\varepsilon\frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}}=\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right)Y . \tag{10}$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_s(t)$, $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\Lambda_{1m}(t,\varepsilon) & 0\\ 0 & \Lambda_{2m}(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$, $\Lambda_{1m}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_{s1}(t)$ – діагональна матриця розмірів ($p\times p$), $\Lambda_{2m}(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_{s2}(t)$, а $C_m(t,\varepsilon)$ – неперервна ($n\times n$)-матриця. Невідомі матриці визначатимемо із матричної системи рівнянь [2]

$$U_0(t)\Lambda_0(t)=A_0(t)U_0(t),\ U_k(t)\Lambda_0(t)-A_0(t)U_k(t)+U_0(t)\Lambda_k(t)=H_k(t),$$
$$H_k(t)=\sum_{s=1}^{k}A_s(t)U_{k-s}(t)-\sum_{s=1}^{k-1}U_s(t)\Lambda_{k-s}(t)-U'_{k-1}(t),\ k=\overline{1,m}; \tag{11}$$

$$U_m(t,\varepsilon)C_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{i=0}^{m}A_{m+1+s-i}(t)U_i(t)-\sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^s\sum_{i=1+s}^{m}U_i(t)\Lambda_{m+1+s-i}(t)-U'_m(t). \tag{12}$$

З першого рівняння маємо $U_0(t)=T(t)$, $\Lambda_0(t)=J(t)$.

Підставивши ці значення у рівності для $k=1$, позначивши $Q_1(t)=T^{-1}(t)U_1(t)$, $H_1(t)=T^{-1}(t)\left(A_1(t)T(t)-T'(t)\right)$ і врахувавши (8), отримаємо: $Q_1(t)J(t)-J(t)Q_1(t)+\Lambda_1(t)=H_1(t)$.

Розіб'ємо кожну з матриць Q_1, H_1 на блоки згідно структури матриці $J(t)$

$$Q_1=\begin{pmatrix}Q_{111} & Q_{112}\\ Q_{121} & Q_{122}\end{pmatrix},\quad H_1=\begin{pmatrix}H_{111} & H_{112}\\ H_{121} & H_{122}\end{pmatrix}.$$

Тоді, використовуючи правила множення блочних матриць, отримаємо

$$Q_{1ij}(t)J_j(t)-J_i(t)Q_{1ij}(t)=H_{1ij}(t)-\delta_{ij}\Lambda_{1j},\ i,j=1,2 , \tag{13}$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Поклавши у (13) $i=j=1$, прийдемо до рівняння $Q_{111}(t)J_1(t)-J_1(t)Q_{111}(t)=H_{111}(t)-\Lambda_{11}(t)$.

Нехай $Q_{111}(t)=\overline{Q}_{111}(t)+\tilde{Q}_{111}(t), H_{111}(t)=\overline{H}_{111}(t)+\tilde{H}_{111}(t)$, де тільдою відмічені матриці з нульовими діагональними елементами. Тоді $\overline{Q}_{111}(t)J_1(t)-J_1(t)\overline{Q}_{111}(t)=\overline{H}_{111}(t)-\Lambda_{11}(t)$, $\tilde{Q}_{111}(t)J_1(t)-J_1(t)\tilde{Q}_{111}(t)=\tilde{H}_{111}(t)$.

Поклавши $\overline{Q}_{111}(t)\equiv 0$, отримаємо $\Lambda_{11}=\overline{H}_{111}(t)$.

Враховуючи структуру матриці $J_1(t)$ визначаємо елементи матриць $\tilde{Q}_{111}(t)$: $\tilde{q}_{111ij}(t)=\dfrac{h_{111ij}(t)}{\lambda_i(t)-\lambda_j(t)},\ i\ne j;\ \ i,j=\overline{1,p}$.

Отже, блоки $Q_{111}(t)$ і $\Lambda_{11}(t)$ визначені.

Поклавши у (13) $i=j=2$ отримаємо рівняння $Q_{122}(t)J_2(t)-J_2(t)Q_{122}(t)=H_{122}(t)-\Lambda_{12}(t)$.

Нехай $Q_{122}(t)\equiv 0$. Тоді знаходимо $\Lambda_{12}(t)\equiv H_{122}(t)$. Отже матриця $\Lambda_1(t)$ визначена.

Нарешті, з (13) при $i\ne j$ $Q_{1ij}(t)J_j(t)-J_i(t)Q_{1ij}(t)=H_{1ij}(t)$, враховуючи, що матриці $J_1(t)$ і $J_2(t)$ не мають спільних власних значень, однозначно визначаємо прямокутні матриці $Q_{1ij}(t)$ при $i,j=1,2$, $i\ne j$, а саме

$$Q_{112}(t)=\left(\lambda_{p+1}(t)E_p-J_1(t)\right)^{-1}H_{112}(t),\ Q_{121}(t)=H_{121}(t)\left(J_1(t)-\lambda_{p+1}(t)E_p\right)^{-1}.$$

Таким чином визначено матрицю $Q_1(t)$, а тому і $U_1(t)=T(t)Q_1(t)$.

Оскільки в (11) кожна матриця $H_k(t)$ виражається через $A_j(t), U_i(t), \Lambda_i(t),\ j=\overline{1,k},\ i=\overline{0,k-1}$, то вище вказаним способом можна визначити усі матриці $U_k(t), \Lambda_k(t),\ k=\overline{2,m}$, причому матриця $U_m(t,\varepsilon)$ на відрізку $[0;T]$ і для досить малих $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ є невиродженою.

Тоді з рівняння (12) знаходимо $C_m(t,\varepsilon) = U_m^{-1}(t,\varepsilon)\left(\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{i=0}^{m}A_{m+1+s-i}(t)U_i(t) - \sum_{s=0}^{m-1}\varepsilon^s\sum_{i=1+s}^{m}U_i(t)\Lambda_{m+1+s-i}(t) - U_m'(t)\right)$.

Усі визначені матриці $U_i(t)$, $\Lambda_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, $C_m(t,\varepsilon)$ є T-періодичні.

Введемо позначення $S(t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{m}\varepsilon^{s-1}\Lambda_{s2}(t)$, $R(t,\varepsilon) = diag\left\{\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \Lambda_{1m}(t,\varepsilon)dt\right), \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda_{p+1}(t)dt\right)\Phi(t,\varepsilon)\right\}$, де $\Phi(t,\varepsilon)$ – матрицант системи [3]

$$\frac{d\xi}{dt} = S(t,\varepsilon)\xi\ . \tag{14}$$

Оскільки система (14) регулярна, то згідно [4] матрицант цієї системи можна подати у вигляді рівномірно збіжного ряду $\Phi(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Phi_k(t)$, $\Phi_0(0)=E$, $\Phi_i(0)\equiv 0,\ i=1,2,\ldots$, при $t\in[0;T]$, $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$. Причому $\Phi_0(t)$ – матрицант системи $\frac{d\eta}{dt} = \Lambda_{12}(t)\eta$.

Нехай власні значення матриці $\Phi(T,\varepsilon)$ $\rho_1(\varepsilon),\ldots,\ \rho_{n-p}(\varepsilon)$ такі, що виконуються нерівності

$$|\rho_k(\varepsilon)| < 1,\quad k=\overline{1,n-p}\ . \tag{15}$$

Тоді (10) заміною

$$Y(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon) \tag{16}$$

зводиться до системи

$$\frac{\mathrm{dZ}}{\mathrm{dt}} = \varepsilon^m R^{-1}(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)R(t,\varepsilon)Z\ . \tag{17}$$

Перейдемо від системи (17) до відповідної інтегральної системи $Z(t,\varepsilon) = Z(0,\varepsilon) + \varepsilon^m\int_0^t R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)R(\tau,\varepsilon)Z(\tau,\varepsilon)d\tau$, або, враховуючи (9),

$$\mathrm{Y}(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Y(0,\varepsilon) + \varepsilon^m\int_0^t R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)Y(\tau,\varepsilon)d\tau\ . \tag{18}$$

Побудуємо послідовні наближення

$$\mathrm{Y}_0(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Y(0,\varepsilon), \mathrm{Y}_k(t,\varepsilon) = R(t,\varepsilon)Y(0,\varepsilon) + \varepsilon^m\int_0^t R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)Y_{k-1}(\tau,\varepsilon)d\tau,\ \ k=1,2,\ldots\ .$$

Враховуючи умову 4), неперервність матриць $\Lambda_{i1}(t), i=\overline{1,m}$, $C_m(t,\varepsilon)$, $\Phi(t,\varepsilon)$, $t\in[0;T]$, маємо

$$\|\Phi(t,\varepsilon)\| \le K\ ,\ \ \|R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)\| \le M\ ,\ \ \|C_m(t,\varepsilon)\| \le C\ ,\ \ \|\mathrm{Y}_0(t,\varepsilon)\| \le a\ ,$$

$$\|\mathrm{Y}_1(t,\varepsilon) - \mathrm{Y}_0(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^m\int_0^t \|R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)C(\tau,\varepsilon)Y_0(\tau,\varepsilon)\|d\tau \le \varepsilon^m MCat\ ,$$

$$\|\mathrm{Y}_\mathrm{k}(t,\varepsilon) - \mathrm{Y}_\mathrm{k\text{-}1}(t,\varepsilon)\| \le \varepsilon^m\int_0^t \|R(t,\varepsilon)R^{-1}(\tau,\varepsilon)\|\|C(\tau,\varepsilon)\|\|Y_{k-1}(\tau,\varepsilon)\|d\tau \le \varepsilon^{km}a(MC)^k\frac{t^k}{k!}, k=1,2,\ldots\ .$$

Тобто послідовність матриць $\{Y_k(t,\varepsilon)\}$ збігається до матриці-розв'язку $Y^*(t,\varepsilon)$ рівняння (8) рівномірно на відрізку $[0;T]$, причому $Y^*(t,\varepsilon) = \left(R(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)\right)Y(0,\varepsilon)$, $Y^*(0,\varepsilon) = U_m^{-1}(0,\varepsilon)$.

Враховуючи (9), остаточно маємо $X(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)\left(R(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m)\right)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$.

Аналогічно тому, як було зроблено вище, можна показати, що для періодичного розв'язку системи (1) справедлива асимптотична (за параметром ε) формула

$$x(t,\varepsilon) = \tilde{X}(t,\varepsilon)\left(E - \tilde{X}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\int_0^T \tilde{X}(T,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau + \int_0^t \tilde{X}(t,\tau,\varepsilon)f(\tau,\varepsilon)d\tau + O(\varepsilon^m) \tag{19}$$

де $\tilde{X}(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)R(t,\varepsilon)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$, $\tilde{X}(t,\tau,\varepsilon) = \tilde{X}(t,\varepsilon)\tilde{X}^{-1}(\tau,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)R(t,\tau,\varepsilon)U_m^{-1}(0,\varepsilon)$.

Таким чином справедлива теорема 2.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1), 2), 4), (15), то система (1) має єдиний T -періодичний розв'язок, для якого на відрізку $[0;T]$ вірною є асимптотична за параметром ε ($0<\varepsilon\le\varepsilon_0$) формула (19).

6. Висновки

Таким чином здобуті результати дають змогу будувати асимптотичні наближення періодичних розв'язків у некритичному випадку як за наявності простих коренів характеристичного рівняння так і у випадку наявності кратного кореня, якому відповідають прості елементарні дільники.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 576с. 2. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин, И.З. Штокало, П.С. Бондаренко и др., за ред. И.З. Штокало. – К.: Вища школа, 472с. 3. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 232 с. 4. *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища школа, 228с. 5. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 720с.

Надійшла до редколегії 18.02.10

УДК 517.9

І. Романенко, канд. фіз.-мат. наук, доц.

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ОБЛАСТІ З КУТОВОЮ ТОЧКОЮ

Досліджено існування та єдиність розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі з неперервними коефіцієнтами у двовимірній нескінченній кутовій області. Уточнено апріорну оцінку розв'язку такої задачі та характер залежності сталої в апріорній оцінці від даних задачі.

The existence and uniqueness of solution of linear elliptic boundary value problem with continuous coefficients in 2-dimentional unbounded angular domain are investigated. An a priori estimate for such a problem solution is obtained and the character of a priori constant dependence of the problem data has been investigated.

1. Короткий огляд літератури та визначення основного напрямку досліджень

Крайові задачі з кутовими точками протягом тривалого часу є об'єктом дослідження ряду фахівців. Фундаментальною у цьому напрямку є, безумовно, робота [3], в якій отримано фундаментальні результати, важливі для дослідження задач з конічними та кутовими точками. Важливі результати отримано і в роботах інших дослідників, наприклад, [1,4,5].

Для подальшого застосування отриманих в працях інших дослідників результатів до випадку нелінійних задач потрібно знати залежність сталих в апріорних оцінках розв'язків задач від даних задачі. На жаль, в попередніх роботах характер такої залежності не було досліджено. Крім того, у більшості робіт розв'язність досліджуваних задач формулюють у термінах особливих точок похідної еліптичної задачі з комплексним параметром. Це суттєво звужує діапазон застосування таких результатів. Таку ваду має, наприклад, робота [2].

Саме тому основним напрямком дослідження у даній роботі стало уточнення характеру залежності сталих в апріорних оцінках розв'язку від даних еліптичної крайової задачі в області з кутовою точкою, а також отримання теорем про розв'язність у термінах лише даних вихідної задачі для випадку задач зі змінними коефіцієнтами.

2. Постановка задачі

Нехай $\alpha,\gamma\in[0,2\pi)$, $\gamma\ne 0,\pi$. Позначимо $K_{\alpha,\gamma}=\{(x,y)\in R^2:\alpha<\arg(x,y)<\alpha+\gamma\}$. Будемо розглядати простір Соболєва з вагою $V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma})$, що складається з функцій, які мають узагальнені похідні до порядку m , та скінченну норму

$$\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(m)}=\left(\sum_{|\beta|\le m}\int_{K_{\alpha,\gamma}} r^{\delta-2(m-|\beta|)}\,|D^\beta u|^2\,dxdy\right)^{1/2}.$$

Позначимо за допомогою $V_{2,\delta}^{m-\frac{1}{2}}(\partial K_{\alpha,\gamma})$ простір граничних значень на $\partial K_{\alpha,\gamma}$ функцій з $V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma})$ з нормою $\|v\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{\left(m-\frac{1}{2}\right)}=\inf\left\{\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(m)}:u\in V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma}),u\big|_{\partial K_{\alpha,\gamma}}=v\right\}$. Простори $V_{2,\delta}^{(m)}(K_{\alpha,\gamma})$, $V_{2,\delta}^{m-\frac{1}{2}}(\partial K_{\alpha,\gamma})$ введено, зокрема, у роботі [3].

Розглянемо крайову задачу

$$Lu=a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}=f(x,y)\,,\ (x,y)\in K_{\alpha,\gamma} \tag{1}$$

$$Bu=\begin{cases}u\big|_{\arg(x,y)=\alpha}=g_\alpha(x,y)\\ u\big|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma}=g_{\alpha+\gamma}(x,y).\end{cases} \tag{2}$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо розглядати у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\alpha,\gamma})$, де k – невід'ємне ціле. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови диференційованості та еліптичності:

$$a,b,c \in C^{(k)}(\overline{K}_{\alpha,\gamma}) \tag{3}$$

$$a(x,y)>0,\ 4a(x,y)c(x,y)-b^2(x,y)>0,\ (x,y)\in \overline{K}_{\alpha,\gamma}, \tag{4}$$

а для функцій правих частин справедливі включення:

$$f \in V_{2,\delta}^{(k)}(K_{\alpha,\gamma}),\ g \in V_{2,\delta}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}(\partial K_{\alpha,\gamma}), \tag{5}$$

де $g(x,y)=\begin{cases} g_\alpha(x,y), & \arg(x,y)=\alpha, \\ g_{\alpha+\gamma}(x,y), & \arg(x,y)=\alpha+\gamma. \end{cases}$

3. Теорема існування розв'язку

Нехай $a_0=a(0,0)$, $b_0=b(0,0)$, $c_0=c(0,0)$. Розглянемо допоміжну задачу:

$$\tilde{L}u = a_0u_{xx}+b_0u_{xy}+c_0u_{yy}=f(x,y),\ (x,y)\in K_{\alpha,\gamma} \tag{6}$$

$$Bu=\begin{cases} u\big|_{\arg(x,y)=\alpha} = g_\alpha(x,y) \\ u\big|_{\arg(x,y)=\alpha+\gamma} = g_{\alpha+\gamma}(x,y). \end{cases} \tag{7}$$

Позначимо

$$\psi=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{c_0-a_0}{b_0},\ b_0\neq 0, \\ 0,\ b_0=0, \end{cases} \tag{8}$$

$$d=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a_0+c_0+\operatorname{sign}b_0\sqrt{b_0^2+(a_0-c_0)^2}}{a_0+c_0-\operatorname{sign}b_0\sqrt{b_0^2+(a_0-c_0)^2}}},\ b_0\neq 0, \\ \sqrt{\dfrac{c_0}{a_0}},\ b_0=0, \end{cases}, \tag{9}$$

$$\tilde{\gamma}=\operatorname{arcctg}\left(\frac{d^2\operatorname{ctg}(\alpha+\psi+\gamma)\operatorname{ctg}(\alpha+\psi)+1}{d(\operatorname{ctg}(\alpha+\psi)-\operatorname{ctg}(\alpha+\psi+\gamma))}\right)+\pi\left[\frac{\gamma}{\pi}\right]. \tag{10}$$

Нехай числа k, δ, $\tilde{\gamma}$ задовольняють умову

$$\mu = k-\frac{\delta}{2}+1\neq \frac{l\pi}{\tilde{\gamma}},\ l\in Z. \tag{11}$$

За виконання умов (3) – (5), (11) задача (6), (7) буде мати єдиний розв'язок u_0 у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\alpha,\gamma})$, причому функція u_0 задовольнятиме нерівність

$$\|u_0\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(2+k)} \le \frac{C_{(0)}}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\|f\|_{2,\delta,K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{(k)}+\|g\|_{2,\delta,\partial K(\alpha,\alpha+\gamma)}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right), \tag{12}$$

де стала $C_{(0)}$ залежить від a_0, b_0, c_0, k, δ, γ, але не залежить від функцій правих частин. Доведення цього факту буде наведено у ході доведення теореми:

Теорема (про розв'язність задачі (1), (2))

Нехай коефіцієнти a, b, c задачі (1), (2) задовольняють умови (3), (4), (8) – (11), а праві частини – включення (5).

Припустимо, що з деякою сталою M на множині $K_{\alpha,\gamma}$ справедливі нерівності

$$r^{|\beta|}\,|D^\beta(a(x,y)-a_0)|\le M,\ |\beta|\le k, \tag{13}$$

$$r^{|\beta|}\,|D^\beta(b(x,y)-b_0)|\le M,\ |\beta|\le k, \tag{14}$$

$$r^{|\beta|}\,|D^\beta(c(x,y)-c_0)|\le M,\ |\beta|\le k. \tag{15}$$

а для чисел a_0, c_0, M, k, $C_{(0)}$, μ, $\tilde{\gamma}$ справедлива нерівність

$$3M\,C_{(0)}(k+2)<|\sin\mu\tilde{\gamma}|. \tag{16}$$

Тоді задача (1), (2) у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\alpha,\gamma})$ має єдиний розв'язок, для якого справедлива апріорна оцінка:

$$\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(2+k)} \le C\left(\|f\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)} + \|g\|_{2,\delta,\partial K_{\alpha,\gamma}}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right), \tag{17}$$

де стала C залежить лише від a_0, b_0, c_0, k, δ, γ, M.

***Доведення**:* Аналогічно до доведення у роботі [3], можемо ввести оператори

$$Au = (\tilde{L}u, Bu),\ A_1 u = ((L-\tilde{L})u, 0).$$

Тоді задача (1), (2) в операторному записі набуває вигляду

$$Au = (f,g) - A_1 u,\ u \in V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\alpha,\gamma}) \tag{18}$$

Нескладно отримати, що за умов існування операторів $(E + A^{-1}A_1)^{-1}$ та A^{-1} розв'язок рівняння (18) можна знайти за формулою

$$u = (E + A^{-1}A_1)^{-1} A^{-1}(f,g). \tag{19}$$

Доведемо, що за виконання умов теореми такі оператори будуть існувати.

Оператор A відповідає задачі зі сталими коефіцієнтами (6), (7). Зробимо у задачі (6), (7) заміну

$$\xi = x\cos\psi - y\sin\psi,\ \eta = x\sin\psi + y\cos\psi, \tag{20}$$

в якій кут ψ визначений з рівності (8). Це, разом з діленням на коефіцієнт при $u_{\xi\xi}$, зводить задачу (6), (7) до задачі

$$u_{\xi\xi} + d^2 u_{\eta\eta} = F(\xi,\eta),\ \alpha+\psi < \arg(\xi,\eta) < \alpha+\psi+\gamma, \tag{21}$$

$$u\big|_{\arg(\xi,\eta)=\alpha+\psi} = G_{\alpha+\psi}(\xi,\eta),\ u\big|_{\arg(\xi,\eta)=\alpha+\psi+\gamma} = G_{\alpha+\psi+\gamma}(\xi,\eta), \tag{22}$$

в якій стала d визначена з рівності (9), а $F(\xi,\eta)$, $G_{\alpha+\psi}(\xi,\eta)$, $G_{\alpha+\psi+\gamma}(\xi,\eta)$ – функції, які виникають відповідно з функцій $f(x,y)$, $g_\alpha(x,y)$, $g_{\alpha+\gamma}(x,y)$ внаслідок виконання заміни (20) та ділення на коефіцієнт при $u_{\xi\xi}$.

Виконання у задачі (21) – (22) заміни

$$\tilde{\xi} = \xi,\ \tilde{\eta} = \frac{\eta}{d} \tag{23}$$

дозволяє перейти до задачі

$$u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \tilde{F}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}),\ \tilde{\alpha}+\tilde{\psi} < \arg(\xi,\eta) < \tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}, \tag{24}$$

$$u\big|_{\arg(\tilde{\xi},\tilde{\eta})=\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}} = \tilde{G}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}),\ u\big|_{\arg(\tilde{\xi},\tilde{\eta})=\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}} = \tilde{G}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}), \tag{25}$$

де $\arg(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \tilde{\alpha}+\tilde{\psi}$, $\arg(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}$ – промені, що виникають відповідно з променів $\arg(\xi,\eta)=\alpha+\psi$, $\arg(\xi,\eta)=\alpha+\psi+\gamma$ після виконання заміни (23), $\tilde{F}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = F(\tilde{\xi}, d\tilde{\eta})$, $\tilde{G}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = G_{\alpha+\psi}(\tilde{\xi}, d\tilde{\eta})$, $\tilde{G}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = G_{\alpha+\psi+\gamma}(\tilde{\xi}, d\tilde{\eta})$. Нескладно також встановити справедливість формули (10).

Задача (24) – (25) добре досліджена. До неї можна застосувати стандартну методику зведення еліптичних задач до крайових задач для диференціальних рівнянь з комплексним параметром, викладену у роботі [3]. Виконання такого зведення ([3, ст. 276-277]) та безпосередній аналіз розв'язку отриманої задачі з комплексним параметром дозволяє стверджувати, що за виконання умови (11) розв'язок задачі (24) – (25) буде існувати у просторі $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}})$ та задовольнятиме апріорну оцінку

$$\|u\|_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)} \le \frac{C_1}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\|\tilde{F}\|_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(k)} + \|\tilde{G}\|_{2,\delta,\partial K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right), \tag{26}$$

в якій стала C_1 залежить неперервним чином від $\tilde{\gamma}$, μ, а $\tilde{G}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \begin{cases} \tilde{G}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}), & \arg(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \tilde{\alpha}+\tilde{\psi}, \\ \tilde{G}_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}}(\tilde{\xi},\tilde{\eta}), & \arg(\tilde{\xi},\tilde{\eta}) = \tilde{\alpha}+\tilde{\psi}+\tilde{\gamma}. \end{cases}$.

При виконанні заміни $\tilde{\xi} = \xi$, $\tilde{\eta} = \dfrac{\eta}{d}$ стандартний простір з вагою $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\alpha+\psi,\gamma})$ у координатах ξ, η переходить у координатах $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ у простір $\tilde{V}_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}})$, норму $\widetilde{\|\ \|}_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)}$ в якому можна знайти за формулою

$$\widetilde{\|u\|}_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)} = \left(d \sum_{i_1+i_2 \le 2+k} \int_{K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}} (\tilde{\xi}^2 + d^2\tilde{\eta}^2)^{\frac{\delta}{2}-2-k+i_1+i_2} \left|\frac{1}{d^{i_2}} \frac{\partial^{i_1+i_2} u}{\partial\tilde{\xi}^{i_1} \partial\tilde{\eta}^{i_2}}\right|^2 d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}\right)^{1/2}.$$

З очевидної нерівності $\min\{1;d^2\}\cdot(\tilde{\xi}^2+\tilde{\eta}^2)\le\tilde{\xi}^2+d^2\tilde{\eta}^2\le\max\{1;d^2\}\cdot(\tilde{\xi}^2+\tilde{\eta}^2)$ нескладно встановити, що норма простору $\tilde{V}_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}})$ буде еквівалентною до норми простору $V_{2,\delta}^{(2+k)}(K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}})$, тобто будуть справедливими нерівності

$$C_2\|u\|_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)}\le\widetilde{\|u\|}_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)}\le C_3\|u\|_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)},\tag{27}$$

де додатні сталі C_2, C_3 залежать лише від d, k, δ, причому залежність від $d\in(0,+\infty)$ є неперервною. Можна також встановити оцінки, аналогічні до (27), для функцій $\tilde{F}$ та $\tilde{G}$.

З (26), (27) випливає справедливість нерівності

$$\widetilde{\|u\|}_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(2+k)}\le\frac{C_4}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\widetilde{\|\tilde{F}\|}_{2,\delta,K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{(k)}+\widetilde{\|\tilde{G}\|}_{2,\delta,\partial K_{\tilde{\alpha}+\tilde{\psi},\tilde{\gamma}}}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right),\tag{28}$$

стала C_4 в якій залежить неперервним чином від $\tilde{\gamma}$, μ, d, k, δ. З нерівності (28), застосовуючи в оберненому порядку, повертаючись до змінних x, y, можемо отримати нерівність для розв'язку задачі (6), (7):

$$\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(2+k)}=\left\|A^{-1}(f,g)\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(2+k)}\le\frac{C_{(0)}}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}\left(\|f\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}+\|g\|_{2,\delta,\partial K_{\alpha,\gamma}}^{\left(\frac{3}{2}+k\right)}\right),\tag{29}$$

де стала $C_{(0)}$ залежить лише від a_0, b_0, c_0, k, δ, γ.

З нерівності (29) можемо стверджувати, що

$$\|A\|^{-1}\le\frac{C_{(0)}}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}.\tag{30}$$

Оцінимо норму оператора A_1. Справедлива нерівність

$$\begin{aligned}\|A_1u\|&=\left\|(L-\tilde{L})u\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}=\left\|(a(x,y)-a_0)u_{xx}+(b(x,y)-b_0)u_{xy}+(c(x,y)-c_0)u_{yy}\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}\le\\&\le\left\|(a(x,y)-a_0)u_{xx}\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}+\left\|(b(x,y)-b_0)u_{xy}\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}+\left\|(c(x,y)-c_0)u_{yy}\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}\end{aligned}.\tag{31}$$

Нехай $v\in V_{2,\delta}^{(k)}(K_{\alpha,\gamma})$. Використовуючи умови (13) – (15) та схему доведення, аналогічну доведенню леми 2.1 з роботи [3], з аналізом кількості доданків при кожній похідній, можемо встановити оцінку

$$\left\|(a(x,y)-a_0)v\right\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}\le M(k+2)\|v\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(k)}.\tag{32}$$

Очевидно, що аналогічні до (32) нерівності можна отримати і для випадку коефіцієнтів $(b(x,y)-b_0)$, $(c(x,y)-c_0)$.

З нерівностей (31), (32) отримуємо $\|A_1u\|\le 3M(k+2)\|u\|_{2,\delta,K_{\alpha,\gamma}}^{(2+k)}$, звідки $\|A_1\|\le 3M(k+2)$.

З виконання останньої нерівності, також нерівностей (16), (30) випливає, що $\|A_1\|<\|A\|$, $\left\|A^{-1}A_1\right\|<1$,. Тоді оператор $E+A^{-1}A_1$ має обмежений обернений оператор. Оскільки $\left\|A^{-1}A_1\right\|\le\frac{3MC_{(0)}(k+2)}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|}<1$, то $\left\|\left(E+A^{-1}A_1\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{1-\left\|A^{-1}A_1\right\|}$ і $\left\|(E+A^{-1}A_1)^{-1}A^{-1}\right\|<\frac{C_{(0)}}{|\sin\mu\tilde{\gamma}|-3MC_{(0)}(k+2)}$, звідки випливає нерівність (17). Це завершує доведення теореми.

4. Висновки

Результат, отриманий у роботі, уточнює характер залежності сталої в апріорній оцінці розв'язку для випадку лінійної еліптичної крайової задачі зі змінними коефіцієнтами в області з кутовою точкою. З'ясування характеру залежності сталої в апріорній оцінці розв'язку від даних вихідної задачі дозволяє говорити про можливість застосування отриманої нерівності до дослідження нелінійних еліптичних задач у кутових областях.

Теорему існування розв'язку, доведену у роботі, сформульовано у термінах лише даних вихідної задачі, без використання переходу до еліптичної крайової задачі з комплексним параметром.

1. *Джафаров Р.М.* Весовые априорные оценки решения квазилинейной задачи Дирихле в области с конической точкой // Труды ИПММ НАН Украины. – 1998. – Т.2. – С. 55-63. 2. *Коваленко О.В.* Апріорна оцінка розв'язку лінійної еліптичної крайової задачі в області з конічною точкою // Вісн. Київ. ун-ту. Математика. Механіка. – 2005. – Вип. 13 – 14. – С. 25 – 29. 3. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками // Труды Моск. мат. о-ва. -1967. – Т. 16. – с. 209 – 292. 4. *Мазья В.Г.* Оценки L_p – средних и асимптотика решений эллиптических краевых задач в конусе. II. Операторы с переменными коэффициентами // Mathematische. Nachrichten. – 1988. – Bd 137. – S. 113 – 139. 5. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Проблемы матем. анализа. – 1979. – Вып. 7. – с. 100 – 145.

Надійшла до редколегії 07.12.2009

УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук

ПРО ПОБУДОВУ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

***Розглядається задача про побудову головного члена асимптотичного розкладу розв'язку задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Показано, що вираз для головного члена такого розкладу залежить від значення кривої розриву лише в точці t* = 0.**

***Problem of constructing main term of asymptotic series of solution for Cauchy problem to singularly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients is studied. There is proved that constructing main term depends on value of function of discontinuity only at the point t* = 0.**

1. Вступ

Одним з фундаментальних рівнянь сучасної теоретичної та математичної фізики є рівняння Кортевега-де Фріза, яке служить моделлю найрізноманітніших хвильових явищ [3]. Протягом останніх 20-ти років значна увага приділяється розгляду сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами, для дослідження якого ефективно використовувались асимптотичні методи [1, 2, 5].

В даній статті розглядається питання про побудову головного члена асимптотичного розв'язку задачі Коші рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду:

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x),\ b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R})$, $k = 0,1,\ldots$; функція $f(\eta),\ \eta \in \mathbf{R}$, належить простору Шварца швидко спадних функцій; $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

2. Основні означення та припущення

Сформулюємо основні припущення та дамо означення, які необхідні для подальшого викладу.

Нехай $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, що для довільних невід'ємних цілих чисел *n, m, q, p* рівномірно щодо (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються такі дві умови [4]:

1. Справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K; \tag{3}$$

2. Існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\Big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\Big) = 0, \quad (x,t)\in K. \tag{4}$$

Нехай $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}) \subset G_1$ – лінійний простір $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau) \in (\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$, що для довільних невід'ємних цілих чисел *n, m, q, p* рівномірно щодо змінних (x,t) на кожному компакті $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ додатково до умов (3), (4) виконується умова:

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0. \tag{5}$$

Простір G_1^0 є простором нескінченно диференційовних функцій, залежних від змінних $(x,t,\tau) \in (\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$, які за змінною τ належать простору Шварца швидко спадних функцій.

Позначимо через $G_2^+ = G_2^+(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times[0;\Theta])$, де Θ – деяке дійсне додатне число, – лінійний простір таких нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(\tau_1,\tau_2)\in\mathbf{R}\times[0;\Theta]$, $(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]$, що для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, q_1, q_2 рівномірно щодо змінних (x,t) на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau_1\to\pm\infty}\tau_1^r\frac{\partial^{q_1}}{\partial\tau_1^{q_1}}\frac{\partial^{q_2}}{\partial\tau_2^{q_2}}\frac{\partial^{q}}{\partial t^{q}}\frac{\partial^{p}}{\partial x^{p}}f(x,t,\tau_1,\tau_2)=0,\quad (x,t)\in K,\quad \tau_2\in[0;\Theta]. \tag{6}$$

Розв'язок задачі Коші (1), (2) шукається у вигляді

$$u(x,t,\varepsilon)=Y_0(x,t,\varepsilon)+O(\varepsilon), \tag{7}$$

де

$$Y_0(t,\tau_1,\tau_2)=V_0(t,\tau_1)+W_0(t,\tau_1,\tau_2),\quad \tau_1=\frac{x-\varphi(t)}{\varepsilon},\quad \tau_2=\frac{t}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Тут $\varphi(t)$ – така нескінченно диференційовна функція, що $\varphi(0)=0$. Функція $V_0(t,\tau_1)\in G_0$, $W_0(\tau_1,\tau_2)\in G_2^+$, при цьому функція $V_0(t,\tau_1)$ визначена в деякому околі кривої $\Gamma=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T],\, x=\varphi(t)\}$, а функція $W_0(\tau_1,\tau_2)$ – в деякому околі зв'язної множини $\{(x,t): t=0, x\in\mathbf{R}\}\cup\{(x,t): x=\varphi(t),\quad t\in[0;T]\}$.

Для визначення функцій $V_0(t,\tau_1)$ та $W_0(\tau_1,\tau_2)$ підставимо (7) в рівняння (1) та домножимо на ε. Тоді матимемо:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 V_0}{\partial\tau_1^3}+\frac{\partial^3 W_0}{\partial\tau_1^3}=a_0(x)\left(\varepsilon\frac{\partial V_0}{\partial t}-\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}\varphi'(t)-\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\varphi'(t)+\frac{\partial V_0}{\partial\tau_2}+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_2}\right)+\\ +b_0(x)\left(V_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+V_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}+W_0\frac{\partial V_0}{\partial\tau_1}+W_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\right)+\varepsilon g_0(x,t,\varepsilon),\end{gathered} \tag{9}$$

де $g_0(x,t,\varepsilon)$ – деяка обмежена нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, тобто $|g(x,t,\varepsilon)|\le C_K$, $(x,t)\in K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$, для деякої сталої C_K, що залежить лише від компакта K.

