ВІСНИК
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ISSN 1728-2276

КІБЕРНЕТИКА

12/2012

Засновано 1999 року

Наведено результати досліджень з аналізу, оцінки, керування й оптимізації динамічних систем, проблем еколого-економічного аналізу та чисельних методів моделювання процесів.
Для викладачів, наукових співробітників, аспірантів і студентів.

In this issue the results of researches in analysis, estimates, control and optimization of dynamical systems, problems of ecology-economic analysis and numeral methods of processes are presented.
For scientists, professors, aspirants and students.

Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 6, факультет кібернетики ☎ (38044) 259 01 49
Затверджено	Вченою радою факультету кібернетики 08.10.2012 (протокол № 3)
Затверджено	Постанова Президії ВАК України № 1-05/1 від 26.01.11
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16271-4743Р від 31.12.09
Засновник Та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43 ☎ (38044) 239 31 72, 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

CONTENTS

УДК 517.929

Э. Азизбеков, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, проф.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В последнее время большой интерес вызывают исследования дифференциальных уравнений с распределенными параметрами, содержащими запаздывание. Уравнения параболического типа с запаздывающим аргументом рассматриваются при анализе динамики численности популяции в экологических системах с неоднородной внешней средой, численности рабочей силы с учетом миграции, динамики генераторов с запаздывающей обратной связью и др. [1–2]. Следует отметить, что проблемы анализа дифференциальных уравнений с сосредоточенными параметрами различного типа с последействием изучены достаточно неплохо [3–5]. В то же время работ по исследованию уравнений в частных производных с запаздыванием не так много [6]. Следующая работа это продолжение работ [7–10], которыми получено представление решения отдельных уравнений с распределенными параметрами с одним постояннымзапаздыванием.

Recently, a great interest is investigation of differential equations with distributed parameters which contain delay. The equation of parabolic type with delay are considered in the analysis of the dynamics of populations in ecological systems with heterogeneous external environment, the number of workers with regard to migration, the dynamics of generators with retarded feedback etc. [1–2]. It should be noted that the problem of analysis of differential equations with lumped parameters of different types, equation with aftereffect investigated fairly well [3–5]. At the same time works on investigation equations in partial derivatives with delay is not much [6].Next work is a continuation of works [7–10], in which received representation of results of certain equations with distributed parameters with a constant delay.

1. Решение одномерного уравнения теплопроводности методом Фурье. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+f(x,t).$$

Ищется классическое решение первой краевой задачи, т.е. функция $u(x,t)$, определенная при $0\le x\le l,\ \ t\ge 0$, дважды непрерывно дифференцируемая по x и непрерывно дифференцируемая по t, удовлетворяющая начальным $u(x,0)=\phi(x)$, $0\le x\le l$ и краевым $u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),\ \ t\ge 0$ условиям. Для нахождения решения часто используют метод разделения переменных (метод Фурье). Решение ищется в виде суммы

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t),$$

где $u_1(x,t)$ - решение однородного уравнения с нулевыми краевыми $u_1(0,t)\equiv 0$, $u_1(l,t)\equiv 0$, $t\ge 0$ и ненулевым начальным $u_1(x,0)=\Phi(x)$, $\Phi(x)=\phi(x)-\mu_1(0)-\frac{x}{l}\left[\mu_2(0)-\mu_1(0)\right]$, $0\le x\le l$ условиями; $u_2(x,t)$ - решение неоднородного уравнения с правой частью $F(x,t)=f(x,t)-\dot{\mu}_1(t)-\frac{x}{l}\left[\dot{\mu}_2(t)-\dot{\mu}_1(t)\right]$ с нулевыми краевыми $u_2(0,t)\equiv 0$, $u_2(l,t)\equiv 0$, $t\ge 0$ и нулевым начальным $u_2(x,0)=0$, $0\le x\le l$ условиями; $u_3(x,t)$ имеет вид $u_3(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$, $0\le x\le l$, $t\ge 0$.

Решение $u_1(x,t)$ однородного уравнения ищется в виде произведения двух функций

$$u_1(x,t)=X(x)T(t).$$

В результате разделения переменных получается задача на собственные числа и решение однородного уравнения представляется в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма-Лиувиля. Эти же собственные функции используются для получения решения второй краевой задачи.

2. Решение одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием. В настоящей работе рассматривается одномерное уравнение теплопроводности с запаздыванием

$$u_t(x,t)=a_1^2u_{xx}(x,t)+a_2^2u_{xx}(x,t-\tau)+b_1u_x(x,t)+b_2u_x(x,t-\tau)+\ +c_1u(x,t)+c_2u(x,t-\tau)+f(x,t),\tag{1}$$

определенное при $0\le x\le l,\ \ \ t\ge 0$. Предполагается, что коэффициенты при производных фазовых координат пропорциональны.. А именно, существует постоянная α, что выполняется условие $b_1=\alpha a_1^2$, $b_2=\alpha a_2^2$,. Рассматривается первая краевая задача. Начальное условие имеет вид

$$u(x,t)=\phi(x,t),\ 0\le x\le l,\ \ -\tau\le t\le 0,\tag{2}$$

а краевые

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),\ \ t\ge-\tau,\tag{3}$$

причем выполнено условие "согласования" краевых и начальных условий

$$\phi(0,t)=\mu_1(t),\ \phi(l,t)=\mu_2(t),\ -\tau\le t\le 0.$$

Решение ищется в виде суммы

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)+u_3(x,t).$$

Здесь функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ определяются следующим образом:

- $u_1(x,t)$ - решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_1(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_1(x,t)+c_2u_1(x,t-\tau)+f(x,t),$$

с нулевыми краевыми $u_1(0,t)=0$, $u_1(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и ненулевым начальным $u_1(x,t)=\Phi(x,t)$, $\Phi(x,t)=\phi(x,t)-\mu_1(t)-\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями;

- $u_2(x,t)$ - решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_2(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_2(x,t)+c_2u_2(x,t-\tau)+F(x,t)$$

$$F(x,t)=f(x,t)-\frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+c_1\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+$$

$$+c_2\left\{\mu_1(t-\tau)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},\ 0\le x\le l,$$

с нулевыми краевыми $u_2(0,t)=0$, $u_2(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и нулевым начальным $u_2(x,t)\equiv 0$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями;

- $u_3(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]$.

I. Однородное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2 u_1(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_1(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_1(x,t)+c_2u_1(x,t-\tau) \tag{4}$$

с нулевыми краевыми $u_1(0,t)=0$, $u_1(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и ненулевым начальным $u_1(x,t)=\Phi(x,t)$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями. Его решение будем искать методом Фурье, т.е. функция $u_1(x,t)$ ищется в виде произведения

$$u_1(x,t)=X(x)T(t).$$

После подстановки в однородное уравнение, получаем

$$X(x)T'(t)=a_1^2X''(x)T(t)+a_2^2X''(x)T(t-\tau)+b_1X'(x)T(t)+b_2X'(x)T(t-)+c_1X(x)T(t)+c_2X(x)T(t-\tau).$$

Перегруппируем полученное выражение следующим образом

$$\left[T'(t)-c_1T(t)-c_2T(t-\tau)\right]X(x)=\left[a_1^2T(t)+a_2^2T(t-\tau)\right]X''(x)+\left[b_1T(t)+b_2T(t-\tau)\right]X'(x).$$

Учитывая пропорциональность коэффициентов, получим

$$\left[T'(t)-c_1T(t)-c_2T(t-\tau)\right]X(x)=\left[a_1^2T(t)+a_2^2T(t-\tau)\right]\left[X''(x)+\alpha X'(x)\right].$$

Делим переменные

$$\frac{X''(x)+\alpha X'(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)-c_1T(t)-c_2T(t-\tau)}{a_1^2T(t)+a_2^2T(t-\tau)}=-\lambda.$$

Уравнение расщепляется на два

$$X''(x)+\alpha X'(x)+\lambda X(x)=0,\ T'(t)+\left(\lambda a_1^2-c_1\right)T(t)+\left(\lambda a_2^2-c_2\right)T(t-\tau)=0. \tag{5}$$

Поскольку граничные условия нулевые, то для первого уравнения получаем нулевые краевые условия

$$X(0)=0,\quad X(l)=0.$$

Ненулевым решение будет только при

$$\lambda=\lambda_n=\frac{\alpha^2}{4}+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\ n=1,2,3,\dots.$$

И каждому собственному значению $\lambda_n=\frac{\alpha^2}{4}+\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ соответствует собственная функция

$$X_n(x)=A_ne^{-\frac{1}{2}\alpha x}\sin\frac{\pi n}{l}x,\ n=1,2,3,\dots,$$

где A_n – произвольная постоянная. Подставляя полученные значения λ_n во второе уравнение (5), получим дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{T}_n(t)=\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]T_n(t)+\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]T_n(t-\tau),\quad n=1,2,3,\dots. \tag{6}$$

Определим начальные условия для каждого из уравнений (6) следующим образом. Разложим функцию $\Phi(x,t)$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ в ряд по собственным функциям первого уравнения, т.е. представим в виде

$$\Phi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ \Phi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Подставив значение $\Phi(x,t)$ и проинтегрировав, получим, что начальные условия для каждого из уравнений (6), $n=1,2,3,...$ будут иметь вид

$$T_n(t)=\Phi_n(t)\ ,\ n=1,2,3,...\ ,\ \ -\tau\le t\le 0\ ,\ \Phi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

Получим решение задачи Коши для каждого из уравнений (6) в аналитическом виде. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)\ ,\ t\ge 0\ ,\ \tau>0\ ,\ \ x(t)\equiv\phi(t)\ ,\ \ -\tau\le t\le 0\ . \tag{7}$$

Тут $\phi(t)$ - произвольная, непрерывно-дифференцируемая функция, которая определяет начальное условие.

Определение 1.1. Запаздывающим экспоненциалом $\exp_\tau\{b,t\}$ назовем функцию, которая имеет вид

$$e_\tau\{b,t\}=\begin{cases} 0 & , \quad -\infty<t<-\tau, \\ 1 & , \quad -\tau\le t<0, \\ 1+b\dfrac{t}{1!} & , \quad 0\le t<\tau, \\ 1+b\dfrac{t}{1!}+b^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2!} & , \quad \tau\le t<2\tau \\ \dots & , \quad \dots \\ 1+b\dfrac{t}{1!}+\dots+b^k\dfrac{[t-(k-1)\tau]^k}{k!} & , \quad (k-1)\tau\le t<k\tau \\ \dots\dots\dots & \end{cases} \tag{8}$$

В работах [7,8] было доказано, что функция $\exp_\tau\{b,t\}$ является решением линейного однородного уравнения с чистым запаздыванием

$$\dot{x}(t)=bx(t-\tau)\ ,\ t\ge 0\ ,$$

удовлетворяющим единичному начальному условию $x(t)\equiv 1,\ -\tau\le t\le 0$.

Покажем, что решение задачи Коши для уравнения с запаздыванием (7) также может быть записано в интегральном виде с функцией аналогичного вида.

Лемма 1.1. Функция

$$x_0(t)=e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\}\ ,\ b_1=e^{-a\tau}b\ ,\ t\ge 0\ , \tag{9}$$

где $\exp_\tau\{b_1,\tau\}$ - запаздывающий экспоненциал, определенный в (8), является решением уравнения (7), с параметром b_1, удовлетворяющим начальному условию

$$x_0(t)=e^{at}\ ,\ -\tau\le t\le 0\ . \tag{10}$$

Доказательство. Выполнение функцией $x_0(t)$ условия (10) следует из определений для экспоненциалов e^{at} и $\exp_\tau\{b_1,t\}$. Покажем, что при $t\ge 0$ функция $x_0(t)$ является решением уравнения (8). Продифференцировав (9), получаем

$$\frac{d}{dt}(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\})=a(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\})+e^{at}b_1\exp_\tau\{b_1,t-\tau\}=a(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\})+e^{at}e^{-a\tau}b\exp_\tau\{b_1,t-\tau\}=$$
$$=a(e^{at}\exp_\tau\{b_1,t\})+b(e^{a(t-\tau)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau\}).$$

Учитывая обозначение (9), получаем

$$\frac{d}{dt}x_0(t)=ax_0(t)+bx_0(t-\tau),$$

т.е. получаем утверждение леммы 1.1.

Теорема 1.1. Решение $x(t)$ уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $x(t)\equiv\phi(t)$, $-\tau\le t\le 0$, имеет вид

$$x(t)=e^{a(t+\tau)}\exp_\tau\{b_1,t\}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}e^{a(t-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}[\phi'(s)-a\phi(s)]ds\ . \tag{11}$$

Доказательство. Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальному условию $x(t)\equiv\phi(t)$, $-\tau\le t\le 0$, будем искать в виде

$$x(t)=x_0(t)c+\int_{-\tau}^{0}x_0(t-\tau-s)y(s)ds\ , \tag{12}$$

где c – неизвестная постоянная, $y(t)$ – неизвестная непрерывно-дифференцируемая функция, $x_0(t)$ определена в (9). Поскольку, как следует из леммы 1.1, функция $x_0(t)$ является решением уравнения (7), то при произвольных c и $y(t)$ выражение (12) также будет решением уравнения (7). Выберем c и $y(t)$ таким образом, чтобы выполнялись начальные условия, т.е. $x(t)\equiv\phi(t)$, $-\tau\le t\le 0$. Или, учитывая обозначения (12), при $-\tau\le t\le 0$ выполнялось

$$x_0(t)c+\int_{-\tau}^{0} x_0(t-\tau-s)y(s)ds \equiv \phi(t).$$

Положим $t=-\tau$. Как следует из определения запаздывающего экспоненциала, $x_0(-\tau)=e^{-a\tau}$, $x_0(-2\tau-s)=0$, если $-\tau<s\le 0$ и $x_0(-2\tau-s)=e^{-a\tau}$, если $s=-\tau$. Поэтому $\phi(-\tau)=e^{-a\tau}c$, отсюда $c=e^{a\tau}\phi(-\tau)$, и зависимость (12) приобретает вид

$$x(t)=e^{a(t+\tau)}\exp_\tau\{b_1,t\}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}\,y(s)ds.$$

Разобьем интеграл на промежутке $-\tau\le t\le 0$ на два. Получаем

$$\phi(t)=e^{a(t+\tau)}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}\,y(s)ds+\int_{t}^{0} e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}\,y(s)ds.$$

В первом интеграле границами являются $-\tau\le s\le t$, поэтому $-\tau\le t-\tau-s\le t$ и запаздывающий экспоненциал равен

$$\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}\equiv 1,\ -\tau\le s\le t.$$

Во втором интеграле границами являются $t\le s\le 0$, поэтому $t-\tau\le t-\tau-s\le -\tau$ и запаздывающий экспоненциал равен

$$\exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}=0,\ \text{если}\ \ t<s\le 0\ \ \text{и}\ \ \exp_\tau\{b_1,t-\tau-s\}=1,\ \text{если}\ \ s=t.$$

Таким образом на промежутке $-\tau\le t\le 0$ получаем

$$e^{a(t+\tau)}\phi(-\tau)+\int_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}y(s)ds=\phi(t) \quad (13)$$

Продифференцируем зависимость (13). Получаем

$$ae^{a(t+\tau)}\phi(-\tau)+a\int_{-\tau}^{t} e^{a(t-\tau-s)}y(s)ds+e^{-a\tau}y(t)=\phi'(t) \quad (14)$$

Решая систему уравнений (13), (14), получаем

$$y(t)=e^{a\tau}\left[\phi'(t)-a\phi(t)\right].$$

Подставив полученное выражение в (12), получим утверждение теоремы 1.
Вернемся к дифференциальным уравнениям (6) с соответствующими начальными условиями

$$\dot{T}_n(t)=\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]T_n(t)+\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]T_n(t-\tau),\ T_n(t)=\Phi_n(t),\ -\tau\le t\le 0,\ n=1,2,3,\dots .$$

Введем следующее обозначение

$$L_n=c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2,\ \ D_n=\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}.$$

Тогда, как следует из зависимости (11) решения задач Коши для каждого из уравнений (6) имеют вид

$$T_n(t)=e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds. \quad (15)$$

Отсюда решение первой краевой задачи для уравнения (4) имеет вид

$$u_1(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\Phi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

II. Неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial x^2}+a_2^2\frac{\partial^2u_2(x,t-\tau)}{\partial x^2}+b_1\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}+b_2\frac{\partial u_2(x,t-\tau)}{\partial x}+c_1u_2(x,t)+c_2u_2(x,t-\tau)+F(x,t) \quad (17)$$

с нулевыми краевыми $u_2(0,t)=0$, $u_2(l,t)=0$, $t\ge-\tau$ и нулевым начальным $u_2(x,t)\equiv 0$, $0\le x\le l$, $-\tau\le t\le 0$ условиями. Решение ищем в виде ряда Фурье по собственным функциям $\sin\frac{\pi n}{l}x$, $n=1,2,\dots$

$$u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad n=1,2,\dots,$$

Представим функцию $F(x,t)$ также в виде ряда

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l F(s,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi.$$

Поскольку

$$F(x,t)=f(x,t)-\frac{d}{dt}\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+c_1\left\{\mu_1(t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]\right\}+\ c_2\left\{\mu_1(t-\tau)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},$$

то, взяв интегралы, получим

$$F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left\{\left[(-1)^n\dot{\mu}_2(t)-\dot{\mu}_1(t)\right]-c_1\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-c_2\left[(-1)^n\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},\ t\ge 0\,.$$

Тогда каждая из функций $u_{2n}(t)$, $n=1,2,...$ является решением соответствующего уравнения

$$\dot{u}_{2n}(t)=\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]u_{2n}(t)+\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]u_{2n}(t-\tau)+F_n(t)\,, \tag{18}$$

с нулевым начальным условием $u_{2n}(t)\equiv 0,\ -\tau\le t\le 0$.

Вновь приведем некоторые вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения с запаздыванием

$$\dot{x}(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+f(t)\ ,\ t\ge 0\ ,\ \tau>0 \tag{19}$$

с нулевым начальным условием.

Теорема 2.1. Решение $\overline{x}(t)$ неоднородного уравнения (19), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$\overline{x}(t)=\int_0^t e^{a(t-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-s\right\}f(s)ds,\quad t\ge 0\ ,\ b_1=e^{-a\tau}b\,. \tag{20}$$

Доказательство. Поскольку $x_0(t)$ решение однородного уравнения (7), то, используя метод вариации произвольной постоянной и учитывая вид функции $x_0(t)$, решение $\overline{x}(t)$ неоднородного уравнения (19) будем искать в виде

$$\overline{x}(t)=\int_0^t e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}c(s)ds\,, \tag{21}$$

где $c(s)$, $0\le s\le t$ - неизвестная функция. Продифференцировав записанное выражение, получим

$$\frac{d}{dt}\overline{x}(t)=e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}c(s)\Big|_{s=t}+\int_0^t\left[ae^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}+e^{a(t-\tau-s)}b_1\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}\right]c(s)ds\,.$$

Подставив зависимость (21) и полученное выражение производной в уравнение (19), запишем

$$e^{-a\tau}c(t)+\int_0^t\left[ae^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}+be^{a(t-2\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-2\rho-s\right\}\right]c(s)ds\ =$$

$$=a[\int_0^t e^{a(t-\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-\tau-s\right\}c(s)ds]+b\left[\int_0^{t-\tau}e^{a(t-2\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-2\vartheta-s\right\}c(s)ds\right]+f(t)\,.$$

Отсюда

$$e^{-a\tau}c(t)+\int_{t-\tau}^t be^{a(t-2\tau-s)}\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}c(s)ds=f(t).$$

А, поскольку $\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}=0$, при $t-\tau<s\le t$ и $\exp_\tau\left\{b_1,t-2\tau-s\right\}=1$, при $s=t-\tau$, то получаем $e^{-a\tau}c(t)=f(t)$ и $c(t)=e^{a\tau}f(t)$. Отсюда следует зависимость (20).

Используя полученный результат, запишем решение задачи Коши с нулевым начальным условием для уравнений (18) в виде

$$u_{2n}(t)\ =\ \int_0^t e^{\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right](t-s)}\exp_\tau\left\{D_n,t-\tau-s\right\}F_n(s)ds\ ,\quad L_n=c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2,$$

$$D_n=\left[c_2-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}.$$

И решение неоднородного уравнения теплопроводности с запаздывающим аргументом (17) с нулевыми краевыми и начальным условиями имеет вид

$$u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\left\{D_n,t-\tau-s\right\}F_n(s)ds\right]\sin\frac{\pi n}{l}x\,,$$

$$F_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi+\frac{2}{\pi n}\left\{\left[(-1)^n\dot{\mu}_2(t)-\dot{\mu}_1(t)\right]-c_1\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right]-c_2\left[(-1)^n\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},\ t\ge 0\,.$$

Объединяя все полученные зависимости получаем, что решение краевой задачи одномерного неоднородного уравнения теплопроводности с запаздыванием имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{L_n(t+\tau)} \exp_\tau\{D_n, t\}\Phi_n(-\tau) + \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)} \exp_\tau\{D_n, t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s) - L_n\Phi_n(s)\right]ds \right\} \sin\frac{\pi n}{l}x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{L_n(t-s)} e_\tau^{D_n(t-\tau-s)} F_n(s)ds\right]\sin\frac{\pi n}{l}x + \mu_1(t) + \frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right], \tag{22}$$

Где

$$F_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi + \frac{2}{\pi n}\left\{\left[(-1)^n\dot{\mu}_2(t) - \dot{\mu}_1(t)\right] - c_1\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right] - c_2\left[(-1)^n\mu_2(t-\tau)-\mu_1(t-\tau)\right]\right\},$$

$$\Phi_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi + \frac{2}{\pi n}\left[(-1)^n\mu_2(t)-\mu_1(t)\right],\ \ L_n = c_1 - \left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)a_1^2,\ \ D_n = \left[c_2 - \left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)a_2^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\pi^2n^2}{l^2}\right)a_1^2\right]\tau}.$$

Решение дифференциального уравнения с запаздыванием представлено в виде формального ряда Фурье. Сформулируем следующую теорему о сходимости решений краевой задачи (1)–(3).

Теорема 2.2. Пусть функции $F(x,t)$, $\Phi(x,t)$ таковы, что коэффициенты Фурье $F_n(t)$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi_n'(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k+1+\alpha}\left[\Phi_n'(s)+L_n\Phi_n(s)\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2(t^*-s)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k-1+\alpha}\left|F_n(s)\right|e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2(t^*+\tau)} = 0,\ \alpha>0,\ -\tau\le s\le 0,\ (k-1)\tau\le t^* < k\tau.$$

Тогда функция $u(x,t)$, представленная рядом (22), имеет непрерывную производную по t, непрерывную производную второго порядка по x, и будет решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному (2) и краевым (3) условиям. При этом возможно почленное дифференцирование ряда по x (два раза) и по t (один раз), и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\le x\le l$, $t\ge -\tau$.

Доказательство. Запишем ряд (22) в виде суммы

$$u(x,t) = S_1(x,t)+S_2(x,t)+S_3(x,t)+\frac{x}{l}\left[\mu_2(t)-\mu_1(t)\right].$$

$$S_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\ S_3(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$A_n(t) = e^{L_n(t+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t\}\Phi_n(-\tau),\ B_n(t) = \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}\left[\Phi_n'(s)-L_n\Phi_n(s)\right]ds,$$

$$C_n(t) = \int_0^t e^{L_n(t-s)}\exp_\tau\{D_n,t-\tau-s\}F_n(s)ds.$$

1. Рассмотрим $A_n(t)$, $n=1,2,\dots$, коэффициенты первого ряда - $S_1(x,t)$. Для произвольного фиксированного момента времени t^*: $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ получаем

$$A_n(t^*) = e^{L_n(t^*+\tau)}\exp_\tau\{D_n,t^*\}e_\tau^{D_n t^*}\Phi_n(-\tau) = e^{L_n(t^*+\tau)}\left\{1+D_n\frac{t^*}{1!}+D_n^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\dots+D_n^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\Phi_n(-\tau).$$

После подстановки значений L_n и D_n, запишем

$$A_n(t^*) = e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*+\tau)}\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{t^*}{1!}+\left[\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\right]^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left[\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\right]^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\times\Phi_n(-\tau).$$

Или

$$A_n(t^*) = \left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]t^*}\frac{t^*}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](t^*-\tau)}\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]}\times\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\times\Phi_n(-\tau).$$

Поскольку, по условию, $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$, то при выполнении неравенств $c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2<0$, $c_2-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2<-1$, или при выполнении

$$n > \frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\},$$

будет выполняться соотношение

$$\left|A_n(t^*)\right| \le \left|\Phi_n(-\tau)\right| e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]} \left|\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]\frac{t^*}{1!}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\right| \le$$

$$\le \left|\Phi_n(-\tau)\right| e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]} \left|\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]\right|^k \left|1+\frac{t^*}{1!}+\frac{(t^*-\tau)^2}{2!}+\ldots+\frac{[t^*-(k-1)\tau]^k}{k!}\right|.$$

и найдется непрерывная функция $N_1(t^*)$, при которой

$$\left|A_n(t^*)\right| \le N_1(t^*)\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^{2k} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\left[t^*-(k-1)\tau\right]}\left|\Phi_n(-\tau)\right|.$$

Таким образом, если для момента времени t^* : $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k+1+\alpha} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\left[t^*-(k-1)\tau\right]} \times \left|\Phi_n(-\tau)\right| = 0.\ \ \alpha > 0,$$

то ряд

$$S_1(x,t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t^*)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

сходится равномерно и абсолютно.

