

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.unuv.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

<b>ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР</b>	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
<b>РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ</b>	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Сущанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
<b>Адреса редколегії</b>	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
<b>Затверджено</b>	Вченою радою механіко-математичного факультету 19.04.10 (протокол № 8)
<b>Атестовано</b>	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
<b>Зареєстровано</b>	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007–4479Р від 11.12.09
<b>Засновник Та видавець</b>	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
<b>Адреса видавця</b>	01601, Київ-601, 6-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 32 22; факс 239 31 28

---

## ЗМІСТ

---

**Громик А., Конет І.**

Інтегральні зображення розв'язків нестационарних задач теплопровідності в обмежених багатозарових просторових середовищах ..... 4

**Ільченко Ю.**

Лінійні диференціальні рівняння в банаховому просторі з сильно  $P$ -позитивним операторним коефіцієнтом ..... 11

**Капустян О., Паньков А.**

Про рекурентні властивості  $\omega$ -граничних множин многозначних напівпотоків ..... 16

**Самойленко Ю.**

Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого степеня при старшій похідній ..... 19

**Фекета П.**

Інваріантні многовиди одного класу розривних динамічних систем ..... 24

**Чайковський А.**

Зображення розв'язку абстрактної задачі Коші ..... 28

**Бондаренко А., Пришляк О.**

Відображення тривимірних многовидів ..... 32

**Котляр А.**

$PPQ$ -еквівалентність функцій на букеті з  $n$  кіл ..... 35

**Репетацька Г.**

Покращена оцінка ортогональної регресії для неявної функціональної моделі з похибками в змінних ..... 37

**Кайдан Н.**

Сагайдаки скінченних кілець ..... 45

**Зайцев О., Хорошилов О.**

Застосування методу годографа при дослідженні просторового обтікання конічних тіл із вдувом ..... 48

**Мелешко В., Папков С., Токовий Ю.**

Нескінченні системи лінійних алгебричних рівнянь у задачах пружної рівноваги тіл скінченних розмірів ..... 51

До 85-річчя від дня народження Олега Олександровича Горошка ..... 58

До 70-річчя від дня народження В'ячеслава Івановича Розумнюка ..... 59

---

## CONTENTS

---

**Gromyk A., Konet I.**

Integral presentation of non-stationary problems solutions of heat conductivity in the limited multi-layer space areas .....4

**Ilchenko Yu.**

The linear nonhomogenous differential first-order equations in complex Banach space with strongly P-positive operator coefficient..... 11

**Kapustyan O., Pankov A.**

On the recurrence property of  $\omega$  – limit sets of multivalued semiflows ..... 16

**Samoylenko V., Samoylenko Yu.**

Asymptotic two phase soliton type solutions to Korteweg – de Vries equation with variable coefficients and small parameter of first degree at the highest derivative..... 19

**Feketa P.**

Invariant manifolds of a certain class of discontinuous dynamical system.....24

**Chaikovskiy A.**

Representation of the solution of abstract Cauchy problem.....28

**Bondarenko A., Prishlyak A.**

3-manifolds mapping ..... 32

**Kotliar A.**

PPO-equivalence of functions on the bunch of  $n$  circles ..... 35

**Repetatska G.**

An improved orthogonal regression estimator for the implicit functional errors-in-variables model ..... 37

**Kaydan N.**

Quivers of finite rings..... 45

**Zaitsev A., Khoroshilov A.**

About of godograph method for the study of the three-dimensional flow around of conical bodies with blowhard injection..... 48

**Meleshko V., Papkov S., Tokovyy Yu.**

Infinite systems of linear algebraic equations in boundary value problems for finite elastic bodies..... 51

**To the 85 anniversary from the date of a birth of Oleh Goroshko..... 58**

**To the 70 anniversary from the date of a birth Vyacheslav Rozumnyuk ..... 59**

**ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ  
НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ  
В ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

*Методом інтегральних перетворень побудовано точні аналітичні розв'язки нестационарних задач теплопровідності в обмежених багатошарових просторових середовищах.*

*The method of integral transformations builds up the exact analytical solution of non-stationary problems of heat conductivity in the limited multi-layer space areas.*

**1. Вступ**

Нестационарні (початково-крайові) задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [5,7,14,15]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач в однорідних і кусково-однорідних середовищах присвячені монографії [8-10, 12]. Зокрема, в [10] розглянуто випадок обмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ (просторів, просторів з порожниною, суцільних тіл і тіл з порожниною). Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [2-4,11]. У цій статті ми пропонуємо інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестационарних задач теплопровідності для обмежених кусково-однорідних просторових середовищ у декартовій системі координат.

**2. Постановка задачі**

Задача про структуру нестационарного температурного поля в ортотропному обмеженому  $(n + 1)$ -шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \{(t, x, y, z) | t > 0; (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle; z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j); l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv l < \infty\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь теплопровідності [6, 17]

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} - \left[ a_{xy}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yy}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] T_j + \chi_j^2 T_j = f_j(t, x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

з початковими умовами

$$T_j(t, x, y, z) \Big|_{t=0} = g_j(x, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, x, y), (\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}) T_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, x, y), \tag{3}$$

умовами неідеального теплового контакту [1]

$$\begin{cases} [(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1) T_k - T_{k+1}] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ (v_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}) \Big|_{z=l_k} = 0, k = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі області  $\Omega_2$ , де  $a_{xy}, a_{yy}, a_{zj} \geq 0$  – коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей  $x, y, z (j = \overline{1, n+1})$ ;  $\chi_j^2 \geq 0$  – коефіцієнти дисипації теплової енергії;  $f(t, x, y, z) = \{f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), \dots, f_{n+1}(t, x, y, z)\}$  – інтенсивність теплових джерел;  $g(x, y, z) = \{g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), \dots, g_{n+1}(x, y, z)\}$  – температура середовища в початковий момент часу;  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0; \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  – деякі дійсні сталі;  $g_0(t, x, y), g_l(t, x, y)$  – задані обмежені неперервні функції в області  $(0; +\infty) \times \Omega_2$ ;  $R_k \geq 0$  – коефіцієнти термоопору;  $v_k, v_{k+1} \geq 0$  – коефіцієнти теплопровідності;  $T(t, x, y, z) = \{T_1(t, x, y, z), T_2(t, x, y, z), \dots, T_{n+1}(t, x, y, z)\}$  – шукана температура.

**3. Основна частина**

**3.1. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі**

$$(-\infty; +\infty) \times (0; b) \times \{z \in K_n^+\}.$$

Розглянемо область  $\Omega_2 = (-\infty; +\infty) \times (0; b)$ . У цьому випадку на межі області  $\Omega_2$  виконуються крайові умови

$$\left. \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \right|_{|x|=\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

щодо змінної  $x$  та крайові умови

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) T_j \Big|_{y=0} = \omega_{1j}(t, x, z); \left( \frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) T_j \Big|_{y=b} = \omega_{2j}(t, x, z), j = \overline{1, n+1} \quad (6)$$

щодо змінної  $y$ , де  $h_1 \geq 0$  – коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y=0$ ;  $\omega_{1j}(t, x, z) = h_1 T_j^{cl}(t, x, z)$ ,  $T_j^{cl}(t, x, z)$  – температура середовища на поверхні  $y=0$ ;  $h_2 \geq 0$  – коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y=b$ ;  $\omega_{2j}(t, x, z) = h_2 T_j^{c2}(t, x, z)$ ,  $T_j^{c2}(t, x, z)$  – температура середовища на поверхні  $y=b$ .

Вважаємо, що для задачі (1)-(6) виконуються умови узгодженості [17]:

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) g_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(0, x, y); \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) g_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(0, x, y);$$

$$\left[ \left[ \left( R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) g_k - g_{k+1} \right] \right]_{z=l_k} = 0,$$

$$\left[ \left( v_k \frac{\partial g_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial g_{k+1}}{\partial z} \right) \right]_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}, \left( -\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) g_j \Big|_{y=0} = \omega_{1j}(0, x, z); \left( \frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) g_j \Big|_{y=b} = \omega_{2j}(b, x, z), j = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі щодо змінної  $x$  [16]:

$$F_x [g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), i = \sqrt{-1}, \quad (7)$$

$$F_x^{-1} [\tilde{g}(\sigma)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma \equiv g(x), \quad (8)$$

$$F_x \left[ \frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\sigma^2 F_x [g(x)] \equiv -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma). \quad (9)$$

Інтегральний оператор  $F_x$  за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)-(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D'_3 = \{ (t, y, z) \mid t \geq 0; y \in (0; b); z \in K_n^+ \}$  розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[ a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j + (a_{yj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (10)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t, \sigma, y, z) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma, y, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (11)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, y); \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(t, \sigma, y), \quad (12)$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{\omega}_{1j}(t, \sigma, z); \left( \frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) \tilde{T}_j \Big|_{y=b} = \tilde{\omega}_{2j}(t, \sigma, z) \quad (13)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left[ \left( R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \right]_{z=l_k} = 0,$$

$$\left[ \left( v_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right) \right]_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}. \quad (14)$$

До задачі (10)-(14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті щодо змінної  $y$  [17]:

$$\Lambda_{yk} [g(y)] = \int_0^b g(y) v_k(y) dy \equiv g_k, \quad (15)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1} [g_k] = \sum_{k=1}^n g_k \frac{v_k(y)}{\|v_k\|^2} \equiv g(y), \quad (16)$$

$$\Lambda_{yk} \left[ \frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + v_k(0) \left( -\frac{d}{dy} + h_1 \right) g \Big|_{y=0} + v_k(b) \left( \frac{d}{dy} + h_2 \right) g \Big|_{y=b}, \quad (17)$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}}, \quad \|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y) dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1 + h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2 + h_1^2)(\gamma_k^2 + h_2^2)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  – монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$ctg(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор  $\Lambda_{yk}$  за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайовій задачі (10)-(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D_3'' = \{(t, z) \mid t > 0; z \in K_n^+\}$  розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_{jk}}{\partial t} - a_{sj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{jk}}{\partial z^2} + (a_{sj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_{jk} = \tilde{G}_{jk}(t, \sigma, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_{jk}(t, \sigma, z) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}(\sigma, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_{1k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t, \sigma); \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1,k} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{ik}(t, \sigma) \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k} \right] \Big|_{z=l_p} = 0, \quad (21)$$

$$\left[ v_p \frac{\partial \tilde{T}_p}{\partial z} - v_{p+1} \frac{\partial \tilde{T}_{p+1,k}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_p} = 0; p = \overline{1, n},$$

де  $\tilde{F}_{jk}(\sigma, z) = \tilde{f}_{jk}(t, \sigma, z) + a_{yj}^2 v_k(0) \tilde{\omega}_{1j}(t, \sigma, z) + a_{yj}^2 v_k(b) \tilde{\omega}_{2j}(t, \sigma, z)$ .

До задачі (18)-(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[l_0; l]$  з  $n$  точками спряження [12]:

$$F_{jn} [g(z)] = \int_{l_0}^l g(z) V(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv g_j, \quad (22)$$

$$F_{jn}^{-1} [g_j] = \sum_{j=1}^\infty g_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \equiv g(z), \quad (23)$$

$$F_{jn} \left[ \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] \equiv \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{d^2 g}{dz^2} V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz = -\lambda_j^2 g_j - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{i-1}}^{l_i} g(z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \left( \alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g \right) \Big|_{z=l_0} + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g \right) \Big|_{z=l}. \quad (24)$$

У рівностях (22)-(24) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_j(z, \lambda_j) \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z); \|V(z, \lambda_j)\|^2 = \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z, \lambda_j) \sigma_i(z) dz;$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z); V_m(z, \lambda_j) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{n+1,j} \left[ \omega_{m-1,2}(\lambda_j) \cos(q_m z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_j) \sin(q_m z) \right]; m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_j) = \omega_{n2}(\lambda_j) \cos(q_{n+1,j} z) - \omega_{n1}(\lambda_j) \sin(q_{n+1,j} z); c_{1k} = 1; c_{2k} = \frac{v_{k+1}}{v_k}; q_{sj} = a_s^{-1} (\lambda_j^2 + k_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj};$$

$$\sigma_k = \prod_{j=k}^n \frac{v_j a_{n+1}}{v_{j+1} a_k^2}; \sigma_n = \frac{v_n a_{n+1}}{v_{n+1} a_n^2}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}; v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{12}^{k1}(q_{sj} l_k) = -v_k^* q_{sj} \sin(q_{sj} l_k); v_{22}^{k1}(q_{sj} l_k) = v_k^* q_{sj} \cos(q_{sj} l_k); v_{11}^{k2}(q_{sj} l_k) = R_k q_{sj} \cos(q_{sj} l_k) + \sin(q_{sj} l_k); v_{21}^{k2}(q_{sj} l_k) = q_{sj} \cos(q_{sj} l_k);$$

$v_{12}^{k2}(q_{sj}l_k) = \cos(q_{sj}l_k); v_{22}^{k2}(q_{sj}l_k) = \sin(q_{sj}l_k); v_k^* = \frac{v_{k+1}}{v_k}; \delta_{sm}^k(q_{kj}l_k; q_{k+1,j}l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj}l_k)v_{22}^{km}(q_{k+1,j}l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj}l_k)v_{12}^{km}(q_{k+1,j}l_k);$   
 $\omega_{01}(\lambda_j) = -v_{11}^{01}(q_{1j}l_0); \omega_{02}(\lambda_j) = -v_{11}^{02}(q_{1j}l_0); \omega_{sm}(\lambda_j) = \omega_{s-1,2}(\lambda_j)\delta_{sm}^k(q_{sj}l_s; q_{s+1,j}l_s) - \omega_{s-1,1}(\lambda_j)\delta_{2m}^k(q_{sj}l_s; q_{s+1,j}l_s);$   
 $\lambda_j$  – корені трансцендентного рівняння  $\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)\omega_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}q_{n+1}(\lambda)l\omega_{n2}(\lambda) = 0$ , що утворюють дискретний спектр,  $\theta(x)$  – одинична функція Гевісайда [18].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2(\sigma, k)\right) \tilde{T}_{1k}(t, \sigma, z) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2(\sigma, k)\right) \tilde{T}_{2k}(t, \sigma, z) \\ \dots \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2(\sigma, k)\right) \tilde{T}_{n+1,k}(t, \sigma, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{1k}(t, \sigma, z) \\ \tilde{G}_{2k}(t, \sigma, z) \\ \dots \\ \tilde{G}_{n+1,k}(t, \sigma, z) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{T}_{1k}(t, \sigma, z) \\ \tilde{T}_{2k}(t, \sigma, z) \\ \dots \\ \tilde{T}_{n+1,k}(t, \sigma, z) \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1k}(\sigma, z) \\ \tilde{g}_{2k}(\sigma, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,k}(\sigma, z) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де  $q_j^2(\sigma, k) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2; a_j^2 \equiv a_{xj}^2; j = \overline{1, n+1}$ .

Інтегральний оператор  $F_{jn}$ , який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[ \int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_j) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_j) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{+\infty} \dots V_{n+1}(z, \lambda_j) \sigma_{n+1} dz \right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{d}{dt} + \lambda_j^2 + q_i^2(\sigma, k) + k_i^2 \right) \tilde{T}_{ikj} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{G}_{ikj} - \sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(t, \sigma) + \sigma_{n+1} a_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_{lk}(t, \sigma), \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ikj} \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}_{ikj}, \quad (29)$$

де  $\tilde{T}_{ikj} \equiv \tilde{T}_{ikj}(t, \sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{T}_{ik}(t, \sigma, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz, \tilde{G}_{ikj} \equiv \tilde{G}_{ikj}(t, \sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{G}_i(t, \sigma, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz,$   
 $\tilde{g}_{ikj} \equiv \tilde{g}_{ikj}(\sigma) = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{g}_{ik}(\sigma, z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz; i = \overline{1, n+1}.$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що  $\max\{q_1^2, q_2^2, \dots, q_{n+1}^2\} = q_1^2$  і покладемо всюди  $k_i^2 = q_1^2 - q_i^2 (i = \overline{1, n+1})$ .

Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{T}_{kj}}{dt} + (\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2) \tilde{T}_{kj} = \tilde{G}_{kj}(t, \sigma) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(t, \sigma) + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_{lk}(t, \sigma), \quad (30)$$

$$\tilde{T}_{kj}(t, \sigma) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{kj}(\sigma), \quad (31)$$

де  $\tilde{T}_{kj}(t, \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{T}_{ikj}(t, \sigma), \tilde{G}_{kj}(t, \sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{G}_{ikj}(t, \sigma), \tilde{g}_{kj}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{g}_{ikj}(\sigma).$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним обмеженим розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{kj}(t, \sigma) = \int_0^t \exp\left[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2\sigma^2 + a_{y1}^2\gamma_k^2 + \chi_1^2)(t-\tau)\right] \times & \left[ \tilde{G}_{kj}(\tau, \sigma) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_{0k}(\tau, \sigma) + \right. \\ & \left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_{lk}(\tau, \sigma) + \delta_+(\tau) \tilde{g}_{jk}(\sigma) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (32)$$

де  $\delta_+(\tau)$  – міра Дірака, зосереджена в точці  $\tau = +0$  [19].

Оскільки суперпозиція операторів  $F_{jn}$  та  $F_{jn}^{-1}$  є одиничним оператором, то оператор  $F_{jn}^{-1}$  зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{jn}^{-1}[\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента  $[\tilde{T}_{kj}(t, \sigma)]$ , де функція  $\tilde{T}_{kj}(t, \sigma)$  визначена формулою (32). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (18)-(21):

$$\tilde{T}_{ik}(t, \sigma, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{T}_{kj}(t, \sigma) \frac{V_i(z, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \quad (34)$$

До функцій  $\tilde{T}_{ik}(t, \sigma, z)$  послідовно застосуємо обернені оператори  $\Lambda_{yk}^{-1}$  за правилом (16) та  $F_x^{-1}$  за правилом (8). Виконавши елементарні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t, x, y, z) &= \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{t+\infty} \int_{-\infty}^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) \times [f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau)g_k(\xi, \eta, \zeta)] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ &+ \int_0^{t+\infty} \int_{-\infty}^b \int_0^{l_k} [W_i^1(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z)g_0(\tau, \xi, \eta) + W_i^2(t-\tau, x, \xi, y, \eta, z)g_l(\tau, \xi, \eta)] d\xi d\eta d\tau + \\ &+ a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{t+\infty} \int_{-\infty}^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} [W_{yik}^1(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta)\omega_{1k}(\tau, \xi, \zeta) + W_{yik}^2(t-\tau, x, \xi, y, z, \zeta)\omega_{2k}(\tau, \xi, \zeta)] \sigma_k d\xi d\zeta d\tau, i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

які описують структуру нестационарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (35) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$\begin{aligned} E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \exp[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2) t] \frac{V_i(z, \lambda_j) V_r(\zeta, \lambda_j)}{\|V_i(z, \lambda_j)\|^2} \times \\ &\times \cos(|x - \xi| \sigma) \frac{V_r(y) V_r(\eta)}{\|V_r\|^2} d\sigma; \quad i, k = \overline{1, n+1}, \end{aligned}$$

нижньої аплікатної матриці Гріна  $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{i1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$ , верхньої аплікатної матриці Гріна  $W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\sigma_{n+1} a_{n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{i, n+1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l)$ , лівої та правої ординатних матриць Гріна  $W_{yik}^1(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$ ,  $W_{yik}^2(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, b, z, \zeta)$  параболічної початково-крайової задачі (1)-(6).

З використанням властивостей фундаментальних функцій  $E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$  і функцій Гріна  $W_i^s(t, x, \xi, y, \eta, z)$ ,  $W_{yik}^s(t, x, \xi, y, \eta, z)$  ( $s = 1, 2$ ) безпосередньо перевіряється, що функції  $T_j(t, x, y, z)$ , визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умові (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

**Зауваження 1.** У випадку  $a_{xy}^2 = a_{yi}^2 = a_{zj}^2 \equiv a_j^2 \geq 0$  формули (35) визначають структуру нестационарного температурного поля в ізотропному обмеженому  $(n+1)$ -шаровому просторовому середовищі.

**Зауваження 2.** Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору  $R_k$  дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестационарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах  $z = l_k$  ідеального теплового контакту.

**Зауваження 3.** При  $R_k = 0$  ( $k = \overline{1, n}$ ) безпосередньо з формул (35) одержуємо структуру нестационарного температурного поля у випадку здійснення на всіх площинах  $z = l_k$  ідеального теплового контакту.

**Зауваження 4.** Параметри  $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях  $z = l_0, z = l$  крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

**Зауваження 5.** Параметри  $h_j$  ( $j = 1, 2$ ) дозволяють виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях  $y = 0, y = b$  крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.



Зауваження 6. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій  $f_j(t, x, y, z)$ ,  $g_j(x, y, z)$ ,  $\omega_{1j}(t, x, z)$ ,  $\omega_{2j}(t, x, z)$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ),  $g_0(t, x, y)$  та  $g_l(t, x, y)$  проводиться безпосередньо.

**3.2. Інтегральне зображення розв'язку задачі теплопровідності в кусково-однорідному середовищі**

$$(0; +\infty) \times (0; +\infty) \times \{z \in K_n^+\}.$$

Розглянемо область  $\Omega_2 = (0; +\infty) \times (0; +\infty)$ . У цьому випадку на межі області виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x} + p\right) T_j \Big|_{x=0} = \omega_j^1(t, y, z), \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k} \Big|_{x=+\infty} = 0; k = 0, 1 \tag{36}$$

щодо змінної  $x$  та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right) T_j \Big|_{y=0} = \omega_j^2(t, x, z); \frac{\partial^k T_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1 \tag{37}$$

щодо змінної  $y$ , де  $p \geq 0$  – коефіцієнт теплообміну через поверхню  $x = 0$ ;  $\omega_j^1(t, y, z) = pT_j^{cl}(t, y, z)$ ,  $T_j^{cl}(t, y, z)$  – температура середовища на поверхні  $x = 0$ ;  $h \geq 0$  – коефіцієнт теплообміну через поверхню  $y = 0$ ;  $\omega_j^2(t, x, z) = hT_j^{c2}(t, x, z)$ ,  $T_j^{c2}(t, x, z)$  – температура середовища на поверхні  $y = 0$ .

Вважаємо, що для задачі (1)-(4), (36), (37) виконуються умови узгодженості:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) g_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(0, x, y); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) g_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(0, x, y); \\ & \left[ \left[ \left( R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) g_k - g_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \right. \\ & \left. \left[ \left( v_k \frac{\partial g_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial g_{k+1}}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}; \right. \left. \left(-\frac{\partial}{\partial x} + p\right) g_j \Big|_{x=0} = \omega_j^1(0, y, z); \frac{\partial^k g_j}{\partial x^k} \Big|_{x=+\infty} = 0; \right. \\ & \left. \left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right) g_j \Big|_{y=0} = \omega_j^2(0, x, z); \frac{\partial^k g_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1; j = \overline{1, n+1}. \right. \end{aligned}$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(4), (36), (37) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [16, 13, 12].

До задачі (1)-(4), (36), (37) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної  $x$  [16, 13]:

$$F_{+x} [g(x)] = \int_0^{+\infty} g(x) K_x(x, \sigma) dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \tag{38}$$

$$F_{+x}^{-1} [\tilde{g}(\sigma)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma) K_x(x, \sigma) d\sigma \equiv g(x), \tag{39}$$

$$F_{+x} \left[ \frac{d^2 g}{dx^2} \right] = -\sigma^2 \tilde{g}(\sigma) + K_x(0, \sigma) \left( -\frac{dg}{dx} + pg \right) \Big|_{x=0}, \tag{40}$$

де ядро перетворення  $K_x(x, \sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma \cos(\sigma x) + p \sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2 + p^2}}$ .

Інтегральний оператор  $F_{+x}$  за правилом (38) внаслідок тотожності (40) крайовій задачі (1)-(4), (36), (37) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D'_3 = \{(t, y, z) | t > 0; y \in (0; +\infty); z \in K_n^+\}$  розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - \left[ a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j - (a_{xy}^2 \sigma^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = \tilde{F}_j(t, \sigma, y, z); j = \overline{1, n+1} \tag{41}$$

з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h\right) \tilde{T}_j \Big|_{y=0} = \tilde{\omega}_j^2(t, \sigma, z); \frac{\partial^k \tilde{T}_j}{\partial y^k} \Big|_{y=+\infty} = 0; k = 0, 1 \tag{42}$$

та умовами спряження (14), де  $\tilde{F}_j(t, \sigma, y, z) = \tilde{f}_j(t, \sigma, y, z) + a_{xy}^2 K_x(0, \sigma) \omega_j^1(t, y, z); j = \overline{1, n+1}$ .

До задачі (41), (11), (12), (42), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної  $y$  [16, 13]:

$$F_{+y} [g(y)] = \int_0^{+\infty} g(y) K_y(y, s) dy \equiv \tilde{g}(s), \quad (43)$$

$$F_{+y}^{-1} [\tilde{g}(s)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(s) K_y(y, s) ds \equiv g(y), \quad (44)$$

$$F_{+y} \left[ \frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -s^2 \tilde{g}(s) + K_y(0, s) \left( -\frac{dg}{dy} + hg \right) \Big|_{y=0}, \quad (45)$$

де ядро перетворення  $K_y(y, s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{s \cos(sy) + h \sin(sy)}{\sqrt{s^2 + h^2}}$ .

Інтегральний оператор  $F_{+y}$  за правилом (43) внаслідок тотожності (45) початково-крайовій задачі (41), (11), (12), (42), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині  $D_3'' = \{(t, z) | t > 0; z \in K_n^+\}$  розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{T}_j}{\partial t} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_j}{\partial z^2} + (a_{xy}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2) \tilde{T}_j = \tilde{F}_j(t, \sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (46)$$

з початковими умовами

$$\tilde{T}_j(t, \sigma, s, z) \Big|_{t=0} = \tilde{g}_j(\sigma, s, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (47)$$

крайовими умовами

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_0(t, \sigma, s); \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{T}_{n+1} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_l(t, \sigma, s), \quad (48)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[ \left( R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left[ v_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - v_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (49)$$

де  $\tilde{F}_j(t, \sigma, s, z) = \tilde{f}_j(t, \sigma, s, z) + a_{xy}^2 K_x(0, \sigma) \tilde{\omega}_j^1(t, s, z) + a_{yj}^2 K_y(0, s) \tilde{\omega}_j^2(t, \sigma, z); j = \overline{1, n+1}$ .

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (46)-(49) збігається із задачею (18)-(21). Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті  $[l_0; l]$  з  $n$  точками спряження єдиний обмежений розв'язок задачі (46)-(49) відповідно до формул (34) визначають функції

$$\begin{aligned} \tilde{T}_i(t, \sigma, s, z) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_0^t \exp \left[ -(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2)(t - \tau) \right] \times \left[ \tilde{F}_j(t, \sigma, s) - \frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0, \lambda_j) \tilde{g}_0(\tau, \sigma, s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} V_{n+1}(l, \lambda_j) \tilde{g}_l(\tau, \sigma, s) + \delta_+(\tau) \tilde{g}_j(\sigma, s) \right] d\tau \right\} \frac{V_i(z, \lambda_1)}{\|V_i(z, \lambda_1)\|^2}; i = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Застосувавши послідовно до функцій  $\tilde{T}_i(t, \sigma, s, z)$ , визначених формулами (50), обернені оператори  $F_{+y}^{-1}$  та  $F_{+x}^{-1}$ , одержуємо функції

$$\begin{aligned} T_i(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) [f_k(\tau, \xi, \eta, \zeta) + \delta_+(\tau) g_k(\xi, \eta, \zeta)] \sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [W_i^1(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z) g_0(\tau, \xi, \eta) + W_i^2(t - \tau, x, \xi, y, \eta, z) g_l(\tau, \xi, \eta)] d\xi d\eta d\tau + \\ + a_{xi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xik}(t - \tau, x, y, \eta, z, \zeta) \omega_j^1(\tau, \eta, \zeta) \sigma_k d\eta d\zeta d\tau + \\ + a_{yi}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yik}(t - \tau, x, \xi, y, z, \zeta) \omega_j^2(\tau, \xi, \zeta) \sigma_k d\xi d\zeta d\tau; i = \overline{1, n+1}, \end{aligned} \quad (51)$$

які описують структуру нестационарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (51) застосовано компоненти: фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-(\lambda_j^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 s^2 + \chi_1^2) t\right] \times \\ \times \frac{V_i(z, \lambda_j) V_k(\zeta, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} K_x(x, \sigma) K_x(\xi, \sigma) K_y(y, s) K_y(\eta, s) d\sigma ds; i, k = \overline{1, n+1},$$

нижньої аплікатної матриці Гріна  $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z) = -\frac{\sigma_1 a_1^2}{\alpha_{11}^0} E_{i1}(t, x, \xi, y, \eta, z, l_0)$ , верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z) = \frac{\sigma_{n+1} a_{n+1}^2}{\alpha_{22}^{n+1}} E_i(t, x, \xi, y, \eta, z, l),$$
 абсцисної матриці Гріна  $W_{xik}(t, x, y, \eta, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, 0, y, \eta, z, \zeta)$  та

ординатної матриці Гріна  $W_{yik}(t, x, \xi, y, z, \zeta) = E_{ik}(t, x, \xi, y, 0, z, \zeta)$  параболічної початково-крайової задачі (1)-(4), (36), (37).

З використанням властивостей фундаментальних функцій  $E_{jk}(t, x, \xi, y, \eta, z, \zeta)$  і функцій Гріна  $W_i^1(t, x, \xi, y, \eta, z)$ ,  $W_i^2(t, x, \xi, y, \eta, z)$ ,  $W_{xjk}(t, x, y, \eta, z, \zeta)$ ,  $W_{yjk}(t, x, \xi, y, z, \zeta)$  безпосередньо перевіряється, що функції  $T_j(t, x, y, z)$ , визначені формулами (51), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [18].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри  $p, h$  дають можливість виділяти із формул (51) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях  $x = 0, y = 0$  крайових умов 1-го роду й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (51) в залежності від аналітичного вигляду функцій  $f_j(t, x, y, z)$ ,  $g_j(x, y, z)$ ,  $\omega_j^1(t, x, z)$ ,  $\omega_j^2(t, x, z)$  ( $j = \overline{1, n+1}$ ),  $g_0(t, x, y)$  та  $g_i(t, x, y)$  проводиться безпосередньо.

#### 4. ВИСНОВКИ

За загальних припущень у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків нестационарних задач в обмежених багатозарових просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як у теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М., 1964.
2. Громик А.П., Конет І.М. Нестационарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2007. – Вип.15. – С. 67-82.
3. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С.100-118.
4. Громик А.П., Конет І.М. Початково-крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.17. – С. 102-120.
5. Дейнека В.С., Сергиенко І.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К., 1998.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М., 1964.
7. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К., 1992.
8. Конет І.М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – К., 1998.
9. Конет І.М., Ленюк М.П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці, 2001.
10. Конет І.М., Ленюк М.П. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях. – Чернівці, 2004.
11. Конет І.М., Ленюк М.П. Нестационарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. Чернів. нац. ун-ту ім. Ю.Федьковича. 2008. – Вип.16. – С. 118-134.
12. Ленюк М.П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – К., 1997.
13. Ленюк М.П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля). – К., 1983. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
14. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М., 1984. – 368 с.
15. Сергиенко І.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – К., 1991.
16. Снеддон И. Преобразования Фурье. – М., 1955.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М., 1972.
18. Шварц Л. Математические методы для физических наук. – М., 1965.

Надійшла до редколегії 14.09.09

УДК 517.98

Ю. Ільченко, асп.

### ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З СИЛЬНО Р-ПОЗИТИВНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

Розглядаються лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку в комплексному банаховому просторі з сильно Р-позитивним операторним коефіцієнтом і шукаються розв'язки таких рівнянь та досліджується поведінка вказаних операторів.

The linear nonhomogenous differential first-order equations are considered in complex Banach space with strongly P-positive operator coefficient and are searched for solutions of these equations, the behaviour of specified operator is researched.

#### 1. Вступ.

Нехай  $(B, \|\cdot\|)$  – комплексний банахів простір,  $A: D(A) \rightarrow B$  – лінійний оператор,  $D(A)$  – скрізь щільна в  $B$ . Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in R, \quad (1)$$

де  $f: R \rightarrow B$  – відома функція,  $x: R \rightarrow D(A)$  – шукана.

Розв'язки рівняння (1) відомі для деяких видів операторів – обмежених, сильно-позитивних (секторіальних) [2,4]. Якщо оператор  $A$  –  $G$ -секторіальний, то розв'язки його знайдено в роботі [1]. Для аналогічного однорідного рівняння було знайдено розв'язки у випадку сильно  $P$ -позитивного операторного коефіцієнта  $A$  [3]. Нижче ми розглядаємо рівняння (1) з сильно  $P$ -позитивним операторним коефіцієнтом  $A$ , а також досліджуємо питання існування та єдиності розв'язку задачі Коші для вказаного рівняння.

Нехай  $\Gamma$  – орієнтований проти годинникової стрілки контур, що складається із двох дуг  $\Gamma_+$  і  $\Gamma_-$  параболи:  $y^2 = k(x-x')$ ,  $k > 0$ ,  $x'$  – деяка фіксована точка,  $\Gamma_+$  і  $\Gamma_-$  з'єднані відрізком  $\Gamma_0$  прямої  $x = x_0$ ,  $x_0 \geq x'$ ,  $\Omega_\Gamma$  – область, що лежить зліва при вказаному напрямку обходу  $\Gamma$ .

**Означення 1.** Оператор  $A: D(A) \rightarrow B$  називається **сильно  $P$ -позитивним**, якщо його спектр  $\sigma(A)$  розміщений в області  $\Omega_\Gamma$ , а на  $\Gamma$  та поза  $\Omega_\Gamma$  має місце оцінка:

$$\|R_z(A)\|_{B \rightarrow B} \leq \frac{M}{1 + \sqrt{|z|}}, \tag{2}$$

де  $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ .

**2. Властивості операторної експоненти.**

Нехай  $A$  – сильно  $P$ -позитивний оператор,

$$\Gamma_{a,b} = \{z = (x, y) : x = ay^2 + b, a > 0, b \geq 0\} - \tag{3}$$

контур, аналогічний контуру  $\Gamma$  з означення 1, для резольвенти  $R_z(A)$  оператора  $A$  виконується оцінка (2). Покладемо:

$$e^{-At} := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,b}} e^{-tz} R_z(A) dz, t > 0. \tag{4}$$

**Лема 1:** Інтеграл (4) абсолютно збіжний.

Доведення: Далі скрізь, де не буде оговорено, ми будемо розглядати випадок  $b = 0$ , тобто контур  $\Gamma_{a,b} = \Gamma_{a,0} =: \Gamma_a$ .

Оцінимо інтеграл від норми:

$$\int_{\Gamma_a^+} |e^{-tz} \|R_z(A)\| |dz| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tay^2} \frac{M\sqrt{4a^2y^2+1}}{1 + \sqrt[4]{a^2y^4+y^2}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-w} M \frac{\sqrt{\frac{4aw}{t}+1}}{1 + \sqrt[4]{\frac{w^2}{t^2} + \frac{w}{ta}}} dw =: I.$$

Зробимо спершу деякі оцінки на підінтегральну функцію. Позначимо:

$$g(w) := \frac{\sqrt{\frac{4aw}{t}+1}}{1 + \sqrt[4]{\frac{w^2}{t^2} + \frac{w}{ta}}}. \text{ Тоді } g(w) = \frac{\sqrt{\frac{4a}{t} + \frac{1}{w}} \cdot \sqrt{w}}{\left(\frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt[4]{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{ta}}\right) \sqrt{w}} \rightarrow 2\sqrt{a}, w \rightarrow \infty, \quad g(0) = 1, g \in C([0; +\infty)).$$

Тому  $\exists C > 0 : |g(w)| \leq C$  на  $[0; +\infty)$ .

Повернемося до оцінюваного виразу:

$$I \leq \int_0^{+\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{wta}} dw = \frac{MC}{2\sqrt{ta}} \int_0^{+\infty} e^{-w} w^{\frac{1}{2}-1} dw = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{MC}{2\sqrt{ta}} = \frac{MC\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ta}}. \tag{5}$$

Отже, при  $t > 0$  інтеграл (4) абсолютно збіжний, тому експонента  $e^{-At}$  визначена.