4. Визначення сингулярної частини $V_0(t,\tau_1)$

Запишемо рівняння для визначення функції $V_0(t,\tau_1)$ на кривій Γ. Позначимо

$$v_0=v_0(t,\tau_1)=V_0(x,t,\tau_1)|_{x=\varphi(t)}.$$

З (9) знаходимо, що функція $v_0=v_0(t,\tau_1)$ є розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними вигляду:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau_1^3}+a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}-b_0(\varphi(t))v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau_1}=0. \tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) в просторі G_1^0 можна подати у вигляді [1]

$$v_0(t,\tau_1)=-3\frac{A(\varphi(t),t)}{b_0(\varphi(t))}ch^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi(t),t)}}{2}(\tau_1+C_0)\right),$$

де $A(\varphi(t),t)=-a_0(\varphi(t))\varphi'(t)>0,\quad C_0-\mathrm{const}.$

Продовжимо функцію $v_0(t,\tau_1)$ з кривої $x=\varphi(t)$ таким чином, щоб $V_0(x,t,\tau_1)=v_0(t,\tau_1)$.

5. Визначення сингулярної частини $W_0(x,t,\varepsilon)$

З (8), (9) для визначення функції $W_0(\tau_1,\tau_2)$ в околі зв'язної множини M такої, що $M=\{(x,t): t=0, x\in\mathbf{R}\}\cup\{(x,t): x=\varphi(t),\quad t\in[0;T]\}$, знаходимо квазілінійне диференціальне рівняння третього порядку

$$\frac{\partial^3 W_0}{\partial\tau_1^3}=-a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}-\frac{\partial W_0}{\partial\tau_2}\right]+b_0(0)\left[V_0(0,\tau_1)\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}+\frac{\partial V_0(0,\tau_1)}{\partial\tau_1}W_0+W_0\frac{\partial W_0}{\partial\tau_1}\right]. \tag{11}$$

Використовуючи початкову умову (2), знаходимо співвідношення вигляду:

$$V_0(x,t,\varepsilon)+W_0(x,t,\varepsilon)|_{t=0}=f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

звідки, отримуємо початкову умову для функції $W_0(\tau_1,\tau_2)$ при $\tau_2=0$:

$$W_0(\tau_1,0)=f(\tau_1)-V_0(0,\tau_1). \tag{12}$$

Питання про існування розв'язку задач (10), (11) в просторі G_2^+ з'ясовує така лема.

Лема. *Задача (11), (12) має розв'язок $W_0(\tau_1,\tau_2)$, що належить простору G_2^+.*

Твердження леми випливає [4] з умови $W_0(\tau_1,0)\in G_1^0$.

Таким чином, грунтуючись на викладених вище міркуваннях, можна сформулювати таке твердження.

Теорема. Для довільної нескіченно диференційовної функції $\varphi(t)$, $t \in [0;T]$, такої, що $\varphi(0) = 0$, функція вигляду (7), (8) задовольняє співвідношення (9) та початкову умову з точністю $O(\varepsilon)$.

6. Висновки

Побудовано нульовий член асимптотичного розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевеге-де Фріза зі змінними коефіцієнтами і показано, що нульовий член асимптотики залежить від кривої розриву лише в початковій точці.

1. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення солітоноподібних розв'язків збуреного рівняння Кортевега-де Фріза // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, N. 1. – С. 111 – 124. 2. *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розв'язки задачі Коші для сингулярно збуреного рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, N. 1. – С. 122 – 132. 3. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Советское радио, 1977. – 368 с. 4. *Фаминский А.В.* Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Том.13. – ¹.56 – 105. 5. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: AMS. – 2001. – 243 p.

Надійшла до редколегії 30.06.10

УДК 519.925

О. Чичурін, д-р фіз.-мат. наук

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РІВНЯНЬ ШАЗІ

Подано детальне виведення 22 умов для системи Шазі, що виникають при розв'язанні задачі про належність рівняння Шазі з шістьма особливими точками до рівнянь P-типу. Дано метод побудови рівняння Шазі з шістьма особливими точками, коефіцієнти якого задовольняють систему Шазі. Розглянуто процедуру чисельного і аналітичного інтегрування рівнянь Шазі зі сталими коефіцієнтами.

There is given a detailed deduction of twenty two conditions of Chazy system. These conditions arise during the solving the problem of belonging the Chazy equation with six singular points to P-type. The method of building Chazy equation with six singular points, which coefficients satisfy Chazy system, is given. The procedure of numerical and analytical integration Chazy equation with constant coefficients is considered.

1. Вступ

При вивченні рівнянь вигляду

$$w''' = P(w'', w', w, z), \tag{1}$$

де P – поліном стосовно w'', w', w з аналітичними коефіцієнтами за z, Шазі [8] сподівався отримати нові рівняння достатньо простого вигляду, розв'язки яких не були би класичними функціями і які б не приводилися до канонічних рівнянь Пенлеве. Як відзначено в монографії В.А. Добровольського [1], результати цих досліджень виявилися мало обнадійними. Тоді Шазі почав розглядати рівняння вигляду

$$w''' = R(w'', w', w, z), \tag{2}$$

де $R-$ раціональна стосовно w'', w', w функція з аналітичними коефіцієнтами за z, розв'язки яких не мають рухомих критичних особливих точок. Згідно методу Пенлеве, потрібно було знайти спрощене рівняння для (2) з нерухомими критичними точками. Шазі отримав рівняння вигляду [8]

$$w''' = \frac{PQ'' - QP''}{PQ' - QP'} w' w'' - \frac{P'Q'' - Q'P''}{PQ' - QP'} \frac{w'^3}{2}, \tag{3}$$

де P, Q – поліноми четвертого ступеня стосовно *w* зі сталими коефіцієнтами, P', P'', Q', Q'' – похідні поліномів P, Q за w. Він показав [8], що рівняння (3) має не більше шести полюсів, а рівняння *P*-типу, яке допускає рівняння (3) в якості свого спрощуючого рівняння, коли стосовно змінної w всі корені рівняння $PQ' - QP' = 0$ є простими, повинно записуватися у вигляді

$$w''' = \sum_{k=1}^{6} \frac{(w' - a_k')(w'' - a_k'') + A_k (w' - a_k')^3 + B_k (w' - a_k')^2 + C_k (w' - a_k')}{w - a_k} + D\, w'' \; + \; E\, w' + \prod_{i=1}^{6} (w - a_i) \, \sum_{k=1}^{6} \frac{F_k}{w - a_k}. \tag{4}$$

Рівняння (4) містить 32 функції змінної $z : a_k, A_k, B_k, C_k, F_k \quad (k = \overline{1,6}), \quad D, E$.

Розвиваючи метод Пенлеве [9] для рівняння (4), Шазі отримав систему з 31 алгебраїчних і диференціальних рівнянь, в яких як невідомі фігурують 32 функції – коефіцієнти рівняння (4). Система перших дев'яти рівнянь, що пов'язує між собою функції A_k, $a_k \quad (k = \overline{1,6})$, згідно [8], має вигляд

$$\sum_{k=1}^{6} A_k = 0, \;\; \sum_{k=1}^{6} a_k A_k = -6, \;\; \sum_{k=1}^{6} a_k^2 \, A_k = -2 \sum_{k=1}^{6} a_k, \tag{5}$$

$$2\, A_k^2 + \sum_j \frac{A_k - A_j}{a_k - a_j} = 0 \quad (k, j = \overline{1,6};\, j \neq k) \, . \tag{6}$$

Невідомими тут є функції $A_k \quad (k = \overline{1,6})$. Детальний аналіз цієї системи було проведено М.О. Лукашевичем в [2]. Грунтуючись на його методі, в [3] отримано розв'язок цієї системи у вигляді

$$A_k = \frac{-6a_k^4 + 4\sigma_1 a_k^3 + 3(\alpha_2 - \sigma_2)a_k^2 - 3\beta_2 a_k + 3\beta_3 - \sigma_4}{6a_k^5 - 5\sigma_1 a_k^4 + 4\sigma_2 a_k^3 - 3\sigma_3 a_k^2 + 2\sigma_4 a_k - \sigma_5} \quad (k = \overline{1,6}) , \tag{7}$$

де основні симетричні поліноми σ_k, що складені з елементів a_k $(k = \overline{1,6})$, пов'язані з величинами α_2, β_2, β_3 співвідношеннями вигляду

$$\beta_2 = \frac{(3\alpha_2 - \sigma_2)(2\alpha_2\sigma_1 - 3\sigma_3) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2} , \tag{8}$$

$$\beta_3 = \frac{2\sigma_1\sigma_5 - (3\alpha_2 - \sigma_2)(12\alpha_2^2 - 4\alpha_2\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4) - 2\sigma_1\sigma_4 + 6\sigma_5}{2(18\alpha_2 + \sigma_1^2 - 6\sigma_2)} , \tag{9}$$

а функція α_2 задовольняє рівняння 5-го ступеня

$$\begin{gathered} 1296\alpha_2^5 - 1296\sigma_2\alpha_2^4 + 216(2\sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3 - \sigma_4)\alpha_2^3 + 24(\sigma_1^2\sigma_4 - 2\sigma_2^3 - 6\sigma_2(\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_4) - \\ -9\sigma_1\sigma_5 + 54\sigma_6)\alpha_2^2 + (12\sigma_1(\sigma_3(2\sigma_2^2 - 3\sigma_4) + 6\sigma_2\sigma_5) + \sigma_1^2(9\sigma_2^3 - 8\sigma_2\sigma_4 + 144\sigma_6) - \\ -12(4\sigma_2^2\sigma_4 - 9\sigma_3\sigma_5 + 72\sigma_2\sigma_6) - 4\sigma_1^3\sigma_5)\alpha_2 + (2\sigma_1\sigma_4 - 3\sigma_2\sigma_3 - 6\sigma_5)(\sigma_1^2\sigma_3 - 4\sigma_1\sigma_4 + \\ +12\sigma_5) + 4(\sigma_1^2 - 6\sigma_2)^2\sigma_6 = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Детальне виведення системи (5), (6), а також повне обґрунтування отриманого розв'язку подано [4].

Решта 22 рівнянь, що пов'язують між собою коефіцієнти рівняння (4), мають вигляд

$$2D + \sum_{k=1}^{6}(B_k - 3a_k{}' A_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k F_k = \sum_{k=1}^{6} a_k{}^2\, F_k = 0 , \tag{11}$$

$$\begin{gathered} -(-\frac{5}{2} A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j})B_k + \sum_j (\frac{1}{2} A_k + \frac{1}{a_k - a_j})B_j = -A_k{}' \; + \\ + A_k \sum_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} - 3\sum_j A_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} + \frac{3}{2} A_k \sum_{i=1}^{6} a_i{}' A_i, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} -(2 A_k + \sum_j \frac{1}{a_k - a_j})C_k + \sum_j C_j \frac{1}{a_k - a_j} = B_k^2 - B_k{}' - B_k \sum_j \frac{a_k{}' - a_j{}'}{a_k - a_j} - \\ - \sum_j \frac{3 A_j (a_k{}' - a_j{}')^2 + 2B_j (a_k{}' - a_j{}')}{a_k - a_j} + B_k D - E - \sum_j \frac{a_k{}'' - a_j{}''}{a_k - a_j}, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} -a_k{}''' - B_k C_k + C_k{}' + \sum_j \frac{(a_k{}' - a_j{}')(a_k{}'' - a_j{}'' - C_k) + A_j (a_k{}' - a_j{}')^3}{a_k - a_j} + \\ + \sum_j \frac{B_j (a_k{}' - a_j{}')^2 + C_j (a_j{}' - a_k{}')}{a_k - a_j} + E\, a_k{}' + D\,(a_k{}'' - C_k) + F_k \prod_j (a_k - a_j) = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

де $k, j = \overline{1,6};\ j \neq k.$

2. Виведення умов Шазі

В [8] не подано детального виведення умов (11)-(14). Процедура отримання цих умов подається нижче. Запишемо рівняння (4) у вигляді

$$\begin{gathered} (w - a_1)w''' = (w' - a_1{}')(w'' - a_1{}'') + A_1(w' - a_1{}')^3 + B_1(w' - a_1{}')^2 + C_1(w' - a_1{}') + (w - a_1)(Dw'' + Ew') + \\ + \sum_{j=2}^{6} \frac{w - a_1}{w - a_j}\Big((w' - a_j{}')(w'' - a_j{}'') + A_j(w' - a_j{}')^3 + B_j(w' - a_j{}')^2 + C_j(w' - a_j{}')\Big) + \\ + (w^6 - \sigma_1 w^5 + \sigma_2 w^4 - \sigma_3 w^3 + \sigma_4 w^2 - \sigma_5 w + \sigma_6) + \left(F_1 + \sum_{j=2}^{6} \frac{(w - a_1)F_j}{w - a_j} \right), \end{gathered} \tag{15}$$

де σ_i $(i = \overline{1,6})$ – елементарні симетричні поліноми, що складені з елементів a_i $(i = \overline{1,6})$.

Розглянемо розклад функції *w* в степеневий ряд в околі точки z_0

$$w(z) = a_1(z_0) + \alpha(z - z_0) + \beta(z - z_0)^2 + \gamma(z - z_0)^3 + \ldots , \tag{16}$$

де α, γ, z_0 – довільні сталі. Диференціюючи (16), отримаємо

$$w'(z) = \alpha + 2\beta(z - z_0) + 3\gamma(z - z_0)^2 + \ldots , \quad w''(z) = 2\beta + 6\gamma(z - z_0) + \ldots , \quad w'''(z) = 6\gamma + \ldots \; . \tag{17}$$

Крім того, розглянемо розклади коефіцієнтів рівняння (15) в околі точки z_0. Маємо

$$\begin{aligned}
&a_i(z)=a_i(z_0)+a_i'(z_0)(z-z_0)+\frac{a_i''(z_0)}{2}(z-z_0)^2+\frac{a_i'''(z_0)}{6}(z-z_0)^3+\dots,\\
&A_i(z)=A_i(z_0)+A_i'(z_0)(z-z_0)+\dots,\\
&B_i(z)=B_i(z_0)+B_i'(z_0)(z-z_0)+\dots,\\
&C_i(z)=C_i(z_0)+C_i'(z_0)(z-z_0)+\dots,\\
&F_i(z)=F_i(z_0)+\dots,\quad (i=\overline{1,6}),\\
&D(z)=D(z_0)+\dots,\quad E(z)=E(z_0)+\dots .
\end{aligned}\tag{18}$$

Підставимо (16)-(18) в рівняння (15) і візьмемо до уваги рівності

$$\frac{w-a_1}{w-a_j}=\frac{\alpha-a_1'}{a_1-a_j}(z-z_0)+\frac{2(\alpha-a_1')(a_j'-\alpha)+(a_1-a_j)(2\beta-a_1'')}{2(a_1-a_j)^2}(z-z_0)^2+$$
$$+\left(\frac{a_1'''-6\gamma}{6(a_j-a_1)}-\frac{(a_j'-\alpha)(a_1''-2\beta)}{2(a_1-a_j)^2}+\frac{(\alpha-a_1')(2(a_j'-\alpha)^2+(a_1-a_j)(a_j''-2\beta))}{2(a_1-a_j)^3}\right)(z-z_0)^3+\dots .$$

Тут і надалі використовуються позначення $a_i=a_i(z_0)$, $a_i'=a_i'(z_0)$, $a_i''=a_i''(z_0)$ $(i=\overline{1,6})$.

В отриманих рівняннях прирівняємо коефіцієнти при $(z-z_0)^0$:

$$C_1-a_1''+a_1'^2A_1+B_1\alpha+A_1\alpha^2-a_1'(B_1+2A_1\alpha)+2\beta=0,$$

звідки знаходимо

$$\beta=\frac{1}{2}\left(a_1''-C_1+(a_1'-\alpha)(B_1+A_1(\alpha-a_1'))\right),\tag{19}$$

та коефіцієнти при $(z-z_0)^1$. У такий спосіб отримується деяка умова у вигляді рівняння (позначимо це рівняння (I)), яке можна записати у вигляді алгебраїчного поліноміального рівняння четвертого степеня стосовно α , при цьому в рівняння (I) замість β потрібно підставити його значення згідно формули (19)).

Прирівнявши в рівнянні (I) коефіцієнт при α^4 до нуля, отримаємо рівність

$$2A_1^2+\sum_{j=2}^{6}\frac{A_1-A_j}{a_1-a_j}=0,\tag{20}$$

яка є першим рівнянням системи (6). Далі в рівнянні (I) прирівняємо до нуля коефіцієнт при α^3. Відповідну умову можна записати у вигляді

$$\sum_{j=2}^{6}\frac{B_1-B_j}{a_1-a_j}+3B_1A_1+A_1D-8A_1^2a_1'-A_1'+\sum_{j=2}^{6}\frac{A_j(a_1'+3a_j')-A_1(3a_1'+a_j')}{a_1-a_j}=0.\tag{21}$$

З першого рівняння системи (11) знаходимо функцію *D*:

$$D=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{6}(3a_k'A_k-B_k),\tag{22}$$

а з рівняння (20) – функцію A_1^2:

$$A_1^2=-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{6}\frac{A_1-A_j}{a_1-a_j}.\tag{23}$$

Після підстановки (22), (23) в рівняння (21) і деяких перетворень, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
&-(-\frac{5}{2}A_1+\sum_{j=2}^{6}\frac{1}{a_1-a_j})B_1+\sum_j(\frac{1}{2}A_1+\frac{1}{a_1-a_j})B_j+A_1'-\\
&-A_1\sum_j\frac{a_1'-a_j'}{a_1-a_j}+3\sum_j A_j\frac{a_1'-a_j'}{a_1-a_j}-\frac{3}{2}A_1\sum_{i=1}^{6}a_i'A_i=0.
\end{aligned}\tag{24}$$

яке є першим рівнянням системи (12).

Прирівнявши тепер в рівнянні (I) до нуля коефіцієнт при α^2, отримаємо умову вигляду

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{6}\frac{C_1-C_j}{a_1-a_j}+\sum_{j=2}^{6}\frac{a_j''-a_1''-a_j'(B_1-2B_j)+3a_1'^2A_1}{a_1-a_j}+12a_1'^2A_1^2+B_1(B_1+D)-B_1'-E+2C_1A_1+\\
&+a_1'\sum_{j=2}^{6}\frac{B_j-2B_1+3a_j'(A_1-A_j)}{a_1-a_j}-3\sum_{j=2}^{6}\frac{a_j'^2A_j}{a_1-a_j}-9a_1'A_1B_1-3a_1'(A_1D-A_1')=0.
\end{aligned}\tag{25}$$

Знайшовши з рівняння (24) функцію B_1 і підставивши її разом з (22), (23) в рівняння (25), після деяких перетворень отримаємо рівняння вигляду

$$(2A_1 + \sum_j \frac{1}{a_1 - a_j})C_1 - \sum_j C_j \frac{1}{a_1 - a_j} + B_1^2 - B_1' + B_1 \sum_j \frac{a_1' - a_j'}{a_1 - a_j} -$$
$$-\sum_j \frac{3A_j(a_1' - a_j')^2 + 2B_j(a_1' - a_j')}{a_1 - a_j} + B_1 D - E - \sum_j \frac{a_1'' - a_j''}{a_1 - a_j} = 0 \quad (j = \overline{2,6}). \tag{26}$$

Легко бачити, що (26) є першим рівнянням системи (13).

Прирівнявши в рівнянні (I) до нуля коефіцієнт при α, отримаємо умову, яку можна записати у вигляді

$$a_1''' - C_1' - a_1'' D + C_1(B_1 + D) - \prod_{j=2}^{6}(a_1 - a_j)F_1 - 8a_1'^3 A_1^2 + \sum_{j=2}^{6} \frac{a_1'^2(B_1 - 3a_j A_1) - a_1'^3 A_1}{a_1 - a_j} +$$
$$+\sum_{j=2}^{6} \frac{a_j'(a_1'' - a_j'' - a_j' B_j - C_1 + C_j + a_j'^2 A_j)}{a_1 - a_j} + 9A_1 B_1 + 3(A_1 D - A_1') + 2B_1' - \tag{27}$$
$$-2B_1(B_1 + D) + E - 4C_1 A_1 + a_1' \sum_{j=2}^{6} \frac{a_1'' - a_j'' + 2a_j'(B_1 - B_j) - C_1 + C_j + 3a_j'^2 A_j}{a_1 - a_j} = 0.$$

Функцію B_1, яку визначено з рівняння (24), та функцію C_1, яку визначено з рівняння (26), підставимо разом із співвідношеннями (22), (23) в (27). Після деяких перетворень отримаємо рівняння вигляду

$$-a_1''' - B_1 C_1 + C_1' + \sum_j \frac{(a_1' - a_j')(a_1'' - a_j'' - C_1) + A_j(a_1' - a_j')^3}{a_1 - a_j} +$$
$$+\sum_j \frac{B_j(a_1' - a_j')^2 + C_j(a_j' - a_1')}{a_1 - a_j} + E\, a_1' + D\,(a_1'' - C_1) + F_1 \prod_j (a_1 - a_j) = 0 \quad (j = \overline{2,6}). \tag{28}$$

Легко бачити, що (28) є першим рівнянням системи (14).

Зауваження. Якщо у виразі, що аналогічний виразу $\dfrac{w - a_1}{w - a_j}$ рівняння (15), замість функції a_1 взяти функцію a_j $(j = \overline{2,6})$ та при кожному *j* скористатися міркуваннями, що аналогічні викладеним вище, то отримаємо ще по п'ять співвідношень вигляду (24), (26) і (28).

Перейдемо тепер до виведення чотирьох рівнянь системи (11). Рівняння (4) має шість скінченних полюсів в площині змінної w. Розглянемо значення z_0, при якому $w = \infty$ не може бути полюсом рівняння (4), тобто точка z_0 є лише точкою голоморфності цього рівняння, яке можна записати у вигляді (15). Розглянемо розклад для простого полюса z_0 функції w. Маємо

$$w(z) = \frac{\alpha}{z - z_0} + \beta + \gamma(z - z_0)^2 + \delta(z - z_0)^3 + \ \dots\ , \tag{29}$$

де $\alpha, \beta, z_0 -$ довільні сталі.

Тоді знаходимо

$$\frac{w - a_1}{w - a_j} = 1 + \frac{a_j - a_1}{\alpha}(z - z_0) + \frac{a_1\beta - (\beta + a_1)a_j + a_j^2 + \alpha(a_j - a_1)}{\alpha^2}(z - z_0)^2 + \dots \quad (j = \overline{2,6}),$$
$$(w - a_1)w''' = -\frac{6\alpha^2}{(z - z_0)^5} + \frac{6\alpha(a_1 - \beta)}{(z - z_0)^4} + \dots ,$$
$$\frac{w - a_1}{w - a_j}(w' - a_1')^3 = \frac{-\alpha^3}{(z - z_0)^6} + \frac{\alpha^2(a_1 - a_j)}{(z - z_0)^5} + \frac{\alpha((\beta + a_1 - a_j)a_j - \beta a_1 + \alpha(a_1' - 4a_j'))}{(z - z_0)^4} + \dots , \tag{30}$$
$$\frac{w - a_1}{w - a_j}(w' - a_1')^2 = \frac{\alpha^2}{(z - z_0)^4} + \frac{\alpha(a_j - a_1)}{(z - z_0)^3} + \dots ,$$
$$\frac{w - a_1}{w - a_j}(w' - a_1')(w'' - a_1'') = -\frac{2\alpha^2}{(z - z_0)^5} + \frac{2\alpha(a_1 - a_j)}{(z - z_0)^4} - \frac{2((\beta - a_j)(a_1 - a_j) + \alpha a_j')}{(z - z_0)^3} + \dots .$$

Звідси отримуємо коефіцієнтні умови (5), (6), (11) як резонансні умови [5] для довільних значень α, β. Дійсно, підставимо співвідношення (29), (30) в рівняння (15) і прирівняємо коефіцієнти при $(z - z_0)^{-6}$, $(z - z_0)^{-5}$, $(z - z_0)^{-4}$. Коефіцієнтна умова при $(z - z_0)^{-6}$ має вигляд $\alpha^6 \sum_{k=1}^{6} F_k = \alpha^3 \sum_{k=1}^{6} A_k$. Звідси, поділивши на α^3, отримаємо першу умову системи (5)

$$0 = \sum_{k=1}^{6} A_k \tag{31}$$

та співвідношення

$$\sum_{k=1}^{6} F_k = 0 \text{ (другу умову системи (11)).} \quad (32)$$

Коефіцієнтну умову при $(z-z_0)^{-5}$ можна записати у вигляді

$$0 = \alpha^2(6 + \sum_{k=1}^{6} a_k A_k) + \alpha^3 \sum_{k=1}^{6} A_k' + \alpha^5((\sigma_1 - 6\beta)\sum_{k=1}^{6} F_k - \sum_{j=2}^{6} a_j F_j + a_1 \sum_{j=2}^{6} F_j) .$$

Сума $\sum_{k=1}^{6} A_k'$ при α^3 рівна нулеві, згідно співвідношення (31). Звідси, поділивши на α^2, отримуємо рівність $0 = 6 + \sum_{k=1}^{6} a_k A_k$, тобто другу умову системи (5). Конфіцієнт при α^5, згідно співвідношення (32), запишемо у вигляді $-\sum_{j=2}^{6} a_j F_j + a_1(-F_1)$, після прирівнювання його до нуля отримаємо третю умову системи (11).

Коефіцієнтна умова при $(z-z_0)^{-4}$ має вигляд

$$\begin{aligned} 0 = &-15\alpha^4\beta^2 \sum_{i=1}^{6} F_i + \beta(a_1 \sum_{j=2}^{6} A_j - \sum_{j=2}^{6} a_j A_j - 6)\alpha + (\sigma_1 \sum_{i=1}^{6} F_i - \sum_{j=2}^{6} a_j F_j + a_1 \sum_{i=1}^{6} F_i)\alpha^4) + \\ &+\alpha(2\sum_{j=2}^{6} a_j - 4a_1 - a_1 \sum_{j=2}^{6} a_j A_j + \sum_{j=2}^{6} a_j^2 A_j) + (\sum_{i=1}^{6}(3a_i' A_i - B_i) - 2D + \sum_{j=2}^{6}(a_j A_j' + a_j' A_j) - \\ &-a_1' \sum_{j=2}^{6} A_j - a_1 \sum_{j=2}^{6} A_j')\alpha^2 + ((a_1 + \sigma_1)\sum_{j=2}^{6} a_j F_j - \sum_{j=2}^{6} a_j^2 F_j - \sigma_1 a_1 \sum_{j=2}^{6} F_j - \sigma_2 \sum_{i=1}^{6} F_i)\alpha^4 + \\ &+(\sum_{i=1}^{6}(a_1' - a_i')F_i)\alpha^5. \end{aligned} \quad (33)$$

Оскільки α, β довільні сталі, то коефіцієнти при α та β мають бути рівними нулеві. Прирівнюючи коефіцієнт при $\alpha^4 \beta^2$ до нуля, отримаємо другу умову системи (11). Прирівнявши коефіцієнт при $\alpha\ \beta$ до нуля і використовуючи першу умову системи (5), отримаємо другу умову цієї системи. Прирівнюючи коефіцієнт при $\alpha^4\ \beta$ до нуля і враховуючи співвідношення (33), отримаємо третю умову системи (11).

Далі, прирівнюючи до нуля коефіцієнт при α, отримаємо співвідношення

$$2\sum_{i=1}^{6} a_i + \sum_{i=1}^{6} a_i^2 A_i - a_1^2 A_1 - 6a_1 - a_1 \sum_{j=2}^{6} a_j A_j = 0 . \quad (34)$$

Оскільки вираз $-a_1^2 A_1 - 6a_1 - a_1 \sum_{j=2}^{6} a_j A_j$ в (34) рівний нулеві згідно другої умови системи (5), то рівність (34) можна записати у вигляді третього співідношення системи (5).

Прирівнюючи коефіцієнт при α^2 до нуля, отримаємо

$$-2D - \sum_{i=1}^{6}(B_i - 3a_i' A_i) - a_1' \sum_{j=2}^{6} A_j + \sum_{j=2}^{6} a_j A_j' - a_1 \sum_{j=2}^{6} A_j' + \sum_{j=2}^{6} a_j' A_j = 0 . \quad (35)$$

Враховуючи співівідношення (31), перепишемо рівність (35) у вигляді

$$2D + \sum_{i=1}^{6}(B_i - 3a_i' A_i) - \sum_{i=1}^{6} a_i' A_i - \sum_{j=2}^{6} a_j A_j' + a_1(-A_1') = 0 . \quad (36)$$

Ураховуючи співвідношення $-\sum_{i=1}^{6} a_i' A_i - \sum_{j=2}^{6} a_j A_j' + a_1(-A_1') = -(\sum_{i=1}^{6} a_i A_i)'$, бачимо, що рівність (36) являє собою першу умову системи (11).

3. Інтегрування рівнянь Шазі зі сталими коефіцієнтами

Алгоритм інтегрування рівняння Шазі зі сталими (фіксованими) коефіцієнтами розглянемо на прикладі. Нехай в рівнянні (4) коефіцієнти $a_k \ (k = \overline{1,6})$ мають вигляд

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = \frac{1}{2}, \quad a_6 = -\frac{1}{2} . \quad (37)$$

В подальшому використовується метод, який викладено в [6]. Обчислимо значення симетричних поліномів

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -\frac{21}{4}, \quad \sigma_3 = 0, \quad \sigma_4 = \frac{21}{4}, \quad \sigma_5 = 0, \quad \sigma_6 = -1 \quad (38)$$

і підставимо (37), (38) у співвідношення (10) . В результаті отримаємо рівняння п'ятого ступеня вигляду

$$(4\alpha_2+7)^2(4\alpha_2^3+7\alpha_2^2-7\alpha_2-4)=0\,. \qquad (39)$$

Корінь $\alpha_2=-7/4$ відразу виключимо з розгляду, оскільки він перетворює знаменники правих частин рівнянь (8) та (9) в нуль. Коренями другого множника лівої частини рівняння (39) є $\alpha_2=1$, $\alpha_2=\frac{\sqrt{57}-11}{8}$, $\alpha_2=\frac{-\sqrt{57}-11}{8}$. Для спрощення обчислень розглянемо корінь

$$\alpha_2=1\,. \qquad (40)$$

Підставивши значення (38), (40) у співвідношення (7)-(9), знайдемо коефіцієнти

$$A_1=-1,\quad A_2=1,\quad A_3=-\frac{13}{20},\quad A_4=\frac{13}{20},\quad A_5=-\frac{7}{5},\quad A_6=\frac{7}{5}\,. \qquad (41)$$

Після цього підставимо значення коефіцієнтів (37), (41) в систему (12) і отримаємо значення функцій B_k $(k=\overline{1,6})$:

$$B_1=\frac{81}{80}B_5-\frac{1}{80}B_6,\quad B_2=\frac{81}{80}B_6-\frac{1}{80}B_5,\quad B_3=B_5,\quad B_4=B_6\,, \qquad (42)$$

де $B_5,\ B_6$ – довільні аналітичні функції.

Підставимо значення коефіцієнтів (37), (41), (42) у перше рівняння системи (11) і з отриманого рівняння знайдемо функцію *D*:

$$D=-\frac{2}{3}(B_5+B_6)\,. \qquad (43)$$

Підставимо значення коефіцієнтів (37), (41), (42), (43) в систему (13) і знайдемо з перших чотирьох рівнянь отриманої системи функції C_k $(k=\overline{1,4})$, потім підставимо ці функції в п'яте і шосте рівняння цієї системи. Останні рівняння після деяких перетворень утворять систему

$$B_5B_6+B_5'=B_6^{\,2}+B_6',\quad B_5B_6+B_6'=B_5^{\,2}+B_5'\,,$$

яка має розв'язок

$$B_5=B_6\,. \qquad (44)$$

Враховуючи співвідношення (44), функції C_k $(k=\overline{1,4})$ можна зобразити таким чином

$$\begin{aligned}
C_1&=\frac{1}{28}\left(3E+6B_6^{\,2}+45C_5+25C_6+3B_6'\right),\\
C_2&=\frac{1}{28}\left(-3E-6B_6^{\,2}+25C_5+45C_6-3B_6'\right),\\
C_3&=\frac{1}{112}\left(75E+150B_6^{\,2}+250C_5+198C_6+75B_6'\right),\\
C_4&=\frac{1}{112}\left(-75E-150B_6^{\,2}+198C_5+250C_6-75B_6'\right),
\end{aligned} \qquad (45)$$

де $C_5,\ C_6$ – довільні аналітичні функції.

Підставимо значення коефіцієнтів (37), (41) – (45) в систему (14) і знайдемо з отриманої системи функції F_k $(k=\overline{1,4})$, після чого підставимо їх значення зі значеннями коефіцієнтів (37), (41) – (45) в три останні рівняння системи (11), які в результаті цих перетворень набудуть вигляду

$$5E'+2B_6(5E+10B_6^2-58C_5+58C_6+15B_6')+58C_6'+5B_6''=58C_5'\,,\ 2B_6(C_5+C_6)+C_5'+C_6'=0\,,$$
$$5E'+2B_6(5E+10B_6^2-2C_5+2C_6+15B_6')+2C_6'+5B_6''=2C_5'\,.$$

Розв'язок останньої системи має вигляд

$$E'=-(2EB_6+4B_6^{\,3}+6B_6B_6'+B_6''),\quad C_5'=-2B_6C_5,\quad C_6'=-2B_6C_6\,. \qquad (46)$$

Знову підставимо значеня коефіцієнтів (37), (41)--(46) в систему (14) і розв'яжемо її стосовно функцій F_k $(k=\overline{1,6})$:

$$F_k=0\quad (k=\overline{1,6})\,. \qquad (47)$$

Таким чином, при заданих сталих коефіцієнтах a_k $(k=\overline{1,6})$ вигляду (37), у випадку кореня $\alpha_2=1$ ми отримуємо такі значення коефіцієнтів рівняння (4): A_k $(k=\overline{1,6})$ мають вигляд (41); $B_j=B_6$ $(j=\overline{1,5})$, C_k $(k=\overline{1,6})$ мають вигляд (45); F_k $(k=\overline{1,6})$ мають вигляд (47); $D=-\frac{4}{3}B_6$; виконується також співвідношення (46) і B_6 – довільна аналітична функція .

Розглянемо випадок, коли функція $B_6=0$. Тоді функції $E\equiv\alpha$, $C_5\equiv\beta$, $C_6\equiv\gamma$ – сталі. У цьому випадку рівняння (4) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
w'''&=\left(\frac{1}{w-1}+\frac{1}{w+1}+\frac{1}{w-2}+\frac{1}{w+2}+\frac{1}{w-1/2}+\frac{1}{w+1/2}+\right)w'w''+\\
&+\left(\frac{1}{w+1}-\frac{1}{w-1}+\frac{13}{20(w+2)}-\frac{13}{20(w-2)}+\frac{7}{5(w+1/2)}-\frac{7}{5(w-1/2)}\right)w'^3+\\
&+\left(\frac{25\beta-3\alpha+45\gamma}{28(w+1)}+\frac{25\gamma+3\alpha+45\beta}{28(w-1)}+\frac{198\beta-75\alpha+250\gamma}{112(w+2)}+\frac{198\gamma+75\alpha+250\beta}{112(w-2)}+\alpha\right)w'+\left(\frac{\beta}{w-1/2}+\frac{\gamma}{w+1/2}\right)w'.
\end{aligned} \qquad (48)$$

Рівняння (48) є автономним диференціальним рівнянням, порядок якого можна понизити на одиницю за допомогою стандартної заміни

$$w' = p(w), \quad w'' = p(w)p'(w), \quad w''' = p(w)(p'^2(w) + p(w)p''(w)) .$$

Отримане рівняння можна проінтегрувати:

$$p = \pm \frac{1}{2\sqrt{7}}(f(w))^{1/2} , \tag{49}$$

де

$$f(w) = (3 + 28w^2)\alpha + 10(\beta(1 + 7w) + \gamma(7w - 1)) + 28w(1 + w^2)C_2 + \\ + \frac{56\sqrt{2w^2 - 5w + 2}\ \sqrt{2w^4 + 5w^3 - 5w - 2} + (4w^4 + 33w^2 + 4)C_1}{\sqrt{2w^6 - 21w^4 + 21w^2 - 4}} , \tag{50}$$

C_1, C_2 – довільні сталі.