2. Рассмотрим $B_n(t)$, $n = 1,2,\ldots$, коэффициенты второго ряда - $S_2(x,t)$. Для фиксированного момента времени t^*: $(k-1)\tau \le t^* < k\tau$ произведем замену $t^*-\tau-s=\xi$ и разобьем интеграл на сумму двух интегралов

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\exp_\tau\{D_n,\xi\}\left[\Phi_n'(t-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t-\tau-\xi)\right]d\xi +$$

$$+\int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{L_n(\xi+\tau)}\exp_\tau\{D_n,\xi\}\left[\Phi_n'(t-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t-\tau-\xi)\right]d\xi.$$

Используя представление запаздывающего экспоненциала $\exp_\tau\{D_n,\xi\}$ на каждом из промежутков, получаем следующее

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+D_n\frac{\xi}{1!}+D_n^{\ 2}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\cdots+D_n^{\ k-1}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}d\xi +$$

$$+\int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-L_n\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times\left\{1+D_n\frac{\xi}{1!}+D_n^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots+D_n^k\frac{\left[\xi-(k-1)\tau\right]^k}{k!}\right\}d\xi.$$

Подставив значения L_n и D_n, получим

$$B_n(t^*) = \int_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\right.$$

$$\left.\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\times\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}d\xi + \int_{(k-1)\tau}^{t^*} e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}\left[\Phi_n'(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times$$

$$\times\left\{1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{\xi}{1!}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2 e^{-2\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\right.$$

$$\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k\times e^{-k\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\Bigg\}d\xi .$$

Или, после преобразований, получаем

$$B_n(t^*)=\int\limits_{t^*-\tau}^{(k-1)\tau}\left[\Phi'_n(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+\right.$$

$$\left.+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1}e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-2)\tau]}\frac{[\xi-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}d\xi+$$

$$+\int\limits_{(k-1)\tau}^{t^*}\left[\Phi'_n(t^*-\tau-\xi)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-\xi)\right]\times\left\{e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi+\tau)}+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\xi}\frac{\xi}{1!}+\right.$$

$$\left.+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^2e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\xi-\tau)}\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\cdots+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^k e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right][\xi-(k-1)\tau]}\frac{[\xi-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}d\xi .$$

Как и в предыдущем случае, поскольку $t^*\ge(k-1)\tau$, то при достаточно большом n выполняется неравенство

$$n>\frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|},\frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому, как следует из свойств определенных интегралов и второй теоремы о среднем, существуют s_1, s_2: $t^*-\tau\le s_1\le(k-1)\tau$, $(k-1)\tau\le s_2\le t^*$ такие, что

$$\left|B_n\left(t^*\right)\right|\le\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]\left|(k\tau-t^*)\left[\Phi'_n(t^*-\tau-s_1)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_1)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right]\left[s_1-(k-2)\tau\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1+\frac{s_1}{1!}+\frac{(s_1-\tau)^2}{2!}+\cdots+\frac{[s_1-(k-2)\tau]^{k-1}}{(k-1)!}\right\}\right|+\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]^k\times$$

$$\times\left|\left[t^*-(k-1)\tau\right]\left[\Phi'_n(t^*-\tau-s_2)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_2)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right]\left[s_2-(k-1)\tau\right]}\times\right.$$

$$\left.\times\left\{1+\frac{s_2}{1!}+\frac{(s_2-\tau)^2}{2!}+\cdots+\frac{[s_2-(k-1)\tau]^k}{k!}\right\}\right|.$$

И найдутся непрерывные функции $N_2^1(t^*,s)$, $N_2^2(t^*,s)$, ограниченные при $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$, $-\tau\le t\le 0$, такие что

$$\left|B_n\left(t^*\right)\right|\le\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]^{k-1}\left|\left[\Phi'_n(t^*-\tau-s_1)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_1)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right]\left[s_1-(k-2)\tau\right]}\right|\left|N_2^1\left(t^*,s_1\right)\right|+$$

$$+\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2-c_2\right]^k\left|\left[\Phi'_n(t^*-\tau-s_2)-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(t^*-\tau-s_2)\right]e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right]\left[s_2-(k-1)\tau\right]}\right|\times\left|N_2^2\left(t^*,s_2\right)\right|.$$

Пусть функции $\Phi'_n(s)$, $\Phi_n(s)$ "не очень сильно растут" на промежутке $-\tau\le s\le 0$, т.е. для момента времени $t^*:(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ и для произвольного $s:-\tau\le s\le 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}n^{2k+1+\alpha}\left[\Phi'_n(s)+\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\Phi_n(s)\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\left(t^*-s\right)}=0 .$$

Тогда ряд $S_2(x,t)$ также сходится равномерно и абсолютно.

3. Рассмотрим $C_n(t^*)$ $n=1,2,\ldots$, коэффициенты третьего ряда - $S_3(x,t)$. Для произвольного фиксированного момента времени t^*: $(k-1)\tau\le t^*<k\tau$ произведем замену $t-\tau-\xi=s$ и представим интеграл суммой интегралов, в которых функция запаздывающего экспоненциала имеет одинаковую структуру

$$C_n(t^*) = \int_{-\tau}^{t^*-\tau} e^{L_n(\xi+\tau)} \exp_\tau\{D_n,\xi\} F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi = \int_{-\tau}^{0} e^{L_n(\xi+\tau)} F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi + \int_{0}^{\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[1+D_n\frac{\xi}{1!}\right]F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi+\ldots$$
$$\ldots+\int_{(k-2)\tau}^{t^*-\tau} e^{L_n(\xi+\tau)}\left[1+D_n\frac{\xi}{1!}+D_n{}^2\frac{(\xi-\tau)^2}{2!}+\ldots+D_n{}^{k-1}\frac{(\xi-(k-2)\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\right]F_n(t^*-\tau-\xi)d\xi \quad .$$

Подставив значения L_n и D_n, и используя теорему о среднем, можем показать, что существуют моменты времени $-\tau \le s_1 \le 0$, $0 \le s_2 \le \tau$, $(k-2)\tau \le s_k \le t^* - \tau$, такие, что

$$C_n(t^*) \le \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_1)} F_n(t^*-\tau-s_1) + \tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_2)}\left[1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{s_2}{1!}\right]F_n(t^*-\tau-s_2)+\ldots$$
$$\ldots+\tau e^{\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right](\tau+s_k)}\left[1+\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]e^{-\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]\tau}\frac{s_k}{1!}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\tau\left[c_2-\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^2\right]^{k-1} e^{-(k-1)\tau\left[c_1-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2\right]}\frac{\left[s_k-(k-2)\tau\right]^{k-1}}{(k-1)!}\right]F_n(t^*-\tau-s_k) \; .$$

И при достаточно большом n, справедливо неравенство

$$n > \frac{l}{\pi}\max\left\{\frac{\sqrt{|c_1|}}{|a_1|}, \frac{\sqrt{|1+c_2|}}{|a_2|}\right\}.$$

Поэтому найдется непрерывная, ограниченная при $-\tau \le s \le t^*$ функция $N_3(t^*,s)$, при которой справедливо неравенство

$$\left|C_n(t^*)\right| \le \tau \max_{-\tau\le s\le t^*}\left|F_n(s)\right| N_3(t^*,s)\left(\frac{\pi n}{l}a_2\right)^{2(k-1)} e^{-\left[\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2-c_1\right](t^*+\tau)} \; .$$

Пусть функции $F_n(s)$ "не очень сильно растут" на промежутке $-\tau \le s \le t^*$, т.е. выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k-1+\alpha}\left|F_n(s)\right| e^{-\left(\frac{\pi n}{l}a_1\right)^2(t^*+\tau)} = 0 \, .$$

Тогда ряд $S_3(x,t)$ также сходиться абсолютно и равномерно.

Таким образом показано, что для абсолютной и равномерной сходимости рядов $S_1(x,t)$, $S_2(x,t)$, $S_3(x,t)$ требуется лишь "не очень сильный рост" по индексу n коэффициентов Фурье $F_n(t)$, $-\tau \le s \le t^*$, $\Phi_n(t)$ и $\Phi_n'(t)$, $-\tau \le t \le 0$. Сходимость производных функции $u(x,t)$ следует из свойств дифференцируемости запаздывающего экспоненциала.

1.Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 181 с. 2. Жуков А.Б. Пространственная и временная изменчивость процесса прироста леса. //Доклады АН СССР, Т.239, №1, 1978. – С.245–248. 3. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М.: Наука, 1971. – 296 с. 4. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М., Мир, 1984. – 421 с. 5. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматулина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. - М., Наука, 1991. – 277 с. 6. Ткач Б.П. Об одном дифференциальном уравнении в частных производных из запаздывающим аргументом. //Дифференциальные уравнения. Т.III. – 1967 – № 10 – С.1796–1801. 7. Хусаінов Д.Я., Коварж І.В. Розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.2, 2004. – С.362–368. 8. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Коварж І.В. Про зображення розв'язку першої крайової задачі для рівняння теплопровідності із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.7, 2006. – С.51–59. 9. Хусаінов Д.Я., Іванов А.Ф., Коварж І.В. Розв'язок рівняння коливання із запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки, в.4, 2006. – С.243–248. 10. Коварж І.В., Іванов А.Ф., Хусаінов Д.Я. Постановка крайових задач і задач Коші для рівнянь параболічного типу з чистим запізненням // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика, в.7, 2007. – С.37–41.

Надійшла до редколегії 15.10.12

О. Ф. Волошин, д-р техн. наук, проф.,
В. О. Лавер, студент

НЕЧІТКІ МЕТОДИ РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ

У роботі наведено деякі алгоритми для розподілу витрат при нечітких умовах .Запропоновано нечіткі узагальнення подушного та рівневого податків на випадок нечіткого виконання обмежень на частки витрат агентів та на випадок нечіткого задання величини витрат. Запропоновано нечітке узагальнення N-ядра. Наведені алгоритми проілюстровано числовими прикладами, дано аксіоматичну характеризацію.

The paper presents some algorithms of cost sharing under fuzzy conditions. Fuzzy generalizations of uniform gains, uniform losses and Talmudic rationing methods are proposed. These algorithms are illustrated by numerical examples. Also, the axiomatic characterization of generalized methods is given.

Вступ. Справедливий розподіл спільних витрат (або спільного прибутку) серед агентів є центральною темою теорії кооперативних ігор із трансферабельною корисністю. Зокрема, простіша проблема розподілу одного виду благ за певним профілем заявок (що відображає індивідуальні потреби чи вимоги) теж була популярною для аксіоматичного аналізу. Ця модель розподілу в літературі часто називається проблемою банкрутства [1].

Постановка задачі. Проблемою розподілу називається трійка (N,c,b), де N – скінченна множина агентів, невід'ємне дійсне число c визначає кількість ресурсів, яку необхідно розподілити, вектор $b=(b_i)_{i\in N}$ визначає для кожного агента i його заявку , причому ці числа такі, що

$$0\le b_i,\ \forall i\in N:0\le c\le \sum_{i\in N} b_i. \quad (1)$$

Розв'язком проблеми розподілу є вектор $x=\left(x_i\right)_{i\in N}$, який ставить у відповідність кожному агенту i його частку x_i, причому

$$0\le x_i\le b_i,\ \forall i\in N:\sum_{i\in N} x_i=c. \quad (2)$$

Можливо декілька інтерпретацій проблеми розподілу. В даній статті, без зменшення загальності, розглядається задача розподілу витрат на виробництво неподільного суспільного продукту *а* вартістю c, величини b_i для кожного i інтерпретуються як запас грошей i-го агента (або, альтернативно, як очікувана вигода від користування суспільним продуктом).

Подушний та рівневий податки. Розглянемо два принципи розподілу витрат:

Вирівнювання витрат ($x_i=\dfrac{c}{n},\ \forall i\in N$);

Вирівнювання прибутків ($x_i=b_i-\left(\sum_{i\in N} b_i-c\right)/n,\ \forall i\in N$).

Якщо порушується умова (2), то при вирівнюванні прибутків може виникнути ситуація, коли деякий агент повинен буде заплатити більше свого запасу грошей. Тоді він може відмовитись від кооперації. При вирівнюванні прибутків можливий випадок, що деякий агент буде субсидуватися іншими. В цьому випадку всі інші агенти можуть відмовитись його субсидувати, і вийдуть з коаліції.

У випадку чіткого виконання умов (2), принцип вирівнювання витрат узагальнюється на подушний податок, а принцип вирівнювання прибутків – на рівневий [2].

При подушному податку може виникнути ситуація, при якій агент повинен буде віддати весь свій запас грошей. В цьому разі він також може не погодитись на кооперацію. Але якщо він згоден віддати деяку частину грошей, а інші агенти згодні покрити нестачу, максимальна коаліція не розпадеться.

Чіткі узагальнення подушного та рівневого податків. Нехай потрібно розподілити витрати величиною c, серед множини агентів $N=\overline{1,n}$.

Розглянемо подушний податок. Припустимо, що існують агенти, які за подушним податком повинні заплатити весь свій запас грошей. Позначимо множину цих агентів через N_1 .

Встановимо два порогові значення: α_i – кількість відсотків грошей агента i ($i\in N_1$), в якого подушний податок (ПП) забирає всю суму, яку він може віддати; β_j – на скільки відсотків агент j ($j\in N_2=N\setminus N_1$), в якого після розподілу за ПП ще залишаються гроші, згідний заплатити більше за ПП. В загальному випадку ці величини визначаються із урахуванням грошових запасів агентів ("прогресивне оподаткування").

Нехай $\hat{x}_i=b_i$ – величина ПП агента i ($i\in N_1$); $\underline{x_i}=b_i\left(1-\alpha_i\right)$ – максимальна кількість грошей, яку i-й агент згоден віддати "без заперечень". Кінцевий розподіл витрат для i-го агента буде належати проміжку $[\hat{x}_i,\underline{x_i}]$.

Позначимо $\Delta_i=\hat{x}_i-\underline{x_i}$ "дефіцит", що виникає при поступках агенту i. Сумарний дефіцит позначимо $\Delta=\sum_{i\in N_1}\Delta_i$. Даний дефіцит покривається за рахунок агентів, для яких величина подушного податку є меншою від їх запасу грошей.

Розглянемо множину агентів N_2 . Позначимо $\hat{x}_j$ – величину подушного податку для агента j ($j\in N_2$), $\overline{x_j}=\hat{x}_j\left(1+\beta_j\right)$ – максимальну кількість грошей, яку агент згоден віддати. Повинна виконуватись нерівність $\sum_{j\in N_2}\left(\overline{x_j}-\hat{x}_j\right)\ge\Delta$. В разі невиконання даної нерівності потрібно змінити величини α_i,β_j так, щоб дана нерівність виконувалась.

Аналогічно для рівневого податку позначимо через множину агентів, для яких частка витрат за рівневим податком (РП) рівна нулю. Можливо, для інших агентів з певних міркувань є прийнятним субсидування цих агентів (наприклад з метою збереження максимальної коаліції). Тоді α_i – кількість відсотків грошей агента i ($i\in N_1$), на яку даний агент субсидується; β_j – на скільки відсотків агент j ($j\in N_2=N\setminus N_1$), в якого після розподілу за РП ще залишаються гроші, згідний витратити на субсидування "бідних" агентів.

Нехай $\hat{x}_i$ – величина субсидії i ($i\in N_1$), $\hat{x}_i=\alpha_i b_i$. Тоді $\Delta=\sum_{i\in N_1}\hat{x}_i$ – сумарна величина субсидій, що покривається агентами з $N_2=N\setminus N_1$. Позначимо $\hat{x}_j=b_j$ – величину рівневого податку для агента j ($j\in N_2$), $\overline{x_j}=b_j\left(1+\beta_j\right)$ – максимальну кількість грошей, яку агент згоден віддати. Повинна виконуватись нерівність $\sum_{j\in N_2}\overline{x_j}\ge\Delta+c$. В разі невиконання даної нерівності потрібно змінити величини α_i,β_j так, щоб дана нерівність виконувалась.

Для подушного податку пропонується розподіляти витрати в такому порядку:

Для агентів $i\ (i \in N_1)$ встановлюємо їхню частку витрат як $x_i = \underline{x_i}$.

Для агентів $j\ (j \in N_2)$ встановлюємо $x_j = \hat{x}_j + x_j^{\Delta}$, де x_j^{Δ} визначається як частка витрат при розподілі дефіциту Д, причому вона може обчислюватись як за правилом знаходження подушного податку, так і за правилом знаходження рівневого податку.

Якщо в результаті отримуємо допустимий розподіл, процес зупиняється. Якщо ні – коректуємо величини поступок.

Аналогічно для рівневого податку:

Для агентів $i\ (i \in N_1)$ встановлюємо їхню частку витрат як $x_i = -\hat{x}_i$.

Для агентів $j\ (j \in N_2)$ встановлюємо $x_j = \hat{x}_j + x_j^{\Delta}$, де x_j^{Δ} визначається як частка витрат при розподілі дефіциту Д, причому вона може обчислюватись як за правилом знаходження подушного податку, так і за правилом знаходження рівневого податку.

Якщо в результаті отримуємо допустимий розподіл, процес зупиняється. Якщо ні – коректуємо величини поступок.

Отже, можливі чотири варіанти розподілу: ПП+ПП(перший і другий етапи обчислюються за ПП), ПП+РП(на першому етапі обчислюємо ПП, дефіцити ділимо за РП); та РП+ПП, РП+РП. Вибір конкретного механізму розподілу залишається на розсуд особи, що приймає рішення (ОПР).

Нечіткі узагальнення подушного та рівневого податків. Можливий і інший варіант розподілу – із застосуванням апарату нечітких множин [2, 3].

Припустимо, що розглядається розподіл витрат згідно подушного податку. Нехай частка витрат агента $i\left(i \in N_1\right)$ є нечітким числом, функція належності якого, використовуючи попередні позначення, має вигляд:

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x_i \le \underline{x}_i; \\ \dfrac{x_i - \hat{x}_i}{\underline{x}_i - \hat{x}_i},\ \underline{x}_i \le x_i \le \hat{x}_i; \\ 0,\ \textit{в інших випадках}. \end{cases}$$

Тобто $\mu_i\left(x_i\right)$ є правосторонніми нечіткими числами трапецеїдального вигляду. Позначимо $x_i = \left(\underline{x}_i, \hat{x}_i\right)$.

Аналогічно, для агентів $j\ (j \in N_2)$ маємо $x_i = \left(\hat{x}_i, \overline{x}_i\right)$. Тобто

$$\mu_j(x_j) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x_j \le \hat{x}_j; \\ \dfrac{x_j - \overline{x}_j}{\hat{x}_j - \overline{x}_j},\ \hat{x}_j \le x_j \le \overline{x}_j; \\ 0,\ \textit{в інших випадках}. \end{cases}$$

Тоді для знаходження вектору розподілу витрат $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ потрібно розв'язати таку задачу лінійного (зважаючи на вигляд функцій належності) програмування:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_k\left(x_k\right) \ge \lambda,\ \forall k \in N, \\ &\sum_{i \in N} x_i = c, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N. \end{aligned}$$

В результаті отримаємо вектор витрат $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і степінь задоволеності агентів цим розподілом – λ. Якщо дана величина не задовольняє ОПР, потрібно встановити інші значення для величин поступок α_i, β_j .

Для рівневого податку спершу потрібно встановити величини субсидій. Потім розподілити між агентами, що залишились величину $\Delta + c$ (звісно, повинно виконуватись обмеження $\sum_{j \in N_2} \overline{x_j} \ge \Delta + c$).

Отримуємо задачу:

$$\begin{aligned} &\lambda \to \max, \\ &\mu_j\left(x_j\right) \ge \lambda,\ \forall j \in N_2, \\ &\sum_{j \in N_2} x_i = c + \Delta, \\ &0 \le \lambda \le 1, x_j \ge 0, j \in N_2. \end{aligned}$$

В результаті також отримаємо вектор витрат $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і степінь задоволеності агентів – λ. Якщо дана величина не задовольняє ОПР, потрібно встановити інші значення для величин поступок і розв'язати задачу розподілу для нових даних.

Випадок нечіткої величини витрат. Нехай величина витрат $c = \left(\underline{c}, \hat{c}, \overline{c}\right)$ є нечітким числом трикутного вигляду. В цьому випадку потрібно розглянути дві задачі – задачу оптиміста ($c \in \left[\underline{c}, \hat{c}\right]$) і задачу песиміста ($c \in \left[\hat{c}, \overline{c}\right]$).

Перша задача (для ПП) матиме вигляд:

$$\lambda \to \max,$$
$$\mu_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N,$$
$$\mu_c(c) \ge \lambda,$$
$$\sum_{i \in N} x_i = c,$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N, c \in [\underline{c}, \hat{c}].$$

$\mu_c(c)$ – функція належності спільних витрат, а функції належності витрат агентів знаходяться із розрахунку, що ПП обчислюється для $\hat{c}$.

Для задачі песиміста потрібно перерахувати ПП для випадку $\overline{c}$. Сама ж задача матиме аналогічний вигляд:

$$\lambda \to \max,$$
$$\overline{\mu}_k(x_k) \ge \lambda, \forall k \in N,$$
$$\mu_c(c) \ge \lambda,$$
$$\sum_{i \in N} x_i = c,$$
$$0 \le \lambda \le 1, x_k \ge 0, k \in N, c \in [\hat{c}, \overline{c}].$$

$\overline{\mu}_k(x_k)$ – нові функції належності агентів.

Розв'язавши обидві задачі, за кінцевий розподіл вибираємо той, для якого λ є більшим. Якщо ж λ є однаковим у обох випадках, вибір розподілу залишається на розсуд ОПР.

Числовий приклад. Розглядається *n*=5 агентів, величина витрат, яку потрібно розподілити, *c*=30. Запаси грошей агентів відповідно рівні 4, 12, 20, 24, 30 [2]. Нехай б=25%, в=20%.

Для випадку чітких узагальнень подушного та рівневого податків отримаємо такі дані:

Номер агента	1	2	3	4	5	*c*
Запас грошей	4	12	20	24	30	
ПП	4	6.5	6.5	6.5	6.5	30
ПП+ПП	3	6.75	6.75	6.75	6.75	30
ПП+РП	3	6.5	6.5	6.5	7.5	30
РП	0	0	16/3	28/3	46/3	30
РП+ПП	-1	-3	20/3	32/3	50/3	30
РП+РП	-1	-3	16/3	28/3	58/3	30

Для нечітких узагальнень (зокрема і для нечіткого *c*=(29,30,31)), будемо мати:

Номер агента	1	2	3	4	5	*C*	*л*
Запас грошей	4	12	20	24	30		
ПП	4	6.5	6.5	6.5	6.5	30	-
Нечіткий ПП	98/31	208/31	208/31	208/31	208/31	30	26/31
НПП+Нечітка *с*	113/36	481/72	481/72	481/72	481/72	1075/36	31/36
РП	0	0	16/3	28/3	46/3	30	
Нечіткий РП	-1	-3	272/45	476/45	782/45	30	1/3
НРП+Нечітке *с*	-1	-3	578/93	986/93	1598/93	30	16/31

Як для випадку вирівнювання витрат, так і для випадку вирівнювання прибутків, вищі значення λ досягаються, якщо величина, яку потрібно розподілити є нечіткою. Це інтуїтивно пояснюється тим, що чим більша нечіткість, тим більше у агентів є можливості варіювати свої частки розподілу, і тим більшою є ймовірність знайти розподіл, який би максимально всіх влаштовував.

Аксіоматична характеризація. Нехай *r* – деякий метод розподілу, тобто $r(N,c,b)$ є деякою функцією, котра залежить від множини агентів, сукупних витрат і вектора початкових запасів грошей агентів. При цьому для кожного набору параметрів (N,c,b) метод розподілу *r* визначає вектор витрат $x = r(N,c,b)$.

Наведемо деякі базові аксіоми, характерні для методів розподілу [1].

Монотонність за ресурсами: $\{c \le c'\} \Rightarrow \{r(N,c,b) \le r(N,c',b)\}, \forall N,c,c',b.$

Дана властивість гарантує, що при зростанні сукупних витрат, частка витрат кожного агента не зменшиться.

Наступні дві властивості забезпечують відсутність дискримінації між агентами.

Рівне ставлення до рівних: $b_i = b_j \Rightarrow x_i = x_j, \forall N,b,c; \forall i,j \in N,$ (при однаковому запасі грошей, частки витрат агентів також збігаються).

Симетричність: $x = r(N,c,b)$ є симетричною функцією відносно змінних $b_i, \forall i \in N$.

Зазначимо, що з властивості симетричності випливає рівне ставлення до рівних.

Наведені вище методи, як подушний і рівневий податок, так і їх розширення (як чіткі, так і нечіткі) задовольняють наведеним трьом аксіомам, так як вони є загальними для багатьох методів розподілу.

Приведемо деякі аксіоми, характерні суто для подушного та рівневого податків.

Нехай $|N| = n$ потужність множини агентів N. Одними з основних аксіом, що характеризують подушний та рівневий податки є аксіоми Верхньої та Нижньої межі.

Нижня межа: $\forall N,c,b,i : x_i = r_i(N,c,b) \geq \min\left\{b_i, \frac{c}{n}\right\}$.

Верхня межа: $\forall N,c,b,i : x_i = r_i(N,c,b) \leq \left\{\frac{c}{n} + \left(b_i - \frac{b_N}{n}\right)\right\}_+$.

Легко бачити, що подушний податок задовольняє Нижню Межу, а рівневий – Верхню. Нижня Межа гарантує, що агент не віддасть більше грошей, ніж в нього є в наявності. Двоїсто, верхня межа гарантує, що прибуток i-го агента не більше середнього прибутку всіх агентів. У випадку, якщо прибуток i-го агента виходить менше середнього, він не платить рівневий податок.

При малих c, властивість нижньої межі гарантує рівномірний розподіл витрат: $x_i = \frac{c}{n}, \forall i$. Аналогічно, якщо c достатньо близьки до b_N, верхня межа гарантує вирівнювання прибутків ($b_i - x_i = b_j - x_j, \forall i,j$).

При $|N| = 2$, Нижня Межа характеризує подушний податок, і (двоїсто) Верхня Межа характеризує рівневий податок. Але це не поширюється на випадок $|N| \geq 3$.

Розглянемо наступну властивість.

Узгодженість з нулем (Zero-Consistency): $\forall N,c,b,i : \{b_i = 0\} \Rightarrow \left\{r(N,c,b)_{[N\setminus i]} = r(N \setminus i, c, b_{[N\setminus i]})\right\}$.

Дана властивість означає, що агент, котрий не має грошей (і відповідно нічого не платить), жодним чином не впливає на розподіл витрат серед інших агентів.

Наступні дві аксіоми відносяться до структурної інваріантності. Ці аксіоми дозволяють декомпозицію обчислення часток агентів, якщо наявні ресурси можна оцінити зверху або знизу.

Верхня композиція: $\forall N,b,c,c' : \{0 \leq c \leq c' \leq b_N\} \Rightarrow \{r(N,c,b) = r(N,c,r(N,c',b))\}$.

Нижня композиція: $\forall N,b,c,c' : \{0 \leq c' \leq c \leq b_N\} \Rightarrow \{r(N,c,b) = r(N,c',b) + r(N,c-c',b-r(N,c',b))\}$.