При детальному дослідженні поведінки отриманої підінтегральної функції  $g(w) = \frac{\sqrt{4a^2y^2+1}}{1 + \sqrt[4]{a^2y^4+y^2}}$ , матимемо:

$$c \leq g(w) \leq C,$$

$$\text{де } c = \min \left\{ \frac{2a}{1 + \sqrt[4]{a^2+1}}; \frac{1}{1 + \sqrt[4]{a^2+1}} \right\} = \frac{1}{1 + \sqrt[4]{a^2+1}} \min \{2a; 1\}, \quad C = \max \left\{ \frac{\sqrt{4a^2+1}}{\sqrt{a}}; \sqrt{4a^2+1} \right\} = \sqrt{4a^2+1} \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}; 1 \right\}.$$

Неважко помітити, що при малих  $t$  оцінка, отримана в лемі для експоненти, буде погіршуватися. Тому постає питання: чи можна знайти "гарні" оцінки, дослідити експоненту на обмеженість при малих  $t$ . Для цього ми видозмінимо наш контур інтегрування, бо, як ми бачимо, початковий контур не дає відповіді на поставлені запитання. Видозміну проведемо таким чином, щоб новий контур на нескінченності співпадав зі старим, а в певних точках (досить близьких до вершини параболи) він переходив у дугу кола, таким чином обходячи зліва вершину – точку  $(0;0)$ .

Нехай новий контур  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , де  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_3$  верхня та нижня дуга параболи відповідно (від точки  $(ay_0^2; y_0)$  на параболі до  $\infty$  та від точки  $(ay_0^2; -y_0)$  до  $\infty$ ),  $\Gamma_2$  – дуга кола радіуса  $r_0$  з центром в початку координат, що з'єднує точки  $(ay_0^2; y_0)$  та  $(ay_0^2; -y_0)$  і обходить початок координат проти годинникової стрілки.

1. Спочатку знайдемо оцінки для інтеграла по контуру  $\Gamma_2$  (вважаємо, що  $y_0$  – деяке наперед вибране фіксоване додатне число):

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} |e^{-tz}| \|R_z(A)\| |dz| \leq \int_{\arctg \frac{1}{ay_0}}^{2\pi - \arctg \frac{1}{ay_0}} e^{-ty_0 \sqrt{a^2 y_0^2 + 1} \cos \varphi} \frac{M \sqrt{a^2 y_0^4 + y_0^2}}{1 + \sqrt{a^2 y_0^4 + y_0^2}} d\varphi \leq 2\pi M \frac{e^{ty_0 \sqrt{a^2 y_0^2 + 1}} \sqrt{a^2 y_0^4 + y_0^2}}{1 + \sqrt{a^2 y_0^4 + y_0^2}}.$$

2. Знайдемо тепер оцінку для інтеграла по контуру  $\Gamma_1$  (для  $\Gamma_3$  аналогічно):

$$I_1 = \int_{\{y \geq y_0\}} e^{-tay^2} Mg(y) dy \leq \int_{y_0}^{+\infty} e^{-tay^2} MC dy = \int_{w_0}^{+\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{wta}} dw.$$

Розглянемо окремо таку функцію:  $F(w) = \int_w^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ . Дослідивши її, одержимо, що на відрізку  $[0; 1]$  функція  $F$

обмежена прямими  $w = \sqrt{\pi}$  та  $w = \frac{1}{2e^2}$ , а при  $w \geq 1$ :  $F(w) = \int_w^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{1}{\sqrt{we^w}}$  (неважко показати, що отримана оцінка є асимптотично точною при великих  $w$ ).

При малих  $t$  інтеграли  $I_1$  та  $I_3$  будуть дуже великі:  $I_1 \geq \frac{MC}{4e^2 \sqrt{ta}}$ , тому випадок, коли  $w_0 \in [0; 1]$ , не розглядати- мемо.

Якщо  $w_0 \geq 1$ :  $w_0 = tay_0^2$ ,  $y_0 = \frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{ta}}$ , звідки випливає, що  $y_0 \geq \frac{1}{\sqrt{ta}}$ .

Поклавши з самого початку  $y_0 = \frac{1}{\sqrt{ta}}$ , матимемо:

$$I_1 \leq \frac{MC}{2\sqrt{tae^{tay_0^2}} \sqrt{ta} y_0} = \frac{MC}{2tae^{tay_0^2} y_0} = \frac{MC}{2\sqrt{tae}}.$$

Аналогічна оцінка для  $I_3$ . При вказаному  $y_0$   $I_2$  матиме порядок:  $\frac{2\pi Me}{\sqrt{t}}$  (ми отримали асимптотику при малих  $t$ ).

Отримана для  $I_1$  та  $I_3$  оцінка асимптотично має той же порядок, що й оцінка при оригінальному контурі, але все ж певне покращення останньої є, в тому сенсі, що ми одержали кращу обмежуючу сталу. А оцінка на  $I_2$  краща за отриману раніше лише при малих  $t$ .

Мають місце наступні теореми:

**ТЕОРЕМА 1.** Нехай  $A$  – сильно  $P$ -позитивний оператор. Тоді мають місце наступні твердження:

1.  $\exists C_1 > 0, \forall t > 0$ :

$$\|Ae^{-At}\| \leq C_1 \frac{1+t}{t\sqrt{t}};$$

2.  $\|e^{-At}\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** 1.  $Ae^{-At} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} ze^{-zt} R_z(A) dz$ , у цьому неважко перекопатися.

Виконавши ряд перетворень та дослідивши підінтегральні функції матимемо, при  $t \in [0; 1]$ :

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{M}{4\pi a} \int_0^1 \frac{e^{-w}}{t\sqrt{t}} \frac{\sqrt{4a^2 + 5at + t^2}}{\sqrt{w}} dw + \frac{M}{4\pi a} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-w}\sqrt{w}}{t\sqrt{t}} \sqrt{4a^2 + 5at + t^2} dw \leq \frac{M}{4\pi a} \frac{1}{t\sqrt{t}} (L_1 + L_2) \sqrt{4a^2 + 5a + 1},$$

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{ML_4}{4\pi a} \frac{3\sqrt{4a^2 + 5a + 1}}{\sqrt{t}}, \quad t \in [1; +\infty) \quad (\text{тут } L_1, L_2, L_4 \text{ – деякі сталі}).$$

Ввівши позначення:  $C_1 := \frac{M}{4\pi a} \max \left\{ L_4 \left( 3\sqrt{4a^2 + 5a + 1} \right), (L_1 + L_2) \sqrt{4a^2 + 5a + 1} \right\}$ ,

$$\|Ae^{-At}\| \leq C_1 \left( \frac{1}{t\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = C_1 \frac{1+t}{t\sqrt{t}}, \text{ що й слід було довести.}$$

2. 3 (5) впливає:

$$\|e^{-At}\| \leq \frac{MC\sqrt{\pi}}{2\sqrt{ta}}, \text{ а отже,}$$

$$\|e^{-At}\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

**ТЕОРЕМА 2.** Нехай  $A$  – сильно  $P$ -позитивний оператор. Тоді  $\forall t > 0$ :

$$(e^{-At})' = -Ae^{-At}.$$

Доведення: Нехай  $\tau > 0$ . Запишемо таку норму:

$$\left\| \frac{e^{-A(t+\tau)} - e^{-At}}{\tau} + Ae^{-At} \right\| = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{-zt} \left( \frac{e^{-z\tau} - 1 + z\tau}{\tau} \right) R_z(A) dz \right\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{-zt}| |z| |h(z\tau)| \|R_z(A)\| |dz|, \text{ де}$$

$$h(w) := \frac{e^{-w} - 1 + w}{w} \text{ і } |h(w)| \leq L' \text{ на } \{w \mid \operatorname{Re} w > 0\}, \text{ де } L' \text{ – деяка стала.}$$

Застосувавши теорему Лебега про мажоровану збіжність, взявши за мажоранту:

$$g(z) := L' |e^{-zt}| |z| \|R_z(A)\|,$$

отримаємо збіжність до нуля початкового інтеграла, що й доводить рівність в теоремі (випадок  $\tau < 0$  аналогічний).

Далі наведемо допоміжні твердження.

**Лема 2.** Для будь-якого  $x \in D(A^2)$  при  $t \rightarrow 0+$  виконується співвідношення:

$$\left( \frac{I - e^{-At}}{t} - A \right) x \rightarrow 0.$$

Доведення: Нехай  $x \in D(A^2), x_0 = A^2 x, x_0 \in V$ . Маємо:

$$A^{-2} e^{-At} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz + A^{-2} - A^{-1}t, \text{ (де } \Gamma_r \text{ – контур, що обходить точку } (0;0) \text{ зліва колом радіуса } r)$$

(це доводиться виконанням нескладних перетворень і застосуванням теорії лишків). Далі запишемо, поклавши  $r = 1/\sqrt{t}$ :

$$\begin{aligned} \left\| \left( t^{-1} (A^{-2} - e^{-At} A^{-2}) + A^{-1} \right) x_0 \right\| &= \left\| \left( \frac{t^{-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right) x_0 \right\| = \frac{t}{2\pi} \left\| \left( \int_{\Gamma_r} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right) x_0 \right\| \\ &= \left\| \int_{\Gamma_r} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right\| = \left\| \int_{\Gamma_r^1} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz + \int_{\Gamma_r^2} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz + \int_{\Gamma_r^3} t^{-2} z^{-2} e^{-zt} R_z(A) dz \right\| \leq \\ &\leq \int_a^{+\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{wta}} dw + 2\pi Me \frac{\sqrt[4]{t} \sqrt{a^2 + t}}{\sqrt[4]{t} + 1} + \int_{-a}^{-\infty} e^{-w} \frac{MC}{2\sqrt{-wta}} dw = \frac{MCC_2}{\sqrt{ta}} + \frac{2\pi Me \sqrt[4]{t} \sqrt{a^2 + t}}{t(\sqrt[4]{t} + 1)}, \end{aligned}$$

де  $C_2 := \int_a^{+\infty} e^{-w} \frac{1}{\sqrt{w}} dw$ , тоді матимемо:

$$\begin{aligned} \left\| \left( t^{-1} (A^{-2} - e^{-At} A^{-2}) + A^{-1} \right) x_0 \right\| &\leq \frac{t}{2\pi} \left( \frac{MCC_2}{\sqrt{ta}} + \frac{2\pi Me \sqrt[4]{t} \sqrt{a^2 + t}}{t(\sqrt[4]{t} + 1)} \right) \|x_0\| = \\ &= \left( \frac{\sqrt{t} MCC_2}{2\pi \sqrt{a}} + \frac{Me \sqrt[4]{t} \sqrt{a^2 + t}}{\sqrt[4]{t} + 1} \right) \|x_0\| \rightarrow 0, t \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

**Лема 3.** Для будь-якого  $x \in V$  при  $t \rightarrow 0+$ :

$$\sqrt{t} (e^{-At} - I) x \rightarrow 0.$$

Якщо додатково  $x \in D(A)$ , то

$$(e^{-At} - I) x \rightarrow 0, t \rightarrow 0+.$$

**Доведення:** 1. Нехай  $x \in D(A)$ , тоді маємо:

$$\|e^{-At}x - x\| = \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (e^{-tz} - 1)(A - zI)^{-1} z^{-1} dz Ax \right\| \leq \left\{ \exists c \geq 0: \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{-y} - 1| \frac{1}{|y|^{3/2}} |dy| \leq c \right\} \leq c\sqrt{t} \|Ax\|,$$

звідки:

$$\sqrt{t} (e^{-At} - I)x \rightarrow 0, t \rightarrow 0+.$$

2. Якщо  $x \notin D(A)$ , то скориставшись скрізь щільністю  $D(A)$  в просторі  $V$ , доведеним вище пунктом а), та оцінкою (5), отримаємо доведення твердження в цьому випадку.

#### 4. Розв'язність диференціального рівняння

**ТЕОРЕМА 3.** Нехай  $A$  – сильно  $P$ -позитивний оператор. Функція  $f: (0; R) \rightarrow D(A)$  задовольняє умову:

$$\exists L > 0, \forall s_1, s_2 \in (0; R): \|f(s_1) - f(s_2)\| \leq L|s_1 - s_2|.$$

Тоді функція  $F(t) := \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds, t \in (0; R), F(0) = \bar{0}$  є розв'язком задачі Коші:

$$F'(t) = -AF(t) + f(t), t \in (0; R), F(0) = \bar{0}. \tag{6}$$

Доведення: Оскільки для  $F(t)$  при  $t > 0$  має місце зображення:

$$F(t) = A^{-1} \left( I - e^{-At} \right) f(t) + A^{-1} \int_0^t A e^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds, t > 0,$$

то  $F(t) \in D(A)$ , при  $t > 0$ .

Для доведення того факту, що функція  $F(t)$  — розв'язок задачі Коші (6), покажемо, що вона задовольняє рівняння в задачі (6). Вважаємо, що  $\Delta t > 0$ , для  $\Delta t < 0$  міркування аналогічні. Маємо:

$$\begin{aligned} & \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} - (-AF(t) + f(t)) = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_0^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t-s)} f(s) ds - \frac{1}{\Delta t} \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds + \int_0^t A e^{-A(t-s)} f(s) ds - f(t) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \\ & I_1 := \int_0^t e^{-A(t-s)} \left( \frac{e^{-A\Delta t} - I}{\Delta t} + A \right) f(t) ds, I_2 := \int_0^t e^{-A(t-s)} \left( \frac{e^{-A\Delta t} - I}{\Delta t} + A \right) (f(s) - f(t)) ds, \\ & I_3 := \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} e^{-A(t+\Delta t-s)} (f(s) - f(t)) ds, I_4 := A^{-1} \left( \frac{I - e^{-A\Delta t}}{\Delta t} - A \right) f(t). \end{aligned}$$

Провівши дослідження отриманих інтегралів, можна переконатися, що

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} - (AF(t) + f(t)) = I + I + I + I \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0+.$$

А також неважко помітити, що виконується початкова умова.

**ТЕОРЕМА 4 (теорема єдиності).** Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для будь-якого  $x_0 \in D(A)$  існує єдиний розв'язок задачі Коші:

$$x'(t) + Ax(t) = f(t), t \in (0; R), x(0) = x_0,$$

причому

$$x(t) = e^{-At} x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds, t \in (0; R). \tag{7}$$

**Доведення:** Функція (7) є розв'язком задачі Коші за теоремами 2 та 3 (і лемою 3):

$$x'(t) = -Ae^{-At} x_0 - A \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds + f(t) = -Ax(t) + f(t), t > 0;$$

$x(t) \rightarrow x_0, t \rightarrow 0+$  (для доведення цього потрібно скористатися 1-3 лемами).

Для доведення єдиності розглянемо розв'язок однорідної задачі Коші  $x(s)$  та функцію  $u(t, s)$ :

$$u(t, s) = e^{-A(t-s)} A^{-1} x(s), 0 \leq s \leq t < R.$$

Функція  $u$  диференційовна по  $s \in (0; t)$  за теоремою 2 і лемою 3, і  $\frac{\partial u}{\partial s} = \bar{0}$ , звідси:

$$\begin{aligned} & u(t, s) = u(t; 0), s \in [0; t], \text{ звідки випливає, що } u(t, 0) = u(t; t), \\ & e^{-At} A^{-1} x(0) = A^{-1} x(t), \text{ а отже } x(t) = e^{-At} x_0, t > 0. \end{aligned}$$

5. Висновок

В роботі ми знайшли розв'язки рівняння (1) аналітичними методами, а також дослідили поведінку сильно P-позитивних операторів, показати, в чому цей клас операторів схожий на розглядувані раніше класи (наприклад, виконання однакових граничних тверджень, такий же вигляд розв'язку задачі Коші), а в чому відрізняється (інша оцінка на норму операторної експоненти).

1. Городний М.Ф., Чайковський А.В. Обобщение понятия секториального оператора. // Мат.сборник. – 2006, №7, 197. – С.29-46. 2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972. 3. Макаров В.Л., Гаврилюк І.П. Експоненціально збіжні методи паралельної дискретизації для еволюційних рівнянь першого порядку. // Доповіді НАН України.– 2002, №3.–С.24-28. 4. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985.

Надійшла до редколегії 25.11.09

УДК 517.9

О. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, проф., А. Паньков, асп.

**ПРО РЕКУРЕНТНІ ВЛАСТИВОСТІ  
ω-ГРАНИЧНИХ МНОЖИН МНОГОЗНАЧНИХ НАПІВПТОКІВ.**

*В роботі досліджується ланцюгова рекурентність ω-граничних множин траєкторій многозначних напівпотоків.  
In this paper we investigate chain recurrence property of the omega limit sets of trajectories of multivalued semiflows*

1. Вступ

Однією з найважливіших задач в теорії динамічних систем є вивчення поведінки траєкторій на інваріантних множинах [2]. Однією з характеристик цієї поведінки є ланцюгова рекурентність, детальне вивчення якої для автономних та асимптотично автономних напівпотоків проведено в [6]. В даній роботі деякі результати із [6] узагальнюються на випадок многозначних напівпотоків ( $m$ -напівпотоків) [1,5]. Зокрема для  $m$ -напівпотоків, породженого розв'язками диференціального включення, доведено, що кожна зв'язна, компактна, ланцюгово-рекурентна множина є  $\omega$ -граничною множиною траєкторії диференціального включення з як завгодно близькою до вихідної правою частиною.

2. Постановка задачі

Нехай  $(X, \rho)$  – повний метричний простір,  $K$  – множина таких відображень  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow X$ , що:

- 1)  $\forall z \in X \exists \varphi(\cdot) \in K: \varphi(0) = z$ ;
- 2)  $\forall \varphi(\cdot) \in K \forall \tau \geq 0 \varphi^\tau(\cdot) \in K$ , де  $\varphi^\tau(t) = \varphi(t + \tau)$ .

$\varphi(\cdot) \in K$  називатимемо траєкторією. Означимо (многозначне) відображення  $G: R_+ \times X \rightarrow 2^X$

$$G(t, z) = \{ \varphi(t) \mid \varphi(\cdot) \in K, \varphi(0) = z \}.$$

Тоді легко показати, що  $G$   $m$ -напівпотік, тобто

$$G(0, z) = z \quad \forall z \in X,$$

$$G(t_1 + t_2, z) \subset G(t_1, G(t_2, z)) \quad \forall z \in X \quad \forall t_1, t_2 \in R_+.$$

Крім того,  $\forall \varphi(\cdot) \in K, \forall t, s \geq 0 \varphi(t + s) \in G(t, \varphi(s))$ .

Основним об'єктом вивчення є множина

$$\omega(\varphi) = \{ z \in X \mid \exists t_n \rightarrow \infty \varphi(t_n) \rightarrow z \}.$$

**Лема 1** [1,5]. Нехай для  $\varphi(\cdot) \in K$  множина  $\bigcup_{t \geq 0} \overline{\varphi(t)}$  є компактом,  $\forall t \geq 0$  відображення  $x \mapsto G(t, x)$  має замкнений графік. Тоді  $\omega(\varphi) \neq \emptyset$ , компактна,  $\omega(\varphi) \subset G(t, \omega(\varphi))$  (напівінваріантність) і  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\varphi(t), \omega(\varphi)) = 0$ . Якщо  $\varphi \in C(0, +\infty; X)$ , то  $\omega(\varphi)$  зв'язна.

Зауважимо, що  $\omega(\varphi)$  інваріантна ( $\omega(\varphi) = G(t, \omega(\varphi))$ ), якщо  $G$  однозначний на  $\bigcup_{t \geq 0} \overline{\varphi(t)}$ . У випадку многозначного  $G$  це, взагалі кажучи, не так. Проте клас компактних, інваріантних, зв'язних підмножин для  $m$ -напівпотоків  $G$  не є порожнім і при досить загальних умовах включає в себе глобальний атрактор.

**Означення** [1]. Компакт  $A \subseteq X$  називається глобальним атрактором  $m$ -напівпотоків  $G$ , якщо  $A \subseteq G(t, A) \forall t \geq 0$  і для будь-якої обмеженої множини  $B \subseteq X \text{ dist}(G(t, B), A) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ .

Тут і надалі  $\text{dist}(A, B) = \sup_{\xi \in A} \inf_{\zeta \in B} \rho(\xi, \zeta)$ ,  $\text{dist}_H(A, B) = \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\}$ ,  $B_r(A) = \{y \in X \mid \text{dist}(y, A) \leq r\}$ .

**Лема 2** [1,5]. Нехай  $m$ -напівпотік  $G$  задовольняє умови:

- 1) існує обмежена, зв'язна така множина  $B_0 \subset X$ , що для довільної обмеженої  $B \subset X \text{ dist}(G(t, B), B_0) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ ;
- 2) для будь-якої обмеженої  $B \subset X$  та  $\forall t_n \rightarrow +\infty$  будь-яка послідовність  $\xi_n \in G(t_n, B)$  є предкомпактною;
- 3)  $m$ -напівпотік  $G$  є строгим, тобто  $G(t + s, z) = G(t, G(s, z)) \forall z \in X, \forall t, s \in R_+$ ;
- 4) відображення  $z \rightarrow G(t, z)$  зв'язнозначне і напівнеперервне зверху.



Тоді  $m$  – напівпотік  $G$  має інваріантний, зв'язний глобальний атрактор.

**Означення.** Нехай  $A \subseteq X, x, y \in A$ . Для  $\varepsilon > 0, t > 0$   $(\varepsilon, t)$ –ланцюгом з  $x$  в  $y$  в  $A$  назовемо послідовність  $\{x = x_1, x_2, \dots, x_{n+1} = y\}, \{t_1, \dots, t_n\}, x_i \in A, t_i \geq t$  таку, що  $dist(x_{i+1}, G(t_i, x_i)) < \varepsilon, i = \overline{1, n}$ .

Точка  $x \in A$  називається ланцюгово-рекурентною, якщо  $\forall \varepsilon > 0 \forall t > 0$  існує  $(\varepsilon, t)$ –ланцюг з  $x$  в  $x$  в  $A$ .

Множина  $A$  називається ланцюгово-рекурентною, якщо кожна її точка є ланцюгово рекурентною.

Основною метою роботи є вказати умови, за яких  $\omega(\varphi)$  є ланцюгово рекурентною, а також для  $m$  – напівпотіку, породженого розв'язками диференціального включення, довести в певному сенсі обернений результат.

### 3. Основні результати

Наступні теорема 1 та лема 3 узагальнюють на випадок  $m$  – напівпотіку відомі результати з [6].

**Теорема 1.** Нехай для  $\varphi(\cdot) \in K$  множина  $B := \overline{\bigcup_{t \geq 0} \varphi(t)}$  є компактом,  $\forall \varepsilon > 0 \forall T > 0 \exists \delta \forall z_1, z_2 \in B \rho(z_1, z_2) < \delta$ :

$$\sup_{t \in [0, T]} dist_H(G(t, z_1), G(t, z_2)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Тоді  $\omega(\varphi)$  є ланцюгово-рекурентною.

**Лема 3.** Нехай множина  $A$  є компактною, зв'язною, напівінваріантною і ланцюгово рекурентною. Тоді  $\forall \varepsilon > 0, \forall T > 0, \forall y_0 \in A, \exists \{y_i\}_{i \geq 1} \subset A, \exists \{t_i\}_{i \geq 0}, t_i > T$  такі, що

$$\rho(y_{i+1}, G(t_i, y_i)) < \varepsilon \forall i \geq 0, \tag{2}$$

$$\rho(y_{i+1}, G(t_i, y_i)) \rightarrow 0, i \rightarrow \infty, \tag{3}$$

$$A = \overline{\{y_i\}_{i \geq n}} \forall n \geq 1. \tag{4}$$

**Наслідок.** Для всіх  $T > 0, \varepsilon > 0, y_0 \in A$  існує відображення  $(\varepsilon, T)$ -псевдотраскторія  $\varphi^*(\cdot)$ , що визначається формулою

$$\varphi^*(t) = \varphi_0(t) \in G(t, y_0), t \in [0, t_0), \varphi^*(t) = \varphi_i(t - s_{i-1}) \in G(t - s_{i-1}, y_i), s_{i-1} \leq t < s_i, i \geq 1, \tag{5}$$

де  $\varphi_i(\cdot) \in K, s_i = \sum_{k=0}^i t_k$ , причому

$$\rho(\varphi^*(s_i), \varphi^*(s_i - 0)) = \varepsilon_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty, \tag{6}$$

$$A \subset \omega(\varphi^*). \tag{7}$$

Якщо ж множина  $A$  є інваріантною, то  $A = \omega(\varphi^*)$ .

**Доведення.** Дійсно, вибираючи  $\forall i \geq 1 \varphi_i(\cdot) \in K$  згідно формули (5) на  $[s_{i-1}, s_i)$  таким чином, щоб  $\varphi_i(s_i - s_{i-1}) = \varphi_i(t_i) \in G(t_i, y_i)$  та  $\rho(y_{i+1}, \varphi_i(t_i))$  задовольняє (2), (3), маємо

$$\rho(\varphi^*(s_i), \varphi^*(s_i - 0)) = \rho(\varphi_{i+1}(0), \varphi_i(s_i - s_{i-1})) = \rho(y_{i+1}, \varphi_i(t_i)) = \varepsilon_i \rightarrow 0, i \rightarrow \infty.$$

Оскільки  $\forall \xi \in A \xi = \lim_{i_n \rightarrow \infty} y_{i_n}$ , а  $\varphi^*(s_i) = y_{i+1}$ , то  $A \subset \omega(\varphi^*)$ .

Якщо ж  $A = G(t, A) \forall t \geq 0$ , то  $\varphi^*(t) \in G(t - s_{i-1}, y_i) \subset G(t - s_{i-1}, A) \subset A$ , отже  $\omega(\varphi^*) \subset A$ . Наслідок доведено.

Наступний результат частково обертає твердження теореми 1 для випадку  $m$  – напівпотіку, породженого розв'язками диференціального включення, а у випадку системи звичайних диференціальних рівнянь з локально ліпшицевою правою частиною узгоджується з відповідним результатом з роботи [6].

Розглядаємо задачу Коші [3,4]

$$\begin{cases} \dot{y} \in F(y), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{8}$$

де  $F: R^p \rightarrow 2^{R^p}$  компактнозначне, опуклозначне, напівнеперервне зверху відображення. Тоді задача Коші (8) має (локально) принаймні один розв'язок. Будемо вважати, що виконані наступні умови:

$$\forall y_0 \in R^p \text{ будь-який розв'язок (8) може бути продовжений на } [0, +\infty), \tag{9}$$

$\exists \{F_n: R^p \rightarrow 2^{R^p}\}_{n \geq 1}$  – компактнозначні, опуклозначні такі, що

$$\forall y \in R^p F(y) \subset \dots \subset F_{n+1}(y) \subset F_n(y) \subset \dots \subset F_1(y), \tag{10}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall R > 0 \exists N \forall n \geq N \sup_{y \in B_r(0)} dist(F_n(y), F(y)) < \varepsilon, \tag{11}$$

$$\forall n \geq 1 \forall R > 0 \exists C = C(n, R) \forall x, y \in B_R(0) dist(F_n(x), F_n(y)) \leq C \|x - y\|. \tag{12}$$

Ці умови очевидно виконуються, якщо  $F$  є ліпшицевою в сенсі (12).

Далі, за умови (9) коректно означені множина  $K$  всіх розв'язків включення  $\dot{y} \in F(y)$ , визначених на  $[0, +\infty)$ , та  $m$ -напівпотік  $G$

$$G(t, y_0) = \{y(t) | y(\cdot) \in K, y(0) = y_0\} \tag{13}$$

**Теорема 2.** Нехай  $F$  задовольняє умови (9)-(12), множина  $A \subset R^p$  є компактною, зв'язною, напівінваріантною та ланцюгово рекурентною відносно  $m$ -напівпотіку  $G$  із (13), і  $\exists R_0 > 0 \forall t \geq 0 G(t, A) \subset B_{R_0}(0)$ .

Тоді  $\forall c > 0 \forall y_0 \in A$  існує такий розв'язок  $y_c(\cdot) = y_c(\cdot, y_0)$  задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{y} \in B_c(F(y)), \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{14}$$

що  $A \subseteq \omega(y_c)$ . Якщо ж множина  $A$  є інваріантною, то  $A = \omega(y_c)$ .

**Доведення.** Розглянемо довільні  $\tilde{\varphi}(\cdot) \in K, \tilde{\varphi}(0) = \tilde{y}_0 \in A, \bar{t} > 1$ . Покажемо, що  $\forall \varepsilon > 0 \forall b \in B_\varepsilon(\tilde{\varphi}(\bar{t}))$  існує таке  $c = c(\varepsilon)$ , де  $c(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , що  $\exists y_c(\cdot, \tilde{y}_0): y_c(\bar{t}) = b$ . Дійсно, в силу (10)  $\forall n \geq 1 \tilde{\varphi}(\cdot)$  є розв'язком задачі Коші  $\dot{y} \in F_n(y), y(0) = \tilde{y}_0$ . Покладемо  $\xi = b - \tilde{\varphi}(\bar{t})$  і розглянемо  $y(t) = \tilde{\varphi}(t) - \xi \frac{t}{\bar{t}}, t \in [0, \bar{t}]$ . Тоді  $y(0) = \tilde{y}_0, y(\bar{t}) = b$  і

$$\dot{y}(t) \in F_n(\tilde{\varphi}(t)) + \frac{\xi}{\bar{t}} \subset B_{\frac{\varepsilon}{\bar{t}}}(F_n(\tilde{\varphi}(t))).$$

Оскільки  $\tilde{y}_0 \in A$ , то  $\tilde{\varphi}(t) \in B_{R_0} \forall t \geq 0$ . Покладемо в (11), (12)  $R = R_0 + 1$ , виберемо  $N$  і  $C(N)$  в (11), (12). Тоді  $F_N(\tilde{\varphi}(t)) \subset B_{C\varepsilon}(F_N(\tilde{\varphi}(t) + \xi \frac{t}{\bar{t}})) \subset B_{C\varepsilon + \varepsilon}(F(\tilde{\varphi}(t) + \xi \frac{t}{\bar{t}}))$ . Отже  $\forall t \in [0, \bar{t}] \dot{y}(t) \in B_c(y(t))$ , де  $c = c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\bar{t}} + C\varepsilon + \varepsilon$  не залежить від  $\tilde{\varphi}(\cdot)$  і  $\tilde{y}_0 \in A$ .

Тепер нехай  $T > 2\bar{t}$ ,  $\varphi^*(\cdot)$  є відповідною  $(\varepsilon, T)$ -псевдотраєкторією з наслідку до леми 3. Поклавши  $y(t) = \varphi^*(t)$ , якщо  $t \notin \bigcup_{j=0}^{\infty} (s_j - \bar{t}, s_j)$  і  $y(t) = y_{c_j}(t - s_j + \bar{t}, \varphi_j(t_j - \bar{t}))$ , де  $c_j = c(\varepsilon_j)$  вибрані за  $\{\varepsilon_j\}$  так, щоб  $y(s_j) = y_{j+1}$ . Тоді

$$y(0) = y_0, \dot{y}(t) \in F_{c(\varepsilon)}(y(t)), \text{ і, крім того, } \|y(t) - \varphi^*(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty. \text{ Таким чином, } \omega(y) = \omega(\varphi^*), \text{ отже теорема доведена.}$$

Наведемо в умовах теореми 2 приклад зв'язної, компактної, ланцюгово-рекурентної, інваріантної відносно  $m$ -напівпотіку (13) множини, що не вкладається в  $\omega$ -граничну множину жодної траєкторії включення  $\dot{y} \in F(y)$ . Спочатку зауважимо, що якщо  $G$  є строгим  $m$ -напівпотіком і  $\forall \bar{x} \in A \exists \bar{t} > 0 \bar{x} \in G(\bar{t}, \bar{x})$ , то така множина  $A$  є ланцюгово рекурентною. Дійсно, з включення  $\bar{x} \in G(\bar{t}, \bar{x})$  маємо, що  $\bar{x} \in G(\bar{t}, \bar{x}) \subset G(\bar{t}, G(\bar{t}, \bar{x})) = G(2\bar{t}, \bar{x})$ . Таким чином,  $\forall n \geq 1 \bar{x} \in G(n\bar{t}, \bar{x})$ . Тоді  $\forall t > 0 \exists n \geq 1$  таке, що  $n\bar{t} > t$  і  $\bar{x} \in G(n\bar{t}, \bar{x})$ . Звідси  $\rho(\bar{x}, G(n\bar{t}, \bar{x})) = 0 < \varepsilon$ , отже  $\{x_1 = \bar{x}, x_2 = \bar{x}, t_1 = n\bar{t}\}$  є шуканим  $(\varepsilon, t)$ -ланцюгом.

Тепер розглянемо включення

$$\dot{x} \in F(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ [0, x(1-x)], & x \in [0, 1], \\ [x(1+x), 0], & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Тоді множина  $A = [-1, 1]$  є зв'язним компактом,  $A = G(t, A) \forall t \geq 0, \forall \bar{x} \in A \exists \bar{t} > 0 \bar{x} \in G(\bar{t}, \bar{x})$ , а отже  $A$  є ланцюгово рекурентною. Але  $\forall y_0 \in (0, 1]$  і для будь-якого розв'язку  $\varphi(\cdot)$  з  $\varphi(0) = y_0$  маємо  $\omega(\varphi) \cap [-1, 0) = \emptyset$ . Так само  $\forall y_0 \in [-1, 0)$  і для будь-якого розв'язку  $\varphi(\cdot)$  з  $\varphi(0) = y_0$  маємо  $\omega(\varphi) \cap (0, 1] = \emptyset$ . Для  $y_0 = 0$  маємо  $\omega(\varphi) = \{0\}$ . Отже, не існує такого  $\varphi(\cdot) \in G(\cdot, y_0)$ , що  $A \subseteq \omega(\varphi)$

#### 4. Висновки

В роботі вказано умови на  $m$ -напівпотік, що забезпечують ланцюгову рекурентність  $\omega$ -граничної множини траєкторії, та для  $m$ -напівпотіку, породженого розв'язками диференціального включення, доведено, що кожна зв'язна, компактна, ланцюгово-рекурентна множина є  $\omega$ -граничною множиною траєкторії диференціального включення з як загодно близькою до вихідної правою частиною.

**Робота виконана при підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень. (Гранти № Ф28.1/ 031, 29.1 /025)**

1. Мельник В.С. Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем – К., 1994, 41 с. (Препринт НАН Украины, Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, п 94-17). 2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.:Л.:ГИИТЛ, 1949 – 550 с. 3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью М.: Наука, 1985.-250с. 4. Aubin J.-P., Cellina A. Differential inclusions. – N.Y.: Springer, 1984, 340p. 5. Ball J.M. Continuity properties and attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations // J. Nonlinear Science.-1997, vol.7, n 5 – p. 275 – 502. 6. Mischakow K., Smith H., Thieme H.R. Asymptotically autonomous semiflows: chain recurrence and Lyapunov functions // Trans. AMS.-1995, vol. 347, n 5, P. 1669-1685.

УДК 517.9

Ю. Самойленко, канд. фіз.-мат. наук

## АСИМПТОТИЧНІ ДВОФАЗОВІ СОЛІТОНОПОДІБНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ТА МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

*Запропоновано алгоритм побудови асимптотичних двофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого степеня при старшій похідній.*

*The algorithm of constructing asymptotic two phase soliton type solution to Korteweg – de Vries equation with variable coefficients and small parameter of the first degree at the highest derivative is proposed.*

### 1. Вступ

Як відомо, для моделювання найрізноманітніших явищ та процесів використовуються нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними, серед яких одним з найбільш відомих є рівняння Кортевега-де Фріза [7]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Особливістю цього рівняння є наявність так званих солітонних розв'язків, прикладом яких може бути функція [4]

$$u(x, t) = -2ch^{-2}(x - 4t),$$

яка описує так званий односолітонний розв'язок рівняння (1).

Як виявилось згодом, рівняння (1) має не лише однофазові, а й дво- та багатофазові солітонні розв'язки. Так, для рівняння (1) відомий точний двохсолітонний розв'язок [6]:

$$u(x, t) = -12 \frac{3 + 4ch(2x - 8t) + ch(4x - 64t)}{[ch(3x - 36t) + 3ch(x - 28t)]^2}, \quad (2)$$

де  $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ .

Рівняння Кортевега-де Фріза належить до класу так званих інтегрованих нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, до якого також входять, зокрема, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння sin-Gordon, рівняння Кадомцева-Петвіашвілі, точні розв'язки яких можна знайти за допомогою методів теорії оберненої задачі розсіювання. Хоча рівняння Кортевега-де Фріза призвело до виникнення математичної теорії солітонів, а згодом і до виникнення оберненої задачі розсіювання, яка дозволяє знайти точні розв'язки для великого класу нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, проте цей метод не може бути використаний для знаходження точних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза для випадку, коли його коефіцієнти є змінними. У такому випадку при наявності малого параметра використовують асимптотичні методи, за допомогою яких будують асимптотичні розв'язки. Так, в [3, 10] досліджувалось рівняння вигляду

$$\varepsilon^n u_{xxx} = a(x, \varepsilon)u_t + b(x, \varepsilon)uu_x, \quad n \in \mathbf{N},$$

де

$$a(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції  $a_k(x)$ ,  $b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ ,  $k \geq 0$ , для якого було запропоновано алгоритм побудови однофазових асимптотичних розв'язків та було показано, що вигляд асимптотики залежить від степеня малого параметра при старшій похідній. В [2] було запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку для випадку, коли малий параметр при старшій похідній має вигляд  $\varepsilon^2$ .

В даній статті розглядається питання про побудову двофазових солітоноподібних асимптотичних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon u_{xxx} = a(x, \varepsilon)u_t + b(x, \varepsilon)uu_x, \quad (3)$$

де

$$a(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k, \quad (4)$$

функції  $a_k(x)$ ,  $b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$ ,  $k \geq 0$ .

### 2. Основні припущення і позначення

Аналогічно до [1] позначимо через  $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$  – лінійний простір нескінченно диференційовних функцій  $f = f(x, t, \tau)$ ,  $(x, t, \tau) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}$ , таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел  $n$ ,  $m$ ,  $q$ ,  $p$  рівномірно щодо  $(x, t)$  на кожній компактній множині  $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$  виконуються такі дві умови:

1. Справджується співвідношення:

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x, t, \tau) = 0, \quad (x, t) \in K;$$

2. Існує така нескінченно диференційовна функція  $f^-(x, t)$ , що

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} (f(x, t, \tau) - f^-(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

Нехай  $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$  – лінійний підпростір простору  $G_1 = G_1(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R})$  нескінченно диференційованих функцій  $f = f(x, t, \tau)$ ,  $(x, t, \tau) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R}$ , таких, що рівномірно щодо змінних  $(x, t)$  на кожному компактi  $K \subset \mathbf{R} \times [0; T]$  виконується умова  $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f(x, t, \tau) = 0$ .

Позначимо за допомогою  $G_2^0 = G_2^0(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$  лінійний простір нескінченно диференційованих функцій  $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$ ,  $(x, t, \tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , для яких існують такі функції  $f_1^\pm = f_1^\pm(x, t, \tau_2)$ ,  $f_2^\pm = f_2^\pm(x, t, \tau_1) \in G_1^0$ , що для довільних невід'ємних цілих чисел  $\alpha, q, p_1, p_2, \beta_1, \beta_2$  мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^q}{\partial t^q} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_1^\pm(x, t, \tau_2)) = 0, \quad (x, t) \in K,$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^q}{\partial t^q} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_2^\pm(x, t, \tau_1)) = 0, \quad (x, t) \in K,$$

а за допомогою  $G_2 = G_2(\mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$  – лінійний простір нескінченно диференційованих функцій  $f = f(x, t, \tau_1, \tau_2)$ ,  $(x, t, \tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R} \times [0; T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , для яких існують такі функції  $f_1^\pm = f_1^\pm(x, t, \tau_2)$ ,  $f_2^\pm = f_2^\pm(x, t, \tau_1) \in G_1^0$  та нескінченно диференційовані функції  $u_1^\pm = u_1^\pm(x, t)$ ,  $u_2^\pm = u_2^\pm(x, t)$ , що для довільних невід'ємних цілих чисел  $\alpha, q, p_1, p_2, \beta_1, \beta_2$  мають місце співвідношення:

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} \tau_1^{p_1} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^q}{\partial t^q} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_1^\pm(x, t, \tau_2) - u_1^\pm(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in K,$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow \pm\infty} \tau_2^{p_2} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial \tau_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial \tau_2^{\beta_2}} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^q}{\partial t^q} (f(x, t, \tau_1, \tau_2) - f_2^\pm(x, t, \tau_1) - u_2^\pm(x, t)) = 0, \quad (x, t) \in K.$$

**Означення.** Функція  $u(x, t, \varepsilon)$  називається 2-фазовою солітоноподібною функцією, якщо для довільного цілого числа  $N \geq 0$  вона може бути зображена у вигляді:

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N \left( x, t, \frac{S_1(x, t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{S_2(x, t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \varepsilon \right) + O\left(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}\right), \quad (5)$$

де  $Y_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} (u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2))$ ,  $\tau_1 = \frac{S_1(x, t)}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\tau_2 = \frac{S_2(x, t)}{\sqrt{\varepsilon}}$ ; функції  $S_k = S_k(x, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \times [0; T])$ , причому  $\frac{\partial S_k}{\partial x} \Big|_{\Gamma_k} \neq 0$ ;  $\Gamma_k = \{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T], S_k(x, t) = 0\}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $u_j(x, t)$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , – нескінченно диференційовні функції;  $V_0(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0$ ,  $V_j(x, t, \tau_1, \tau_2) \in G_2$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ .

Асимптотичний двофазовий солітоноподібний розв'язок рівняння (3) шукається у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}\right), \quad (6)$$

де

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} (u_j(x, t) + V_j(t, \tau_1, \tau_2)), \quad \tau_1 = \frac{x - \varphi_1(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \tau_2 = \frac{x - \varphi_2(t)}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (7)$$

Функція  $U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} u_j(x, t)$  називається регулярною частиною асимптотики (6), а функція

$$V_N(t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} V_j(t, \tau_1, \tau_2) -$$

сингулярною частиною асимптотики (6). При цьому з урахуванням позначення (6), (7) маємо  $Y_N(x, t, \varepsilon) = U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon)$ .

Криві  $x = \varphi_s(t)$ ,  $s = 1, 2$ , називаються кривими розриву і визначаються в процесі побудови асимптотичного розв'язку.

Відповідно до загальної ідеї асимптотичних методів, для визначення коефіцієнтів асимптотичних розкладів (6) та враховуючи вигляд похідних  $u_t(x, t, \varepsilon)$ ,  $u_x(x, t, \varepsilon)$ ,  $u_{xxx}(x, t, \varepsilon)$ , після їх підстановки в рівняння (3) знаходимо:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left( \frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} + \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon})^3} \left[ \frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1^3} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial \tau_2^3} \right] \right) = \\ & = a(x, \varepsilon) \left( \frac{\partial U_N}{\partial t} + \frac{\partial V_N}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial V_N}{\partial \tau_1} \varphi_1'(t) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial V_N}{\partial \tau_2} \varphi_2'(t) \right) + \\ & + b(x, \varepsilon) \left( \frac{\partial U_N}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial V_N}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial V_N}{\partial \tau_2} \right) (U_N + V_N) + g_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon), \quad N = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

де  $g_N(x, t, \tau_1, \tau_2, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}\right)$  – деяка нескінченно диференційована функція своїх аргументів.

Регулярна частина асимптотики визначається з системи диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$a_0(x) \frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x) u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

$$a_0(x) \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x) u_j \frac{\partial u_0}{\partial x} + b_0(x) u_0 \frac{\partial u_j}{\partial x} = F_j(x, t), \quad j = \overline{1, 2N}, \quad (9)$$

де функції  $F_j(x, t)$  визначаються рекурентним чином після знаходження функцій  $u_0(x, t)$ ,  $u_1(x, t)$ , ...,  $u_{j-1}(x, t)$ .

Очевидно, що система рівнянь (8), (9) має нескінченно диференційований розв'язок при досить загальних припущеннях. Тому надалі вважатимемо, що система (8), (9) має нескінченно диференційований для всіх  $(x, t) \in R \times [0; T]$  розв'язок.

### 3. Визначення сингулярної частини асимптотики

Аналогічно [1, 8] сингулярна частина асимптотики (6) спочатку визначається на кожній з кривих  $x = \varphi_s(t)$ ,  $s = 1, 2$ . Для знаходження функції  $V_0(t, \tau_1, \tau_2)$  на кривій  $x = \varphi_s(t)$  маємо рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{0s}}{\partial \tau_2^3} = \left[ -\varphi_1'(t) a_0(\varphi_s(t)) + b_0(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) \right] \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \\ & + \left[ -\varphi_2'(t) a_0(\varphi_s(t)) + b_0(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) \right] \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} + b_0(\varphi_s(t)) V_{0s} \left[ \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

де через  $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2)$  позначено функцію  $V_0(t, \tau_1, \tau_2)$  на кривій  $x = \varphi_s(t)$ , її похідні обчислюються в точці  $\left(t, 0, \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{\varepsilon}\right)$  для випадку  $x = \varphi_1(t)$  та в точці  $\left(t, \frac{\varphi_2(t) - \varphi_1(t)}{\varepsilon}, 0\right)$  для випадку  $x = \varphi_2(t)$   $t \in [0; T]$ . При цьому функції  $a_0(x)$ ,  $b_0(x)$ ,  $u_0(x, t)$  в (10) визначаються на відповідних кривих  $x = \varphi_s(t)$ ,  $s = 1, 2$ .

Для визначення функцій  $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , на кривій  $x = \varphi_s(t)$  маємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_{js}}{\partial \tau_2^3} = \\ & = \left[ -\varphi_1'(t) a_0(\varphi_s(t)) + b_0(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) \right] \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_1} + \left[ -\varphi_2'(t) a_0(\varphi_s(t)) + b_0(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) \right] \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_2} + \\ & + b_0(\varphi_s(t)) \left[ V_{js} \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + V_{js} \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2} + V_{0s} \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_1} + V_{0s} \frac{\partial V_{js}}{\partial \tau_2} \right] + F_{js}(t, \tau_1, \tau_2), \quad j = \overline{1, 2N} \end{aligned} \quad (11)$$

де через  $V_{js}(t, \tau_1, \tau_2)$  позначено значення  $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$  на кривій  $x = \varphi_s(t)$ , функції  $a_0(x)$ ,  $b_0(x)$ ,  $u_0(x, t)$  в (11) визначаються на кривих  $x = \varphi_s(t)$ ,  $s = 1, 2$ , а, відповідно, функція  $F_{js}(t, \tau_1, \tau_2)$  визначається рекурентним чином після знаходження функцій  $V_{0s}(t, \tau_1, \tau_2)$ ,  $V_{1s}(t, \tau_1, \tau_2)$ , ...,  $V_{j-1,s}(t, \tau_1, \tau_2)$  на відповідних кривих. Зокрема, маємо

$$\begin{aligned} & F_{1s}(t, \tau_1, \tau_2) = b_0(\varphi_s(t)) V_{0s} \frac{\partial u_0(\varphi_s(t), t)}{\partial x} + a_0(\varphi_s(t)) \frac{\partial V_{0s}}{\partial t} + \\ & + \left[ \tau_s b_0'(\varphi_s(t)) V_{0s} + b_1(\varphi_s(t)) V_{0s} + \tau_s b_0'(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) + b_1(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) + \tau_s b_0(\varphi_s(t)) \frac{\partial u_0(\varphi_s(t), t)}{\partial x} + \right. \\ & \left. + b_0(\varphi_s(t)) u_1(\varphi_s(t), t) - \varphi_1'(t) a_0'(\varphi_s(t)) \tau_s - \varphi_1'(t) a_1(\varphi_s(t)) \right] \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_1} + \\ & + \left[ \tau_s b_0'(\varphi_s(t)) V_{0s} + b_1(\varphi_s(t)) V_{0s} + \tau_s b_0'(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) + b_1(\varphi_s(t)) u_0(\varphi_s(t), t) + \right. \end{aligned}$$

$$+\tau_s b_0(\varphi_s(t)) \frac{\partial u_0(\varphi_s(t), t)}{\partial x} + b_0(\varphi_s(t)) u_1(\varphi_s(t), t) - \varphi_2'(t) a_0'(\varphi_s(t)) \tau_s - \varphi_2'(t) a_1(\varphi_s(t)) \left] \frac{\partial V_{0s}}{\partial \tau_2}.$$

Оскільки функція  $V_0(t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0$ , а функції  $V_j(t, \tau_1, \tau_2) \in G_2$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , то рівняння (10), (11) з точністю  $O(\varepsilon^N)$ , де  $N$  – довільне натуральне число, еквівалентні рівнянням

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau_2^3} = & \left[ -\varphi_1'(t) a_0(\varphi_1(t)) + b_0(\varphi_1(t)) u_0(\varphi_1(t), t) \right] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \\ & + \left[ -\varphi_2'(t) a_0(\varphi_2(t)) + b_0(\varphi_2(t)) u_0(\varphi_2(t), t) \right] \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} + b_0(\varphi_2(t)) V_0 \left[ \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^3} + 3 \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1^2 \partial \tau_2} + 3 \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_1 \partial \tau_2^2} + \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau_2^3} = \\ = \left[ -\varphi_1'(t) a_0(\varphi_1(t)) + b_0(\varphi_1(t)) u_0(\varphi_1(t), t) \right] \frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} + \left[ -\varphi_2'(t) a_0(\varphi_2(t)) + b_0(\varphi_2(t)) u_0(\varphi_2(t), t) \right] \frac{\partial V_j}{\partial \tau_2} + \\ + b_0(\varphi_1(t)) \left[ V_j \frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + V_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau_1} \right] + b_0(\varphi_2(t)) \left[ V_j \frac{\partial V_0}{\partial \tau_2} + V_0 \frac{\partial V_j}{\partial \tau_2} \right] + F_j(t, \tau_1, \tau_2), \quad j = \overline{1, 2N}. \end{aligned} \quad (13)$$

Тут функції  $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$ ,  $j = \overline{0, 2N}$ , визначаються на множині  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , де  $\Gamma_k = \{(x, t) \in R \times [0; T] : x = \varphi_k(t)\}$ ,  $k = 1, 2$ . При цьому припускається, що виконуються умови

$$b_0(\varphi_1(t)) = b_0(\varphi_2(t)), \quad (14)$$

$$F_{j1}(t, \tau_1, \tau_2) = F_{j2}(t, \tau_1, \tau_2), \quad j = \overline{1, 2N}. \quad (15)$$

Зокрема, рівність (15) можлива, наприклад, у випадку виконання умов:

$$a_0(\varphi_1(t)) = a_0(\varphi_2(t)), \quad (16)$$

$$b_0(\varphi_1(t)) \frac{\partial u_0(\varphi_1(t), t)}{\partial x} = b_0(\varphi_2(t)) \frac{\partial u_0(\varphi_2(t), t)}{\partial x}, \quad (17)$$

$$b_0'(\varphi_1(t)) = b_0'(\varphi_2(t)) = 0, \quad (18)$$

$$b_0'(\varphi_1(t)) u_0(\varphi_1(t), t) + b_0(\varphi_1(t)) \frac{\partial u_0(\varphi_1(t), t)}{\partial x} - \varphi_2'(t) a_0'(\varphi_1(t)) = 0, \quad (19)$$

$$b_0'(\varphi_2(t)) u_0(\varphi_2(t), t) + b_0(\varphi_2(t)) \frac{\partial u_0(\varphi_2(t), t)}{\partial x} - \varphi_1'(t) a_0'(\varphi_2(t)) = 0, \quad (20)$$

Слід зауважити, що умови (17)–(20) є необхідними і достатніми для того, щоб функція  $F_1(t, \tau_1, \tau_2) \in G_2^0$ .

Зазначимо, що для двосолітонного розв'язку рівняння (2) вказані вище умови виконуються. Надалі припускаємо, що умови (14), (15) мають місце.

Розглянемо рівняння (12), (13). Виконаємо для рівнянь (12), (13) заміну змінних

$$\xi = \frac{\gamma_2(t) \tau_1 - \gamma_1(t) \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \quad \eta = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}, \quad (21)$$

де  $\gamma_j(t) = -\varphi_j'(t) a_0(\varphi(t)) + b_0(\varphi(t)) u_0(\varphi(t), t)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ ,  $t \in [0; T]$ .

Тоді (12) набуде вигляду рівняння:

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(\varphi(t)) \frac{\partial V_0}{\partial \xi} V_0 + \frac{\partial V_0}{\partial \eta} = 0, \quad (22)$$

яке за допомогою заміни змінних  $\xi_1 = \left(\frac{1}{6} b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{1}{2}} \xi$ ,  $\eta_1 = \left(\frac{1}{6} b_0(\varphi(t))\right)^{\frac{3}{2}} \eta$  зводиться до рівняння Кортевега-де Фріза з постійними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi_1^3} - 6V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial V_0}{\partial \eta_1} = 0. \quad (23)$$

Як відомо з теорії оберненої задачі розсіювання [9] двохсолітонний розв'язок рівняння (23) має вигляд:

$$V_0(\xi_1, \eta_1) = -2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \ln \det(E + G), \quad (24)$$

де  $E$  –  $(2 \times 2)$  – одинична матриця, а матриця  $G$  має вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} c_1^2(\eta_1) \frac{\exp(-2\kappa_1 \xi_1)}{2\kappa_1} & c_1(\eta_1)c_2(\eta_1) \frac{\exp(-(\kappa_1 + \kappa_2)\xi_1)}{\kappa_1 + \kappa_2} \\ c_1(\eta_1)c_2(\eta_1) \frac{\exp(-(\kappa_1 + \kappa_2)\xi_1)}{\kappa_1 + \kappa_2} & c_2^2(\eta_1) \frac{\exp(-2\kappa_2 \xi_1)}{2\kappa_2} \end{pmatrix},$$

$$c_j(\eta_1) = c_j(0)e^{\kappa_j^3(t)\eta_1}, \quad \kappa_j(t) = \sqrt{\gamma_j(t)} \left( \frac{1}{6} b_0(\varphi(t)) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

З (24) знаходимо, що для функції  $V_0(\xi_1, \eta_1)$  виконується співвідношення

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow +\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{01}^+(t, \tau_2) = -4\kappa_2 c_2^2(0) e^{-2A\tau_2 \kappa_2} \left[ 1 + \frac{c_2^2(0)}{2\kappa_2} e^{-2A\tau_2 \kappa_2} \right]^{-2},$$

$$\lim_{\tau_1 \rightarrow -\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{01}^-(t, \tau_2) = 4\kappa_2 c_2^2(0) (\kappa_1 - \kappa_2)^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^{-2} e^{-2A\tau_2 \kappa_2} \left[ 1 + \frac{c_2^2(0)(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{2\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-2A\tau_2 \kappa_2} \right]^{-2},$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow +\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{02}^+(t, \tau_1) = -4\kappa_1 c_1^2(0) e^{-2A\tau_1 \kappa_1} \left[ 1 + \frac{c_1^2(0)}{2\kappa_1} e^{-2A\tau_1 \kappa_1} \right]^{-2},$$

$$\lim_{\tau_2 \rightarrow -\infty} V_0(t, \tau_1, \tau_2) = f_{02}^-(t, \tau_1) = 4\kappa_1 c_1^2(0) (\kappa_1 - \kappa_2)^2 (\kappa_1 + \kappa_2)^{-2} e^{-2A\tau_1 \kappa_1} \left[ 1 + \frac{c_1^2(0)(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{2\kappa_1(\kappa_1 + \kappa_2)^2} e^{-2A\tau_1 \kappa_1} \right]^{-2},$$

де  $A = \left( \frac{1}{6} b_0(\varphi(t)) \right)^{\frac{1}{2}}$ . Функції  $f_{01}^\pm(t, \tau_1)$  та  $f_{02}^\pm(t, \tau_2)$ , очевидно належать простору  $G_1^0$ , тобто функція  $V_0(t, \tau_1, \tau_2)$  належить простору  $G_2^0$ .

Розглянемо питання про розв'язність системи лінійних рівнянь (13) в просторі  $G_2$ . Має місце лема.

**Лема 1 [3].** *Необхідною умовою розв'язності рівняння (13) в просторі  $G_2$  є умови ортогональності вигляду:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau_1 \rightarrow \pm\infty} (F_j(t, \tau_1, \tau_2) V_0(t, \tau_1, \tau_2)) d\tau_2 = 0; \tag{25}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\tau_2 \rightarrow \pm\infty} (F_j(t, \tau_1, \tau_2) V_0(t, \tau_1, \tau_2)) d\tau_1 = 0. \tag{26}$$

Нехай виконуються умови (14), (16) – (20). Тоді з умов ортогональності (25), (26) при  $j=1$  знаходимо співвідношення для визначення кривих розриву  $x = \varphi_s(t)$ ,  $s=1, 2$ :

$$2b_0(\varphi(t)) \frac{\partial u_0(\varphi(t), t)}{\partial x} \frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} \right) = 0, \tag{27}$$

$$b_0(\varphi(t)) \frac{\partial u_0(\varphi(t), t)}{\partial x} \frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} + a_0'(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) \frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} \right) = 0, \tag{28}$$

$$2b_0(\varphi(t)) \frac{\partial u_0(\varphi(t), t)}{\partial x} \frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} \right) = 0, \tag{29}$$

$$b_0(\varphi(t)) \frac{\partial u_0(\varphi(t), t)}{\partial x} \frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} + a_0'(\varphi_2(t)) \varphi_2'(t) \frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} + a_0(\varphi(t)) \frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} \right) = 0, \tag{30}$$

де  $t \in [0; T]$ .

Зокрема, якщо виконується умова  $a_0'(\varphi_1(t)) = a_0'(\varphi_2(t)) = 0$ , то система рівнянь (27)–(30) значно спрощується і набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa_1^3(t)}{A(t)} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\kappa_2^3(t)}{A(t)} \right) = 0.$$

Звідси отримуємо звичайні диференціальні рівняння для визначення кривих  $x = \varphi_s(t)$ ,  $s=1, 2$ :

$$\left( -a_0(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + b_0(\varphi(t)) u_0(\varphi(t), t) \right)^{\frac{3}{2}} = C_1 (b_0(\varphi(t)))^2, \tag{31}$$

$$\left( -a_0(\varphi(t)) \varphi_2'(t) + b_0(\varphi(t)) u_0(\varphi(t), t) \right)^{\frac{3}{2}} = C_2 (b_0(\varphi(t)))^2, \tag{32}$$

де  $C_1$  та  $C_2$  довільні сталі.

Розглянемо рівняння (13). Виконавши заміну змінних (21) отримаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3} - b_0(\varphi) \left( \frac{\partial V_0}{\partial \xi} V_j + \frac{\partial V_j}{\partial \xi} V_0 \right) + \frac{\partial V_j}{\partial \eta} = F_j(\xi, \eta). \tag{33}$$

Припустимо, що функція  $F_j(\xi, \eta)$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , належить простору швидко спадних функцій щодо  $\xi$  для довільних  $|\eta| < T_1$ . Тоді існує [5] розв'язок  $V_j(\xi, \eta)$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , рівняння (33), визначений для  $|\eta| < T_1$ , такий, що  $V_j(\xi, \eta)$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , належить простору швидко спадних функцій щодо змінної  $\xi$ . Отже, рівняння (13) має нескінченно диференційований розв'язок  $V_j(t, \tau_1, \tau_2)$ , визначений для всіх  $\{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbf{R}^2 : |\tau_1 - \tau_2| < CT_1\}$ , де  $C = |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|$ .

**Теорема 1.** Припустимо, що функції  $a_k(x)$ ,  $b_k(x)$ ,  $k \geq 0$ , є нескінченно диференційовними на  $\mathbf{R}^1$ , система (31), (32) має такий розв'язок  $\varphi_1(t)$  та  $\varphi_2(t)$  для  $t \in [0; T]$ , що  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$  та виконуються умови (14) і (16)–(20).

Тоді функція

$$Y_0(x, t, \varepsilon) = u_0(x, t) + V_0(t, \tau_1, \tau_2), \quad \tau_s = \frac{x - \varphi_s(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s = 1, 2,$$

є головним членом асимптотичного розв'язку для двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння (3) при  $t \in [0; T]$ .

**Теорема 2.** Припустимо, що функції  $a_k(x)$ ,  $b_k(x)$ ,  $k \geq 0$ , є нескінченно диференційовними на  $\mathbf{R}^1$ , система (31), (32) має такий розв'язок  $\varphi_1(t)$  та  $\varphi_2(t)$  для  $t \in [0; T]$ , що  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ , виконуються умови (14) – (20), функції  $F_j(\xi, \eta)$ ,  $j = \overline{1, 2N}$ , належить простору швидко спадних функцій щодо  $\xi$  для  $|\eta| < T_1$ .

Тоді функція

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{\frac{j}{2}} \left( u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1, \tau_2) \right), \quad \tau_s = \frac{x - \varphi_s(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad s = 1, 2,$$

є асимптотичним розв'язком для двофазового солітоноподібного розв'язку задачі (2) для всіх  $\{(x, t) \in \mathbf{R} \times [0; T] : |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \varepsilon CT_1\}$ , де  $C = |\gamma_2(t) - \gamma_1(t)|$ .

#### 4. Висновки

В даній статті запропоновано алгоритм побудови асимптотичного двофазового солітоноподібного розв'язку рівняння Кортвега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром першого порядку при старшій похідній.

1. Маслов В.П., Омелянов Г.А. Асимптотические солитонобразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи матем. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), N. 2. – С. 63 – 124. 2. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні розв'язки для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортвега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 58, N.1. – С.111 – 124. 3. Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І. Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортвега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2008. – Т.60, N. 3. – С. 378 – 387. 4. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио. – 368 с. 5. Фаминский А.В. Задача Коши для уравнения Кортвега-де Фриза и его обобщений // Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1988. – Вып.13. – С. 56 – 105. 6. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Korteweg-de Vries equation and Generalizations. VI. Methods for Exact Solutions // Comm. Pure and Appl. Math. – 1974. – V. 27. – P. 97 – 133. 7. Korteweg D.J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. – 1895. – N. 39. – P. 422 – 433. 8. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. – Providence: American Math. Society. – 2001. – 243 p. 9. Miura R.M. The Korteweg-de Vries equation: survey of results // SIAM Review – 1976. – V. 18, N. 3. – P. 412 – 459. 10. Samoylenko Yul. Asymptotical expansions for one-phase soliton-type solution to perturbed Korteweg-de Vries equation // Proceedings of the Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – K.: Institute of Mathematics. – 2004. – T. 3. – P. 1435 – 1441.

Надійшла до редколегії 24.02.10

УДК 517.9

П. Фекекта, асп.

### ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ РОЗРИВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто питання існування інваріантних тороїдальних множин одного класу систем диференціальних рівнянь, визначених на прямому добутку  $m$ -вимірного тора і евклідового простору, з імпульсним збуренням на підмноговиді тора розмірності  $m-1$ .

*Existence problems of invariant toroidal sets for a certain class of system of differential equations defined on direct product of  $m$ -measurable torus and Euclidian space subjected an impulsive perturbations on  $m-1$ -measurable submanifold of torus are considered.*

#### 1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи є система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, визначена на прямому добутку  $m$ -вимірного тора і  $n$ -вимірного евклідового простору вигляду

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, x), \quad \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \quad \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x + g(\varphi).$$



Встановлення умов існування кусково неперервних інваріантних множин такої системи ускладнюється нелінійністю функції  $a$  по змінній  $x$ . Використання методу послідовних наближень, запропонованого в [3], приводить до задачі відшукування розв'язків системи  $\dot{\varphi} = a(\varphi, u_k(\varphi))$  з розривною правою частиною на торі. Тому, накладаючи деякі обмеження на функцію  $a(\varphi, x)$ , в роботі виділяється клас задач для якого, по-перше, існує єдиний абсолютно неперервний розв'язок  $\varphi_t(\varphi)$  такої системи, при умові  $\varphi_0(\varphi) = \varphi$  і, по-друге, всі перетини цього розв'язку з поверхнею  $\Gamma$  трансверсальні.

**2. Система з розривною правою частиною на торі**

Позначимо через  $C_r^1(T^m)$  простір  $2\pi$ -періодичних кусково неперервних та диференційованих до  $r$ -го порядку включно функцій, визначених на  $m$ -вимірному торі  $T^m$  з розривами першого роду на множині  $\Gamma$ .

Нехай задано систему диференціальних рівнянь на торі

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \tag{1}$$

де  $a(\varphi) \in C_r^1(T^m)$ , множина  $\Gamma = \{\varphi \in T^m : \Phi(\varphi) = 0\}$ , де  $\Phi(\varphi)$  – неперервна скалярна  $2\pi$ -періодична за  $\varphi$  функція.

Визначимо ліву і праву сторони поверхні  $\Gamma$ . Називатимемо збіжну послідовність точок тора  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  від'ємною, якщо існує така послідовність додатних чисел  $\psi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , що  $\varphi_{\psi_n}(\varphi_n) \in \Gamma$ . Множину таких послідовностей позначимо  $\Psi^-$ . Аналогічно, послідовність  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  називатимемо додатною, якщо існує така послідовність від'ємних чисел  $\psi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , що  $\varphi_{\psi_n}(\varphi_n) \in \Gamma$  і позначатимемо  $\varphi_n \in \Psi^+$ .

Позначимо

$$\begin{aligned} a^-(\varphi) &= \lim_{\varphi^* \in \Psi^-, \varphi^* \rightarrow \varphi} a(\varphi^*), \varphi \in \Gamma, \\ a^+(\varphi) &= \lim_{\varphi^* \in \Psi^+, \varphi^* \rightarrow \varphi} a(\varphi^*), \varphi \in \Gamma, \\ a_n^-(\varphi) &= \left\langle \text{grad} \Phi(\varphi), a^-(\varphi) \right\rangle, \varphi \in \Gamma, \\ a_n^+(\varphi) &= \left\langle \text{grad} \Phi(\varphi), a^+(\varphi) \right\rangle, \varphi \in \Gamma. \end{aligned}$$

Позначимо через  $t_i(\varphi), i \in \mathbb{Z}$  розв'язки рівняння  $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$ , тобто точки перетину розв'язку  $\varphi_t(\varphi)$  з поверхнею  $\Gamma$ . Як відомо [5], якщо функція  $a(\varphi)$  така, що для будь-якого  $\varphi \in \Gamma$

$$a_n^+(\varphi) < 0 \text{ або } a_n^-(\varphi) > 0, \tag{2}$$

система (1) має єдиний абсолютно неперервний розв'язок  $\varphi_t(\varphi)$  при умові  $\varphi_0(\varphi) = \varphi$ . Більше того, якщо  $a_n^+(\varphi) > 0, a_n^-(\varphi) > 0$  для будь-якого  $\varphi \in \Gamma_0$ , де  $\Gamma_0$ -деяка відкрита область на поверхні  $\Gamma$ , то розв'язок  $\varphi_t(\varphi)$  в області  $\Gamma_0$  переходить з лівої сторони поверхні  $\Gamma$  на праву, маючи при цьому лише одну спільну точку з поверхнею  $\Gamma$ . Тобто  $\varphi_t(\varphi)$  перетинає  $\Gamma$  трансверсально. Аналогічно, при виконанні умови  $a_n^+(\varphi) < 0, a_n^-(\varphi) < 0$  для будь-якого  $\varphi \in \Gamma_0$  розв'язок  $\varphi_t(\varphi)$  в області  $\Gamma_0$  переходить з правої сторони на ліву, маючи при цьому лише одну спільну точку з поверхнею  $\Gamma$ . Тому існує  $\theta > 0$  таке, що справедлива оцінка

$$t_{i+1}(\varphi) - t_i(\varphi) \geq \theta. \tag{3}$$

**Припущення 1.** Надалі розглядатимемо такі функції  $a(\varphi)$ , для яких поверхню  $\Gamma$  можна розбити на області  $\Gamma_i$  так, щоб для будь-якого  $\varphi \in \Gamma_i$  виконувалася одна із умов

$$a_n^+(\varphi) > 0, a_n^-(\varphi) > 0 \tag{4}$$

або

$$a_n^+(\varphi) < 0, a_n^-(\varphi) < 0. \tag{5}$$

Зазначимо, що для різних  $\Gamma_i$  можуть виконуватися різні співвідношення.

**3. Лінійне розширення системи на торі**

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням, визначену на прямому добутку  $m$ -вимірного тора  $T^m$  і  $n$ -вимірного евклідового простору

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a(\varphi), \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \tag{6}$$

де  $a(\varphi) \in C_r^1(T^m)$ ,  $A(\varphi), B(\varphi), f(\varphi), g(\varphi) \in C(T^m)$ ,  $\|x\| \leq h$ . Якщо виконується припущення 1, тобто перше рівняння системи (6) має єдиний неперервний розв'язок, тоді система (6) має інваріантну множину  $x = u(\varphi)$  вигляду

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \sum_{-\infty < t_i(\varphi) < +\infty} G(0, t_i(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)),$$

якщо тільки функція Гріна-Самойленка  $G(t, \tau, \varphi)$  задовольняє нерівності

$$\|G(t, \tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \quad (7)$$

для будь-яких  $t, \tau$  і деяких  $K \geq 1, \gamma > 0$ . Причому

$$\|u(\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\| + \frac{2K}{1 - e^{-\gamma\theta}} \max_{\varphi \in T^m} \|g(\varphi)\|. \quad (8)$$

Будемо називати функцію Гріна-Самойленка  $G(t, \tau, \varphi)$  системи

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a(\varphi), \dot{x} = A(\varphi)x, \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x \end{aligned} \quad (9)$$

грубою, якщо знайдеться таке  $\delta_0 > 0$  таке, що система

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a(\varphi) + a_1(\varphi), \dot{x} = A(\varphi)x, \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x, \end{aligned} \quad (10)$$

коли  $a_1 \in C_{\Gamma}^1(T^m)$ ,  $\|a_1\| \leq \delta_0$  має функцію Гріна-Самойленка  $\tilde{G}(t, \tau, \varphi)$ , для якої

$$\|\tilde{G}(t, \tau, \varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \quad (11)$$

для будь-яких  $t, \tau$  і деяких  $K \geq 1, \gamma > 0$ .

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a(\varphi, x), \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

де  $a_1(\varphi, x) \in C_{\Gamma}^{(1, Lip)}(T^m, \|x\| \leq h)$ . Перепишемо її у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a_0(\varphi) + a_1(\varphi, x), \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

де  $a_0(\varphi) = a(\varphi, 0)$ ,  $a_1(\varphi, x) = a(\varphi, x) - a(\varphi, 0)$ . Нехай система

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a_0(\varphi), \dot{x} = A(\varphi)x, \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x \end{aligned} \quad (14)$$

має грубу функцію Гріна-Самойленка, тоді інваріантний многовид системи (12) шукатимемо методом послідовних наближень. За початковий многовид  $M_0$  візьмемо тривіальний многовид  $x=0$ . За многовид  $M_{k+1}$  візьмемо інваріантний многовид системи

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi)), \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta x|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)x + g(\varphi), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $u_k(\varphi)$  – інваріантний многовид на  $k$ -му кроці. Легко бачити, що малі збурення правої частини першого рівняння системи (15) не порушують виконання умов (4),(5) для функції  $a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi))$ , якщо тільки

$$\|a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi))\| < \delta_1,$$

де

$$\delta_1 = \min \left\{ \|a_n^+(\varphi, 0)\|, \|a_n^-(\varphi, 0)\| \right\} \cdot \left( \sum_{i=1}^m \left\| \frac{\partial \Phi(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \varphi \in \Gamma.$$

Отже, за припущенням 1, перше рівняння з (15) має єдиний абсолютно неперервний розв'язок  $\varphi_i^{k+1}(\varphi)$ , причому відстань між моментами імпульсної дії  $t_{i+1}^{k+1}(\varphi)$  і  $t_i^{k+1}(\varphi)$  задовольнятиме оцінку вигляду (3). Тоді система (15) має інваріантний многовид

$$u_{k+1}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_{\tau}^{k+1}(\varphi)) d\tau + \sum_{-\infty < t_i^{k+1}(\varphi) < +\infty} G(0, t_i^{k+1}(\varphi) + 0, \varphi) g(\varphi_{t_i^{k+1}(\varphi)}^{k+1}(\varphi)), \quad (16)$$

причому існують сталі  $K, \gamma, \theta$  не залежні від функцій  $f(\varphi)$  та  $g(\varphi)$ , такі, що

$$\|u_{k+1}(\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\| + \frac{2K}{1 - e^{-\gamma\theta}} \max_{\varphi \in T^m} \|g(\varphi)\|. \quad (17)$$

Позначимо  $\max_{\varphi \in T^m} f(\varphi) = m$ ,  $\max_{\varphi \in T^m} g(\varphi) = n$ . Вважатимемо, що  $\frac{2K}{\gamma} m + \frac{2K}{1 - e^{-\gamma\theta}} n \leq h$ , тому  $\|u_{k+1}(\varphi)\| \leq h$ .