Рівняння (49), (50) легко інтегрується як неповне рівняння (відсутня зміна *z*).

Для того, щоб побудувати наближений розв'язок і його графік для конкретних значень параметрів α, β, γ, довільних сталих C_1, C_2 і початкової умови $w(z_0) = w_0$, можна використати сучасні системи символьних обчислень, зокрема, систему *Mathematica* [10]. Зокрема, для набору значень $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$, $C_1 = 1, C_2 = 2$ та початкової умови $w(0) = 0$ за допомогою функцій NDSolve та Plot [7, 10] визначимо шуканий частинний розв'язок і побудуємо його графік в околі нуля (див. рис.1).

Зауважимо, що диференціальне рівняння (48) має розв'язок в елементарних функціях. Дійсно, нехай $C_1 = 0, \beta = -\frac{4C_2 + 3\alpha}{20}, \gamma = \frac{3\alpha - 4C_2}{20}$. Тоді для цих значень рівняння (49), (50) має вигляд $w' + 4\sqrt{C_2 w + \alpha} = 0$, а його загальний розв'язок записується за допомогою формули

$$w = \frac{\alpha}{C_2}\left(\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\alpha}(z - C_3)}{2}\right) - 1\right) . \tag{51}$$

На рис.2 подано графік отриманого розв'язку в дійсній площині для значень параметрів $\alpha = 1, C_2 = 1, C_3 = 2$.

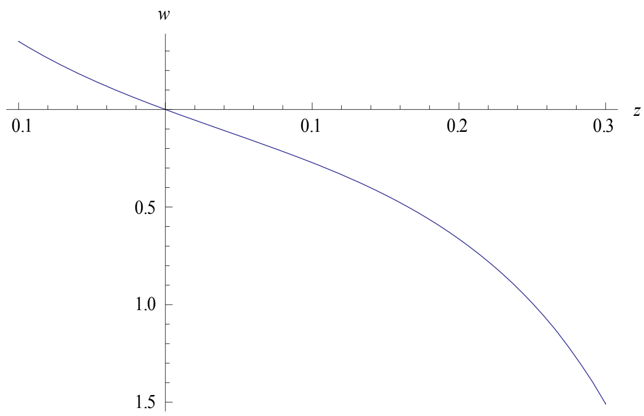


Рис.1. Графік частинного розв'язку при $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$, $C_1 = 1, C_2 = 2$, $w(0) = 0$

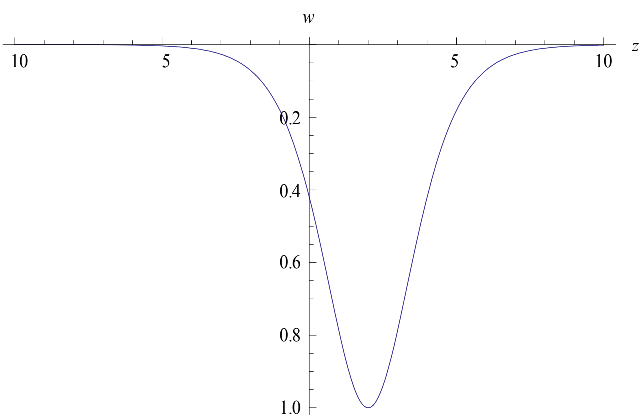


Рис. 2. Графік частинного розв'язку при $\alpha = 1, \beta = -7/20, \gamma = -1/20$, $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 2$

4. Висновки

Дано детальне виведення 22 умов для системи Шазі, які виникають при розв'язанні задачі про належність рівняння Шазі з шістьма особливими точками до рівнянь Пенлеве типу та представлено метод побудови рівняння Шазі з шістьма особливими точками, коефіцієнти якого задовольняють систему Шазі.

1. *Добровольский В.А.* Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – К., 1974. 2. *Лукашевич Н.А.* К теории уравнения Шази // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т.29, № 2. – С. 353-357. 3. *Мартынов И.П., Чичурин А.В.* Использование системы *Mathematica* при решении системы уравнений Шази // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: Тезисы докладов межд. конф., Минск, 2007.– Минск, ИМ НАНБ, 2007. – С. 89 – 91. 4. *Мартынов И.П., Чичурин А.В.* О решении системы уравнений Шази // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12. № 1. – С.92 – 98. 5. *Мартынов И.П.* О некоторых задачах аналитической теории дифференциальных уравнений, решаемых в Гродненском государственном университете // Веснік Гродненского дзяржаунага універсітэта. – 2003, сер. 2, № 2(22), с. 15-25. 6. *Чичурин А.В.* Уравнение Шази и линейные уравнения класса Фукса. – М., 2003. 7. *Прокопеня А.Н., Чичурин А.В.* Применение системы *Mathematica* к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: БГУ, 1999. 8. *Chazy J.* Sur les equations differentielles du troisieme ordre et d'ordre superieur, don't l'integrale generale a ses points critiques fixes // Acta Math. – 1911. – Vol. 34. – P. 317-385. 9. *Painleve P.* Lecons sur les theorie analytique des equations differentielles. Professies a Stokholm. – Paris, 1897. 10. *Wolfram S.* The Mathematica Book. – 4-th ed. – Wolfram Media/ Cambridge University Press, 1999.

Надійшла до редколегії 25.02.10

УДК 517.9 + 531.19

В. Герасименко, д-р фіз.-мат. наук, А. Бодрова, студ., М. Боровченкова, студ.

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ СИСТЕМ ЧАСТИНОК З ДИСИПАТИВНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Для одновимірної системи частинок з дисипативною взаємодією побудована ієрархія рівнянь ББГКІ, якою описується еволюція гранульованих середовищ. Доведено існування розв'язків задачі Коші цієї ієрархії для початкових даних з простору послідовностей обмежених функцій. Розглянуто також питання строгого виводу нелінійних кінетичних рівнянь таких систем.

For a one-dimensional system of particles with a dissipative interaction we construct the BBGKY hierarchy which describes the evolution of granular materials. For initial data from the space of sequences of bounded functions the existence of a solution of the Cauchy problem of this hierarchy is proved. We discuss also a problem of the rigorous derivation of nonlinear kinetic equations of such systems.

1. Вступ

Гранульовані середовища становлять значний інтерес не лише з точки зору їх застосувань, але і як приклад динамічних багатокомпонентних систем, статистичні (колективні) властивості яких відрізняються від аналогічних властивостей звичайних рідин і газів [3], [7], [10]. Наприклад, ефект колапсу, утворення кластерів та інших структур [10], немаксвелівський розподіл швидкостей гранул в рівноважному стані [7].

Дисипативний характер взаємодії між гранулами призводить до ряду нетривіальних з математичної точки зору особливостей при дослідженні рівнянь, якими моделюють еволюцію станів таких систем. В сучасних роботах [1], [2], [9] в основу опису мікроскопічної еволюції гранульованих систем покладено кінетичні рівняння типу рівнянь Больцмана та Больцмана-Енського. Відомо [4], що такі кінетичні рівняння у випадку системи пружних куль в границі Больцмана-Ґреда описують асимптотику розв'язку ієрархії рівнянь ББГКІ (ієрархії Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Іована). Внаслідок сингулярного характеру потенціала взаємодії між гранулами виникає проблема строгого обґрунтування ієрархії рівнянь ББГКІ, що описують такі системи, та їх зв'язку з зазначеними кінетичними рівняннями.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні ієрархії рівнянь ББГКІ для систем частинок з дисипативною взаємодією та побудові розв'язку задачі Коші для цих рівнянь у відповідних функціональних просторах.

2. Дисипативна динаміка багаточастинкових систем

Для гранульованих речовин припускається, що середня довжина вільного пробігу гранул значно більша за їх типовий розмір і динаміка таких систем визначається дисипативною природою короткодіючої взаємодії між гранулами. Тому розглядаємо одновимірну систему n твердих куль одиничної маси з діаметром σ, що рухаються в просторі $\mathbb{R}$. Фазові координати *i*-тої частинки, $1 \le i \le n$, будемо позначати $(q_i, p_i) \equiv x_i$, де $q_i \in \mathbb{R}$ – координати її центру, а $p_i \in \mathbb{R}$ – імпульс. Підмножина фазового простору системи n частинок $W_n^\sigma \equiv \{(q_1,\ldots,q_n) \in \mathbb{R}^n \,\|\, q_i - q_j| < \sigma$ *хоча б для однієї пари* $(i,j):\ i \neq j \in \{1,\ldots,n\}\}$ – множина заборонених конфігурацій.

Фазові траєкторії системи твердих куль визначені майже скрізь на фазовому просторі $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, тобто крім певної множини $\mathfrak{M}_n^0$ лебегової міри нуль [4]. До множини $\mathfrak{M}_n^0$ належать такі точки фазового простору $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, що в процесі еволюції системи: (a) відбувається одночасне розсіяння більше ніж двох частинок, (b) одночасне розсіяння більше ніж однієї пари частинок, (c) нескінченне число зіткнень за скінченний проміжок часу.

Якщо $(q_1,...,q_n) \in \partial W_n^\sigma$, частинки взаємодіють (непружньо розсіюються), тоді імпульси p_i^*, p_j^* частинок після взаємодії визначаються через імпульси p_i, p_j частинок до взаємодії з таких рівнянь:

$$p_i^* - p_j^* = -e(p_i - p_j),\ \ p_i^* + p_j^* = p_i + p_j, \tag{1}$$

де $e \in [0,1]$ – коефіцієнт відновлення, яким характеризується величина дисипації енергії при взаємодії (міра непружності розсіяння гранул). Перше рівняння в (1) є законом розсіяння, який у випадку пружного розсіяння може бути замінено на закон збереження енергії, друге рівняння в (1) є законом збереження імпульсу.

Введемо параметр $\varepsilon = \frac{1-e}{2} \in [0,\frac{1}{2})$, тобто границя $\varepsilon \to 0$ є границею пружного розсіяння. Тоді розв'язок рівнянь (1) – значення імпульсів частинок після розсіяння, має вигляд

$$p_i^* = p_j + \varepsilon(p_i - p_j),\ \ p_j^* = p_i - \varepsilon(p_i - p_j). \tag{2}$$

Зауважимо, що одновимірна система частинок цілком моделює характерні властивості гранульованих речовин, оскільки в багатовимірному випадку при непружному розсіянні дисипує тільки нормальна компонента відносного імпульсу частинок.

Відповідно значення імпульсів частинок до розсіяння визначаються такими виразами

$$p_i' = p_j + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}(p_i - p_j),\ \ p_j' = p_i - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon - 1}(p_i - p_j). \tag{3}$$

В просторі послідовностей інтегровних функцій L_n^1 визначена група еволюційних операторів $S_n(t)$ системи n гранул

$$(S_n(t)f_n)(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases} f_n(X_1(t,x_1,\dots,x_n),\dots,X_n(t,x_1,\dots,x_n)), & \text{ÿêù î } (x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus W_n^{\sigma}))\setminus\mathfrak{M}_n^0; \\ 0, & \text{ÿêù î } (q_1,\dots,q_n)\in W_n,(x_1,\dots,x_n)\bigcup\mathfrak{M}_n^0, \end{cases} \tag{4}$$

де $X_i(t,x_1,\dots,x_n)$ – фазова траєкторія *i*-тої частинки системи *n* частинок, яка визначається в такий же спосіб як для системи пружних куль [4]. Основні властивості еволюційного оператора $S_n(t)$ описано в монографіях [4], [9].

Для нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями $f_n\in L^1_{n,0}\subset L^1_n$ в сенсі збіжності по нормі простору L^1_n існує границя, якою визначається інфінітезимальний генератор групи операторів (4)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(S_n(-t)f_n-f_n)=-\mathcal{L}_n f_n, \tag{5}$$

де оператор $\mathcal{L}$ – генератор рівняння Ліувілля [4], який визначається через оператор Ліувілля системи невзаємодіючих частинок

$$\mathcal{L}_n f_n=(\mathcal{L}_n^o)_{|\partial W_n^{\sigma}} f_n=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial}{\partial q_i}f_n(x_1,\dots,x_n)_{|\partial W_n^{\sigma}}$$

з певними граничними умовами [9] на $\partial W_n^{\sigma}=\{(q_1,\dots,q_n)\in\mathbb{R}^n \,||\, q_i-q_j|=\sigma$ *хоча б для однієї пари* $(i\neq j)\in(1,\dots,n)\}$.

Сформулюємо ще одну необхідну надалі властивість групи операторів (4). При $t>0$ розглянемо такий функціонал

$$(S_2(-t)f_2-S_1(-t)S_1(-t)f_2,\varphi_2)\doteq\frac{1}{2}\int\limits_{(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^2}dx_1dx_2(S_2(-t)f_2(x_1,x_2)-S_1(-t)S_1(-t)f_2(x_1,x_2))\varphi_2(x_1,x_2). \tag{6}$$

Згідно означення (4), якщо φ_2 – неперервно диференційована функція та f_2 – інтегровна функція, то функціонал (6) існує. В функціоналі (6) оператори $S_2(-t)$ і $S_1(-t)S_1(-t)$ на інтегровних функціях визначаються відповідно такими формулам

$$(S_2(-t)f_2)(x_1,x_2)=\begin{cases} f_2(q_1+(-p_1\tau+p_1'\ (-t+\tau))\theta-(1-\theta)p_1t,\theta p_1'\ +(1-\theta)p_1, & \\ q_2+(-p_2\tau+p_2'\ (-t+\tau))\theta-(1-\theta)p_2t,\theta p_2'\ +(1-\theta)p_2), & \text{якщо } (q_1-q_2)(p_1-p_2)<0,(q_1,q_2)\notin W_2^{\sigma}; \\ f_2(q_1-p_1t,p_1,q_2-p_2t,p_2), & \text{якщо } (q_1-q_2)(p_1-p_2)>0,(q_1,q_2)\notin W_2^{\sigma}; \\ 0, & \text{якщо } (q_1,q_2)\in W_2^{\sigma}. \end{cases}$$

$$(S_1(-t)S_1(-t)f_2)(x_1,x_2)=f_2(q_1-p_1t,p_1,q_2-p_2t,p_2),$$

де $\tau=\tau(x_1,x_2)$ – момент розсіяння частинок [3], $\theta\equiv\theta(-t+\tau)$ – характеристична функція. Результат обчислення значення функціоналу (6) можна подати у формі аналога рівняння Дюамеля.

Лема. *Для* $t>0$ *справедлива рівність*

$$(S_2(-t)f_2-S_1(-t)S_1(-t)f_2,\varphi_2)=(\int\limits_0^t d\tau\, S_2(-t+\tau)\mathcal{L}_{int}(1,2)S_1(-\tau)S_1(-\tau)f_2,\varphi_2), \tag{7}$$

де

$$\left(\mathcal{L}_{int}(1,2)f_2\right)(x_1,x_2)\doteq$$
$$\doteq\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}((1-\theta)\delta(q_1-\sigma-q_2)+\theta\delta(q_1+\sigma-q_2))f_2(q_1,p_1',q_2,p_2')-(\theta\delta(q_1-\sigma-q_2)+(1-\theta)\delta(q_1+\sigma-q_2))f_2(x_1,x_2), \tag{8}$$

δ *– функція Дірака,* $p_1'\ ,p_2'$ *– значення імпульсів частинок до розсіяння (3) та* $\theta\doteq\theta(p_2-p_1)$ *– характеристична функція.*

Доведення Леми подібне доведенню аналогічного твердження у випадку системи пружних куль [9] з урахуванням того факту, що якобіан перетворення від змінних (q_1,p_1,q_2,p_2) до $(q_1,p_1'\ ,\tau,p_2'\ )$ дорівнює $\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}|\,p_1-p_2\,|$. Для системи n частинок, враховуючи, що фазові траєкторії визначені всюди на фазовому просторі крім множини $\mathfrak{M}_n^0$ лебегової міри нуль, твердження леми відповідно узагальнюється в такий спосіб: $\mathcal{L}_{int}(1,..,n)=\sum\limits_{1=i<j}^{n}\mathcal{L}_{int}(i,j)$, де оператор $\mathcal{L}_{int}(i,j)$ визначається формулою (8).

3. Ієрархія рівнянь Боголюбова для гранульованого газу

Введемо такі позначення: $Y \equiv (x_1,\ldots,x_s)$, $X \equiv (x_1,\ldots,x_{s+n})$, $d(X \setminus Y) \equiv dx_{s+1}\ldots dx_{s+n}$, $X_Y = (Y, x_{s+1},\ldots,x_{s+n})$ – множина, елементами якої є множина Y і елементи $x_{s+1},\ldots,x_{s+n}$, та $|X| = s+n$ – число елементів множини X.

Якщо $F(0) \in L^1$, розв'язок $F(t) = (1, F_1(t,x_1),\ldots,F_s(t,x_1,\ldots,x_s),\ldots)$ початкової задачі для ієрархії рівнянь ББГКІ визначається розкладом [6]

$$F_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)} d(X \setminus Y) \mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t, X_Y) F_{|X|}(0,X), \tag{9}$$

по групах частинок, еволюція яких описується кумулянтом $\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t, X_Y)$ відповідного порядку еволюційних операторів (4)

$$\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t, X_Y) \doteq \sum_{P: X_Y = \bigcup_l X_l} (-1)^{|P|-1}(|P|-1)! \prod_{X_l \subset P} S_{|X_l|}(-t, X_l), \tag{10}$$

де $\sum_{\mathrm{P}}$ – це сума по всім можливим розбиттям P множини X_Y на $|P|$ таких підмножин $X_l \subset X_Y$, $X_k \cap X_l = \varnothing$, $k \neq l$, що множина Y належить одній з підмножин X_l. Зауважимо, що порядок кумулянта $\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t)$ визначається кількістю елементів множини X_Y (множина X_Y складається з $1+|X \setminus Y|$ елементів).

Сформулюємо необхідні надалі властивості кумулянтів. Для кумулянта (10) порядку $(1+|X\setminus Y|)$ справедлива така рівність

$$\mathfrak{A}_{1+|X\setminus Y|}(t, X_Y) = \sum_{\substack{Z \subset X\setminus Y, \\ Z \neq \varnothing}} \mathfrak{A}_2(t,Y,Z) \sum_{\mathrm{P}: X\setminus(Y\cup Z) = \bigcup_l X_l} (-1)^{|\mathrm{P}|} |\mathrm{P}|! \prod_{X_l \subset \mathrm{P}} \mathfrak{A}_1(t, X_l), \tag{11}$$

де $\sum_Z$ – сума по всім непорожнім підмножинам Z з множини $X \setminus Y$. Згідно рівності (7) маємо

$$(\mathfrak{A}_2(t,Y,Z)f, \varphi) = \left(\int_0^t d\tau S_{|Y\cup Z|}(-t+\tau, Y, Z) \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(Y,Z) S_{|Y|}(-\tau, Y) S_{|Z|}(-\tau, Z) f, \varphi \right).$$

Оскільки група операторів (4) визначена всюди на фазовому просторі крім множини $\mathfrak{M}_n^0$ лебегової міри нуль, то для $n > 2$ в сенсі збіжності по нормі простору інтегровних функцій справедлива така рівність: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t} \mathfrak{A}_n(t,Y) f_n(Y) = 0.$

Враховуючи такі властивості, знаходимо еволюційні рівняння, яким задовольняє послідовність (9). В результаті встановлюємо, що еволюція всіх можливих станів системи твердих куль з дисипативною взаємодією описується послідовністю $F(t) = (1, F_1(t,x_1),\ldots,F_s(t,x_1,\ldots,x_s),\ldots)$, яка в просторі послідовностей інтегровних функцій є розв'язком такої абстрактної задачі Коші

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = (-\mathcal{L} + \mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}) F(t), \tag{12}$$

$$F(t)_{|t=0} = F(0), \tag{13}$$

де $-\mathcal{L} + \mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}$ – генератор ієрархії еволюційних рівняннь (12), $-\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(-\mathcal{L}_n)$ – оператор Ліувілля (5) та $\mathfrak{a}$ – аналог оператора знищення квантової теорії поля [4]: $(\mathfrak{a} f)_n(x_1,\ldots,x_n) = \int dx_{n+1} f_{n+1}(x_1,\ldots,x_{n+1})$.

Для $t > 0$ інтеграл зіткнень $\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t)$ в ієрархії (12) покомпонентно має вигляд

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t))_n(x_1,\ldots,x_n) = &\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} dP P(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} F_{n+1}(t, x_1;\ldots;q_i, p_i^*(p_i,P);\ldots;x_n; q_i - \\
&-\sigma, p_{n+1}^*(p_i,P)) - F_{n+1}(t,x_1;\ldots;x_n;q_i-\sigma, p_i+P)) + \\
&+\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} dP P(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} F_{n+1}(t,x_1;\ldots;q_i,\tilde{p}_i^*(p_i,P);\ldots;x_n;q_i+\sigma,\tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)) - \\
&-F_{n+1}(t,x_1;\ldots;x_n;q_i+\sigma,p_i-P)),
\end{aligned} \tag{14}$$

де вирази

$$p_i^*(p_i,P) = p_i - P + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P, \quad p_{n+1}^*(p_i,P) = p_i - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P$$

та

$$\tilde{p}_i^*(p_i,P)=p_i+P-\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P,\ \ \tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)=p_i+\frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}P$$

є значеннями імпульсів відповідних частинок до зіткнення (3). У випадку $t<0$ для інтегралу зіткнень $\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t)$ маємо

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}\mathcal{L}_{int}F(t))_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty dPP(F_{n+1}(t,x_1;\ldots;q_i,p_i;\ldots;x_n;q_i-\sigma,p_i-P)-\\ -(1-2\varepsilon)^2F_{n+1}(t,x_1;\ldots;q_i,p_i^*(p_i,P);\ldots;x_n;q_i-\sigma,p_{n+1}^*(p_i,P))+\\ +\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty dPP(F_{n+1}(t,x_1;\ldots;q_i,p_i;\ldots;x_n;q_i+\sigma,p_i+P))-\\ -(1-2\varepsilon)^2F_{n+1}(t,x_1;\ldots;q_i,\tilde{p}_i^*(p_i,P);\ldots;x_n;q_i+\sigma,\tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)),\end{aligned}\tag{15}$$

де вирази $p_i^*(p_i,P)=p_i+P-\varepsilon P,$ $p_{n+1}^*(p_i,P)=p_i+\varepsilon P$ та $\tilde{p}_i^*(p_i,P)=p_i-P+\varepsilon P,$ $\tilde{p}_{n+1}^*(p_i,P)=p_i-\varepsilon P$ є значеннями імпульсів відповідних частинок після зіткнення (2).

Зауважимо, що формальною границею ієрархії (12) при $\varepsilon\to 0$ є ієрархія рівнянь ББГКІ для одновимірної системи пружних куль [5].

Аналогічно результату, який встановлено для системи пружних куль [7],[8], на основі рівності (7) та зображення (11) можна довести існування розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (12), (13) для початкових даних з простору послідовностей обмеженних функцій. Справедлива така теорема.

Теорема. *Якщо* $|F_n(0)|\le const\xi^n\exp\left(-\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i^2}{2}\right)$, *то функції* $F_s(t,x_1,\ldots,x_s)$ *існують і ряд (9), яким вони визначаються, збігається рівномірно відносно* $(x_1,\ldots,x_s)$ *з довільного компакту при* $t\in(-t_0,t_0)$, *де* $t_0=(2^3\sqrt{2\pi}\xi\beta)^{-1}$. *Послідовність функцій* $F_s(t), s\ge 1,$ *є єдиним слабким розв'язком задачі Коші (12)-(13).*

4. Висновки

В роботі на основі динаміки багаточастинкової системи дисипативно взаємодіючих частинок розвинуто математично строгий
підхід до опису гранульованих середовищ.

Для сингулярного потенціалу взаємодії, який описує непружне розсіяння гранул, в просторі послідовностей інтегровних функцій обґрунтовано вивід ланцюжка рівнянь Боголюбова (ієрархію ББГКІ) (12)-(15). Доведено існування розв'язку в просторі послідовностей обмежених функцій, якими описуються стани нескінченних систем.

На основі цього результату можна строго обґрунтувати кінетичні рівняння, які *a priori* покладено в основу теорії гранульованих середовищ [2], [3], [7], [8], [10]. Дійсно [6,7], границя Больцмана-Ґреда $\lim_{\sigma\to 0}F_1(t)=f_1(t)$ розв'язку (9) ієрархії рівнянь (12)-(15) визначається кінетичним рівнянням типу Больцмана [1], [10]

$$\frac{\partial}{\partial t}f_1(t,q,p)=-p\frac{\partial}{\partial q}f_1(t,q,p)+\int_{-\infty}^{+\infty}dp_1\left|p-p_1\right|\left(\frac{1}{(1-2\varepsilon)^2}f_1(t,q,p')f_1(t,q,p_1')-f_1(t,q,p)f_1(t,q,p_1)\right),$$

квазіпружна границя розв'язку $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ f_1(t)=f^0(t)$ якого задовольняє кінетичне рівняння Мак Намари (або рівняння тертя) [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}f^0(t,q,p)=-p\frac{\partial}{\partial q}f^0(t,q,p)+\frac{\partial}{\partial p}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}d\tilde{p}\left|\tilde{p}-p\right|(\tilde{p}-p)f^0(t,q,\tilde{p})f^0(t,q,p)\right).$$

Зауважимо, що такого типу нелінійні кінетичні рівняння описують характерні властивості гранульованих середовищ [7], [10].

1. *Benedetto D., Caglioti E., Pulvirenti M.* Collective Behavior of One-Dimensional Granular Media // Modelling in Appl. Sci., Birkhäuser, 2000.-P. 81-110. 2. *Brey J.J., Dufty J.W., Santos A.* Dissipative Dynamics for Hard Spheres // J. Stat. Phys.-1997.-87.-P. 1051-1068. 3. *Cercignani C.* Recent Developments in the Mechanics of Granular Materials // Fisica Matematica e Ingegneria delle Strutture: Rapporti e Compatibilita. Pitagora Editrice. Bologna. 1995.-P.119 -132. 4. *Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.- 252p. 5. *Gerasimenko V.I.* On Solutions of Bogolyubov Equations for One-dimensional System of Hard Spheres // Teor. Mat. Fiz.-1992.-91.-C. 120-131. 6. *Gerasimenko V.I., Ryabukha T.V., Stashenko M.O.* On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions.// J. Phys. A: Math. Gen. -2004.-37. – P. 9861-9872. 7. *Goldhirsch I.* Scales and Kinetics of granular flows // Chaos.-1999.-9.-P. 659-672. 8. *Mac Namara S., Young W.R.* Kinetics of a One-Dimensional Granular Medium in Quasielastic Limit // Phys. Fluids.-1993.-A.-5.-P. 34-45. 9. *Petrina D.Ya.* Stochastic Dynamics and Boltzmann hierarchy. – Kyiv: Inst. Math., 2008.- 400p. 10. *Toscani G.* The Large-Time Behavior of Nonconservative Evolution Equations // Kinetic Methods for Nonconservative and Reacting Systems. Seconda Universita di Napoli., 2005.-16.-P. 145-320.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 517.9+531.19+530.145

Ж. Цвір, асп.

КЛАСТЕРНІ РОЗКЛАДИ В ТЕОРІЇ КВАНТОВИХ КІНЕТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Доведено існування маргінальних функціоналів, які виникають при побудові квантових кінетичних рівнянь. Сформульовано кінетичні кластерні розклади кумулянтів груп операторів рівнянь фон Неймана та на їх основі побудовано оператори розсіяння, якими визначається кожний член розкладів маргінальних функціоналів.

We prove the existence of kinetic functionals that arise under construction of quantum kinetic equations. The kinetic cluster expansions of cumulants of groups of the von Neumann equations are formulated and on its base the scattering operators which define every term of kinetic functional expansions are constructed.

1. Вступ

В останні роки спостерігається значний прогрес у розвитку математичної теорії квантових кінетичних рівнянь [1],[5], [8], [10-11]. Один з прикладів – строге обґрунтування квантових кінетичних рівнянь, що описують Бозе конденсат [2-4], [7], [9], [12].

Серед проблем, що виникають при виводі кінетичних рівнянь з динаміки систем частинок, одна з основних полягає в доведенні існування розкладів для кінетичних (маргінальних) функціоналів, які вперше на основі теорії збурень сформулював М.М. Боголюбов [1]. В роботі запропоновано альтернативний підхід до побудови таких функціоналів – метод кінетичних кластерних розкладів.

Мета роботи полягає в побудові явного вигляду зазначених маргінальних функціоналів на основі кінетичних кластерних розкладів та встановленні умов збіжності рядів, якими вони визначаються.

Розглянемо квантову систему нефіксованої (довільної, але скінченної) кількості тотожних безспінових частинок одиничної маси в просторі $\mathbb{R}^{\nu}$, $\nu \geq 1$. Гамільтоніан такої системи – це самоспряжений оператор, який в підпросторі нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями $\psi_n \in L_0^2(\mathbb{R}^{\nu n}) \subset L^2(\mathbb{R}^{\nu n})$ діє за формулою

$$H_n \psi_n = -\frac{\hbar^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{q_i}\psi_n + \sum_{i_1<i_2=1}^{n}\Phi(q_{i_1},q_{i_2})\psi_n, \tag{1}$$

де Φ – парний потенціал взаємодії, що задовольняє умовам Като [10], $h = 2\pi\hbar$ – стала Планка.

Введемо деякі означення. Будемо розглядати стани системи, які належать простіру $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ ядерних операторів з нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)} = \mathrm{Tr}_{1,\ldots,n} \,|\, f_n(1,\ldots,n)\,|,$$

де $\mathrm{Tr}_{1,\ldots,n}$ – частинний слід по $1,\ldots,n$ координатам.

Введемо группу операторів, якою визначається розв'язок рівнянь фон Неймана

$$\mathcal{G}_n(-t)f_n := e^{-\frac{i}{\hbar}tH_n} f_n e^{\frac{i}{\hbar}tH_n}. \tag{2}$$

В просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_n)$ відображення (2): $t \to \mathcal{G}_n(-t)f_n$ – сильно неперервна група ізометричних операторів [10].

Еволюція станів описується послідовністю маргінальних операторів густини, що задовольняють квантову ієрархію рівнянь ББГКІ:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}F_s(t,Y) = -\mathcal{N}_s(Y)F_s(t,Y) + \sum_{i=1}^{s}\mathrm{Tr}_{s+1}(-\mathcal{N}_{\mathrm{int}})(i,s+1)F_{s+1}(t,Y,s+1), \\ &F_s(t)|_{t=0} = F_s(0), \quad s \geq 1, \end{aligned} \tag{3}$$

де $Y \equiv (1,\ldots,s)$, оператори $\mathcal{N}_s$ та $\mathcal{N}_{\mathrm{int}}$ визначаються в підпросторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}_s) \subset \mathfrak{L}_0^1(\mathcal{H}_s)$ такими формулами

$$\mathcal{N}_s f_s := -\frac{i}{\hbar}(f_s H_s - H_s f_s),$$

$$\mathcal{N}_{\mathrm{int}}(i,j) f_s := -\frac{i}{\hbar}(f_s\,\Phi(i,j) - \Phi(i,j)\,f_s).$$

Розглядаємо початкові дані, які задовольняють умові "хаосу", тобто в початковий момент в системі відсутні кореляції. Для системи тотожних частинок, що задовольняють статистиці Максвелла-Больцмана, маємо

$$F(0) = (I, F_1(0,1),\ldots,\prod_{i=1}^{n} F_1(0,i),\ldots). \tag{4}$$

Початкові данні (4) – типовий приклад стану при кінетичному описі багаточастинкових систем, оскільки в цьому випадку стан характеризується одночастинковим оператором густини.

Розв'язок квантової ієрархії ББГКІ з початковими даними (4) для $s \geq 1$ визначається такими розкладами [5]

$$F_s(t,1,\ldots,s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{A}_{1+n}(t)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(0,i), \tag{5}$$

де $\mathfrak{A}_{1+n}(t) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\mathcal{G}_{s+n-k}(-t,1,\ldots,s+n-k)$ – редукований кумулянт [8] груп операторів (2).

Для $F_1(0)\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ ряд (5) збігається по нормі цього простору і справедлива така оцінка:

$$\|F_s(t)\| \le \|F_1(0)\|^s \exp\left(2\|F_1(0)\|\right), \quad s\ge 1. \tag{6}$$

Оскільки початкові дані (4) задані через одночастинковий оператор густини $F_1(0)$, то задача Коші для квантової ієрархії ББГКІ (3), (4) не є цілком визначеною початковою задачею, тому що початкові дані для кожного невідомого оператора густини $F_s(t,1,\ldots,s), \quad s\ge 1$, в ієрархії рівнянь (3) не є незалежними. Природно виникає можливість переформулювання початкової задачі (3), (4) як нової задачі Коші для оператора густини $F_1(t)$ з незалежними початковими данними $F_1(0)$ та послідовності маргінальних функціоналів $F_s(t,1,\ldots,s\mid F_1(t)), \quad s\ge 2.$ Для знаходження цих функціоналів потрібно визначити $F_1(0)$ через $F_1(t)$ з розкладу (5) і виключити їх з виразу (5) для $s\ge 2$.

2. Існування маргінальних функціоналів

Розглянемо ряд (5) для $s=1$ як рівняння в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ відносно оператора $F_1(0)$ з заданим оператором $F_1(t,1)\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$. Визначимо в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ нелінійне відображення A, яке для довільного $t\in\mathbb{R}^1$ діє на елементи $f\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ згідно з формулою

$$(A(f))(1) := F_1^0 - \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{G}_1(t,1)\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{2,..,n+1}\mathfrak{A}_{n+1}(t)\prod_{i=1}^{n+1} f(i), \tag{7}$$

де $\mathcal{G}_1(t,1)F_1(t,1)\equiv F_1^0$. Таким чином в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ маємо таке нелінійне рівняння

$$f = A(f). \tag{8}$$

В банаховому просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ визначимо область $\mathbb{S}(F_1^0;R)$, яка є кулею довільного радіусу $R<\infty$ з центром в точці $F_1^0=\mathcal{G}_1(t,1)F_1(t,1)$

$$\mathbb{S}(F_1^0;R)\equiv\{f\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H}) : \|f-F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\le R\}.$$

Тоді для рівняння (8) справедливе таке твердження

Лема. *Якщо виконується умова*

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} < \min(x(R), y_1(R)). \tag{9}$$

де $x(R)$, $y_1(R)$, $y_0(R)$ *є розв'язками рівнянь* $x(e^{2x}-1)=R$, $y_1e^{2y_1}=y_0(R)$, $e^{2y_0}(2y_0+2R+1)=2e^{-2R}$ *відповідно, то в області* $\mathbb{S}(F_1^0,R)\in\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ *існує єдиний розв'язок рівняння (8).*

Доведення. Покажемо, що нелінійний оператор (7) відображає область $\mathbb{S}(F_1^0;R)$ в себе і є стискуючим відображенням. Дійсно, оскільки згідно оцінці (6) справедлива нерівність

$$\|A(f)-F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}\|f\|^{n+1}_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} = \|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}(e^{2\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}}-1).$$

Тоді нелінійний оператор (7) відображає область $\mathbb{S}(F_1^0;R)$ в себе, якщо виконується умова

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\le x(R),$$

де $x(R)$ – розв'язок рівняння $x(e^{2x}-1)=R$.