Якщо ми спершу розподілимо витрати c', а потім виявиться, що наявні витрати насправді менші, і рівні c, Верхня Композиція дозволяє нам взяти за початкові запаси грошей $r(N,c',b)$, і з врахуванням їх, розподіляти далі витрати c. Тобто ми можемо, не враховувати початкові запаси грошей b, якщо ми знаємо верхню межу наявних витрат. Зазначимо, що з властивості Верхньої Композиції випливає Монотонність за ресурсами. Якщо ми знаємо нижню межу c' наявних ресурсів c, Нижня Композиція дозволяє розподілити витрати $r(N,c',b)$, відняти їх від початкових запасів грошей і розподілити залишок $c - c'$ згідно із зменшених запасів $b - r(N,c',b)$.

Твердження 1 [1]: Подушний податок характеризується такими трьома аксіомами: Нижня Межа, Нижня Композиція і Узгодженість з нулем. Рівневий податок характеризується такими трьома аксіомами: Верхня Межа, Верхня Композиція, Узгодженість з нулем.

Очевидно, що наведені вище узагальнення подушного та рівневого податків (як чіткі, так і нечіткі) порушують дану характеризацію. Зокрема для узагальнень подушного податку не виконуватиметься аксіома Нижньої Межі (так як частка витрат агента може бути менше тої частки, що визначається йому подушним податком), аналогічно для узагальнень рівневого податку не буде виконуватись аксіома Верхньої Межі.

Що стосується третьої аксіоми, Узгодженості з нулем, то вона буде виконуватись як для узагальнень подушного, так і для узагальнень рівневого податків. Припустимо, що для деякого агента $b_i = 0$. Подушний та рівневий податок для цього агента рівні нулю. Функція належності для нечіткого узагальнення подушного податку залежить від добутку подушного податку (чіткого) на величину поступки, тому (при ПП=0) частка витрат i-го агента теж буде рівною нулю. Для рівневого податку величина субсидії рівна початковому запасу грошей, множеному на величину поступки. Тому при $b_i = 0$, частка витрат i-го агента буде рівна нулю.

***N*-ядро.** Розглянемо нечіткі узагальнення N-ядра, які базуються на тому самому принципі, що і нечіткі узагальнення подушного і рівневого податків.

В чітких умовах N-ядро може бути знайдено за алгоритмом, запропонованим у такій теоремі.

Теорема [1]: N-ядро відповідає таким часткам витрат:

$$c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i : \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\} = c \Rightarrow x_i = \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\}, i = \overline{1,n}.$$

$$c \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i : \sum_{i=1}^{n} \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \Rightarrow x_i = b_i - \min\left\{\alpha, \frac{b_i}{2}\right\}, i = \overline{1,n}.$$

Тобто, існують два крайні випадки – коли частки витрат (або прибутки) агентів розраховуються як подушний (при $c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$) або ж рівневий (при $c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$ податок від вектору початкових запасів $\frac{1}{2}b = \left(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \ldots, \frac{1}{2}b_n\right)$.

Між цими крайніми випадками можливі і інші, "компромісні" розподіли.

Розглянемо дві групи агентів – N_1 і N_2. Припустимо, що в першій групі знаходяться агенти, які хотіли би заплатити менше того, що їм приписує N-ядро, а в другій групі – агенти, згодні покрити цей "дефіцит".

Розглянемо агентів першої групи. Позначимо $\underline{x_i}$ бажану частку витрат агента i, а $\hat{x}_i$ – його частку витрат при N-ядрі. Частки витрат агентів із цієї групи будуть правосторонніми нечіткими числами $(\underline{x_i}, \hat{x}_i)$.

Для другої групи позначимо через $\hat{x}_i$ відповідну величину *N*-ядра, а $\overline{x}_i$ – максимальну величину, яку агент згоден заплатити. Тоді частку затрат окремого агента можна задати правостороннім нечітким числом $(\hat{x}_i, \overline{x}_i)$.

Таким чином, розподіл витрат зводиться до задачі лінійного програмування, що є аналогічно вже розглянутим:

$$\lambda \to \max,$$
$$\mu_k(x_k) \geq \lambda,\ \forall k \in N_1, \mu_j(x_j) \geq \lambda,\ \forall j \in N_2,$$
$$\sum_{i \in N} x_i = c,$$
$$0 \leq \lambda \leq 1, x_i \geq 0, i \in N.$$

Задачу пошуку оптимального розв'язку пропонується вирішувати в декілька етапів. На першому етапі розв'язуємо задачу при початкових даних, отримавши розподіл і відповідний рівень λ. Якщо він не задовольняє ОПР, то ми звужуємо область визначення нечітких чисел, які відповідають часткам витрат агентів. Продовжуємо процес до тих пір, поки не буде досягнуто оптимальний рівень.

Відмітимо, що при $\lambda = 1$ частки витрат агентів будуть рівні часткам, які відводяться їм *N*-ядром.

Розглянемо приклад.

Є три агента, запаси грошей яких рівні відповідно 100, 200, 300. Необхідно розподілити витрати величиною 100 одиниць.

N-ядро приписує кожному агенту частку витрат, рівну $33\frac{1}{3}$. Розглянемо і крайні випадки (подушний і рівневий податки при половинному запасі грошей агентів):

Запаси грошей	100	200	300
ПП($\frac{1}{2}$)	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
РП($\frac{1}{2}$)	0	25	75
N-ядро	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$

Оскільки $c \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i$, то N-ядро співпадає з ПП($\frac{1}{2}$).

Для першого і другого агента величина РП($\frac{1}{2}$) є меншою, ніж величина *N*-ядра. Тому для них є більш бажаним ситуація, при якій вони будуть платити РП($\frac{1}{2}$). Віднесемо їх в множину N_1. В множині N_2 буде тільки один агент – номер три. Для нього РП($\frac{1}{2}$) вище величини *N*-ядра. Припустимо, що це і є максимальна сума, яку він згоден заплатити.

Частки витрат агентів будуть нечіткими правосторонніми числами (0, $33\frac{1}{3}$), (25, $33\frac{1}{3}$), ($33\frac{1}{3}$, 75).

Підставивши дані у вищезгадану задачу лінійного програмування, отримаємо розподіл витрат (14,79; 26,93; 58,28) при рівні л=0,528.

Припустимо, що цей розподіл не задовольняє ОПР. Зробимо наступну ітерацію, при нечітких частках витрат агентів, рівних (14,79; $33\frac{1}{3}$), (26,93; $33\frac{1}{3}$), ($33\frac{1}{3}$; 58,28). Отримаємо розподіл витрат (24,06; 30,14; 45,8) при рівні л=0,5. Продовжуємо, поки результат не задовольнить ОПР.

Висновки. В роботі наведено алгоритми пошуку оптимальних розподілів, що враховують нечіткість середовища. Наведено результати застосування алгоритмів та порівняно їх із стандартним розподілом за подушним та рівневим податком. Кінцевий вибір алгоритму розподілу здійснюється особою, що приймає рішення. Обраний принцип повинен враховувати той чи інший базовий принцип розподілу (вирівнювання витрат чи прибутків). Наведені узагальнення враховують базові аксіоми для багатьох методів розподілу – монотонність, симетричність, рівне ставлення до рівних. В той же час порушуються базові для характеризації подушного і рівневого податків аксіоми Нижньої та Верхньої межі. Також в роботі наведено нечітке узагальнення *N*-ядра, яке випливає із відповідних узагальнень для подушного та рівневого податків.

1. Moulin, Herve. "Axiomatic Cost and Surplis-Sharing," Working Papers 2001–06, Rice University, Department of Economics, 2001. 2. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с. 3. Згуровський М.З., Зайченко Ю.П. Модели и методы принятия решений в нечетких условиях. – К.: Наукова думка, 2011. – 275 с.

Надійшла до редколегії 11.06.12

УДК 517.929

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук, проф.

METOD OF OPTIMIZATION THE LINEAR SYSTEM STOCHOSTIC DIFFERENTIOL EQUATIONS

В роботі досліджується лінійне стохастичне диференціальне рівняння з марківськими збуреннями. За допомогою рівняння Белмана розв'язується задача оптимального керування з квадратичним критерієм якості.

We consider the linear stochastic differential equation with Markovian perturbations. Using Bellman equation solves the problem of optimal control with a quadratic quality criterion.

STATEMENT OF PROBLEM. We consider the system of linear differential equations with variable coefficients:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t,\xi(t))X(t) + B(t,\xi(t))U(t), \tag{1}$$

where $\xi(t)$ — random Marcovian process taking finite number of variety $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_q$ with probability

$$p_k(t) = P\{\xi(t) = \Theta_k\} \ (k = 1, \ldots, q),$$

wich satisfied the following system of differential equantions [1]

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{S=1}^{q} \alpha_{ks}(t) p_s(t) \ (k=1,\ldots,q), \ \ \alpha_{ks}(t) \geq 0 \ \ (k \neq s), \sum_{k=1}^{q} \alpha_{ks}(t) = 0 \ (k,s=1,\ldots,q). \tag{2}$$

For describe the densities of discrete continuous random process we use the function

$$f(t,X,\xi) = \sum_{k=1}^{q} f_k(t,X)\delta(\xi - \Theta_k),$$

where function $f_k(t,X)$ $(k=1,2,\ldots,q)$ called the particular probability. Introduce the particular mathematical expectation of the function $g(t,X(t),\xi(t))$

$$\left\langle g\left(t,X(t),\xi(t)\right)\right\rangle_k = \int_{E_m} g(t,X,\Theta_k) f_k(t,X)dX,$$

E_m — the space of variable X,

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^*, \ dX = dx_1 \, dx_2 \ldots dx_m .$$

For mathematical expectation of the function $g(t,X(t),\xi(t))$, we receive

$$\left\langle g\left(t,X(t),\xi(t)\right)\right\rangle_k = \int_{E_m} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(t,X,\xi\right) f\left(t,X,\xi\right) d\xi \right) dx = \sum_{k=1}^{q} \int_{E_m} g\left(t,X,\Theta_k\right) f_k\left(t,X\right) dX = \sum_{k=1}^{q} \left\langle g\left(t,X,\xi(t)\right)\right\rangle_k .$$

Introduce denotion for particular moments of second ordinary

$$M_k(t) = \left\langle X(t), X^*(t) \right\rangle_k = \int_{E_m} XX^* f_k(t,X)dX$$

For matrix of second moments we find:

$$M(t) = \left\langle X(t), X^*(t) \right\rangle = \sum_{k=1}^{q} M_k(t).$$

We introduced for the optimal control

$$U(t) = S(t,\xi(t))X(t)$$

under which the value of a quadratic functional

$$I(t) = \left\langle \int_0^{\infty} \left(X^*(\tau) C\left(\tau,\xi(\tau)\right) X(\tau) \right) + U^*(\tau) D\left(\tau,\xi(\tau)\right) U(\tau) d\tau \right\rangle.$$

reaches its minimum.

MAIN RESULTS. Introduce for particular value of random matrix:

$$A(t,\Theta_k)A_{k,} \ B(t,\Theta_k) = B_k(t), \ C(t,\Theta_k) = C_k(t), \ D(t,\Theta_k) = D_k(t), \ S(t,\Theta_k) = S_k(t) \quad (k = 1,2,\ldots,g).$$

For particular moments of the second ordinary $M_k(t)$ we have system of linear differential equation [3, 4]

$$\frac{dM_k(t)}{dt}=\left(A_k(t)+S_k^*(t)B_k^*(t)\right)+\sum_{s=1}^{q}\sigma_{ks}(t)M_s(t)+M_k(t)\left[A_k^*(t)+S_k^*(t)B_n^*(t)\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s(t) \quad (3)$$

In paper [6] we find necessary condition of optimization

$$\frac{DH}{DS_k}=0 \quad (k=1,\dots q)$$

where H — the function of Hamilton.

$$H=\sum_{k=1}^{q}\Psi_k\circ\left[(A_k(t)+B_k(t)S_k)M_k+M_k(A_k^*(t)+S_k^*B_k^*(t)\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s\right]+\sum_{k=1}^{q}(C_k(t)+S_k^*D_k^*((t)S_n)\circ M_k\ .$$

The symbol "$\circ$" — denote of scalar multiplication of matrix A and B equal dimension with elements a_{ij},b_{ij} $(i=1,\dots,l;i=1,\dots,m)$

$$A\circ B=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}b_{ij}$$

BASIS property of scalar multiplication

1. $A\circ B=B\circ A=A^*\circ B^*$
2. $A\circ B=S_p(AB^*)=sp(BA^*)$
3. $AMB\circ S=A^*SB^*\circ M.$

Ibiden show, variation of matrix $M_k(t),\Psi_k(t)$ $(k=\overline{1,q})$ is define of the system of matrix differential equation:

$$\frac{dM_k}{dt}=\frac{DH}{D\Psi_k},\ \frac{d\Psi_k}{dt}=-\frac{DH}{DM_k}\ (k=\overline{1,q}) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\frac{dM_k(t)}{dt}&=\left[A_k^*(t)-B_k(t)D_k^{-1}(t)B_k^*(t)+\Psi_k(t)\right]\times M_k(t)+\\&+M_k(t)\left[A_k^*(t)-\Psi_k(t)B_k(t)D_k^{-1}(t)\times B_k^*(t)\right]+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s(t)\end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{d\Psi_k(t)}{dt}=-A_k^*(t)\Psi_k-\Psi_k(t)A_k(t)-C_k(t)+\Psi_k^*(t)B_k(t)D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t)-\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)\Psi_s(t) \qquad (k=\overline{1,q}) \quad (6)$$

For synthesis' optimal control we search solution the for system with initial condition

$$\Psi_k(T)=0 \quad (k=1,\dots,q)$$

Analogous result may receive from Bellman's equations [2].
Introduce operator

$$\min\left\langle\int_t^{\infty}X^*(\tau)\left[C(\tau,\xi(\tau))+S^*(\tau,\xi(\tau))D(\tau,\xi(\tau))S(\tau,\xi(\tau))\right]X(\tau)d\tau\right\rangle=\sum_{k=1}^{q}\Psi_k(t)\circ M_k(t). \quad (7)$$

For synthesis' optimal control we use Bellman stochastic equation

$$\min_{S(\tau)}\left\{\left\langle\frac{dv(t,X(t))}{dt}+X^*(t)\left[C(t,\xi(t))+S^*(t,\xi(t))D^*(t,\xi(t))S(t,\xi(t))\right]X(t)\right\rangle\right\}=0 \quad (8)$$

where derivation from operator $v(t,X(t))$ satisfied of the linear system equation

$$\frac{dX(t)}{dt}=(A(t,\xi(t))+B(t,\xi(t))S(t,\xi(t))X(t)$$

From (7) discount (4), (5) we have

$$\begin{aligned}\min_{S_k}\sum_{k=1}^{q}\Big\{&\frac{d\Psi_k(t)}{dt}\circ M_k(t)+\Psi_k(t)\left[A_k(t)+B_k(t)S_k\right]M_k(t)+M_k(t)\left[A_k^*(t)+S_kB_k^*(t)+\right.\\&\left.+\sum_{s=1}^{q}\alpha_{ks}(t)M_s(t)\right]+C_k(t)\circ M_k(t)+S_k^*D_k(t)S_k\circ M_k(t)\Big\}=0\end{aligned}$$

After derivation the sum in formula (9) on matrix S_k , me have equality we receive

$$S_k=-D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t)\ (k=\overline{1,q})$$

Exception matrix S_k from (9):

$$\sum_{k=1}^{q} M_k(t)\circ\left[\frac{d\Psi_k(t)}{dt}+C_k(t)+A_k^*(t)\Psi_k(t)+\Psi_k(t)A_k(t)+\sum_{S=1}^{q}\alpha_{sk}\Psi_s(t)-\Psi_k(t)B_k(t)\times\right. \\ \left.\times D_k^{-1}(t)B_k^*(t)\Psi_k(t)\right]=0 \qquad (10)$$

For solution of the system of equation (10) for by anything variety $M_k(t)\left(k=\overline{1,q}\right)$ enough observance the system of equation (5), (6).

Conclusion: the Bellman equation (10) let realize synthesis optimal control for system of equation (1) with functional $I(t)$

1. Artemjev V.M., Kozakov I.E. Direktory on theory automftic control. – Moscow.: "Nauka"; 1987. 2. Rojtenberg I.N. Automatic Control. – Moscow. – "Nauka"; 1978. 3. Valeev K.G. Split spectrum of matrixs – Kiev. – "Vusha shkola", 1986. 4. Tichonov V.I., Mironov N.A. Marcov process. – Moscow. – Sov. Radio. 1977. 5. Valeev K.G., Strigak O.L. Method of moments equation. – Kiev. AN USSR, 1986. 6. Valeev K.G., Jalladova I.A. Optimization of linear Stochastic equation. – Kiev. 1

Надійшла до редколегії 10.09.12

УДК 519.21

С. Доценко, канд. фіз.-мат. наук, доц.,
Н. Тмєнова , канд. фіз.-мат. наук

НОТАТКИ ПРО ДЕЯКУ ГРУ ПРОГНОЗУВАННЯ

Розглянуто ігрову ситуацію двох осіб в задачі оцінки реалізації випадкової величини знизу. Знайдено стратегії гравців, що забезпечують ситуацію рівноваги за Нешем.

Two persons game based on random value evaluation from below problem is considered. For the game given Nash equilibrium strategies are found.

В [1] була розглянута така гра. Нехай n гравців вгадують значення випадкової величини, рівномірно розподіленої на інтервалі $[0;1]$. Гра ведеться за наступними правилами. Нехай гравці незалежно один від одного вибирають свої прогнози з інтервалу $[0;1]$. Гравець, чий прогноз найбільш близький до реалізації випадкової величини знизу, виграє одиницю, інші (тобто ті, які назвали менші, ніж він, значення, і ті, чиї прогнози перевищили реалізацію випадкової величини), не одержують нічого.

Розглянемо частинний випадок $n=2$. Легко показати, що така гра не має рівноваг в чистих стратегіях, оскільки функція найкращої відповіді має такий вигляд

$$BR(x)=\begin{cases} x+\varepsilon, & x<1/2 \\ 0, & x\geq 1/2 \end{cases},$$

і, таким чином, не існує такої пари (x,y), що $y=BR(x), x=BR(y)$.

Будемо шукати рівноважні змішані стратегії гравців (однакові для обох гравців) у вигляді розподілу $G(x)$ на деякому інтервалі $[0;a]$, $a\leq 1$,

$$G(x)=\chi(x<a)\int_0^x g(t)dt+\chi(x\geq a)\,.$$

Позначимо функції виграшу гравців відповідно через $H_1(x,y), H_2(x,y)$. $H_1(x,G)$ буде означає виграш 1-го гравця, якщо він застосовує чисту стратегію x, а його супротивник – змішану стратегію $G(y)$.

Якщо $a\leq x\leq 1$, то, оскільки розподіл $G(y)$ зосереджений на інтервалі $[0;a]$, $a\leq 1$, то вибраний прогноз буде більше, ніж прогноз супротивника, таким чином, перший гравець виграє, якщо його прогноз буде менший, ніж реалізація випадкової величини, тобто $H_1(x,G)=1-x$.

Якщо $x\geq a$, то згідно формулі повної ймовірності

$$H_1(x,G)=P\left(y<x<\xi\right)+P\left(x<\xi,y>\xi\right)=G(x)(1-x)+\int_x^a g(t)(t-x)dt\,.$$

Інтегрування частинами дає

$$\int_x^a g(t)(t-x)dt=-\int_x^a (t-x)d\,\bar{G}(t)=\int_x^a \bar{G}(t)dt\,,$$

і, таким чином,

$$H_1(x,G)=P\left(y<x<\xi\right)+P\left(x<\xi,y>\xi\right)=G(x)(1-x)+\int_x^a \bar{G}(t)dt\,.$$

За умовою рівноваги $H_1(x,G)$ буде однаковим для всіх x таких, що $g(x)>0$, тобто $\frac{\partial H_1(x,G)}{\partial x}=0$, звідси $g(x)=\frac{1}{1-x}$.

З умови нормування $\int_0^a \frac{1}{1-x}dx = 1$ знаходимо, що $a = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$.

Таким чином $G(x) = \begin{cases} -\ln(1-x), \; x \le 1 - 1/e \\ 1, \; x > 1 - 1/e \end{cases}$, а значення гри дорівнює $1 - a = \frac{1}{e} \approx 0.368$.

При корпоративній поведінці гравців оптимальна стратегія очевидна – один з гравців вибирає нуль і обов'язково одержує одиничний виграш. Ціна анархії (тобто відношення сумарного виграшу в ігровій ситуації до сумарного виграшу при корпоративній поведінці) складає $\frac{1/2}{1/e} = \frac{e}{2}$.

Розглянемо узагальнення даної гри. Нехай тепер спостережувана випадкова величина ξ має заданий розподіл F (накладемо обмеження, що ξ – невід'ємна випадкова величина, яка має щільність). Як і у попередньому (частинному) випадку, будемо шукати рівноважні стратегії гравців у вигляді розподілу $G(x)$ на деякому інтервалі $[0;a]$. Тоді очікуваний виграш першого гравця, що застосовує чисту стратегію, за умови, що його суперник застосовує змішану стратегію з функцією розподілу $G(y)$, набуває вигляду

$$H_1(x,G) = P\left(x < \xi < y\right) + P\left(y < x < \xi\right) = \int_{t=x}^{a} f(t)\bar{G}(t)dt + G(x)\bar{F}(x).$$

З умови рівноваги маємо

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = -f(x)\bar{G}(x) + G'(x)\bar{F}(x) - G(x)f(x) = G'(x)\bar{F}(x) - f(x) = 0.$$

Звідси $G'(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$, отже $G(x) = -\ln\left(\bar{F}(x)\right)$.

З умови нормування $G(a) = 1$ знаходимо, що a є коренем рівняння $\bar{F}(a) = e^{-1}$. Таким чином,

$$G(x) = \begin{cases} -\ln\left(\bar{F}(x)\right), \; 0 \le x \le a \\ 1, \; x > a \end{cases},$$

і значення гри дорівнює e^{-1} незалежно від вигляду функції розподілу.

Зокрема, якщо F – показниковий розподіл з параметром 1, то шуканий рівноважний розподіл $G(x)$ буде рівномірним на інтервалі $[0;1]$.

Розглянемо модифікацію вихідної гри. Нехай гравцям виплачується виграш у випадку, якщо реалізація випадкової величини виявиться меншою обох прогнозів, і, таким чином, дана гра стає грою з фіксованою сумою.

Тоді очікуваний виграш першого гравця дорівнює

$$H_1(x,G) = P\left(x < \xi < y\right) + P\left(y < x < \xi\right) + \frac{1}{2}\left[P\left(\xi < x < y\right) + P\left(\xi < y < x\right)\right] =$$

$$= \int_{t=x}^{a} f(t)\bar{G}(t)dt + G(x)\bar{F}(x) + \frac{1}{2}\left[F(x)\bar{G}(x) + \int_0^x g(t)F(t)dt\right].$$

В даному випадку умова рівноваги $\frac{\partial H_1}{\partial x} = 0$ призводить до диференціального рівняння першого порядку відносно функції розподілу шуканої рівноваги

$$\bar{G}'(x) + \frac{1}{2}\frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)}\bar{G}(x) = \frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Частинний розв'язок рівняння, що задовольняю початковій умові $\bar{G}(0) = 1$ має вигляд $\bar{G}(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{\bar{F}(x)}}$, таким чином

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\bar{F}(x)}} - 1, \; 0 \le x \le a \\ 1, \; x > a \end{cases},$$ де a є коренем рівняння $F(a) = \frac{3}{4}$.

Розглянемо ще одну модифікацію даної гри, яку назвемо частковою кооперацією. Нехай кожен з гравців, що зробив кращий прогноз, ніж його суперник, ділиться виграшем з суперником, при цьому виплачує йому суму $\frac{\alpha}{2}$ і залишає собі $1 - \frac{\alpha}{2}$, де $\alpha \in [0;1]$. Якщо реалізація випадкової величини виявилася меншою прогнозів обох гравців, то вони не одержують нічого. При $\alpha = 0$ це звичайна некооперативна гра, що розглянута вище. При $\alpha = 1$ це кооперативна гра, в якій кожному з гравців байдуже, хто зробить точніший прогноз – він або інший гравець. Як відмічалося вище, оптимальні стратегії гравців в цьому випадку тривіальні – вибирати нульовий прогноз з ймовірністю 1. При проміжних значеннях α виникає компромісна ситуація, в якій з одного боку кожний з гравців прагне зробити точніший прогноз, ніж суперник (в цьому випадку він одержує більшу винагороду), з другого боку у гравців є загальна мета – уникнути несприятливого результату, при якому вони не одержують нічого.

Тоді

$$H_1(x,G) = \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[P\left(x<\xi<y\right)+P\left(y<x<\xi\right)\right]+\frac{\alpha}{2}\left[P\left(y<\xi<x\right)+P\left(y<x<\xi\right)\right] =$$
$$= \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\int_{t=x}^{a} f(t)\bar{G}(t)dt + G(x)\bar{F}(x)\right]+\frac{\alpha}{2}\left[\int_0^x g(t)\big(F(x)-F(t)\big)dt + \int_{t=x}^{a} g(t)\bar{F}(t)dt\right].$$

Враховуючи, що $F(x)-F(t)=\bar{F}(t)-\bar{F}(x)$, другий доданок можна представити у вигляді $\frac{\alpha}{2}\left[\int_0^a \bar{F}(t)g(t)dt-\bar{F}(x)G(x)\right]$, і таким чином умова рівноваги $\frac{\partial H_1(x,G)}{\partial x}=0$ набуває вигляду

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\left(G'(x)\bar{F}(x)-f(x)\right)+\frac{\alpha}{2}\left(f(x)G(x)-\bar{F}(x)G'(x)\right)=0,$$

що призводить до рівняння

$$G'(x)+\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\frac{f(x)}{\bar{F}(x)}G(x)=\frac{2-\alpha}{2(1-\alpha)}\frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Звідси

$$G(x)=\frac{2-\alpha}{\alpha}\left(1-\bar{F}(x)^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}\right).$$

Верхня границя a розподілу $G(x)$ знаходиться з умови $G(a)=1$, звідси $\bar{F}(a)=\left(\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{\alpha}}$.

Помітимо також, що $\frac{\partial G(x)}{\partial \alpha}>0$ для всіх значень, отже, знайдена параметрична родина рівноважних розподілів стохастично монотонно зменшується із зростанням параметра α.

1. В.В.Мазалов. Математическая теория игр и приложения. Изд-во "Лань", СПБ, 2010, стр. 115–121.

Надійшла до редколегії 17.09.12

УДК 681.3

Д. А. Єфімов, д-р мед. наук, С. І. Кіфоренко, д-р біол. наук,
М. В. Лавренюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.