Встановимо умови збіжності послідовності  $u_k(\varphi)$ . Для цього розглянемо різницю  $w_{k+1}(\varphi) = u_{k+1}(\varphi) - u_k(\varphi)$ . Враховуючи, що функції  $u_k(\varphi)$  гладкі на  $T^m - \Gamma$  і мають розриви першого роду на  $\varphi \in \Gamma$ , вони задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial \varphi} (a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_{k-1}(\varphi))) &= A(\varphi)u_k(\varphi) + f(\varphi), \varphi \notin \Gamma, \\ \Delta u_k(\varphi)|_{\varphi \in \Gamma} &= B(\varphi)u_k(\varphi) + g(\varphi) \end{aligned}$$

Для кожного  $k = 1, 2, \dots$ . Тоді функція  $w_{k+1}(\varphi)$  задовольняє рівняння

$$\frac{\partial w_{k+1}(\varphi)}{\partial \varphi} (a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi))) = A(\varphi)w_{k+1}(\varphi) + f_k(\varphi), \varphi \notin \Gamma,$$

$$\Delta w_{k+1}(\varphi)|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)w_{k+1}(\varphi),$$

де

$$f_k(\varphi) = -\frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial \varphi} (a_1(\varphi, u_k(\varphi)) - a_1(\varphi, u_{k-1}(\varphi))). \tag{18}$$

Тому  $x = w_{k+1}(\varphi)$  є інваріантною множиною системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a_0(\varphi) + a_1(\varphi, u_k(\varphi)), \dot{x} = A(\varphi)x + f_k(\varphi), \varphi \notin \Gamma,$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x. \tag{19}$$

Позначимо  $\left\| \frac{\partial u_k(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \leq M$ . Тоді, враховуючи, що функція  $a_1(\varphi, x)$  ліпшицева за  $x$  зі сталою Ліпшиця  $L$ , знаходимо

$$\|w_{k+1}(\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} \max_{\varphi \in T^m} \|f_k(\varphi)\| \leq \frac{2K}{\gamma} ML \|w_k(\varphi)\|. \tag{20}$$

Вважаючи, що стала Ліпшиця  $L$  настільки мала, що  $\frac{2K}{\gamma} ML < 1$ , робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій  $\{u_k(\varphi)\}$  на множині  $\varphi \in T^m$ . Покладемо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\varphi) = u(\varphi). \tag{21}$$

Покажемо, що гранична функція  $u(\varphi)$  визначає інваріантну поверхню системи (12). Послідовність розв'язків  $\varphi_t^k(\varphi)$  є компактною в просторі неперервних на  $I$  функцій, де  $I$  – довільний скінченний відрізок дійсної осі. Тоді з неї можна виділити рівномірно збіжну на  $I$  підпослідовність. Нехай  $\varphi_t^{k\nu}, \nu = 1, 2, \dots$  – така підпослідовність, а  $\varphi_t(\varphi)$  – її границя. В силу збіжності послідовності  $\varphi_t^{k\nu}$  та неперервності функції  $\Phi(\varphi)$ , послідовність наборів часів  $\{t_i(\varphi)\}^{k\nu}$ , що є розв'язками рівнянь  $\Phi(\varphi_t^{k\nu}) = 0$ , збіжна до набору часів  $t_i(\varphi)$ , який є розв'язком рівняння  $\Phi(\varphi_t(\varphi)) = 0$ . Перейшовши в (15) до границі, коли  $k \rightarrow \infty$  та в силу довільності інтервала  $I$  переконуємося, що гранична функція  $u(\varphi)$  визначає інваріантну множину системи (12). Таким чином, має місце твердження.

**Теорема 1.** Нехай в системі (12) функція  $a(\varphi, x)$  така, що  $a(\varphi, 0)$  задовольняє припущення 1 і система

$$\dot{\varphi} = a(\varphi, 0), \dot{x} = A(\varphi)x, \varphi \notin \Gamma,$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x$$

має грубу функцію Гріна-Самойленка. Тоді існують достатньо малі сталі  $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\} > 0$  і  $L > 0$ , що для будь-якої функції  $a_1(\varphi, x) \in C_{\Gamma}^{(1, Lip)}(T^m, \|x\| \leq h)$  такої, що

$$\|a_1(\varphi, x)\| \leq \delta,$$

$$\|a_1(\varphi, x') - a_1(\varphi, x'')\| \leq L \|x' - x''\|,$$

система (12) має інваріантний тороїдальний многовид.

#### 4. Один клас розривної динамічної системи

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{\varphi \in T^m} \Omega_{\varphi},$$

де  $\Omega_{\varphi}$  –  $\omega$ -гранична множина траєкторії  $\varphi_t(\varphi)$ . Розглянемо систему (6) у випадку, коли матрична функція  $A(\varphi)$  на множині  $\Omega$  є сталою матрицею, тобто  $A(\varphi) = \tilde{A}$  для всіх  $\varphi \in \Omega$ , а функція  $B(\varphi)$  на множині  $\Omega$  є нульовою матрицею, тобто  $B(\varphi) = 0$  для всіх  $\varphi \in \Omega$ . Це означає, що для всіх  $\varphi \in T^m$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(\varphi_t(\varphi)) = \tilde{A},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(\varphi_t(\varphi)) = 0. \tag{22}$$

**Теорема 2.** Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці  $\tilde{A}$  від'ємні, то для довільних неперервних  $2\pi$ -періодичних за  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) функцій  $f(\varphi)$  і  $g(\varphi)$  система (6), при виконанні умови (22), має асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину  $x = u(\varphi)$ , причому

$$\|u(\varphi)\| \leq \frac{K}{\gamma} \max_{\varphi \in T^m} \|f(\varphi)\| + \frac{K}{1 - e^{-\gamma\theta}} \max_{\varphi \in T^m} \|g(\varphi)\|. \tag{23}$$

**Доведення.** Як відомо [1], якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці  $\tilde{A}$  від'ємні, то матрицант  $X_t^t(\varphi)$  системи  $\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x$ , залежної від  $\varphi \in T^m$  як від параметра, допускає оцінку

$$\|X_t^t(\varphi)\| \leq K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)},$$

для будь-якого  $t \geq \tau$  і деяких  $K_1 \geq 1, \gamma_1 > 0$ . Враховуючи другу умову з (22), матрицант  $\Omega_t^t(\varphi)$  однорідної системи з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\varphi_t(\varphi))x, t \neq t_i(\varphi), \\ \Delta x|_{t=t_i(\varphi)} &= B(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi))x, \end{aligned} \tag{24}$$

залежної від  $\varphi \in T^m$  як від параметра, допускає оцінку

$$\|\Omega_t^t(\varphi)\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} \tag{25}$$

для будь-якого  $t \geq \tau$  і деяких  $K \geq 1, \gamma > 0$ . Легко перевірити, що інваріантний многовид  $x = u(\varphi)$  системи (6) матиме вигляд

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \sum_{t_i(\varphi) < 0} \Omega_{t_i(\varphi)+0}^0(\varphi) g(\varphi_{t_i(\varphi)}(\varphi)). \tag{26}$$

Нехай  $x_t(\varphi)$  – довільний розв'язок системи (6), а  $x_t^*(\varphi) = u(\varphi_t(\varphi))$  – розв'язок, що належить інваріантній множині. Тоді, враховуючи (25) і (26), отримуємо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t(\varphi) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0.$$

Це означає, що інваріантний многовид (26) є асимптотично стійким. Оцінка (23) напряму впливає з вигляду (26), якщо взяти до уваги (25). Теорему доведено.

### 5. Висновки

В роботі виділено один клас систем, визначених на прямому добутку  $m$ -вимірного тора і  $n$ -вимірного евклідового простору, для яких існує кусково неперервний інваріантний тороїдальний многовид  $x = u(\varphi)$ .

1. Перестюк М. О., Балага С. І. Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2008. – 11, №4. – С. 520-529., 2. Перестюк Н. А., Плотников В. Ф., Самойленко А. М., Скрипник Н. В. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – К.: Институт математики НАН Украины, 2007. – 427 с., 3. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с., 4. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща шк., 1987. – 288 с., 5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с., 6. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

Надійшла до редколегії 27.11.2009

УДК 517.98

А. Чайковський, канд. фіз.-мат. наук

## ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

**Знайдено нове зображення розв'язку задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з  $G$ -секторіальним операторним коефіцієнтом. Отримані нові властивості розв'язку в залежності від правої частини.**

*It's found new representation of Cauchy's problem's solution for linear differential solution of the first order in Banach space with  $G$ -sectorial operator coefficient. New properties of solution are obtained depending on the right-hand function.*

### 1. Вступ

Нехай  $(B, \|\cdot\|)$  – комплексний банахів простір з нульовим елементом  $\bar{0}$ ,  $I$  – одиничний оператор в  $B$ .

Наведемо означення  $G$ -секторіального оператора з роботи [1].

**Означення 1.** Будемо казати, що функція  $G : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  належить класу  $\Psi$ , якщо вона задовольняє умови:

- а)  $G$  – незростаюча на  $[0, +\infty)$ ;
- б)  $G(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ ;
- в) функція  $1/G$  ліпшицева на  $[0, +\infty)$ .

**Означення 2.** Нехай  $G \in \Psi$ . Лінійний оператор  $T : D(T) \subset B \rightarrow B$  назвемо  $G$ -секторіальним, якщо існують такі

сталі  $a \in \mathbf{R}$  і  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , що для множини  $S_{a,\varphi} := \{z \in \mathbf{C} \mid z \neq a, |\arg(z-a)| < \varphi\}$  справджуються умови:

- а) спектр  $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$ ;
- б)  $\exists M > 0 \forall \lambda \notin S_{a,\varphi} : \|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq M G(|\lambda - a|)$ .

Зауважимо, що при  $G(t) = (t+1)^{-1}$ ,  $t \geq 0$ , поняття  $G$ -секторіального оператора співпадає з поняттям секторіального оператора (генератора аналітичної напівгрупи). Теорія таких операторів добре відома (див., наприклад, [3,4]) В загальному випадку  $G$ -секторіальні оператори та породжені ними напівгрупи досліджені в роботі [1]. Наведемо деякі отримані там результати, що стосуються операторної експоненти, у вигляді леми.

**Лема 1.** Нехай  $G \in \Psi$ .  $T - G$ -секторіальний оператор. Операторна експонента, визначена рівностями

$$e^{-Tt} := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-t\mu} (T - \mu I)^{-1} d\mu, \quad t > 0, \quad e^{-T \cdot 0} := I,$$

де  $\Gamma = \{it \operatorname{ctg} \varphi + |t| : t \in \mathbf{R} \setminus [-\delta, \delta]\} \cup \{\delta + it \operatorname{ctg} \varphi : t \in [-\delta, \delta]\}$ ,  $\delta > 0$ , – крива, що охоплює  $S_{0,\varphi}$ , має властивості:

- 1) функція  $e^{-Tt}b$  неперервна при фіксованому  $b \in D(T)$  на  $[0, +\infty)$ ;
- 2) функція  $e^{-Tt}b$  неперервно диференційовна і має похідну  $-Te^{-Tt}b$  при фіксованому  $b \in D(T^2)$  на  $[0, +\infty)$ ;
- 3)  $\int_0^t e^{-Ts} ds = T^{-1}(I - e^{-Tt})$ ;
- 4)  $T^{-1}e^{-Tt} := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} e^{-t\mu} (T - \mu I)^{-1} d\mu, \quad t \geq 0$ .

Нехай  $R > 0$ ,  $T - G$ -секторіальний оператор,  $y \in C([0, R], B)$ . Розглянемо задачу Коші

$$x'(t) = -Tx(t) + y(t), \quad t \in (0, R], \quad x(0) = \bar{0}. \quad (1)$$

В роботі [1] знайдено її розв'язок у вигляді

$$x(t) = \int_0^t e^{-T(t-s)} y(s) ds, \quad t \in [0, R],$$

якщо функція  $y$  локально гельдерова та її значення лежать в області визначення деякого додатного степеня оператора  $T$ . В цій роботі буде знайдено інше зображення розв'язку та розв'язано задачу (1) за інших умов на функцію  $y$ .

Надалі припускається, що  $a = 0$ . Інші випадки можна звести до цього заміною  $x(t) = e^{-at}z(t)$ ,  $t \in [0, R]$ .

## 2. Допоміжні твердження

Розглянемо спочатку задачу Коші (1) у випадку оператора  $T$ , пропорційного одиничному.

**Лема 2.** Нехай  $y \in C([0, R], B)$ . Для кожного  $\mu \in \mathbf{C}$  задача Коші

$$z'_t(t, \mu) = -\mu z(t, \mu) + y(t), \quad t \in [0, R], \quad z(0) = \bar{0},$$

має єдиний неперервно диференційовний розв'язок

$$z(t, \mu) = \int_0^t e^{-\mu(t-s)} y(s) ds, \quad t \in [0, R].$$

При цьому функція  $z$  при кожному фіксованому  $t \in [0, R]$  є аналітичною по  $\mu$  в  $\mathbf{C}$  і допускає оцінку

$$\exists L_1 > 0 \quad \forall t \in [0, R] \quad \forall \mu \notin S_{0,\varphi}, \operatorname{Re} \mu > 0 : \|z(t, \mu)\| \leq L |\mu|^{-1}.$$

**Доведення.** Існування та єдиність розв'язку показані в [2]. Аналітичність перевіряється безпосереднім диференціюванням. Крім того,

$$\|z(t, \mu)\| \leq \max_{s \in [0, R]} \|y(s)\| \cdot \int_0^t e^{-\operatorname{Re} \mu(t-s)} ds = \|y\|_{\infty} (\operatorname{Re} \mu)^{-1} (1 - e^{-t \operatorname{Re} \mu}) \leq |\mu|^{-1} \|y\|_{\infty} (\cos \varphi)^{-1}, \quad t \in [0, R].$$

Лему 2 доведено.

**Лема 3.** Нехай  $y \in C([0, R], B)$  та для деяких чисел  $\gamma \in (0, 1]$  і  $L > 0$  виконується умова Гельдера

$$\forall t_1, t_2 \in [0, R] : \|y(t_1) - y(t_2)\| \leq L |t_1 - t_2|^{\gamma}.$$

Позначимо

$$z_0(t, \mu) = \int_0^t e^{-\mu(t-s)} y(s) ds = \mu^{-1} (1 - e^{-\mu t}) y(t), \quad t \in [0, R], \quad \mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Тоді функція  $z$  з леми 2 допускає оцінку

$$\exists L_2 > 0 \quad \forall t \in [0, R] \quad \forall \mu \notin S_{0,\varphi}, \operatorname{Re} \mu > 0 : \|z(t, \mu) - z_0(t, \mu)\| \leq L_2 |\mu|^{-1-\gamma}.$$

**Доведення.** Враховуючи означення гамма-функції Ейлера, маємо:

$$\|z(t, \mu) - z_0(t, \mu)\| \leq \int_0^t e^{-\operatorname{Re} \mu(t-s)} L (t-s)^{\gamma} ds = L (\operatorname{Re} \mu)^{-1-\gamma} \int_0^{t \operatorname{Re} \mu} e^{-s} s^{\gamma} ds \leq L |\mu|^{-1-\gamma} \Gamma(\gamma+1) (\cos \varphi)^{-1-\gamma}, \quad t \in [0, R].$$

Лему 3 доведено.

**Лема 4.** Нехай  $y \in C([0, R], B)$ ,  $0 < b < c < d \leq R$ , та для деяких чисел  $\gamma \in (0, 1]$  і  $L > 0$  виконується умова Гельдера

$$\forall t_1, t_2 \in [b, d] : \|y(t_1) - y(t_2)\| \leq L|t_1 - t_2|^\gamma.$$

Тоді функція  $z$  з лема 2 та функція  $z_0$  з лема 3 допускають оцінку

$$\exists L_3 > 0 \forall t \in [c, d] \forall \mu \notin S_{0, \varphi}, \operatorname{Re} \mu > 0 : \|z(t, \mu) - z_0(t, \mu)\| \leq L_3 |\mu|^{-1-\gamma}.$$

**Доведення.** Враховуючи означення гамма-функції Ейлера, маємо:

$$\begin{aligned} \|z(t, \mu) - z_0(t, \mu)\| &\leq \|y\|_\infty \int_0^b e^{-\operatorname{Re} \mu(t-s)} ds + \int_b^t e^{-\operatorname{Re} \mu(t-s)} L(t-s)^\gamma ds \leq \|y\|_\infty e^{-\operatorname{Re} \mu(c-b)} + L(\operatorname{Re} \mu)^{-1-\gamma} \int_0^{(t-b)\operatorname{Re} \mu} e^{-s} s^\gamma ds \leq \\ &\leq \|y\|_\infty e^{-|\mu| \cos \varphi(c-b)} + L|\mu|^{-1-\gamma} \Gamma(\gamma+1)(\cos \varphi)^{-1-\gamma}, \quad t \in [c, d]. \end{aligned}$$

Потрібна оцінка випливає з того, що степенева функція зростає повільніше експоненти. Лему 4 доведено.

**Лема 5.** Задача Коші (1) у випадку сталої функції  $y$  має єдиний розв'язок  $x \in C([0, R], B) \cap C^1((0, R], B)$ . Якщо додатково виконується умова

(i) для довільного  $b \in D(T)$  існує  $(e^{-Tt}b)'(0) = -Tb$ , то цей розв'язок має похідну в точці 0. Якщо ж виконуються умови (i) і

(ii) для довільного  $b \in B : e^{-Tt}b \rightarrow b, t \rightarrow 0+$ , то розв'язок належить класу  $C^1([0, R], B)$ .

**Доведення.** Нехай  $y(t) = y_0, t \in [0, R]$ . Розглянемо функцію  $x(t) := \int_0^t e^{-T(t-s)} y_0 ds, t \in [0, R]$ . Нехай  $\lambda \notin \sigma(T)$  – деяке фіксоване. Тоді

$$\begin{aligned} x(t) &:= \int_0^t e^{-T(t-s)} (T - \lambda I)(T - \lambda I)^{-1} y_0 ds = (I - e^{-Tt})(T - \lambda I)^{-1} y_0 - \lambda(T - \lambda I)^{-1} x(t) = \\ &= (T - \lambda I)^{-1} \left( (I - e^{-Tt}) y_0 - \lambda x(t) \right), \quad t \in [0, R]. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $x(t) \in D(T), t \in [0, R]$ . Крім того, враховуючи лему 1, існує

$$\begin{aligned} x'(t) &= T e^{-Tt} (T - \lambda I)^{-1} y_0 - \lambda \left( (T - \lambda I)^{-1} y_0 - T(T - \lambda I)^{-1} x(t) \right) = \\ &= -T \left( (I - e^{-Tt})(T - \lambda I)^{-1} y_0 - \lambda(T - \lambda I)^{-1} x(t) \right) + y_0 = -Tx(t) + y_0, \quad t \in (0, R). \end{aligned}$$

З умови (i) випливає, що це твердження правильне при  $t = 0$ . При виконанні умови (ii) функція  $Tx(t)$ , а отже і  $x'(t)$  неперервна в нулі.

Крім того, задача (1) рівносильна задачі

$$\left( e^{-(r-t)T} x(t) \right)'_t = e^{-(r-t)T} y(t), \quad t \in (0, r), \quad r \in (0, R), \quad x(0) = \bar{0},$$

звідки

$$e^{-(r-t)T} x(t) = \int_0^t e^{-(r-s)T} y(s) ds = e^{-(r-t)T} \int_0^t e^{-(t-s)T} y(s) ds, \quad t \in (0, r), \quad r \in (0, R), \quad x(0) = \bar{0}.$$

Подіємо на цю рівність оператором  $(T - \lambda I)^{-1}$  при деякому фіксованому  $\lambda \notin \sigma(T)$ :

$$e^{-(r-t)T} (T - \lambda I)^{-1} x(t) = e^{-(r-t)T} (T - \lambda I)^{-1} \int_0^t e^{-(t-s)T} y(s) ds, \quad t \in (0, r), \quad r \in (0, R), \quad x(0) = \bar{0}.$$

Переходячи при фіксованому  $t \in (0, R)$  до границі при  $r \rightarrow t+$  отримаємо єдиність розв'язку.

Лему 5 доведено.

### 3. Основні результати

**Теорема 1.** Нехай  $T$  –  $G$ -секторіальний оператор, для якого  $a = 0$ , і при деякому  $\alpha \in (0, 1]$  інтеграл  $\int_1^{+\infty} G(t) t^{-\alpha} dt$  збіжний і виконуються умови (i), (ii) лема 5. Тоді задача Коші (1) для кожної функції  $y \in C([0, R], B)$ , гельдерової на  $[0, R]$  з показниками  $L, \gamma$ , причому  $\gamma \geq \alpha$ , має єдиний розв'язок  $x \in C^1([0, R], B)$ . Цей розв'язок можна подати у вигляді

$$x(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - \mu I)^{-1} z(t, \mu) d\mu, \quad t \in [0, R], \quad (2)$$

де  $\Gamma = \{it \operatorname{ctg} \varphi + |t| : t \in \mathbf{R} \setminus [-\delta, \delta]\} \cup \{\delta + it \operatorname{ctg} \varphi : t \in [-\delta, \delta]\}$ ,  $\delta > 0$ , – крива, що охоплює  $S_{0, \varphi}$ , функція  $z$  визначена в лемі 2.

**Доведення.** Враховуючи лему 5, не зменшуючи загальності, можна вважати, що  $y(0) = \bar{0}$  (інакше окремо розглянемо функції  $y(t) - y(0)$  і  $y(0)$ ).

Зауважимо, що з умови випливає збіжність інтеграла  $\int_{\Gamma} G(|\mu|) |\mu|^{-\alpha} |d\mu|$ .

Інтеграл в формулі (2) збігається і задає неперервну на  $[0, R]$  функцію, бо за лемою 2 і означенням 2

$$\|(T - \mu I)^{-1} z(t, \mu)\| \leq MG(|\mu|) L_1 |\mu|^{-1}, \quad t \in [0, R], \quad \mu \in \Gamma.$$

Позначимо

$$z_1(t, \mu) = \int_0^t (z(s, \mu) - z_0(s, \mu)) ds + \mu^{-1} z(t, \mu) = \int_0^t \mu^{-1} e^{-\mu s} y(s) ds, \quad t \in [0, R], \quad \mu \in \Gamma.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} (-\mu^{-1} z(t, \mu) + z_1(t, \mu)) d\mu = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - \mu I + \mu I)(T - \mu I)^{-1} \mu^{-1} z(t, \mu) d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(t, \mu) d\mu = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} z(t, \mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - \mu I)^{-1} z(t, \mu) d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(t, \mu) d\mu = \\ & -x(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(t, \mu) d\mu, \quad t \in [0, R], \end{aligned} \quad (3)$$

де використана аналітичність  $z$  по  $\mu$ . Крім того, оскільки  $\|T(T - \mu I)^{-1}\| = \|I + \mu(T - \mu I)^{-1}\| \leq 1 + M|\mu|G(|\mu|)$ ,  $\mu \in \Gamma$ , то, враховуючи лему 3,

$$\|T(T - \mu I)^{-1} (z(t, \mu) - z_0(t, \mu))\| \leq L_1 |\mu|^{-1-\gamma} (1 + M|\mu|G(|\mu|)), \quad \mu \in \Gamma, \quad t \in [0, R]. \quad (4)$$

Розглянемо інтеграл

$$J(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} (z(t, \mu) - z_0(t, \mu)) d\mu, \quad t \in [0, R].$$

Оцінка (4) показує, що  $J \in C([0, R], B)$  і цю функцію можна інтегрувати під знаком інтеграла. Тому, враховуючи означення  $z_1$ , рівність (3) і аналітичність  $z$  по  $\mu$ , маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^t J(s) ds &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} \left( \int_0^t (z(s, \mu) - z_0(s, \mu)) ds \right) d\mu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} (-\mu^{-1} z(t, \mu) + z_1(t, \mu)) d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^{-1} z(t, \mu) d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (T - \mu I)^{-1} z(t, \mu) d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(t, \mu) d\mu = \\ &= -x(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(t, \mu) d\mu, \quad t \in [0, R]. \end{aligned} \quad (5)$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \|T(T - \mu I)^{-1} (z_1)_t(t, \mu)\| &= \|T(T - \mu I)^{-1} \mu^{-1} e^{-\mu t} y(t)\| \leq (1 + M|\mu|G(|\mu|)) |\mu|^{-1} e^{-t \operatorname{Re} \mu} L t^\gamma \leq \\ & (1 + M|\mu|G(|\mu|)) |\mu|^{-1-\gamma} (\cos \varphi)^{-\gamma} \sup_{s \geq 0} \frac{s^\gamma}{e^s}, \quad \mu \in \Gamma, \quad t \in [0, R], \end{aligned}$$

то останній інтеграл в (5) можна диференціювати під знаком інтеграла, отримуючи неперервну функцію. Звідси

$$x'(t) = -J(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} \mu^{-1} e^{-\mu t} y(t) d\mu, \quad t \in [0, R],$$

причому  $x' \in C([0, R], B)$ .

Теорему 1 доведено.

**Теорема 2.** Нехай  $T$  –  $G$ -секторіальний оператор, для якого  $a = 0$ , і при деякому  $\alpha \in (0, 1]$  інтеграл

$\int_1^{+\infty} G(t) t^{-\alpha} dt$  збіжний. Тоді задача Коші (1) для кожної функції  $y \in C([0, R], B)$ , яка є локально-гельдеровою на

$(0, R)$ , причому показник степеня на кожному проміжку гельдеровості не менший  $\alpha$ , має єдиний розв'язок  $x \in C^1((0, R], B) \cap C([0, R], B)$ . Цей розв'язок можна подати у вигляді (2).

**Доведення.** Аналогічно доведеному теорему 1 показуємо, що не зменшуючи загальності можна вважати, що  $y(0) = \bar{0}$  і інтеграл в формулі (2) збігається та задає неперервну функцію. Також використаємо введені вище функції  $z_1$  та  $J$ .

Зафіксуємо  $t_0 \in [0, R]$  і позначимо  $[b, d]$  відрізок, для якого  $t_0 \in (b, d)$ , і на якому функція  $y$  гельдерова з деякими показниками  $L, \gamma$ . Оберемо також довільну точку  $c \in (b, t_0)$ . Оскільки  $\|T(T - \mu I)^{-1}\| = \|I + \mu(T - \mu I)^{-1}\| \leq 1 + M|\mu|G(|\mu|)$ ,  $\mu \in \Gamma$ , то, враховуючи лему 4,

$$\|T(T - \mu I)^{-1}(z(t, \mu) - z_0(t, \mu))\| \leq L_1|\mu|^{-1-\gamma}(1 + M|\mu|G(|\mu|)), \mu \in \Gamma, t \in [c, d].$$

Ця оцінка показує, що  $J \in C([c, d], B)$  і цю функцію можна інтегрувати під знаком інтеграла. Тому, враховуючи означення  $z_1$  і рівність (3), маємо:

$$\begin{aligned} \int_c^t J(s) ds &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} \left( \int_c^t (z(s, \mu) - z_0(s, \mu)) ds \right) d\mu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} \left( \int_0^c (z(s, \mu) - z_0(s, \mu)) ds - \int_0^t (z(s, \mu) - z_0(s, \mu)) ds \right) d\mu = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} \left( -\mu^{-1}z(c, \mu) + z_1(c, \mu) + \mu^{-1}z(t, \mu) - z_1(t, \mu) \right) d\mu = \\ &= -x(c) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(c, \mu) d\mu + x(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1} z_1(t, \mu) d\mu, t \in [c, d]. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки

$$\|T(T - \mu I)^{-1}(z_1)'_t(t, \mu)\| = \|T(T - \mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t)\| \leq (1 + M|\mu|G(|\mu|))|\mu|^{-1}e^{-c\operatorname{Re}\mu} \sup_{t \in [0, R]} \|y(t)\|, \mu \in \Gamma, t \in [c, d],$$

то останній інтеграл в (6) можна диференціювати під знаком інтеграла, отримуючи неперервну функцію. Звідси

$$x'(t) = -J(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} T(T - \mu I)^{-1}\mu^{-1}e^{-\mu t}y(t) d\mu, t \in [c, d],$$

причому  $x' \in C([c, d], B)$ .

З довільності  $t_0 \in (0, R]$  випливає, що  $x \in C^1((0, R], B)$ .

Теорему 2 доведено.

#### 4. Висновки

В роботі доведено існування неперервно диференційованих на відрізку або півінтервалі розв'язків задачі Коші для лінійного диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі за деяких умов на праву частину. На відміну від вже відомих наведені умови не містять вимоги належності значень правої частини до області визначення степенів операторного коефіцієнта.

1. Городний М.Ф., Чайковский А.В. Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сборник. – 2006, №3. 2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М. 1970. 3. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М., 1985. 4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М., 1972.

Надійшла до редакції 25.11.09

УДК 517.91

А. Бондаренко, О. Пришляк, д-р фіз.-мат. наук

### ВІДОБРАЖЕННЯ ТРИВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

*Розглядаються функції Морса на замкненому тривимірному многовиді в коло, для яких рід прообразу регулярної точки не перевищує 1. Для таких функцій з чотирма критичними точками дана топологічна класифікація.*

*We consider Morse functions on closed 3-manifolds into circle when genus of regular point's preimage less or equal to 1. The topological classification of such functions with four critical points is obtained.*

#### 1. Вступ

Топологічною класифікацією функцій Морса на поверхнях займались В.В.Шарко, О.О.Пришляк, А.Т.Фоменко, А.В.Болсінов та інші. Важливим інваріантом функцій Морса є графи, введені Рібом і Кронродом [7].



Розглядається деякий замкнений орієнтований многовид  $M^3$  і функція Морса  $f : M^3 \rightarrow S^1$  на ньому за умови  $genus(f^{-1}(s)) \leq 1, s \in S^1$ , де точка  $s$  регулярна. Згідно цієї умови шаром може бути об'єднання не більше, ніж одного тора  $T^2$  і скінченної кількості сфер  $S^2$ . На такому многовиді функція може мати критичні точки двох типів: в них може змінюватись рід поверхні або кількість компонент зв'язності. В критичних точках графа Ріба функції Морса, в яких від тору відділяється сфера, треба дописати матрицю з простору  $SL(2, \mathbb{Z})$ . До ланок графу, на яких сфера переходить в тор і назад в сферу, треба приписати пару цілих чисел, як до лінзового простору  $L(p, q)$ , де  $q$  можна вважати елементом простору  $\mathbb{Z} / p\mathbb{Z}$ .

Мета роботи – дати пошарову класифікацію таких функцій Морса  $f : M^3 \rightarrow S^1$ , які мають чотири критичні точки.

**2. Про число критичних значень функцій Морса**

**Теорема 1.** Нехай маємо деякий замкнений орієнтований многовид  $M^3$  і функцію Морса  $f : M^3 \rightarrow S^1$  на ньому. Крім того,  $genus(f^{-1}(s)) \leq 1, s \in S^1$ , де точка  $s$  регулярна. Тоді число критичних точок функції  $f$  парне.

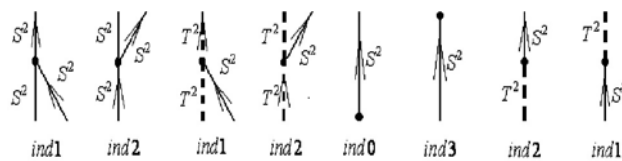
**Доведення.** Критичні точки поділяються на два типи: при проходженні одних точок змінюється рід поверхні, при проходженні інших – кількість компонент зв'язності. Якщо рухатися по графу, починаючи з деякої фіксованої точки, то після проходження всіх критичних точок ми маємо повернутись до тієї самої точки. Тому для кожної критичної точки, яка змінює рід поверхні, існує точка, яка знову його змінює на початковий, так само як і для кожної критичної точки, яка змінює кількість компонент зв'язності, існує відповідна їй. Отже, кількість критичних точок є парною.

**3. Топологічна еквівалентність функцій Морса**

**Теорема 2.** Функції еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм їх графів, що зберігає типи ребер і їх орієнтацію.

**Доведення.** Якщо функції еквівалентні, то графи, що їм відповідають, ізоморфні за побудовою.

Доведемо теорему в зворотному напрямку. Фіксуємо деякий регулярний переріз, з якого починатимемо. Фіксуємо на ньому гомеоморфізм. Ввівши поле градієнта, можемо продовжити цей гомеоморфізм на циліндр. В критичних точках маємо можливості:



де умовно зображено — ланки графа, яким відповідають сфери, - - - ланки графа, яким відповідають тори.

Отже, в критичних точках гомеоморфізм можна визначити однозначно.

Пройшовши всі критичні точки, ми знову повернемося до початкового перерізу. Оскільки матриці, що приписані до графів, однакові, то, повернувшись до початкової точки, зможемо також продовжити гомеоморфізм.

**4. Функції Морса з чотирма критичними точками**

Для довільного перетину кількість компонент зв'язності на перевищує 4-х. Якщо кількість компонент зв'язності графу перевищує 4, то або він має мати більше, ніж 4 критичні точки, або існує граф, кількість компонент зв'язності довільного перетину якого не перевищує 4, який з ним співпадає. Тому перетин може набувати лише вигляду:

- $S^2$  – перетином є сфера;
- $2S^2$  – перетином є дві сфери;
- $3S^2$  – перетином є три сфери;
- $4S^2$  – перетином є чотири сфери;
- $T^2$  – перетином є тор;
- $T^2S^2$  – перетином є тор і сфера;
- $T^22S^2$  – перетином є тор і дві сфери;
- $T^23S^2$  – перетином є тор і три сфери;

При проходженні критичної точки може або змінитися рід поверхні, або змінитися кількість компонент зв'язності перетину. В результаті отримаємо такі можливості переходу:

- $S^2 \rightarrow T^2, 2S^2;$
- $2S^2 \rightarrow S^2, 3S^2, T^2S^2;$
- $3S^2 \rightarrow 2S^2, 4S^2, T^22S^2;$
- $4S^2 \rightarrow 3S^2, T^23S^2;$

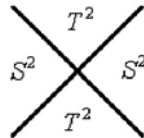
$$T^2 \rightarrow S^2, T^2S^2;$$

$$T^2S^2 \rightarrow T^2, 2S^2, T^22S^2;$$

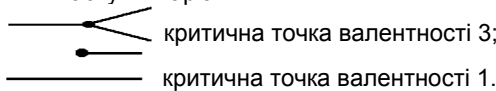
$$T^22S^2 \rightarrow T^2S^2, T^23S^2, 3S^2;$$

$$T^23S^2 \rightarrow 4S^2, T^22S^2;$$

Можна виписати всі можливі варіанти послідовностей перетинів при чотирьох критичних точках, враховуючи, що закінчити треба тим самим перерізом, з якого починали. Запишемо їх умовно наступним чином:

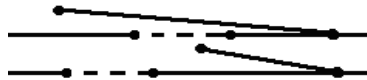


Такий запис означає, що ми починаємо з точки, в якій переріз є сферою, при проходженні першої точки отримуємо тор, після проходження другої знову повертаємось до сфери і т.д. Зрозуміло, що виписуючи всі варіанти, необхідно враховувати, що поворот не змінює вигляду графу. Якщо при проходженні критичної точки змінюється рід поверхні, а отже кількість компонент зв'язності залишається незмінною, то для цієї точки є єдиний варіант зміни графу. Якщо ж ми мали в перерізі одну сферу, яка після проходження критичної точки перетворюється на дві сфери, то можливі наступні варіанти:

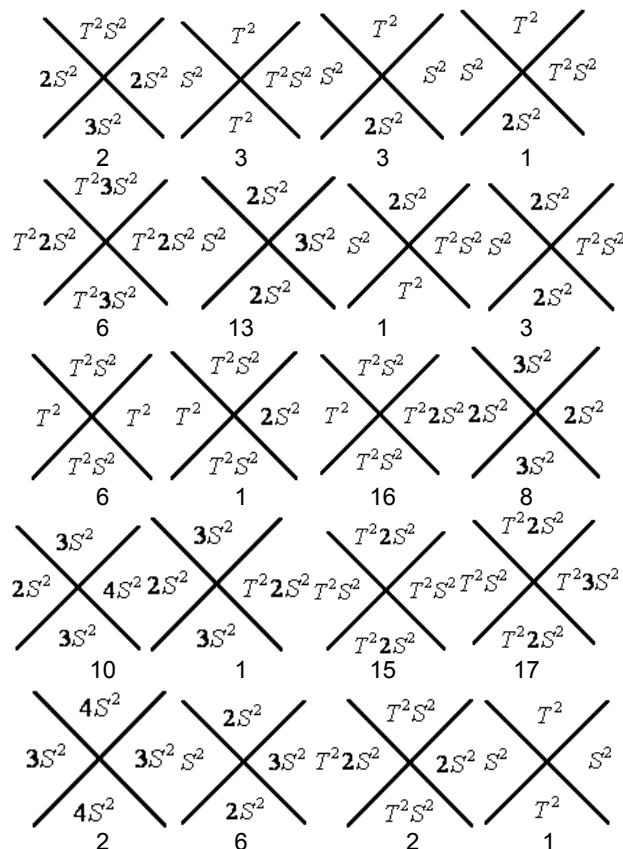


Важливо не забувати, що отриманий граф має бути зв'язним.