Знайдемо умову, при якій нелінійне відображення (7) є стискуючим. Нехай f_1, f_2 довільні елементи з області $\mathbb{S}(F_1^0;R)$, тобто якщо $f\in\mathbb{S}(F_1^0;R)$, то $\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\le\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}+R$. Тоді згідно означення (7) отримаємо:

$$\|A(f_1)-A(f_2)\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(n+1)(\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}+R)^n\|f_1-f_2\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})} =$$

$$=(e^{2(\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}+R)}(2(\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}+R)+1)-1)\|f_1-f_2\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}.$$

Отже, відображення A є стискуючим, якщо виконується умова

$$e^{2(\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}+R)}(2(\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}+R)+1)<2.$$

Згідно оцінки (6) для $s=1$ в просторі $\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})$ маємо

$$\|F_1^0\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\le\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\exp(2\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}),$$

тому можна переписати

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}\exp(2\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})})<y_0(R),$$

де $y_0(R)$ – розв'язок рівняння $e^{2y_0}(2y_0+2R+1)=2e^{-2R}$.

Остаточно маємо, що відображення (7) є стискуючим, якщо виконується така умова

$$\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}<y_1(R),$$

де $y_1(R)$ – розв'язок рівняння $y_1\exp^{2y_1}=y_0(R)$.

Таким чином, якщо виконується умова: $\|f\|_{\mathfrak{L}^1(\mathcal{H})}<\min(x(R),y_1(R)),$ то існує єдиний розв'язок нелінійного рівняння (8). Цей розв'язок визначається як рівномірна границя $\lim\limits_{n\to\infty}f^n$ послідовних наближень $f^{(n)}=A(f^{(n-1)})$ з $f^{(1)}=F_1^0=\mathcal{G}_1(t,1)F_1(t,1)$ в якості першого наближення. Це дає можливість для $s\geq 2$ розв'язок ієрархії ББГКІ вигляду (5) переписати в термінах функціоналів відносно добутків одночастинких операторів густини $F_1(t)$.

3. Кінетичні кластерні розклади

В попередньому розділі ми довели, що маргінальні функціонали $F_s(t,1,\ldots,s\mid F_1(t)),\ s\geq 2$, існують, якщо виконується умова (9). Для побудови явного вигляду маргінальних функціоналів $F_s(t,1,\ldots,s\mid F_1(t)),\quad s\geq 2$, сформулюємо метод кінетичних кластерних розкладів.

Представимо маргінальні функціонали $F_s(t,1,\ldots,s\mid F_1(t)),\quad s\geq 2,$ у вигляді розкладів за добутками одночастинкового оператора густини $F_1(t)$

$$F_s(t,1,\ldots,s\mid F_1(t)):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{Tr}_{s+1,\ldots,s+n}\mathfrak{V}_{1+n}(t)\prod_{i=1}^{s+n}F_1(t,i),\tag{10}$$

де $\mathfrak{V}_{1+n}(t),\quad n\geq 0$, еволюційні оператори, які визначаються з умови, що ці розклади повинні збігатися почленно з розв'язком (5) початкової задачі для квантової ієрархії ББГКІ.

Нехай $\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)$ – редукований кумулянт $(1+n)$-го порядку

$$\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\widehat{\mathcal{G}}_{s+n-k}(-t,1,\ldots,s+n-k),$$

операторів розсіяння

$$\widehat{\mathcal{G}}_n(t,1,\ldots,n)=\mathcal{G}_n(-t,1,\ldots,n)\prod_{i=1}^{n}\mathcal{G}_1(t,i).\tag{11}$$

Для $s\geq 2$ функціонал (10) та оператор густини $F_s(t)$ вигляду (5) почленно співпадають, якщо еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t),\quad n\geq 0$, є розв'язками таких рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,Y_1,s+1,\ldots,s+n)=\mathfrak{V}_{1+n}(t,Y_1,s+1,\ldots,s+n)+\\&+\sum_{n_1=1}^{n}\frac{n!}{(n-n_1)!}\mathfrak{V}_{1+n-n_1}(t,Y_1,s+1,\ldots,s+n-n_1)\sum_{\mathrm{P}:\mathrm{Z}=\bigcup_k X_k}\frac{1}{|\mathrm{P}|!}\sum_{i_1\neq i_2\neq,\ldots,\neq i_k=1}^{s+n-n_1}\prod_{k=1}^{|\mathrm{P}|}\frac{1}{|X_k|!}\widehat{\mathfrak{A}}_{1+|X_k|}(t,i_k,X_k),\end{aligned}\tag{12}$$

де $\sum_{\mathrm{P}:\mathrm{Z}=\bigcup_k X_k}$ – сума за всіма можливими перетинами P лінійно впорядкованої множини $\mathrm{Z}=(s+n-n_1+1,...,s+n)$.

Рекурентні співвідношення (12) мають вигляд специфічних кластерних розкладів кумулянтів операторів розсіяння (11). Кластерні розклади вигляду (12) будемо називати кінетичними кластерними розкладами.

Наведемо приклади кінетичних кластерних розкладів (12):

$$\widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)=\mathfrak{V}_1(t,Y_1),$$

$$\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,Y_1,s+1)=\mathfrak{V}_2(t,Y_1,s+1)+\mathfrak{V}_1(t,Y_1)\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+1),$$

$$\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,Y_1,s+1,s+2)=\mathfrak{V}_3(t,Y_1,s+1,s+2)+2!\mathfrak{V}_2(t,Y_1,s+1)\sum_{i=1}^{s+1}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+2)+$$

$$+\mathfrak{V}_1(t,Y_1)\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,i,s+1,s+2)+\mathfrak{V}_1(t,Y_1)\sum_{j\neq i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+1)\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+2).$$

Для побудови розв'язку кінетичних кластерних розкладів знайдемо еволюційні оператори $\mathfrak{V}_{1+n}(t),\quad n\geq 0$, нижчих порядків і підставимо їх у рекурентне співвідношення (12) для фіксованого значення n. Розв'язок рекурентних співвідношень (12) має такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{V}_{1+n}(t,Y_1,s+1,...,s+n) &= \widehat{\mathfrak{A}}_{1+n}(t,Y_1,s+1,...,s+n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \prod_{j=1}^{k} \sum_{n_j=1}^{n-n_1-...-n_{j-1}} \frac{n!}{(n-n_1-...-n_j)!} \times \\
&\times \widehat{\mathfrak{A}}_{1+n-n_1-...-n_j}(t,Y_1,s+1,...,s+n-n_1-...-n_j) \sum_{\mathrm{P}:\mathrm{Z}=\bigcup_k X_k} \frac{1}{|\mathrm{P}|!} \sum_{i_1\neq i_2\neq,..,\neq i_k=1}^{s+n-n_1-...-n_j} \prod_{k=1}^{|\mathrm{P}|} \frac{1}{|X_k|!} \widehat{\mathfrak{A}}_{1+|X_k|}(t,i_k,X_k),
\end{aligned} \tag{13}
$$

де $\sum_{\mathrm{P}:\mathrm{Z}=\bigcup_k X_k}$ – сума за всіма можливими перетинами P лінійно впорядкованої множини індексів $\mathrm{Z}=(s+n-n_1-...-n_j+1,...,s+n-n_1-...-n_{j-1})$.

Наведемо приклади еволюційних операторів $\mathfrak{V}_{1+n}(t),\quad n\geq 0,$ найнижчих порядків:

$$\mathfrak{V}_1(t,Y_1) = \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,Y_1,s+1) = \widehat{\mathfrak{A}}_2(t,Y_1,s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)\sum_{j=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+1),$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{V}_3(t,Y_1,s+1,s+2) &= \widehat{\mathfrak{A}}_3(t,Y_1,s+1,s+2) - 2!(\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,Y_1,s+1) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+1))\times \\
&\times\sum_{j=1}^{s+1}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+2) - \widehat{\mathfrak{A}}_1(t,Y_1)(\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_3(t,i,s+1,s+2) + \sum_{i\neq j=1}^{s}\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,i,s+1)\widehat{\mathfrak{A}}_2(t,j,s+2)).
\end{aligned}
$$

В термінах операторів розсіяння (11) наведені перші два приклади еволюційних операторів (13) мають вигляд

$$\mathfrak{V}_1(t,Y_1) = \widehat{\mathcal{G}}_s(t,1,\ldots,s),$$

$$\mathfrak{V}_2(t,Y_1,s+1) = \widehat{\mathcal{G}}_{s+1}(t,1,\ldots,s+1) - \widehat{\mathcal{G}}_s(t,1,\ldots,s)\sum_{i=1}^{s}\widehat{\mathcal{G}}_2(t,i,s+1) + (s-1)\widehat{\mathcal{G}}_s(t,1,\ldots,s).$$

4. Висновки

В роботі встановлено умову (9), при якій маргінальні функціонали $F_s(t,1,\ldots,s\,|\,F_1(t)),\ s\geq 2$, представляються збіжними по нормі простору ядерних операторів рядами (10). Сформульовано метод кінетичних кластерних розкладів (12), що дозволив встановити явний вигляд еволюційних операторів (13), якими визначаються маргінальні функціонали (10).

Зазначимо, що маргінальні функціонали описують квантові кореляції при кінетичному описі багаточастинкових систем і на основі теорії збурень були вперше побудовані в роботі Боголюбова [5-6]. Маргінальні функціонали (10) при певних додаткових умовах формально співпадають з функціоналами побудованими Боголюбовим, якщо представити еволюційні оператори (13) у формі аналогів рівнянь Дюамеля.

1. *Боголюбов М. М.* Лекції з квантової статистики. Проблеми статистичної механіки квантових систем // Київ: Рад. школа -1949. – 112-135 с. 2. *Adami R., Golse F., Teta A.* Rigorous Derivation of the Cubic NLS in Dimension One // J. Stat. Phys.-2007.-127, P. 1193-1220. 3. *Arnold A.* Mathematical properties of quantum evolution equations // Lect. Notes in Math. – 2008. – 1946, P. 45-109. 4. *Bardos C., Golse F., Gottlieb A., Mauser N.* Accuracy of the Time-Dependent Hartree Fock Approximation for Uncorrelated Initial States // J. Stat. Phys.-2004.-115, P. 1037. 5. *Cercignani C., Gerasimenko V.I., Petrina D.Ya.* Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations // Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.-1997., P. 252. 6. *Cohen E.G.D.* Bogolyubov and Kinetic Theory: the Bogolyubov Equations // Ukrainain J. Phys.-2009.- 8-9, P. 847-861. 7. *Erdos L., Schlein B., Yau H.-T.* Derivation of the cubic non-linear Schrodinger equation from quantum dynamics of many-body systems // Invent. Math.-2007.-167, P. 515-614. 8. *Gerasimenko V.I., Shtyk V.O.* Evolution of correlations of quantum many-particle system // J. Stat. Mech.-2008.- 3, P03007. 9. *Michelangeli A.* Bose-Einstein condensation: analysis of problems and rigorous results // s.i.s.s.a. preprint 70/2007/mp 2007. 10. *Petrina D.Ya.* Mathematical Foundations of Quantum Statistical Mechanics. Continuous Systems // Amsterdam: Kluwer Acad. Publ.-1995. P. 624. 11. *Petrina D.Ya.* On solutions of Bogolyubov kinetic equations.Quantum statistics // Theor. and Math. Phys.-1972.-13, P. 391-405. 12. *Spohn H.* Kinetic equations for quantum many-particle systems // arXiv:0706.0807v1, 2007.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 519.21

І. Боднарчук, асп.

М'ЯКИЙ РОЗВ'ЯЗОК ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ ВИПАДКОВОЮ МІРОЮ

Доведено існування та єдиність розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння, керованого загальною випадковою мірою. Встановлено ліпшицевість розв'язку за часовою змінною та гельдеровість за просторовою. Показано неперервну залежність розв'язку від даних задачі.

Existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for wave equation driven by general stochastic measure are proved. Lipschitz regularity of the solution in time variable and Hölder regularity in space variable are established. Solution continuous dependence of problem data is showed.

1. Вступ

Нехай $B(R)$ – борелева σ-алгебра підмножин евклідового простору R; $L_0(\Omega,F,\mathrm{P})$ – множина дійснозначних випадкових величин, заданих на повному ймовірнісному просторі (Ω,F,P); μ – це загальна випадкова міра на $B(R)$, тобто, σ-адитивне за ймовірністю відображення $\mu: B(R)\to L_0(\Omega,F,\mathrm{P})$. Для зручності надалі будемо говорити про таку міру просто випадкова або стохастична міра. Теорія інтегрування дійсних функцій за загальними випадковими мірами побудована, наприклад, у [1], [5]. Зокрема, будь-яка обмежена вимірна функція є інтегрованою за стохастичною мірою μ . Крім того, має місце аналог теореми Лебега (див. [1]).

Розглянемо задачу Коші, що відповідає хвильовому рівнянню, породженому загальною стохастичною мірою μ ,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \Delta_x u(t,x) + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x), \end{cases}$$

у м'якій формі, тобто, $u:[0,T]\times R\times\Omega\to R$ — вимірна випадкова функція така, що

$$u(t,x) = \int_R S(t,x-y)v_0(y)dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_R S(t,x-y)u_0(y)dy\right) + \int_0^t ds\int_R S(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy +$$

$$+\int_R d\mu(y)\int_0^t S(t-s,x-y)\sigma(s,y)ds, \text{ де } (t,x)\in[0,T]\times R,\ T>0,\ a>0,\ S(t,x)=\frac{1}{2a}\mathrm{I}_{\{|x|<at\}} \text{ –}$$

фундаментальний розв'язок.

Хвильове рівняння з узагальненою випадковою мірою розглянуто в [3], де знайдено його розв'язок на множині узагальнених випадкових функцій.

Отже, останнє рівняння можна переписати у вигляді

$$u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy + \frac{1}{2}\big(u_0(x+at)+u_0(x-at)\big) + \frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy + \frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}} d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds. \quad (1)$$

Стохастичні хвильові рівняння, керовані вінерівськими процесами, досліджено, наприклад, у статтях [4], [6].

Надалі вважатимемо, що виконуються припущення:

А1. функція $v_0(x)=v_0(x,\omega):R\times\Omega\to R$ вимірна і обмежена $\forall\omega\in\Omega$ сталою $C_{v_0}(\omega)>0$.

А2. функція $u_0(x)=u_0(x,\omega):R\times\Omega\to R$ вимірна та ліпшицева: $|u_0(x_1)-u_0(x_2)|\le L_{u_0}(\omega)|x_1-x_2|$.

А3. $f(t,x,v):[0,T]\times R\times R\to R$ вимірна, обмежена сталою $C_f>0$ та ліпшицева за $v\in R$ зі сталою L_f .

А4. $\sigma(t,x):[0,T]\times R\to R$ вимірна, обмежена сталою $C_\sigma>0$ та гельдерова за t,x з показником $1/2<\alpha\le1$:

$$|\sigma(t_1,x_1)-\sigma(t_2,x_2)|\le K\left(|t_1-t_2|^\alpha+|x_1-x_2|^\alpha\right).$$

Через C позначатимемо довільну додатну константу, що може бути різною в різних формулах.

У даній роботі отримано існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1), досліджено регулярність цього розв'язку та доведено його неперервну залежність від даних задачі.

2. Допоміжні твердження

Для доведення основного результату спочатку покажемо справедливість наступних тверджень.

Лема 1. Нехай для деякого $\tau>1/2$ функція $|y|^\tau$ інтегровна за мірою μ на R та виконується припущення **А4**. Тоді для будь-якого фіксованого $x\in R$ випадковий процес $\tilde{u}(t)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds$ $t\in[0,T]$ має ліпшицеву модифікацію.

Доведення. Нехай $x\in R, 0\le t_1<t_2\le T$ – фіксовані. Покладемо $g(y)=\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\ y\in R$. Також позначимо $\forall j\in \mathrm{Z}, n\ge0:\ d_{kn}^{(j)}=j+k2^{-n},\ 0\le k\le 2^n$; $\Delta_{kn}^{(j)}=(d_{(k-1)n}^{(j)},d_{kn}^{(j)}],\ 1\le k\le 2^n$. Для зручності ще введемо множину $\mathrm{Z}_t^x=\{j\in\mathrm{Z}:[x-at]+1\le j,\ j+1<[x+at]\}$. Тоді для функцій

$$g_n^{(j)}(y)=\sum_{1\le k\le 2^n} g(d_{(k-1)n}^{(j)})\mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\quad y\in(j,j+1],\quad n\ge0$$

в силу **А4** та теореми про мажоровану збіжність [5, Твердження 7.1.1] виконується збіжність

$$\int_{(j,j+1]} g_n^{(j)}(y)d\mu(y)\xrightarrow{\mathrm{P}}\int_{(j,j+1]} g(y)d\mu(y),\ n\to\infty.$$

Маємо

$$\tilde{u}(t_2)-\tilde{u}(t_1)=\int_{\{y:|y-x|<at_1\}} d\mu(y)\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds+\int_{\{y:at_1\le|y-x|<at_2\}} d\mu(y)\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds=I_1+I_2.$$

$$I_1=\sum_{j\in\mathrm{Z}_{t_1}^x}\int_{(j,j+1]} g(y)d\mu(y)+\int_{(x-at_1,[x-at_1]+1]} g(y)d\mu(y)+\int_{([x+at_1],x+at_1)} g(y)d\mu(y)=I_{11}+I_{12}+I_{13}.$$

Звідси

$$|I_{11}|\le \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left|\int\limits_{(j,j+1]} g(y)d\mu(y)\right| \le \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left(\left|\int\limits_{(j,j+1]} g_0^{(j)}(y)d\mu(y)\right| + \sum_{n\ge 1}\left|\int\limits_{(j,j+1]} g_n^{(j)}(y)d\mu(y) - \int\limits_{(j,j+1]} g_{n-1}^{(j)}(y)d\mu(y)\right|\right)\le$$

$$\le \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left|g(j)\right|\left|\mu\left((j,j+1]\right)\right| + \sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n\beta}\left|g(d_{(k-1)n}^{(j)}) - g(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{-n\beta}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Тут $\beta>0$ довільне, k' обирається так, щоб $\Delta_{kn}^{(j)}\subset\Delta_{k'(n-1)}^{(j)}$, та використано нерівність Коші−Шварца. Далі, використовуючи **А4**, за допомогою заміни змінних прийшовши до інтегралів по одному проміжку, отримаємо $\left|g(d_{(k-1)n}^{(j)}) - g(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})\right|\le C2^{-n\alpha}\,|t_2-t_1|$. Звідси

$$|I_{11}|\le C_\sigma\,|t_2-t_1|\sum_{j\in Z_{t_1}^x}|\mu((j,j+1])| + C\,|t_2-t_1|\left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n} 2^{n(\beta-2\alpha)}\right)^{1/2}\times\sum_{j\in Z_{t_1}^x}\left(\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{-n\beta}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le C\,|t_2-t_1|\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{2\tau}\left|\mu\left((j,j+1]\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2} + C\,|t_2-t_1|\left(\sum_{n\ge 1}2^{n(\beta-2\alpha+1)}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{j\in Z}\sum_{n\ge 1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{2\tau}2^{-n\beta}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2}.$$

Обираємо $0<\beta<2\alpha-1$. В силу [7, Лема 3.1] суми зі стохастичними мірами з останньої нерівності будуть м.н. скінченними, бо мають вигляд $\sum_{l=1}^{\infty}\left(\int_X f_l d\mu\right)^2$, де $\{f_l(y), l\ge 1\}=\{(|j|+1)^\tau \mathrm{I}_{(j,j+1]}(y),\ j\in Z\}$ та $\{f_l(y), l\ge 1\}=\{2^{-n\beta/2}(|j|+1)^\tau \mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\ j\in Z, n\ge 1, 1\le k\le 2^n\}$ у першому та другому доданках відповідно, а $\sum f_l$ інтегровні за μ. Отже, на множині $y\in Z_{t_1}^x$ існує модифікація випадкового процесу $\tilde{u}(t)$, яка на $(j,j+1]$ має вигляд

$$\tilde{\tilde{u}}^{(j)}(t)=\int\limits_{(j,j+1]}\tilde{g}_0^{(j)}(y)d\mu(y)+\sum_{n\ge 1}\int\limits_{(j,j+1]}\left(\tilde{g}_n^{(j)}(y)-\tilde{g}_{n-1}^{(j)}(y)\right)d\mu(y),$$

де $\tilde{g}_n^{(j)}(y)=\sum_{1\le k\le 2^n}\mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y)\int\limits_0^{t-|d_{(k-1)n}^{(j)}-x|/a}\sigma(s,d_{(k-1)n}^{(j)})ds,\ y\in(j,j+1]$.

На множині $Z_{t_1}^x$ потрібну модифікацію будуємо у вигляді $\tilde{\tilde{u}}_{Z_{t_1}^x}(t)=\sum_{j\in Z_{t_1}^x}\tilde{\tilde{u}}^{(j)}(t)$. Таким чином, $\forall\omega\in\Omega:\ |I_{11}|\le C(\omega)\,|t_2-t_1|$. Зауважимо, що вибір такої модифікації не залежить від величин t_1,t_2.

Ліпшицевість I_{12} та I_{13} показується аналогічно, тільки замість розбиття $\sum_{j\in Z_{t_1}^x}$ одиничних проміжків виконується розбиття одного інтервалу довжини ≤ 1, а шукана модифікація процесу $\tilde{u}(t)$ будується аналогічним чином на множинах $(x-at_1,[x-at_1]+1]$ та $([x+at_1],x+at_1)$ відповідно.

Розглянемо тепер доданок I_2: $I_2=\int\limits_{(x-at_2,x-at_1]}d\mu(y)\int\limits_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds+\int\limits_{[x+at_1,x+at_2)}d\mu(y)\int\limits_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds=I_{21}+I_{22}$.

Також розбиватимемо кожен з інтервалів $(x-at_2,x-at_1],[x+at_1,x+at_2)$ на відрізки довжини $2^{-n}(t_2-t_1)$ та використовуватимемо представлення функції $\int_0^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds$ за допомогою простих, побудованих на відповідних відрізках. Отже, враховуючи, що тут $0\le t_2-|y-x|/a\le|t_2-t_1|$, одержимо ліпшицевість I_2.

Таким чином, ми отримали, що $\exists C=C(\omega)>0$ та модифікація процесу $\tilde{u}(t)$ такі, що $\forall t_1,t_2\in[0,T]$: $|\tilde{\tilde{u}}(t_2)-\tilde{\tilde{u}}(t_1)|\le C(\omega)\,|t_2-t_1|\quad\forall\omega\in\Omega$.

Лема 2. Нехай для деякого $\tau>1/2$ функція $|y|^\tau$ інтегровна за загальною стохастичною мірою μ на R та виконується припущення **А4**. Тоді для довільного $B>0$, довільних $\lambda\in\left(0,1-1/2\alpha\right)$ та фіксованого $t\in[0,T]$ випадковий процес $\hat{u}(x)=\int\limits_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int\limits_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\ \ |x|\le B$ має гельдерову з показником λ модифікацію.

Доведення. Зафіксуємо довільні $t\in[0,T],\ x_1,x_2\in\{x\in R:|x|\le B\},\ x_1\ne x_2$. Нехай $q(y)=\int\limits_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds,\ y\in R$.

Застосовуючи аналогічні міркування і позначення, що й при доведенні першої леми ($\gamma>0$ – довільне), одержимо

$$|\hat{u}(x_2)-\hat{u}(x_1)|=\left|\int_R d\mu(y)\int_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds\right|\le\sum_{j\in Z}|q(j)|\left|\mu\left((j,j+1]\right)\right|+\sum_{j\in Z}\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{n\gamma}\left(q(d_{(k-1)n}^{(j)})-q(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})\right)^2\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}2^{-n\gamma}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Далі, оцінюючи величину $J=\left|q(d_{(k-1)n}^{(j)})-q(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})\right|$, робимо заміну змінної в інтегралі $q(d^{(j)}{}_{(k'-1)(n-1)})$ так, щоб верхні межі співпадали, при цьому, нижні можуть не співпадати. У такому разі матимемо, що нижня межа другого інтеграла дорівнює: $t-|d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)}-x_1|/a\pm2^{-n}/a$. Звідси, враховуючи **А4** та обмеженість множини значень змінної x, матимемо

$$J=\left|\int_{t-|d_{(k-1)n}^{(j)}-x_1|/a}^{t-|d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)}-x_1|/a\pm2^{-n}/a}\sigma(s,d_{(k-1)n}^{(j)})ds+\int_{t-|d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)}-x_1|/a\pm2^{-n}/a}^{t-|d_{(k-1)n}^{(j)}-x_2|/a}\sigma(s,d_{(k-1)n}^{(j)})ds-\int_{t-|d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)}-x_1|/a\pm2^{-n}/a}^{t-|d_{(k-1)n}^{(j)}-x_2|/a}\sigma(s',d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})ds'\right|\le$$

$$\le C_\sigma 2\cdot2^{-n}/a+K\left((2^{-n}/a)^\alpha+2^{-n\alpha}\right)|x_2-x_1|/a\le2^{-n\alpha}\left(C_\sigma 2/a+2BK(1+a^\alpha)/a^{\alpha+1}\right)=C2^{-n\alpha}.$$

З іншого боку, $J\le C_\sigma 2|x_2-x_1|/a$. Тому, перемноживши ці нерівності у степенях $1-\lambda$ та λ, де $\lambda\in(0,1)$ – довільне, одержимо, що виконується оцінка: $J\le C2^{-n\alpha(1-\lambda)}|x_2-x_1|^\lambda$.

Зауважимо, що можлива ситуація, коли верхня і нижня межі інтегрування в одному з інтегралів $q(d_{(k-1)n}^{(j)})$, $q(d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})$ співпадають. У такому випадку відповідний інтеграл рівний нулю. Нехай, наприклад, це буде $q(d_{(k-1)n}^{(j)})$, тоді $d_{(k-1)n}^{(j)}=(x_1+x_2)/2$, а для J матимемо

$$J=\left|\int_{t-|d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)}-2d_{(k-1)n}^{(j)}+x_2|/a}^{t-|d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)}-x_2|/a}\sigma(s,d_{(k'-1)(n-1)}^{(j)})ds\right|\le C_\sigma 2\cdot2^{-n}/a\le C2^{-n\alpha}.$$

Також справедлива і оцінка: $J\le C_\sigma|x_2-x_1|/a$. Отже, $J\le C2^{-n\alpha(1-\lambda)}|x_2-x_1|^\lambda$.

Таким чином, враховуючи зроблені вище оцінки, одержимо

$$\left|\hat{u}(x_2)-\hat{u}(x_1)\right|\le C|x_2-x_1|\sum_{j\in Z}|\mu((j,j+1])|+C|x_2-x_1|^\lambda\sum_{j\in Z}\left(\sum_{n\ge1}2^{n(\gamma-2\alpha(1-\lambda)+1)}\right)^{1/2}\times\left(\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le n}2^{-n\gamma}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le C|x_2-x_1|^\lambda\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{2\tau}\left|\mu\left((j,j+1]\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2}+C|x_2-x_1|^\lambda\left(\sum_{n\ge1}2^{n(\gamma-2\alpha(1-\lambda)+1)}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{j\in Z}\sum_{n\ge1}\sum_{1\le k\le 2^n}(|j|+1)^{2\tau}2^{-n\gamma}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{1/2}\times\left(\sum_{j\in Z}(|j|+1)^{-2\tau}\right)^{1/2}.$$

Обравши $\lambda\in(0,1)$ та $\gamma>0$ так, щоб $\gamma-2\alpha(1-\lambda)+1<0$ (при цьому $0<\lambda<1-\dfrac{\gamma+1}{2\alpha}$), та застосувавши [7, Лема 3.1] до сум зі стохастичними мірами, які мають вигляд $\sum_{l=1}^\infty(\int_X f_l d\mu)^2$, де $\{f_l(y),l\ge1\}=\{(|j|+1)^\tau I_{[j,j+1]}(y),\ j\in Z\}$ та $\{f_l(y),l\ge1\}=\{2^{-n\gamma/2}(|j|+1)^\tau I_{\Delta_{kn}^{(j)}}(y),\ j\in Z,n\ge1,1\le k\le2^n\}$ у першому та другому доданках відповідно, а $\sum f_l$ інтегровні за μ, ми отримаємо твердження леми.

3. Основний результат

Теорема. Нехай виконуються припущення **А1 – А4**. Тоді

1) задача (1) має розв'язок $u(t,x)$. Якщо $v(t,x)$ – інший розв'язок задачі (1), то для всіх t,x $u(t,x)=v(t,x)$ м.н.;

2) якщо функція $|y|^\tau$ інтегровна за μ на R для деякого $\tau>1/2$, то $\forall B>0,\lambda<1-1/2\alpha$ випадковий процес $u(t,x)$ має ліпшицеву за змінною $t\in[0,T]$ та гельдерову за $x\in\{x\in R:|x|\le B\}$ з показником λ модифікацію.

3) якщо функція $|y|^\tau$ інтегровна за μ на R для деякого $\tau>1/2$, то випадковий процес $u(t,x)$ має неперервно залежну від даних задачі модифікацію.

Доведення. 1) Існування та єдиність розв'язку. Покажемо, що рівняння (1) має розв'язок. Для цього побудуємо його за допомогою процесу ітерації. Покладемо $u^{(0)}(t,x)=0$ та $\forall n\ge0$:

$$u^{(n+1)}(t,x)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(y)dy+\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)+u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(s,y,u^{(n)}(s,y))dy+\frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds.$$

Вимірність такого процесу випливає з вимірності процесів v_0, u_0, теореми Фубіні (для першого і третього доданків) та [2, Лема 2] і представлення інтеграла за випадковою мірою у вигляді границі за ймовірністю інтегралів від простих функцій. Надалі ми беремо $\forall n, t, x$ одну і ту саму модифікацію стохастичного інтеграла і тому наступні оцінки виконуватимуться $\forall\omega\in\Omega$. За припущенням **А3** маємо

$$\left|u^{(n+1)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|\le\frac{L_f}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left|u^{(n)}(s,y)-u^{(n-1)}(s,y)\right|dy\,;\ \left|u^{(2)}(t,x)-u^{(1)}(t,x)\right|\le C_f t^2.$$

Позначимо $U_n(t)=\sup_{x\in R}\left|u^{(n+1)}(t,x)-u^{(n)}(t,x)\right|,\ n\ge 1$. Використовуючи попередні оцінки, за індукцією одержимо:

$$U_n(t)\le L_f\int_0^t(t-s)U_{n-1}(s)ds\le 2C_f(L_f)^{n-1}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

А, отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(t)$ збігається рівномірно на $[0,T]$. Тому, поклавши $u(t,x)=\lim_{n\to\infty}u^{(n)}(t,x)$, де границя є границею збіжності м.н., отримаємо шуканий розв'язок.

Тепер покажемо єдиність. Нехай маємо два розв'язки рівняння (1) — $u(t,x), v(t,x)$. Тоді

$$u(t,x)-v(t,x)=(2a)^{-1}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\left(f(s,y,u(s,y))-f(s,y,v(s,y))\right)dyds\,.$$

Застосувавши аналогічні проведеним вище міркування, матимемо, що $|u(t,x)-v(t,x)|=0$ м.н.

2) Спочатку доведемо ліпшицевість. Нехай $x\in R,\ t_1,t_2\in[0,T], t_1<t_2$ − фіксовані, тоді за **А1** — **А4** та Лемою 1:

$$|u(t_2,x)-u(t_1,x)|\le\frac{1}{2a}\left|\int_{x+at_1}^{x+at_2}v_0(y)dy-\int_{x-at_1}^{x-at_2}v_0(y)dy\right|+\frac{1}{2}\left(\left|u_0(x+at_2)-u_0(x+at_1)\right|+\left|u_0(x-at_2)-u_0(x-at_1)\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_{t_1}^{t_2}ds\int_{x-a(t_2-s)}^{x+a(t_2-s)}f(s,y,u(s,y))dy+\int_0^{t_1}ds\int_{x+a(t_1-s)}^{x+a(t_2-s)}f(s,y,u(s,y))dy-\int_0^{t_1}ds\int_{x-a(t_1-s)}^{x-a(t_2-s)}f(s,y,u(s,y))dy\right|+\frac{1}{2a}\left|\int_R d\mu(y)\int_{t_1-|y-x|/a}^{t_2-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds\right|\le$$

$$\le|t_2-t_1|\left(C_{v_0}(\omega)+aL_{u_0}(\omega)+\frac{3}{2}TL_f+C(\omega)\right)=L(\omega)|t_2-t_1|\ \text{(м.н.)}$$

Аналогічно покажемо, що існує неперервна за Гельдером за змінною $x, |x|\le B$ модифікація випадкового процесу, який є розв'язком рівняння (1). Так, застосувавши Лему 2 та використавши припущення **А1** — **А4** і обмеженість x, матимемо для довільного $0<\lambda<1-1/2\alpha$, для довільних фіксованих $t\in[0,T], B>0,\ x_1,x_2\in\{x\in R:|x|\le B\}, x_1<x_2$:

$$|u(t,x_2)-u(t,x_1)|\le\frac{1}{2a}\left|\int_{x_1+at}^{x_2+at}v_0(y)dy-\int_{x_1-at}^{x_2-at}v_0(y)dy\right|+\frac{1}{2}\left(\left|u_0(x_2+at)-u_0(x_1+at)\right|+\left|u_0(x_2-at)-u_0(x_1-at)\right|\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int_0^t ds\left(\int_{x_1+a(t-s)}^{x_2+a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy-\int_{x_1-a(t-s)}^{x_2-a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy\right)\right|+\frac{1}{2a}\left|\int_R d\mu(y)\int_{t-|y-x_1|/a}^{t-|y-x_2|/a}\sigma(s,y)ds\right|\le\frac{C_{v_0}(\omega)}{a}|x_2-x_1|+$$

$$+L_{u_0}(\omega)|x_2-x_1|+\frac{TC_f}{a}|x_2-x_1|+\frac{C_1(\omega)}{2a}|x_2-x_1|^{\lambda}\le H(\omega)|x_2-x_1|^{\lambda}\ \text{(м.н.)},$$

де $C_1(\omega)>0$ — стала гельдеровості процесу $\hat{u}(t,x)$.