КОМП'ЮТЕРНА ПІДТРИМКА ДІЄТОТЕРАПІЇ ПРИ ДІАБЕТІ

Описується інформаційна технологія синтезу системи підтримки прийняття рішень у діабетології при виборі дієти, адекватної енерговитратам. Інформаційне ядро системи становлять спеціалізовані бази даних по продуктах харчування, типам і видам активності. Розроблене програмне забезпечення реалізує системи керування базами, обробляє інформаційні масиви, забезпечує якісну доступність, візуалізацію, зручний інтерфейс користувача. Це сприяє поліпшенню якості медичних послуг у лікувальних установах діабетологічного профілю.

Information technology of synthesis of decision support system in diabetology at choosing the diet according to energy consumption is described. Information kernel of system consists of specialized databases of food products and activities. The developed software implements database control system, processes information arrays and provides qualitative accessibility, visualization, and user-friendly interface. It promotes the improvement of health services quality in medical institutions of diabetologic specialization.

Вступ. Сучасний етап розвитку характеризується стрімким розповсюдженням нових інтелектуальних інформаційних технологій та їх впровадженням у повсякденне життя. Ці технології особливо актуальні в медицині, у тому числі й у діабетології, оскільки лікування хворих на діабет – це складний тривалий процес, що включає в себе комплекс заходів, який охоплює різні види життєдіяльності пацієнта й способи коригуючих впливів на його стан здоров'я.

Надзвичайна поширеність цукрового діабету прийняла, за оцінками ВОЗ, характер неінфекційної епідемії. Посилюючими факторами при цьому є різке зменшення фізичної активності й ожиріння. Все це ставить у розряд першочергових проблему розробки ефективного інструментарію для індивідуальної оперативної оцінки раціональних коригуючих впливів, доступного для використання пацієнтами з мінімальним рівнем спеціальних знань. В основі багатьох хронічних хвороб, у тому числі й діабету, – неузгоджене з активністю незбалансоване харчування. Тому стратегічним напрямком у боротьбі з катастрофічним ростом хронічних хвороб, за рекомендацією ВОЗ, є здорове харчування, як "превентивний фактор" [1,2].

В основі системи лікування разом із цукрознижуючою терапією й рекомендаціями щодо фізичних навантажень особливе місце займає дієта з дозованим вмістом вуглеводних компонентів. При діабеті збалансована дієта – це не фон для лікування, як при інших захворюваннях, а один з основних лікувальних засобів. Відзначимо, що це важливо для діабету 1-го типу, при якому необхідно знати кількість прийнятих з їжею вуглеводів і також еквівалентну кількість хлібних одиниць, які в ній містяться. Це необхідно для правильного вибору дози інсуліну. Для діабету ж 2-го типу істотним є розрахунок адекватної калорійності харчування, що у цьому випадку є основним лікувальним фактором у всьому комплексі призначуваної терапії. Харчування – єдиний лікувальний фактор при легкій формі захворювання, основний – при діабеті середньої тяжкості, і необхідне підґрунтя для лікування його тяжких форм [3,4].

Пацієнти, що страждають на діабет, мають потребу в спеціалізованій інформаційній підтримці, оскільки їм постійно доводиться приймати рішення щодо корекції лікувальних заходів, а також подальшої життєдіяльності для підтримки діабету в стані компенсації. За останні роки обсяг інформації, яку необхідно обробляти як лікареві, так і пацієнтові, значно збільшився. При цьому необхідно врахувати, що медична інформація взагалі, і діабетологічна зокрема, погано організована. Питання про її обробку, зберігання, доступність й інтеграцію стає усе більше актуальним. У той же час слабка структурованість інформаційного поля ускладнює процес реалізації доступу до необхідних даних.

Для ефективного усунення цих проблем необхідне застосування комп'ютерних технологій, в основі яких синтез баз даних (БД), що дозволяють обробляти інформаційні масиви, забезпечувати якісну доступність, візуалізацію за рахунок створення зручного інтерфейсу користувача**.**

Постановка завдання. Для вирішення проблеми зниження хаотичності й покращення доступу до необхідних для пацієнта даних з урахуванням пріоритетності дієтичного фактора в комплексному підході щодо лікування всіх типів діабету, поставлено завдання: розробити методичні основи й комп'ютерну систему підтримки прийняття рішень при виборі дієти, адекватної енерговитратам, в основі якої – технологія синтезу спеціалізованих баз даних, орієнтованих на застосування в лікувальній установі діабетологічного профілю.

Розроблювальна система базується на даних і знаннях фахівців Інституту ендокринології й обміну речовин АМН України, а також на інформації з літературних джерел і методичних рекомендацій, посібників і монографій провідних спеціалістів у цій предметній області [5–9].

При аналізі діабетологічного інформаційного простору увага, насамперед, акцентується на інформаційному полі знань підтримки гомеостатичної рівноваги системи вуглеводного обміну в нормі й при різних видах і ступенях патології. Керування рівнем цукру крові в нормі забезпечується складною фізіологічною взаємодією внутрішніх нейроендокринних, гуморальних і енергетичних факторів. При порушенні цієї налагодженої взаємодії виникає необхідність використання зовнішніх керуючих впливів з метою мінімізувати виникаючу незбалансованість в системі регуляції. У нашому випадку такими впливами можуть бути раціональне дозування продуктів харчування й різних типів і видів фізичної й інтелектуальної активності.

Основні принципи, сформульовані наукою про раціональне харчування – помірність, різноманітність, режим. Сенсом помірності є збалансованість, тобто енергоємність харчування повинна бути адекватна енерговитратам на забезпечення процесів життєдіяльності. Добова потреба в енергії залежить від багатьох факторів: віку, статі, зросту, виду трудової діяльності, і т. ін. Надлишкове харчування веде до збільшення маси тіла, порушення обміну речовин, ожиріння і, як наслідок, підвищує ризик захворювання на діабет 2-го типу. Тому необхідно стежити за харчуванням і розумно підходити до виконання основних вимог, які забезпечують його раціональність. Є багато публікацій, що інформують про різні дієти щодо оздоровлення організму, у тому числі й корекції маси тіла. Дієтологи розробили норми фізіологічних потреб у харчових продуктах і енергії з урахуванням антропометричних даних, умов праці та інших факторів. Незважаючи на те, що вони носять усереднений характер, деякою мірою вони можуть бути орієнтиром при організації індивідуального режиму. У довідниках по дієтології містяться відомості про якісно-кількісний склад продуктів харчування та їх енергетичну цінність в калорійному еквіваленті. Однак, практичне використання цих даних і рекомендацій суттєво ускладнюється з огляду на колосальний об'єм і розпорошеність джерел. Аналогічні проблеми стосуються сфери, пов'язаної з активністю, що супроводжує життєдіяльність людини.

Вирішення цих проблем може бути реалізоване за допомогою сучасних інформаційних технологій, що оперують цими даними й знаннями, і які можуть служити ефективним інструментом для підтримки прийняття рішень у діабетології. Основу такого інструментарію становлять інформаційні системи, ядром яких є технології синтезу баз даних, знань і правил керування ними.

Основні принципи, на яких базується розроблювана система:

- *принцип орієнтації на користувача*, що полягає в забезпеченні комфортних умов функціонування системи, які надали б можливість одержання необхідної інформації в зручній для використання формі;
- *принцип декомпозиції,* згідно з яким складний інформаційний простір розподіляється на сукупність більш простих частин, за допомогою яких спрощується досягнення загальної мети – забезпечення доступності даних при розробці системи підтримки прийняття рішень при виборі дієти, адекватної енерговитратам;
- *принцип системності, в основі* якого уявлення про розроблювальну систему як про єдиний цілісний об'єкт, що представляє собою сукупність взаємозалежних елементів, об'єднаних правилами організованої взаємодії;
- *принцип модульності,* що забезпечує можливість заміни окремих модулів з метою поліпшення якості функціонування системи, або її адаптації до нових умов;
- *принцип гнучкості (адаптивності)* забезпечує модульність системи й дає можливість її зміни, у зв'язку з новими вимогами, без істотних витрат;
- *принцип розвитку* полягає в безперервному відновленні функціональних і структурних складових, що дозволяють міняти конфігурацію системи.

Розробка системи включає:

Основні технологічні етапи:

- первинний збір, аналіз, структурування даних і знань;
- класифікація й кодування інформаційних масивів;
- відпрацьовування "семантики" подання даних і знань для структурування предметної області;
- синтез інформаційно-структурної моделі програми;
- аналіз погодженості взаємозв'язків;
- структуризація спеціалізованих баз даних і знань;
- інформаційно-алгоритмічна структуризація програмної реалізації;
- перетворення й формалізація даних у формат, придатний для комп'ютерної реалізації;
- розробка програмного забезпечення;
- розробка інтерфейсу організації діалогу з використанням меню, списків, таблиць;
- розробка процедури персоніфікованого висновку.

Структурно-інформаційна модель. Одним з основних етапів, який передує створенню інформаційних систем, є структурування інформаційних полів знань. У нашому випадку структуризація знань стосовно продуктів харчування і активності може бути узагальнено представлена у вигляді інформаційно-структурної моделі виду (рис.1), що будується з урахуванням класифікації, прийнятої в предметних областях – дієтологія й активна діяльність.

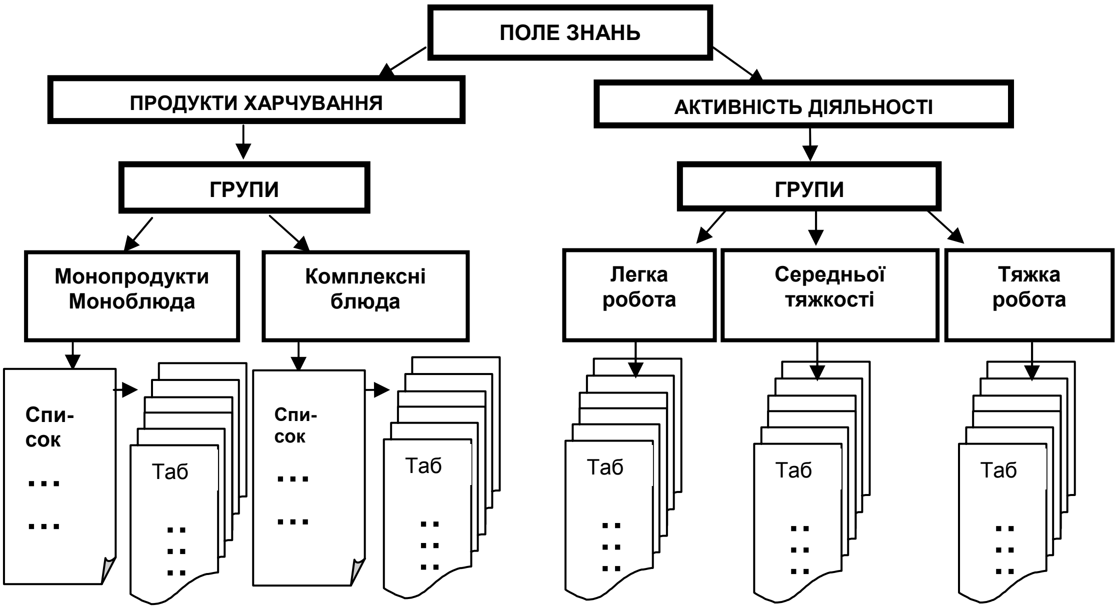

Рис.1. Інформаційно-структурна модель поля знань

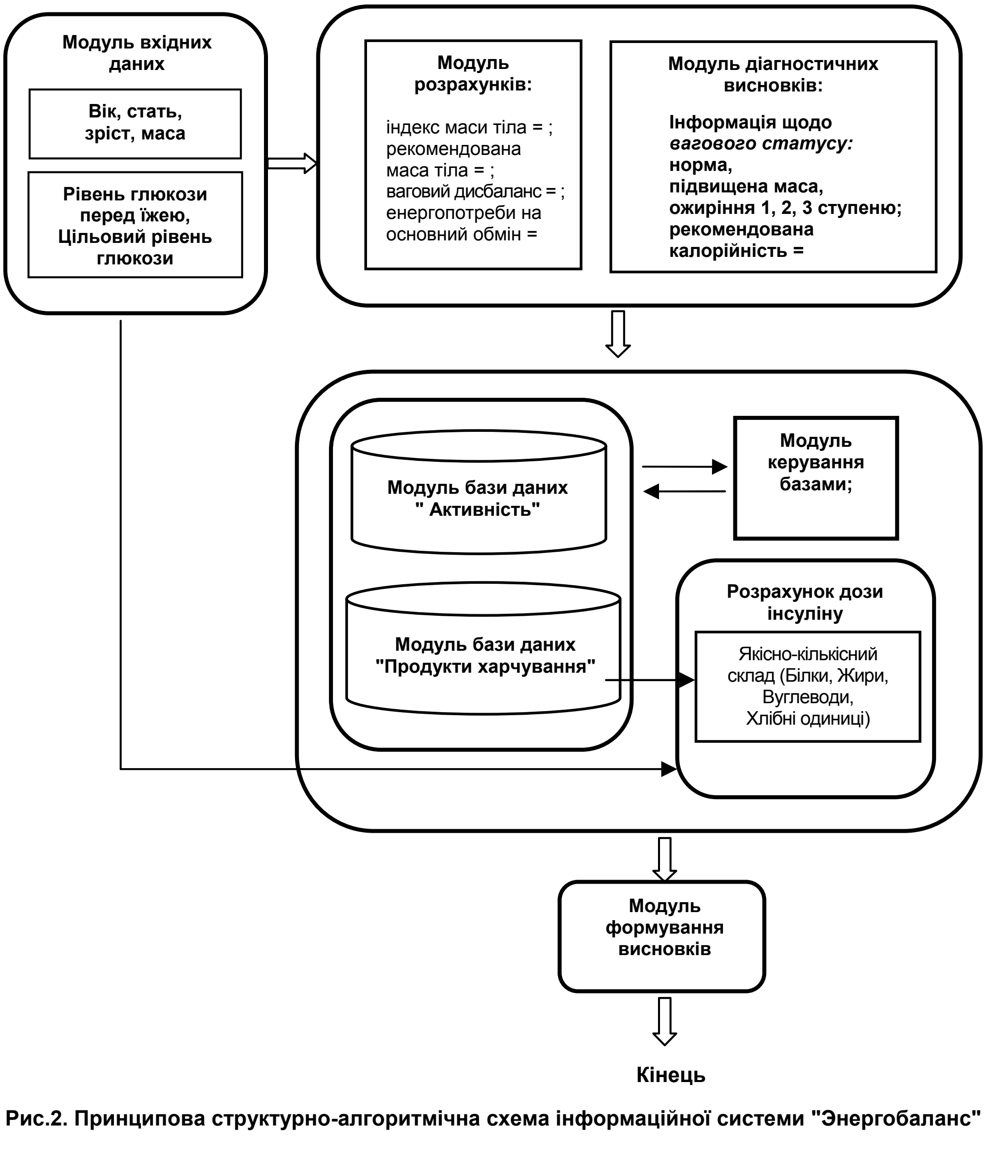

Рис.2. Принципова структурно-алгоритмічна схема інформаційної системи "Енергобаланс"

Таке представленнє з'явилося основою синтезу інформаційної системи, ядро якої становлять бази даних по готових продуктах (моно-компонентних продуктах і комплексних блюдах) і різних типах і видах активності. Ці бази сформовані у вигляді таблиць із відповідною ієрархічною організацією. Структурно-алгоритмічна схема програми наведена на рис.2.

Програмна реалізація. Інтерфейс користувача. Представлена схема є принциповою основою для розробки відповідної комп'ютерної системи, що ґрунтується не тільки на знаннях у відповідній предметній області, але й на програмних продуктах, інформація про які розміщена на сайтах в Інтернеті, наприклад [11,12,13]. Програмне забезпечення реалізоване в середовищі Delphi с підтримкою БД Paradox з використанням процедур Borland. Нижче проілюстровано віконний інтерфейс, що підтримує візуалізацію діалогу користувача із програмою.

На рис.3 наведене стартове вікно програми.

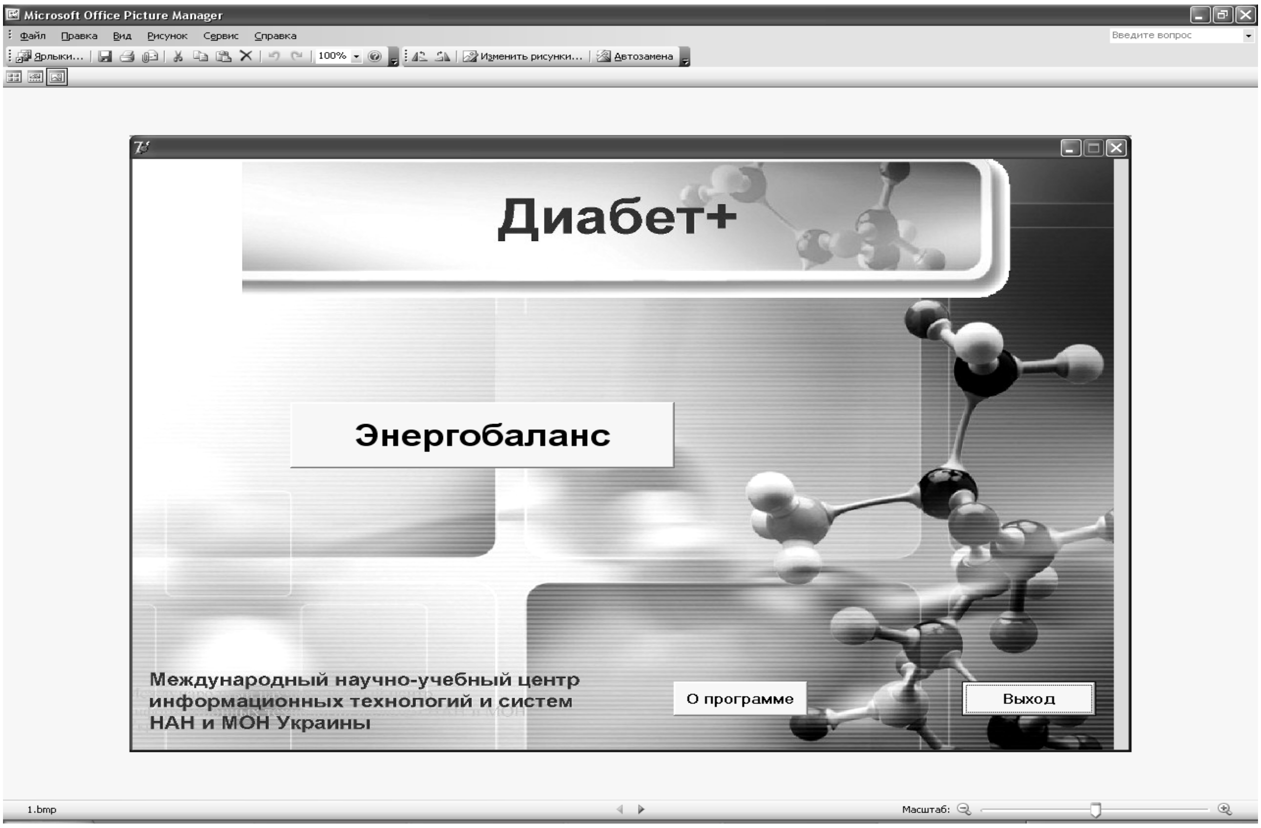

Рис.3. Стартове вікно інформаційної системи підтримки прийняття рішень у діабетології

При активізації клавіші "Енергобаланс" відкривається вікно ініціалізації даних користувача (рис.4). При подальшій послідовній активізації відкриваються: вікно рекомендацій (рис.5), наступні вікна вибору меню (рис.6), вибору передбачуваної діяльності (рис.7), вікно підсумків (рис.8).

Рис.4. Вікно ініціалізації користувача

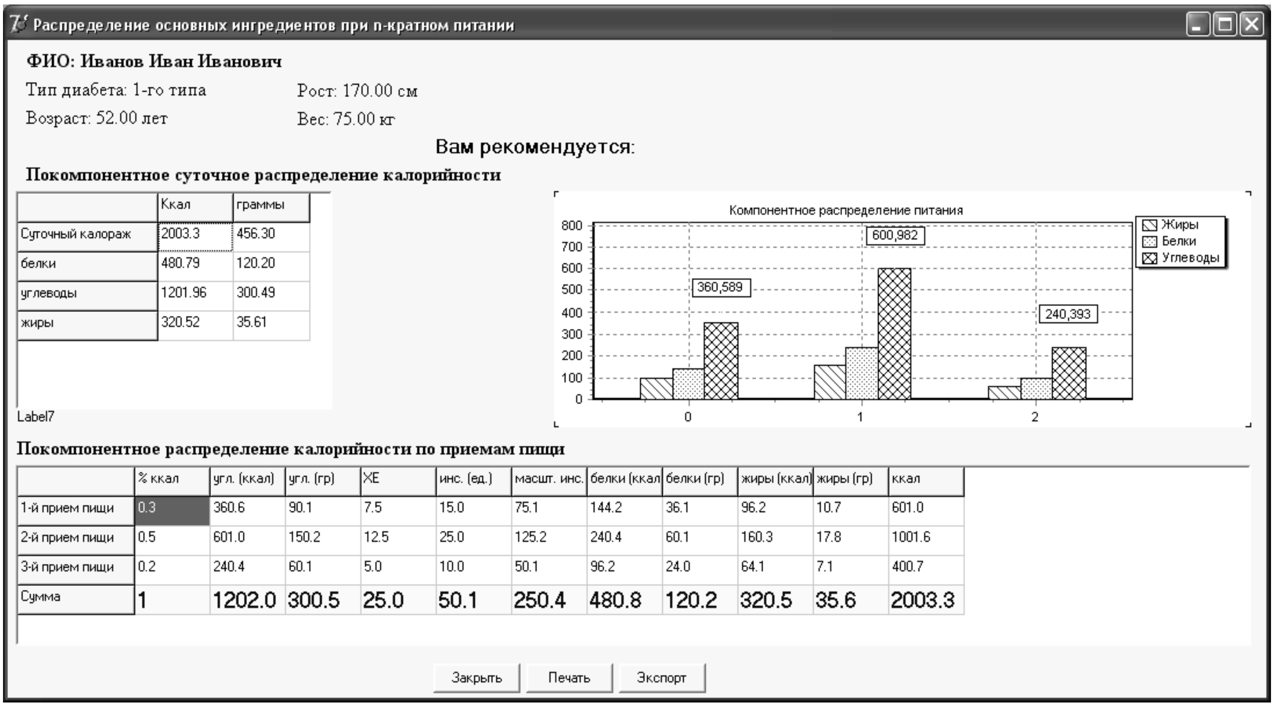

Рис.5. Вікно рекомендацій: якісно-кількісний склад харчування у ваговому й калорійному еквіваленті з розкладкою по прийомах їжі

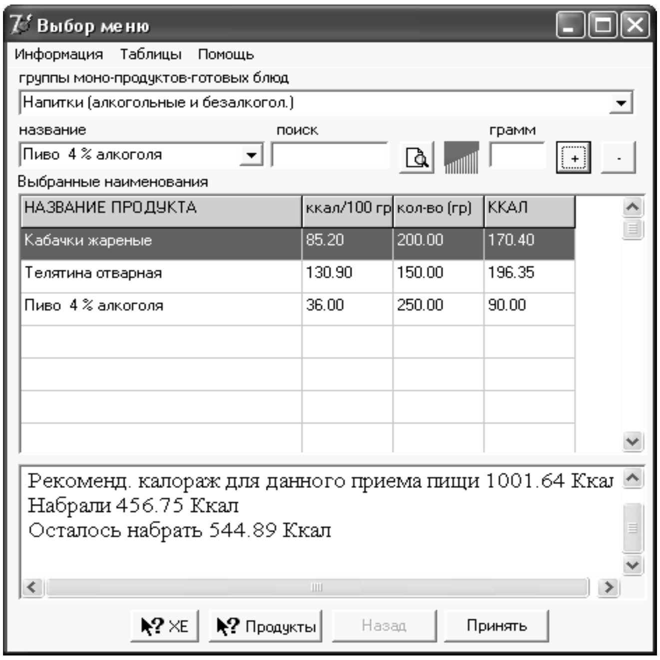

Рис.6. Вікно для вибору меню

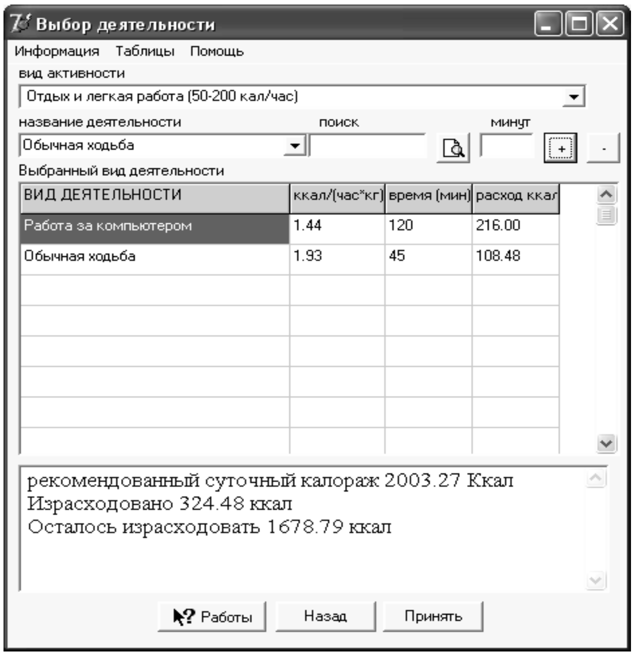

Рис.7. Вікно для вибору діяльності

Виходом програми є енергетичний дисбаланс між калорійністю обраних продуктів і енергією в калорійному еквіваленті, що буде витрачена у результаті запланованої діяльності.

Висновки. Розроблена інформаційна система дозволяє обчислювати рекомендовану добову потребу в енергії користувача відповідно до його віку, статі, антропометричних даних (зріст, маса), типу активності (розумова праця, праця легка, середньої тяжкості, й т. ін.). За допомогою баз даних, включених у програму, надається можливість обчислення харчової й енергетичної цінності продуктів в калорійному й ваговому еквівалентах, що надходять в організм із їжею, а також індивідуальних енерговитрат користувача при конкретній передбачуваній діяльності. При цьому обчислюється енергетичний дисбаланс і необхідна доза інсуліну.