Крім цього треба враховувати, що треба виключити ще і наступні повторення, коли послідовності перерізів різні, а отримані графи будуть однаковими. Наприклад:



З міркувань зв'язності і врахувавши всі можливі повторення, в результаті отримаємо лише наступні варіанти схем, для яких вказано кількість різних графів, що їм відповідають за умови, що графи, утворені один з одного дзеркальним перетворенням вважаються різними.



Під кожною зі схем зазначено кількість різних графів Ріба, що їй відповідає.

**Теорема 3.** Якщо  $f : M^3 \rightarrow S^1$  – функція Морса з чотирма критичними точками, то граф Ріба цієї функції буде ізоморфний графу, якому відповідає одна з вписаних схем.

## 5. Висновки

В роботі розглянуті графи Ріба функцій Морса з тривимірного многовиду на коло з чотирма критичними точками. Доведені теореми класифікації таких функцій. Результати, наведені в роботі, можуть бути застосовані до дослідження різних задач фізики, математики, економіки та інших наук, де виникають функції від трьох змінних.

1. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том. 1. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет", 1999. – 444 с. 2. Борисенко О.А. Дифференциальная геометрия и топология. Навч. посібник для студ. мех.-мат. фак. ун-тів, що вивч. дисципліну "Дифференціальна геометрія і топологія". – Х.: Основа, 1995. – 304 с. 3. Пришляк О.О. Теорія Морса: Навч. посібник. – К.: Київський університет, 2002. – 65 с. 4. Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса на 4-мерных многообразиях // Успехи мат. наук. – 2001. – Т.56, №1. – С. 173-174. 5. Хирш М. Дифференциальная топология. Пер. с англ. Д.Б.Фукса. – М.: Мир, 1979. – 280 с. 6. Шарко В.В. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с. 7. G. Reeb. Sur les points singuliers d'une forme de Pfa\_ compl\_ement int\_egrable ou d'une fonction num\_erique. Comptes Rendus de L'Acad\_emie ses Seances, Paris 222 (1946), 847-849.

Надійшла до редколегії 16.11.09

УДК 517.91

А. Котляр, асп.

## РРО-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ НА БУКЕТІ З $n$ КІЛ

*Описується один із шляхів класифікації неперервних функцій із скінченною кількістю критичних точок, що задані на букеті з  $n$  кіл. Вона здійснюється за допомогою топологічного інваріанту для таких функцій, який був побудований у даній статті.*

*There describes one of the ways of classification of continuous functions with a finite number of local extremes that are given on the bunch of  $n$  circles. This classification of such functions is solvable with the aid of the topological invariant, that was built up in this paper.*

### 1. Вступ

Останнім часом досить часто вивчаються функції на графах, зокрема, топологічні властивості функцій на колах. В даній роботі розглядаються неперервні функції, що задані на букеті з  $n$  кіл. Задача полягає в тому, щоб знайти умову еквівалентності двох таких функцій.

Букетом з  $n$  кіл називається топологічний простір, що складається із  $n$  кіл, які дотикаються лише в одній точці і більше спільних точок не мають. У даній статті, в якості прикладу, також наведено більш узагальнений випадок, а саме, коли з'являються сингулярні точки.

Аби функція  $f$  на даному топологічному просторі була гладкою, необхідно, щоб її звуження на кожне коло простору було гладким. На рис.1 приведено приклад букету з трьох кіл  $S_1, S_2$  та  $S_3$  із єдиною спільною точкою  $a_0$ .

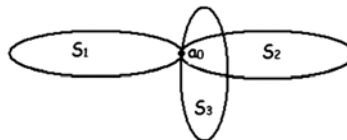


Рис. 1

Задано  $n$  кіл із відміченими точками  $(S^1, x_1), (S^1, x_2), \dots, (S^1, x_n)$ , де  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 = 1\}$ . Розглядається топологічний простір із відміченою точкою  $S^1 \vee S^1 \vee \dots \vee S^1 = (S^1 \cup S^1 \cup \dots \cup S^1) / \sim; x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_n$  (позначимо його через  $S$ , відмічену точку через  $a_0$ ). Для даного простору розрізняються кола  $(S^1, a_0), (S^2, a_0), \dots, (S_n, a_0)$ . Зафіксуємо на  $S$  деяку орієнтацію. Нехай  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  деяка неперервна функція із скінченим числом локальних екстремумів. Зауважимо, що точка  $a_0$  буде точкою локального екстремуму функції  $f$  на топологічному просторі  $S$  лише тоді, коли вона є локальним екстремумом для кожного звуження функції  $f$  на кола  $S^1_r, r = \overline{1, n}$ .

**Означення 1.** Неперервні відображення  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  називаються РРО-еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми  $h_1 : S \rightarrow S$  та  $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які зберігають орієнтацію і для яких  $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$  та  $S^1_r = h_1^{-1}[g^{-1}(h_2(f(S^1_r)))]$ ,  $r = \overline{1, n}$ .

Виникає необхідність ввести поняття порядку обходу кіл, оскільки букети із різними обходами кіл не є еквівалентними, а отже, виникає некоректність при порівнюванні функцій на еквівалентність на різних топологічних просторах. Тільки якщо порядок обходу кіл у букеті співпадає, задача про еквівалентність функцій є коректною і можна будувати інваріанти для заданих на букеті функцій. Цим інваріантом для функції  $f$ , заданої на букеті з  $n$  кіл буде узагальнена змія  $G(n_1, m_1)$ , який позначається  $Sp^n(f)$ . Змія  $G(n_1, m_1)$  відповідає значенню  $f$  у локальних екстремумах на колах  $S^1_r$ , де  $r = \overline{1, n}$ . Оперуючи таким поняттям як порядок обходу, можемо описати яким чином нумеруємо кола. Через  $S^1_1$  позначимо коло, з якого починає рухатись  $f$ . Через  $S^1_i$ , наступне коло, на якому приймає значення  $f$  після  $S^1_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n-1}$  і т.д. Отже, колом  $S^1_n$  буде коло, на якому функція  $f$  закінчує рух. Побудуємо інваріант  $Sp^n(f)$ .

2. Комбінаторні відомості

Для побудови інваріанту, що має відповідати неперервній функції  $f$ , заданій на букеті з  $n$  кіл ( $s=3,4$ ), необхідно навести означення деяких комбінаторних об'єктів.

**Означення 2.** Змією типу  $\beta$  називається послідовність додатних цілих чисел  $x_i$ , що задовольняють нерівностям  $x_0 < x_1 > x_2 < \dots < x_n, 0 \leq x_i \leq m; n, m \in \mathbb{N}$

Наприклад, послідовність чисел  $\{2, 4, 1, 3, 2, 5\}$  задовольняє умову означення 2 і тому є змією типу  $\beta$ .

**Означення 3.** Монотонним відрізком в послідовності  $\Delta = (i_1, \dots, i_n)$  називається максимальний відрізок, на якому послідовність спадає (або зростає)  $(i_{a-1} <) i_a > i_{a+1} > \dots > i_b (< i_{b+1})$  або  $(i_{a-1} >) i_a < i_{a+1} < \dots < i_b (> i_{b+1})$ . (випадки  $a=1$  і  $b=n$  не виключаються), де  $i_j \in \{0, 1, \dots, m\}; n, m \in \mathbb{N}$ . Надалі монотонний відрізок будемо позначати  $\Delta(a, b)$ .

**Означення 4.** Узагальненою змією  $G(n, m)$  називається послідовність додатних чисел  $x_i$ , що задовольняють умови  $x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_n, 0 \leq x_i \leq m; n, m \in \mathbb{N}$ . Виходячи із описаних вище означень, очевидно, що  $G(n, m)$  має два типи складових, а саме:  $\beta$ -змії та  $\Delta(a, b)$  відрізки.

3. Побудова інваріанту

Маємо топологічний простір  $S$  із відміченою точкою  $a_0$ , який складається із  $n$  занумерованих кіл  $S_r^1, r = \overline{1, n}$  із заданою на них орієнтацією. Припустимо, що на колі  $S_1^1$  функція має  $k_1$  локальних екстремумів, на колі  $S_2^1$  має  $k_2$  локальних екстремумів, і т.д., на  $S_n^1 - k_n$ . Отже, на даному топологічному просторі функція всього має  $\sum_{i=1}^n k_i =: m$  локальних екстремумів. Нехай також  $f$  приймає  $k$  різних значень на даних колах. Починаючи з точки  $a_0$ , позначимо на колі  $S_1^1$  локальні екстремуми через  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}$ . Локальним екстремумам на колі  $S_2^1$  відповідає послідовність  $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}$ , і т.д., а на колі  $S_n^1$  буде відповідати послідовність  $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}$ . Із цих  $n$  послідовностей утворимо одну, вставивши між ними точку  $a_0$ . Отримаємо

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, a_0, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}, \dots, a_0, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}. \tag{1}$$

Розглянемо тепер значення функції у точках (1). Позначимо  $y_0 = f(x_1^{(1)}), y_1 = f(x_2^{(1)}), \dots, y_{k_1} = f(x_{k_1}^{(1)}), y_{k_1+1} = f(a_0), y_{k_1+2} = f(x_1^{(2)}), y_{k_1+3} = f(x_2^{(2)}), \dots, y_{k_1+k_2+1} = f(x_{k_2}^{(2)}), \dots, y_{m-k_n} = f(a_0), y_{m-k_n+1} = f(x_1^{(n)}), y_{m-k_n+2} = f(x_2^{(n)}), \dots, y_m = f(x_{k_n}^{(n)})$ . Зауважимо, що такого, щоб  $y_i = y_{i+1}, i = \overline{0, m-1}$ , не може бути, оскільки за умовою  $f$  неперервна функція, а за теоремою Ролля між точками  $f^{-1}(y_i)$  та  $f^{-1}(y_{i+1})$  має лежати локальний екстремум, а це неможливо. Тому числа  $y_i, i = \overline{0, m}$ , задовольняють умову  $y_0 \neq y_1 \neq \dots \neq y_m$ . Задамо відображення  $y_i \rightarrow z_i$ , де  $z_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  і  $z_i$  дорівнює числу значень  $y_l$  таких, що  $y_l < y_i$ . Числа  $z_i$  утворюють узагальнену змію  $G(m+n-1, k-1)$ . Відмітимо на ній значення  $z_{k_1+1}, z_{k_1+k_2+2}, \dots, z_{m-k_n}$ .

**Теорема (критерій PPO-еквівалентності функцій на букеті з  $n$  кіл).**

Дві неперервні функції  $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ , що задані на букеті  $S$  з  $n$  кіл і які мають однакову (скінчену) кількість екстремумів на кожному з кіл букету, є PPO-еквівалентними тоді, і лише тоді, коли їм відповідає один і той самий інваріант  $Sp^n$ , тобто узагальнена змія  $G(m+n-1, k-1)$ .

**Доведення.**

**Необхідність.** Ця частина доведення впливає із побудови інваріанту для функцій  $f, g$ .

**Достатність.** Нехай функціям  $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$  відповідає один інваріант  $Sp$ , тобто узагальнена змія  $G(m_1, k-1)$  із відміченими точками  $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ . Доведемо, що тоді функції  $f$  і  $g$  є PPO-еквівалентними. З умови теореми випливає, що кількість локальних екстремумів на колах  $S_r^1, r = \overline{1, n}$ , для кожної з функцій  $f$  і  $g$  співпадає, позначимо їх за  $k_r$  відповідно. Нехай функції  $f$ , починаючи із відміченої  $a_0$ , при русі за орієнтацією по колах  $S_r^1$  відповідає послідовність локальних екстремумів  $x_1^r, \dots, x_{k_r}^r$ , серед яких включено точку  $a_0$ . (Аналогічно, функції  $g$  відповідає послідовність  $y_1^r, \dots, y_{k_r}^r$ ). Відповідно до побудови змії, існують відображення  $\phi_1: f(x_j^r) \rightarrow z_l$  та  $\phi_2: g(y_j^r) \rightarrow z_l$ , де  $z_l$  – ціле додатне число і є елементом змії  $G(m_1, k-1)$ . Позначимо через  $\alpha_j^r$  дугу кола  $S_r^1$  між локальними екстремумами  $x_j^r$  та  $x_{j+1}^r$ . Аналогічно для точок  $y_j^r, y_{j+1}^r$  дугу позначимо  $\beta_j^r$ . Ці відображення неважко продовжити до гомеоморфізмів:  $\tilde{\phi}_1: \alpha_j^r \rightarrow z_l z_{l+1}$  та  $\tilde{\phi}_2: \beta_j^r \rightarrow z_l z_{l+1}$ , де  $z_l z_{l+1}$  – відрізок змії  $G(m_1, k-1)$  між точками  $z_l$  та  $z_{l+1}$ . Очевидно, що отримані гомеоморфізми зберігають орієнтацію, яка задана на кожному з кіл букету. Нехай відрізок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  – множина значень функції  $f$ , а  $[c, d] \subset \mathbb{R}$  – множина значень функції  $g$ . Побудуємо гомеоморфізм

$h_2 : [a, b] \rightarrow [c, d]$  такий, що  $h_2(t) = c + \frac{t-a}{b-a}(d-c)$  і який зберігає орієнтацію. Із описаного вище випливає, що  $f = h_2^{-1} \circ g \circ \tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1$  та  $S_r^1 = \tilde{\varphi}_1^{-1}[\tilde{\varphi}_2(g^{-1}(h_2(f(S_r^1))))]$ ,  $r = \overline{1, n}$ , згідно до побудови інваріанту. Теорему доведено.

Нагадаємо, що для коректності задачі необхідне співпадання порядків обходу на букетах.

Узагальнюючи букет із декількох кіл до випадку, коли з'являються сингулярні точки (точки перетину кіл), для прикладу розглянемо такі топологічні простори, як на рис. 2

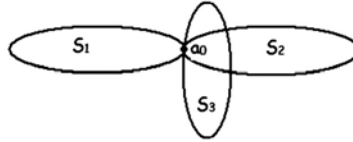


Рис. 2

Неважко переконатись, що побудований вище інваріант також підходить для класифікації функцій, заданих на таких топологічних просторах, потрібно лише додати декілька умов, а саме: 1) кількість критичних точок функцій на таких колах між відповідними сингулярними точками має співпадати, а також, 2) звуження функцій у сингулярних точках мають співпадати (аби функції були неперервними).

4. Висновок

Для букета із  $n$  кіл, побудовано комбінаторний інваріант  $Sp^n(f)$  для неперервної функції  $f$ , заданої на цьому букеті, яка має скінчену кількість точок локального екстремуму. За допомогою цього інваріанту виведено критерій PPO-еквівалентності неперервних функцій із скінченим числом локальних екстремумів, що задані на букеті з  $n$  кіл. Він зводиться до перевірки порядку обходу кіл у заданих топологічних просторах і перевірки на збіжність

комбінаторних інваріантів  $Sp^n(f)$  та  $Sp^n(g)$  функцій  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  та  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $S = \bigcup_{r=1}^n S_r^1$ ), тобто перевірки на збіжність

узагальнених змій, що відповідають цим функціям, а саме  $G^f(2m-1, k-1)$  із  $G^g(2m-1, k-1)$ . Випадок букету кіл узагальнено до випадку, коли з'являються сингулярні точки і доведено, що даний інваріант можна використовувати і для класифікації функцій, заданих на таких узагальнених топологічних просторах.

1 Андріюк О.П. Функції на одновимірних многовидах: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец.01.01.01 "Математичний аналіз" / О.П. Андріюк. – Київ, 2006. – 19с. 2 Арнольд В.И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера / В.И. Арнольд // Успехи мат.наук. – 1992. – Т.47, №1(283). – С.3-45 3 Шарко В.В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В.В. Шарко // Укр.мат.жур. – 2003. – Т.55, №5 – С.687-700 4 Юрчук І.А. Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі / Юрчук І.А. // Укр..мат.жур.– 2008.–Т60, №6. – С.829-836.

Надійшла до редколегії 30.11.09

УДК 519.21

Г. Репетацька

**ПОКРАЩЕНА ОЦІНКА ОРТОГОНАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ  
ДЛЯ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ МОДЕЛІ З ПОХИБКАМИ В ЗМІННИХ**

*Для неявної функціональної моделі регресії з похибками в змінних розглядається оцінка ортогональної регресії. Встановлено умови неконзистентності, знайдено перший член розкладу асимптотичного відхилення оцінки по дисперсії похибок, та запропонована покращена оцінка, яка має менше асимптотичне відхилення. Отримані результати розглянуті на прикладі еліпса.*

*For implicit functional errors-in-variables model the orthogonal regression estimator is considered. The conditions for the inconsistency are presented, and the first term of the asymptotic expansion of its deviation is derived. An improved estimator is proposed, that has smaller asymptotic deviation from the true value. As an example the estimation of the ellipse is considered.*

1. Вступ

Розглянемо неявну функціональну модель регресії з похибками у змінних

$$\begin{cases} G(\xi_i, \beta_0) = 0, \\ x_i = \xi_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $G(\xi, \beta)$  – скалярна функція від векторних змінних  $\xi \in \mathbb{R}^q$ ,  $q \geq 2$  та  $\beta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ ,  $\beta_0$  – параметр, що оцінюється,  $x_i$  – дані спостережень,  $\xi_i$  – невідомі детерміновані величини,  $\varepsilon_i$  – похибки спостережень.

Для моделі (1) розглянемо оцінку ортогональної регресії (о.о.р.)  $\hat{\beta}_n$ , встановимо, що вона неконзистентна, та запропонуємо покращену оцінку, яка має менше асимптотичне відхилення при малих похибках та великих  $n$ . Раніше аналогічні результати були отримані в [1,3] для явних моделей регресії.

Відомо, що для лінійної функції регресії о.о.р. конзистентна (див. [4]), та при нормально розподілених похибках з однаковою дисперсією є оцінкою максимальної правдоподібності. Але в роботі [3] доведено, що для явної нелінійної моделі регресії о.о.р. неконзистентна і навіть відділена від істинного значення  $\beta_0$ . Також в [3] знайдено перший член розкладу її асимптотичного відхилення по дисперсії похибок та запропоновано покращену оцінку, яка має менше асим-

птотичне відхилення від  $\beta_0$ . Згодом в [1] ці результати були поширені з двовимірної моделі на багатовимірну. В даній статті ми поширюємо отримані результати на неявну модель регресії, що дає змогу використовувати покращену оцінку в оцінюванні параметрів неявних моделей, наприклад, для оцінювання еліпсоїда за спостереженнями з адитивною похибкою точок на його поверхні.

Перехід до неявної моделі вимагає постановки умов, адаптованих до неявної моделі, а також змін в обчисленні асимптотичного відхилення. Але деякі теореми не потребують змін, оскільки при нових умовах хід доведення не змінюється. Для таких теорем наводимо тільки формулювання з посиланням на [1,3,6].

## 2. Модель та умови

Надалі  $I_n$  позначає одиничну матрицю  $n$ -го порядку,  $\|\cdot\|$  – евклідову норму. Векторні величини будемо записувати векторами-стовпцями, а похідні – векторами-рядками; змінну, по якій береться похідна – верхнім індексом, наприклад,  $G^\xi$  – це вектор-рядок частинних похідних за компонентами  $\xi$ ;  $\lambda_{\min}(V)$  позначає найменше власне значення симетричної матриці  $V$ ;  $U_r(x_0)$  – відкрита куля з центром  $x_0$  і радіусом  $r$ ,  $\bar{U}_r(x_0)$  – її замикання.

Означимо також множину  $\Gamma_\beta := \{u \in \mathbb{R}^q : G(u, \beta) = 0\}$ , що є графіком неявно заданої функції  $G$  з параметром  $\beta$ . Будемо позначати через  $\xi_\beta$  довільну точку графіка  $\Gamma_\beta$ .

Нехай для моделі (1) виконуються наступні умови:

(i)  $\beta_0 \in \text{int } \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$  – деякий компакт;  $\Gamma_\beta \neq \emptyset$  для всіх  $\beta \in \Theta$ , та  $\Gamma_{\beta_0} = \partial A_{\beta_0}$ , де  $A_{\beta_0} \in \mathbb{R}^q$  – відкрита однозв'язна множина.

(ii)  $\|\xi_i\| \leq A, i \geq 1$ , де  $A$  – деяка стала.

(iii)  $G(\xi, \beta) \in C^3(\mathbb{R}^q \times U)$  – тричі неперервно диференційовна функція, де  $U \supset \Theta$  – відкрита, та  $G^\xi(\xi_\beta, \beta) \neq 0$  для довільних  $\beta \in \Theta$ ,  $\xi_\beta$ .

(iv) Похибки  $\{\varepsilon_i, i \geq 1\}$  незалежні однаково розподілені,  $\varepsilon_i \sim N(\vec{0}, \sigma^2 I_q)$ , де  $\sigma > 0$  – невідомий параметр.

**Зауваження:** умова нормальності похибок не принципова, але спрощує доведення.

Для будь-якої функції  $F(\xi, \beta)$  означимо  $F_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \beta_0)$  – середнє значення функції в дійсних точках спостереження. Означимо величини  $k_n, V_n$  для наступних функцій:

$$k(\xi, \beta) = \text{tr} \left[ G^{\xi\xi} \left( I_q - \frac{G^{\xi T} G^\xi}{\|G^\xi\|^2} \right) \right] \frac{G^\beta}{\|G^\xi\|^2}, \quad V(\xi, \beta) = \frac{(G^\beta)^T G^\beta}{\|G^\xi\|^2}.$$

Для виконання подальших теорем 2-4 суттєві умови відділеності  $k_n, V_n$  від нуля:

(v)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|k_n\| > 0$ ;

(vi)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(V_n) > 0$ .

Надалі будемо вимагати виконання умов (i)-(iii).

Важливий наслідок з (ii), (iii): якщо  $K \subset \mathbb{R}^q$  – компакт, то для всіх  $(\xi_\beta, \beta)$  таких, що  $\beta \in \Theta$ ,  $\xi_\beta \in K$ , похідна  $G^\xi(\xi_\beta, \beta)$  відділена від нуля:  $\|G^\xi(\xi_\beta, \beta)\| \geq \delta_0$ , де  $\delta_0 > 0$  – деяка стала.

Також виконання цих умов забезпечує обмеженість  $k_n, V_n$  зверху.

## 3. Оцінка ортогональної регресії

Нехай  $q(x, \beta) := \min_{u \in \Gamma_\beta} \|x - u\|^2$  – квадрат найменшої відстані від точки  $x$  до графіка  $\Gamma_\beta$ ;

$$Q(\beta) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q(x_i, \beta) - \text{цільова функція.}$$

Означимо оцінку ортогональної регресії  $\hat{\beta}$  як борелеву функцію від спостережень  $x_i, i = \overline{1, n}$ , в якій цільова функція досягає найменшого значення:

$$\hat{\beta} \in \arg \min_{\beta \in \Theta} Q(\beta). \tag{2}$$

Для довільного набору  $\{x_i\}_{i=1}^n$  точка, в якій  $Q(\beta)$  досягає мінімуму, може бути не єдина, але завжди можна вибрати таку, щоб функція  $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\{x_i\}_{i=1}^n)$  була борелевою (див. [5]). Нехай  $h(x, \beta) \in \arg \min_{u \in \Gamma_\beta} \|x - u\|^2$  – точка найменшої відстані від  $x$  до графіка  $\Gamma_\beta$ . Розглянемо питання існування та єдиності  $h(x, \beta)$ .

**Існування.** Для довільних  $\beta \in \Theta$  та  $x \in \mathbb{R}^q$  завжди існує хоча б одна точка з  $\Gamma_\beta$ , найближча до  $x$ , внаслідок замкненості множини  $\Gamma_\beta$ . Позначимо через  $h(x, \beta)$  будь-яку з таких точок.

**Єдиність.** Оскільки функція  $G$  є неперервно диференційною, то  $h(x, \beta)$  є точкою мінімуму функції Лагранжа за змінною  $u$ :

$$\begin{cases} L(u; x, \beta) = \|x - u\|^2 + 2a(x, \beta)G(u, \beta) \rightarrow \min, \\ G(u, \beta) = 0, \end{cases}$$

де  $a = a(x, \beta)$  – відповідний скалярний множник, а  $h$  та  $a$  задовільняють систему рівнянь

$$\begin{cases} L^u(u; x, \beta)|_{u=h} = 0, & \text{àà} \hat{=} \begin{cases} x - h - a(G^u(u, \beta)|_{u=h})^T = 0 \\ G(h, \beta) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

Система рівнянь (3) визначає  $h$  як основу перпендикуляра, опущеного з  $x$  на  $\Gamma_\beta: (x - h) \parallel (G^u(h, \beta))^T$ , де  $h \in \Gamma_\beta$ ;  $a$  – коефіцієнт пропорційності між перпендикуляром і вектором нормалі  $(G^u)^T$ . Система (3) неявно задає векторну функцію  $\alpha(x, \beta) := \begin{pmatrix} h(x, \beta) \\ a(x, \beta) \end{pmatrix}$  як розв'язок векторного рівняння  $F(\alpha; x, \beta) = \vec{0}$ , де  $F = (L^u; G)^T - (q + 1)$ -вимірна функція.

**Лема 1.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)-(iii). Тоді векторна функція  $h(x, \beta)$  та скалярна  $a(x, \beta)$  однозначно визначаються з системи (3) і є двічі неперервно диференційовними в околі кожної з точок  $(\xi_\beta, \beta)$ , таких що  $\beta \in \Theta$  та  $\|\xi_\beta\| \leq A$ , причому радіус околу можна вибрати єдиним для всіх точок:

$$\begin{pmatrix} h \\ a \end{pmatrix}: \bar{U}_{v_0}(\xi_\beta) \times \bar{U}_{v_0}(\beta) \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}.$$

**Доведення.** Легко бачити, що  $F(\alpha(\xi_\beta, \beta); \xi_\beta, \beta) = \vec{0}$ ,  $F^\alpha(\alpha(\xi_\beta, \beta); \xi_\beta, \beta) = \begin{pmatrix} -I_q - aG^{\xi\xi}(\xi_\beta, \beta) & G^{\xi T}(\xi_\beta, \beta) \\ G^\xi(\xi_\beta, \beta) & 0 \end{pmatrix}$ .

В деякому околі  $U_{v(\xi_\beta, \beta)}(\xi_\beta, \beta) := U_{v(\xi_\beta, \beta)}(\xi_\beta) \times U_{v(\xi_\beta, \beta)}(\beta)$  точки  $(\xi_\beta, \beta)$ , матриця  $F^\alpha$  буде невідродженою. Обґрунтуємо це. З (3) та умов (ii), (iii) випливає, що  $\|aG^\xi(h, \beta)\| = \|x - h(x, \beta)\| \leq \|x - \xi_\beta\|$ , а з відділеності  $\|G^\xi\|$  від нуля,

$$|a(x, \beta)| \leq \delta_0^{-1} \cdot \|x - \xi_\beta\|. \quad (4)$$

З врахуванням (4) та означення визначника як алгебраїчної суми добутків елементів в різних рядках і стовпчиках,

$$\det(-F^\alpha) = \det \begin{pmatrix} I_q & -G^{\xi T} \\ -G^\xi & 0 \end{pmatrix} + O(a) = -\|G^\xi\|^2 + O(\|x - \xi_\beta\|) \leq -\delta_0^2 + O(\|x - \xi_\beta\|) -$$

визначник відділений від нуля, при  $x$  близьких до  $\xi_\beta$ . (Легко переконатись, що визначник в останньому рядку дорівнює  $-\|G^\xi\|^2$ , якщо розкласти його за першим стовпчиком і далі знайти другий доданок, розклавши його за першим рядком.) Тоді, за теоремою про неявну функцію, в деякому околі  $U_{v(\xi_\beta, \beta)}(\xi_\beta, \beta)$  будуть існувати: однозначна двічі неперервно диференційовна векторна функція  $h(x, \beta)$  та скалярна функція  $a(x, \beta)$ . Внаслідок компактності множини всіх можливих значень  $(\xi_\beta, \beta)$ , можна вибрати єдине значення  $v_0$  замість усіх можливих  $v(\xi_\beta, \beta)$ . Для зручності в подальших дослідженнях,  $v_0$  вибираємо меншим за максимально можливе, для того щоб неявно задані функції були визначені і диференційовні в замкненому околі точок спостереження.

*Лема доведена.*

**Зауваження:** Зокрема,  $\xi_{\beta_0}$  може бути будь-якою з точок  $\xi_i, i = \overline{1, n}$ , тобто неявно задана функція однозначна та диференційовна в околі істинних точок спостережень.

Дана лема дозволяє стверджувати, що для всіх  $x_i$ , відхилення яких від істинного значення  $\xi_i$  менші за нормою від  $v_0$ , та  $\beta \in U_{v_0}(\beta_0)$ , існує тільки один перпендикуляр, опущений з  $x$  на  $\Gamma_\beta$ . Ми розглядаємо модель при малих  $\sigma^2$ , але якщо відхилення буде більшим за  $v_0$ , перпендикуляр  $h$  може бути не єдиним. Тому розділимо спостереження на дві частини. Виділимо в спостереженнях множину індексів  $B_n$ , для елементів якої буде виконуватись лема 1:  $B_n := \{i = \overline{1, n} : \|\varepsilon_i\| < v_0\}$ . Цільову функцію розділимо на дві частини:

$$Q(\beta) = Q_1(\beta) + Q_2(\beta) := \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} q(x_i, \beta) + \frac{1}{n} \sum_{i \notin B_n} q(x_i, \beta),$$

де  $Q_1(\beta)$  буде основною частиною, тричі неперервно диференційовною та обмеженою, а  $Q_2(\beta)$  будемо розглядати як залишок.

4. Неконзистентність оцінки ортогональної регресії

Наступні позначення будемо використовувати для послідовностей випадкових векторів, що залежать від параметрів  $\beta \in \Theta$  та  $\sigma > 0$ :

**Означення 1.** Послідовність  $\eta_n = \eta_n(\beta, \sigma)$  називається рівномірною стохастично обмеженою, якщо  $\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1; \beta \in \Theta; \sigma > 0} P(\|\eta_n(\beta, \sigma)\| > c) = 0$ . Позначення:  $\eta_n = O_p(1)$ .

**Означення 2.**  $\eta_n(\beta) = o_p(1)$ , якщо для довільних  $\beta \in \Theta$ ,  $\eta_n(\beta) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , за ймовірністю.

**Означення 3.**  $\eta_n(\beta, \sigma) = o_{\sigma P}(1)$ , якщо для всіх  $c > 0$   $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sup_{n \geq 1} P\left(\sup_{\beta \in \Theta} \|\eta_n(\beta, \sigma)\| > c\right) = 0$ .

У наступній теоремі отримано асимптотичні розклади  $Q(\beta)$  та похідних  $Q_1(\beta)$  в точці  $\beta_0$ , які використовуються для встановлення умов неконзистентності та знаходження асимптотичного відхилення.

**Теорема 1.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)–(iv). Тоді

$$Q(\beta) = Q_1(\beta) + \sigma^4 o_{\sigma P}(1), \tag{5}$$

$$Q(\beta_0) = \sigma^2 + \left(\sigma^3 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right) O_p(1) + \sigma^4 o_{\sigma P}(1), \tag{6}$$

$$Q_1^\beta(\beta_0) = \sigma^2 k_n + \left(\sigma^3 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) O_p(1) + \sigma^4 o_{\sigma P}(1), \tag{7}$$

$$Q_1^{\beta\beta}(\beta_0) = 2V_n + \sigma O_p(1) + \sigma^4 o_{\sigma P}(1). \tag{8}$$

Наступна лема використовується при доведенні теореми 1 та подальшої леми 4.

**Лема 2.** Нехай  $\{a_i : i \geq 1\}$  – обмежена числова послідовність,  $\zeta_i$  – незалежні однаково розподілені випадкові вектори зі скінченними другими моментами. Тоді

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \zeta_i = \frac{E \zeta_1}{n} \sum_{i=1}^n a_i + \frac{\sqrt{D \zeta_1}}{\sqrt{n}} O_p(1).$$

Лема легко доводиться за нерівністю Чебишова.

**Доведення теореми 1.** Для величин  $\xi_i, x_i, \varepsilon_i, h_i := h(x_i, \beta_0)$  та аналогічних величин, якщо розглядається випадок конкретного  $i$ , індекс  $i$  будемо упускати. Наприклад, замість  $q(x_i, \beta)$  писатимемо  $q(x, \beta)$ .

**Доведення формули (5).** Доведемо, що  $Q_2(\beta) = \sigma^4 o_{\sigma P}(1)$ . Розглянемо  $q(x, \beta)$ . Враховуючи, що  $h(\xi, \beta) \in \Gamma_\beta$ , маємо

$$q(x, \beta) = \|x - h(x, \beta)\|^2 \leq \|x - h(\xi, \beta)\|^2 \leq (\|x - \xi\| + \|\xi - h(\xi, \beta)\|)^2 \leq 2\|\varepsilon\|^2 + D,$$

де  $D$  – стала для даної моделі. Тут ми використали компактність  $\Theta$ , неперервність  $G$  та умову (ii).

Далі,  $Q_2(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i \notin B_n} q(x_i, \beta) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2\|\varepsilon_i\|^2 + D) I_{\|\varepsilon_i\| \geq v_0}$ . Нехай  $\tilde{\varepsilon}_i := \varepsilon_i / \sigma, \tilde{\varepsilon}_i \sim N(\vec{0}; I_q)$  – величини зі стандартним нормальним розподілом. Оцінимо математичні сподівання доданків:

$$E \|\varepsilon\|^2 I_{\|\varepsilon\| \geq v_0} = \frac{\sigma^4}{v_0^2} E \frac{v_0^2}{\sigma^2} \|\tilde{\varepsilon}\|^2 I_{\|\tilde{\varepsilon}\| \geq v_0/\sigma} \leq \frac{\sigma^4}{v_0^2} E \|\tilde{\varepsilon}\|^4 I_{\|\tilde{\varepsilon}\| \geq v_0/\sigma} = \sigma^4 o(1), \sigma \rightarrow 0+.$$

$$E I_{\|\varepsilon\| \geq v_0} = \frac{\sigma^4}{v_0^4} E \frac{v_0^4}{\sigma^4} I_{\|\tilde{\varepsilon}\| \geq v_0/\sigma} = \frac{\sigma^4}{v_0^4} E \|\tilde{\varepsilon}\|^4 I_{\|\tilde{\varepsilon}\| \geq v_0/\sigma} = \sigma^4 o(1), \sigma \rightarrow 0+.$$

Отже,  $E Q_2(\beta) = \sigma^4 o(1), \sigma \rightarrow 0+$ . За нерівністю Чебишова,

$$P(\sigma^{-4} Q_2(\beta) > C) \leq \frac{E \sigma^{-4} Q_2(\beta)}{C} = \frac{o(1)}{C} \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0+. \text{ Це означає, що } Q_2(\beta) = \sigma^4 o_{\sigma P}(1). \text{ Формула доведена.}$$

**Знаходження основних доданків формул (6)-(8).**

Для отримання решти формул будемо окремо розглядати кожен доданок  $q(x_i, \beta)$  цільової функції  $Q(\beta)$  та її похідних в точці  $\beta_0$ . Доданки, для яких  $i \notin B_n$ , будуть становити достатньо малу частину загальної суми при малих  $\sigma$ , не більшу за  $\sigma^4 o_{\sigma P}(1)$ , що доводиться аналогічно до попереднього пункту.