3) Під неперервною залежністю розв'язку задачі (1) від даних розуміється наступне. Нехай маємо такі задачі Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t^2}=a^2\Delta_x u_i(t,x)+f_i(t,x,u_i(t,x))+\sigma_i(t,x)\dot{\mu}(x),\\[2mm] u_i(0,x)=u_{0i}(x),\qquad \dfrac{\partial u_i}{\partial t}(t,x)=v_{0i}(x),\ \ i=1,2;\end{cases}\tag{2}$$

де $(t,x)\in[0,T]\times R,\ T>0,\ a>0$, а розв'язок розглядається у м'якому сенсі. Нехай функції $v_{0i},u_{0i},f_i,\sigma_i, i=1,2$ задовольняють умови **А1)** — **А4)** відповідно та $\exists\delta>0$ таке, що $\forall(t,x)\in[0,T]\times R, \forall v\in R$:

$$|u_{01}(x)-u_{02}(x)|<\delta\ \text{м.н.},\ |v_{01}(x)-v_{02}(x)|<\delta\ \text{м.н.},\ |\sigma_1(t,x)-\sigma_2(t,x)|<\delta,\ \ |f_1(t,x,v)-f_2(t,x,v)|<\delta\,.\tag{3}$$

Тоді $\forall\rho\in(0,1/2)\ \ \exists Q=Q(\omega)>0,$ що $\forall(t,x)\in[0,T]\times R:\ |u_1(t,x)-u_2(t,x)|<Q(\omega)\delta^{\rho}$ м.н.

Покажемо це. За доведеним вище, існує єдиний розв'язок кожної з задач (2), який можна побудувати за допомогою процесу ітерації. Нехай $u_i^{(n)}(t,x), n\ge 0$ — відповідне n-те наближення розв'язку $u_i(t,x)$ таким процесом. Тоді

$|u_1(t,x)-u_2(t,x)|=\lim_{n\to\infty}|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|$, де границя є границею збіжності м.н. Надалі ми обиратимемо для всіх n,t,x одну і ту ж модифікацію стохастичного інтеграла і матимемо виконання наступних рівностей $\forall\omega\in\Omega$.

Отже, враховуючи припущення **A1)** — **A4)** та умови (3), матимемо $|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|\le\delta(1+t+t^2/2)+$

$$+\frac{L_f}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)|dyds+\frac{1}{2a}\left|\int_{(x-at,x+at)}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}(\sigma_1(s,t)-\sigma_2(s,t))ds\right|.$$

Розглянемо окремо інтеграл за стохастичною мірою. Покладемо $G(y)=\int_0^{t-|y-x|/a}(\sigma_1(s,y)-\sigma_2(s,y))ds,\ y\in R$. Аналогічно до міркувань доведення Леми 1, ми будуємо наближення функції $G(y)$ простими та відповідним чином представляємо стохастичний інтеграл, як границю інтегралів від простих функцій. Одержимо

$$\left|\int_{(x-at,x+at)}G(y)d\mu(y)\right|\le\sum_{j\in Z_t^x}\left|\int_{(j,j+1]}G(y)d\mu(y)\right|+\left|\int_{(x-at,[x-at]+1]}G(y)d\mu(y)\right|+\left|\int_{([x+at],x+at)}G(y)d\mu(y)\right|\le\tilde{C}\delta^{\rho},$$

де $\tilde{C}=\tilde{C}(\omega,T,K,\alpha,a)$.

Таким чином, маємо за індукцією

$$|u_1^{(n)}(t,x)-u_2^{(n)}(t,x)|\le\delta(1+t+t^2/2)+\frac{1}{2a}\tilde{C}\delta^{\rho}+\frac{L_f}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}|u_1^{(n-1)}(s,y)-u_2^{(n-1)}(s,y)|dyds\le\delta^{\rho}C(1+t+t^2/2)+$$

$$+\delta^{\rho}CL_f\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}\right)+\ldots+\delta^{\rho}CL_f^{n-1}\left(\frac{t^{2(n-1)}}{(2n-2)!}+\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right)\le\delta^{\rho}C\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{L_f^k t^{2k+2}}{(2k+2)!}\right)\le$$

$$\le\delta^{\rho}Ce^{T\sqrt{L_f}}\left(1+L_f^{-1/2}+L_f^{-1}\right)\le Q(\omega)\delta^{\rho}.$$

Звідси для всіх $x\in R,t\in[0,T]$ виконується: $|u_1(t,x)-u_2(t,x)|\le Q(\omega)\delta^{\rho}$ м.н.

4. Висновки

Досліджено задачу Коші для хвильового рівняння, породженого загальною стохастичною мірою. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його регулярність та неперервну залежність від даних.

1. Радченко Вадим Николаевич. Интегралы по общим случайным мерам / В.Н. Радченко // Труды Института математики НАН Украины. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – Т. 27. – 196 с. – ISBN 966-02-1386-7. 2. Радченко Вадим Николаевич. Об определении интеграла от случайной функции / В.Н. Радченко // Теория вероятностей и ее применения. – Москва: "Наука", 1996. – № 3. – С. 677–682. – ISSN 0040-361X. 3. Радченко Вадим Николаевич. Уравнение теплопроводности и волновое уравнение с общими случайными мерами / В.Н. Радченко // Український математичний журнал. – К.: Ін-т математики НАН України, 2008. – Т. 60, № 12. – С. 1675–1685. – ISSN 1027-3190. 4. Barbu V. Stochastic wave equations with dissipative damping / V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro // Stochastic Process. Appl. – 2007. – Vol. 117, № 8. – P. 1001–1013. – ISSN 0304-4149. 5. Kwapien S. Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapien, W.A. Woyczinski. – Boston: Birkhäuser, 1992. – ISBN 0-8176-3572-6. 6. Millet A. On a non linear stochastic wave equation in the plane: existence and uniqueness of the solution / A. Millet, P. Morien // Ann. Appl. Probab. – 2001. – Vol. 11 – P. 922–951. – ISSN 1050-5164. 7. Radchenko V.M. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V.M. Radchenko // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251. – ISSN 1730-6337.

Надійшла до редколегії 12.04.10

УДК 519.21

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, А. Вижва, студ.

ПРО СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Розглянуто задачу статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів на основі їх спектрального розкладу. Обчислено спектральні коефіцієнти для практично важливих кореляційних функцій випадкових процесів такого типу. Наведено теорему про середньоквадратичну оцінку апроксимації стаціонарних періодичних випадкових процесів частковими сумами ряду. Побудовано модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів.

The problem of statistical simulation of stationary random processes realizations has been considered, which was build on the base of it spectral decomposition. It has been calculated the spectral coefficients for the typical random fields examples. It has been give the theorem about the mean – square estimator of this random fields approximation by the partial sums. It has been constructed the model and statistical simulation of stationary random processes algorithm.

1. Вступ

Методи чисельного моделювання (методи Монте-Карло) випадкових процесів у зв'язку із стрімким розвитком комп'ютерної техніки поширили свої напрямки застосування в різних галузях природничих та соціальних наук, таких, як геологія, метеорологія, радіотехніка, статистична радіофізика, ядерна фізика, соціологія, фінансова математика та інші.

За допомогою метода Монте-Карло можна згенерувати на ком'ютері реалізації випадкових процесів, для яких отримано засобами статистичної обробки необхідну інформацію. А саме, якщо процес гауссівський, то необхідно знати його математичне сподівання та кореляційну функцію. Якщо такі статистичні характеристики відомі для негауссівської випадкової функції, то цього може бути досить при розв'язанні задач, де суттєві лише ефекти, що пов'язані з моментами не вище другого порядку. Також важливо вміти зводити нестаціонарні випадкові процеси до стаціонарних шляхом виділення детермінованої складової – так званого тренда, оскільки запропонований алгоритм розроблений тільки для такого типу процесів.

2. Постановка задачі та її розв'язання

В цій роботі розглядається задача статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів, розроблена на основі спектрального розкладу таких полів [9]. Наведено обчислення спектральних коефіцієнтів для деяких практично важливих прикладів кореляційних функцій випадкових процесів, які використовуються у моделюючому алгоритмі.

Нехай $\xi(t)$ $\left(t \in -(\infty, +\infty)\right)$ – дійснозначний стаціонарний в широкому розумінні випадковий процес другого порядку. Стаціонарність в широкому розумінні означає, що:

1) $\mathrm{M}\,\xi(t) = const, \quad \forall t \in (\infty, +\infty)$ (припустимо, що $\mathrm{M}\xi(t) = 0$);

2) $\mathrm{M}\ \xi(t_1)\ \xi(t_2) = B\,(t_1, t_2) = B\,(t_1 - t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (\infty, +\infty)$,

тобто, кореляційна функція B(t) випадкового процесу $\xi(t)$ залежить лише від зміни різниці аргументів $\rho = |t_1 - t_2|$.

Введемо для випадкового процесу $\xi(t)$ припущення, що він є неперервним в середньому квадратичному. Тоді кореляційна функція $B\,(\rho)$ неперервного в середньоквадратичному стаціонарного дійснозначного процесу $\xi(t)$ допускає спектральний розклад, який випливає із теореми Хінчина [5]:

$$B(\rho) = 2\int_0^\infty \cos \rho u \; d\,\Phi(u), \tag{1}$$

де $\Phi(u)$ – монотонно неспадна функція, яка називається спектральною функцією стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$. Очевидно, що функція $\Phi(u)$ визначається формулою (1) лише з точністю до довільного постійного доданку, який можна вибрати так, щоб виконувалось співвідношення $\Phi(+\infty) = 0$ [6].

Кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу ξ(t) при умові, що $\mathrm{M}\xi(t) = 0$ буде збігатися до нуля при $\rho \to \infty$ [7]. Нехай B(ρ) спадає при $\rho \to \infty$ настільки швидко, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(\rho)|\, d\,\rho < \infty. \tag{2}$$

У такому випадку B(ρ) може бути виражена інтегралом :

$$B(\rho) = 2\int_0^\infty \cos \rho u\, f(u)\, d\,u. \tag{3}$$

де $f(u)$ обмежена і неперервна функція.

Формула (3), очевидно, являється частковим випадком формули (1). Вона показує, що при умові (2) виконується:

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u')\, d\,u', \tag{4}$$

де $f(u') = \Phi'(u)$.

Звідси видно, що в розглянутому випадку, $\Phi(u)$ – диференційована функція. Функцію $f(u')$ називають спектральною щільністю стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$.

Введемо для випадкового процесу $\xi(t)$ припущення, що він є періодичним. Періодичність випадкового процесу передбачає періодичність його кореляційної функції. Якщо для стаціонарного випадкового процесу його кореляційна функція – неперіодична,то її за певних умов можна періодично продовжити на всю числову вісь [1].

Нехай $\xi(t) = \xi(\varphi)$ $\left(\varphi \in [-T, T]\right)$ – дійснозначний стаціонарний в широкому розумінні 2T-періодичний випадковий процес другого порядку. При виконанні сформульованих вище припущень справедлива теорема про спектральний розклад такого випадкового процесу [2].

Теорема 1. Стаціонарний 2T-періодичний неперервний в середньому квадратичному випадковий процес $\xi(\varphi)$ $\left(\varphi \in [-T, T]\right)$ можна подати у вигляді спектрального розкладу:

$$\xi(\varphi) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\xi_k \cos\frac{k\pi\varphi}{T} + \eta_k \sin\frac{k\pi\varphi}{T}\right), \tag{5}$$

де $\{\xi_k\}, \{\eta_k\}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ – послідовності випадкових величин, що задовольняють умови:

1) $\mathrm{M}\,\xi_k = \mathrm{M}\eta_k = 0; \quad \mathrm{M}\ \xi_k\ \eta_r = 0, \forall k = 0, 1, 2, ...;$

2) $\mathrm{M}\ \xi_k\ \xi_r = \mathrm{M}\ \eta_k\ \eta_r = \delta_k^r\, b_k \quad (k, r\ \geq\ 1),$

де δ_k^r – символ Кронекера,

$$b_k \geq 0, \quad \forall k = 1, 2, ...; \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \tag{6}$$

Зауважимо, що ряд (5) збігається у середньому квадратичному.

Слід зазначити, що коли розглядаються гауссівські випадкові процеси $\xi(\varphi)$, то випадкові величини $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ є взаємнонезалежними і нормально розподіленими.

При цьому, кореляційну функцію $B(\varphi)$ випадкового процесу $\xi(\varphi)$ можна подати у вигляді розкладу, який є спектральним розкладом кореляційної функції:

$$B(\varphi) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos\frac{k\pi\varphi}{T}, \tag{7}$$

де коефіцієнти b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ називаються спектральними коефіцієнтами. Такі коефіцієнти можна виразити через кореляційну функцію (враховуючи її парність) випадкового процесу $\xi(\varphi)$ формулою:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T B(\varphi)\cos\frac{k\pi\varphi}{T}\,d\varphi. \tag{8}$$

Також можна вивести вираз для спектральних коефіцієнтів у вигляді інтегралу від спектральної щільності $f(u)$. Для цього підставимо замість $B(\varphi)$ в формулу (8) вираз (4) і отримаємо наступний кратний інтеграл:

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^T\int_0^\infty cos(\varphi u)\, f(u)\,du\,\cos\frac{k\pi\varphi}{T}\,d\varphi.$$

Поміняємо порядок інтегрування в цьому виразі та отримаємо:

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^\infty\left[\int_0^T cos(\varphi u)\,cos\frac{k\pi\varphi}{T}\,d\varphi\right] f(u)\,du.$$

Обчисливши інтеграл в квадратних дужках, отримаємо:

$$b_k = 2\int_0^\infty\left[\frac{\sin(Tu-k\pi)}{(Tu-k\pi)} + \frac{\sin(Tu+k\pi)}{(Tu+k\pi)}\right] f(u)\,du, \quad u^2 \neq \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2 (k = 0, 1, 2, ...). \tag{10}$$

Це – вираз для обчислення спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ стаціонарного 2T-періодичного випадкового процесу $\xi(\varphi)$, коли відома його спектральна щільність $f(u)$

Формули (8) та (10), у якій спектральні коефіцієнти виражаються через кореляційну функцію $B(\varphi)$ або спектральну щільність $f(u)$ випадкового процесу $\xi(\varphi)$, використовуються для обчислення спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ для конкретних прикладів кореляційних функцій випадкових процесів. Потрібно відзначити, що не завжди вдається знайти явний аналітичний вигляд цих коефіцієнтів. Тому саме в таких випадках, коли виникають наведені вище труднощі, в цій статті пропонується використовувати чисельне значення інтегралів (6) на прикладі кореляційної функції типу гауссівської кривої.

Далі розглядаються приклади кореляційних функцій періодичних стаціонарних випадкових процесів, які мають широке застосування в геофізиці та інших геологічних науках і науках про Землю. Слід відзначити, що їх перелік можна значно розширити, якщо розглядати періодичні стаціонарні випадкові процеси, як "звуження" однорідних та ізотропних випадкових полів на площині $\xi(r,\varphi)$ ($r \in R_+$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ – полярні координати точки на площині) на коло радіуса *r*. Деякі приклади випадкових полів на площині наведені в роботах [2 – 4].

Далі наводиться для такого типу функцій спектральні коефіцієнти у явному вигляді, які можна використати з метою статистичного моделювання випадкових процесів, що розглядаються, запропонованим методом. Виведення аналітичних формул для спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ трикутної кореляційної функції, яку періодично продовжено на всю числову вісь, експоненціальної кореляційної функції та експоненціально затухаючої косинусоїди наведено в [5]. Результати обчислень подано в табл. 1.

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 1."Білий шум в скінченній смузі частот" [8]. Дуже часто в застосуваннях можна вважати, що процес $\xi(t)$, який розглядається, має постійну спектральну щільність $f(u)$ на деякому відрізку, тобто:

$$f(u) = \begin{cases} f_0, & |u| \le \Omega, \\ 0, & |u| > \Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Відповідна їй кореляційна функция $B(\varphi)$, очевидно, має вигляд

$$B(\rho) = \int_{-\Omega}^{\Omega} f_0 \exp(i\rho u)\,du = 2f_0\frac{\sin\Omega\rho}{\rho} \quad \Omega > 0, \quad f_0 > 0. \tag{12}$$

В практичних застосуваннях до геологічних задач часто зустрічається у модель стаціонарних випадкових процесів, яка має назву "кардинальний синус" [10]**.** Наведена вище кореляційна функція (12) відноситься до сімейства Бесселя **(**при значенні параметра n= 1) вигляду:

$$B(\rho) = \frac{J_{n/2}(\alpha\rho)}{(\alpha\rho)^{n/2}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $J_\nu(x)$ – функція Бесселя першого роду порядка ν. Це видно із рівності:

$$B(\rho) = \frac{\sin c\rho}{c\rho} = \frac{J_{1/2}(c\rho)}{(c\rho)^{1/2}}, \quad c > 0. \tag{13}$$

За формулою (10) можна обчислити спектральні коефіцієнти для цього прикладу з використанням інтегрального сінуса:

$$si(x) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du. \tag{14}$$

Отже, підставимо вираз (11) в формулу (10) і отримаємо вираз: $b_k = 2f_0 \int_0^{\Omega} \left[\frac{\sin(uT - k\pi)}{uT - k\pi} + \frac{\sin(uT + k\pi)}{uT + k\pi} \right] du,$

звідки, обчисливши інтеграли, отримаємо формулу для спектральних коефіцієнтів кореляційної функції бесселевого типу (12):

$$b_k = \frac{2f_0}{T}\left[si\,(\Omega T - k\pi) + si\,(\Omega T + k\pi) + \pi \right] \; (k = 0, 1, 2, ...). \tag{15}$$

Приклад 2. В геології часто знаходять використання кореляційні функції, які називаються Гауссівськими кривими. Вони задаються формулою:

$$B(\rho) = C \exp\{-a\rho^2\}, \quad a > 0. \tag{16}$$

Відповідна спектральна щільність f(u) для цих кореляційних функцій випадкових процесів має вигляд:

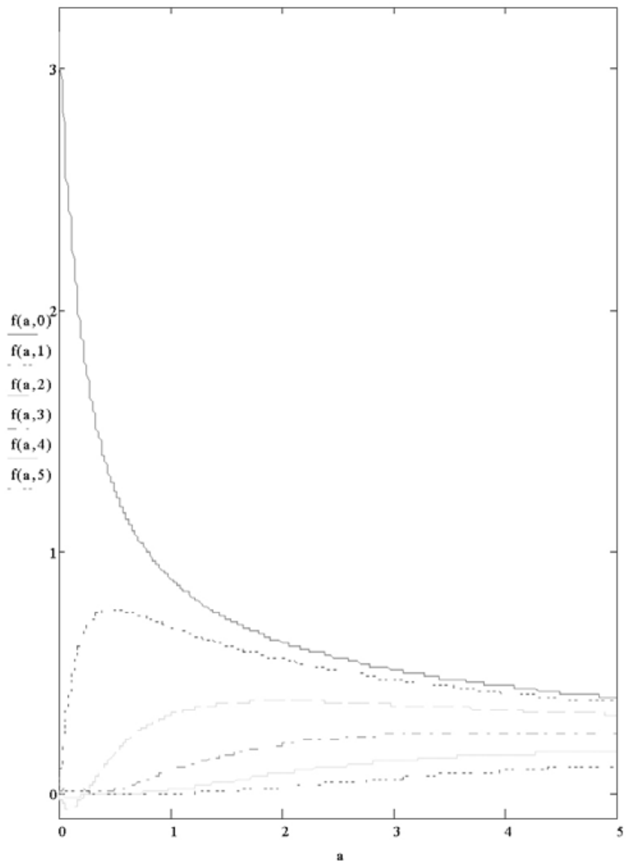
$$f(u) = \frac{C}{2\sqrt{\pi a}} \exp\left\{ -\frac{u^2}{4a} \right\}, \quad u \in R^1.$$

Цікавою особливістю такої функції є те, що така кореляційна функція $B(\rho)$ та відповідна їй спектральна щільність $f(u)$ мають однакову форму, тобто їх графіки відрізняються лише вибором масштабів вздовж осей координат.

Для Гауссівської кривої спектральні коефіцієнти в явному аналітичному вигляді не вдається знайти. Тому в якості спектральних коефіцієнтів b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ пропонується використовувати чисельне значення інтеграла:

$$b_k = f(a,k) = \frac{2}{T} C \int_0^T exp(-a\varphi^2) \cos \frac{k\pi\varphi}{T}\, d\varphi.$$

Було проведено аналітичне дослідження засобами пакета програм MathCad залежності значень спектральних коефіцієнтів $b_1, b_2, \ldots, b_5$, які відповідають кореляційній функції $B(\rho)$ експоненціального типу- Гауссівської кривої (16) від величини параметра $a. > 0$. На наступному рис. 1 зображено графіки такої залежності, що свідчить про спадання значень спектральних коефіцієнтів до нульового рівня із ростом їх номера к та зменшення їх різниці із збільшенням значення параметра *a.*



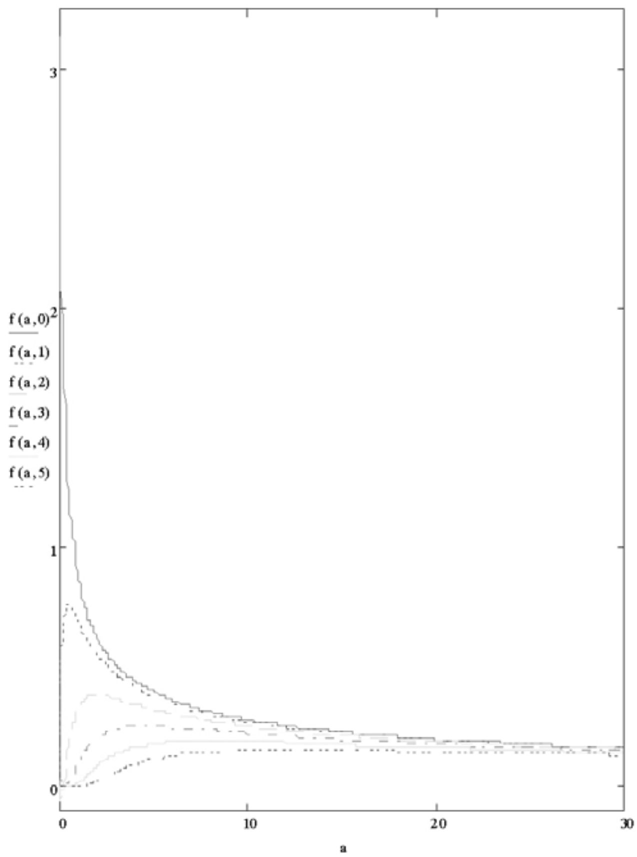


Рис. 1. Графіки залежності k-тих спектральних коефіцієнтів f(a,k) гауссівської кореляційної функції від параметра *a* (*ліворуч – параметр а змінюється від 0 до 5, праворуч – параметр а змінюється від 0 до 30*)

Таке дослідження можна використовувати для застосування до вирішення практичних задач, що пов'язані із необхідністю генерування комп'ютерними засобами реалізацій стаціонарних гауссівських випадкових процесів, які задаються своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією типу Гауссівської кривої. Продемонстрована на рис. 1 збіжність значень спектральних коефіцієнтів $b_k = f(a,k)$ $(k = 0, 1, 2, ...5)$ до нуля із ростом їх номера к дає можливість використовувати наведений нижче алгоритм та модель із достатньо високою адекватністю та точністю.

Приклад 3. На практиці [7] зустрічається модель стаціонарних випадкових процесів, яка має вигляд косинусоїди, а саме:

$$B(\rho) = c\cos\omega\rho, \quad c>0, \quad \omega>0. \tag{17}$$

Відповідна їй спектральна щільність $f(u)$ зображується наступною формулою:

$$f(u) = \frac{c}{2}\left\{\delta(u+\omega) + \delta(u-\omega)\right\}, \quad u\in R^1,$$

де $\delta(u)$ – δ-функція, поява якої пов'язана з тією обставиною, що кореляційна функція (17) не затухає на нескінченності.

Обчислимо спектральні коефіцієнти b_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ для кореляційної функції $B(\varphi)$ типу косинусоїди. Для цього скористаємось виразом (8) при T=π/2, звідки маємо:

$$b_k = \frac{4}{\pi}C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\omega\varphi\cos 2k\varphi\, d\varphi.$$

Обчисливши цей інтеграл, отримаємо наступний вираз для спектральних коефіцієнтів b_k :

$$b_k = \frac{2}{\pi}C\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}(\omega-2k)}{(\omega-2k)} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}(\omega+2k)}{(\omega+2k)}\right], \omega^2 \neq 4k^2\left(k = 0, 1, 2, ...\right). \tag{18}$$

Таблиця 1. **Кореляційні функції, спектральні щільності та відповідні спектральні коефіцієнти стаціонарних випадкових процесів**

N	$B(\rho)$	$\Phi(\lambda)$	$b_k(r)$
1	Трикутна двопарамет-рична (T≥a>0) $\begin{cases} 1-\frac{\lvert t-2kT\rvert}{a}, & \lvert t-2kT\rvert \le a, \\ 0, & \lvert t-2kT\rvert > a, \end{cases}$	$\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(Tau/2)}{au^2}$, $u\in R^1$.	$b_0 = \frac{a}{T}\left(1-\frac{a}{2}\right)$, $b_k = \frac{1}{k\pi}\left[\sin\frac{k\pi a}{T}(1-a) + \frac{l}{k\pi}\left(1-\cos\frac{k\pi a}{T}\right)\right]$ $k = 1, 2, ...$
1а	Трикутна двопараметрична (T=1, a=1)	$\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(u/2)}{u^2}$, $u\in R^1$.	$b_0 = \frac{1}{2},\ b_k = \begin{cases} \frac{4}{(k\pi)^2}, & k = 2m-1,\ (m\in N) \\ 0, & k = 2m. \end{cases}$
1б	Трикутна двопараметрична (T=2, a=1)	$\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(u)}{u^2}$, $u\in R^1$.	$b_0 = \frac{1}{4},\ b_k = \begin{cases} \frac{2}{(k\pi)^2}, & k = 2m-1,\ (m\in N) \\ \frac{4}{(k\pi)^2}, & k = 2(2m+1), \\ 0, & k = 4m. \end{cases}$
1в	Трикутна двопараметрична (T=3, a=1)	$\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(3u/2)}{u^2}$, $u\in R^1$.	$b_0 = \frac{1}{6},\ b_k = \begin{cases} \frac{1}{(k\pi)^2}, & k = 2m-1,\ (m\in N), \\ \frac{3}{(k\pi)^2}, & k = (2+6m)\vee(4+6m), \\ \frac{4}{(k\pi)^2}, & k = 3+6m, \\ 0, & k = 6m. \end{cases}$

Закінчення табл. 1

N	$B(\rho)$	$\Phi(\lambda)$	$b_k(r)$
1г	Трикутна двопараметрична (T=2π, a=1)	$\frac{2}{\pi}\frac{\sin^2(\pi u)}{u^2}$, $u \in R^1$.	$b_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad b_k = \frac{1-\cos k}{(k\pi)^2}, \quad k = 1, 2, ...$
2	На S2 (одиничне коло) $\frac{c}{2} \frac{1-q^2}{1-2q\cos\frac{\varphi\pi}{T}+q^2}$.		$b_k = c q^k, \quad q \in (0,1), \quad c > 0.$
3	Експоненціальна $\exp\{-c\rho\}, c>0, n \ge 1$	$\frac{c}{\pi}\frac{1}{u^2+c^2}, \quad n=1$	$\frac{c\,[(-1)^{k+1}\,e^{-c\pi}+1]}{c^2+k^2}$
4	Експоненціально затухаюча косинусоїда $c\,e^{-a\rho}\cos T\rho, c>0, a>0,$ $T>0, \quad \rho \in [0,1]$	$\frac{ca}{2\pi}\left\{\frac{1}{(\lambda+T)^2+a^2}+\frac{1}{(\lambda-T)^2+a^2}\right\}$	$\frac{a}{2}\left(1-e^{-a\pi}(-1)^{k+1}\right)\left[\frac{1}{a^2+(k+1)^2}+\frac{1}{a^2+(1-k)^2}\right]$ $c=1, \quad \rho=1, \quad T=\pi$
5	Косинусоїда $C\cos T\rho$, $C, T>0, \ \rho \in [0, +\infty]$	$\begin{cases} 0, & \lambda \le -T, \\ C/2, & -T < \lambda \le T, \\ C, & \lambda > T \end{cases}$	$\frac{C}{4}\left(\frac{\sin(T-2k)\pi}{(T-2k)}+\frac{\sin(T+2k)\pi}{(T+2k)}\right)$
6	Бесселевого типу $\frac{J_{1/2}(c\rho)}{(c\rho)^{1/2}}, c>0.$	$f(u) = \begin{cases} f_0, & \lvert u\rvert \le \Omega, \\ 0, & \lvert u\rvert > \Omega. \end{cases}$	$\frac{2f_0}{T}\left[si(\Omega T - k\pi) + si(\Omega T + k\pi) + \pi)\right]$ де si(x) – інтегральний синус

Отримані спектральні коефіцієнти можна використовувати для статистичного моделювання випадкових стаціонарних гауссівських випадкових процесів, які задаються своїми статистичними характеристиками: математичним сподіванням та кореляційною функцією (або спектральною щільністю) за алгоритмом, сформульованим у роботі [3]. Наведемо його.

За статистичну модель випадкового поля, що розглядається, приймається часткова сума ряду (5) вигляду:

$$\xi_N(\varphi) = \frac{\xi_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(\xi_k \cos\frac{k\pi\varphi}{T} + \eta_k \sin\frac{k\pi\varphi}{T}\right), \quad (N \in \mathrm{N}) \tag{19}$$

де $\{\xi_k, \ k=0,1,2,...,N\}$ та $\{\eta_k, \ k=0,1,2,...,N\}$ – послідовності некорельованих гауссівських випадкових величин з нульовим математичним сподіванням та дисперсіями :

$$D\xi_0 = b_0, \quad D\,\xi_k = D\,\eta_k = b_k, \quad k = 0,1,2,... \text{ N}, \tag{20}$$

де N – деяке натуральне число.

При цьому значення числа N визначається за допомогою нерівності, яка є оцінкою наближення випадкового процесу $\xi(\varphi)$ частковими сумами $\xi_N(\varphi)$ в середньому квадратичному. Таке число має відповідати наперед заданому як завгодно малому числу ε – точності наближення. Згадана нерівність отримана в роботі [3] (твердження наведено далі).

Теорема 2. Нехай D_m – клас функцій, які мають наступні властивості: для них існують похідні до порядку m–1 включно і похідна m–1 порядку абсолютно неперервна, а m – та похідна інтегровна та обмежена. Припустимо, що кореляційна функція $B(\varphi)$ – 2T- періодичного стаціонарного випадкового процесу $\xi(\varphi)$ належить до класу D_m. Тоді справедлива наступна оцінка середньоквадратичного наближення випадкового процесу $\xi(\varphi)$ частковими сумами (19):

$$\mathrm{M}\,\left[\xi(\varphi)-\xi_N(\varphi)\right]^2 \le K_m\left(\frac{l}{\pi}\right)^m \frac{N+2(m+1)}{N^m(m-1)}, \quad \left(N \in \mathrm{N}, \ m \ge 2\right), \tag{21}$$

де *m* – індекс класу функцій D_m, $K_m = \max\limits_{0\le\varphi\le 2T}\left|B^{(m)}(\varphi)\right|$ – максимум m-ї похідної від $B(\varphi)$.

На основі моделі (19) та оцінки (21) можна побудувано алгоритм статистичного моделювання гауссівського стаціонарного випадкового процесу $\xi(\varphi)$.

Алгоритм

1. Визначається значення числа N, відповідно наперед заданому числу ε, за допомогою нерівності (21) :

$$K_m\left(\frac{l}{\pi}\right)^m \frac{N+2(m+1)}{N^m(m-1)} \le \varepsilon, \quad \left(N \in \mathrm{N}, \ m \ge 2\right),$$

де *m* – індекс класу кореляційної функцій D_m.

2. Обчислюються спектральні коефіцієнти $b_k \quad (k = 0, 1, 2, ..., N)$ для кореляційної функції, що моделюється за відповідною аналітичною формулою з таблиці, або за виразом для інтеграла (8) від кореляційної функції.

Генеруються набори незалежних стандартних гауссівських випадкових величин $\{\ \zeta_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N\ \}$ та $\{\ \eta_k, \quad k = 0, 1, 2, ..., N\ \}$.

3. Обчислюються значення реалізації у вигляді суми при підстановці в неї знайдених за попередніми пунктами величин:

$$\xi_N(\varphi) \ = \ \sum_{k=0}^{N} \sqrt{\nu_k \ b_k} \ \ [\ \zeta_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi\ ].$$

4. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції $B_N(\varphi)$ по отриманій реалізації випадкового процесу $\xi(\varphi)$ (наприклад, за допомогою пакета Statistica) і порівнюється із заданою кореляційною функцією $B(\varphi)$), а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

Слід відзначити, що наведений алгоритм можна застосувати і до випадкових полів з іншим типом розподілу, а не лише з гауссівським.

За допомогою методів статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів вирішена проблема з генерування адекватних даних аеромагнітної зйомки в геофізиці засобами коп'ютера, коли їх неможливо отримати на практиці із заданою детальністю в деяких ділянках. Наведений спосіб моделювання дозволяє із вказаною точністю генерувати значення даних, яких не вистачає, при умові, що результати вимірювань мають властивість стаціонарності, або коли їх можна звести до стаціонарної та детермінованої складових.

3. Висновки

Отримано спектральні коефіцієнти у вигляді аналітичних формул для деяких основних практично важливих кореляційних функцій стаціонарних випадкових процесів, а також наведено спосіб їх обчислення засобами пакета програм MathCad у випадку, коли такі аналітичні формули знайти не вдається. Наведено модель та сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій стаціонарних випадкових процесів з використанням цих коефіцієнтів. За допомогою розробленого методу вирішена проблема генерування адекватних даних аеромагнітної зйомки в геофізиці засобами коп'ютера.Це дає можливість із значною економією затрат отримати карти високої кондиційності та проводити дослідження на виявлення магнітних аномалій.

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматиз, 1961, 936 с 2. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 1) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2003. – Вип.10. – С.85-91. 3. Вижва З.О. Про статистичне моделювання стаціонарних періодичних випадкових процесів (ч. 2) // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка.- 2004. – Вип. 11-12. – С.20-24. 4. Вижва З.О. Математичні моделі в природознавстві. Розділ: Статистичне моделювання випадкових процесів та полів у науках про Землю. Навчальний посібник з дисципліни "Математичні моделі в природознавстві" для студентів мех.-мат. ф.-ту/ К.: ВГЛ "Обрії", 2007, 160 с. 5. Вижва З.О., Зражевський О.Г. Про статистичне моделювання випадкових полів на площині //Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. – 2008. – Вип.19-20. – С. 43 – 47. 44. 6. Вижва З.О., Вижва А. С., Демидов В.К. Статистичне моделювання випадкових процесів та двовимірних полів в аеромагнітометрії // Вісн. Київ. ун-ту. Геологія. – 2010. – Вип.17. – С.57-59. 7. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979 – 408 с.. 7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1971. 8. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981, 280 с. 9. Ядренко М.И. Спектральная теория случайных полей. – К., 1980. 10. Chiles J.P., Delfiner P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty. John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto, 1999, 695 p.