Представлена в роботі інформаційна технологія може служити допоміжним інструментом при прийнятті рішень у діабетології, що враховують регламент і дозування енергетичних потреб пацієнта і способів їх забезпечення. Розробка таких програм вносить вклад у розвиток якісно нової медицини, оснащеної методами, що базуються на використанні комп'ютерної техніки, сприяє поліпшенню якості медичних послуг і контролю за станом пацієнта, що страждає на цукровий діабет, що є одним із проблемних соціально значущих захворювань.

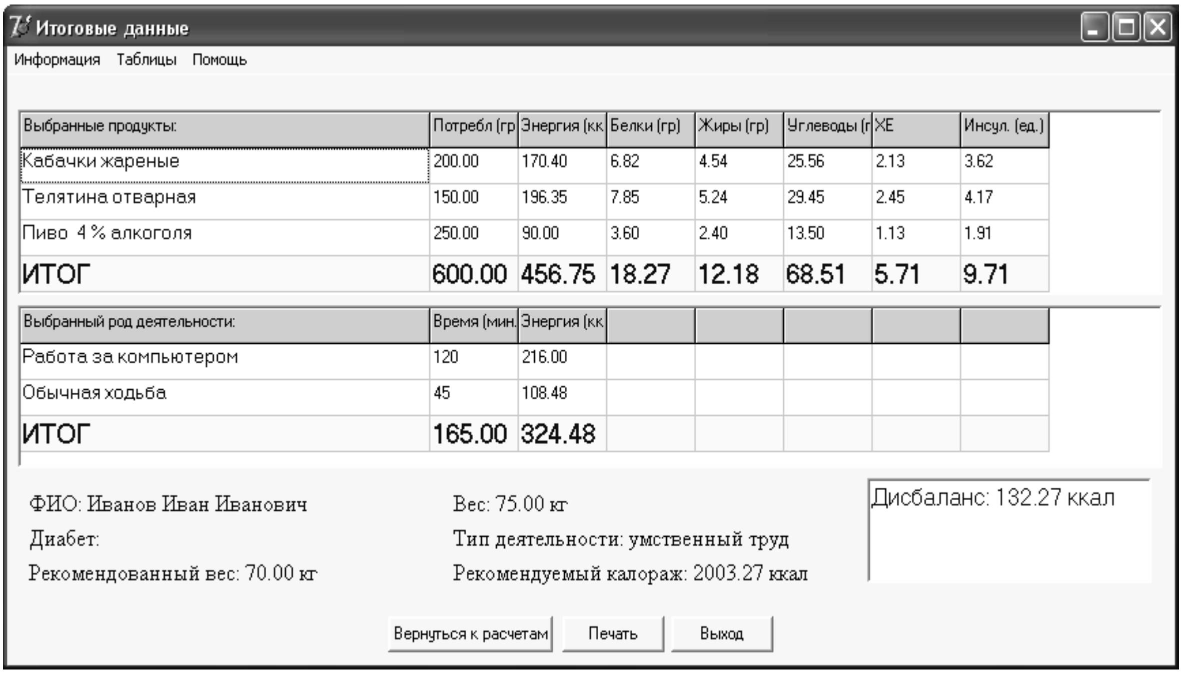

Рис.8. Вікно підсумків, що містить інформацію про якісно-кількісний склад їжі, її енергоємність, про кількість хлібних одиниць (ХЕ), про дозу інсуліну, енерговитрати при обраній діяльності й про енергетичний дисбаланс.

1. *Уменьшение* риска, содействие здоровому образу жизни: Доклад о состоянии здравоохранения в мире, 2002 г. – Женева: ВОЗ, 2002. – 248 с. 2. *Глобальная* стратегия ВОЗ в области рациона питания, физической активности и здоровья. Утверджена Всемирной ассамблеей здравоохранения: резолюция 57.17 от 22 мая 2004 г. – 14 с. 3. Санаторно-курортное лечение больных сахарным диабетом/ Ефимов А.С., Ткач С.Н., Скробонская Н.А., Ефимов Д.А., Зубков С.Т., Лавриненко Е.Э.,Полищук Ю.Н. – К.: Альтерпрес, 2001.– 224 с. 4. Ефимов А. С., Карабун П. М., Эпштейн Е. В. Ожирение и сахарный диабет –К.:Здоров'я, 1987.– 144 с. 5. Дедов Н.И., Фадеев В.В. Введение в диабетологию. Введение в диабетологию. М.: "Издательство Берег", 1998, 200 с. 6. Ефимов А.С., Германюк Я.Л., Генес С.Г. Сахарный диабет. Київ, "Здоров'я", 1983, 224 с. 7. Окороков А.Н. Лечение болезней внутренних органов. М.: "Мед. Лит.", 2000, 668 с. 8. Ефимов А.С., Скробонская Н.А. Клиническая діабетологія. К.: Здоров'я, 1998, С. 196–228. 9. Ефимов А.С., Зуева Н.А., Тронько Н.Д., Скробонская Н.А. Малая энциклопедия врача-эндокринолога. Медкнига, 2007, 306 с. 10. Самсонов М.А. Справочник по диетологии. – М.: Медицина, 2002.– 641 с. 11. www.juri.dia-club.ru. 12. http://calories.ru/cgi-in/calc.pl. 13. *E*ndocrinology.mif-ua.com/archive/issue-2265/article.../print.html.

Надійшла до редколегії 21.03.12

УДК 519.254

В. Жирицький, асп.

СТРУКТУРА ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ЗАКРИТОЇ ФОРМИ У СИСТЕМІ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ "VITAVA"

У статті розглянуто структуру тестових завдань закритої форми, наведені представлення тестових завдань за допомогою елементів веб-інтерфейсу в системі дистанційного навчання "VITAVA".

This paper is devoted to the structure of the closed form of test's tasks, given presentation of test's tasks by using elements of a web interface in the distance learning system "VITAVA".

Вступ. Забезпечення об'єктивного контролю рівня знань студентів є невід'ємною складовою усього навчально-виховного процесу в університеті. Суб'єктивність оцінки пов'язана у певній мірі з впливом людського фактору [1]. Не випадково, що в останні роки провідні вищі навчальні заклади України починають впроваджувати нові форми та методи контролю рівня знань студентів.

Розвиток інформаційних технологій та впровадження дистанційних систем навчання запропонували можливість використання комп'ютерного тестування для оцінки рівня знань студентів. Але і тут є певні проблеми, які полягають у використанні неякісних тестових завдань у тесті, а це означає, що об'єктивність оцінки у цьому випадку залежить не від людського фактору, а від інструменту вимірювання – тесту.

Постановка проблеми. Кілька останніх років спостерігається тенденція щодо створення Intranet- та Internet- орієнтованих систем дистанційного навчання, які спрощують процес підготовки тестових завдань, відбір тестових завдань для тесту і представлення результатів тестування у різних предметних областях. Однією з таких є СДО "Прометей" [8].

На жаль, під час розробки систем дистанційного навчання, велику увагу приділяють функціональним можливостям систем по управлінню навчальним матеріалом – створенню дистанційних курсів, підручників, модулів, бібліотек, та інше і значно меншу увагу приділяють забезпеченню функціональним можливостям підсистеми тестування рівня знань студентів. Цей факт є важливим недоліком, оскільки від якості тесту як інструменту вимірювання залежить об'єктивність інформації про рівень знань студентів, можливість порівняння рівня знань студентів між собою та інше.

Комп'ютерні технології надають можливість використовувати різноманітні методи відбору тестових завдань, нарахування балів та оцінювання відповідей студентів. На окремих етапах процесу тестування рівня знань, таких як відбір тестових завдань, їх оцінювання, визначення кінцевого результату тесту, необхідним є використання інформації про структуру тестових завдань, методів і алгоритмів, які покращуватимуть якість тестових завдань, а отже і якість тесту, процесу тестування і об'єктивність отриманих результатів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. За останні десятиліття зроблено суттєвий крок в напрямку дослідження якості тестів, тестових завдань, підходів, методів та алгоритмів реалізації базових задач, які виникають на основних етапах тестування рівня знань за допомогою автоматизованих систем.

Проблемами аналізу результатів тестування займалися В. С. Аванесов, С. Є. Шишов [2; 11] та ін. Значний внесок у розробку математичних моделей, підходів, методів та алгоритмів реалізації базових задач зробили: В. О. Деповський, Л. П. Оксамитна [4; 7] та ін. Створенню адаптивних систем тестування присвячені роботи П. Л. Брусиловського, Л. В. Зайцевої [3; 5] та ін.

Проте, незважаючи на наявність наукових праць з проблем використання інформаційних технологій в цій галузі, питання створення ефективних інструментів оцінювання тестових завдань як інструментів вимірювання недостатньо розроблені у вітчизняній системі освіти.

Формулювання цілі статті. Сьогодні актуальною науковою задачею є дослідження інструментів оцінювання тестових завдань, використання методів і алгоритмів, які б враховували специфіку тестування рівня знань студентів у Intranet- та Internet-орієнтованих системах дистанційного навчання.

Метою даної статті є:

- представлення структури тестових завдань закритої форми у системі дистанційного навчання "VITAVA";
- представлення видів тестових завдань закритої форми за допомогою елементів веб-інтерфейсу.

Виклад основного матеріалу. У системах дистанційного навчання тестові завдання розрізняють за формою та видом. Форма тестового завдання – це спосіб організації, впорядкування та існування змісту тестового завдання. Всі тестові завдання з деякою долею ймовірності можна розділити на п'ять форм: закрита, відкрита, завдання на відповідність, завдання на впорядкування, змішана форма.

Далі у статті розглянуто структуру та представлення тестових завдань закритої форми. До закритої форми відносять такі тестові завдання, для яких запропоновані відповіді, серед яких одна чи декілька відповідей є вірними. В закритій формі тестових завдань виділяють наступні види:

- вибір однієї вірної відповіді;
- вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді;
- вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні";
- вибір декількох вірних відповідей.

Розглянемо структуру та представлення тестових завдань кожного виду.

Вибір однієї вірної відповіді.

Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді" (single choice) належить до завдань закритої форми з запропонованими відповідями, серед яких присутня одна вірна відповідь. Даний вид тестових завдань є найбільш розповсюдженим в системах комп'ютерного тестування і рекомендований Державним стандартом вищої освіти України [6].

Структуру тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді" представимо у вигляді:

$$< z, W, B, s >, \tag{1}$$

де *z* – твердження тестового завдання; *W* – множина відповідей на тестове завдання, яку представимо у вигляді:

$$W = V \cup D\,, \tag{2}$$

$$V \cap D = \varnothing\,, \tag{3}$$

де *V* – множина вірних відповідей. Оскільки в цьому виді тестового завдання лише одна відповідь є вірною, то кількість елементів множини вірних відповідей дорівнює:

$$|V| = 1\,. \tag{4}$$

D – множина дистракторів. Дистрактор (відволікаюча відповідь) – відповідь на тестове завдання, яка схожа на вірну відповідь, але не є такою. Множина *D* повинна містити хоча б один елемент, отже кількість її елементів представимо у вигляді:

$$|D| \geq 1\,. \tag{5}$$

Система дистанційного навчання "VITAVA" дозволяє застосовувати два алгоритми оцінювання – простий та вдосконалений, які можуть бути назначені кожному тестовому завданню.

Простий алгоритм оцінювання полягає в тому, що за вірно обрану відповідь система нараховує один бал, а за невірно обрану відповідь не нараховує бали.

B – дихотомічна функція оцінювання *j*-го тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } w_j \in V, \\ 0, \text{ якщо } w_j \in D, \end{cases} \tag{6}$$

де $w_j \in W$ – відповідь студента на *j*-те тестове завдання.

Вдосконалений алгоритм оцінювання полягає в тому, що система нараховує вказану кількість балів $K_1 > 0$ за вірно обрану відповідь і $K_2 \neq 0$ за невірно обрану відповідь.

Подамо представлені вище умови у вигляді функції оцінювання:

$$B(w_j) = \begin{cases} K_1, \text{ якщо } w_j \in V, \\ K_2, \text{ якщо } w_j \in D. \end{cases} \tag{7}$$

Якщо $K_2 < 0$, то система зменшує кількість балів за обрану невірну відповідь.

Система надає можливість представляти відповіді студенту в перемішаному порядку для уникнення запам'ятовування. За це відповідає компонент *s*, який приймає наступні значення:

$$s = \begin{cases} 0, \textit{якщо відповіді необхідно представляти в послідовному порядку}, \\ 1, \textit{якщо відповіді необхідно представяти в перемішаному порядку}. \end{cases} \quad (8)$$

Розглянемо цю можливість більш детально. Нехай $w_{j1}, w_{j2}, \ldots w_{jl}$ *l* елементів множини відповідей *W* для *j*-го тестового завдання. Тоді, якщо *s=0*, то система представляє відповіді на *j*-те тестове завдання послідовно, відсортованими по другому індексу у зростанні, а якщо *s=1*, то система створює перестановку других індексів і представляє відповіді на *j*-те тестове завдання відсортованими по другому індексу перестановки.

Перейдемо до інтерфейсного представлення даного виду тестового завдання. В системі дистанційного навчання "VITAVA" діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручне представлення тестових завдань виду "Вибір однієї вірної відповіді" за допомогою елементів веб-інтерфейсу – перемикачі (*radio-button*).

Зміст та відповіді на тестове завдання може бути представлено у вигляді поняття, графіку, або формули.

Можливо представити шість основних способів побудови таких тестових завдань:

- Поняття – Формула
- Формула – Поняття
- Поняття – Графік
- Графік – Поняття
- Графік – Формула
- Формула – Графік

Перший спосіб "Поняття - Формула" полягає в тому, що зміст тестового завдання формулюється у вигляді тексту, а відповіді – у вигляді формул. Формули можуть бути представлені за допомогою рисунків або за допомогою мови розмітки математичних виразів MathML, що побудована на базі розмітки XML.

Другий спосіб "Формула - Поняття" пропонує відображення з точністю до навпаки.

Третій спосіб "Поняття - Графік" полягає в тому, що тестові завдання формулюються у вигляді тексту, а відповіді - у вигляді графіків. Графіки можуть бути представлені за допомогою рисунків.

Четвертий спосіб "Графік - Поняття" пропонує відображення з точністю до навпаки.

П'ятий спосіб "Графік – Формула " і шостий спосіб "Формула – Графік" полягає в тому, що зміст тестового завдання і відповіді формулюються у вигляді формул і графіків.

Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді" представлено на рис. 1.

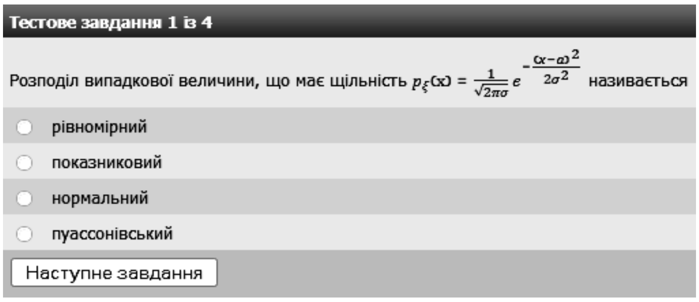

Рис. 1. Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді"

Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді.

Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді" належить до завдань закритої форми з запропонованими варіантами відповідей, які відображаються з затримкою, серед яких присутня одна вірна відповідь.

Основним методом перевірки вмінь і навичок студентів з математичних і технічних дисциплін є розв'язок рівнянь, нерівностей, доведення певних математичних тверджень. Основною особливістю таких тестових завдань є відносно прості відповіді при досить складній та громіздкій процедурі розв'язку.

Тестове завдання з математичних і технічних дисциплін часто формулюється у вигляді задачі на обрахування конкретних значень заданих величин. У змісті тестового завдання формулюється умова задачі, а у відповідях наводяться числові значення відповідей. Для відповіді на таке тестове завдання студент повинен відшукати алгоритм розв'язку задачі, обчислити відповідь, а після цього вибрати вірну відповідь зі списку запропонованих.

При використанні традиційних тестових завдань закритої форми, вірну відповідь досить легко обчислити шляхом підстановки варіантів відповідей в умову задачі. Для усунення цих недоліків в системі дистанційного навчання "VITAVA" при створенні тестових завдань закритої форми з математичних та технічних дисциплін запропоновано використовувати новий вид тестового завдання – "Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді".

Структуру тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді" представимо у вигляді:

$$< z, W, B, s, t >, \quad (9)$$

де всі складові елементи, крім *t*, - аналогічні тестовому завданню "Вибір однієї вірної відповіді", а елемент *t* відповідає за час затримки відповіді.

Інтерфейсне представлення даного виду тестового завдання аналогічне інтерфейсному представленню тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді", а принцип роботи відрізняється. У вікні веб-браузера виводиться зміст тестового завдання і кнопка "Показати відповіді". Студент будь-яким способом (в умі, на папері, за допомогою комп'ютера, та ін.) розв'язує поставлене тестове завдання і натискає кнопку "Показати відповіді". Після чого у вікні веб-браузера з'являються відповіді на короткий проміжок часу (15–30 секунд). За цей час студент повинен вибрати вірну відповідь. Часу повинно вистачити лише на вибір відповіді, а не на підстановку відповідей і підбір вірної відповіді. Після закінчення часу, відповідь студента вважається невірною.

Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді" представлено на рис. 2 і рис. 3.

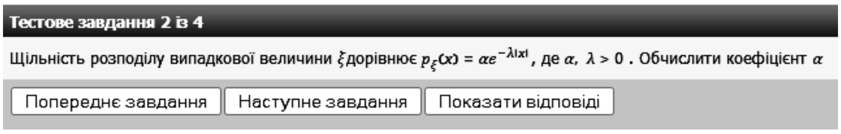

Рис. 2. Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді". Початковий стан.

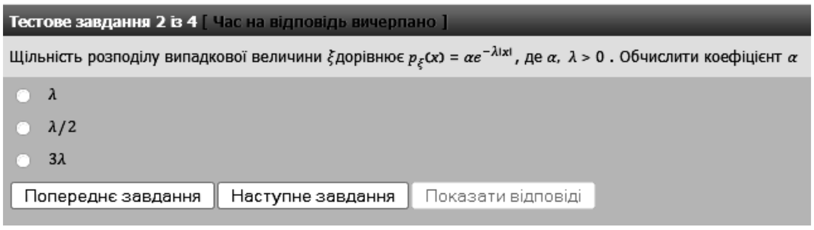

Рис. 3. Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді з затримкою відповіді". Кінцевий стан.

Вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні".

Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні" (*yes/no*) належить до завдань закритої форми і є різновидом тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді" з двома відповідями, серед яких присутня одна вірна відповідь. В цьому випадку студенту пропонується вибрати вірну відповідь серед двох запропонованих відповідей. Оскільки ймовірність вгадування вірної відповіді становить п'ятдесят відсотків, то цей вид тестового завдання рекомендується використовувати лише для отримання загальної інформації, а не для оцінювання рівня знань студентів [2].

Структура тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні" аналогічна структурі тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді". Для цього види тестового завдання на компоненти структури накладені інші обмеження виду - множина *D* містить один елемент отже:

$$|D| = 1. \tag{10}$$

Перейдемо до інтерфейсного представлення даного виду тестового завдання.

Інтерфейсне представлення тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні" аналогічне інтерфейсному представленню тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді".

Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні" представлено на рис.4.

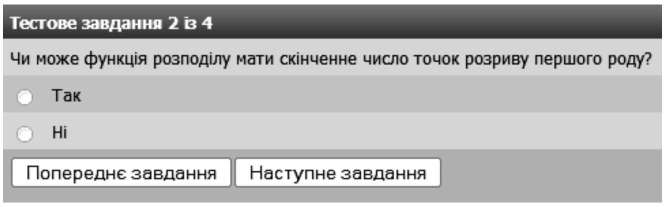

Рис. 4. Тестове завдання "Вибір однієї вірної відповіді "Так/Ні"

Вибір декількох вірних відповідей.

Тестове завдання "Вибір декількох вірних відповідей" (*multiple choice*) належить до завдань закритої форми з запропонованими варіантами відповідей, серед яких присутні декілька вірних. Даний вид тестових завдань є найбільш розповсюджений в системах комп'ютерного тестування і рекомендований Державним стандартом вищої освіти України [6].

Структуру тестового завдання "Вибір декількох вірних відповідей" представимо у вигляді:

$$< z, W, B, s, g > \tag{11}$$

Дана структура відрізняється від структури тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді" наявністю компонента *g,* умовами для множини вірних відповідей *V* та множини дистракторів *D*, а також функцією оцінювання.

Для множини вірних відповідей повинна виконуватись умова:

$$|V| \geq 1. \tag{12}$$

А для множини дистракторів:

$$|D| \geq 1. \tag{13}$$

Система дозволяє застосовувати два алгоритми оцінювання – простий та вдосконалений, які можуть бути назначені кожному тестовому завданню.

Простий алгоритм оцінювання полягає в тому, що студент повинен вказати всі вірні відповіді. Тільки в такому випадку відповідь на тестове завдання зараховується.

B – функція оцінювання тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } \sum_{l=1}^{H} \chi_v(w_{jl}) = |V| \textit{ для } w_{jl} \in V \textit{ і } \sum_{l=1}^{H} \chi_v(w_{jl}) = 0 \textit{ для } w_{jl} \in D, \\ 0, \textit{ якщо інше}, \end{cases} \tag{14}$$

де H – кількість відповідей на j-те тестове завдання; w_{jl} – l-та відповідь на j-те тестове завдання; $\chi_v(w_{jl})$ - характеристична функція для елементів $w_{jl} \in W$, яка приймає значення:

$$\chi_A(w\ ) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } w\ \in A, \\ 0, \textit{ якщо } w\ \not\subset A, \end{cases} \tag{15}$$

Вдосконалений алгоритм оцінювання полягає в тому, що студент може вказати не всі вірні відповіді. В такому випадку йому для зарахування відповіді на тестове завдання необхідно набрати граничну кількість балів, які вказані для тестового завдання. Студент отримує ту кількість балів, яка дорівнює сумі балів за вказані відповіді лише у випадку зарахування відповіді на тестове завдання. Вибір невірної відповіді в цьому випадку приводить до визначення відповіді на тестове завдання як невірної.

B – функція оцінювання тестового завдання:

$$B(w_j) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } \sum_{l=1}^{H} \chi_v(w_{jl}) \ge g \textit{ для } w_{jl} \in V \textit{ і } \sum_{l=1}^{H} \chi_v(w_{jl}) = 0 \textit{ для } w_{jl} \in D, \\ 0, \textit{ якщо інше}, \end{cases} \tag{16}$$

де g – гранична кількість балів для зарахування відповіді як вірної.

Система надає можливість представляти відповіді студенту в перемішаному порядку, як і для тестового завдання "Вибір однієї вірної відповіді".

В підсистемі тестування системи дистанційного навчання "VITAVA" діалог студента з системою відбувається через веб-інтерфейс, який передбачає найбільш зручну форму представлення тестових завдань "Вибір декількох вірних відповідей" за допомогою елементів веб-інтерфейсу прапорців (check-box).

Тестове завдання "Вибір декількох вірних відповідей" представлено на рис. 5.

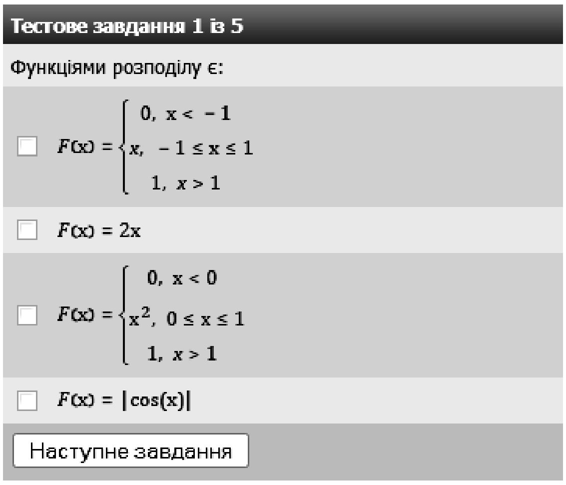

Рис. 5. Тестове завдання "Вибір декількох вірних відповідей"

Висновки. У статті представлена структура тестових завдань закритої форми, наведені умови для множини вірних відповідей та множини дистракторів, приведені функції оцінювання тестових завдань, які дозволили реалізувати різні алгоритми оцінювання в системі дистанційного навчання "VITAVA".

Для кожного виду тестового завдання закритої форми наведено його представлення у системі за допомогою елементів веб-інтерфейсу.

Інформація про структуру тестових завдань закритої форми може бути використана при розробці інших інструментів тестування та алгоритмів оцінювання на основі веб-технологій.

1. Аванесов В. С. Теория и методика педагогических измерений (материалы публикаций). – М.: ЦТ и МКОУГТУ-УПИ, 2005. – 98 с. 2. Аванесов В. С. Форма тестовых заданий [Текст] / Аванесов В. С. – М.: Центр тестирования, 2005. – 155 с. 3. Брусиловский П. Л. Адаптивные обучающие системы в World Wide Web: обзор имеющихся в распоряжении технологий. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://ifets.ieee.org/russian/depository/WWWITS.html 4. Деповський В. О. Ідентифікація професійних знань операторів автоматизованих систем управління: – дис. … канд. техн. наук: 05.13.06 / Деповський Володимир Олексійович. – Х., 2004.– 305 с. 5. Зайцева Л. В. Методы и модели адаптации к учащимся в системах компьютерного обучения / Л. В. Зайцева // Образовательные технологии и общество (Educational Technology & Society). – 2003. – Т. 6, – № 4. – С. 204–211. 6. Комплекс нормативних документів для розробки складових систем стандартів вищої освіти. Засоби діагностики якості вищої освіти // Інформаційний вісник "Вища освіта". – 2003. – № 10. – С. 67–82. 7. Оксамитна Л. П. Методи та засоби самоорганізації моделі знань в автоматизованих системах контролю знань та навчання : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.13.06 "Автоматиз. системи упр. та прогрес. інформ. технології" / Л. П. Оксамитна. – Черкаси, 2003. – 19 с. 8. СДО "Прометей" | ООО "Виртуальные технологии в образовании" [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.prometeus.ru/. 9. Челышкова М. Б. Теория и практика конструирования педагогических тестов: Учебное пособие. / Челышкова М. Б. – М.: Логос, 2002. – 432 с. 10. Челышкова М. Б. Разработка педагогических тестов на основе современных математических моделей: Учебное пособие. / Челышкова М. Б. – М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 1995. – 32 с. 11. Шишов С. Е. Школа: мониторинг качества образования / С. Е. Шишов, В. А. Кальней. – М.: Педагогическое образование в России, 2000. – 320 с.