Розглянемо фіксоване  $i \in B_n$ . Тоді  $\varepsilon_i$  – обмежена випадкова величина, та існує однозначна двічі неперервно диференційовна функція  $h_i := h(\xi_i + \varepsilon_i; \beta)$  та  $q(x_i, \beta) = \|x_i - h_i\|^2$ , де  $\xi_i$  – фіксований параметр. Знайдемо розклад за формулою Тейлора функції  $q$  (та її похідних) відносно  $\varepsilon$ , та математичні сподівання членів розкладу.

Означимо величину  $\Delta$  з рівності  $h = \xi + \Delta$ .

Зауважимо, що  $\|\Delta\|^2 = \|\xi - h\|^2 \leq \|\xi - x\|^2 + \|x - h\|^2 \leq 2\|\xi - x\|^2 = 2\|\varepsilon\|^2$ . Отже,  $\Delta = O(\|\varepsilon\|), \varepsilon \rightarrow 0$ . Тоді з першого рівняння (3) також випливає, що  $a = O(\|\varepsilon\|), \varepsilon \rightarrow 0$ .



Для будь-якої величини  $P$ , залежної від похибки  $\varepsilon$ , через  $P_1, P_2$  позначаємо лінійну та квадратичну частини розкладу  $P$  за формулою Тейлора в околі  $\bar{0}$ . Знайдемо розклад  $\Delta$  та  $a$  за степенями  $\varepsilon$  у вигляді  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + O(\|\varepsilon\|^3)$ ,  $a = a_1 + a_2 + O(\|\varepsilon\|^3)$ . Для цього функції в системі (3) розкладемо за формулою Тейлора в околі точки  $(\xi; \beta_0)$ . Маємо

$$\begin{cases} \varepsilon - \Delta = G^{\xi T}(\xi, \beta_0)a + G^{\xi\xi}(\xi, \beta_0)\Delta \cdot a + O(\|\varepsilon\|^3) \\ G^{\xi}(\xi, \beta_0)\Delta + \frac{1}{2}\Delta^T G^{\xi\xi}(\xi, \beta_0)\Delta = O(\|\varepsilon\|^3) \end{cases}$$

Через  $O(\cdot)$  позначаємо рівномірно обмежену величину:  $\|O(t)\| \leq C \|t\|$ , для довільних  $\beta, \xi, \sigma, n, i$ .

Значення функцій при фіксованих  $\xi, \beta_0$  будемо записувати без аргумента. Далі отримуємо

$$\begin{cases} \varepsilon - \Delta_1 = G^{\xi T} a_1 \\ G^{\xi} \Delta_1 = 0 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} \Delta_1 = \varepsilon - G^{\xi T} a_1 \\ a_1 = G^{\xi} \cdot \varepsilon / \|G^{\xi}\|^2 \end{cases}, \text{ та } \begin{cases} -\Delta_2 = G^{\xi T} a_2 + G^{\xi\xi} \Delta_1 a_1 \\ G^{\xi} \Delta_2 + \frac{1}{2} \Delta_1^T G^{\xi\xi} \Delta_1 = 0 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} \Delta_2 = -(G^{\xi T} a_2 + G^{\xi\xi} \Delta_1 a_1) \\ a_2 = \frac{\frac{1}{2} \Delta_1^T G^{\xi\xi} \Delta_1 - a_1 G^{\xi} G^{\xi\xi} \Delta_1}{\|G^{\xi}\|^2} \end{cases}$$

Знайдемо розклад  $q(x; \beta_0)$  за степенями  $\varepsilon$  та математичне сподівання його доданків. Маємо:

$$q = \|x - h\|^2 = \|\varepsilon - \Delta\|^2 = \|\varepsilon - \Delta_1\|^2 + O(\|\varepsilon\|^3) = a_1^2 \|G^{\xi}\|^2 + O(\|\varepsilon\|^3);$$

$$q_0 = q_1 = 0; \quad E a_1^2 = \frac{G^{\xi} \varepsilon \cdot \varepsilon^T G^{\xi T}}{\|G^{\xi}\|^4} = \frac{\sigma^2}{\|G^{\xi}\|^2}; \quad E q_2 = \|G^{\xi}\|^2 \cdot E a_1^2 = \|G^{\xi}\|^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\|G^{\xi}\|^2} = \sigma^2.$$

Далі знаходимо розклади за степенями  $\varepsilon$  величин  $q^\beta(x, \beta_0)$  та  $q^{\beta\beta}(x, \beta_0)$ . Спочатку знайдемо похідні:

$$q^\beta(x; \beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} L(h(x, \beta); x; \beta) = L^h h^\beta + L^\beta = L^\beta = 2a G^\beta(h, \beta) + 2a^\beta G(h, \beta) = 2a G^\beta(h, \beta);$$

$$q^{\beta\beta}(x; \beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} (2G^{\beta T}(h, \beta) \cdot a) = 2G^{\beta T}(h, \beta) a^\beta + 2a (G^{\beta\beta}(h, \beta) + G^{\beta\xi}(h, \beta) h^\beta).$$

Знайдемо  $q_0^{\beta\beta}$ . Для того щоб знайти  $a^\beta$ , продиференціюємо (3) за  $\beta$ :

$$\begin{cases} -h^\beta = G^{\xi T} a^\beta + a (G^{\xi\xi} h^\beta + G^{\xi\beta}) \\ G^{\xi} h^\beta + G^\beta = 0 \end{cases}, \text{ звідки знаходимо } a^\beta = \frac{G^\beta - a G^{\xi} (G^{\xi\xi} h^\beta + G^{\xi\beta})}{\|G^{\xi}\|^2}, \text{ та } q_0^{\beta\beta} = 2G^{\beta T} a^\beta = \frac{G^{\beta T} G^\beta}{\|G^{\xi}\|^2};$$

Знайдемо розклад  $q^\beta(x; \beta_0)$  за степенями  $\varepsilon$  та математичне сподівання його доданків. Маємо:

$$q^\beta = 2a G^\beta(h, \beta_0) = 2(a_1 + a_2 + O(\|\varepsilon\|^3))(G^\beta + G^{\beta\xi} \Delta_1 + O(\|\varepsilon\|^2)), \text{ звідки } q_0^\beta = 0, \quad E q_1^\beta = 0; \quad q_2^\beta = 2a_1 G^{\beta\xi} \Delta_1 + 2a_2 G^\beta.$$

Знайдемо математичні сподівання компонент  $q_2^\beta$ :  $E a_1^2 = \frac{\sigma^2}{\|G^{\xi}\|^2}$ ;  $E a_1 \Delta_1 = \bar{0}$ ;  $E \Delta_1 \Delta_1^T = \sigma^2 \left( I_q - \frac{G^{\xi T} G^{\xi}}{\|G^{\xi}\|^2} \right)$ .

$$\text{Звідси отримуємо } E q_2^\beta = \frac{\sigma^2}{\|G^{\xi}\|^2} \text{tr} \left[ G^{\xi\xi} \left( I_q - \frac{G^{\xi T} G^{\xi}}{\|G^{\xi}\|^2} \right) \right] G^\beta.$$

*Доведення (6)-(8).* Ми знайшли основні величини, необхідні для доведення формул. Для прикладу розглянемо (7), а решта формул доводяться аналогічно.

Розглянемо  $Q_1^\beta(\beta_0)$ . Його розклад за Тейлором  $Q_1^\beta(\beta_0) = \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} q(x_i, \beta_0) = A_1 + A_2 + \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} O(\|\varepsilon\|^3)$ , де  $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} q_k^\beta(\varepsilon_i)$ ,  $k = 1, 2$ , – лінійна та квадратична частини.

Розглянемо доданки  $A_1$ .  $q_1^\beta(\varepsilon) \in$  лінійною формою від  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \sigma$  з обмеженими коефіцієнтами для всіх  $i = \overline{1, n}$ :  $q_1^\beta = 2a_1 G^\beta = 2\sigma (G^{\xi} \tilde{\varepsilon} / \|G^{\xi}\|^2) G^\beta$ . Отже,  $A_1$  – сума лінійних форм від  $\tilde{\varepsilon}_i$  з нульовими математичними сподіваннями. Виділимо основну частину та залишок:  $A_1 = S_1 - S_2$ , де  $S_1 := \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n q_1^\beta(\tilde{\varepsilon}_i)$ ,  $S_2 := \frac{\sigma}{n} \sum_{i \in B_n} q_1^\beta(\tilde{\varepsilon}_i)$ . За лемою 2 отримуємо  $S_1 = \bar{0} + \sigma / \sqrt{n} \cdot O_P(1)$ . Те, що  $S_2 = \sigma^4 o_{\sigma P}(1)$ , легко довести за допомогою міркувань, аналогічних (5). Отже,  $A_1 = \sigma / \sqrt{n} \cdot O_P(1) + \sigma^4 o_{\sigma P}(1)$ . Так само знаходимо  $A_2 = \sigma^2 k_n + \sigma^2 / \sqrt{n} \cdot O_P(1) + \sigma^4 o_{\sigma P}(1)$ .

Нам залишається розглянути залишок  $R := \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} O(\|\varepsilon\|^3)$ : маємо  $\|R\| \leq \text{const} \frac{\sigma^3}{n} \sum_{i=1}^n \|\tilde{\varepsilon}_i\|^3 = \sigma^3 O_P(1)$ .

Формула (7) доведена. Аналогічно доводяться рівності (6) та (8).  $\square$

Сформулюємо теорему про неконзистентність, і навіть асимптотичну відокремленість оцінки  $\hat{\beta}_n$  параметра  $\beta_0$  від істинного значення, при відокремленому від нуля  $k_n$ :

**Теорема 2.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)-(v). Тоді для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдуться такі  $\tau > 0$  та  $\sigma_\varepsilon > 0$ , що для всіх  $\sigma \in (0; \sigma_\varepsilon]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\hat{\beta}_n - \beta_0\| > \sigma^2 \tau) > 1 - \varepsilon.$$

Доведення даної теореми ґрунтується на формулах (5), (7) і цілком аналогічне доведенню відповідного твердження в [1–3].

### 5. Асимптотичне відхилення

Для характеристики асимптотичної поведінки послідовності випадкових векторів будемо використовувати наступні позначення.

**Означення 4.**  $\eta_n(\sigma) = \tilde{O}_{\sigma P}(1)$ , якщо  $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\eta_n(\sigma)\| > C) \rightarrow 0, C \rightarrow \infty$ .

**Означення 5.**  $\eta_n(\sigma) = \tilde{o}_{\sigma P}(1)$ , якщо  $\forall C > 0: \lim_{\sigma \rightarrow 0+} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\|\eta_n(\sigma)\| > C) = 0$ .

**Зауваження:** якщо  $\eta_n(\sigma) = o_{\sigma P}(1)$ , то  $\eta_n(\sigma) = \tilde{o}_{\sigma P}(1)$  (обернене твердження хибне).

Нехай  $\rho(x, \Gamma_\beta)$  – відстань від точки  $x$  до  $\Gamma_\beta$ . Сформулюємо умову контрастності, або асимптотичної відділеності точки  $\beta_0$ :

$$(con) \forall \delta > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\|\beta - \beta_0\| > \delta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i, \Gamma_\beta) > 0.$$

Дана умова забезпечує можливість існування конзистентної оцінки при  $\sigma \rightarrow 0$ .

**Лема 3.** Нехай для моделі (1)  $G \in C(\mathbb{R}^q, \Theta)$  та виконується умова контрастності (con). Тоді  $\hat{\beta}_n - \beta_0 = \tilde{o}_{\sigma P}(1)$ .

Це твердження сформульоване в [3]. Наводимо його без доведення.

Наступна теорема, за якою знаходиться перший член розкладу асимптотичного відхилення оцінки по  $\sigma^2$ , також не потребує окремого доведення (див. [1,3,6]).

**Теорема 3.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)-(vi) та (con). Тоді

$$\hat{\beta}_n = \beta_0 - \frac{\sigma^2}{2} V_n^{-1} k_n^T + \sigma^2 \tilde{o}_{\sigma P}(1).$$

### 6. Покращена оцінка ортогональної регресії

Теорема 3 дозволяє оцінити перший член розкладу асимптотичного відхилення по  $\sigma$ , при умові, що його складові  $\sigma^2, k_n, V_n$  відомі з достатньою точністю. Подамо оцінки, які використовувались для оцінювання даних параметрів у статтях [1,3,6]. У вирази для  $k_n, V_n$  замість невідомих параметрів  $(\xi_i, \beta_0)$  підставимо наближені значення  $(x_i, \hat{\beta}_n)$ , та означимо покращену оцінку параметра  $\beta_0$ :

$$\tilde{\beta}_n := \hat{\beta}_n + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \hat{V}_n^{-1} \hat{k}_n, \tag{9}$$

де  $\hat{k}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k(x_i, \hat{\beta}_n)$ ,  $\hat{V}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(x_i, \hat{\beta}_n)$ ,  $\hat{\sigma}^2 := Q(\hat{\beta}_n)$ .

Наступні леми забезпечують достатню точність оцінок  $\hat{\sigma}^2, \hat{k}_n, \hat{V}_n$ .

**Лема 4.** Нехай виконуються умови (i)-(iv) та умова контрастності (con). Тоді

$$\sigma^2 - \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \tilde{o}_{\sigma P}(1).$$

Доведення леми безпосередньо випливає з формули (6) та співвідношення, яке виникає при доведенні Теорема 3:  $Q(\hat{\beta}) - Q(\beta_0) = \sigma^4 \tilde{O}_{\sigma P}(1)$  (див. [1,6]).

**Лема 5.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)-(iv) та умова контрастності (con);  $F \in C^1(\mathbb{R}^q \times U)$ , де  $U \supset \Theta$  – відкрита, та для деяких сталих  $\lambda, C$  виконується нерівність  $\|F^\xi(\xi, \beta)\| \leq C e^{\lambda \|\xi\|}, \xi \in \mathbb{R}^q, \beta \in \Theta$ . Тоді

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \beta_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_i, \hat{\beta}_n) + \tilde{o}_{\sigma P}(1).$$

Ця лема використовувалась для оцінки  $k_n, V_n$  в явних моделях регресії (див. [1,3,6]). Обмеження на функцію  $F$  накладаються для того, щоб обмежити доданки з великими похибками  $\varepsilon_i$ .

Якщо умови леми 5 виконуються для функцій  $k(\xi, \beta)$  та  $V(\xi, \beta)$ , то оцінки  $\hat{k}_n, \hat{V}_n$  будуть достатньо точними. Але функції можуть бути необмеженими в точках  $(x_i, \hat{\beta}_n)$ , оскільки знаменник  $\|G^\xi(x_i, \hat{\beta}_n)\|^2$  може бути близьким до нуля або навіть перетворюватись в 0 (у випадку явної моделі це неможливо:  $\|G^\xi\|^2 = 1 + (g^\xi)^2 \geq 1$ ). Звичайно, в мало-

му околі дійсних точок спостереження, при виконанні умов (i)-(iii), знаменник буде відділеним від нуля, але при великих похибках умова може порушуватись (див. далі приклад). Такої проблеми не виникає, якщо в функції  $k(\xi, \beta)$  та  $V(\xi, \beta)$  підставити значення  $(\hat{h}_i, \hat{\beta}_n) \in \Gamma_{\hat{\beta}_n}$ , де  $\hat{h}_i := h(x_i, \hat{\beta}_n)$ . Означимо альтернативну оцінку  $\tilde{\beta}'_n$ :

$$\tilde{\beta}'_n := \hat{\beta}_n + \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \hat{V}_n^{-1} \hat{k}'_n, \tag{10}$$

де  $\hat{k}'_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k(\hat{h}_i, \hat{\beta}_n)$ ,  $\hat{V}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(\hat{h}_i, \hat{\beta}_n)$ ,  $\hat{\sigma}^2 := Q(\hat{\beta}_n)$ .

Означимо також многовид  $W := \{(\xi; \beta) \mid G(\xi, \beta) = 0, \beta \in \Theta\} = \bigcup_{\beta \in \Theta} (\Gamma_\beta \times \{\beta\}) \subset \mathbb{R}^q \times \Theta$ .

**Лема 6.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)-(iv) та умова контрастності (con);  $F \in C^1(U)$ , де  $U \supset W$  – відкрита множина; функція  $F$  експоненційно обмежена: при деяких сталих  $\lambda, C$   $\|F(\xi_\beta, \beta)\| \leq C e^{\lambda \|\xi_\beta\|}$ ,  $(\xi_\beta, \beta) \in W$ . (Функцією  $F$  буде вектор-функція  $k(\xi, \beta)$  або матричнозначна функція  $V(\xi, \beta)$ ). Тоді

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \beta_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(\hat{h}_i, \hat{\beta}_n) = \tilde{o}_{\sigma P}(1).$$

**Доведення.** Як і при доведенні Теорему 1, окремо будемо окремо розглядати доданки для  $i \in B_n$  та  $i \notin B_n$ . Індеси  $i$  будемо упускати. Наприклад,  $\hat{h} = h(x, \hat{\beta}_n)$  – точка найменшої відстані від  $x$  до  $\Gamma_{\hat{\beta}_n}$ ,  $\xi \equiv h(\xi, \beta_0)$  – дійсна точка спостереження.

1. Розглянемо випадок  $i \in B_n$ . З Лем 2 випливає, що для довільного  $\varepsilon > 0$ , для всіх  $\sigma \in (0, \sigma_\varepsilon]$ , при  $n \geq n_{\sigma\varepsilon}$ ,  $\hat{\beta} \in \bar{U}_{v_0}(\beta_0)$  зі ймовірністю не меншою за  $1 - \varepsilon$ . Надалі будемо вважати що  $\hat{\beta} \in \bar{U}_{v_0}(\beta_0)$ .

Означимо  $H$  як функцію від  $x$  та  $\beta$ :  $H(x, \beta) := F(h(x, \beta), \beta)$ , де  $x \in \mathbb{R}^q$ ,  $\beta \in \Theta$ ,  $h(x, \beta) \in W$ . Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} [F(\hat{h}_i, \hat{\beta}) - F(\xi_i, \beta_0)] &= \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} [F(h(x_i, \hat{\beta}), \hat{\beta}) - F(h(\xi_i, \hat{\beta}), \hat{\beta}) + F(h(\xi_i, \hat{\beta}), \hat{\beta}) - F(h(\xi_i, \beta_0), \beta_0)] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} [H(x_i, \hat{\beta}) - H(\xi_i, \hat{\beta})] + \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} [H(\xi_i, \hat{\beta}) - H(\xi_i, \beta_0)]. \end{aligned}$$

Розглянемо кожен доданок окремо. Знайдемо похідні за  $x, \beta$ , та застосуємо теорему про середнє. Але спочатку доведемо обмеженість похідних  $H^x(x, \beta) = F^\xi(h(x, \beta), \beta) h^x$  та  $H^\beta(x, \beta) = F^\xi(h(x, \beta), \beta) h^\beta + F^\beta(h(x, \beta), \beta)$ .

Щоб знайти  $h^x$  та  $h^\beta$ , диференціюємо (3) за  $x, \beta$ . Отримаємо  $h^x = T^{-1} \text{Pr}_{(G^u)^\perp}$ ,  $h^\beta = -T^{-1} \left( \frac{G^{uT} G^\beta}{\|G^u\|^2} + a \text{Pr}_{(G^u)^\perp} G^{u\beta} \right)$ , де  $\text{Pr}_{(G^u)^\perp} = I_q - G^{uT} G^u / \|G^u\|^2$ ,  $T = I_q + a \text{Pr}_{(G^u)^\perp} G^{uu}$ , всі похідні функції  $G$  обчислені в  $(h(x, \beta), \beta)$ .

З (4) та Лем 1 випливає обмеженість  $a(x, \beta)$ ,  $h(x, \beta)$ , а також невідродженість та відділеність від нуля власних чисел матриці  $T$  для довільного  $\beta \in \Theta$ . Тоді  $h^\beta, h^x$ , а також  $H^\beta, H^x$ , будуть обмеженими. Далі,  $(\xi_i, \beta) \in W$ , причому точки  $\xi_i \in \bar{U}_A(\bar{0})$ ,  $x_i \in \bar{U}_{v_0}(\xi_i)$  належать компакту. Всі точки  $\{(h(x, \beta); \beta) \mid x \in \bar{U}_{v_0}(\xi_i), i \in B_n; \beta \in \Theta\}$  також належать компакту з множини  $W$ , в тому числі  $(h(\xi_i, \beta), \beta)$  та  $(h(x_i, \beta), \beta)$ .

В околі точок  $W$  похідна  $G^\xi(\xi, \beta)$  ненульова, а якщо  $\xi$  належить компакту, – відділена від нуля за нормою. Отже, функція  $F$  неперервно диференційовна в околі точок  $(h, \beta)$ . А функція  $h$  неперервно диференційовна в околі  $U_{v_0}(\xi_\beta, \beta)$ , в тому числі в околі  $\xi_i$  та в точках  $x_i$ , де  $i \in B_n$ . Отже,  $H$  неперервно диференційовна як суперпозиція функцій  $F$  і  $h$ , а її похідні обмежені для всіх  $i \in B_n$ . Застосуємо до доданків теорему про середнє:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} [H(x_i, \hat{\beta}) - H(\xi_i, \hat{\beta})] \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} H^\xi(\bar{\xi}_i, \hat{\beta}) \sigma \tilde{\varepsilon}_i \right| \leq \sup_{\xi \in \bar{U}_{v_0}(\xi_i), i \in B_n} \|H^\xi(\xi, \hat{\beta})\| \cdot \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \|\tilde{\varepsilon}_i\| = o_{\sigma P}(1), \\ \left| \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} [H(\xi_i, \hat{\beta}) - H(\xi_i, \beta_0)] \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} H^\beta(\xi_i, \bar{\beta}) (\hat{\beta} - \beta_0) \right| \leq \sup_{i \in B_n; \beta \in \Theta} \|H^\beta(\xi_i, \bar{\beta})\| \cdot \tilde{o}_{\sigma P}(1) = \tilde{o}_{\sigma P}(1). \end{aligned}$$

2. Розглянемо випадок  $i \notin B_n$ . Доведемо, що  $\frac{1}{n} \sum_{i \notin B_n} [F(\hat{h}_i, \hat{\beta}) - F(\xi_i, \beta_0)] = \tilde{o}_{\sigma P}(1)$ .

а) Оскільки  $\|\hat{h}_i\| \leq \|x_i\| + \rho(x_i, \Gamma_{\hat{\beta}}) \leq \|x_i\| + \|x_i - \xi_i\| + \rho(\xi_i, \Gamma_{\hat{\beta}}) \leq \|\xi_i\| + 2\|\varepsilon_i\| + \text{const} \leq \text{const} + 2\|\varepsilon_i\|$ , то

$$\frac{1}{n} \sum_{i \notin B_n} \|F(\hat{h}_i, \hat{\beta})\| \leq \frac{C}{n} \sum_{i \notin B_n} e^{\lambda \|\hat{h}_i\|} \leq \frac{C}{n} \sum_{i \notin B_n} e^{\lambda(\text{const} + 2\|\varepsilon_i\|)} \leq \frac{C_1}{n} \sum_{i \notin B_n} e^{2A\|\varepsilon_i\|} = \frac{C_1}{n} \sum_{i=1}^n e^{2\lambda\|\varepsilon_i\|} I_{\|\varepsilon_i\| \geq v_0}.$$

Для нормальних похибок  $E e^{2\lambda\|\varepsilon_i\|} < \infty$ , отже  $E e^{2\lambda\sigma\|\varepsilon_i\|} I_{\|\varepsilon_i\| \geq \nu_0/\sigma} = o(1)$ ,  $\sigma \rightarrow 0+$ . Звідси за нерівністю Чебишева легко отримати  $\frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} \|F(\hat{h}_i, \hat{\beta})\| = o_{\sigma P}(1)$ .

б) внаслідок компактності множини значень  $\xi_i$  та неперервності функції  $F$  на  $W$  маємо

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i \in B_n} F(\xi_i, \beta_0) \right\| \leq \frac{D}{n} \sum_{i \in B_n} 1 = o_{\sigma P}(1).$$

Лема доведена.  $\square$

Кінцевим результатом всіх попередніх тверджень є оцінка, яка має менше асимптотичне зміщення.

**Теорема 4.** Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)-(vi), умова контрастності (con) та для деяких сталих  $\lambda, C$  виконується нерівність  $\|G^{\xi\xi}(\xi, \beta)\| + \|G^\beta(\xi, \beta)\| \leq C e^{\lambda\|\xi\|}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^q, \beta \in \Theta$ . Тоді

$$\tilde{\beta}'_n - \beta_0 = \sigma^2 \tilde{o}_{\sigma P}(1).$$

Якщо додатково  $\|G^\xi(\xi, \beta)\| \geq \delta_0 > 0$  для всіх  $\xi \in \mathbb{R}, \beta \in \Theta$ , то також  $\tilde{\beta}_n - \beta_0 = \sigma^2 \tilde{o}_{\sigma P}(1)$ .

### 7. Приклад

Розглянемо о.о.р. та її асимптотичне відхилення на прикладі еліпса:

$$\begin{cases} x_i = \xi_i + \varepsilon_i, & i = \overline{1, n}, \\ (\xi_i - c_0)^T A_0 (\xi_i - c_0) = 1. \end{cases}$$

Симетрична додатно визначена матриця  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$  задає напрямки та величини осей, вектор  $c = (c_1; c_2)^T$  – центр, а  $\xi_i \in \mathbb{R}^2$  – невідомі точки на еліпсі;  $\beta = (a_{11}; a_{12}; a_{22}; c_1; c_2)^T$  – вектор параметрів,

$G(\xi, \beta) = \frac{1}{2} ((\xi - c)^T A (\xi - c) - 1)$  – функція регресії. На параметри накладаємо наступні обмеження:

Власні числа  $\lambda_1, \lambda_2$  матриці  $A$  обмежені та відділені від нуля:  $0 < C_1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq C_2$ ;  $\|c\| \leq R$ .

Тоді виконуються умови (i), (ii). Для похибок будемо вимагати виконання умови (iv).

Перевіримо виконання умов (iii) та контрастності (con), та обмеження (v), (vi) на  $k_n, V_n$ . Маємо

$$G^\xi(\xi, \beta) = (\xi - c)^T A; \quad G^{\xi\xi}(\xi, \beta) = A; \quad G^\beta(\xi, \beta) = \begin{bmatrix} G^A; G^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (\xi - c)(\xi - c)^T; -(\xi - c)^T A \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця  $A$  невироджена,  $G^\xi = \vec{0}$  тоді і тільки тоді, коли  $\xi - c = \vec{0}$ , але в такому випадку  $G = -\frac{1}{2} \neq 0$ .

Отже,  $\|G^\xi\| \neq 0$  для всіх допустимих  $\beta, \xi \in \Gamma_\beta$ , і умова (iii) виконується.

Розглянемо  $k_n$ . Нехай  $\vec{u} = G^\xi / \|G^\xi\|$  – нормований вектор похідної  $G^\xi$ . Тоді

$$\text{tr} \left( G^{\xi\xi} \left( I_q - \frac{G^{\xi T} G^\xi}{\|G^\xi\|^2} \right) \right) = \text{tr} A - \text{tr} (A \cdot \vec{u} \cdot \vec{u}^T) = \lambda_1 + \lambda_2 - \vec{u}^T A \vec{u} \geq \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_2 = \lambda_1 > 0. \quad (11)$$

Окремо розглянемо відділеність від нуля тих складових, що відповідають параметрам  $A$  і  $c$ :

$$k_n = \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t G^A \Big|_{(\xi_i, \beta_0)}; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t G^c \Big|_{(\xi_i, \beta_0)} \right] =: [k'_n; k''_n],$$

де  $t$  – ліва частина (11).

В похідній  $G^A = ((\xi^{(1)} - c_0^{(1)})^2; 2(\xi^{(1)} - c_0^{(1)})(\xi^{(2)} - c_0^{(2)}); (\xi^{(2)} - c_0^{(2)})^2)$  принаймні 2 компоненти відділені від нуля.

Отже,  $k'_n$  також відділене від нуля, що забезпечує виконання умови (v).

За теоремою 3, перший член розкладу матриці  $\hat{A}_n - A_0$  завжди буде ненульовим і навіть додатно визначеним (з врахуванням виконання умови контрастності і нерівності Коші-Буняковського). А  $k''_n$  може прямувати до нуля при  $n \rightarrow \infty$ , наприклад, якщо точки  $\xi_i$  (або їх міра  $\mu$ ) симетричні відносно центра  $c_0$ . Зокрема, при рівномірному розподілі  $\xi_i$  по еліпсу  $k''_n \approx \vec{0}$ , перший член розкладу  $\hat{c}_n - c_0$  буде нульовим (ймовірно, тоді оцінка центра  $\hat{c}_n$  виявиться конзистентною з міркувань симетрії).

Умова контрастності (con) вимагає асимптотичної відділеності  $\beta_0$  від інших точок параметричної множини – для того щоб при нульових похибках оцінка була єдиною і співпадала з  $\beta_0$ . У даному випадку різні значення параметра  $\beta$  задають різні криві. Але для знаходження еліпса потрібні чотири різні точки. Якщо  $\xi_i$  будуть приймати не більше трьох різних значень, ми не зможемо знайти  $\beta_0$  навіть по відомим  $\xi_i$ . Також ми не знайдемо асимптотичне

зміщення  $\hat{\beta}_n$ , якщо множина дійсних точок спостереження  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  має не більше трьох граничних точок. Нехай  $\mu$  – борельова міра на еліпсі  $\Gamma_{\beta_0}$ , породжена послідовністю  $\{\xi_i, i \geq 1\}$ .

*Для виконання умови (vii) необхідно і достатньо, щоб міра  $\mu$  була зосереджена більш ніж в трьох точках.*

Залишилось перевірити виконання умови (vi) про невідродженість та відділеність від нуля власних чисел матриці  $V_n$  – суми  $n$  невід'ємних матриць рангу 1. Її можна сформулювати так: середнє арифметичне  $x^T V_n x$ , де  $x$  належить одиничній сфері з центром в початку координат, що дорівнює квадрату скалярного добутку  $(G^\beta x)^2 / \|G^\xi\|^2$ , відділене від нуля. Необхідно принаймні 5 різних матриць.

*Для виконання умови (vi) необхідно і достатньо, щоб міра  $\mu$  була зосереджена не менш ніж в п'яти точках.*

У підсумку, для виконання умов (i)-(vi), міра  $\mu$  повинна бути зосереджена не менш ніж в п'яти точках, наприклад, розподілена з деякою додатною щільністю по еліпсу або його дузі.

Умови леми 5 не виконуються, оскільки  $G^\xi$  перетворюється в  $\bar{0}$  у центрі еліпса. А умови леми 6 – виконуються, отже, краще застосувати оцінки (10).

## 8. Висновки

Розглянуто оцінку ортогональної регресії у випадку неявної функціональної моделі з невідомим параметром  $\sigma$ , встановлено умови її неконзистентності, та знайдено перший член розкладу її асимптотичного відхилення. Оскільки для побудови покращеної оцінки не завжди можна беззастережно використовувати ті оцінки, що застосовувалися у випадку явної моделі, запропоновано альтернативні оцінки. В подальшому цікаво було б порівняти, які з них кращі для практичних застосувань. Також на прикладі моделі еліпсоїда проілюстровано значення умов (i)-(vi). Для подальшого уточнення оцінки потрібно поширити результати [6] на неявну модель – знайти другий член асимптотичного відхилення оцінки, та кращі оцінки  $\sigma^2, k_n, V_n$ .

1. Репетацька Г.С. Неконзистентність оцінки ортогональної регресії у векторній нелінійній моделі з похибками в змінних // Теорія ймовірності та математична статистика. – 2005. – Вип. 73 – С. 146-160. 2. Fazekas I., Kukush A.G., Zwanzig S. On inconsistency of the least squares estimator in nonlinear functional relations. Preprint. – Department of Statistics and Demography, Odense University, Denmark, 1998. 3. Fazekas I., Kukush A., Zwanzig S. Bias correction of nonlinear orthogonal regression // Ukrainian Mathematical Journal – 2001. – Vol. 56, № 8. – P. 1101-1118. 4. Fuller W.A. Measurement errors models. – Wiley, New York, 1987. 5. Phanzagl J. On the measurability and consistency of minimum contrast estimates // Metrika. –1969. –14. – P. 249-273. 6. Repetatska G. Modified orthogonal regression estimator in the quadratic errors-in-variables model // Theory of Stochastic Processes. – 2005. – Вип. 11(27), № 3-4. – P. 110-120.

Надійшла до редколегії 19.10.09

УДК 512.552

Н. Кайдан, асп.

## САГАЙДАКИ СКІНЧЕННИХ КІЛЕЦЬ

*В цій статті ми будемо розглядати правий та лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця. Буде сформульовано та доведено теорему про ланцюгові скінченні кільця.*

*In this article we consider the right and left quivers finite commutative ring. Will be formulated and prove a theorem about chain finite rings*

### 1. Вступ

Ми розглядаємо скінченні кільця з  $1 \neq 0$ . Скінченне кільце  $A$  називається розкладним, якщо  $A$  є прямим добутком двох кілець відмінних від нуля. В протилежному випадку кільце  $A$  називається нерозкладним.

Позначимо через  $R$  радикал скінченного кільця  $A$ . Будь-яке скінченне кільце  $A$  є артіновим з двох сторін кільцем і тому є напівдосконалим кільцем. Тоді правий (лівий) регулярний  $A$ -модуль  $A_A$  ( ${}_A A$ ) має наступний розклад в пряму суму нерозкладних правих (лівих) проєктивних  $A$ -модулів:  $A_A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$  ( ${}_A A = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$ ), де  $X^n$  пряма сума  $n$  копій модуля  $X$ . Модулі  $P_1, \dots, P_s$  ( $Q_1, \dots, Q_s$ ) попарно неізоморфні.

Нехай  $1 = f_1 + \dots + f_s$  буде відповідним розкладом одиниці кільця  $A$  в сумму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто  $f_i A = P_i^{n_i}$ . Тоді  ${}_A A = Af_1 \oplus \dots \oplus Af_s = Q_1^{n_1} \oplus \dots \oplus Q_s^{n_s}$  – розклад напівдосконалого кільця  $A$  в пряму суму нерозкладних проєктивних правих (лівих)  $A$  – модулів, тобто  $Af_i = Q_i^{n_i}$ , де  $Q_i$  – нерозкладний проєктивний правий  $A$  – модуль ( $i = 1, \dots, s$ ). Розглянемо двосторонній розклад Пірса кільця  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

Двосторонній розклад Пірса радикала  $R$  кільця  $A$  має вигляд:  $R = \bigoplus_{i,j} f_i R f_j$ ,  $i, j = 1, \dots, s$ .

**Пропозиція 1.** Нехай  $A = P_1^{n_1} \oplus \dots \oplus P_s^{n_s}$  – розклад скінченного кільця  $A$  в пряму суму нерозкладних проективних правих  $A$  – модулів і нехай  $1 = f_1 + \dots + f_s$  буде відповідним розкладом кільця  $A$  в пряму суму попарно ортогональних ідемпотентів, тобто  $f_i A = P_i^{s_i}$ . Тоді радикал  $R$  кільця  $A$  має двосторонній розклад Пірса наступного вигляду:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & R_{22} & \dots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & R_{ss} \end{pmatrix},$$

де  $R_{ii}$  радикал кільця  $f_i A f_i$ ,  $A_{ij} = f_i A f_j$  ( $i \neq j$ )  $i, j = 1, \dots, s$ .