Надійшла до редколегії 24.11.09

УДК 519.21

А. Мороз, асп., Г. Шевченко, канд. фіз.-мат. наук

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ФУНКЦІЇ ВАРТОСТІ АМЕРИКАНСЬКОГО ОПЦІОНУ У МОДЕЛІ ЛЕВІ ПРИ НЕОБМЕЖЕНОМУ РОЗШИРЕННІ ЧАСОВОГО ІНТЕРВАЛУ

У роботі розглянуто функцію вартості $V_T(x)$ Американського опціону у моделі Леві на обмеженому інтервалі, і доведено, що вона збігається до функції вартості $V(x)$ на необмеженому інтервалі. Досліджено швидкість цієї збіжності, і показано, що у випадку, коли момент оптимальної зупинки платіжного зобов'язання є першим моментом досягнення ціновим процесом деякого рівня, швидкість збіжності $V_T(x) \to V(x)$, $T \to \infty$ не менша за експоненційну.

The value function $V_T(x)$ for an American type perpetual contingent claim is considered in a finite interval Lévy model, and it is shown that it converges to the corresponding value function $V(x)$ in the infinite interval model. We consider the rate of this convergence and show that in the case when the optimal stopping time is the first time of crossing a certain level, the rate of convergence $V_T(x) \to V(x)$ is not worse than exponential.

1. Вступ

У даній роботі досліджуються функції вартості для задачі оптимальної зупинки платіжного зобов'язання американського типу на скінченному часовому інтервалі. Для випадку нескінченного горизонту часто вдається повністю описати структуру цін опціонів американського типу і відповідних областей зупинки та продовження спостережень. Ситуація ускладнюється, коли часовий параметр належить обмеженому часовому інтервалу.

Ми розглядаємо безарбітражний ринок з єдиним безризиковим активом та сталою безризиковою відсотковою ставкою, яка дорівнює $q \geq 0$, у випадку дискретного або непервного часу. Нехай $\{X_t, t \in T\}$ – процес з незалежними приростами, що моделює ціновий процес цього активу, $T = \mathbf{Z}^+ = \{0,1,2,...\}$ або $T = \mathbf{R}^+ = [0,\infty)$, $X_0 = x \in \mathbf{R} = (-\infty,\infty)$, $\{X_t, t \in T\}$ визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ з натуральною фільтрацією $\Im_t = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, $\Im_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Задача оптимальної реалізації довічного платіжного зобов'язання американського типу з функцією виплат $g(x)$ формулюється так [1,4]: максимізувати очікувану дисконтовану виплату $\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})$ у класі М всіх марковських моментів τ відносно $(\Im_t)$ зі значеннями в $[0,\infty]$. Іншими словами, задача полягає у відшуканні функції "вартості"

$$V(x)=\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0. \tag{1}$$

Оптимальним називатимемо такий момент зупинки τ^*, для якого

$$V(x)=\mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^*<\infty\}),\ x\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

У даній роботі ми доводимо, що за певних умов функцію вартості на обмеженому проміжку [0,T], яка має вигляд

$$V_T(x)=\sup_{\tau\in M,\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0, \tag{3}$$

можна наблизити функцією вартості $V(x)$, і даємо оцінку швидкості збіжності $V_T(x)$ до $V(x)$ у випадку, коли оптимальний момент зупинки має вигляд

$$\tau^*=\tau_a=\inf\{t\ge 0: X_t\ge a\}, \tag{4}$$

де оптимальне значення параметра a залежить від вигляду функції $g(x)$.

2. Збіжність функції вартості на обмеженому часовому проміжку до $V(x)$

Нехай $\{X_t, t\in T\}$ – однорідний процес з незалежними приростами, всі моменти якого скінченні і $X_0=0$, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega,\Im,P)$ з натуральною фільтрацією $\Im_t=\sigma\{X_s, s\le t\}$, $\Im_0=\{\varnothing,\Omega\}$. Розглядаємо одночасно з функцією вартості

$$V(x)=\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0, \tag{5}$$

наступну функцію:

$$V_T(x)=\sup_{\tau\in M_T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\}),\ x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0, \tag{6}$$

де $g(x)$ – вимірна функція, M, M_T – класи усіх марківських моментів зі значеннями відповідно в $[0,\infty]$ і $[0,T]$ відносно $(\Im_t)$.

Нехай τ^* – оптимальний момент зупинки,

$$V(x)=\mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^*<\infty\}),\ x\in\mathbf{R}. \tag{7}$$

У [1] показано, що для функції виплат $g(x)=(x^+)^\upsilon=(\max(x,0))^\upsilon$ момент оптимальної зупинки τ^* є першим моментом виходу на деякий рівень $a,$ який було знайдено у явному вигляді. Аналогічний результат для функції виплат $g(x)=(1-e^{-x})^+$ було одержано в [3].

Доведемо тепер, що за певних припущень має місце збіжність

$$V_T(x)\to V(x),\quad T\to\infty, \tag{8}$$

і з'ясуємо, з якою швидкістю $V_T(x)\to V(x)$, $T\to\infty$ у випадку, коли τ^* є першим моментом виходу процесу X_t на деякий рівень.

Надалі нам знадобиться наступна теорема [8].

Теорема (Нерівність Буркхольдера–Ганді–Девіса). Якщо $(X_t,\Im_t)$ – мартингал, то для довільного $1\le p<\infty$ існують такі сталі $c(p),C(p)$, що для всіх скінченних марківських моментів T виконується:

$$\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}X_t^p\right|^{1/p}\le c(p)(\mathbf{E}\left|[X,X]_T^{p/2}\right|)^{1/p}\le C(p)(\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}X_t^p\right|)^{1/p}, \tag{9}$$

де $[X,X]_t=X_t^2-\int X_{t-}dX_t$ – квадратична варіація процесу X_t, $X_{t-}=\lim_{s\uparrow t}X_s$, $X_{0-}=X_0=0$.

Доведемо спочатку допоміжну лему:

Лема 1. Нехай X_t – процес Леві, всі моменти якого скінченні і $X_0=0$. Тоді для всіх $\alpha>0$ має місце нерівність:

$$\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}X_t\right|^\alpha\le c(\alpha)T^\alpha\vee T \tag{10}$$

для всіх $T\ge 0$, де $a\vee b$ – максимум чисел a і b.

Доведення: Запишемо розклад Леві–Іто для процесу X_t:

$$X_t=at+\sigma W_t+\int_0^t\int_{\{|x|\le 1\}}x(\mu-\lambda\otimes\nu)(ds,dx)+\int_0^t\int_{\{|x|>1\}}x\mu(ds,dx), \tag{11}$$

де λ – міра Лебега, μ – пуассонівська міра на $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, $\mu = \sum_{t\ge 0} \varepsilon_{(t,\Delta X_t)} \mathbf{I}\{\Delta X_t \ne 0\}$, ε_z – міра Дірака, ν – міра Леві процесу X_t.

Має місце наступний ряд нерівностей:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|X_t\right|^{\alpha} \le \mathbf{E}\left|\sup_{t\le T}(at+\int_0^t\int_{\{|x|\le 1\}} x(\mu-\lambda\otimes\nu)(ds,dx)+\int_0^t\int_{\{|x|>1\}} x\mu(ds,dx))\right|^{\alpha} + \sigma\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} W_t\right|^{\alpha}. \quad (12)$$

Оцінимо спочатку $\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} W_t\right|^{\alpha}$. Оскільки $P(\sup_{s\le T}|W_s|\ge y) \le 2P(\sup_{s\le T} W_s \ge y) = 4P(W_t\ge y) = 2P(|W_t|\ge y)$ та $\mathbf{E}|W_t|^{\alpha} = \dfrac{2^{\frac{\alpha}{2}+1} t^{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)$, де $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція, то справедлива наступна нерівність:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}|W_t|^{\alpha} \le h(\alpha)t^{\frac{\alpha}{2}} \le h(\alpha)T^{\frac{\alpha}{2}} \vee T$$

для деякого $h(\alpha)\in R$.

Перейдемо тепер до оцінки другого доданку у правій частині (12). Розглянемо процес

$$Y_t = at + \int_0^t\int_{\{|x|\le 1\}} x(\mu-\lambda\otimes\nu)(ds,dx) + \int_0^t\int_{\{|x|>1\}} x\mu(ds,dx)).$$

Для нього справджується:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|Y_t\right|^{\alpha} = \mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|(Y_t - t\mathbf{E}Y_1) + t\mathbf{E}Y_1\right|^{\alpha} \le \gamma_1(\alpha)T^{\alpha} + \gamma_2(\alpha)\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|Y_t - t\mathbf{E}Y_1\right|^{\alpha}.$$

Розглянемо окремо випадки, коли $\alpha<1,\ 1\le\alpha<2$ і $\alpha>2$. Так як Y_t –процес з незалежними приростами, то $M_t = Y_t - t\mathbf{E}Y_1 = \int_0^t\int x(\mu-\lambda\otimes\nu)(ds,dx)$ – мартингал, і для нього справедлива нерівність Буркхольдера–Ганді–Девіса. Для випадків $\alpha<1,\ 1\le\alpha<2$, як показано в [9], виконується:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t\right|^{\alpha} \le c(\alpha)T, \quad (13)$$

і $\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} X_t\right|^{\alpha} \le c(\alpha)T^{\alpha}\vee T.$

Для $\alpha>2$ в [9] було доведено, що

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t\right|^{\alpha} \le c(\alpha)T \text{ для всіх } T\in[0,1]. \quad (14)$$

Нехай тепер $T\ge 1$. Будемо позначати $[t],\ \{t\}$ — відповідно цілу і дробову частину t. Тоді завдяки однорідності приростів процесу X_t, існують такі дійсні сталі $c_1(\alpha),\ c_2(\alpha),\ c_3(\alpha)$, для яких виконано:

$$\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t\right|^{\alpha} = \mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|(M_t - M_{[t]}) + (M[_{[t]} - M_{[t-1]}) + \ldots + (M_1 - M_0)\right|^{\alpha} \le$$
$$\le c_1(\alpha)T^{\alpha-1}\left(\mathbf{E}\sup_{t\le T}\left|M_t - M_{[t]}\right|^{\alpha} + \sum_{k=1}^{[T]}\mathbf{E}\left|M_k - M_{k-1}\right|^{\alpha}\right) \le$$
$$\le c_1(\alpha)T^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{[T]}\mathbf{E}\sup_{k-1\le t\le k}\left|M_t - M_{[t]}\right|^{\alpha} + c_2(\alpha)T\right) = c_1(\alpha)T^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{[T]}\mathbf{E}\sup_{0\le t\le 1}\left|M_t\right|^{\alpha} + c_2(\alpha)T\right) \le c_3(\alpha)T^{\alpha}.$$

Остаточно, в цьому випадку маємо $\mathbf{E}\left|\sup_{t\le T} X_t\right|^{\alpha} \le c(\alpha)T^{\alpha}\vee T.$

Таким чином, лему доведено.

Теорема 1. Нехай $V_T(x) = \sup_{\tau\in M,\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})$, $x\in\mathbf{R},\quad q\ge 0$, існують такі сталі $c_1, c_2 > 0$, $\alpha>0$, що

$$g(x)\le c_1|x|^{\alpha} + c_2,$$

і оптимальний момент зупинки τ^* є першим моментом виходу процесу X_t на деякий рівень *a:*

$$\tau^* = \tau_a = \inf\{t\ge 0: X_t\ge a\}.$$

Тоді $V_T(x)\to V(x)$, $T\to\infty,$ і існує невід'ємна константа c^*, така що

$$|V_T(x) - V(x)| \le c^* e^{-qT},\quad T\to\infty.$$

Доведення. Запишемо наступний ряд нерівностей:

$$\left|\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})-\sup_{\tau\in M,0<\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})\right|\le$$
$$\le\left|\mathbf{E}(g(X_{\tau^*\wedge T})e^{-q\tau^*\wedge T})-\mathbf{E}(g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{\tau^*<\infty\})\right|=$$
$$=\left|\mathbf{E}\left(g(X_T)e^{-qT}-g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\right)\ \mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|\le \tag{15}$$
$$\le\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|+\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|.$$

Введемо позначення: $\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\right|=E_1$, $\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|=E_2$.

Оскільки τ^* є першим моментом виходу процесу X_t на деякий рівень a, то при виконанні умови $g(x)\le c_1|x|^\alpha+c_2$, мають місце нерівності:

$$E_1\le|g(a)|e^{-qT}P(\{T<\tau^*<\infty\})=c_1e^{-qT}P(\{T<\tau^*<\infty\}),$$
$$E_2\le c_2e^{-qT}P(\{T<\tau^*<\infty\}),$$

Звідки $E_1+E_2\le c^*e^{-qT}\to 0, T\to\infty,$ де c_1,c_2, c^* –деякі сталі.

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли τ^* не є моментом виходу цінового процесу на деякий рівень.

Теорема 2. Нехай $V_T(x)=\sup\limits_{\tau\in M,\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})$, $x\in\mathbf{R}, q\ge 0$, і існують сталі $c_1,c_2>0$, $\alpha>0$, такі, що

$$g(x)\le c_1|x|^\alpha+c_2.$$

Тоді $V_T(x)\to V(x)$, $T\to\infty$.

Доведення. Так само, як і при доведенні теореми 1, запишемо нерівності:

$$\left|\sup_{\tau\in M}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})-\sup_{\tau\in M,0<\tau<T}\mathbf{E}(g(X_\tau)e^{-q\tau}\mathbf{I}\{\tau<\infty\})\right|\le \tag{16}$$
$$\le\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|+\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|.$$

Введемо позначення:

$$\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|=E_1,\ \ \mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\right|=E_2.$$

Покажемо спочатку, що $E_1\to 0,\ \ T\to\infty$.

Очевидно, у випадку дискретного часу,

$$E_1=\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|=\sum_{t=T}^{\infty}\mathbf{E}\left|g(X_t)e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\right|\le\sum_{t=T}^{\infty}\mathbf{E}(c_1\left|X_t\right|^\alpha+c_2)e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\to 0,\ \ T\to\infty,$$

як хвіст збіжного ряду. Дійсно,

$$\mathbf{E}\left|X_t\right|^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}=\mathbf{E}\left|\sum_{k=0}^{t}\Delta X_k\right|^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\le\hat{c}(\alpha)t^\alpha\mathbf{E}\sum_{k=0}^{t}(\Delta X_k)^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}=$$
$$=\hat{c}(\alpha)t^\alpha\sum_{k=0}^{t}\mathbf{E}(\Delta X_k)^\alpha e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}\le\hat{c}(\alpha)t^{\alpha+1}e^{-qt}$$

в силу однорідності процесу X_t і незалежності його приростів, і тому відповідний ряд збігається.

У випадку неперервного часу, має місце наступна нерівність:

$$E_1=\mathbf{E}\left|g(X_{\tau^*})e^{-q\tau^*}\mathbf{I}\{T<\tau^*<\infty\}\right|\le\sum_{t=T}^{\infty}\mathbf{E}\sup_{\zeta\in[t,t+1]}(c_1\left|X_\zeta\right|^\alpha+c_2)e^{-qt}\mathbf{I}\{\tau^*=t\}. \tag{17}$$

Згідно з лемою 1:

$$\mathbf{E}\sup_{\zeta\in[t,t+1]}\left|X_\zeta\right|^\alpha\le\mathbf{E}\sup_{\zeta\le t+1}\left|X_\zeta\right|^\alpha\le\gamma_1(\alpha)(t+1)^\alpha\vee(t+1),$$

де γ_1 – деяка стала.

Отже, $E_1\to 0, T\to\infty$, як хвіст збіжного ряду.

Аналогічно, можна довести, що $E_2\to 0,\ \ T\to\infty.$

Як для дискретного, так і для неперервного часу маємо :

$$E_2=\mathbf{E}\left|g(X_T)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\right|\le(c_1\mathbf{E}\left|X_T\right|^\alpha+c_2)e^{-qT}\mathbf{I}\{\tau^*>T\}\le c_3(\alpha)\left(T^\alpha\vee T+1\right)\cdot e^{-qT}\to 0,\ \ T\to\infty.$$

Таким чином, ми показали,що $E_1 + E_2 \to 0, \ \ T \to \infty$.

Теорему 2 доведено.

3. Висновки

Розглянуто задачу оптимальної зупинки процесів із незалежними приростами і доведено, що в умовах безарбітражного ринку функцію вартості на скінченному інтервалі можна при виконанні певних умов наблизити функцією вартості на нескінченному інтервалі. Отримано оцінку швидкості цієї збіжності і показано, що у випадку, коли оптимальний момент зупинки є моментом першого виходу цінового процесу на деякий рівень, швидкість збіжності не менша за експоненційну.

1. *Новиков А., Ширяев А.* Об одном эффективном случае решения задачи об оптимальной остановке для случайных блужданий// Теория вероятности и применения. – 2004. – 373–382; 2. *Ширяев А.* Основы стохастической финансовой математки.– М., 2004; 3. *Шевченко Г.М., Мороз А.Г.* Задача оптимальної зупинки для процесів з незалежними приростами// Український математичний вісник. – 2009. – Том 6. – №1. – 126–134; 4. *Novikov A., Shiryaev A.* On a solution of the optimal stopping problem for processes with independent increments// An International journal of Probability and Stochastic processes.– 2007.– Vol. 79.– 393–406; 5. *Schoutens W.* Stochastic processes and orthogonal polynomials.– New–York, 2000; 6. *Darling A., Ligget T., Taylor H.* Optimal stopping for partial sums// The Annals of mathematical statistics. – 1972.– №43.– 1363–1368; 7. *Kyprianou A.* On the Novikov–Shiryaev optimal stopping problem in continuous time// Elect. Comm. In Probability. – 2005.– №10. – 146–154; *8. Protter P.E.* Stochastic integration and differential equations. – Springer. – 2004; *9. Harald Luschgy* Moment estimates for Levy processes// Elect. Comm. In Probab. – 2008. – 13. – 422–434.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 532.595

О. Лимарченко, І. Семенова

СОВМЕСТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕЗЕРВУАРА С ЖИДКОСТЬЮ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ СИЛОВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

На основі варіаційного алгоритму розглянуто задачу динаміки сумісного руху обмеженого об'єму рідини і резервуару параболічної форми. Досліджено хвильові рухи рідини і рух резервуару. Показано необхідність включення достатньо великої кількості форм коливань рідини в модель.

On the basis of variational algorithm we consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of parabolic shape. Wave motion of liquid and reservoir motion were investigated. The necessity of entraining of sufficiently great number of liquid oscillation modes into model was shown.

1. Вступ

Розглянемо задачу про перехідні процеси при сумісному русі параболічного резервуару і рідини з вільною поверхнею. Припускаємо, що рідина ідеальна однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. В цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей.

Відомо, що такі задачі є актуальними і активно досліджуються в останні роки. Насамперед слід відзначити праці Г.С. Нариманова, Б.І. Рабиновича, Л.В. Докучаєва, І.О. Луковського, Дж. Майлса, Г. Бауера та інших авторов, включених до оглядів [2, 4-6]. Основну увагу в цих працях приділялося бакам циліндричної форми. Дослідження показали високу ефективність варіаційних методів для таких задач. Вивчення динаміки рідини з вільною поверхнею в нециліндричних баках проводилося в працях Г. Бауера, І.О. Луковського, О.С. Лимарченка, де було зосереджено увагу на необхідності введення недекартової параметризації і складності виконання умов розв'язності задачі. В той же час дотепер задачі про рух резервуарів нециліндричної форми з рідиною є мало дослідженими особливо у випадку сумісного руху системи.

Метою роботи є розробка ефективної нелінійної динамічної моделі системи резервуар параболічної форми – рідина з вільною поверхнею і її апробація на прикладі задачі про хвильовий рух рідини з вільною поверхнею при її сумісному русі з резервуаром, викликаним силовим імпульсним збудженням системи.

2. Метод дослідження

Будемо описувати рух рідини в системі координат, незмінно пов'язаною з резервуаром. Нехай φ – потенціал швидкостей; τ – область, яку займає рідина (τ_0 – незбурена область); $\frac{\partial}{\partial n}$ – зовнішня норрмаль до поверхні; S_0 і S – відповідно незбурена та збурена вільні поверхні рідини; Σ і Σ_0 – збурена і незбурена змочувані границі області τ ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\eta(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні руху, U – потенціальна енергія зовнішніх сил. Припускаємо рух резервуару поступальним і опишемо його вектором переміщень $\vec{\varepsilon}$.

Для опису руху рідини аналогічно роботам [1, 2, 4, 5] вводимо недекартову параметризацію області рідини τ: $\alpha = \frac{r}{f(z)}$; $\beta = \frac{z}{H}$. Тут через $r = f(z)$ позначено рівняння твірної порожнини, яке задано в циліндричній системі координат r, θ, z; H – глибина заповнення рідини. Приймаємо що z=0 відповідає незбуреній вільній поверхні рідини S_0. Центр системи координат знаходиться в центрі незбуреної поверхні рідини, вісь *Oz* направлена вгору. Система циліндричних координат (r,θ,z) введеною параметризацією замінюється на нову недекартову (α,θ,β) ($\alpha\in[0,1]$; $\theta\in[0,2\pi]$, причому в незбуреному стані $\beta\in[-1,0]$). В прийнятій недекартовій системі координат (α,θ,β) область рідини набуває циліндричної форми і тепер можна здійснити представлення рівняння вільної поверхні рідини у розв'язаному відносно координати β вигляді: $\beta=\frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t)$. Надалі це дозволяє ефективно застосувати метод збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки резервуара з рідиною.

Постановка задачі Неймана для рівняння Лапласа про рух рідини в нових змінних набуває вигляду

$$\Delta\varphi=0\,; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}-f'\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0 \text{ при } r=f(z)\,; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{1}{f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{1}{\alpha^2 f^2}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\underline{\frac{\alpha f'}{f}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial z}}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\text{, при } \beta=\frac{1}{H}\xi(\alpha,\theta,t)\,. \tag{3}$$

Підкреслений доданок виник через нециліндричність області рідини. З точки зору аналітичної механіки математичне формулювання задачі динаміки системи резервуар–рідина з вільною поверхнею являє собою сукупність кінематичних (1)-(3) і динамічних крайових умов. Кінематичні умови повинні розглядатися як механічні в'язі, які накладають обмеження на варіації невідомих при описі механічної системи на основі принципу Гамільтона–Остроградського. При цьому динамічні крайовіі умови випливають з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського як природні.

Рівняння (1)-(3) по відношенню до варіаційного принципу

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=0\,, \tag{4}$$

де $L=\frac{1}{2}\rho\int_{\tau}(\vec{\nabla}\varphi)^2d\tau+\frac{1}{2}M_p(\dot{\vec{\varepsilon}})^2+\frac{1}{2}\rho g\int_{S_0}\xi^2dS+(M_p+M_f)\varepsilon_z g$ (тут ρ – густина рідини, M_p і M_f маси резервуару і рідини, g – прискорення вільного падіння) предста-вляють сукупність кінематичних в'язей, які для ефективного застосування варіаційних методів слід виклю-чити до розв'язання варіаційної задачі. Для замкненого формулювання задачі треба до (1)-(3) додати ще динамічну крайову умову на вільній поверхні, яка одержується з варіаційного принципу (4),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\varphi\right)^2-\vec{\nabla}\varphi\cdot\dot{\vec{\varepsilon}}+g\xi=0 \text{ на } S\,. \tag{5}$$

Задача Неймана має бути доповнена умовами розв'язності, які можуть бути записані у вигляді

$$\int_{\Sigma_0}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma+\int_{\Delta\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma+\int_{S}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS=0\,. \tag{6}$$

Фізичний зміст умов (6) полягає у збереженні об'єму рідини у її збуреному русі, які мають виконуватися для довільного закону руху. Тому з точки зору аналітичної механіки умови розв'язності слід розглядати як кінематичні в'язі, які треба задовільнити до рішення варіаційної задачі (4). Зауважимо, що перший член в умові (6) є вимогою слабкого задовільнення умови неперетікання на змоченій в незбуреному стані стінки бака, другий член (6) є вимогою неперетікання рідини на певному продовжені стінки бака над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребені хвиль, а третій член – вимога збереження об'єму рідини в її збуреному русі. З точки зору аналітичної механіки ці умови повинні виконуватися незалежно, оскільки варіації на різних поверхнях незалежні. Причому задовільнити ці умови слід на етапі побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Для успішної побудови нелінійної скінченовимірної моделі динаміки рідини з вільною поверхнею в порожнині обертання слід визначити набір координатних функцій для представлення потенціалу швидкостей рідини. Класична задача про визначення частот і форм коливань рідини має вигляд

$$\Delta\varphi=0 \text{ в } \tau;\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \text{ на } \Sigma_0;\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=\lambda\varphi \text{ на } S_0\text{, або } \delta I=0\text{, де } I=\int_{\tau_0}(\vec{\nabla}\varphi)^2d\tau-\lambda\int_{S_0}\varphi^2ds\,. \tag{7}$$

Розв'язок цієї задачі лише частково задовільняє вимогам збереження об'єму рідини (6) і має аналітичну особливість на контурі контракту рідина-газ-резервуар L_0, що в значний мірі суперечить механічному змісту задачі. Зауважимо також, що розв'язок задачі (7) є єдиним з точністю до множника, а тому жодні додаткові обмеження на розв'язок не можна накладати. Тому для рішення нелінійної задачі доцільно відмовитися від класичного формулювання задачі (7) і побудувати наближено систему координатних функцій $\bar{\psi}_i$, близьких до розв'язків задачі (7) ψ_i з відповідними параметрами $\bar{\lambda}_i$ і λ_i. При цьому в силу (7) ці функції додатково мають уточнено задовільняти умові неперетікання на $\Delta\Sigma$.

Для реалізації цієї задачі використовуємо два прийоми: ітераційне уточнення розв'язку задачі на власні значення для покращення точності розв'язку і метод допоміжної області для послаблення впливу особливої точки на контурі і виконання умов неперетікання на продовженні стінок резервуару [1-3]. Для різних форм баку використовуються розклади по гармонічним поліномам, які враховують геометрію порожнини. Застосування цих методів [1-3] дозволило одержати розв'язок задачі про визначення координатних функцій $\bar{\psi}_i$, які з точністю до $10^{-6}-10^{-5}$ задовільняють умовам неперетікання на межі Σ_0, проте, що найважливіше, ці розв'язки з точністю до 10^{-3} задовільняють умови неперетікання на стінках резервуара вище рівня незбуреної вільної поверхні $\Delta\Sigma$, що в 500–1000 разів точніше, ніж розв'язки класичної задачі ψ_i [3].

Розклади шуканих змінних збурення вільної поверхні рідини ξ і потенціалу швидкостей φ аналогічно роботам [1, 2] подамо у вигляді

$$\xi = \overline{\xi}(t) + \sum_i a_i \overline{\psi}_i(\alpha) T_i(\theta)\,;\ \varphi_0 = \sum_i b_i \psi_i(\alpha,\beta) T_i(\theta)\,,\ \text{де}\ \overline{\psi}_i(\alpha) = \left.\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right|_{\beta=0}, \tag{8}$$

$T_i(\theta)$ – тригонометричні функції. Координатні функції для зображення потенціалу швидкостей рідини $\psi_i(\alpha,\beta)$ є гармонічними і згідно вимог умов розв'язності (1)–(4), уточнено задовільняють вимогу неперетікання на змоченій границі Σ, яка складається з незбуреної межі Σ_0 і її певного продовження $\Delta\Sigma$, до якого піднімаються гребені хвиль.

На відміну від випадку циліндричної області розклади змінних включають член $\overline{\xi} = \overline{\xi}(t, a_j)$, який визначається з вимоги збереження об'єму рідини в її збуреному русі. Згідно [2], приймаємо амплітудні параметри a_i розкладів збурень вільної поверхні рідини в якості незалежних, а параметри розкладу потенціалу швидкостей будемо розглядати як залежні від a_i: $b_i = b_i(\dot{a}_i, a_k)$.

Подамо $\overline{\xi}$ і b_j у вигляді $\overline{\xi} = \overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2 + \overline{\xi}_3$; $b_j = b^{(1)}{}_j + b_j^{(2)} + b_j^{(3)} + b_j^{(4)}$. Тут цифрові індекси відповідають порядку малості величин. З вимоги збереження об'єму одержимо

$$\overline{\xi}_1 = 0\,;\ \overline{\xi}_2 = -\frac{f'(0)}{\pi f(0)} \sum_{i,j} a_i a_j \beta_{ij}^{v}\,;\ \overline{\xi}_3 = -\frac{f'(0)^2 + f(0) f''(0)}{3\pi f(0)^2} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma_{ijk}^{v}\,. \tag{9}$$

Згідно принципів аналітичної механіки задача вимагає виключення кінематичної крайової умови на вільній поверхні, що зумовлено наявністю вільної поверхні рідини. Виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні проводиться на основі методу Гальоркіна [1, 2]. Залежності $b_i = b_i(\dot{a}_i, a_k)$ є неголономними в'язями

$$b_p^{(1)} = \dot{a}_p\,;\ b_p^{(2)} = \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \gamma_{ijp}^{o}\,;\ b_p^{(3)} = \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \delta_{ijkp}^{o}\,;\ b_p^{(4)} = \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l h_{ijklp}^{o}\,. \tag{10}$$

Таким чином параметри $\overline{\xi}$ і b_i як залежні змінні виключаються з розгляду. Це дозволяє перейти до застосування варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського для вільної системи, рух якої визначається незалежними параметрами a_i і $\vec{\varepsilon}$. Дискретна модель будується на основі методу Канторовича аналогічно випадку циліндричного резервуару [2]. На відміну від інших методів дослідження нелінійних задач динаміки тіл з рідиною з вільною поверхнею [4-6] нелінійна дискретна модель (10) має минімальну розмірність. Тепер рівняння руху системи тіло-рідина в амплітудних параметрах a_i і параметрах поступального руху резервуару ε_i можна записати у вигляді [2]

$$\sum_{n=1}^{N} p_{rn}(a_k, t)\ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t)\ddot{\varepsilon}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t),\ \ r = \overline{1, N+3}, \tag{11}$$

p_{rn} і q_r виражаються через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від a_i и $\dot{a}_j$.

Чисельними методами було вивчено приклади руху системи параболічний резервуар–рідина в площині *xOy* з метою підтвердження достовірності одержаною моделлю реально спостережуваних явищ поверхневого хвилеутворення і силової взаємодії резервуара з рідиною. Для обчислень приймалось $M_p = 0{,}2M_f$; *R*=1м; значення ρ і σ обирались для води. Розглядалася задача силового збудження коливань в рухомому параболічному баці $r = \sqrt{z+H}$. На рухомий параболічний резервуар діяла в горизонтальному напрямку сила у вигляді прямокутного імпульсу $F_y = 1, \tau = 0{,}5$. На рис. 1 подано картини хвиль на вільній поверхні для різних мометів часу. Профіль хвиль має несиметричний характер, проте властивість перевищення горба хвилі над впадиною проявляється не так сильно, як у випадку циліндра. Рис. 1 ілюструє значний вплив вищих форм коливань. Так, наприклад, в момент часу $t = 3{,}8c$ в процес хвилеутворення значний внесок дає друга антисиметрична форма. Це ще раз підтверджує необхідність при дослідженні перехідних процесів включати до розгляду вищі гармоніки, що відповідають $m = 1$. Розглядалася також задача просторового хвилеутворення, коли на рухомий параболічний бак форми $r = \sqrt{z+H}$ діяв прямокутний імпульс сили в напрямку вісі Oy $F_y = 1, \tau = 0.5$, а в перпендикулярному напрямку рух збурювався початковим відхиленням вільної поверхні за першою антисиметричною формою $a_2 = 0{,}1R$. На Рис. 2 подано картину хвиль на вільній поверхні рідини для однакових моментів часу в перпендикулярних напрямках. Помітно, що збурення вільної поверхні в перпендикулярному напрямку приводить через певний час до росту амплітуд в головному напрямку. Це ще раз підтверджує взаємозалежність всіх форм коливань, які розглядаються в моделі. З графічних результатів помітні головні властивості нелінійного хвилеутворення на вільній поверхні. Зокрема, помітний внесок вищих гармонік спектру, перерозподіл енергії між формами коливань, збудження вісесиметричних форм коливань, які зумовлюють відсутність вузлових ліній і перевищення висоти горба хвилі над глибиною впадини. На горбі хвилі рідина з високою точністю не перетинає стінку резервуару.