Надійшла до редколегії 21.02.12

УДК 519.21

Г. Лівінська, асист.

АПРОКСИМАТИВНИЙ ГАУССІВСЬКИЙ ПРОЦЕС ДЛЯ МЕРЕЖ ТИПУ $[M_t \mid M \mid \infty]^r$ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Стаття присвячена дослідженню багатоканальних стохастичних мереж, на кожен вузол якої ззовні надходить пуассонівський потік вимог з інтенсивністю, яка є змінною функцією часу. У перевантаженому режимі функціонування розвинуто апроксимативний метод дослідження процесу обслуговування. Граничний процес представлено у вигляді багатовимірної дифузії.

The paper is devoted to the investigation of multichannel stochastic networks. From the outside on each node of the network a Poisson input flow of calls arrives. And its rate is a varying function of time. At overloaded regime an approximate method of studying of the service process is developed. The limit process is represented as a multidimensional diffusion.

1. Вступ. Основна математична модель, яка вивчається у роботі, представляє собою мережу масового обслуговування, що складається з "r" вузлів обслуговування. Ззовні на i-тий вузол мережі надходить неоднорідний пуассонівський потік вимог $\nu_i(t)$ з інтенсивністю $\lambda(t)$, $\Lambda(t)=\int\limits_0^t \lambda(u)du$ – ведуча функція пуассонівського потоку. Кожен из "r" вузлів функціонує як багатоканальна стохастична система. При надходженні вимоги в таку систему одразу починається її обслуговування. Час обслуговування в i-ому вузлі показниково розподілений з параметром μ_i, $i=1,2,...r$. Після завершення обслуговування в i-ому вузлі вимога з імовірністю p_{ij} надходить для обслуговування в j-ий вузол та з імовірністю $p_{ir+1}=1-\sum\limits_{j=1}^{r} p_{ij}$ залишає мережу, $P=\left\|p_{ij}\right\|_1^r$ – матриця маршрутизації мережі. Додатковий вузол з номером "$r+1$" інтерпретується як "вихід" з мережі.

Згідно системі позначень, яка прийнята в теорії стохастичних мереж, описану вище модель будемо позначати символом $[M_t \mid M \mid \infty]^r$.

Процесом обслуговування вимог в мережі типу $[M_t \mid M \mid \infty]^r$ будемо називати r-вимірний процес $Q'(t)=(Q_1(t),...,Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i=1,2,...r$ – кількість вимог в i-ому вузлі в момент часу t. Наша головна мета – вивчити асимптотичну поведінку процесу $Q(t)$, $t\ge 0$, при умові великого навантаження.

2. Асимптотична поведінка процесу обслуговування при умові великого навантаження. Перевантажений режим обумовлюється наступною поведінкою параметрів мережі.

Умова 1. Вхідний потік залежить від "n" (номера серії) таким чином, що на будь-якому скінченному інтервалі $[0,T]$

$$n^{-1}\Lambda_i^{(n)}(nt) \underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}} \Lambda_i^{(0)}(t)\in C[0,T], \qquad i=1,2,...r, \tag{1}$$

де $C[0,T]$ – простір неперервних функцій, заданих на відрізку $[0,T]$, символ $\overset{U}{\Rightarrow}$ означає збіжність в рівномірній топології.

Розглянемо два важливих для застосувань випадки, коли умова 1) виконується. У зв'язку з цим тимчасово будемо вважати, що пуассонівський потік $\nu_i(t)$ регулярний: $\Lambda_i(t)=\int\limits_0^t \lambda_i(u)du$, де $\lambda_i(u)$ – миттєве значення параметра (див., наприклад, [1], стор. 100). Такий потік природньо називати пуассонівським потоком зі змінним параметром.

1) Якщо для регулярного потоку

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_i(t)=\lambda_i>0,$$

то Умова 1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\lambda_i t$.

Це випливає з оцінки

$$\left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t \lambda_i(u)du-\lambda_i\right| \le \frac{1}{t}\int\limits_{\varepsilon t}^{t}\left|\lambda_i(u)-\lambda_i\right|du+\frac{1}{t}\int\limits_0^{\varepsilon t}\left|\lambda_i(u)-\lambda_i\right|du \le \le (1-\varepsilon)\delta(\varepsilon t)+(\lambda_i^*+\lambda_i)\varepsilon,$$

де $\varepsilon\in(0,1)$, $\sup\limits_{u\ge 0}\lambda_i(u)=\lambda_i^*$, $\delta(t')\to 0$ при $t'\to\infty$.

2) Нехай тепер $\lambda_i(t)$ періодична з періодом T_i функція:

$$\lambda_i(nT_i+t)=\lambda_i(t) \text{ для } n=1,2,... \text{ і } 0\le t<T_i.$$

Тоді Умова 1 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\left(\int\limits_0^{T_i}\lambda_i(u)du\right)t$. Дійсно

$$\frac{\Lambda_i(t)}{t}=\frac{\int\limits_0^t \lambda_i(u)du}{t}=\frac{[t]_{T_i}\int\limits_0^{T_i}\lambda_i(u)du+\int\limits_0^{\{t\}_{T_i}}\lambda_i(u)du}{[t]_{T_i}+\{t\}_{T_i}}\underset{t\to\infty}{\to}\lambda_i,$$

де $[t]_{T_i}=\max\{n\in Z_+ : nT_i\le t\}$, $\{t\}_{T_i}=t-[t]_{T_i}$, Z_+ – множина цілих невід'ємних чисел.

Умова 2. Інтенсивності обслуговування у кожному вузлі залежать від " n " (номера серії) таким чином, що

$$\lim_{n\to\infty} n\mu_i(n)=\mu_i>0,\quad i=1,2,...,r.$$

Разом умови 1 та 2 означають, що $[M_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережа функціонує у перевантаженому режимі.

В контексті умов 1, 2 розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t)=n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt)-q^{(n)}(nt)),\qquad t\ge 0,$$

де $q^{(n)\prime}(nt)=(q_1^{(n)}(nt),...,q_r^{(n)}(nt))$, $q_j^{(n)}(nt)=\sum\limits_{i=1}^{r}\int\limits_0^{nt} d\Lambda_i^{(n)}(u)p_{ij}^{(n)}(nt-u)$, $j=1,...,r$, $p_{ij}^{(n)}(\tau)$ – елементи матриці $P^{(n)}(\tau)=\left\|p_{ij}^{(n)}(\tau)\right\|_1^r=\exp\{\Delta(\mu^{(n)})(P-I)\tau\}$, $\mu^{(n)\prime}=(\mu_1^{(n)},...,\mu_r^{(n)})$, $\Delta(x)=\left\|\delta_{ij}x_i\right\|_1^r$ - діагональна матриця з вектором $x'=(x_1,...,x_r)$ на головній діагоналі, $I=\left\|\delta_{ij}\right\|_1^r$ – одинична матриця.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n\ge 1$, при $n\to\infty$, ми введемо два незалежних гауссівських процеси $\xi^{(i)\prime}(t)=(\xi_1^{(i)}(t),...,\xi_r^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\xi^{(1)}(t)=0$ та кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t)=E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)\prime}(t)=\int\limits_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau),$$

$$R^{(1)}(s,t)=E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)\prime}(t)=R^{(1)}(s)P(t-s),\quad s<t,$$

де $\Lambda^{(0)\prime}(t)=(\Lambda_1^{(0)}(t),...,\Lambda_r^{(0)}(t))$, $P(\tau)=\exp\{\Delta(\mu)(P-I)\tau\}$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$

$$E\xi^{(2)}(t)=0,$$

$$R^{(2)}(t)=\int\limits_0^t[\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)]-P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)],$$

$$R^{(2)}(s,t)=R^{(2)}(s)P(t-s),\quad s<t.$$

У наступній теоремі побудовано апроксимативний процес для процесу обслуговування при перевантаженому режимі роботи мережі.

Теорема 1. Нехай для $[M_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережі виконуються Умови 1, 2 . У початковий момент часу $t=0$ мережа порожня: $Q^{(n)\prime}(0)=(0,...,0)$. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0,T]$ послідовність випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$ при $n\to\infty$ збігається в рівномірній топології до $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$.

Перед тим, як доводити теорему, отримаємо ряд допоміжних результатів.

Лема 1. Нехай $\nu^{(n)}(t)$ – неоднорідний пуассонівський процес з ведучою функцією $\Lambda^{(n)}(t)$, для якої виконується умова 1. Тоді на будь-якому скінченному проміжку $[0,T]$ послідовність випадкових процесів при $n\to\infty$ $W^{(n)}(t)=n^{-1/2}(\nu^{(n)}(nt)-\Lambda^{(n)}(nt))$ – збігається в рівномірній топології до вінерівського процесу $W^{(0)}(t)$ з нульовим переносом $EW^{(0)}(t)=0$ та коефіцієнтом дифузії $VarW^{(0)}(t)=\Lambda^{(0)}(t)$.

Доведення. Збіжність скінченновимірних розподілів процесу $W^{(n)}(t)$ до $W^{(0)}(t)$ випливає з того, що для будь-якого натурального N та моментів часу $0<t_1<...<t_N$ характеристична функція сумісного розподілу $\nu(t_1),...,\nu(t_N)$ дорівнює

$$E\exp\{i\sum_{k=1}^{N}s(k)\nu(t_k)\}=\prod_{k=0}^{N-1}\exp\{[\Lambda(t_{k+1})-\Lambda(t_k)][\exp(i\sum_{m=k+1}^{N}s(m))-1]\},\qquad \text{де } (s(1),...,s(N))\in R_N,\ t_0=0.$$

Тепер для того, щоб довести збіжність в рівномірній топології, достатньо перевірити виконання умови з [2] (стор. 493).

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_2-t_1|\le h} P\{\left|W^{(n)}(t_2)-W^{(n)}(t_1)\right| > \varepsilon\} = 0 \tag{2}$$

Згідно нерівності Чебишова

$$\sup_{|t_2-t_1|\le h} P\{\left|W^{(n)}(t_2)-W^{(n)}(t_1)\right| > \varepsilon\} \le \varepsilon^{-2}\sup_{t\in[0,T]}[n^{-1}\Lambda(n(t+h))-n^{-1}\Lambda(nt)],$$

З Умови 1 випливає, що для будь-якого $0<\delta<T$

$$\sup_{t\in[0,\delta)}[n^{-1}\Lambda(n(t+h))-n^{-1}\Lambda(nt)] \le n^{-1}\Lambda(n(\delta+h)) \le (\lambda+\varepsilon_n)(\delta+h)$$

та

$$\sup_{t\in[\delta,T]}[n^{-1}\Lambda(n(t+h))-n^{-1}\Lambda(nt)] \le \lambda h + (2T+h)\varepsilon_n,$$

де $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$. Звідси знаходимо

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{|t_2-t_1|\le h} P\{\left|W^{(n)}(t_2)-W^{(n)}(t_1)\right| > \varepsilon\} \le \lambda\delta\varepsilon^{-2}.$$

Оскільки $\delta>0$ довільне, то умова (2) виконується.

Лему доведено.

Надалі через $W_i^{(0)}(t)$, $i=1,2,...,r$, будемо позначати незалежні вінерівські процеси з нульовим переносом $EW_i^{(0)}(t)=0$ та коефіцієнтом дифузії $VarW_i^{(0)}(t)=\Lambda_i^{(0)}(t)$ відповідно. Згідно лемі 1, якщо виконується Умова 1, то вони апроксимують вхідні потоки $\nu_i^{(n)}(t)$, $i=1,2,...,r$. Для $W^{(0)\prime}(t)=(W_1^{(0)}(t),...,W_r^{(0)}(t))$ наведемо такий результат.

Лема 2. Скінченновимірні розподіли $\int_0^t dW^{(0)\prime}(u)P(t-u)$ співпадають зі скінченновимірними розподілами гаусівського процесу $\xi^{(1)}(t)$.

Це твердження являє собою частинний випадок леми 1 з [3].

Обслуговування окремо взятої вимоги у вузлах $[M_t \mid M \mid \infty]^r$ - мережі відбувається незалежно від обслуговування інших вимог. Для того, щоб конструктивно задати процес обслуговування, розглянемо ланцюг Маркова $x(t)$, $t\ge 0$, у множині станів $\{1,2,...,r,r+1\}$, який задається локальними характеристиками

$$a_{ij} = \begin{cases} -\mu_i(1-p_{ii}), i=j=1,2,...,r; \\ \mu_i p_{ij}, i\ne j, i=1,2,...r; j=1,2,...,r,r+1; \\ 0, i=r+1, j=1,2,...,r,r+1; \end{cases}$$

та початковим розподілом $p'(0)=(p_1(0),...,p_{r+1}(0))$.

Якщо $p_i(0)=1$, то відповідний ланцюг ми будемо позначати $x^{(i)}(t)$. Стан "$r+1$" для ланцюга $x(t)$ є поглинаючим. Перехідні ймовірності $x(t)$

$$p_{ij}(t)=P\{x(t)=j \,/\, x(0)=i\}=P\{x^{(i)}(t)=j\},\quad i,j=1,...,r$$

є елементами матриці $P(t)=exp\{\Delta(\mu)(P-I)t\}$.

Траєкторія вимоги від моменту надходження в мережу через i-ий вузол і до моменту виходу з неї може бути описана ланцюгом $x^{(i)}(t)$, при цьому поглинання в стані "$r+1$" інтерпретується як вихід вимоги з мережі.

Введемо випадковий вектор $(\chi_h^i(t))'=(\chi_{1h}^i(t),...,\chi_{rh}^i(t))$, який будемо розглядати як r - вимірний випадковий процес індикаторного типу, траєкторія якого розвивається з плином часу та будується за траєкторією ланцюга Маркова таким чином:

$$\chi^{(i)}(t)=\begin{cases} e_j,\ \ x^{(i)}(t)=j,\ \ j=1,2,...,r; \\ e_0,\ \ x^{(i)}(t)=r+1; \end{cases}$$

де e_j – r-вимірний вектор, j-а компонента якого дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, e_0 – r-вимірний вектор, що складається з нулів.

Для довільного натурального N та $z'(i)=(z_1(i),...,z_r(i))$, $i=1,2,...,N$, $|z(i)|\le 1$, через $\Phi^{(m)}=\Phi^{(m)}(t_1,...,t_N,z(1),...,z(N))$, $m=1,2,...,r$, будемо позначати сумісну генератрису векторів $\chi^m(t_1),...,\chi^m(t_N)$, $0<t_1<...<t_N$, $\Phi'=(\Phi^{(1)},...,\Phi^{(r)})$.

Лема 3. Для довільного $N=1,2,...$ та $0<t_1<...<t_N$

$$\Phi=\bar{1}+\sum_{i=1}^{N}P(\Delta t_1)\Delta[z(1)]...P(\Delta t_{i-1})\Delta[z(i-1)]P(\Delta t_i)(z(i)-\bar{1}), \tag{3}$$

де $\bar{1}$ – r-вимірний вектор, що складається з одиниць; $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$ ($t_0=0$), $i=1,2,...,N$.

Доведення (3) можна отримати методом математичної індукції за параметром N.

3. *Доведення теореми 1***.** Проаналізуємо поведінку при $n\to\infty$ одновимірних розподілів процесу $\xi^{(n)}(t)$, $t\ge 0$. При фіксованій траєкторії процесу $\nu(t)$ розподіл $Q(t)$ співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m(t)}\chi^{(m,k)}(t-\tau_k^{(m)}),$$

де $\chi^{(m,1)}(t),\chi^{(m,2)}(t),...$ – послідовність незалежних випадкових процесів, скінченновимірні розподіли яких співпадають із скінченновимірними розподілами $\chi^{(m)}(t)$, $\tau_k^{(m)}$ – момент надходження k-ї вимоги в m-ий вузол мережі.

Враховуючи цей факт, а також формулу (2) для $N=1$, генератрису $\Phi(z,t)$, $z'=(z_1,...,z_r)$, $|z|\le 1$, вектора $Q(t)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(t,z)=E\prod_{m=1}^{r}\prod_{k=1}^{\nu_m(t)}[1-p_m'(t-\tau_k^{(m)})(z-\bar{1})], \tag{4}$$

де $p_m'(\tau)=(p_{m1}(\tau),...,p_{mr}(\tau))$ – m-ий рядок матриці $P(\tau)$.

Нехай $\varphi^{(n)}(s)$, $s'=(s_1,...,s_r)\in R_r$ – характеристична функція $\xi^{(n)}(t)$. З урахуванням (4)

$$\varphi^{(n)}(s)=Ee^{i\xi^{(n)\prime}s}=\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\times E\exp\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt)}\ln[1-p_m^{(n)\prime}(nt-\tau_k^{(m)})(e^{is/\sqrt{n}}-\bar{1})]\},$$

де $(e^{is/\sqrt{n}})'=(e^{is_1/\sqrt{n}},...,e^{is_r/\sqrt{n}})$.

Позначимо через $(s^2)'=(s_1^2,...,s_r^2)$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}(s)=\lim_{n\to\infty}\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}\times$$

$$\times E\exp\{\sum_{m=1}^{r}\sum_{k=1}^{\nu_m^{(n)}(nt)}[\frac{i}{\sqrt{n}}p_m'(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})s-\frac{1}{2}\frac{1}{n}p_m'(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})s^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n}s'p_m(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})p_m'(t-\frac{\tau_k^{(m)}}{n})s]\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\{-in^{-1/2}q^{(n)\prime}(nt)s\}E\exp\{in^{-1/2}\int_0^t d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^t d\nu^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\nu_m^{(n)}(n\tau)s'p_m(t-\tau)p_m'(t-\tau)s\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\{-\frac{1}{2}\frac{1}{n}\int_0^t d\Lambda^{(n)\prime}(n\tau)P(t-\tau)s^2+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\Lambda_m^{(n)}(n\tau)s'p_m(t-\tau)p_m'(t-\tau)s\}E\exp\{i\int_0^t dW^{(n)\prime}(\tau)P(t-\tau)s\},$$

де $W^{(n)\prime}(\tau)=(W_1^{(n)}(\tau),...,W_r^{(n)}(\tau))$, $W_k^{(n)}(\tau)=n^{-1/2}(\nu_k^{(n)}(n\tau)-\Lambda_k^{(n)}(n\tau))$, $k=1,2,...,r$.

Використовуючи Умову 1 та твердження лем 1, 2, знаходимо:

$$\lim_{n\to}\varphi^{(n)}(s)=\exp\{-\frac{1}{2}\int_0^t d\Lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t-\tau)s^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r}\int_0^t d\Lambda_m^{(0)}(\tau)s'p_m(t-\tau)p_m'(t-\tau)s-$$

$$-\frac{1}{2}s'\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)s\}=$$

$$= \exp\{-\frac{1}{2}s'\int_0^t [\Delta[d\Lambda^{(0)'}(\tau)P(t-\tau)] - P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)]s - \frac{1}{2}s'\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)s\}.$$

Граничний вираз представляє собою характеристичну функцію $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$. Таким чином збіжність одновимірних розподілів доведено.

Тепер розглянемо двовимірні розподіли. При фіксованій траєкторії вхідного потоку розподіл вектора $(Q(t_1),Q(t_2))$, $0<t_1<t_2$, співпадає з розподілом

$$\sum_{m=1}^{r}\Big(\sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)}\chi^{(m,k)}(t_1-\tau_k^{(m)}),\ \sum_{k=1}^{\nu_m(t_1)}\chi^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})+\sum_{k=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)}\chi^{(m,k)}(t_2-\tau_k^{(m)})\Big).$$

Застосувавши формулу (2) для $N=2$, сумісну генератрису $\varphi^{(n)}(s(1),s(2))$, $s(1),s(2)\in R_r$, вектору $(Q(t_1),Q(t_2))$ можна записати у такому вигляді:

$$\Phi(t_1,t_2,z(1),z(2)) = E\{\prod_{m=1}^{r}\prod_{k=1}^{\nu_m(t_1)}[1+p'_m(t_1-\tau_k^{(m)})(z(1)-\bar{1})+$$

$$+p'_m(t_1-\tau_k^{(m)})\Delta[z(1)]P(\Delta t_2)(z(2)-\bar{1})]\prod_{k=\nu_m(t_1)+1}^{\nu_m(t_2)}[1+p'_m(t_2-\tau_k^{(m)})(z(2)-\bar{1})]\}.$$

Звідси знаходиться границя сумісної генератриси $\varphi^{(n)}(s(1),s(2))$, $s(1),s(2)\in R_r$, векторів $\xi^{(n)}(t_1)$ та $\xi^{(n)}(t_2)$.

Аналогічно перевіряється збіжність N -вимірних розподілів для $N\geq 2$.

Збіжність скінченновимірних розподілів можна посилити до збіжності $\xi^{(n)}(t)$ в рівномірній топології. Для цього потрібно використати збіжність нормованого вхідного потоку $W^{(n)}(t)$ до $W^{(0)}(t)$ в рівномірній топології та подання процесу обслуговування як суми процесів індикаторного типу на вхідному потоці (див. [3]).

Теорему доведено.

Зауважимо, що частина $\xi^{(1)}(t)$ граничного процесу пов'язана з флуктуаціями вхідного потоку, а $\xi^{(2)}(t)$ – з флуктуаціями часу обслуговування.

4. Граничний процес як багатовимірна дифузія. В одновимірному випадку для гауссівських процесів існує критерій в термінах необхідності і достатності для перевірки марковської властивості ([5], теорема 1 на ст. 115). Основна умова цього критерію виписується в термінах кореляцій і її досить зручно перевіряти на практиці. У багатовимірному випадку ситуація ускладнюється і загального критерію немає. Наведемо один варіант достатніх умов марковості для r -вимірних гауссівських процесів, які подібні до умов з роботи [4], У подальшому застосуємо цей критерій до граничного процесу з попереднього розділу.

Розглянемо r -вимірний гауссівський процес $\xi'(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_r(t))$ з нульовими середніми значеннями:

$$E\xi_i(t)=0,\quad i=1,2,...,r,$$

та кореляційними матрицями:

$$R(t)=E\xi(t)\xi'(t)-E\xi(t)E\xi'(t),$$

$$R(s,t)=E\xi(s)\xi'(t)-E\xi(s)E\xi'(t),\quad s<t.$$

Теорема 2. Нехай для гауссівського процесу $\xi(t)$, для деякої матриці A та будь-яких $0\leq s<t$, функції $R(s)$ та $R(s,t)$ пов'язані між собою таким чином:

$$R(s,t)=R(s)P(t-s),\ \text{де}\ P(t)=\exp(At);$$

Тоді $\xi(t)$ є марковським процесом, причому умовний розподіл $P(\xi(t)\in B/\xi(s)=x)$, $B\in \mathrm{B}_{R^r}$ (σ - алгебра борелівських підмножин R_r), є гауссівським з вектором середніх значень $P'(t-s)x$ та кореляційною матрицею $R(t)-P'(t-s)R(s)P(t-s)$.

Доведення. Спочатку доведемо, що

$$M[\xi'(t)/\xi(s)]=\xi'(s)P(t-s).\tag{5}$$

У випадку, коли матриця $R(s)$ неособлива, з властивостей багатовимірного нормального розподілу ([6], стор. 467) випливає

$$M[\xi'(t)/\xi(s)]=[P'(t-s)B(s)B^{-1}(s)\xi(s)]'=\xi'(s)P(t-s).$$

У загальному випадку розглянемо вектор $U=\xi(t)-P'(t-s)\xi(s)$.

Оскільки $MU = 0$ і

$$M\xi(s)U' = M\xi(s)\xi'(t) - [M\xi(s)\xi'(s)]P(t-s) = R(s,t) - B(s)P(t-s) = 0,$$

то U і $\xi(s)$ некорельовані, а отже незалежні як гауссівські вектори. Звідси маємо подання

$$\xi'(t) = \xi'(s)P(t-s) + U. \tag{6}$$

Застосовуючи оператор $M[\cdot / \xi(s)]$ до обох частин (6), приходимо до (5).

Зафіксуємо моменти часу $0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1}$ і нехай тепер

$$U = \xi(t_{n+1}) - M[\xi(t_{n+1}) / \xi(t_n)] = \xi(t_{n+1}) - P'(t_{n+1} - t_n)\xi(t_n).$$

Тоді для будь-якого $1 \le k \le n$ знаходимо:

$$M\xi(t_k)U' = M\xi(t_k)\xi'(t_{n+1}) - M(\xi(t_k)[M\xi'(t_{n+1}) / \xi(t_n)]) =$$

$$= R(t_k)P(t_{n+1} - t_k) - M(\xi(t_k)\xi'(t_n))P(t_{n+1} - t_n) =$$

$$= R(t_k)P(t_{n+1} - t_k) - R(t_k)P(t_n - t_k)P(t_{n+1} - t_n) = 0.$$

Таким чином вектор U не залежить від усіх $\xi(t_k)$, $k = 1,...,n$. Оскільки $\xi(t_{n+1}) = U + P'(t_{n+1} - t_n)\xi(t_n)$, то процес $\xi(t)$ має марковську властивість.

Друга частина теореми випливає з виду умовного розподілу підмножини компонент гауссівського вектора при фіксованих компонентах, що залишились ([6], стор. 467). Теорема доведена.

Множина G_A гауссівських процесів, для яких виконується умова теореми 2 і відповідні матриці A однакові, задовольняє умові замкненості: лінійна комбінація двох незалежних процесів з G_A належить G_A. Таким чином, як наслідок з теореми 2 ми отримуємо такий цікавий факт: сума двох незалежних марковських G_A - процесів є марковським процесом.

Зауважимо, що багатовимірний процес Орнштейна-Уленбека ([8], ст. 166) задовольняє умові теореми 2.

Застосуємо тепер критерій марковості, який дає теорема 2, до граничного гауссівського процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$.

Наслідок 1. Якщо $\Lambda_i^{(0)}(t) = \int_0^t \lambda_i^{(0)}(u)du$, $\lambda_i^{(0)}(u) \in C[0,T]$, $i = 1,2,...,r$, то граничний гауссівський процес $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, $t \in [0,T]$ представляє собою r - вимірний дифузійний процес з вектором переносу $A(x) = A'x$ і матрицею дифузії $B(t) = \Delta[\lambda^{(0)\prime}(t) + q'(t)A] - A'\Delta[q(t)] - \Delta[q(t)]A$, де

$$A = \Delta(\mu)(P - I), \quad q'(t) = \int_0^t \lambda^{(0)\prime}(\tau)P(t-\tau)d\tau, \quad \lambda^{(0)\prime}(\tau) = (\lambda_1^{(0)}(\tau),...,\lambda_r^{(0)}(\tau)).$$

Якщо через $R(t), R(s,t), s < t$, позначити відповідні кореляційні матриці процесу $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$, то для них будуть виконуватися умови теореми 2 при $A = \Delta(\mu)(P - I)$, і $\xi^{(1)}(t) + \xi^{(2)}(t)$ буде марковським дифузійним процесом. Вектор переносу та матриця дифузії визначається видом умовного розподілу $P(\xi(t) \in B / \xi(s) = x)$, $B \in \mathrm{B}_{R^r}$.