Кільце  $f_i A f_i$  ізоморфне кільцю  $End_A(P_i^{s_i}) \simeq M_{n_i}(End(P_i))$ , де  $End_A(P_i) = O_i$  є локальним кільцем. Через  $M_n(B)$  позначається кільце всіх квадратних матриць порядку  $n$  з елементами кільця  $B$ .

Добре відомо, що  $rad M_{n_i}(O_i) = M_{n_i}(rad O_i)$ , де  $rad B$  є радикалом кільця  $B$ . Покладемо  $U_i = P_i/P_i R$ , тоді  $\bar{A} = A/R = U_1^{n_1} \oplus \dots \oplus U_s^{n_s}$ . Аналогічно покладемо  $V_i = Q_i/RQ_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ).

Модулі  $U_1, \dots, U_s$  ( $V_1, \dots, V_s$ ) – це всі прості праві (ліві) попарно неізоморфні  $A$  – модулі.

Нагадаємо, що напівдосконале кільце  $A$  називається зведеним, якщо фактор кільця  $A/R$  є прямим добутком тіл. Це еквівалентно тому, що  $n_1 = n_2 = \dots = n_s = 1$ .

**Пропозиція 2.** Якщо  $A$  скінченне зведене кільце, тоді факторкільце  $A/R$  є прямим добутком  $s$  скінченних полів.

Доведення випливає з теореми Веддербарна [1, с. 87].

Ми будемо розглядати правий та лівий сагайдаки скінченного кільця. Дамо означення сагайдака напівдосконалого нетерового справа кільця:

Нехай  $A$  напівдосконале нетерове справа кільце,  $P_1, \dots, P_s$  – це всі попарно неізоморфні нерозкладні праві  $A$  – модулі. Розглянемо проективне накриття  $R_i = P_i R$  ( $i = 1, \dots, s$ ), яке будемо позначати  $P(R_i)$ . Нехай

$P(R_i) = \bigoplus_{j=1}^s P_j^{t_{ij}}$ . Ми співставимо нерозкладним модулям  $P_1, \dots, P_s$  точки  $1, \dots, s$  на площині і з'єднаємо точку  $i$  з точкою  $j$ , де  $t_{ij}$  стрілка. Таку конструкцію графа назвемо правим сагайдаком, або просто сагайдаком для напівдосконалого нетерового справа кільця  $A$  і позначимо  $Q(A)$ . Аналогічно, може бути визначений і лівий сагайдак  $Q'(A)$  для напівдосконалого нетерового зліва кільця. Правий сагайдак  $Q(A)$  скінченно-вимірної алгебри  $A$  над полем  $K$  співпадає з сагайдаком Габрієля алгебри  $A$ .

Зауважимо, що сагайдак  $Q(A)$  напівдосконалого нетерового справа кільця  $A$  співпадає з сагайдаком  $Q(A/R^2)$ .

Взагалі сагайдаком  $Q$  будемо називати будь-який скінченний набір точок, які зв'язані між собою скінченним числом стрілок. Звичайно точки позначаються номерами  $1, 2, \dots, s$ . Тоді сагайдак  $Q$  задається своєю матрицею інцидентності:

$$[Q] = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1s} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{s1} & t_{s2} & \dots & t_{ss} \end{pmatrix},$$

де  $t_{ij}$  – число стрілок, які йдуть з точки  $i$  в  $j$ . У випадку, коли з вершини  $i$  немає стрілок у вершину  $j$ , то  $t_{ij} = 0$ . Якщо стрілка  $\sigma$  сагайдака  $Q$  з'єднує точку  $i$  з точкою  $j$ , то  $i$  називається початком, а  $j$  називається кінцем стрілки  $\sigma$ . Це позначимо так:  $\sigma: i \rightarrow j$ .

Стрілка  $\sigma$  сагайдака  $Q$  у якій початок і кінець співпадають, називається петлею цього сагайдака.

Два сагайдака  $Q$  і  $Q'$  називаються ізоморфними, якщо між їх точками та стрілками можна установити взаємоднозначну відповідність, при якій початки і кінці відповідних стрілок переходять друг в друга.

Неважко переконатися в тому що  $Q \simeq Q'$  тоді і тільки тоді, коли матриця інцидентності  $[Q]$  і  $[Q']$  можна перевести одне в інше одночасними перестановками одноіменних строк та столбців. Зокрема, сагайдак алгебри, визначений з точністю до ізоморфізму.

Нехай  $Q$  сагайдак. Шлях сагайдака  $Q$  – це впорядкований набір стрілок  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  такий, що кінець стрілки  $\sigma_i$  співпадає с початком стрілки  $\sigma_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, k-1$ ). Кількість стрілок  $k$  називається довжиною шляху. Початок стрілки  $\sigma_1$  називається початком шляху, а кінець стрілки  $\sigma_k$  – кінцем шляху. Будемо казати, що шлях з'єднує точку  $i$  с точкою  $j$  і записувати наступним чином:  $\sigma_1 \dots \sigma_k: i \rightarrow j$ .

Сагайдак  $Q$  називається зв'язним, якщо множину його вершин не можна розбити на дві непорожні підмножини, такі що не перетинаються і між якими немає стрілок.

В протилежному випадку сагайдак  $Q$  називається незв'язним.

**Теорема 1.** Скінченне кільце  $A$  є нерозкладним, тоді і тільки тоді, коли його сагайдак  $Q(A)$  зв'язний. [3, с. 64]

Для кожного поля  $K$  і кожного сагайдака  $Q$  ми будемо  $K$  - алгебру  $A_K(Q)$ , яка називається алгеброю шляхів сагайдака  $Q$  над полем  $K$ .

Базис простору  $A_K(Q)$  утворюватимуть всілякі шляхи сагайдака  $Q$  і набір символів  $\varepsilon_i$  (по одному для кожної точки  $i$ ). Таким чином, всякий елемент  $A_K(Q)$  однозначно записується у вигляді  $\sum_{i=1}^s c_i \varepsilon_i + \sum c_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \sigma_1 \dots \sigma_k$  (друга сума береться по всім шляхам сагайдака  $Q$ ), де  $c_i \in A_K$ ,  $c_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \in A_K$ . Символ  $\varepsilon_i$  зручно розглядати як шлях довжини 0 з початком і кінцем в точці  $i$ .

Визначимо добуток шляхів  $\alpha$  та  $\beta$ , як шлях  $\alpha\beta$ , якщо кінець  $\alpha$  співпадає з початком  $\beta$ , і як 0 – в іншому випадку. Іншими словами,

$$(\sigma_1 \dots \sigma_k)(\tau_1 \dots \tau_l) = \begin{cases} \sigma_1 \dots \sigma_k \tau_1 \dots \tau_l, & \text{якщо кінець } \sigma_k \text{ співпадає з початком } \tau_1, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_i \sigma_1 \dots \sigma_k = \begin{cases} \sigma_1 \dots \sigma_k, & \text{якщо } i \text{ – початок } \sigma_1, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\sigma_1 \dots \sigma_k \varepsilon_i = \begin{cases} \sigma_1 \dots \sigma_k, & \text{якщо } i \text{ – кінець } \sigma_k, \\ 0 & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Теорема: Для будь-якого сагайдака  $Q$  існує скінченне кільце  $A$  таке, що його сагайдак  $Q(A)$  співпадає з  $Q$ .

### 2. Сагайдаки комутативних скінченних кілець

В [1, с. 237] сформульована наступна теорема: комутативне кільце є напівдосконале тоді і тільки тоді, коли воно є скінченим прямим добутком комутативних локальних кілець.

З цієї теореми випливає наступна структурна теорема для скінченних комутативних кілець.

**Теорема 2.** Комутативне скінченне кільце є скінченим прямим добутком комутативних локальних скінченних кілець. Навпаки, всі кільця такого вигляду є комутативними скінченими кільцями.

Для сагайдака нерозкладного скінченного комутативного кільця  $A$  можуть бути такі можливості:

- 1)  $Q(A)$  є одна вершина без стрілок;
- 2)  $Q(A)$  є одна вершина з однією петлею;
- 3)  $Q(A)$  є одна вершина з  $n$  петлями;

У першому випадку кільце  $A$  є полем, у другому випадку кільце  $A$  є однорядним кільцем, у третьому випадку лівий сагайдак є однією вершиною з  $n$  петлями.

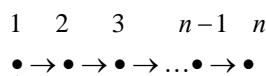
Звідси випливає така теорема: правий і лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця співпадають.

### 3. Частинні випадки

Нам знадобиться наступна теорема:

**Теорема 3.** Напівдосконале нетерове кільце  $A$  є напівланцюговим тоді і тільки тоді, коли факторкільце  $A/R^2$  є напівланцюговим артіновим кільцем. [3, с. 313]

**Теорема 4.** Нехай  $A$  - скінченне кільце,  $R$  – його радикал. Припустимо, що сагайдак  $Q(A)$  кільця  $A$  є простим циклом  $C_n$ :



Тоді кільце  $A$  є напівланцюговим.

**Доведення:** Доведемо, що факторкільце  $A/R^2$  є напівланцюговим. Оскільки  $Q(A) = Q(A/R^2)$ , то сагайдак  $Q(A/R^2)$  кільця  $A/R^2$  є простим циклом  $C_n$ . Тоді кільце  $A/R^2$  нерозкладне і його двобічний пірсонський розклад має вигляд:

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & D_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{n-1} & D_{n-1n} \\ D_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 & D_n \end{pmatrix}$$

і  $D_{12} = x_{12}D_2, \dots, D_{n-1n} = x_{n-1n}D_n, D_{n1} = x_{n1}D_1$ . Кільця  $D_1, \dots, D_n$  є тілами (тобто кільцями без ненульових дільників нуля). Всі ці кільця скінченні, оскільки кільце  $A$  скінченне. Таким чином за теоремою Веддербарга, кільця  $D_1, \dots, D_n$  є скінченними полями.

Множини  $D_{i+1}, i = 1, \dots, n-1$  і  $D_{n1} \in D_i - D_{i+1}$  – бімодулями при  $i = 1, \dots, n-1$  і  $D_{n1} \in D_n - D_1$  – бімодулем.

При  $i = 1, \dots, n-1$  відображення  $\sigma_i$ , що визначене за правилом  $\alpha x_{i+1} = x_{i+1} \alpha^{\sigma_i}$ , є мономорфізмом полів і ми отримуємо ланцюг вкладень:

$$D_1 \xrightarrow{\sigma_1} D_2 \xrightarrow{\sigma_2} D_3 \xrightarrow{\sigma_3} \dots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} D_n.$$

Відображення  $\sigma_n : \alpha x_{n1} = x_{n1} \alpha^{\sigma_n}$  є мономорфізмом  $\sigma_n : D_n \rightarrow D_1$

Добуток відображень  $\sigma_{n-1}, \dots, \sigma_1$  дає мономорфізм  $D_1 \rightarrow D_n$ . Оскільки кількість елементів  $b$  в  $D_1$  і  $D_n$  скінченне, то кількість елементів  $b$  в  $D_1$  менше, ніж кількість елементів  $b$  в  $D_n$ . Але, так як  $\sigma_n : D_n \rightarrow D_1$  мономорфізм, то кількість елементів  $b$  в  $D_n$  не перебільшує кількість елементів  $b$  в  $D_1$ . Тоді всі відображення  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  являються ізоморфізмами, всі поля  $D_1, \dots, D_n$  ізоморфні. Тому  $A/R^2$  є напівланцюговим справа і зліва кільцем.

За теоремою 3 скінченні кільця  $A$  і  $A/R^2$  є напівланцюгові одночасно. Таким чином, якщо сагайдак  $Q(A)$  скінченного кільця  $A$  є простим циклом впливає, що кільце  $A$  є напівланцюговим.

#### 4. Висновки

У роботі було розглянуто правий та лівий сагайдаки скінченного комутативного кільця При цьому було сформульовано и доведено теорему, яка є узагальненням теореми О.О Нечаева про ланцюгові скінченні кільця.

1. Дрозд Ю.А., Кириченко В.В Конечномерные алгебры. – Киев: Изд. "Вища школа", 1980. – 192 с. 2. Hazewinkel M., Gubareni N and Kirichenko V.V., Algebras, rings and modules. Vol. 1. Mathematics and its Applications, 575. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. 3. Hazewinkel M., Gubareni N and Kirichenko V.V, Algebras, rings and modules. Vol. 2. Mathematics and its Applications, 586. Springer, Dordrecht, 2007.

Надійшла до редколегії: 17.11.09

УДК 532.5

О. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, О. Хорошилов, канд. фіз.-мат. наук

### ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГОДОГРАФА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ПРОСТОРОВОГО ОБТІКАННЯ КОНІЧНИХ ТІЛ ІЗ ВДУВОМ

*При дослідженні надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, для попереднього аналізу початкових параметрів застосовується графічна інтерпретація отриманих даних у площині годографа вектора швидкості.*

*At research of supersonic flow of unaxisymmetrical conical porous bodies with surface mass transfer for the preliminary analysis of initial parameters the graphic interpretation of the obtained data in a hodograph plane of velocity vector will be used*

#### 1. Вступ

На основі двошарової моделі високошвидкісного обтікання плоских пористих тіл при наявності інтенсивного поверхневого масообміну [3, 8] була розглянута низка двовимірних задач для надзвукового та гіперзвукового потоків, сформульовані й розв'язані відповідні крайові задачі [1, 2, 4]. Трьохвимірною математичною моделлю надзвукового обтікання невісесиметричних конічних пористих тіл, скрізь поверхню яких здійснюється сильний вдув газу, побудована в [5], де запропонований метод отримання повного розв'язку задачі базується на ідеї послідовного визначення газодинамічних та геометричних параметрів в областях зовнішнього і внутрішнього потоків і наступного зрощування цих локальних розв'язків на поверхні контактної розриву за допомогою умови неперервності тиску. При цьому, в кожній області течії крайова задача зводиться до задачі типу Коші з початковими умовами, що містять довільні параметри, остаточне значення яких встановлюється після інтегрування системи рівнянь та виконання відповідних граничних умов. Основою алгоритму є два ітераційних процесу, один з яких вкладений у другий. На етапі проведення чисельних розрахунків важливим стає фактор вдалого визначення початкових значень довільних параметрів крайової задачі, що суттєво впливає на швидкість збіжності ітераційних процесів.

В даній роботі розглядається підхід, у якому для пришвидшення збіжності ітераційних процесів використовується графічна інтерпретація параметрів вісесиметричного конічного потоку у площині годографа вектора швидкості, що дозволяє виявити межі області існування розв'язку та проаналізувати їх залежність від низки вихідних параметрів задачі.



2

Схема течії, що розглядається, наведена на рис. 1. В роботі [5] загальний розв'язок задачі будується як суперпозиція розв'язків, що відповідають вісесиметричному обтіканню кругового конуса та збуренням потоку, які пов'язані зі просторовим характером течії. Таким чином, в процесі розв'язання загальної трьохвимірної задачі проводиться дослідження вісесиметричного потоку і визначається відповідний розв'язок. Аналіз отриманих результатів показав, що графічна інтерпретація розв'язку в площині годографа вектора швидкості має окремий інтерес.

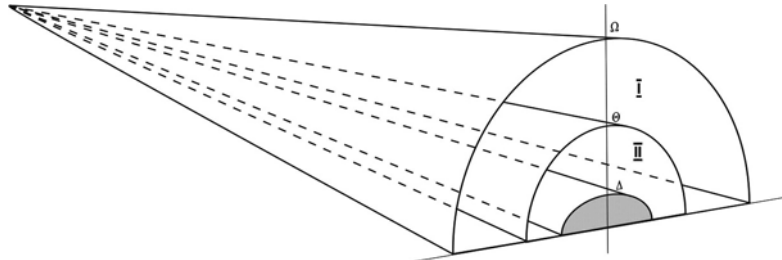


Рис. 1. Схема течії

Відповідно до математичної моделі [5] газодинамічні параметри задачі представлені у вигляді співвідношень:

$$f = f_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l f_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m f_m \sin m\varphi, \quad f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \\ S \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

де Індексом "0" позначені функції, які є розв'язком основної вісесиметричної течії, а індексами  $l$  і  $m$  - функції, що характеризують збурення вісесиметричного потоку.

Рівняння поверхонь пористого конуса  $\Delta$ , контактної розриву  $\Theta$  і стрибка ущільнення  $\Omega$  можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Delta_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m \sin m\varphi, \\ \Theta &= \Theta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Theta_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Theta_m \sin m\varphi, \\ \Omega &= \Omega_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \Omega_l \cos l\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m \sin m\varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\Delta_0, \Theta_0, \Omega_0$  – відповідні поверхні, що мають круглий поперечний перетин.

Вихідною системою диференціальних рівнянь є система рівнянь Ейлера. Вісесиметричний потік описується нелінійною системою нульового наближення:

$$\begin{aligned} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi_N} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \eta_0 u_0 v_0 &= 0, \\ v_0 \frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma p_0 \frac{dv_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \gamma p_0 (v_0 + 2\eta_0 u_0) &= 0, \\ \frac{dp_0}{d\xi_N} - \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\xi_N} &= 0, \\ u_0^2 + v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} D \end{aligned}$$

де  $N = I, II$  – номер області течії,  $\sigma_0 = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0 (1 + \eta_0^2)}$ ,  $\eta_0 = \Theta_0 + \xi (\Delta_0 - \Theta_0)$ ,  $D = \frac{C_{kp\infty}}{C_{kpbd}}$ .

На стрибку ущільнення записуються співвідношення, які витікають зі законів збереження маси, імпульсу та енергії [8], на поверхні контактної розриву – умови непротікання і неперервності тиску, на поверхні конуса – умови, що задають параметри вдуву газу [5].

Тестові чисельні розрахунки проведено для вісесиметричних конічних потоків, а отримані розв'язки перенесено у площину годографа вектора швидкості.

Далі наведені деякі приклади, які ілюструють сутність розробленого підходу.

Поле швидкостей та геометричні характеристики внутрішнього потоку для випадку  $M_\infty = 2, p_k = 1.0$  зображені на рис. 2. Криві 4, 3, 2 та 1 є геометричним місцем кінців вектора швидкості  $U_\Delta$  газу, що вдувається, на поверхні пористого конуса, коли  $\Delta = 9^0, 10^0, 12^0, 15^0$  відповідно. Крива 5 – це геометричне місце кінців вектора швидкості  $U_\Theta$  на

поверхні розподілу для усіх вказаних вище значень  $\Delta$ . Таким чином, лінія 5 відповідає параметричній сім'ї кривих 1-4, де параметром є величина  $\Delta$ .

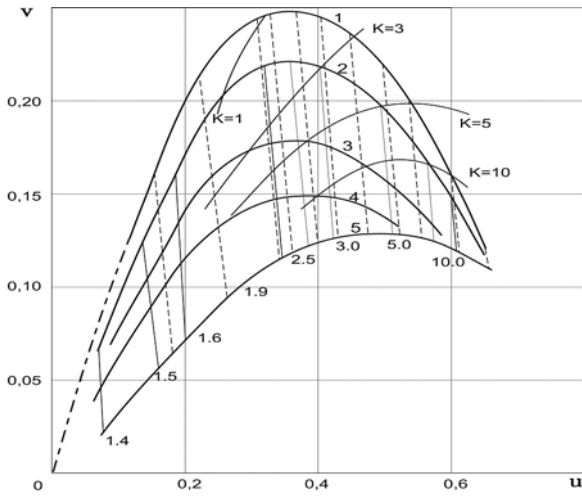


Рис. 2. Поля швидкостей та геометричні параметри

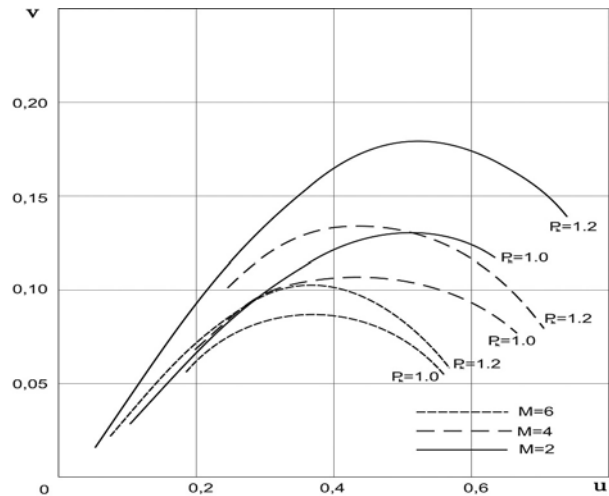


Рис. 3. Залежність швидкості на конусі від параметрів  $M_\infty$  та  $p_k$

Крім цього, на рис. 2 зображена ще одна сім'я кривих, параметром для якої є  $k = ctg\beta$ . Розв'язок задачі у внутрішній області наведений у вигляді ліній, що мають незначну кривизну, розташовані майже вертикально й з'єднують відповідні точки кривих 1-4 та 5. Треба вказати, що одна точка на кривій швидкості  $U_\Theta$  має відповідну їй точку на кожній з ліній 1-4 із різними значеннями  $k$ . Праворуч криві швидкості на конусі асимптотично дотикаються лінії 5, що визначає граничний випадок, коли  $k \rightarrow \infty$ , тобто здійснюється вдвугазу паралельно поверхні тіла.

З допомогою рис. 2 зручно розглянути область існування розв'язку при заданих  $M_\infty, p_k, \Delta, k$ . Вочевидь, що зверху область обмежена кривою швидкості на поверхні розподілу. При цьому точка перетину вказаних ліній є образом граничного випадку, коли  $k \rightarrow \infty$ . Ліворуч область існування розв'язку обмежена умовами, що витікають з припущень, які лежать у основі моделі, що розглядається.

На рис. 2 наочно продемонстровано вплив геометричних параметрів  $\Delta$  і  $k$  на картину течії. Дійсно, за допомогою графічної інтерпретації розв'язків легко визначити, наприклад, що мінімальної швидкості газу, який вдвугазується, можна досягти шляхом збільшення  $\Delta$  при одночасному зменшенні  $k$  або навпаки.

На рис. 3 зображена параметрична залежність кривих швидкості на поверхні розподілу від величин  $M_\infty$  і  $p_k$ . Вектор швидкості на поверхні розподілу збільшується із зменшенням  $M_\infty$  або із збільшенням  $p_k$ .

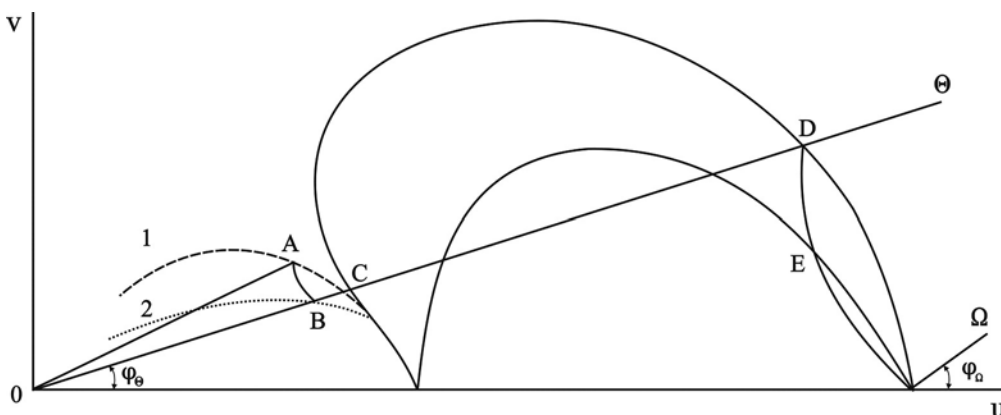


Рис. 4. Розв'язок задачі у площині годографа вектора швидкості

Загальна картина течії у областях I й II зображена на рис. 4, де крива 1 – це геометричне місце кінців вектора швидкості на поверхні конуса при  $M_\infty = 2, p_k = 1.0, \Delta = 9^\circ$ , а крива 2 є геометричним місцем кінців вектора швидкості на поверхні розподілу. Крім того, зображена ударна поляра і яблукоподібна крива для зовнішнього потоку [6] із значенням числа  $M_\infty = 2$ .

У цьому випадку графічно розв'язок задачі визначається наступним чином. На кривій 1 визначається точка A перетину з променем OA, що проведений під кутом  $\theta = \Delta + \beta$  до осі u. Вектор OA визначає швидкість газу, що вдвугазується з поверхні конусу під кутом  $\beta$  до останньої. Поле швидкостей у внутрішній області визначається кривою AB, яка перетинає лінію 2 у точці B. При цьому вектор OB відповідає вектору швидкості на поверхні розподілу  $\Theta$ ,

а кут між променем  $OB$  та віссю  $u$  дорівнює куту  $\Delta$ . Продовження променя  $OB$  дає дві точки перетину із яблукоподібною кривою: точку  $C$  у дозвуковій області течії й точку  $D$  для надзвукового потоку за стрибком ущільнення. Розв'язок у області II визначається кривою  $DE$ , а відрізок  $OE$  відповідає вектору швидкості за стрибком ущільнення [7].

На завершення, треба вказати, що наявність декількох незалежних параметрів задачі  $(M_\infty, p_k, \Delta, k)$  дає можливість надати геометричну інтерпретацію розв'язку у тривимірному просторі. Для цього має сенс використати дві комбінації незалежних параметрів:  $M_\infty, \Delta, k$  та  $p_k, \Delta, k$ . У такому випадку до двох осей  $u, v$  площини годографа швидкості має додаватися третя, яка відповідає значенням  $M_\infty$  або  $p_k$ .

### 3. Висновки

З метою прискорення збіжності ітераційних процесів при проведенні чисельних розрахунків запропоновано графічну інтерпретацію отриманих для вісесиметричної течії результатів у площині годографа вектора швидкості, що дозволило виявити та проаналізувати залежність області існування розв'язку від вихідних параметрів задачі. За допомогою даного підходу наочно показано вплив деяких геометричних параметрів на картину течії.

1. Антонов А.М., Зайцев А.В. Расчет распределения давления по пористым оболочкам вращения при динамическом взаимодействии их с гиперзвуковым потоком газа // Динамика и прочность тяжелых машин, 1980, вып.5, с.64-69. 2. Антонов А.М., Закревский В.А. Исследование влияния донного среза при степенном законе вдува // Прикладная механика, 1979, вып.15, №8, с.64-69. 3. Антонов А.М., Комашенко А.П. Некоторые автомодельные задачи о сильном вдуве газа через пластинку в сверхзвуковом потоке // Прикладная механика, 1969, т.5, вып.10, с.111-114. 4. Зайцев О.В., Хорошилов О.В. Про метод розв'язання задач із вільною границею // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика і механіка", 2002, вип.7, с.47-53. 5. Зайцев О.В., Хорошилов О.В., Черній Д.І. Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання кінцевих тіл із вдувом // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія "Математика і механіка", 2005, №13, С.54-59. 6. Коцин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.1. М., 1968, 583с. 7. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа, М., 1970, 904с. 8. Матвеева Н.С., Нейланд В.Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ, 1970, т.1, №5, с.13-22.

Надійшла до редколегії 15.12.09

УДК 539.3

В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, С. Папков, канд. фіз.-мат. наук, Ю. Токовий, канд. фіз.-мат. наук

## НЕСКІНЧЕННІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ ПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ ТІЛ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

У рамках розвитку алгоритму удосконаленої редукції при застосування методу суперпозиції до розв'язання двовимірних задач теорії пружності для тіл скінчених розмірів запропоновано єдиний підхід визначення асимптотичного значення невідомих у нескінчених системах лінійних алгебричних рівнянь, до яких зводяться такого класу задач. Застосування підходу проілюстровано на двовимірній задачі для прямокутної області та вісесиметричній задачі для суцільного циліндра скінченої довжини. Показано, застосування запропонованого підходу дозволяє досягати високої точності обчислень шуканих величин при невеликій кількості рівнянь та невідомих у приведених скінчених системах.

To solve the two-dimensional problems of elasticity for elastic bodies of finite dimensions, a general approach for determination of asymptotic value of coefficients in infinite systems of linear algebraic equations is proposed in order to develop the advanced reduction algorithm within the framework of superposition method. The approach is illustrated with analysis of two cases: i) two-dimensional problem for a rectangle and ii) axially-symmetric problem for a solid finite cylinder. It is shown that application of the proposed approach yields a good accuracy by small number of coefficients and equations in basic finite systems.

### 1. Вступ

Серед аналітичних методів, що застосовуються для розрахунків напружено-деформованого стану пружних обмежених тіл з кутковими точками або ребрами (згин жорстко закріпленої по контуру прямокутної пластини, довгої прямокутної призми чи тонкої пластини під дією планарного силового чи теплового навантаження, вісесиметричного навантаження скінченого циліндра, тощо) метод суперпозиції виділяється як один з найбільш відомих та ефективних. Історія розвитку цього методу нараховує вже понад півтора століття (від знаменитої задачі про рівновагу пружного паралелепіпеда, сформульованої Г. Ляме у лекціях 1852 р.) і пов'язана з іменами видатних математиків Е. Мат'є та Б.М. Кояловича, інженера-кораблебудівника І.Г. Бубнова, механіків Г. Генкі, К.Е. Інґліса, С.П. Тимошенка та багатьох інших. Зокрема, значні досягнення у запровадженні методу суперпозиції отримано завдяки працям В.Т. Грінченка та А.Ф. Улітка [4,5]. Для плоского та вісесиметричного випадків такі задачі можуть бути зведені до класичної бігармонічної задачі про визначення в області бігармонічної функції (Ері або Лява, відповідно) при заданих на границі значеннях самої функції та її нормальної похідної [11]. Ретельні ретроспективні огляди та аналіз праць у цьому напрямку наведено, зокрема, в [10, 13].

Основна ідея методу суперпозиції полягає у побудові загального розв'язку бігармонічного рівняння у вигляді суми розвинень у ряди Фур'є та Бесселя-Діні за повними системами функцій в кожному з координатних напрямків з довільними двома нескінченими послідовностями коефіцієнтів  $X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  та  $Y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ . Виконання таким розв'язком заданих крайових умов призводить до парної нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь загального вигляду

$$\begin{cases} X_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} Y_j + b_n, & n = 1, 2, \dots \\ Y_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} X_n + d_j, & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

с додатними коефіцієнтами  $a_j^{(n)} > 0$ ,  $c_n^{(j)} > 0$ .

Така система може бути регулярною, якщо

$$\varphi_n = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} > 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \psi_j = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} > 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2)$$

або навіть цілком регулярною, коли

$$\varphi_n \geq \theta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \psi_j \geq \theta, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \theta > 0. \quad (3)$$

Згідно загальної теорії нескінченних систем [6] (значний доробок до якої у вивчення питань єдності розв'язку та збіжності алгоритма простої редукції вніс П.С. Бондаренко [1-3], який працював у Київському університеті протягом тривалого часу) регулярна система має єдиний обмежений (так званий, головний) розв'язок, якщо виконані обмеження  $|b_n| \leq C\varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |d_j| \leq C\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots$ , на поведінку вільних членів. Аналогічно, повністю регулярна система володіє головним розв'язком, якщо виконані обмеження  $|b_n| \leq C, \quad n = 1, 2, \dots, \quad |d_j| \leq C, \quad j = 1, 2, \dots$ , на поведінку вільних членів. Тут  $C$  – деяка стала.

Традиційний спосіб розв'язання нескінченної системи (1) полягає у застосуванні методу простої редукції. Згідно з цим методом, у перших  $N$  рівняннях першої стрічки у сумах по  $j$  залишається  $J$  перших невідомих  $Y_j^{(s)}$ , а у перших  $J$  рівняннях другої стрічки у сумах по  $n$  залишається  $N$  перших невідомих  $X_n^{(s)}$ . Решта ж рівнянь та невідомих для  $n > N$  та  $j > J$  відкидається. Скінченна система з  $N + J$  рівнянь розв'язується у будь-який спосіб (Фур'є, який перший запропонував такий підхід, свою конкретну систему розв'язав явно, а Б.М. Коялович [7] показав, що метод послідовних наближень є збіжним для типової системи при розгляді задачі про прогин жорстко защемленої прямокутної пластинки). При цьому доведено [6], що для регулярної та повністю регулярної систем, метод простої редукції збігається до головного розв'язку

$$X_n^{(s)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} X_n, \quad Y_j^{(s)} \xrightarrow{J \rightarrow \infty} Y_j. \quad (4)$$

Однак, при такому способі розв'язання нескінченної системи (1) завжди маємо

$$X_n = \begin{cases} X_n^{(s)}, & n = 1, 2, \dots, N, \\ 0, & n > N, \end{cases} \quad Y_j = \begin{cases} Y_j^{(s)}, & j = 1, 2, \dots, J, \\ 0, & j > J. \end{cases} \quad (5)$$

З іншого боку, відомо [4], що аналіз поля напружень в околі куткових точок для прямокутника або ребер для циліндра вимагає асимптотики коефіцієнтів  $X_n$  при  $n \rightarrow \infty$  та  $Y_j$  при  $j \rightarrow \infty$  в системі (1). Очевидно, що метод простої редукції за умови (5) принципово не може дати відповіді на таке питання. Тому метод простої редукції виявляється [4] недостатньо ефективним для обчислення напружень і призводить в околах куткових точок (ребер) до неусувної похибки для довільних (як завгодно великих) значень  $N$  та  $J$ .

Видатний математик Б.М. Коялович розвинув [8] спеціальну теорію лімітант, яка дозволила встановити характерну асимптотичну поведінку невідомих  $X_n$  та  $Y_j$  у нескінченних системах

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = G = \text{const} \neq 0, \quad (6)$$

що пояснює причину недоліку алгоритму простої редукції.

З огляду на закон асимптотичних виразів (6), важливим питанням у реалізації методу суперпозиції є визначення константи  $G$ , що дає можливість застосувати алгоритм удосконаленої редукції й тим самим уникнути ускладнень з визначенням розв'язків поблизу кутів. Традиційний підхід [4] впровадження алгоритму удосконаленої редукції полягає у реалізації припущення

$$X_n = X_N, \quad n > N, \quad Y_j = Y_J, \quad j > J \quad (7)$$

при врахуванні нескінченних сум у перших  $N + J$  та  $N + J$  рівняннях. Після розв'язання скінченної системи, яка відповідає системі (1), значення  $G$  визначається за формулою

$$G = \frac{1}{2}(X_N + Y_J). \quad (8)$$

Ґрунтуючись на законі (6), Б.М. Коялович запропонував [8] (з посиланням на роботу І.Г. Бубнова 1902 р.) дещо інший підхід врахування асимптотичної поведінки невідомих. Поклавши

$$X_n = G + x_n, \quad Y_j = G + y_j, \quad (9)$$

де

$$x_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad y_j = o(1), \quad j \rightarrow \infty, \quad (10)$$

(більш точна оцінка наведена в [13]), систему (1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(n)} y_j - G\varphi_n + b_n, & n = 1, 2, \dots, \\ y_j = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(j)} x_n - G\psi_j + d_j, & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$

і вже таку регулярну (повністю регулярну) систему розв'язувати методом простої редукції.

Важливе з теоретичної та практичної точки зору питання було сформульоване Б.М. Кояловичем [8, с. 163] щодо можливості визначення величини  $G$  *a priori*, тобто до розв'язування нескінченної систем (1) або (11). Загальні міркування з цього питання для випадку плоскої задачі для прямокутника містить стаття [12].

Метою даної роботи є отримання таких співвідношень для визначення величини  $G$  у рамках плоскої задачі теорії пружності для прямокутної області та вісесиметричної задачі для суцільного циліндра скінченної довжини, які дозволяють здійснювати надійний розрахунок напружено-деформованого стану вказаних областей, включно з околами кутових точок.

## 2. Розв'язування бігармонічних крайових задач

### 2.1 Задача теорії пружності для прямокутника

За відсутності масових сил плоска задача теорії пружності у прямокутній області  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$  зводиться завдяки співвідношенням [11]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

до розв'язання однорідного бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 U = 0 \quad (13)$$

для функції напружень Ері  $U(x, y)$ . Тут  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – двовимірний оператор Лапласа в прямокутній системі координат.