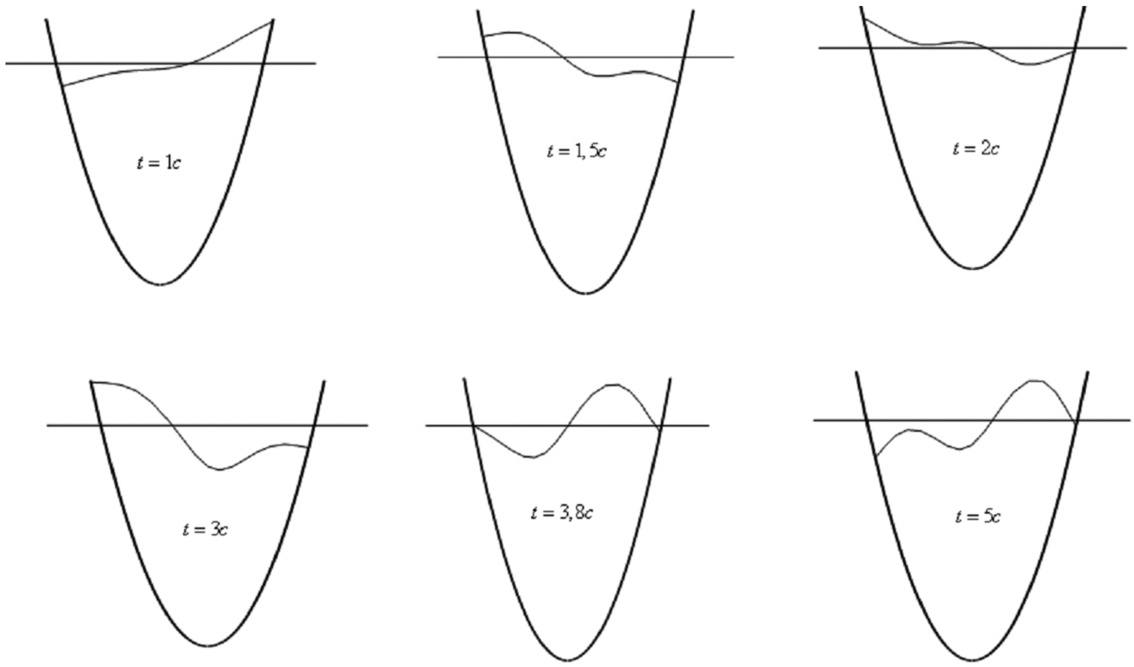


Рис. 1. Картини хвиль при силовому збудженні коливань в рухомому параболічному резервуарі

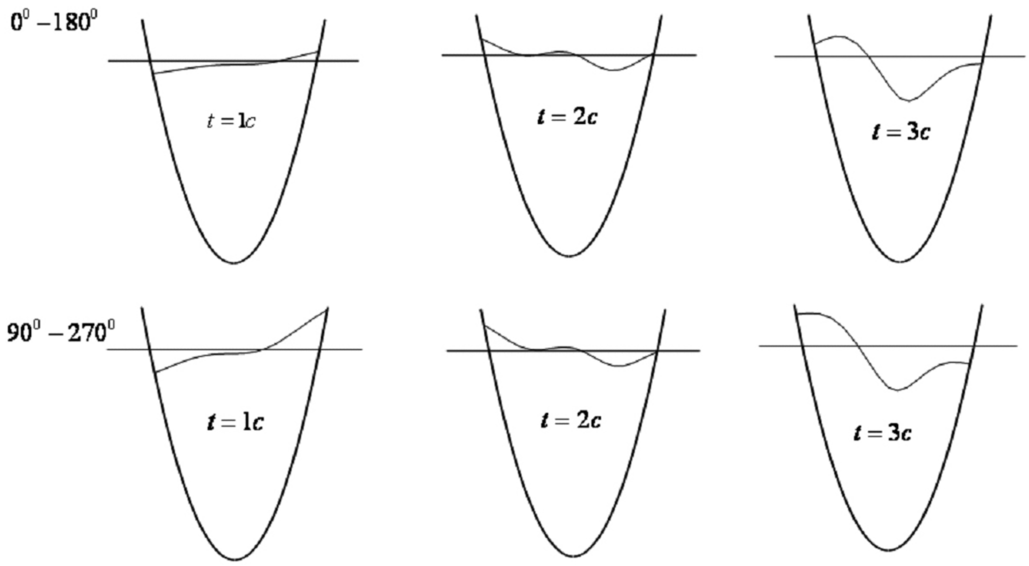


Рис. 2. Просторове хвилеутворення в рухомому параболічному резервуарі в перпендикулярних перерізах

3. Висновки

Розвинуто ефективний метод побудови дискретної нелінійної моделі динаміки резервуарів з рідиною, орієнтовані на дослідження перехідних процесів. Суттєвою особливістю даного методу є аналітичне виключення всіх залежних змінних до розв'язання задачі на етапі задовільнення кінематичних обмежень задачі, включаючи умови розв'язності задачі Неймана для рівняння Лапласа, для довільного числа координатних функцій. Побудовано нелінійну дискретну модель сумісного руху системи резервуар – рідина з вільною поверхнею. Розвинений підхід реалізован на прикладі резевуарів параболічної форми. Вивчено характеристики просторового поверхневого хвилеутворення при силовому імпульсному збудженні руху системи параболоїд – рідина. Встановлено нелінійну взаємозалежність всіх форм коливань, які враховуються в розрахунковій моделі. Показано необхідність включення великого числа координатних функцій в розрахункову модель для достовірного відображення реальних властивостей хвилеутворення.

1. *Лимарченко О.С.* Моделирование динамики конструкций, несущих жидкость со свободной поверхно-стью, Киев, 1991. – 57 с. – (Препринт / АН УССР, Институт математики, 91.16). *2. Лимарченко О.С., В.В. Ясинский* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью, Киев: Национальный технический университет Украины "КПИ", 1997. – 348 с. *3. Лимарченко О.С., Семенова И.Ю.* Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения, Комплексний аналіз і течії з вільними границями. Збірник праць Інститут у математики НАН України. – Київ, Інститут математики НАН України, 2006. – Т.3. – № 4. – С. 374 – 388. *4. Луковский И.А.* Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы, Киев, Наукова думка 1975. –135 с. *5. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью, М., Машиностроение, 1977. – 208 с. *6. Ibrahim R. A.* Liquid sloshing dynamics: theory and applications/ Ibrahim R. A. – Cambridge University Press. – 2005. – 950 p.

Надійшла до редколегії 30.06.10

УДК 539.3

В. Лях, канд. фіз.-мат. наук, В. Андрущенко, пров. інж.

ВИВЧЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ МАТЕРІАЛІВ ПРИ МІКРОІНДЕНТУВАННІ СФЕРИЧНИМ ІНДЕНТОРОМ

У роботі за допомогою методу скінченних елементів досліджено напружено-деформований стан матеріалу під індентором. Властивості матеріалу моделювалися за білінійним законом. Окрема увага приділяється розвитку зон пластичної деформації.

This paper adresses finite element study of elasto-plastic behaviour and mechanical parameters of materials within microindentation by spherical indentor. Strain-stress state is analyzed beneath the indentor. The progress of plactic zones is under particular attention. The results are compared with experimental data.

1. Вступ

Задача про контакт тіл з неузгодженими поверхнями є фундаментальною задачею механіки матеріалів. Тоді як індентування матеріалів, традиційно, один з основних методів визначення їх механічних властивостей, а неперервне індентування – найголовніший з методів неруйнівновного контролю конструкційних характеристик і стану матеріалів [1,2]. Тому задача пружно-пластичного контакту сфери з півпростором має визначальне теоретичне й прикладне значення.

В останні роки, індентування, зокрема сферичне, розробляється й досліджується як ефективний, неруйнівний метод визначення механічних властивостей матеріалів [3-6]. Цей метод застосовується у випадках, коли неможливо провести традиційні випробування на розрив. Основне завдання – зв'язати експериментальні діаграми індентування з стандартними деформаційними кривими.

У роботі викладено результати вимірювання пружних властивостей матеріалів шляхом мікроіндентування сферичним індентором. За допомогою методу скінченних елементів досліджено напружено-деформований стан матеріалу під індентором.

2. Скінченно-елементна модель

Розрахунок ефективно провести, використовуючи двовимірну вісесиметричну модель. Сферичний індентор моделюється півсферою, а досліджуваний матеріал – товстою круглою пластиною (див. рис.1).

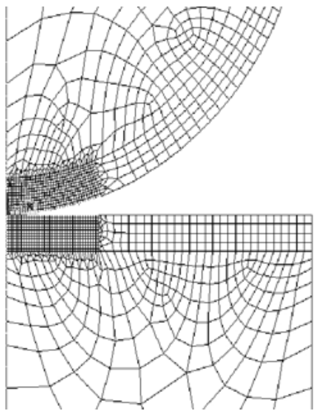


Рис. 1

При цьому півсфера моделюється рухливою, а підложка затиснена. Розмір області контакту настільки малий щодо розмірів тіл, що відповідно до принципу Сен-Венана можна вважати, що конкретні умови навантаження й закріплення тіл на краях не впливають на напружено-деформований стан у досліджуваній області, поблизу контакту двох тіл.

При заданій глибині заглиблення сфери, сила контактної взаємодії, з якою сфера вдавлюється в півпростір, визначається за реакціями у базових закріплених вузлах підложки. Радіус контактної поверхні визначається шляхом знаходження краю контакту або розташуванням останнього задіяного контактного елемента.

Є два шляхи змоделювати контактну взаємодію. Або прикласти силу до півсфери й потім визначити відповідний зсув півсфери. Або задати зсув ω півсфери щодо нерухливої підложки, а потім установити відповідну силу контакту.

3. Чисельні результати і їх аналіз

Незважаючи на різноманітні можливості мікроіндентування у встановленні механічних характеристик матеріалів, визначення напружено-деформованого стану під індентором можливо тільки при розв'язанні відповідної контактної задачі. На практиці це приводить до істотних труднощів, пов'язаних з тим, що форма й розміри пружно-пластичної границі й характер її розвитку заздалегідь невідомі.

Побудована скінченно-елементна схема дозволяє розглядати всілякі комбінації матеріалів, у рамках використаної фізичної моделі білінійної поведінки матеріалів. Тут наводяться результати тільки для випадку, коли сфера є абсолютно твердою, а матеріал півпростору – алюмінієвий сплав АМг 6 з модулем пружності, коефіцієнтом Пуассона й границею текучості, відповідно, 71 ГПа, 0.31 і 0,19 ГПа.

На початку, при малих контактних навантаженнях деформація буде протікати пружно. Відповідно до критерію Мізеса, умовою виникнення пластичної течії є:

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}, \qquad (1)$$

де $\sigma_i, i=1,2,3,$ – головні напруження у складному напруженому стані, S_y – напруження текучості матеріалу при простому розтягу. Вираз в правій частині (1) прийнято називати еквівалентним напруженням σ_e (або напруженням Мізеса). Причому в пружному режимі, максимальне еквівалентне напруження завжди виникає під контактною поверхнею.

Ситуація, коли з'являється пластична течія, а саме виникає точка, у якій виконується критерій (1), і відповідні їй параметри контакту, сила *P*, зсув ω, площа контакту *A* називаються критичними: P_c, ω_c, A_c. Співставляючи фактичні параметри із критичними, можна судити про початок пластичності або її стадії. Тому зручно за допомогою критичних величин зробити вихідні дані й результати всякої моделі безрозмірними. Пронормовані параметри будуть:

$$P^* = P/P_c, \omega^* = \omega/\omega_c, A^* = A/A_c.$$

На рис.2 маркерами 'x' представлене відношення середнього тиску до напруження текучості залежно від безрозмірної глибини заглиблення. Для порівняння суцільною лінією позначений розподіл, що відповідає розв'язку Герца. Поки $\omega^* < 3$ розв'язки добре узгоджується, а пластичні деформації ще порівняно малі. При наступному вдавлюванні відхилення стають істотними.

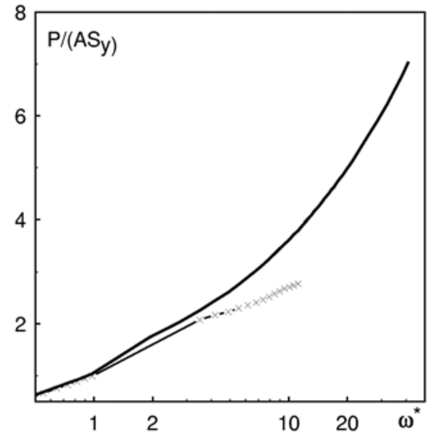


Рис. 2

При заглибленні ω, що незначно перевищує критичне значення, пластична область мала й обмежена під контактною поверхнею пружним матеріалом (див. рис. 3 – показано еквівалентне напруження тільки в пластичних зонах). З подальшим заглибленням пластична область збільшується поки не досягне контактної поверхні (рис.4). Після того як пластична деформація досягла поверхні контакту, в околиці її центра усе ще зберігається пружний об'єм матеріалу. У дійсності, ця пружна область перейде в пластику з подальшим зростанням вдавлювання. Рис. 5 показує пластичну область саме в момент, коли контактна поверхня повністю стала пластичною. Ряд повторних скінченно-елементних розрахунків було проведено, щоб установити параметри у двох важливих випадках, коли: 1) пластична деформація вперше виходить на контактну поверхню; 2) контактна поверхня вперше стає цілком пластичною. У даних ситуаціях величини ω^* визначені з точністю до 10%. Отримані результати добре узгоджуються з відомими у літературі даними [5]. Щоб вирішити задачу більш точно, потрібно значно більш тривалі розрахунки і поліпшена сітка скінченних елементів.

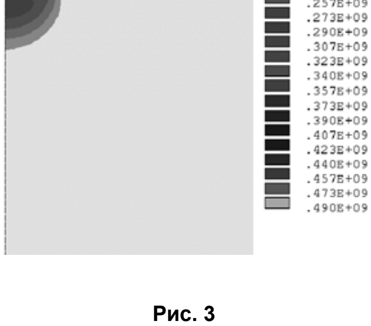


Рис. 3
$\omega^* = 2.8$

Рис. 4
$\omega^* = 6.3$

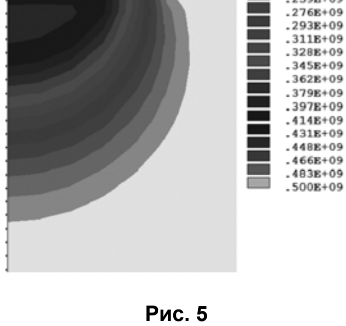


Рис. 5
$\omega^* = 72$

Нарешті, на рис. 6-8 представлено розподіли нормального зсуву u_z (вісь *z* – спрямована перпендикулярно до поверхні напівплощини), нормального σ_z й дотичного τ_{xz} напружень (тут $\omega^* = 72$). З цих рисунків видно, що на відміну від ситуації розтягування матеріалу, де матеріал би вже давно втратив суцільність і зруйнувався, в умовах контактного стискання реальні напруження значною мірою перевершують границю текучості й інші критичні для матеріалу параметри.

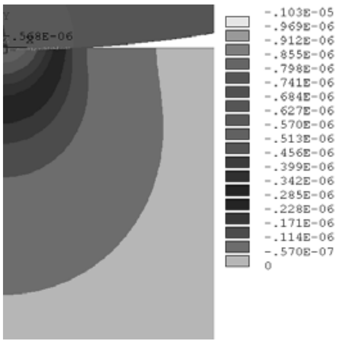


Рис. 6

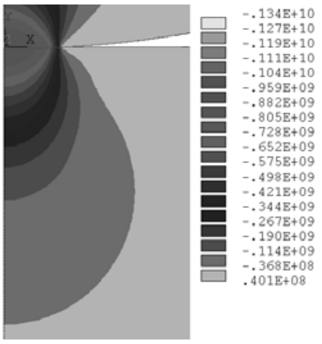


Рис. 7

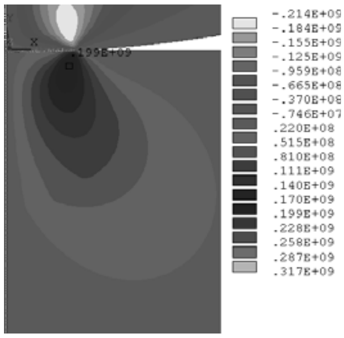


Рис. 8

4. Висновки

У роботі викладені результати 2-вимірного осесиметричного скінченно-елементного аналізу напружено-деформованого стану при вдавлюванні твердої сфери в пружно-пластичну основу. Вивчено розвиток зони пластичної деформації. Із указаною точністю встановлені параметри її ключових станів. Досліджено рівень механічних напружень під індентором.

1. *Головин Ю.И.*, Наноиндентирование и механические свойства твердых тел в субмикромирах, тонких приповерхностных слоях и пленках // ФТТ. – 2008. – Т. 50. № 12. – С. 2113-2142. *2. Головин Ю.И. и др.*, Неустойчивое пластическое течение в сплаве Al-3% Mg в процессе непрерывного наноиндентирования // ФТТ. – 2002. – Т. 44. № 7. – С. 1254-1259. *3. Sinclair G.B. et al.,* Quasi-static normal indentation of an elasto-plastic half-space by a rigid sphere – II. Results // Intern. J. Solids and Structures. – 1985. – Vol. 21. N 8. – P. 865-888. *4. Mata M., O. Casals, J. Alcalá,* The plastic zone size in indentation experiments: The analogy with the expansion of a spherical cavity // Intern. J. Solids and Structures. – 2006. – Volume 43. N 20. – P. 5994-6013. *5. Kral E.R.I, Komvopoulos K., Bogy D.B.,* Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Repeated Indentation of a Half-Space by a Rigid Sphere // J. of Appl. Mechanics. – 1993. – Vol. 60. – P. 829-841. *6. Ye N., Komvopoulos K.*, Effect of Residual Stress in Surface Layer on Contact Deformation of Elastic-Plastic Layered Media // ASME J. Tribol. – 2003. – Vol.125. – P. 692-699.

Надійшла до редколегії 11.26.09

УДК 532.5

О. Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОЛІВ ТИСКУ У ЗАДАЧАХ АЕРОДИНАМІКИ КОНІЧНИХ ТІЛ ПРИ НАЯВНОСТІ НА ЇХ ПОВЕРХНІ ІНТЕНСИВНОГО ПОВЕРХНЕВОГО МАСОПЕРЕНОСУ

Проведено теоретичне дослідження характеру полів тиску при надзвуковому вісесиметричному обтіканні конічного тіла, з поверхні якого здійснюється інтенсивний рівномірно розподілений вдув маси газу. Доведено, що тиск досягає свого абсолютного максимального значення всередині збуреної області течії на поверхні розподілу двох потоків.

The analytical investigation of character of fields of pressure is conducted at supersonic axial flow over of conical body, through which surface the intensive distributed injection of mass of gas is made. Is proved, that the pressure reaches the absolute maximum rating inside perturbed area of flow on a surface of separation of two flows

1. Вступ

Дослідження інтенсивного масопереносу на поверхні тіл, що знаходяться у високошвидкісному потоці газу, мають значний інтерес як для вдосконалення систем теплозахисту літальних апаратів, так і для розробки засобів керування їх аеродинамічними характеристиками. Одним з підходів до вирішення таких задач є математичне моделювання реальних фізичних явищ за допомогою примусового вдуву маси газу скрізь пористу поверхню тіл. З практичної точки зору найбільший інтерес мають моделі, які описують інтенсивний вдув, коли прикордонний шар відтискується від поверхні тіла, поблизу якої локалізується область течії газу, що вдувається.

2. Постановка задачі

Скрізь оболонку круглого конусу, що знаходиться у надзвуковому потоці, вдувається газ рівномірно вдовж всієї поверхні тіла під деяким довільним кутом β ($0<\beta<\pi/2$) до неї. Стрибок ущільнення Ω приєднаний до миска конуса, а швидкість газу, який вдувається, є такою, що відповідає режиму сильного вдуву [2], коли газ, що вдувається, відтискує прикордонний шар від пористої поверхні і локалізується поблизу тіла. Прикордонний шар трансформується в тонку зону взаємодії двох потоків газу й у першому наближенні замінюється конічною поверхнею контактного розриву. Схема обтікання наведена на рис. 1, де I – область течії зовнішнього потоку між поверхнею стрибка ущільнення Ω та поверхнею контактного розриву Θ, II – область течії газу, що вдувається, яка обмежена поверхнями контактного розриву Θ і пористого конусу Δ. У випадку надзвукової швидкості газу, що вдувається, область II буде поділена на дві зони конічною поверхнею σ внутрішнього стрибка ущільнення. У разі вдуву горючої суміші газів і наявності реакції горіння картина течії може бути доповнена конічною поверхнею фронту згорання f, в якому й протікає хімічна реакція.

Введемо циліндричну систему координат $(x,\ r)$, яка пов'язана з конусом таким чином, що вісь x спрямована вздовж осі симетрії тіла, а вісь r – по нормалі до неї (рис.1).

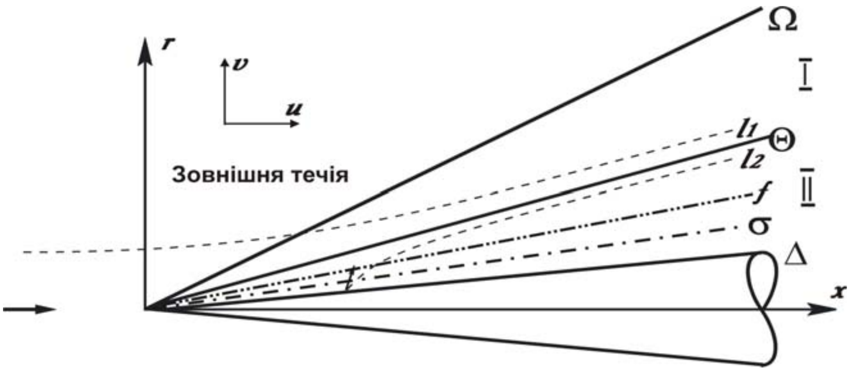


Рис. 1. Загальна схема течії

Течія, як у зовнішній I, так і у внутрішній II областях описується повною системою рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned} & u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0, \\ & \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v)}{\partial r}=0, \\ & u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial r}=0, \\ & u^2+v^2+\frac{2\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}=C, \end{aligned} \qquad (1)$$

де $C=\frac{\kappa(\gamma-1)}{\gamma(\kappa-1)}\frac{R_kT_k}{1+\frac{\kappa-1}{2}M_\infty^2}=\text{const}$, u,v – складові вектору швидкості потоку у циліндричній системі координат (x,r), p – розподіл тиску, ρ – густина, які віднесено до критичної швидкості звуку C_{kp}, подвоєному швидкісному напору $\rho_\infty C_{kp}^2$ та густині ρ_∞ незбуреного потоку відповідно; γ та κ – відношення питомих теплоємностей зовнішнього та внутрішнього потоків, M_∞ – число Маха у зовнішньому потоці.

На поверхні стрибка ущільнення $r=r_\Omega(x)$ мають виконуватися закони збереження маси, імпульсу та енергії, які можна записати у формі умов Ренкіна-Гюгоніо [1].

На поверхні контактного розриву $r=r_\Theta(x)$ виконується умова непротікання та неперервності тиску

$$v_{\Theta,i}=u_{\Theta,i}\frac{dr_\Theta}{dx},\quad p_{\Theta,I}=p_{\Theta,II}, \qquad (2)$$

де індексом $i=I,II$ позначені відповідно зовнішня та внутрішня області течії.

З поверхні конусу $r=r_\Delta(x)$ здійснюється вдув газу із швидкістю $U_\Delta(u_\Delta,v_\Delta)$, для компонентів якої мають місце такі умови:

$$\frac{v_\Delta}{u_\Delta}=tg\beta;\quad tg\beta\geq tg\Delta=\frac{dr_\Delta}{dx}. \qquad (3)$$

У випадку надзвукової швидкості вдуву до системи граничних умов мають бути додані співвідношення Ренкіна-Гюгоніо на внутрішньому стрибку ущільнення σ.

Розглянемо задачу у новій системі координат (η,Φ):

$$\eta=\frac{r}{r_\Theta},\quad (\eta_\Delta\triangleleft\eta\leq1),\Phi=\frac{U_\Theta}{C_{kp}}, \qquad (4)$$

де $U_\Theta(u_\Theta,v_\Theta)$ – модуль вектора швидкості на поверхні розподілу.

Зробимо в системі (1) граничний перехід $\frac{d\Phi}{dx}\to0,$ який обумовлений припущенням про конічність течії, продиференцюємо її та замінимо похідну від u похідними від $v,p,\rho.$

Тоді система рівнянь набуде вигляду:

$$\rho\left(u+v\eta\frac{dr_\Theta}{dx}\right)\frac{dv}{d\eta}+\left[uv-\left(u^2+\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{\rho}\right)\eta\frac{dr_\Theta}{dx}\right]\frac{d\rho}{d\eta}+\frac{\kappa}{\kappa-1}\eta\frac{dr_\Theta}{dx}\frac{d\rho}{d\eta}+\frac{\rho uv}{\eta}=0,$$

$$\left(v-\eta u\frac{dr_\Theta}{dx}\right)\frac{dv}{d\eta}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\eta}=0, \quad (5)$$

$$\left(v-\eta u\frac{dr_\Theta}{dx}\right)\frac{dS}{d\eta}=0.$$

Гранична умова на поверхні розподілу $r=r_\Theta(x)$ матиме вигляд:

$$v_\Theta=u_\Theta\frac{dr_\Theta}{dx}. \quad (6)$$

Використаємо виведені співвідношення для доказу деяких тверджень щодо властивостей полів тиску, які є справедливими для класу конічних течій, що досліджуються.

3. Твердження І про лінії току

Розглянемо закон змінення величини η вздовж довільної лінії току $\eta=\eta(x)$ у області внутрішнього потоку. Тут треба підкреслити, що у випадку дозвукового вдуву уся область течії від поверхні конуса $\eta=\eta_\Delta$ до поверхні розподілу $\eta=1$ (рис. 2, 3) є зоною, яка містить збурення. Для випадку надзвукового вдуву ми будемо розглядати лише область течії від внутрішнього скачка ущільнення $\eta=\eta_\sigma$ до поверхні розподілу $\eta=1$.

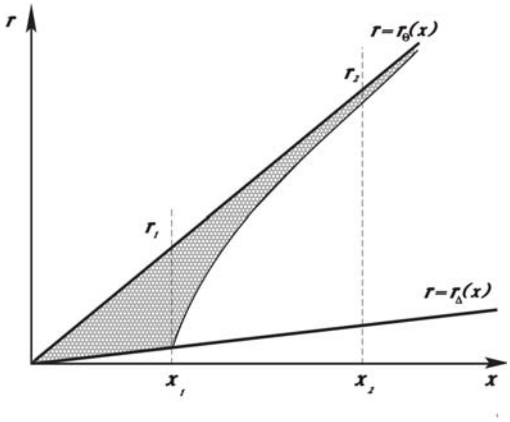


Рис. 2. Трубка току у системі координат (*x, r*).

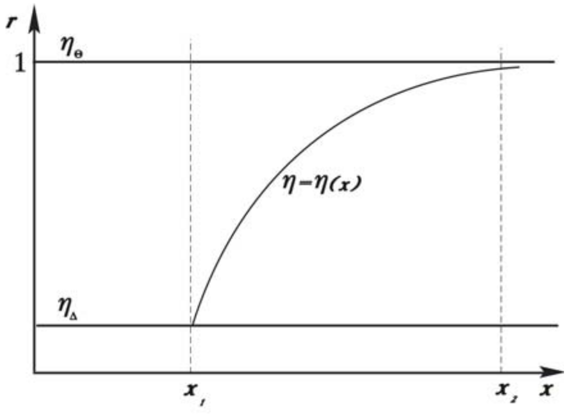


Рис. 3. Трубка току у системі координат (η ,Ф).

Запишемо диференційне рівняння лінії току:

$$\frac{d\eta}{dx}=\frac{1}{r_\Theta}\left(\frac{v}{u}-\eta\frac{dr_\Theta}{dx}\right) \quad (7)$$

Права частина (7) є різністю між кутами нахилу дотичних до лінії току й променів, що виходять з початку координат і розташовані у межах області, що розглядається. Вочевидь, що ця різниця завжди додатна з чого витікає, що η монотонно зростає вздовж лінії току.

Використавши першу умову з (3) та співвідношення (6) і (7) можна показати, що при $x\to\infty$ величина η асимптотично наближається до деякого граничного значення $\eta_{ГР}$.

Розглянемо трубку току, межами якої є поверхня розподілу з одного боку й довільна лінія току $\eta=\eta(x)$ з іншого (рис. 2, 3). Введемо два поперечних перетини: перший – через точку перетину лінії току, що розглядається, з поверхнею конусу (точка x_1), а другий – на достатньо великої відстані від початку координат (точка x_2).

Застосувавши закон збереження мас до вибраних перетинів, запишемо:

$$r_\Theta^2(x_1)\int_{\eta_\Delta}^{1}\rho(\eta)u(\eta)\eta d\eta=r_\Theta^2(x_2)\int_{\eta_{np}}^{1}\rho(\eta)u(\eta)\eta d\eta. \quad (8)$$

Після деяких перетворень, використавши теорему про середнє, отримаємо:

$$1-\eta_{np}=\frac{r_\Theta^2(x_1)(1-\eta_\Theta)\rho(\zeta)u(\zeta)\zeta}{r_{np}^2(x_2)\rho(\xi)u(\xi)\xi}, \quad (9)$$

де $\eta_{np}\le\xi\le1,\quad \eta_\Delta\le\zeta\le1.$

З (9) видно, що при фіксованому x_1 і при $x_2 \to \infty$ величина $\eta_{ГР} \to 1$. Таким чином, вздовж любої лінії току $\eta = \eta(x)$ у області внутрішньої течії, що збурена, величина η монотонно зростає від η_Δ до 1 із збільшенням x.

4. Твердження II про локальний максимум тиску

Доведемо, що при $\eta = 1$ тиск досягає значення p_m, яке є максимальним. Збуреною областю внутрішньої течії є весь простір, що обмежений поверхнею конусу й поверхнею розподілу. Через відсутність поверхонь розриву лінія току є гладкою кривою, внаслідок чого кут ϑ нахилу дотичної до неї безперервно змінюється у межах від ϑ_Δ до $\vartheta = arctg\dfrac{v_\Theta}{u_\Theta}$, тобто має місце нерівність:

$$0 \lhd \vartheta_\Theta \le \vartheta \le \vartheta_\Delta. \tag{10}$$

З рівнянь (5) знаходимо вираз для похідної $\dfrac{dp}{d\eta}$:

$$\frac{dp}{d\eta} = \frac{\kappa v p \rho\left(v - \eta u \dfrac{dr_\Theta}{dx}\right)}{\eta\left\{p\left[1 + \eta^2\left(\dfrac{dr_\Theta}{dx}\right)^2\right] - \rho\left(v - \eta u \dfrac{dr_\Theta}{dx}\right)^2\right\}}. \tag{11}$$

З фізичних міркувань витікає, що права частина (5.11) може дорівнювати нулеві лише у двох випадках: коли

$$v = 0 \tag{12}$$

або

$$v - \eta u \frac{dr_\Theta}{dx} = 0. \tag{13}$$

Але, співвідношення (13) може мати місце лише на поверхні розподілу, де буде умовою непротікання, що ідентична виразу (3).

З співвідношення (12) витікає, що кут ϑ дотичної до лінії $\vartheta = arctg\dfrac{v}{u}$ току дорівнює нулеві, а це суперечить умові (10). Таким чином, похідна $\dfrac{dp}{d\eta}$ дорівнює нулеві лише на межі області, коли $\eta = 1$, з чого можна зробити висновок, що тиск досягає локального максимального значення на поверхні розподілу.

Доведемо тепер твердження для випадку надзвукового вдуву. При цьому внутрішній потік буде поділений конічним стрибком ущільнення σ на дві зони [3]: незбуреної надзвукової течії між поверхнею конуса Δ і поверхнею σ та дозвукової течії між поверхнями стрибка ущільнення σ і поверхнею розподілу Θ (рис. 1). В сферичній системі координат (рис. 4) це поверхні $r_\Delta(x)$, $r_\sigma(x)$, $r_\Theta(x)$ відповідно.

Як й для випадку дозвукового вдуву, похідна $\dfrac{dp}{d\eta}$ визначається співвідношенням (11) і може обертатися в нуль лише за умов (12) або (13).

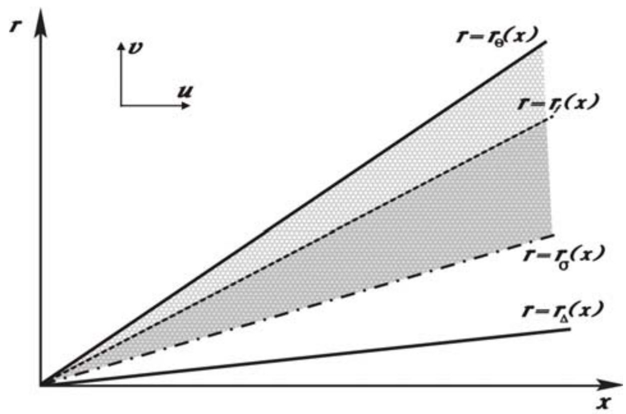


Рис. 4. Схема течії при надзвуковому вдуві

Рівність (13), як й раніш, є умовою непротікання, що виконується на поверхні розподілу.

Розглянемо співвідношення (12). Припустимо, що ця умова виконується десь всередині області збуреної течії, наприклад на поверхні $r = r_f(x)$ (рис. 4), тобто $v = 0$ при $\eta = \eta_f$, причому

$$\eta_\sigma \triangleleft \eta_f = \frac{r_f}{r_\Theta} \triangleleft \eta_\Theta. \tag{14}$$

Тоді

$$\left(\frac{dp}{d\eta}\right)_f = \left(\frac{dv}{d\eta}\right)_f = 0. \tag{15}$$

Шляхом перетворень співвідношень (5) можна показати, що рівняння, які містять похідні $\frac{d^2p}{d\eta^2}$ і $\frac{d^2v}{d\eta^2}$, при $\eta = \eta_0$ є однорідними. Аналогічне твердження є справедливим відносно рівнянь, які містять похідні n-го порядку $\frac{d^np}{d\eta^n}$ і $\frac{d^nv}{d\eta^n}$, якщо $\eta = \eta_f$, а v, $\frac{d^kp}{d\eta^k}$ і $\frac{d^kv}{d\eta^k}$ $\left(k = 1, 2, ..., n-1\right)$ дорівнюють нулеві. У цьому випадку умову існування нетривіального розв'язку для $\left(\frac{d^np}{d\eta^n}\right)_f$ і $\left(\frac{d^nv}{d\eta^n}\right)_f$ запишемо з допомогою (11) у вигляді

$$p\left[1+\eta^2\left(\frac{dr_\Theta}{dx}\right)^2\right] - \rho\left(v - \eta u\frac{dr_\Theta}{dx}\right)^2 = 0\,. \tag{16}$$

Звідки, використавши співвідношення, які пов'язують параметри у сферичній та циліндричній системах координат, отримаємо

$$W^2 = \frac{p}{\rho}, \tag{17}$$

де W – нормальна до конічної поверхні $r = r_f\left(x\right)$ складова вектора швидкості. З (17) видно, що W дорівнює локальній швидкості звуку, тобто поверхня $r = r_f\left(x\right)$ є характеристичною. Внаслідок цього, беручи до уваги введене раніш припущення $u \geq 0$, можна стверджувати, що усі збурення зносяться від поверхні $r = r_f\left(x\right)$ вниз по потоку. Поверхня ця є обгинаючою збурень, тобто – слабким стрибком ущільнень. Таким чином, картина внутрішньої течії така, що збурений потік газу є обмежений з двох боків зонами незбуреної течії (рис. 4), а це суперечить постановці задачі. З цього витікає, що припущення про справедливість умови $v = 0$ всередині внутрішнього потоку не вірно, і тиск, таким чином, досягає локального максимального значення на поверхні розподілу й для випадку надзвукового вдуву.

Далі можна сформулювати два важливих твердження.

5. Твердження ІІІ про абсолютний максимум тиску у внутрішньому потоці

Вище було показано, що вздовж довільної лінії току $\eta = \eta\left(x\right)$ всередині збуреної області внутрішнього потоку величина η монотонно зростає від значення η_Δ до 1 (твердження І) і що тиск у цій же області монотонно збільшується до свого максимального значення при зростанні величини η від η_Δ до 1 (твердження ІІ). Це дозволяє зробити висновок про існування абсолютного максимуму тиску у внутрішньому потоці, згідно якому тиск у збуреній області течії завжди досягає абсолютного максимального значення на поверхні розподілу.

6. Твердження про абсолютний максимум тиску

Використовуючи твердження ІІІ та приймаючи до уваги, що й у зовнішньому потоці тиск досягає свого абсолютного максимуму на поверхні розподілу [4], можна сформулювати таке твердження:

При надзвуковому вісесиметричному обтіканні конічного тіла, з поверхні якого здійснюється рівномірно розподілений вдув маси газу, тиск досягає свого абсолютного максимального значення всередині збуреної області течії на поверхні розподілу двох потоків.

7. Висновки

Проведено теоретичне дослідження характеру полів тиску при надзвуковому вісесиметричному обтіканні конічного тіла, з поверхні якого здійснюється інтенсивний (дозвуковий і надзвуковий) рівномірно розподілений вдув маси газу. За допомогою твердження про лінії току доведено твердження про локальний максимум тиску, про абсолютний максимум тиску у внутрішньому потоці газу, що вдувається, і твердження про абсолютний максимум тиску всередині збуреної області течії.