Таким чином, наслідок 1 належить до результатів по дифузійній апроксимації перевантажених систем и мереж масового обслуговування. В цьому сенсі він узагальнює результати розділу 4.2 монографії [7] на випадок вхідних пуассонівських потоків з інтенсивністю, що залежить від часу.

Подання граничного процесу у вигляді багатовимірної дифузії є привабливим в тому, що дифузійний процес визначається своїми локальними характеристиками і при аналізі функціоналів від нього можна використовувати розвинутий апарат марковських дифузійних процесів. Однак разом з тим є і втрати, оскільки тепер граничний процес не відбиває в деталях структуру дограничного процесу обслуговування.

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М., КомКнига, 2005. – 400 с. 2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. – М., Наука, 1971. – Том 1.– 664 с. 3. Лебєдєв Є.О. Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування // Теорія ймовірностей та математична статистика, вип. 68, 2003. — С. 81–92. 4. Лебєдєв Є.О. Про марківську властивість багатовимірних гаусівських процесів // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. № 4, 2001. — С. 287–291. 5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М., Мир, 1984. Том 2. 752с. 6. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. – М., Наука, 1968. – 548 с. 7. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели. – К.: Либідь, 1992. – 208 с. 8. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. – К., Наукова думка, 1983. – 316 с.

Надійшла до редколегії 08.10.12

УДК 004.42:510.69

М. С. Нікітченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
С. С. Шкільняк , д-р фіз.-мат. наук, доц.

СПЕЦІАЛЬНІ СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ЧИСТИХ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних предикатів. Введено розширення логіки спеціальними предикатами, які визначають наявність значення для змінних. На цій основі для таких логік побудовано числення секвенційного типу. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

Pure first-order composition-nominative logics of single-valued partial predicates are studied. Extended logics with special variable definedness predicates are introduced. On this basis sequent calculi for the introduced logics are constructed and their soundness and completeness are proved.

Вступ. Програмно-орієнтовані логічні формалізми, будовані на основі композиційно-номінативного підходу [1], названі композиційно-номінативними логіками (КНЛ). Такі логічні формалізми вивчались, зокрема, в [2]. Дослідження фундаментального поняття логічного слідування для КНЛ проведене в [3–5]. Було запропоновано різні формалізації логічного слідування за допомогою відношень логічного наслідку, досліджено властивості таких відношень в різних семантиках, зокрема, властивості відношень логічного наслідку для множин формул. Різноманітність семантик та відношень логічного наслідку в КНЛ квазіарних предикатів індукує побудову для них низки різновидностей секвенційних числень. Для чистих першопорядкових КНЛ спектр таких числень побудовано в [5–7], секвенційні числення для КНЛ однозначних предикатів кванторно-еквацийного рівня запропоновано в [8].

Метою даної роботи є побудова спеціальних секвенційних числень для чистих першопорядкових КНЛ однозначних предикатів. На відміну від [5–7], де секвенційні числення будуються на основі властивостей *X*–*Y*-означених відношень логічного наслідку, пропоновані числення базуються на ідеї введення спеціальних предикатів, які визначають наявність значення для предметних імен**.** Для побудованих числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [2–5]. Для полегшення читання нагадаємо основні поняття і визначення.

Основні поняття і визначення. *V*-іменною множиною (*V*-ІМ) над *A* називають довільну однозначну функцію вигляду $\delta : V \to A$. Тут *V* та *A* – множини предметних імен та предметних значень. Клас всіх *V*-ІМ над *A* позначаємо ${}^{V}\!A$. *V*-ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для ІМ вводимо функцію $asn : {}^{V}\!A \to 2^{V}$ так: $asn(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Визначаємо $\delta \|X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$. Замість $\delta \|(V \backslash X)$ пишемо $\delta \|_{-X}$.

Операцію накладки вводимо так: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \|(V \backslash asn(\delta_2)))$.

Операцію реномінації $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n} : {}^{V}\!A \to {}^{V}\!A$ задаємо так: $r^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1), ..., v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \|(V \backslash \{v_1, ..., v_n\}))$.

Функцію вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ називають *V*-квазіарним предикатом на *A.*

В роботі розглядаємо часткові однозначні предикати. Клас *V*-квазіарних предикатів на *A* позначаємо Pr^{A}.

Ім'я *x* строго неістотне для *V*-квазіарного предиката *P*, якщо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d\|_{-x})$ для довільних $d \in {}^{V}\!A$ та $a \in A$.

Областю істинності та областю хибності предиката $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ назвемо множини

$$\boldsymbol{T}(P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d) = T\} \text{ та } \boldsymbol{F}(P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d) = F\}.$$

V-квазіарний предикат *P* (частково) істинний*,* якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Базовими композиціями чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) є пропозиційні зв'язки $\neg$ та $\vee$, реномінації $\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, квантори $\exists \boldsymbol{x}$. Через області істинності й хибності відповідних предикатів вони задаються так:

$$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P); \ \boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P);$$

$$\boldsymbol{T}(P \vee Q) = \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q); \ \boldsymbol{F}(P \vee Q) = \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q);$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{T}(P)); \ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{F}(P));$$

$\boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A\}$; $\boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x} P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A\}$.

Семантичними моделями ЧКНЛ є композиційні системи квазіарних предикатів кванторного рівня $({}^{V}\!A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ визначається базовими композиціями $\neg, \vee, \boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists \boldsymbol{x}$. Терми відповідної композиційної алгебри $(Pr^{A}, \boldsymbol{C})$ трактуємо як формули мови ЧКНЛ. Алфавіт мови ЧКНЛ: символи базових композицій, множина *Ps* предикатних символів (сигнатура мови), множина *V* предметних імен. Множина *Fr* формул мови ЧКНЛ задається індуктивно:

1) кожний $p \in Ps$ є формулою, такі формули атомарні;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi$, $\exists x \Phi$ – формули.

Позначаємо $nm(\Phi)$ множину всіх предметних імен із *V,* які фігурують у формулі Φ.

Відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J} : Fr \to Pr^{A}$ визначається за допомогою тотального однозначного відображення $\boldsymbol{I} : Ps \to Pr^{A}$, яке позначає символами *Ps* базові предикати.

1) $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$, $\boldsymbol{J}(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi) = \boldsymbol{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x \Phi) = \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Відображення $\boldsymbol{I}: Ps \to Pr$ прив'язує алгебру даних (A, Pr) до мови ЧКНЛ. Отримуємо алгебраїчну систему (АС) з доданою сигнатурою [2] вигляду ((A, Pr^A), $\boldsymbol{I}$), яку позначаємо (A, $\boldsymbol{I}$). Така АС задає композиційну систему (${}^VA$, Pr^A, $\boldsymbol{C}$), тому АС з доданою сигнатурою є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову з алгебрами даних.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$, який є значенням формули Φ при інтерпретації на моделі мови $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, позначаємо Φ_A.

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для формули Φ, якщо для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ ім'я x строго неістотне для Φ_A.

Формула примітивна, якщо вона атомарна або має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}p$, причому відсутні тотожні перейменування та $\bar{v}$ не містить строго неістотних для p імен.

Φ всюди істинна, або неспростовна (позн. $|= \Phi$), якщо Φ_A неспростовний для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Формула Φ – логічний наслідок формули Ψ (позн. $\Phi |= \Psi$), якщо $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Формули Φ та Ψ логічно еквівалентні (позн. $\Phi \sim \Psi$), якщо $\Phi |= \Psi$ та $\Psi |= \Phi$.

Формули Φ та Ψ строго еквівалентні в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Phi\ {}_{\boldsymbol{A}}{\sim_{TF}}\ \Psi$), якщо $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \boldsymbol{F}(\Psi_A)$.

Формули Φ та Ψ логічно строго еквівалентні (позн. $\Phi \sim_{TF} \Psi$), якщо $\Phi\ {}_{\boldsymbol{A}}{\sim_{TF}}\ \Psi$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Для кожного $p \in Ps$ множину синтетично строго неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps \to 2^V$, яка продовжується [3] до $\nu : Fr \to 2^V$. Для семантичних моделей ЧКНЛ постулюється нескінченність множини $V_T = \bigcap_{p \in Ps} \nu(p)$ тотально строго неістотних імен.

Індикатори наявності значення для предметного імені. Для логіки квазіарних предикатів важливим є те, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Це веде до того, що у загальному випадку логіки квазіарних предикатів стають невірними [3–6] деякі важливі закони класичної логіки. Тому при інтерпретаціях формул варто явно вказувати означені та неозначені предметні імена. Для цього запропоновано [9] спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами предикати εz, які визначають наявність в даних компоненти з відповідним іменем z, тобто наявність значення для z.

Предикати εz – індикатори наявності в даному $d \in {}^VA$ значення для предметного імені $z \in V$ – визначаємо так:

$$\varepsilon z(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } d(z)\uparrow, \\ F, \text{ якщо } d(z)\downarrow. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\nu(\varepsilon z) = V \setminus \{z\}$. Дамо визначення предиката εz через його області істинності та хибності.

$\boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = \{d \in {}^VA \mid z \in asn(d)\}$; $\boldsymbol{T}(\varepsilon z_A) = \{d \mid d(z)\uparrow\} = \{d \in {}^VA \mid z \notin asn(d)\}$.

Теорема 1. *Справджуються наступні співвідношення*:

$$\boldsymbol{T}\ (R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}\ (R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \quad \textit{та} \quad \boldsymbol{F}\ (R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}\ (R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)).$$

Доведення. Нехай $d \in \boldsymbol{T}\ (R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, тоді $d(y)\downarrow$ та $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)(d) = T$, звідки $d(y)\downarrow a$ для деякого $a \in A$ та $P(d \nabla \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \nabla x \mapsto d(y)) = T$. Отже, $P(d \nabla \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A$, звідки $(\exists xP)(\mathrm{r}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(d)) = T$, тому $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)(d) = T$, що дає $d \in \boldsymbol{T}\ (R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$. Таким чином, $\boldsymbol{T}\ (R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}\ (R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP))$.

Нехай $d \in \boldsymbol{F}(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, тоді $d(y)\downarrow$ та $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)(d) = F$. Із останнього маємо $(\exists xP)(d \nabla \bar{u} \mapsto d(\bar{v})) = F$, тому $P(d \nabla \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \nabla x \mapsto b) = F$ для всіх $b \in A$. Згідно з $d(y)\downarrow$ маємо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a \in A$, тоді $P(d \nabla \bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \nabla x \mapsto d(y)) = F$, звідки $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)(d) = F.$, що дає $d \in \boldsymbol{F}\ (R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$. Отже, $\boldsymbol{F}\ (R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)) \cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}\ (R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P))$.

Як окремий випадок теореми 1 отримуємо: $\boldsymbol{T}\ (R_y^x(P)) \cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{T}\,(\exists xP)$ та $\boldsymbol{F}\,(\exists xP) \cap \boldsymbol{F}\,(\varepsilon y) \subseteq \boldsymbol{F}\ (R_y^x(P))$.

Далі в роботі будемо розглядати ЧКНЛ, сигнатура мови яких розширена множиною $\{\varepsilon x \mid x \in V\}$ символів предикатів $\varepsilon\boldsymbol{x}$, які визначають наявність значення для предметних імен. Такі розширені логіки природно називати ε-ЧКНЛ.

Мова ε-ЧКНЛ визначається так, як мова ЧКНЛ. При цьому усі $\varepsilon x \in Ps$, $\boldsymbol{J}(\varepsilon x) = \boldsymbol{I}(\varepsilon x) = \varepsilon\boldsymbol{x}$. Зауважимо, що ЧКНЛ із виділеними предикатами $\varepsilon\boldsymbol{x}$ можна трактувати як виділення *підрівня* ЧКНЛ із базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$, $\varepsilon\boldsymbol{x}$.

Відношення логічного наслідку для множин формул. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ – множини формул.

Δ є логічним наслідком Γ в моделі мови $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}|= \Delta$), якщо $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \varnothing$.

Δ є логічним наслідком Γ (позн. $\Gamma |= \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}|= \Delta$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Теорема 2 (заміни еквівалентних). *Нехай* $\Phi \sim_{TF} \Psi$. *Тоді*: $\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma |= \Delta$ *та* $\Gamma |= \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Psi$.

Наведемо основні властивості відношення $|=$.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma |= \Delta$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma |= \Delta \Rightarrow \Lambda |= \Sigma$.

$\neg$) $\neg\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$; $\qquad \Gamma |= \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$.

$\vee$) $\Phi \vee \Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |= \Delta$; $\qquad \Gamma |= \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi, \Psi$.

RT) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$; $\qquad \Gamma |= \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

ΦN) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$; $\qquad \Gamma |= \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ (тут умова $y \in \nu(\Phi)$).

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi), \Gamma |= \Delta$; $\qquad \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)$.

R$\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma |= \Delta$; $\qquad \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

R$\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma |= \Delta$; $\qquad \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

R∃R) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$ $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ (тут умова $x \notin \{\bar{u}\}$).

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi, \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \models \Delta, \exists x\Phi$.

Розглянемо тепер властивості, пов'язані з елімінацією кванторів (зокрема, елімінації кванторів під реномінацією).

Теорема 3. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ *маємо*: $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо ⇒) Нехай $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$, тоді $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) = \varnothing$. Згідно теореми 1 маємо $\boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) \subseteq \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$. Отже, $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$.

Доводимо ⇐) Нехай $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$, звідси $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$. Покажемо, що тоді $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) = \varnothing$, звідки отримаємо $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta$. Припустимо супротивне: $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap$ $\cap\, \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$ та існує d таке, що $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Маємо $d\in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $d\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із умови $d\in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ маємо $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$, звідки $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$, тому $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz маємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, що суперечить припущенню $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A) = \varnothing$.

Теорема 4. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ *маємо*: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$.

Доводимо ⇒) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$, то згідно властивості U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$.

Доводимо ⇐) Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$, водночас $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Із останнього маємо, що існує $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F_A}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$. Тоді $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$ та $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$. Із умови $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ маємо $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$, звідки для всіх $a\in A$ отримуємо $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Але $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ та z тотально строго неістотне, тому для всіх $a\in A$ маємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\Delta_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ та $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A)$, за визначенням εz $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon z_A)$ для всіх $a\in A$. Це суперечить $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$.

Теорема 5. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$ *маємо*: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо ⇒) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y$, то згідно властивості U маємо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо ⇐) Згідно теореми 1 маємо $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) \subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) \subseteq$ $\subseteq \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A)$. Отже, з умови $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) = \varnothing$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y_A) = \varnothing$, тобто $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y \Rightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y$.

Теорема 6. *При умові* $x \notin \{\bar{u}\}$ *маємо*: $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ *та* $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

Доводимо ⇒) Якщо $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$, то $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ та $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ згідно U.

Доводимо ⇐) Припустимо супротивне: $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$, проте $\Gamma \not\models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Тоді маємо $\boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \neq \varnothing$, звідки існує d таке, що $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$.

Можливі 2 випадки: $d(y)\uparrow$ та $d(y)\downarrow$. Якщо $d(y)\uparrow$, то $d\in \boldsymbol{T}(\varepsilon y)$, звідки $d\in \boldsymbol{T}(\varepsilon y) \cap \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$, що суперечить умові $\varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$. Якщо $d(y)\downarrow$, то $d\in \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$; нехай $d(y) = a$. Із $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A)$ тоді $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v}) \in \boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$. Звідси отримуємо $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto b \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для всіх $b\in A$, зокрема, $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, тому $d\nabla\bar{u} \mapsto d(\bar{v})\nabla x \mapsto d(y) \in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки $d\in \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A)$. Отже, $d\in \boldsymbol{T}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}(\Delta_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}(\varepsilon y)$, що суперечить $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$.

На основі теорем 3–6 отримуємо наступні властивості елімінації кванторів.

$\exists R_{\vdash}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi), \Gamma \models \Delta, \varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

$\exists Rf_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$, $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$).

$\exists f_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{z}(\Phi), \varepsilon z$ (за умови $z\in V_T$ та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$).

Властивості $\exists f_{\dashv}$ та $\exists Rf_{\dashv}$ назвемо властивостями типу ∃f (∃-first).

$\exists Rv_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists v_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, \varepsilon y \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \varepsilon y$.

Властивості $\exists v_{\dashv}$ та $\exists Rv_{\dashv}$ назвемо властивостями типу $\exists$v ($\exists$-valued).

$\exists Rd_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow\; \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)$ та $\Gamma \models \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi), R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi), \varepsilon y$ (за умови $x \notin \{\bar{u}\}$).

$\exists d_{\dashv}$) $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi \;\Leftrightarrow\; \varepsilon y, \Gamma \models \Delta, \exists x\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y}(\Phi), \varepsilon y$.

Властивості $\exists d_{\dashv}$ та $\exists Rd_{\dashv}$ назвемо властивостями типу $\exists$d ($\exists$-distributed).

Секвенційні числення чистих КНЛ першого порядку. Числення секвенційного типу для ЧКНЛ будуємо на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин формул. *Секвенцією* називатимемо множину формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами $\vdash$ та $\dashv$, які не входять до алфавіту мови. Формули секвенції, відмічені символом $\vdash$, назвемо *T*-формулами, а формули, відмічені символом $\dashv$, – *F*-формулами Секвенції позначаємо як $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, або, не деталізуючи, у вигляді Σ. Секвенційне числення будується так, що $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ має виведення $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Замкненість $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає, що $\Gamma \models \Delta$.

Базова умова замкненості: секвенція Ξ замкнена, якщо існує формула Φ така, що $\vdash\Phi\in\Xi$ та $\dashv\Phi\in\Xi$.

Введемо додаткову умову замкненості секвенції, яку назвемо *unv*-замкненістю (*unv* – скорочення *unvalued*). Вона базується на поняттях *unv*-змінних та *unv*-замкнених *R*-формул, тобто формул вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)$.

Множиною *unv*-змінних секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ назвемо множину $Un = \{u\in V \mid \varepsilon(u)\in\Gamma\}$.

При інтерпретатаціях предметні імена (змінні) множини *Un* трактуються як неозначені.

Для *R*-формул введемо поняття *unv*-форми відносно заданої множині *unv*-змінних *Un*, або *Un*-*unv*-форми.

Нехай *R*-формула $R^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}\Phi$ така: $\{r_1,\ldots, r_k, s,\ldots, s_k, y_1,\ldots, y_n\}\subseteq Un$, $\{x_1,\ldots,x_n\}\cap Un=\varnothing$, $\{v_1,\ldots, v_m\}\cap Un=\varnothing$.

Un-*unv*-форма формули $R^{r_1,\ldots r_k,x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots u_m}_{s_1,\ldots s_k,y_1,\ldots y_n,v_1,\ldots v_m}\Phi$ – це вираз вигляду $R^{x_1,\ldots x_n,u_1,\ldots,u_m}_{\varepsilon,\ldots,\varepsilon,\, v_1,\ldots,v_m}\Phi$, де спеціальний символ ε позначає невизначене значення.

R-формули Φ та Ψ назвемо *unv-еквівалентними* відносно множини *unv*-змінних *Un*, або *Un-unv-еквівалентними*, якщо Φ та Ψ мають однакові *Un*-*unv*-форми.

Із цього визначення вмпливає: якщо *R*-формули Φ та Ψ *Un*-*unv*-еквівалентні, то для кожних моделі мови ***A*** та $d\in {}^{V}\!A$, для яких виконується умова $\varepsilon u_A(d) = T$ для всіх $u\in Un$, маємо $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$.

Секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ із множиною *unv*-змінних *Un* *unv-замкнена*, якщо існує пара *Un*-*unv*-еквівалентних *R*-формул Φ та Ψ таких, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi\in\Delta$.

Теорема 7. *Якщо секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv-замкнена*, *то* $\Gamma \models \Delta$.

Справді, нехай секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *unv*-замкнена. Це означає, що вона має вигляд $\{\vdash\varepsilon u\}_{u\in Un}, \vdash\Phi, \vdash\Sigma, \dashv\Upsilon, \dashv\Psi$, де *R*-формули Φ та Ψ *Un*-*unv*-еквівалентні. Зафіксуємо довільні модель мови ***A*** = (*A*, ***I***) та $d\in {}^{V}\!A$. Можливі два випадки.

Нехай $\varepsilon u_A(d) = T$ для всіх $u\in Un$. Згідно *Un*-*unv*-еквівалентності *R*-формул Φ та Ψ маємо $\Phi_A(d) = \Psi_A(d)$ для кожного $d\in {}^{V}\!A$, тому неможливо $d\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_A)$. Нехай $\varepsilon u_A(d) = F$ для деякої $u\in Un$, тоді неможливо $d\in \boldsymbol{T}(\{\varepsilon u_A\}_{u\in Un})$.

Отже, $\boldsymbol{T}(\{\varepsilon u_A\}_{u\in Un})\cap \boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{T}(\Sigma_A)\cap \boldsymbol{F}(\Upsilon_A)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$, що дає $\{\varepsilon u\}_{u\in Un}, \Phi, \Sigma \models_{\boldsymbol{A}} \Upsilon, \Psi$, тобто $\Gamma \models_{\boldsymbol{A}} \Delta$. Звідси $\Gamma \models \Delta$.

Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми. Вони є синтаксичними аналогами семантичних властивостей відношення $\models$. Базові секвенційні форми записуємо у вигляді $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$ (Σ, Λ, Ω – секвенції).

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева називають секвенційними. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція Σ *вивідна*, або *має виведення*, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ.

Таке дерево назвемо *виведенням* секвенції Σ.

На основі семантичних властивостей відношення $\models$ для множин формул вводимо такі базові секвенційні форми:

$\vdash$RT $\dfrac{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A), \Sigma}{\vdash R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(A), \Sigma}$;

$\dashv$RT $\dfrac{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A), \Sigma}{\dashv R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(A), \Sigma}$;

$\vdash\Phi$N $\dfrac{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(A), \Sigma}{\vdash R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(A), \Sigma}$, де $y\in\nu(A)$;

$\dashv\Phi$N $\dfrac{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{u}}(A), \Sigma}{\dashv R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{u}}(A), \Sigma}$, де $y\in\nu(A)$;

$\vdash$R$\exists$R $\dfrac{\vdash R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xA), \Sigma}{\vdash R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists xA), \Sigma}$, де $x \notin \{\bar{u}\}$;

$\dashv$R$\exists$R $\dfrac{\dashv R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xA), \Sigma}{\dashv R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists xA), \Sigma}$, де $x \notin \{\bar{u}\}$.

$\vdash$R$\exists$p $\dfrac{\vdash \exists xA, \Sigma}{\vdash R^{x}_{y}(\exists xA), \Sigma}$;

$\dashv$R$\exists$p $\dfrac{\dashv \exists xA, \Sigma}{\dashv R^{x}_{y}(\exists xA), \Sigma}$.

Секвенційні форми типів RT, ΦN, R$\exists$R, R$\exists$p назвемо *допоміжними*, інші базові секвенційні форми – *основні*.

$\vdash$RR $\dfrac{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (A), \Sigma}{\vdash R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(A)), \Sigma}$;

$\dashv$RR $\dfrac{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}} (A), \Sigma}{\dashv R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(A)), \Sigma}$;

$\vdash R\neg\ \dfrac{\vdash \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}$; $\qquad \dashv R\neg\ \dfrac{\dashv \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}$;

$\vdash R\vee\ \dfrac{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$; $\qquad \dashv R\vee\ \dfrac{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A\vee B),\Sigma}$;

$\vdash\neg\ \dfrac{\dashv A,\Sigma}{\vdash \neg A,\Sigma}$; $\qquad \dashv\neg\ \dfrac{\vdash A,\Sigma}{\dashv \neg A,\Sigma}$;

$\vdash\vee\ \dfrac{\vdash A,\Sigma \qquad \vdash B,\Sigma}{\vdash A\vee B,\Sigma}$; $\qquad \dashv\vee\ \dfrac{\dashv A,\dashv B,\Sigma}{\dashv A\vee B,\Sigma}$;

Ми вводимо дві різновидності форм для елімінації кванторів: елімінації квантора під реномінацією ($\exists$R-форми) та елімінації зовнішнього квантора ($\exists$-форми).

$\vdash\exists\ \dfrac{\vdash R_z^x(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash \exists xA,\Sigma}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma,\exists xA)$; $\qquad \vdash\exists R\ \dfrac{\vdash R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$.

Секвенційні форми $\vdash\exists$R та $\vdash\exists$ будемо називати $\exists_T$-формами.

$\dashv\exists f\ \dfrac{\dashv\exists xA,\ \dashv R_z^x(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv\exists xA,\Sigma}$, де $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma,\exists xA)$;

$\dashv\exists Rf\ \dfrac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv\varepsilon z,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$, $z\in V_T$, $z\notin nm(\Sigma, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA))$;

Для $\dashv\exists$f та $\dashv\exists$Rf умова: Σ не містить спеціальних предикатних символів вигляду εz.

Така умова означає: при застосуванні $\dashv\exists$f чи $\dashv\exists$Rf до певної *F*-формули секвенції Ω на шляху від кореня до цієї Ω ще не було застосувань форм елімінації кванторів, це буде *першим* застосуванням форми елімінації.

Форми $\dashv\exists$f та $\dashv\exists$Rf назвемо формами типу $\exists$f ($\exists$-first).

$\dashv\exists v\ \dfrac{\dashv\exists xA,\ \dashv R_y^x(A),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv\exists xA,\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}$; $\qquad \dashv\exists Rv\ \dfrac{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$.

Форми $\dashv\exists$v та $\dashv\exists$Rv назвемо формами типу $\exists$v ($\exists$-valued).

$\dashv\exists d\ \dfrac{\vdash\varepsilon y,\ \dashv\exists xA,\Sigma \qquad \dashv\exists xA,\ \dashv R_y^x(A),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv\exists xA,\Sigma}$; $\qquad \dashv\exists Rd\ \dfrac{\vdash\varepsilon y,\ \dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma \qquad \dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\ \dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(A),\ \dashv\varepsilon y,\Sigma}{\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xA),\Sigma}$, де $x\notin\{\bar{u}\}$.