Крайові умови для системи статично зрівноважених зовнішніх зусиль (для спрощення подальших викладок розглядаємо випадок симетричного нормального навантаження) мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_x(\pm a, y) &= q(y), \quad \tau_{xy}(\pm a, y) = 0, \quad -b \leq y \leq b, \\ \sigma_y(x, \pm b) &= p(x), \quad \tau_{xy}(x, \pm b) = 0, \quad -a \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (14)$$

Крайова задача (13), (14) становить важливий частковий випадок славетної задачі Ляме про рівновагу пружного паралелепіпеда під дією довільної системи нормальних навантажень на його гранях. Сам Ляме вважав цю проблему такою ж складною як і задачу трьох тіл у небесній механіці (тепер здається, що він недооцінив труднощі другої задачі), і тому під його впливом Паризька Академія наук у 1846 році оголосила конкурс на здобуття *Grand Prix de Mathematiques* – золоті медалі та премії у 3000 франків. Цей конкурс повинен був визначити переможця у 1848 році, але був тричі продовжений на роки 1853 (поряд з великою теоремою Ферма!), 1857 та 1861, та нарешті у 1858 році був змінений на іншу, більш просту задачу.

Вираз для функції напружень Ері має вигляд [10, 12]

$$\begin{aligned} U(x, y) &= A_0 x^2 + B_0 y^2 + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X_n}{\alpha_n^2} \left[ \left( b \operatorname{ch} \alpha_n b + \frac{1}{\alpha_n} \right) \frac{\operatorname{ch} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n b} - y \frac{\operatorname{sh} \alpha_n y}{\operatorname{sh} \alpha_n b} \right] \cos \alpha_n x - \\ &- a \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{Y_j}{\beta_j^2} \left[ \left( a \operatorname{ch} \beta_j a + \frac{1}{\beta_j} \right) \frac{\operatorname{ch} \beta_j x}{\operatorname{sh} \beta_j a} - x \frac{\operatorname{sh} \beta_j x}{\operatorname{sh} \beta_j a} \right] \cos \beta_j y \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\alpha_n = n\pi/a$ ,  $\beta_j = j\pi/b$ ;  $A_0, B_0, X_n, n = 1, 2, \dots, Y_j, j = 1, 2, \dots$ , – невідомі коефіцієнти. Виразивши компоненти тензора напружень через функцію (15) за допомогою співвідношень (12), їх слід підкорити крайовим умовам (14), попередньо розвинувши функції  $p(x)$  та  $q(y)$  у ряди Фур'є

$$p(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p_n \cos \alpha_n x, \quad q(y) = q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j q_j \cos \beta_j y,$$

де

$$p_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a p(x) dx, \quad p_n = \frac{(-1)^n}{a} \int_{-a}^a p(x) \cos \alpha_n x dx, \quad q_0 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b q(y) dy, \quad q_j = \frac{(-1)^j}{b} \int_{-b}^b q(y) \cos \beta_j y dy.$$

Сталі  $A_0$  та  $B_0$  визначаються явно

$$2A_0 = p_0, \quad 2B_0 = q_0, \quad (16)$$

і відповідають постійному несамозрівноваженому навантаженню на торцях прямокутника.

Коефіцієнти рядів Фур'є  $X_n$  та  $Y_j$  визначаються з нескінченної системи

$$\begin{cases} X_n b \Delta(\alpha_n b) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4\alpha_n^3}{(\beta_j^2 + \alpha_n^2)^2} - \alpha_n p_n, & n = 1, 2, \dots, \\ Y_j a \Delta(\beta_j a) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\beta_j^3}{(\alpha_n^2 + \beta_j^2)^2} + \beta_j q_j, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (17)$$

де  $\Delta(\xi) = \operatorname{cth} \xi + \frac{\xi}{\operatorname{sh}^2 \xi}$ . Використавши значення суми

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\lambda^3}{(\lambda^2 + \mu_i^2)^2} = h\Delta(\lambda h) - \frac{2}{\lambda}, \quad \mu_i = \frac{i\pi}{h}, \quad (18)$$

приходимо до висновку, що система (17) є регулярною, причому згідно (2)

$$\varphi_n = \frac{2}{\alpha_n b \Delta(\alpha_n b)} = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \psi_j = \frac{2}{\beta_j a \Delta(\beta_j a)} = O(j^{-1}), \quad j \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Саме система (17) (яка при деякому конкретному навантаженні виявляється тотожною для задачі про згин жорстко защемленої прямокутної пластинки) і була предметом детального дослідження, здійсненого Б.М. Кояловичем. У своїй роботі [7] він довів, що для системи (17) сходиться метод послідовних наближень, пізніше [8], він розвинув спеціальну теорію лімітантів, яка дозволила довести справедливості закону асимптотичних виразів (6) для поведінки невідомих з великими номерами.

**2.2. Вісесиметрична задача для суцільного пружного циліндра скінченної довжини**

У випадку вісесиметричного навантаження скінченного пружного циліндра  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $-h \leq z \leq h$  відповідна задача теорії пружності зводиться до бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad (20)$$

для бігармонічної функції Лява [9]  $\chi(r, z)$ , де вісесиметричний оператор Лапласа у циліндричній системі координат

$$(r, \theta, z) \text{ має вигляд } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

При цьому компоненти тензора напружень  $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$  виражаються через функцію  $\chi(r, z)$  співвідношеннями:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left( (2 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (1 - \sigma) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad (21)$$

в яких через  $\sigma$  позначено коефіцієнт Пуассона.

Для симетричного відносно площини  $z = 0$  навантаження циліндра лише нормальними (для спрощення викладок) зусиллями крайові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_r(a, z) &= f(z), \quad \tau_{rz}(a, z) = 0, \quad -h \leq z \leq h, \\ \sigma_z(r, \pm h) &= g(r), \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (22)$$

Побудова розв'язку бігармонічного рівняння в вісесиметричному випадку, що підходить для задоволення усіх крайових умов (20), можна здійснювати у різний спосіб. Ми застосуємо підхід [15], що ґрунтується на використанні функції Лява, вираз для якої вибираємо у вигляді

$$\chi(r, z) = B_0 z^3 + D_0 r^2 z + a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n X_n R_n(r) \frac{\sin k_n z}{k_n^4} + h \sum_{j=1}^{\infty} Y_j Z_j(z) \frac{J_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^4 J_0(\lambda_j a)},$$

де

$$R_n(r) = k_n r \frac{I_1(k_n r)}{I_1(k_n a)} - \left( 2 - 2\sigma + k_n a \frac{I_0(k_n a)}{I_1(k_n a)} \right) \frac{I_0(k_n r)}{I_1(k_n a)}, \quad Z_j(z) = (2\sigma + \lambda_j h \operatorname{cth} \lambda_j h) \frac{\operatorname{sh} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h} - \lambda_j z \frac{\operatorname{ch} \lambda_j z}{\operatorname{sh} \lambda_j h},$$

$k_n = n\pi/h$ ;  $\lambda_j > 0$  – корінь рівняння  $J_1(\lambda_j a) = 0$ ,  $J_0$ ,  $J_1$  і  $I_0$ ,  $I_1$  – відповідно звичайні та модифіковані функції Бесселя першого роду нульового та першого порядків.

Визначення напружень згідно зі співвідношеннями (21) та задоволення ними крайових умов (22) призводить до скінченної системи

$$6\sigma B_0 + 2(2\sigma - 1)D_0 = f_0, \quad 6(1 - \sigma)B_0 + 4(2 - \sigma)D_0 = g_0$$

для сталих  $B_0$  та  $D_0$ , що відповідають несамозрівноваженим навантаженням, а також до нескінченної системи

$$\begin{cases} X_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \frac{4k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = f_n, & n = 1, 2, \dots, \\ Y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = -g_j, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (23)$$

де

$$P_n = a^2 \left( \frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} - 1 \right) + 2 \frac{\sigma - 1}{k_n^2} > 0, \quad \Delta_j = \frac{h}{\lambda_j} \left( \operatorname{cth} \lambda_j h + \frac{\lambda_j h}{\operatorname{sh}^2 \lambda_j h} \right) > 0,$$

$$f_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(z) dz, \quad g_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a r g(r) dr, \quad f_n = \frac{(-1)^n}{h} \int_{-h}^h f(z) \cos k_n z dz, \quad g_j = \frac{2}{a^2} \int_0^a r g(r) \frac{J_0(\lambda_j r)}{J_0(\lambda_j a)} dr.$$

Як і в попередньому випадку, можна довести [4], що система (23) є регулярною, володіє єдиним обмеженим розв'язком для неперервних навантажень  $f(z)$  та  $g(r)$  і для неї справедливий закон асимптотичних виразів (6).

### 3. Визначення значення сталої $G$

#### 3.1 Задача для прямокутника

У термінах невідомих  $x_n, y_j, G$  з використанням суми (18) нескінченна система (17) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_n b \Delta(\alpha_n b) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{4\alpha_n^3}{(\beta_j^2 + \alpha_n^2)^2} - G \frac{2}{\alpha_n} - \alpha_n p_n, & n = 1, 2, \dots, \\ y_j a \Delta(\beta_j a) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{4\beta_j^3}{(\alpha_n^2 + \beta_j^2)^2} - G \frac{2}{\beta_j} + \beta_j q_j, & j = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (24)$$

що конкретизує вигляд системи (11).

Пропонується два способи отримання додаткового рівняння для визначення  $G$ .

У першому способі розділимо першу стрічку системи (24) на  $\alpha_n$  і просумуємо по  $n$  від 1 до нескінченності. Аналогічно, розділимо другу стрічку системи (24) на  $\beta_j$  просумуємо по  $j$  в тих же межах. Ці операції допустимі згідно з асимптотичною поведінкою (10) невідомих  $x_n$  та  $y_j$ . Такою же законною є зміна порядку підсумовування у правих частинах отриманих рівнянь. Для неперервних навантажень маємо  $p_n = O(n^{-2}), n \rightarrow \infty$ , та  $q_j = O(j^{-2}), j \rightarrow \infty$ , і тому всі операції є допустимими.

Використовуючи значення сум

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\mu_i^2}{(\lambda^2 + \mu_i^2)} = h \Delta(\lambda h) - \frac{2h^2}{\text{sh}^2 \lambda h}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i^2} = \frac{h^2}{6}, \quad (25)$$

та додавши два отримані рівняння, приходимо до одного рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{2b^2}{\text{sh}^2 \alpha_n b} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{2a^2}{\text{sh}^2 \beta_j a} + G \frac{a^2 + b^2}{3} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \quad (26)$$

Права частина (26) дорівнює, згідно з розвиненням навантажень  $p(x)$  та  $q(y)$  в ряди Фур'є, величині  $(q(b) - q_0) - (p(a) - p_0)$ . Можна показати [10], що рівняння (26) виражає значення різниці головних напружень  $\sigma_x(a, b) - \sigma_y(a, b)$  у кутовій точці, яка задається крайовими умовами (14). Таким чином, рівняння для  $G$  має чіткий механічний зміст. Відзначимо, що коефіцієнти при  $x_n$  та  $y_j$  у правій частині (26) спадають за експоненціальним законом, як  $\exp(-2n)$  та  $\exp(-2j)$ , відповідно. Тому, декілька перших невідомих (які надійно визначаються при розв'язанні системи (24) методом простої редукції) дають дуже стабільне значення для  $G$ .

Другий спосіб визначення рівняння для  $G$  полягає в тому, що перша стрічка системи (24) ділиться на  $\alpha_n^3$ , а друга – на  $\beta_j^3$ , та проводиться підсумовування по  $n$  та  $j$ . Використавши значення суми (18), після нескладних перетворень, отримуємо рівняння

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{2}{\alpha_n^4} + \sum_{j=1}^{\infty} y_j \frac{2}{\beta_j^4} + G \frac{a^4 + b^4}{45} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{\beta_j^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\alpha_n^2}. \quad (27)$$

Використавши значення суми

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\cos \mu_j z}{\mu_i^2} = \frac{3z^2 - h^2}{12}, \quad \mu_j = \frac{i\pi}{h}, \quad (28)$$

праву частину (27) можна подати як

$$\frac{1}{12b} \int_{-b}^b q(y)(3y^2 - b^2) dy - \frac{1}{12a} \int_{-a}^a p(x)(3x^2 - a^2) dx.$$

Механічне тлумачення рівняння (27) потребує подальших досліджень. Відзначимо, що коефіцієнти при  $x_n$  та  $y_j$  тут спадають лише за степеневим законом, хоча і досить швидко, як  $O(n^{-4})$  та  $O(j^{-4})$ , відповідно.

Таким чином, систему рівнянь (24) разом з додатковим рівнянням (26) або (27) можна розв'язувати методом простої редукції, залишаючи скінчену кількість  $N$  та  $J$  невідомих та  $N + J$  рівнянь. При цьому, числа  $N$  та  $J$  є невеликими, що значно полегшує обчислення.

#### 3.2. Віссиметрична задача для скінченного циліндра

У термінах нових невідомих (9) система (23) набуває вигляду

$$\begin{cases} x_n P_n - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4k_n^2 y_j}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2G(1 + \sigma)}{k_n^2} = f_n, \\ y_j \Delta_j - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2 x_n}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \frac{2G}{\lambda_j^2} = -g_j. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

Тут також можливо запропонувати два підхода до визначення ефективного рівняння для сталої  $G$ .

Згідно першого, просумуємо першу групу рівнянь (29) по  $n$ , а другу – по  $j$ . Це можна здійснити з огляду на збіжність наявних рядів та асимптотики (10). Додавши отримані в такий спосіб рівняння, з використанням формул (25) та

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{4\lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} = a^2 \left( 1 - \frac{I_0^2(k_n a)}{I_1^2(k_n a)} \right) + \frac{2a I_0(k_n a)}{k_n I_1(k_n a)}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \frac{a^2}{8},$$

приходимо до

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \left[ P_n + \frac{1-\sigma}{k_n^2} - \frac{a I_0(k_n a)}{k_n I_1(k_n a)} \right] + \sum_{j=1}^J \frac{y_j h^2}{\text{sh}^2 \lambda_j h} + G \left( \frac{1+\sigma}{6} h^2 + \frac{a^2}{8} \right) = \frac{f(h) - f_0}{2} - \frac{g(a) - g_0}{2}. \quad (30)$$

Рівняння (29) у сукупності з (30) дозволяє визначити величину  $G$  для скінченних значень  $N$  і  $J$ . Рівняння (30) відображає механічні особливості задачі, оскільки відповідає різниці головних напружень на ребрі циліндра. При цьому коефіцієнти при  $x_n$  спадають як  $\frac{1}{k_n^2 a^2}$ , а при  $y_j$  – як  $\exp(-2\lambda_j h)$ , що є важливим фактором при виборі значень  $N$  та  $J$ .

Додаткове рівняння для визначення  $G$  у задачі для циліндра можна отримати й у інший спосіб. Якщо попередньо поділити рівняння першої групи системи (23) на  $k_n^2$ , а другої – на  $\lambda_j^2$ , а потім проробити ті ж самі дії, які застосовувалися для отримання рівняння (30), то отримаємо

$$(1+\sigma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k_n^4} + \sum_{j=1}^J \frac{y_j}{\lambda_j^4} + G \left( \frac{1+\sigma}{90} h^4 + \frac{a^4}{192} \right) = \int_0^h f(z) \frac{3z^2 - h^2}{12h} dz + \int_0^a r g(r) \frac{2r^2 - a^2}{8a^2} dr. \quad (31)$$

Коефіцієнти при  $x_n$  та  $y_j$  у рівнянні (31) спадають пропорційно до четвертого степеня відповідних власних значень і мають простіший вигляд, ніж відповідні у рівнянні (30). Зауважимо також, що права частина рівняння (31) є відомою функцією, що виражається через задані крайові умови.

Варто також зауважити, що точність обчислення розв'язків нескінченних систем (17), (23) при переході до основних скінченних систем при  $n=1, \dots, N$ ,  $j=1, \dots, J$  значною мірою залежить від характеру заданих крайових умов, що відповідає поведінці вільних членів у вказаних системах. Вивчення цього питання детальніше, а також з'ясування фізичного змісту цього рівняння може стати предметом для подальших досліджень.

#### 4. Числові приклади та обговорення

##### 4.1. Приклад Тимошенка для прямокутної області

У якості першого прикладу розглянемо визначення сталої  $G$  у задачі про розтягування прямокутника нормальними зусиллями

$$q(y) = 12(y^2 - b^2), \quad p(x) = 0$$

на торцях  $x = \pm a$  (приклад С.П. Тимошенка). Для цього випадку вільні члени системи (12) набувають вигляду:

$$p_n = 0, \quad q_j = \frac{48}{\beta_j}. \quad (32)$$

Зауважимо, що до нескінченної системи (17) з вільними членами (32) зводиться також задача про згин тонкої жорсткозашемленої прямокутної пластинки [7,8].

Для квадрата  $a = b = 1$ , система (24) з додатковими рівняннями (26) або (27), з огляду на симетрію  $x_n = -y_j$  ( $n = j$ ), дозволяє визначити сталу  $G$  точно:  $G = 12$ .

У випадку  $a = 1, b = 2$  сталу  $G$  вже не вдається визначити з міркувань симетрії. В таблиці 1 наведені результати обчислень величини  $G$  з використанням рівняння (26).

Таблиця 1

N	J	G
1	2	17,974
1	4	17,970
2	4	17,972
3	6	17,972

З наведених даних робимо висновок, що використання запропонованого підходу дозволяє отримати значення  $G$  з високою точністю за відносно невеликої кількості членів та рівнянь у зведених скінченних системах.

##### 4.2. Скінчений циліндр, навантажений на торцях параболічними нормальними зусиллями

У якості прикладу застосування рівнянь (30) та (31) у вісесиметричній задачі, розглянемо навантаження

$$g(r) = 2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 - 1, \quad f(z) = 0, \quad (33)$$

аналогічні до розглянутих у пункті 4.1 для прямокутника.



Таблиця 2

$N \backslash J$	1	2	3	4	5
1	-1,5417	-1,5407	-1,5406	-1,5405	-1,5405
2	-1,5413	-1,5405	-1,5404	-1,5404	-1,5404
3	-1,5408	-1,5402	-1,5401	-1,5401	-1,5401
4	-1,5405	-1,5401	-1,5400	-1,5400	-1,5400
5	-1,5404	-1,5400	-1,5400	-1,5400	-1,5400

У таблиці 2 наведено результати обчислення величини  $G$  на основі (29), (30) для випадку кубоподібного циліндра ( $a = h$ ). З даної таблиці можна зробити два основні висновки: як і в попередньому прикладі для квадрата, найкраща точність досягається при  $J = N$ ; використання (29), (30) забезпечує досить високу точність в обчисленні  $G$ . Аналогічні результати мають місце і за використання рівняння (31) замість (30).

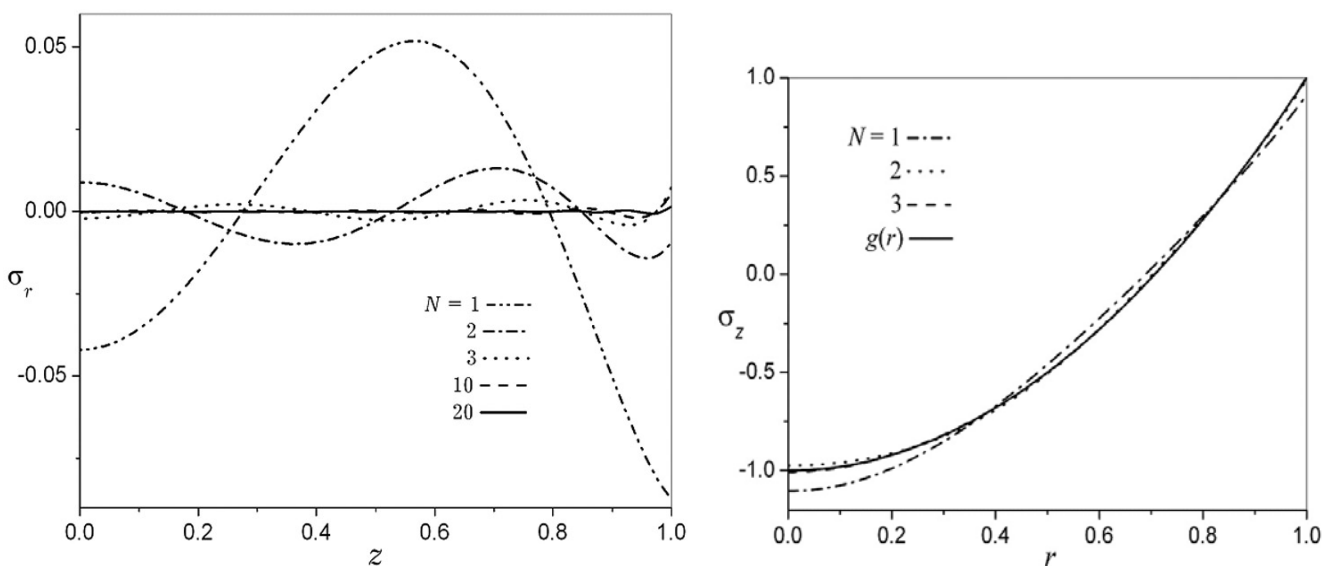


Рис. 1. Задоволення радіальними та осьовими напруженнями крайових умов в залежності від кількості рівнянь у скінченій системі (29) при  $J = N$

Зауважимо, що отримані значення величини  $G$  у сукупності з розв'язками відповідної скінченної системи дозволяють здійснювати розрахунок напружень у циліндрі з високою точністю навіть за утримання лише кількох рівнянь та складових у скінченних сумах. Важливим критерієм точності обчислень є задоволення напруженнями крайових умов на бічній поверхні циліндра. На рис. 1 показано, як радіальні та осьові напруження задовольняють крайові умови в залежності від кількості врахованих складових та рівнянь в основній системі (29). Як бачимо, напруження добре задовольняють крайові умови (33), починаючи з  $N = J = 2$ .

## 5. Висновки

Запропоновано підхід до визначення асимптотичного значення невідомих у нескінченних система, до яких зводяться двовимірні задачі теорії пружності для прямокутника та суцільного циліндра, а також теорії пластин, за використання методу суперпозиції. Підхід полягає в отриманні додаткового рівняння, яке у комплексі з рівняннями основної скінченної системи рівнянь дозволяє встановити вираз для  $G$ . Розглянуті числові приклади показали ефективність запропонованого підходу як у випадку прямокутника, так і для скінченного циліндра, що полягає у досягненні високої точності обчислень напружено-деформованого стану вказаних тіл за досить малої кількості невідомих та рівнянь, що враховуються в основних скінченних системах.

1. Бондаренко П.С. К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Вестник КГУ. Мат. сборник. – 1951. – Т.29, № 2. – С.403-418. 2. Бондаренко П.С. Зауваження до чисельного розв'язування крайових задач рівняння Лапласа і бігармонічного рівняння // Вестник КГУ. Мат. сборник. – 1954. – № 5. – С.39-49. 3. Бондаренко П.С. О сходимости алгоритма последовательных приближений и оценки погрешностей при численном решении бесконечных систем линейных алгебраических уравнений // Вестник КГУ. Мат. сборник. – 1957. – № 9. – С.81-89. 4. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – К., 1978. 5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985. 6. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М., 1962. 7. Коялович Б.М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. – СПб., 1902. 8. Коялович Б.М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-Мат. ин-та им. В.А.Стеклова. – 1930. – Т. III. – С.41-167. 9. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л., 1935. 10. Мелешко В.В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, № 3. – С.45-68. 11. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. 12. Папков С.О., Мелешко В.В. Двовимірна бігармонічна задача в прямокутнику // Вісник Київського ун-та. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 4. – С.40-43. 13. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Reviews. – 2003. – V. 56. – P.33-85. 14. Meleshko V.V., Gomilko A.M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // Proc. R. Soc. London. – 1997. – Vol. A453. – P. 2139-2160. 15. Meleshko V.V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // J. Engng Math. – 2003. – Т. 46. – P. 355-376.

## ДО 85-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ОЛЕГА ОЛЕКСАНДРОВИЧА ГОРОШКА



1 січня 2010 року Горошко Олег Олександрович, професор, доктор фізико-математичних наук, академік АН ВШ України, відсвяткував своє 85-річчя.

Олег Олександрович народився у с.Нечаївка Компаніївського р-ну Кіровоградської обл. у сім'ї чоботаря Горошка Олександра Гавриловича, який пізніше, закінчивши навчання у технікумі, став учителем математики.

Велика вітчизняна війна перервала навчання юного Олега у школі. Після звільнення рідного села з 13 березня 1944 року Олег Олександрович воював в рядах 593 окремого саперного батальйону 297 Слав'янсько-Кіровоградської дивізії 2-го Українського фронту. Наче й не пройшло вже 65 років, так детально він пам'ятає бої – оточення і розгром Ясько-Кишенівського угруповання німецьких військ, трикратне форсування р.Тиси та форсування Дунаю восени та взимку 1944 р., бої за Будапешт та Відень, заключний дводенний надзвичайно виснажливий марш по 126 км за добу до зустрічі з союзними (американськими) військами під астрійським м.Лінцем. Бойова звитяга молодого бійця відзначена двома орденами Слави та медаллю "За відвагу", медалями "За взяття Будапешта", "За взяття Відня" та іншими. Після Перемоги Олег Олександрович ще довго служив у армії, і лише 13 березня 1950 року був демобілізований. Далі було навчання на фізико-математичному факультеті Дніпропетровського державного університету і робота в аспірантурі під керівництвом видатного українського механіка академіка АН УРСР Савіна Г.М. Вже в аспірантурі О.О.Горошко зарекомендував себе сміливим і неординарним експериментатором і теоретиком. Його наукові інтереси стосуються шахтних підйомів, задач відрозахисту, неголономної механіки.

Протягом 20 років Олег Олександрович працював у підрозділах НАН України, паралельно викладаючи теоретичну механіку у вузах Києва. З 1975 року працює в Київському Національному університеті імені Тараса Шевченка, спочатку на посаді завідувача кафедри теоретичної механіки, потім професора, провідного наукового співробітника, професора-консультанта.

О.О.Горошко є автором 8 монографій та підручників. Серед них "Динамика нити переменной длины" (1962, у співавт.), "Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета" (1965), "Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины" (1971), "Двохвильові процеси в механічних системах" (1991, у співавт.), "Аналітична динаміка дискретних спадкових систем" (серб.) (2001, у співавт.) та інші.

До наукового доробку О.О.Горошка належить вперше здійснена повна постановка нової задачі математичної фізики гіперболічного типу в змінних рухомих границях з урахуванням неголономного характеру переносу енергії деформацій через рухомі границі. Створена теорія знайшла своє практичне застосування у числених дослідженнях Горошка О.О. та його учнів з динаміки гірничих підйомів та підйомно-транспортної техніки, тросових систем, балістичних задач та ін.

Оригінальне дослідження стійкості вільної пружної конструкції при поздовжньому навантаженні в умовах керованого польоту, виконане О.О.Горошком, знайшло застосування в розробках космічної техніки. Монографія "Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета", присвячена цим дослідженням, була перевидана в США в 1965 р.

О.О.Горошко вперше знайшов точний розв'язок задачі динаміки пружної конструкції з рухомих інерційним навантаженням. Праці останніх років стосуються аналітичної механіки багатомасових систем зі спадковою взаємодією.

До наукової школи, створеної за роки праці в Академії наук та Університеті, належать 25 кандидатів та 2 доктори наук, 5 професорів, які працюють у вузах та науково-дослідних закладах України, Росії, Казахстану, В'єтнаму, Куби, КНДР.

Список наукових праць та винаходів включає понад 230 найменувань, з яких 8 монографій та підручників.

Олег Олександрович Горошко є членом Національного комітету з теоретичної та прикладної механіки, почесним членом правління Міжнародної асоціації дослідників сталених канатів, Почесним доктором Дніпродзержинського державного технічного університету, Заслуженим професором Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Почесним доктором НАН України.

Колектив механіко-математичного факультету щиро вітає Олега Олександровича зі знаменною датою та бажає міцного здоров'я, родинного щастя, творчої наснаги та нових здобутків у наукових пошуках.

Перестюк М.О., Мелешко В.В., Лимарченко О.С.

## ДО 70-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ В'ЯЧЕСЛАВА ІВАНОВИЧА РОЗУМНЮКА



27 червня 2010 року виповнилося 70 років від дня народження Розумнюку В'ячеславу Івановичу, завідувачу науково-дослідницької лабораторії диференціальних рівнянь та їх застосувань у механіці механіко-математичного факультету, кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику.

В.І.Розумнюк народився у селищі міського типу Корнін, Житомирської області.

Після закінчення середньої школи В.І.Розумнюк поступив до Київського політехнічного інституту і отримав професію інженера-теплотехніка. У 1963 році, після закінчення інституту, за розподілом був направлений на роботу до Київського державного університету ім. Т.Г.Шевченка. З того часу і дотепер його життя, праця і професійні інтереси пов'язані з університетом. Зарахований спочатку на посаду фін-механіка (1963-1964), він згодом був переведений на посаду старшого інженера наукової групи (1964-1967). З 1967 року – керівник групи математиків – програмістів, пізніше – очолив науково-дослідницьку лабораторію, якою керує і дотепер. У 1973 році В.І.Розумнюк захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Під керівництвом В.І.Розумнюка у 70-х роках лабораторія брала участь у роботах, які пов'язані з найактуальнішими проблемами механіки суцільних середовищ, зокрема внесла вагомий внесок у реалізацію всеосоюзної програми "АЛМОЕКС", яка виконувалась спільно з ЦАГІ імені М.Є.Жуковського під керівництвом начальника аеродинамічного відділення, лауреата Ленінської премії, професора Г.Л.Гродзовського. У межах програми співробітники лабораторії виконали значний обсяг експериментальних і обчислювальних робіт, результатом яких стала розробка та впровадження методики застосування лазерних доплерівських вимірювачів швидкості (ЛДВШ) для проведення експериментальних досліджень в аеродинамічних трубах ЦАГІ.

Згодом, у 80-ті роки, спільно з ЦАГІ лабораторія активно займалась вивченням аеродинаміки надзвукового та гіперзвукового обтікання тіл з поверхневим масо- та теплообміном, питаннями стійкості струменів, розрахунками крилових профілів магістральних авіалайнерів тощо. Окрім ЦАГІ науковими партнерами лабораторії були НДІ механіки Московського державного університету ім. М.В.Ломоносова, Московське вище технічне училище імені М.Є.Баумана, Дніпропетровський державний університет, Харківський авіаційний інститут.

Наукові здобутки лабораторії неодноразово отримували високі оцінки на всеоюзних та міжнародних конференціях. За час з 1974 лабораторією виконано більш ніж 25 науково-дослідних тем (22 з них – під науковим керівництвом В.І.Розумнюка), а обсяги фінансування на той час були серед найбільших на факультеті.

Протягом тривалого часу В.І.Розумнюк був ученим секретарем комплексної програми з математики, а також впродовж 14-ти років – заступником декана механіко-математичного факультету з наукової роботи.

Наукову діяльність В.І.Розумнюк успішно і плідно поєднував з громадською роботою – входив до профспілкового комітету університету (комісія з охорони праці), був членом комітету народного контролю КДУ, де очолював відділ наукових досліджень.

Під час будівництва нових корпусів КДУ, В'ячеслав Іванович був заступником декана механіко-математичного факультету з питань будівництва нового корпусу, членом постійної комісії при парткомі КДУ з будівництва нового університетського комплексу. З притаманними йому наполегливістю, старанністю та прискіпливістю В.І.Розумнюк розробив план оснащення устаткуванням нового корпусу механіко-математичного факультету, за яким факультет мав отримати потужну навчально-дослідницьку базу, обладнану найсучаснішою на той час експериментальною та обчислювальною технікою. На жаль, скорочення обсягів фінансування будівництва корпусу зашкодило реалізації цього плану.

І сьогодні В.І.Розумнюк продовжує наукову та громадську діяльність на факультеті, є членом Вченої ради факультету, очолює науково-дослідницьку лабораторію диференціальних рівнянь та їх застосування у механіці механіко-математичного факультету, щедро ділиться своїми знаннями і досвідом із молодими колегами та науковцями, курує роботу Інформаційно-обчислювального сектору механіко-математичного факультету КНУ. У власному творчому доробку В'ячеслава Івановича – понад 65 наукових публікацій. Основні напрямки наукової діяльності – математичне моделювання фізико-механічних полів, зокрема, у аеродинаміці, газовій динаміці, гідромеханіці, електромагнітній теорії.

Колеги В'ячеслава Івановича Розумнюка по факультету та університету відзначають його чуйність, доброзичливість, відкритість, щирість, відданість справі.

Коллектив механіко-математичного факультету щиро вітає В'ячеслава Івановича зі знаменною датою і бажає міцного здоров'я, родинного щастя, творчої наснаги та нових здобутків у наукових пошуках.

Городній М.Ф., Перестюк М.О., Улітко А.Ф., Зайцев О.В., Хорошилов О.В.

Наукове видання



**ВІСНИК**

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

**МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА**

**Випуск 23**

**За авторською редакцією**

**Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"**

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.

**Засновник та видавець – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Свідоцтво Міністерства інформації України про державну реєстрацію засобів масової інформації КІ № 251 від 31.10.97. Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", директор Г.Л. Новікова. Адреса ВПЦ: 01601, Київ, б-р Тараса Шевченка, 14, кімн. 43. ☎ (38044) 239 32 22; факс 239 31 28**



Підписано до друку 27.08.10. Формат 60x84<sup>1/8</sup>. Вид. № 141. Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 6,97. Обл.-вид. арк. 10. Зам. № 210-5334.

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"  
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,  
☎ (38044) 239 32 22; факс (38044) 239 31 28.  
E-mail: vydav\_polygraph@univ.kiev.ua

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В.І.Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>

## Загальні вимоги.

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- ✓ два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- ✓ експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- ✓ позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- ✓ електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

## Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

✓ текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows (\*.doc)** без застосування **стильової розмітки**;

✓ поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонн титула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.

✓ комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:

- шрифт статті – Arial, розмір 9;
- інтервал між рядками – одинарний;
- перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
- відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
  - індекс УДК (для природничих факультетів), (Arial, 8 pt, Bold);
  - перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного спів-автора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
  - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
  - анотація (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
  - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
  - список літератури (Arial, 7 pt, звичайний);
  - дата надходження до редколегії, наприклад, "**Надійшла до редколегії 09.11.05**". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 pt, вирівняти по правому краю).

## Додаткові вимоги до тексту статті:

✓ кожен аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;

✓ джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретні сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);

✓ усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;

✓ не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;

✓ на всі таблиці і рисунки давати посилання в тексті статті;

✓ усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);

✓ усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достат-

ньою для відтворення тонких ліній, градацій віддтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;

✓ формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:			Define Size:		
<b>Text</b>	<b>Times New Roman</b>		<b>Full</b>	<b>9 pt</b>	
<b>Function</b>	<b>Times New Roman</b>		<b>Subscript/Superscript</b>	<b>7 pt</b>	
<b>Variable</b>	<b>Times New Roman</b>	<b>italic</b>	<b>Sub-Subscript/Superscript</b>	<b>6 pt</b>	
<b>L.C.Greek</b>	<b>Symbol</b>		<b>Symbol</b>	<b>14 pt</b>	
<b>UC.Greek</b>	<b>Symbol</b>		<b>Sub-Symbol</b>	<b>9 pt</b>	
<b>Vector-matrix</b>	<b>Times New Roman</b>	<b>bold</b>			
<b>Number</b>	<b>Times New Roman</b>				

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- ✓ чисел подібності –  $Bi$  (Біо),  $Ku$  (Кирпичова),  $Pe$  (Пекле),  $Re$  (Рейнолдса) та ін.;
- ✓ тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- ✓ температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія (°C), Фаренгейта (°F), Реомюра (°R);
- ✓ умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max, min), значення величин (opt), сталості величини (const, idem), знаків границь (Lim, lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg, ln, log) та ін.;
- ✓ хімічних елементів і сполук.
- ✓ між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- ✓ термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

#### **Вимоги до складання списку літератури**

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською. Згідно із наказом Держспоживстандарту України від 10.11.06 № 3232 **при складанні списку літератури необхідно застосовувати національний стандарт, ідентичний ГОСТ 7.1.–2003** "Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання". Не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

#### **Розбиття статті на розділи**

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок.

#### **Фонди, гранти**

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

#### **Застереження**

Неприпустимим є:

- ✓ подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- ✓ подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- ✓ подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- ✓ затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

#### **Відомості про авторів**

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Названня, Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштова адреса та контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність дотримання граматичних норм мови статті.