1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа, М., 1970, 904с *2.Матвеева Н.С., Нейланд В.Я.* Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке// Ученые записки ЦАГИ, 1970, т.1, №5, С.13-22. *3.Эмануель Д.* Вдув на пористом конусе с образованием внутренней ударной волны // Ракетная техника и космонавтика. 1970, №10. *4.Fan D., Kapur J.* Some Theorems on Taylor-Maccoll Flows// Transactions of the ASME, 1972, series E, v.39, №2, p.287-288.

Надійшла до редколегії 09.12.09

УДК 517.9 + 53(092)

М. Граб, асп., В. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук

ПРО НАУКОВО-ОРГАНІЗАЦІЙНУ ДІЯЛЬНІСТЬ АКАДЕМІКА М.М. БОГОЛЮБОВА В КИЇВСЬКОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Проаналізовано архівні документи Київського національного університету імені Тараса Шевченка 1939, 1944 – 1951 рр., в яких згадується про діяльність академіка М.М. Боголюбова, уточнено деякі дати науково-організаційної діяльності академіка М.М. Боголюбова, вказано перелік кафедр механіко-математичного факультету Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка та їх викладацький склад в перші післявоєнні роки.

Archive data of Kyiv National Taras Shevchenko University connected with name of M.M. Bogoliubov for period of 1939, 1944 – 1951 years, are analyzed. Some dates of scientific-administrative activities of M.M.Bogoliubov in Kyiv University are clarified. List of departments of mechanics and mathematics faculty and their stuffs are represented.

1. Вступ

У 2009 виповнилося сто років від дня народження видатного математика і фізика-теоретика академіка Миколи Миколайовича Боголюбова (21.08.1909 – 13.02.1992). Цій події було присвячено низку заходів, серед яких Український математичний конгрес (27 – 29 серпня, 2009), Міжнародна київська Боголюбовська конференція "Сучасні проблеми теоретичної та математичної фізики" (15 – 18 вересня, 2009), наукові конференції у Львові та Чернівцях та інші.

У 2009 році опубліковано монографію [12] "Микола Миколайович Боголюбов та статистична фізика в Україні" і книгу [14] "Микола Боголюбов і Україна", яка написана представниками Львівської школи з теоретичної фізики. В зазначених публікаціях популярно викладено суть основних наукових результатів М.М. Боголюбова, які мали визначний вплив на розвиток світової науки. Особливу увагу в них приділено українському етапу наукової діяльності Миколи Миколайовича. Зазначені видання містять інтерв'ю колег, учнів та послідовників М.М. Боголюбова. До публікацій також увійшли фотографії та копії архівних документів.

21 вересня 2009 року відбулася ювілейна сесія загальних зборів НАН України, присвячена сторіччю від дня народження М.М. Боголюбова, на фасаді головного корпусу Київського національного університету імені Тараса Шевченка відкрито меморіальну дошку М.М.Боголюбову. Крім того, на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка в листопаді 2009 року було проведено засідання круглого столу, присвячене науковій діяльності М. М. Боголюбова в Києві.

Разом з тим, слід зауважити, що згадані публікації не містять повної інформації про дати деяких періодів життєвого шляху і науково-організаційної діяльності М.М.Боголюбова в Києві. Зокрема, в літературі зустрічаються різні дані з приводу того, коли Микола Миколайович почав працювати в Київському університеті і, зокрема, очолювати кафедру математичної фізики. В [12, с. 18] стосовно роботи М. М. Боголюбова в Київському університеті подано такі дані: "... у 1936–1949 рр. він викладав та очолював кафедру теорії функцій (з 1944 р. перейменовану в кафедру математичної фізики), у 1946–1949 рр. був деканом механіко-математичного факультету", а в [14, с. 9], в розділі "Основні дати творчості та життя Миколи Боголюбова" зазначено, що М.М.Боголюбов в 1936–1950 керував кафедрою математичної фізики Київського університету. Крім того, в [10, с. 8] та [15, с. 9] зазначено, що в Київському університеті М.М. Боголюбов працював протягом 1936 – 1941 та 1944 – 1949 років.

В даній статті на основі аналізу архівних документів Київського національного університету імені Тараса Шевченка і Президії Національної Академії Наук України здійснена спроба уточнити деякі дати науково-організаційної діяльності М.М. Боголюбова на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

2. Аналіз літературних джерел та архівних матеріалів про життя та організаційно-наукову діяльність М.М. Боголюбова в довоєнний період (1936–1941 рр.)

Хоча серед архівних матеріалів Київського університету не збереглася особова справа М.М. Боголюбова, з якої можна було б отримати вичерпні відповіді на питання про початок його педагогічної діяльності в Київському університеті, але документально засвідчено, що викладацьку діяльність в Київському університеті М.М. Боголюбов розпочав у 1936 році. Про це сам М.М. Боголюбов в своїх автобіографіях від 2 грудня 1938 р. [7, с. 346], 27 листопада 1946 р. [14, с. 92] та 12 січня 1950 року [1] зазначав: "Починаючи з вересня 1936 року крім наукової почав вести і педагогічну роботу в якості професора Київського університету".

Проте з [9, 11] слідує, що М.М. Боголюбов почав працювати в Київському університеті ще до вересня 1936 року. Дійсно, в січні – лютому 1936 року, протягом двох місяців, М.М. Боголюбов перебував у своєму першому закордонному відрядженні. Як зазначено в [7, с.80], цю поїздку для М.М. Боголюбова влаштував його вчитель – академік АН УРСР і АН СРСР М.М. Крилов. Під час цього відрядження Микола Миколайович побував у Німеччині, Франції, Бельгії. 16 січня 1936 року він у своєму листі до Євгенії Олександрівні, майбутньої дружини, повідомив: "Буду в Парижі до кінця лютого. До Києва повертаюся 4-5 березня". В своїх листах М.М. Боголюбов також повідомляв, що під час закордонного відрядження він 12 – 13 лютого прочитав лекції в Брюсселі, 18 – 20 лютого – в Паризькому університеті, 21 – 22 лютого в Страсбурзі, 26 лютого – в Парижі (на засіданні Французького математичного товариства) [5, с. 70]. В цих листах він також писав про чудову атмосферу, в якій проходили його лекції. Про перше закордонне відрядження М.М. Боголюбов згодом неодноразово згадував і в своїх автобіографіях: від 2 грудня 1938 року [7, с. 345], 27 листопада 1946 [14, с. 92], 12 січня 1950 року [2].

Після повернення до Києва М.М. Боголюбов поділився з М.М. Криловим своїми враженнями про закордонне відрядження. Той, в свою чергу, вирішив, що Миколі Миколайовичу слід приступати до серйозної викладацької роботи і звернувся до керівництва фізико-математичного факультету Київського університету [9, с.80]: "Після повернення М.М. Боголюбова до Києва в деканат фізмату несподівано прийшов М.М.Крилов, а тоді, у зв'язку з відрядженням С.С. Мовшиця я повинен був виконувати обов'язки декана. Добре пам'ятаю слова М.М. Крилова: "Я пришел поговорить о Боголюбове. Детина вырос и за границей даже побывал. Считаю, что он уже может и должен стать профессором университета. Вы поняли?" Я відповів: "Понял, разрешите мне отлучиться на несколько минут". І помчав до ректора. Ректор уважно мене вислухав і сказав: "Скажіть Крилову, що Боголюбов вже зарахований професором нашого університету".

Аналіз фактів з життя М.М.Боголюбова і особливості характеру академіка М.М. Крилова [6,13,16] дозволяють зробити припущення про те, що згадана розмова відбулася невдовзі після повернення М.М. Боголюбова до Києва, тобто в першій половині березня 1936 року. На користь даного припущення може свідчити [11, с.69], де відзначається, що в 8-ому семестрі 1935–1936 навчального року на фізико-математичному факультеті Київського університету професор М.М. Боголюбов викладав (факультативно) курс з нелінійної механіки (обсягом 2 години на тиждень). Отже М.М. Боголюбов розпочав свою викладацьку діяльність в березні 1936 року, в Київському університеті, після повернення з закордонного відрядження. Згодом, він з 1 вересня 1936 року він був зарахований штатним професором Київського університету [7, 2]. В [9, с. 80] зазначено, що "М.М. Боголюбов читав тільки спецкурси, керував аспірантами, брав активну участь у засіданнях ради факультету".

Невдовзі М.М. Боголюбова призначають завідувачем новоствореної кафедри теорії функцій. Стосовно цього призначення в своїй автобіографії від 2 грудня 1938 р. Микола Миколайович вказав наступне : "З 1938 року затверджений на посаді завідувача кафедри теорії функцій" [7, с.346]. Зауважимо, що рік призначення на посаду завідувача кафедри співпадає з роком написання цієї автобіографії.

Одним з перших документів Київського університету, в якому згадується ім'я М.М. Боголюбова, є Наказ №307 від 26 жовтня 1939 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, яким затверджено перелік кафедр університету та їх персональний склад на 1939 – 1940 навчальний рік. З цього наказу слідує, що в 1939–1940 навчальному році серед математичних кафедр в університеті функціонують такі кафедри: кафедра теорії функцій у складі: керівник – доктор фізико-математичних наук М.М. Боголюбов, професор В.Є.Дьяченко, асистент С.О. Авраменко; кафедра математичного аналізу і вищої алгебри у складі: керівник – академік АН УРСР, професор Г.В. Пфейффер, доценти К.Я. Латишева, Ю.І. Гросберг, Г.І. Дрінфельд, Д.Б. Тополянський, старші викладачі Д.В. Щербак, О.В. Товбін, асистенти Ф.С. Гудименко та М.Д. Розенберг; кафедра геометрії у складі: керівник – професор Б.Я. Букреєв, доцент Б.Г. Фукс; кафедра теоретичної механіки, теорії пружності і гідромеханіки у складі: керівник – професор І.Я. Штаєрмана, старші викладачі Й.Б. Погребінський і М.М. Сідляр та (за сумісництвом) академік АН УРСР М.О. Лаврентьєв. Згодом, саме по кафедрі теорії функції М.М. Боголюбову 5 лютого 1940 року було присвоєно вчене звання професора.

У липні 1941 року розпочалася евакуація АН УРСР до столиці Башкирії м. Уфи. Серед евакуйованих співробітників був і член-кореспондент АН УРСР Микола Миколайович Боголюбов. В автобіографії від12 січня 1950 року М.М. Боголюбов зазначав: "В період з липня 1941 по квітень 1944 рр. перебував в евакуації разом з АН УРСР спочатку в Уфі, а потім в Москві" [1].

Під час окупації м. Києва німецькими військами в 1941–1943 рр. Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка був евакуйований в м. Кзил-Орду Казахської РСР, де на його базі і на базі Харківського державного університету ім. О.М. Горького було тимчасово створено Об'єднаний Український державний університет, ректором якого було призначено ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка Русько Олексія Микитовича [17].

3. Післявоєнний період діяльності М.М. Боголюбова в Київському університеті (1944 – 1951 рр.)

Після звільнення 6 листопада 1943 р. Києва від фашистських окупантів, Київський університет почав відновлювати свою діяльність. Ради Народних Комісарів СРСР і УРСР та Народний Комісаріат освіти України прийняли рішення про реевакуацію Об'єднаного Українського державного університету в м. Київ та м. Харків. 22 квітня 1944 року ректор Об'єднаного Українського державного університету підписав відповідний наказ. Реевакуація мала завершитися до травня 1944 року, тобто на протязі 10 днів. В травні 1944 р. починають відновлювати свою роботу кафедри університету. В квітні та травні до Києва з евакуації повертаються також вчені, які поповнюють професорсько-викладацький склад університету.

М.М. Боголюбов повернувся в Київ на початку 1944 року [8, с. 58]. Про його діяльність в Київському університеті в повоєнний період свідчать накази ректора Київського державного університету ім. Т.Г.Шевченка за 1944 – 1951 роки. Перш за все, це Наказ № 54 від 10 березня 1944 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, який містить інформацію про призначення виконуючими обов'язки керівників кафедр. Серед 33 кафедр університету, які відновили свою роботу після повернення з евакуації, першою математичною кафедрою була кафедра геометрії. Згідно Наказу № 54 від 10 березня 1944 року керівником кафедри геометрії було призначено професора Б.Я. Букреєва (з 1 січня 1944 року). В той час в університеті працювали професор Ю.Д. Соколов, доценти М.П. Соколов і С.І. Зуховицький, асистент П.О. Черемухін.

Відповідно до наказу № 119 від 16 травня 1944 року в.о. ректора Київського державного університету В.Г. Бондарчука "Боголюбова Миколу Миколайовича було призначено на посаду професора – керівника кафедри теорії функцій з 15 травня 1944 року". Отже, кафедра теорії функцій відновила свою роботу 15 травня 1944 року.

В післявоєнні роки М.М. Боголюбов активно брав участь у відновленні механіко-математичного факультету. 22 липня 1944 року з метою забезпечення набору найбільш кваліфікованих науково-педагогічних кадрів в університеті була створена конкурсна комісія. До її складу увійшов і " доктор фізико-математичних наук, професор М.М. Боголюбов" (Наказ № 202 від 22 липня 1944 ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка).

2 вересня 1944 року Наказом № 237 ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка було створено оргкомітет для організації та проведення наукової сесії, присвяченої ролі Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка в розвитку науки в СРСР, одним із членів якого був "…Боголюбов М.М. – член-кореспондент АН УРСР, професор, доктор, керівник кафедри теорії функцій".

Ще одним свідченням того, що на протязі 1944 – 1945 навчального року М.М. Боголюбов очолював кафедру теорії функцій є Наказ № 337 від 19 грудня 1944 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка, яким було затверджено персональний склад кафедр університету. З цього документу стають відомими також наступні факти: протягом 1944 – 1945 навчального року член-кореспондент АН УРСР М.М.Боголюбов очолював кафедру теорії функцій.

Таблиця 1. **Склад кафедр механіко-математичного університету у 1944 – 1945 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра математичного аналізу	проф. Пфейффер В.Г.	доц. Зуховицький С.І., ас. Штейнбегр А.С.
2.	Кафедра геометрії	проф. Букреєв Б.Я.	доц. Фукс Б.Г., доц. Білоусова В.П.
3.	Кафедра теорії функцій	проф. Боголюбов М.М.	
4.	Кафедра алгебри	доц. Соколов М.П.	
5.	Кафедра теоретичної механіки	проф. Соколов Ю.Д.	проф. Штокало Й.З., проф. Астряб О.М., ас. Некрасов С.С.
6.	Кафедра загальної математики	проф. Дьяченко В.Є.	доц. Путілін І.І., доц. Латишева К.Я., доц. Кобелева О.М., ас. Шестакова Т.С., ас. Черемухін П.О.
7.	Кафедра опору матеріалів	проф. Динник О.М.	доц. Шереметьєв М.П., ас. Батський П.К.

Наказом № 50 від 3 березня 1945 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка М.М. Боголюбова було призначено деканом механіко-математичного факультету з 20 лютого 1945 року. Діяльність М.М. Боголюбова на посаді декана була спрямована на відродження факультету, залучення до викладацької роботи провідних учених країни. Так, з 1 березня 1945 року в університеті на посаді професора на 0,5 ставки почав читати лекції директор Інституту математики АН УРСР академік АН УРСР М.О. Лаврентьєв (Наказ № 48 від 1 березня 1945 року). Наказ № 63 від 6 березня 1945 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка містить зміни до Наказу № 48 від 1 березня 1945 року, згідно з якими професора М.О. Лаврентьєва було зараховано на повну ставку, розмір якої відповідав посаді завідувача кафедри і становив 2 300 крб.

Зазначимо, що Наказ № 63 від 6 березня 1945 року містить першу документальну згадку про кафедру математичної фізики, а саме: "§1. Товариша Каральніка С.М. зарахувати асистентом кафедри математичної фізики зі ставкою 700 крб. на місяць з 1 березня 1945 року".

16 листопада 1945 року Наказом № 288 ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка було затверджено персональний склад кафедр університету на 1945 – 1946 навчальний рік.

Таблиця 2. **Склад кафедр механіко-математичного університету у 1945 – 1946 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра теорії функцій та математичного аналізу І	проф. Лаврентьєв М.О.	проф. Дьяченко В.Є., доц. Зуховицький С.І., доц. Крейн С.Г., ас. Штейнберг А.С., ас. Григорьєва І.О.
2.	Кафедра математичного аналізу ІІ та інтегрування диференціальних рівнянь	проф. Г.В. Пфейффер	проф. Штокало Й.З., доц. Путілін І.І., доц. Латишева К.Я., доц. Кобелева О.М., ас. Шестакова Т.С.
3.	Кафедра геометрії	проф. Букреєв Б.Я.	проф. Смогоржевський О.С., доц. Фукс Б.Г., доц. Білоусова В.П., доц. Граціанська Л.М., ас. Яворська
4.	Кафедра алгебри та теорії ймовірності	доц. Соколов М.П.	
5.	Кафедра математичної фізики	проф. Боголюбов М.М.	ас. Хацет Б.І.
6.	Кафедра теоретичної механіки	проф. Соколов Ю.Є.	проф. Наумов А.Л, ас. Черемухін П.О.
7.	Кафедра опору матеріалів	проф. Кільчевський М.О.	проф. Леннік С.М., проф. Сухомел Г.Й., доц. Засс, ас. Венцель Н.О.

З таблиць 1, 2 слідує, що кафедра теорії функцій була перейменована в кафедру теорії функцій та математичного аналізу І, її керівником став академік М.О. Лаврентьєв, оскільки одним з напрямків роботи М.О. Лаврентьєва була теорія функції комплексної змінної та її застосування.

На протязі 1945 – 1946 навчального року також функціонувала кафедра математичного аналізу ІІ та інтегрування диференціальних рівнянь, яку очолював академік АН УРСР Г.В. Пфейффер. Своє місце в списку кафедр університету посіла і кафедра математичної фізики, яку з вересня 1945 року очолив М.М. Боголюбов, і до викладацького складу якої входив асистент Б.І. Хацет – аспірант М.М. Боголюбова по кафедрі теорії функцій (Наказ № 269 ректора від 6 жовтня 1944 р.). Згодом Б.І. Хацет про наукову діяльність М.М. Боголюбова в 1944 – 1946 рр. писав так: "Саме в той час відбувається корінна перебудова всієї наукової проблематики Миколи Миколайовича. Він захоплено занурюється в найважчі проблеми теоретичної фізики – статистичної теорії рівноважних станів та динамічних процесів з наступним виходом на загадкові та важкодоступні проблеми надплинності, надпровідності, квантової теорії поля!" [17, с. 73]. Отже, саме зацікавленість М.М. Боголюбова питаннями теоретичної фізики сприяла створенню кафедри математичної фізики – нової кафедри на механіко-математичному факультеті.

В повоєнний період перелік та склад кафедр, які існували на механіко-математичному факультеті, щороку зазнавав змін. 10 жовтня 1946 року помер Георгій Васильович Пфейффер. Кафедру математичного аналізу II та інтегрування диференціальних рівнянь, якою він керував, було перейменовано в кафедру інтегрування диференціальних рівнянь, її очолив доктор фізико-математичних наук, професор Й.З. Штокало (Наказ № 360 від 13 листопада 1946 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка). Кафедрою математичної фізики продовжував керувати М.М. Боголюбов, а кафедрою теорії функцій та математичного аналізу – академік АН УРСР М.О. Лаврентьєв. В 1946 році М.М. Боголюбова обирають дійсним членом АН УРСР.

***Таблиця 3*. Склад кафедр механіко-математичного університету у 1946 – 1947 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра теорії функцій та математичного аналізу	проф. Лаврентьєв М.О.	проф. Крейн М.Г., доц. Зуховицький С.І., доц. Кобелева О.М., доц. Крейн С.Г., ас. Штейнберг А.С.
2.	Кафедра інтегрування диференціальних рівнянь	проф. Штокало Й.З.	доц. Латишева К.Я., ст. викл. Гудіменко Ф.С., ас. Яворська Л.Н.
3.	Кафедра математичної фізики	проф. Боголюбов М.М.	
4.	Кафедра геометрії	проф. Букреєв Б.Я.	проф. Смогоржевський О.С., доц. Белоусова В.П., доц. Фукс Б.Г., доц. Граціанська Л.М., ст. викл. Ільїн І.Г.
5.	Кафедра алгебри і теорії ймовірності	доц. Соколов М.П.	проф. Гнєденко Б.В., доц. Авраменко С.А.
6.	Кафедра теоретичної механіки	проф. Соколов Ю.Д.	доц. Путілін І.І., ст. викл. Сідляр М.М., ас. Черемухін П.О., ас. Григорьєва І.О.
7.	Кафедра теорії пружності і опору матеріалів	проф. М.О. Кільчевський	проф. Динник О.М., проф. Сухомел Г.Й., ас. Венцель Н.О.
8.	Кафедра прикладної механіки	проф. Дьяченко В.Є.	доц. Мальнєв А.Ф., ст. викл. Дмитренко Л.С., викл. Хацет Б.І., викл. Лебединцева Е.К.

В 1947 – 1948 навчальному році на кафедрі математичної фізики окрім професора М. М. Боголюбова працювали доценти С.І. Зуховицький і С.О. Авраменко (аспірант кафедри теорії функцій з вересня 1938 року по червень 1941 року) та асистент П.І. Коваль (Наказ № 385 від 10 вересня 1947 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка про перелік і склад кафедр університету на 1947 – 1948 навчальний рік).

***Таблиця 4.* Склад кафедр механіко-математичного університету у 1947 – 1948 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра інтегрування диференціальних рівнянь	проф. Штокало Й.З.	доц. Латишева К.Я., доц. Граціанська Л.М., ст. викл. Гудименко Ф.С.
2.	Кафедра загальної математики	проф. Дьяченко В.Є	доц. Мальнев А.Ф., доц. Гіхман І.І., ст. викл. Дмитренко Л.С.,
3.	Кафедра математичної фізики і алгебри	проф. Боголюбов М.М.	доц. Зуховицький С.І., доц. Авраменко С.О., ас. Коваль П.І.
4.	Кафедра теорії функцій і математичного аналізу	проф. Лаврентьєв М.О	доц. Крейн С.Г, ас. Шуб Ц.О.
5.	Кафедра геометрії	проф. Букреєв Б. Я.	проф. Смогоржевський А.С., доц. Білоусова В.П., доц. Фукс Б.Г., ст. викл. Ільїн І.Г.
6.	Кафедра теоретичної механіки і аерогідромеханіки	проф. Соколов Ю.Д.	проф. Кільчевський М.О., доц. Чудновський В.Г., ст. викл. Сідляр М.М.

В 1948 році перелік та склад кафедр механіко-математичного факультету затверджувався тричі. Наказом № 380 від 14 липня 1948 року ректора Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка серед переліку кафедр механіко-математичного факультету передбачалось, що на протязі 1948 – 1949 навчального року продовжить функціонувати кафедра алгебри, для цього в штатному розписі університету було передбачено вакансію професора, який повинен був очолити кафедру алгебри.

Наказом № 427 "А" від 20 серпня 1948 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка було внесено зміни до затвердженого переліку кафедр університету. Мабуть вакансія завідувача кафедри алгебри не була заповнена, тому кафедру алгебри було приєднано до кафедри математичної фізики – кафедри, яку очолював декан механіко-математичного факультету. Остаточний склад кафедри математичної фізики і алгебри було затверджено Наказом № 574 від 20 жовтня 1948 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка. Окрім професора М.М. Боголюбова на кафедрі математичної фізики і алгебри в 1948 – 1949 навчальному році працювали його колишні аспіранти доценти І.І. Гіхман і С.О. Авраменко.

Таблиця 5. **Склад кафедр механіко-математичного університету у 1948 – 1949 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра інтегрування диференціальних рівнянь	проф. Штокало Й.З.	доц. Латишева К.Я., ст. викл. Гудименко Ф.С.
2.	Кафедра математичної фізики і алгебри	проф. Боголюбов М.М.	доц. Гіхман І.І., доц. Авраменко С.О.
3.	Кафедра загальної математики та загальних методів обчислення	проф. Дьяченко В.Є.	ст. викл. Дмитренко Л.С.
4.	Кафедра математичного аналізу і теорії функцій	проф. Лаврентьев М.О.	доц. Крейн С.Г., доц. Зуховицький С.І., ас. Шуб Ц.О.
5.	Кафедра геометрії	проф. Букрєєв Б.Я.	проф. Смогоржевський А.С., доц. Білоусова В.П., доц. Граціанська Л.М., ст. викл Ільїн І.Г.
6.	Кафедра теоретичної механіки і аерогідромеханіки	проф. Соколов Ю.Д.	проф. Кільчевський М.О., проф. Наумов А.Л., доц. Чудновський В.Г., доц. Путілін І.І., ст. викл. Сідляр М.М.

Що стосується кафедри математичного аналізу та теорії функцій, то в 1948 році відповідно до штатного розпису її очолював М.О. Лаврентьєв. В особовій справі академіка АН УРСР М.О. Лаврентьєва, яка зберігається в Архіві Київського національного університету імені Тараса Шевченка, містяться дані про те, що через зайнятість академіка АН УРСР М.О.Лаврентьєва в Академії Наук УРСР – на той час він був віце-президентом АН УРСР і директором Інституту математики АН УРСР, він не приступив до викладацької діяльності на механіко-математичному факультеті [16]. 25 жовтня 1948 року декан механіко-математичного факультету М.М. Боголюбов звернувся до учбової частини Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка з проханням задовольнити клопотання академіка М.О. Лаврентьєва про його звільнення з роботи в університеті. В Наказі № 578 від 27 жовтня 1948 року зазначено наступне: "Вважати, що професор Лаврентьєв М.О. не приступив до роботи з 1 вересня 1948 року". В 1949 – 1950 навчальному році завідувачем кафедри математичного аналізу було призначено академіка АН УРСР Гнєденка Б. В. (Наказ № 516 від 31 серпня 1949 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка).

Таблиця 6. **Склад кафедр механіко-математичного університету у 1949 – 1950 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра інтегрування диференціальних рівнянь	проф. Штокало Й.З.	доц. Латишева К.Я.
2.	Кафедра математичної фізики	проф. Боголюбов М.М.	доц. Благовіщенський Ю.В.
3.	Кафедра алгебри і теорії ймовірностей	проф. Леонов М.Я.	доц. Авраменко С.О., доц. Путілін І.І.
4.	Кафедра загальної математики	проф. Дьяченко В.Є.	доц. Граціанська Л.М., ст. викл. Дмитренко Л.С.
5.	Кафедра математичного аналізу	проф. Гнєденко Б.В.	доц. Гіхман І.І., доц. Положій Г.М., ас. Шуб Ц.О.
6.	Кафедра геометрії	проф. Букреєв Б.Я.	проф. Смогоржевський А.С., доц. Білоусова В.П., ст. викл Ільїн І.Г.
7.	Кафедра теоретичної механіки	проф. Наумов А.Л.	проф. Кільчевський М.О., ас. Костяна Л.М.
8.	Кафедра теорії пружності	Вакансія	доц. Сідляр М.М., ас. Лось Ф.С.

З 1 грудня 1948 року професор М. М. Боголюбов за власним бажанням був звільнений від виконання обов'язків декана механіко-математичного факультету (Наказ № 651 від 1 грудня 1948 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка). Його наступником став член-кореспондент АН УРСР В.Є. Дяченко. Академік АН УРСР М.М. Боголюбов продовжував очолювати кафедру математичної фізики та керувати аспірантами. В 1950 – 1951 навчальному році на кафедрі математичної фізики починає працювати Положій Георгій Миколайович, який відповідно до штатного розпису 1951 – 1952 навчального року (Наказ № 503 "А" від 31 серпня 1951 року ректора Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка) став наступним завідувачем кафедри математичної фізики. В особовій справі Г.М. Положія збереглась копія Наказу № 668 від 30 жовтня 1951 року по Головному управлінню Міністерства вищої освіти СРСР, де зазначено: "Затвердити кандидата фізико-математичних наук доцента Положія Георгія Миколайовича на посаді завідуючого кафедрою математичної фізики Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка, звільнивши з цієї посади Боголюбова М. М." [4].

Таблиця 7. **Склад кафедр механіко-математичного університету у 1950 – 1951 навчальному році**

№ п/п	Назва кафедри	Керівник кафедри	Склад кафедри
1.	Кафедра інтегрування диференціальних рівнянь	проф. Штокало Й.З.	доц. Латишева К.Я., доц. Лось Ф.С.
2.	Кафедра математичної фізики	проф. Боголюбов М.М.	доц. Положій Г.М.
3.	Кафедра алгебри і теорії ймовірностей	проф. Гнєденко Б.В.	доц. Коваль П.І., доц. Авраменко С.О.
4.	Кафедра загальної математики	проф. Дьяченко В.Є.	доц. Путілін І.І., доц. Граціанська Л.М., ас. Гудименко Ф.С., ас. Дмитренко Л.С.
5.	Кафедра математичного аналізу	проф. Смогоржевський А.С.	доц. Бреус К.А., доц. Гіхман І.І., ас. Шуб Ц.О.
6.	Кафедра геометрії	проф. Букреєв Б.Я.	доц. Білоусова В.П., ст. викл. Ільїн І.Г.
7.	Кафедра теоретичної механіки	проф. Наумов А.Л.	проф. Кільчевський М.О., ас. Костяна Л.М.
8.	Кафедра теорії пружності	проф. Коваленко А.Д.	проф. Ішлінський А.Ю., доц. Митропольський Ю.О., доц. Сідляр М.М., ас. Анісімова В.Б.

4. Висновки

Проаналізовано архівні документи Київського національного університету імені Тараса Шевченка 1939, 1944 – 1951 рр., в яких згадується про діяльність академіка М.М. Боголюбова, уточнено деякі дати науково-організаційної діяльності академіка М.М. Боголюбова, вказано перелік кафедр механіко-математичного факультету Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка та їх викладацький склад в перші післявоєнні роки.

1. Архів НАН України, оп. 622, од. 3, л. 8. 2. Архів НАН України, оп. 622, од. 3, л. 7. 3. Архів Київського національного університету імені Тараса Шевченка, ППС 23, л. 15. 4. Архів Київського національного університету імені Тараса Шевченка, ППС 46, л. 7. *5.* Боголюбов А.Н. Н.Н.Боголюбов. Жизнь. Творчество. – Дубна: ОИЯИ, 1996. – 182 с. 6. Боголюбов А.Н., Урбанский В.М. Николай Митрофанович Крылов. – К.: Наукова думка, 1987. 7. Боголюбов Н.Н. Боголюбов Николай Николаевич. Автобиография // Физики о себе. – Л.: Наука, 1990. – С. 345-347. 8. Герасименко В.І., Городній М.Ф., Загородній А.Г., Парасюк І.О., Перестюк М.О., Самойленко А.М., Самойленко В.Г. До 100-річчя від дня народження академіка Миколи Миколайовича Боголюбова // Вісник Київ. нац. ун-ту. Математика. Механіка. – 2009. – Вип. 22. – С. 57–59. 9. Дрінфельд Г.І. Вища математична освіта у Києві в роки 1927 – 1941 // У світі математики. – 1998. – Т. 4. – № 2. – С. 68 – 82. 10. Загородній А.Г., Герасименко В.І. Микола Боголюбов. Фундатор сучасної теоретичної і математичної фізики // Світогляд. – 2009. – № 5 (19). – С.6–13. 11. Кравчук М.П. Математика та математики в Київському університеті за сто років (1834 – 1934) // Розвиток науки в Київському університеті за сто років. – К.: Вид-во Київського ун-ту. – 1935. – с. 34 – 69. 12. Литвинко А. С. Микола Миколайович Боголюбов і статистична фізика в Україні. – К.: Академперіодика, 2009. – 304 с. 13. Митропольський Ю.О., Боголюбов О.М. Микола Митрофанович Крилов. – К.: Наукова думка, 1979. 14. Мриглод І. М., Ігнатюк В. В., Головач Ю. В. Микола Боголюбов та Україна. – Львів: Євросвіт, 2009. – 192 с. 15. Самойленко В.Г. Ньютон двадцятого століття // Країна знань. – 2009. – № 6. – С. 6 – 10. 16. Самойленко В.Г. Микола Митрофанович Крилов – видатний вчений, педагог і організатор науки (до 130 річчя від дня народження) // У світі математики. – 2010. – Т. 16. – вип. 1. – С. 68 – 78. 17. Хацет Б.І. Незабутні роки. Спогади про вчителя // У світі математики. – 1998. – Т. 4. – № 4. – С. 71 – 81. .

Надійшла до редколегії 30.06.10

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск 24

За авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л. Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 32 22; факс 239 31 28

Підписано до друку 27.08.10. Формат 60х84$^{1/8}$. Вид. № 141-1. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 6,97. Обл.-вид. арк. 10. Зам. № 210-5335.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 32 22; факс (38044) 239 31 28.
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (http://www.emis.de/ZMATH). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html

Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

✓ два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;

✓ експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);

✓ позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);

✓ електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows.** Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

✓ текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows** (*.doc) **без застосування стильової розмітки**;

✓ поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.

✓ комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:

- шрифт статті – Arial, розмір 9;
- інтервал між рядками – одинарний;
- перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
- відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;

– матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:

- індекс УДК (для природничих факультетів), (Arial, 8 pt, Bold);
- перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводитимуться в основному тексті статті), (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
- назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання…", "Деякі питання…", "Проблеми…", Шляхи…" тощо), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
- анотація (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок ..."отримано задовільні результати …"); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
- основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
- список літератури (Arial, 7 pt, звичайний);
- дата надходження до редколегії, наприклад, **"Надійшла до редколегії 09.11.05"**. (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 пт, вирівняти по правому краю).

Додаткові вимоги до тексту статті:

✓ кожну абревіатуру слід уводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною абревіатурою;

✓ джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]); якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

✓ усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;

✓ не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;

✓ на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;

✓ усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);

✓ усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій віддтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;

- ✓ формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:				Define Size:		
Text	**Times New Roman**			**Full**	**9 pt**	
Function	**Times New Roman**			**Subscript/Superscript**	**7 pt**	
Variable	**Times New Roman**	**italic**		**Sub-Subscript/Superscript**	**6 pt**	
L.C.Greek	**Symbol**			**Symbol**	**14 pt**	
UC.Greek	**Symbol**			**Sub-Symbol**	**9 pt**	
Vector-matrix	**Times New Roman**	**bold**				
Number	**Times New Roman**					

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- ✓ чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- ✓ тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- ✓ температури в кельвінах (К) або градусах Цельсія (oC), Фаренгейта (oF), Реомюра (oR);
- ✓ умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- ✓ хімічних елементів і сполук.
- ✓ між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- ✓ термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською. Згідно із наказом Держспоживстандарту України від 10.11.06 № 3232 **при складанні списку літератури необхідно застосовувати національний стандарт, ідентичний ГОСТ 7.1.–2003** "Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання". Не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок.

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- ✓ подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- ✓ подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- ✓ подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- ✓ затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows ***ФАЙЛ>СВОЙСТВА***, обрати закладку ***ДОКУМЕНТ*** та заповнити поля ***Название, Автор***. У полі ***Заметки*** занести ім'я, прізвище, поштова адреса та контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.