Для $\dashv\exists$d та $\dashv\exists$Rd умова: εy не входить до складу Σ, водночас Σ містить принаймі один спеціальний ПС вигляду εz. Форми $\dashv\exists$d та $\dashv\exists$Rd назвемо формами типу $\exists$d ($\exists$-distributed).

Секвенційні форми $\dashv\exists$f, $\dashv\exists$Rf, $\dashv\exists$v, $\dashv\exists$Rv, $\dashv\exists$d, $\dashv\exists$Rd будемо називати $\exists_F$-формами.

Секвенційні числення логік квазіарних предикатів із наведеними вище базовими секвенційними формами назвемо *QSC-численнями.*

Побудова секвенційного дерева. Опишемо процедуру побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ. Вона придатна для скінченних та зліченних секвенцій.

Для загального випадку логіки квазіарних предикатів треба брати до уваги, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул необхідно явно вказувати множини означених та неозначених імен. В процедурі побудови секвенційного дерева така особливість проявляється при формуванні прикладів для *F*-формул вигляду $\exists x\Phi$ та $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ за допомогою $\exists_F$-форм: приклади можуть відповідно мати тільки вигляд $R_y^x(\Phi)$ та $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$, де ім'я y – означене. Виділення означених та неозначених предметних імен ми робимо за допомогою спеціальних предикатних символів вигляду εy. Для секвенції Σ входження $\vdash\varepsilon y$ до Σ трактуємо як неозначеність y, а входження $\dashv\varepsilon y$ до Σ – як означеність y.

Для виведень скінченних секвенцій введемо поняття фінальної секвенцій.

Незамкнена вершина-секвенція Ω виведення (секвенційного дерева) секвенції Σ – *фінальна*, якщо до неї вже незастосовна жодна секвенційна форма, або якщо кожне застосування секвенційної форми до Ω не вводить нових формул, тобто формул, відмінних від формул секвенцій на шляху від Σ до Ω. Останнє означає стабілізацію на даному шляху, тобто ситуацію повторення незамкненої секвенції. Це, зокрема, можливо тоді, коли повторне застосування форм типу $\exists$v не додає нових прикладів.

Процедура побудови дерева для секвенції Σ починається з кореня дерева. Таку процедуру розіб'ємо на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул.

На початку кожного етапу виконується крок доступу. Це означає, що до списку доступних формул додаємо по одній формулі зі списку *T*-формул та списку *F*-формул. Якщо в секвенції недоступних *T*-формул чи *F*-формул немає (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку.

На початку побудови дерева доступна лише пара перших формул списків (або єдина *T*-формула чи *F*-формула, якщо один зі списків порожній).

Перед побудовою дерева для Σ зафіксуємо деякий нескінченний список *TN* "нових" тотально строго неістотних імен такий, що імена із *TN* не зустрічаються у формулах секвенції Σ.

Нехай виконано k етапів процедури. На етапі k+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево. Якщо ні, то у випадку виведення скінченної секвенції перевіряємо, чи буде хоч один із листів фінальною секвенцією. Поява фінальної секвенції сигналізує про негативне завершення процедури побудови дерева та про наявність в ньому шляху (від кореня до даної фінальної секвенції), всі вершини якого незамкнені. Такий шлях назвемо незамкненим.

Якщо процедура не завершена, то для кожного незамкненого листа ξ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною ξ наступним чином.

(1) Активізуємо всі доступні (окрім примітивних) формули ξ.

(2) До кожної активної формули застосовуємо відповідну основну секвенційну форму (так, як це описано нижче).

В процесі застосування основних секвенційних форм усуваємо, у разі наявності, тотожні перейменування та пари імен реномінацій за неістотним чи квантифікованим верхнім іменем, застосовуючи належну кількість разів допоміжні форми типів RT, ΦN, R∃R, R∃p. Після застосування основної секвенційної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні. До таких формул на даному етапі секвенційні форми вже не застосовуються (це не стосується використання допоміжних форм типу RT, ΦN, R∃R, R∃p).

Спочатку виконуємо (за можливості) всі $\exists_T$-форми. При кожному застосуванні такої форми беремо зі списку *TN* нове тотально неістотне ім'я ***z*** як перше незадіяне на даному шляху від кореня до даної вершини. Після цього до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну форму – одну з форм типу RR, R¬, R∨, ¬, ∨.

Далі застосовуємо $\exists_F$-форми. Це робимо таким чином.

Якщо в момент першого застосування $\exists_F$-форми серед доступних формул секвенції ще немає спеціальних ПС вигляду εy (це означає, що на цьому шляху ще не було застосувань форм елімінації квантора та виділення означених і неозначених імен), то застосовуємо відповідну форму типу ∃f. Після цього за можливості застосовуємо відповідні форми типу ∃v. Це робимо для всіх y таких, що спеціальні ПС вигляду εy є доступними *F*-формулами секвенції.

Далі застосовуємо (за можливості) 2-засновкові форми типу ∃d (необхідною умовою є наявність серед доступних формул секвенції хоч одного спеціального ПС вигляду $\varepsilon\boldsymbol{z}$, інакше виконується форма типу ∃f). Нехай в момент застосування певної форми типу ∃d маємо $\boldsymbol{\Sigma_0}$ як множину доступних формул, тоді цю форму застосовуємо для всіх імен $y\in nm(\boldsymbol{\Sigma_0})$ таких, що $\varepsilon y\notin\boldsymbol{\Sigma_0}$. Таке застосування по суті дає розподіл цих імен на означені та неозначені, це веде до добудови скінченного піддерева.

Після виконання кожної форми секвенції-вершини перевіряємо на замкненість, і якщо так, то відмічаємо цей факт. Замкнені секвенції є листами секвенційного дерева, при появі замкненої секвенції до неї вже незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Секвенції ми трактуємо як множини специфікованих формул, тому всі повтори формул у секвенціях усуваємо.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) Процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.

2) Процедуру завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево.

3) Процедура не завершується, маємо нескінченне секвенційне дерево. За лемою Кеніга [10] нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях.

У випадках 2) і 3) у дереві існує незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на шляху $\wp$ і стане доступною.

Коректність *QSC*-числень. Нехай секвенція Σ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево.

Із наведеної вище процедури побудови секвенційного дерева випливає, що для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathrm{K}$ справджується $\Lambda\models\mathrm{K}$.

Для листів дерева це випливає з визначень замкненої та *unv*-замкненої секвенцій.

Збереження секвенційними формами зазначеного вище відношення логічного наслідку (від засновків до висновків) виконується для допоміжних форм типу RT, ΦN, R∃R, R∃p та основних форм типу типу RR, R¬, R∨, ¬, ∨. Це випливає із відповідних властивостей типу RT, ΦN, R∃R, RR, R¬, R∨, ¬, ∨ для відношення $\models$.

Для $\vdash$∃-форм та $\vdash$∃R-форм збереження відповідних відношень логічного наслідку від засновку до висновку випливає з властивостей $\exists_{\vdash}$ та $\exists R_{\vdash}$. Для форм типу ∃f це випливає з властивостей $\exists f_{\dashv}$ та $\exists Rf_{\dashv}$, для форм типу ∃v – з властивостей $\exists v_{\dashv}$ та $\exists Rv_{\dashv}$, для форм типу ∃d – з властивостей $\exists d_{\dashv}$ та $\exists Rd_{\dashv}$.

Таким чином, для побудованого *QSC*-числення справджується.

Теорема 8 (коректності). *Нехай секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma\models\Delta$.

Повнота *QSC*-числень. Теорема повноти *QSC*-числень опирається на теорему про існування контрмоделі для множини формул незамкненого шляху.

Теорема 9. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях у секвенційному дереві*, ***H*** *– множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують* АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ *та* $\delta\in{}^{V}\!A$ *такі*, *що*:

1) $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=T$; 2) $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\Phi_A(\delta)=F$.

Таку пару $(\boldsymbol{A},\delta)$ назвемо *контрмоделлю* для секвенції Σ, для якої збудоване відповідне секвенційне дерево.

Множини $W=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\mid \dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$ та $Un=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\mid \vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$ назвемо відповідно множиною означених імен та множиною неозначених імен множини ***H***.

Доведення. Застосування секвенційних форм до секвенцій шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується як базова умова замкненості, так і умова *unv*-замкненості. Тому для множини ***H*** гарантовано виконуються наступні умови:

НС) Для кожної примітивної формули Φ неможливо $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$;

НСU) Не існує пари примітивних *Un-unv*-еквівалентних формул $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A$ таких, що $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}A\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv R_{\bar{y}}^{\bar{u}}A\in\boldsymbol{H}$.

Умови НС та НСU назвемо умовами коректності множини специфікованих формул ***H***.

Переходи від нижчої вершини шляху ℘ до вищої виконуються згідно з секвенційними формами *QSC*-числення. Звідси випливає, що для $\boldsymbol{H}$ виконуються наступні умови.

HRT) Якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HΦN) Якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∃R) Якщо $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$; якщо $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

HR∃p) Якщо $\vdash R_{y}^{x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{y}^{x}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HRR) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR¬) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

HR∨) Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$.

H¬) Якщо $\vdash\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$.

H∨) Якщо $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

H∃) Якщо $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$; якщо $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$, то для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R_{y}^{x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$.

H∃R) Якщо $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то існує $y\in W$ таке, що $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$;

Якщо $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ (тут $x\notin\{\bar{u}\}$).

Множину специфікованих формул $\boldsymbol{H}$, для якої виконуються наведені вище умови, назвемо *модельною*, або *хінтіккківською* множиною. Метод модельних (хінтікківських) множин широко використовується для доведення повноти різноманітних логічних систем (див., напр., [11]).

Доведемо наведені вище умови для модельної множини. Це очевидно майже для всіх цих умов, тому обмежимось для прикладу доведенням H∨ та H∃R.

Доводимо H∨. Нехай $\vdash\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху ℘ до *T*-формули $\Phi\vee\Psi$ була застосована $\vdash\vee$-форма, яка дала *T*-формулу Φ або *T*-формулу Ψ, звідки $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in\boldsymbol{H}$. Нехай $\dashv\Phi\vee\Psi\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху ℘ до *F*-формули $\Phi\vee\Psi$ була застосована $\dashv\vee$-форма, яка дала *F*-формули Φ та Ψ, звідки $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in\boldsymbol{H}$.

Доводимо H∃R. Нехай $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, тоді на деякому кроці виведення на шляху ℘ до *T*-формули $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$ була застосована $\vdash\exists$R-форма, яка дала приклад – *T*-формулу $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)$. Тоді $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, тому $y\in W$. Отже, для деякого $y\in W$ маємо $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Нехай $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$; тоді при кожній активізації цієї *F*-формули до відповідної вершини-секвенції додаються, згідно $\dashv\exists$Rf-форми (якщо це перше на шляху ℘ застосування форми елімінації), $\dashv\exists$Rv-форми чи $\dashv\exists$Rd-форми, її приклади – *F*-формули $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$ – для кожного *y* такого, що $\dashv\varepsilon y\in\Sigma_0$, де Σ_0 – множина доступних формул вершини. Отже, якщо $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$, то $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ для всіх *y* таких, що $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, тобто для всіх $y\in W$.

Перейдемо тепер до побудови контрмоделі за модельною множиною $\boldsymbol{H}$.

Для множини $W=\{y\in nm(\boldsymbol{H})\mid\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}\}$ візьмемо деяку множину *A* таку, що $|A| = |W|$. Фактично така *A* дублює множину усіх означених предметних імен, що фігурують у $\boldsymbol{H}$. Візьмемо деяку ін'єктивну $\delta\in{}^{V}\!A$ з $asn(\delta) = W$.

Задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо $\vdash\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y_A(\delta) = T$, що й означає $y\notin asn(\delta)$; якщо $\dashv\varepsilon y\in\boldsymbol{H}$, то $\varepsilon y_A(\delta) = F$, що й означає $y\in asn(\delta)$.

Якщо $\vdash p\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\delta) = T$; якщо $\dashv p\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\delta) = F$.

Якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = T$; якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in\boldsymbol{H}$, то задамо $p_A(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів задаємо довільним чином, беручи до уваги обмеження щодо строго неістотності: для всіх $d, h\in{}^{V}\!A$ таких, що $d\|\text{-}\nu(p) = h\|\text{-}\nu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$. Це гарантує, що імена $y\in\nu(p)$ строго неістотні для p_A. Таким чином, значення базових предикатів визначені коректно.

Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з умовами визначення модельної множини $\boldsymbol{H}$.

Для атомарних формул і формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження 1) та 2) теореми випливають із наведеного визначення значень базових предикатів. Доведемо для прикладу крок індукції для п. H∃R.

Нехай $\vdash R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∃R тоді існує $y\in W$ таке, що $\vdash R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi))_A(\delta) = T$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto\delta(y)) = T$. Проте $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta\in{}^{W}\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\delta(y)$ отримуємо $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto a) = T$, що дає $(\exists x\Phi)_A(\mathrm{r}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\delta)) = T$, звідки $(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))_A(\delta) = T$.

Нехай $\dashv R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H∃R для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції $(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi))_A(\delta) = F$ для всіх $y\in W$. Звідси $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto\delta(y)) = F$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\delta\in{}^{W}\!A$, маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк δ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\Phi_A(\delta\nabla\bar{u}\mapsto\delta(\bar{v})\nabla x\mapsto b) = F$ для всіх $b\in A$, тому для всіх $b\in A$ маємо $(\exists x\Phi)_A(\mathrm{r}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\delta)) = F$, звідки $(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))_A(\delta) = F$.

На основі теореми 9 отримуємо теорему повноти для *QSC*-числень.

Теорема 10 (повноти). *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ *вивідна.*

Доведення. Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ та секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Якщо $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна, то секвенційне дерево δ для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ незамкнене. Отже, в δ існує незамкнений шлях $\wp$. Нехай $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Така $\boldsymbol{H}$ – модельна. Згідно з теоремою 9 існує контрмодель ($\boldsymbol{A}$, δ), тобто *AC* $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ та $\delta \in {}^{V}A$ такі: $\vdash\Phi \in \boldsymbol{H} \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\dashv Ш \in \boldsymbol{H} \Rightarrow Ш_A(\delta) = F$. Згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ тоді для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$ та для всіх $Ш \in \Delta$ маємо $Ш_A(\delta) = F$. Це суперечить $\Gamma \models \Delta$.

Висновки. В роботі досліджено чисті першопорядкові композиційно-номінативні логіки часткових однозначних квазіарних предикатів. Запропоновано розширення логіки спеціальними 0-арними композиціями – предикатами-індикаторами, які визначають наявність значення для предметних імен. На цій основі для таких розширених логік побудовано числення секвенційного типу, для збудованих числень доведено теореми коректності та повноти. Побудову секвенційних числень на основі використання спеціальних предикатів-індикаторів планується продовжити для логік неоднозначних квазіарних предикатів.

1. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Пробл. программирования. – 1999, № 1. 2. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. 3. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. № 1. 4. *Шкільняк С.С.* Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2011, № 4. 5. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Першопорядкові композиційно-номінативні логіки // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2011, Вип. 4. 6. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и сист. анализ. – 2010. – № 6. 7. *Шкільняк С.С.* Секвенційні числення композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів // Пробл. програмування. – 2012, № 2–3. 8. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки кванторно-екваційного рівня // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: кібернетика. – 2011, Вип. 11. 9. *Nikitchenko M.*, *Tymofieiev V.* Satisfability and Validity Problems in Many-sorted Composition-Nominative Pure Predicate Logics // Comm. in Comp. and Inf. Science. – V. 0137. – Springer, 2012. 10. *Клини С.* Математическая логика.– М.; 1973. 11. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М., 1996.

Надійшла до редколегії 29.08.12

УДК 519.21

О. Прищепа , асп.

ГІСТЕРЕЗИСНІ СТРАТЕГІЇ КЕРУВАННЯ ІНТЕНСИВНІСТЮ ВХІДНОГО ПОТОКУ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ М/М/1 З ОДНІЄЮ СПРОБОЮ ПОВТОРУ

Досліджується стохастична система з одним приладом та однією спробою повтору, для якої розглянуто проблему оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Для процесу обслуговування вимог у такій системі досліджено стаціонарний режим, отримано рекурентні формули для стаціонарних імовірностей.

An one-channel stochastic system with one repeat attempt is examined in the paper. An optimal control problem of input rate for this system is considered. For service process of calls in the systems stationary regime is investigated and recurrent formulas for stationary probability are given.

Вступ. Серед стохастичних систем масового обслуговування особливе місце займають системи з повторними викликами, які мають широку сферу застосування. Зокрема, це комп'ютерні мережі (локальні та глобальні), системи керування посадкою повітряних суден, системи мобільного зв'язку. Принцип роботи систем масового обслуговування з повторними викликами наступний. Ззовні до системи надходять вимоги для обслуговування. Якщо у момент надходження є хоча б один вільний прилад, то вимога відразу починає обслуговуватися і після цього залишає систему. Якщо всі прилади зайняті, то вимога стає джерелом повторних викликів. Це означає, що через деякий час повторюється спроба зайняти вільний прилад та отримати обслуговування. Результати досліджень таких систем подано у роботах [2],[4]. В роботах [1],[3] проведено порівняльний аналіз класичних систем масового обслуговування та систем з повторними викликами. При дослідженні систем з повторними викликами покладають, що вимога може повторно звертатися до системи до тих пір, поки не отримає обслуговування. Це є лише наближенням реальних ситуацій, тому що число повторних спроб часто буває обмеженим. Зокрема, в роботах [5], [8], [9] розглянуто саме системи з обмеженим числом повторних спроб отримати обслуговування, дослідження яких є досить актуальним на даний час, особливо з точки зору оптимізації їх роботи.

В роботі, що пропонується, розглядається система типу $M/M/1$ з однією спробою повтору (рис.1).

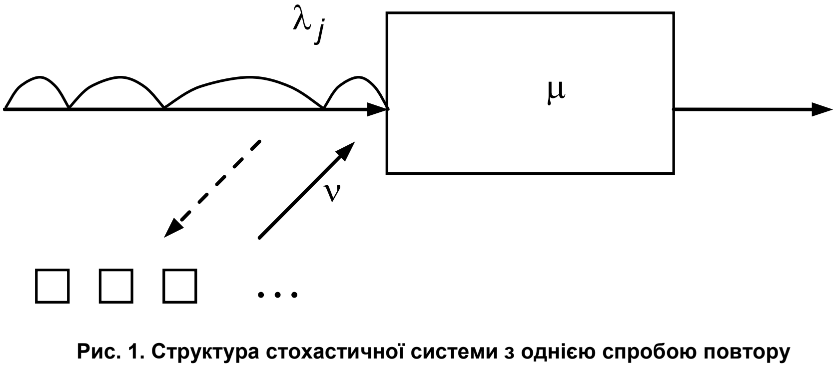

Рис. 1. Структура стохастичної системи з однією спробою повтору

Формально дану систему можна описати наступним чином (див., наприклад, [5], [9]). Ззовні до системи надходять вимоги, які за умови наявного вільного приладу обслуговуються. В іншому випадку формують джерела повторних викликів, звідки повторно можуть опитати систему лише один раз. Якщо при повторному зверненні вимоги, що утворила джерело повторних викликів, прилад є зайнятий, то вона залишає систему. Параметрами моделі є наступні: μ – інтенсивність обслуговування, ν – інтенсивність повторних опитувань, λ_j, $j = 0,1,...$ – інтенсивність вхідного потоку, що залежить від числа джерел повторних викликів. Враховуючи змінний характер інтенсивності надходження вимог, в даній роботі розглядається проблема оптимального керування інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій. Оптимізація роботи даної системи в класі порогових стратегій була розглянута в роботі [9].

Процес керування інтенсивністю вхідного потоку на основі гістерезисної стратегії можна описати наступним чином. Фіксуються два невід'ємних цілих числа H_1 та H_2, які називаються порогами, $H_1 \le H_2$. Якщо в деякий момент часу кількість повторних викликів в системі не перевищує H_1, то вона функціонує в першому режимі і інтенсивність вхідного потоку дорівнює h_1. Якщо кількість повторних викликів більша за H_2, то система функціонує у другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку . Якщо кількість повторних викликів лежить у проміжку $(H_1,H_2]$, то система зберігає той режим, в якому вона функціонувала в попередній момент часу.

Стан системи в будь-який момент часу t при фіксованій стратегії $(H_1,H_2]$ може бути описаний тривимірним процесом $Q(t,H_1,H_2)=(Q_1(t,H_1,H_2),Q_2(t,H_1,H_2),R(t,H_1,H_2))$, де $Q_1(t,H_1,H_2)$ – кількість зайнятих приладів, $Q_2(t,H_1,H_2)$ – кількість джерел повторних викликів, $R(t,H_1,H_2)$ – режим роботи системи. Якщо $R(t,H_1,H_2)=1$, то система працює в першому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_1. Якщо $R(t,H_1,H_2)=2$, то система працює в другому режимі з інтенсивністю вхідного потоку h_2. Процес $Q(t,H_1,H_2)$ є ланцюгом Маркова з неперервним часом і множиною станів $S=S^1\cup S^2$, $S^1=\{i=(i_1,i_2,1): i_1=0,1;\ i_2=0,\dots,H_2\}$, $S^2=\{i=(i_1,i_2,2): i_1=0,1;\ i_2=H_1+1,\dots\}$, $S^1\cap S^2=\varnothing$.

Для заданих параметрів $\mu,\nu,h_1,h_2>0$ інфінітезимальні характеристики $b_{(i,j,r)(i',j',r')}$, $(i,j,r),(i',j',r')\in S$ визначаються наступним чином:

якщо $[(i=0)\wedge(j\in\{0,\dots,H_2\})\wedge(r=1)]\vee[(i=0)\wedge(j\in\{H_1+2,\dots\})\wedge(r=2)]$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')}=\begin{cases} h_r, & \textit{при}\ \ (i',j',r')=(i+1,j,r);\\ j\ \nu, & \textit{при}\ \ (i',j',r')=(i+1,j-1,r);\\ -(h_r+j\ \nu), & \textit{при}\ \ (i',j',r')=(i,j,r);\\ 0, & \textit{в іншому випадку};\end{cases}$$

якщо $[(i=1)\wedge(j\in\{0,\dots,H_2-1\})\wedge(r=1)]\vee[(i=1)\wedge(j\in\{H_1+2,\dots\})\wedge(r=2)]$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')}=\begin{cases} h_r, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(i,j+1,r);\\ j\nu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(i,j-1,r);\\ \mu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(i-1,j,r);\\ -(h_r+j\ \nu+\mu), & \text{при}\ (i',j',r')=(i,j,r);\\ 0, & \text{в іншому випадку};\end{cases}$$

якщо $(i,j,r)=(1,H_2,1)$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')}=\begin{cases} h_1, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(1,H_2+1,2);\\ H_2\ \nu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(1,H_2-1,1);\\ \mu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(0,H_2,1);\\ -(h_1+H_2\ \nu+\mu), & \text{при}\ \ (i',j',r')=(i,j,r);\\ 0, & \text{в іншому випадку};\end{cases}$$

якщо $(i,j,r)=(0,H_1+1,2)$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')}=\begin{cases} h_2, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(1,H_1+1,2);\\ (H_1+1)\ \nu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(1,H_1,1);\\ -(h_2+(H_1+1)\ \nu), & \text{при}\ \ (i',j',r')=(i,j,r);\\ 0, & \text{в іншому випадку};\end{cases}$$

якщо $(i,j,r)=(1,H_1+1,2)$, то

$$b_{(i,j,r)(i',j',r')}=\begin{cases} h_2, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(1,H_1+2,2);\\ (H_1+1)\ \nu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(1,H_1,1);\\ \mu, & \text{при}\ \ (i',j',r')=(0,H_1+1,2);\\ -(h_2+(H_1+1)\ \nu+\mu), & \text{при}\ \ (i',j',r')=(i,j,r);\\ 0, & \text{в іншому випадку}.\end{cases}$$

Графічно процес зміни станів ланцюга Маркова $Q(t,H_1,H_2)$ можна представити за допомогою діаграми переходів, яку подано на рис. 2.

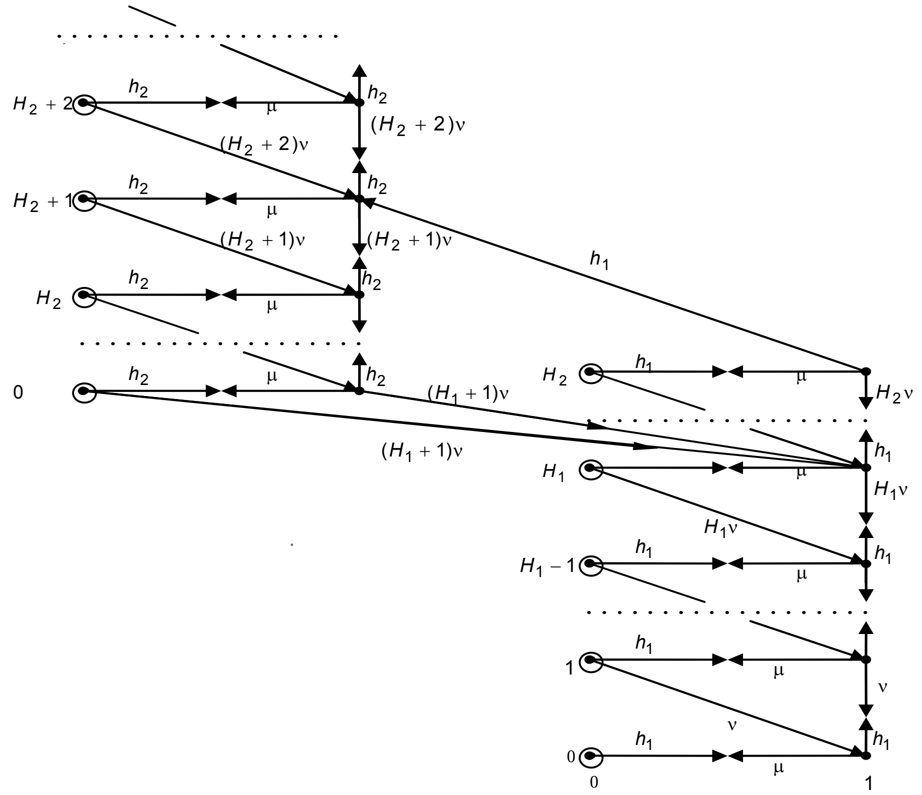

Рис. 2. Діаграма переходів ланцюга Маркова $Q(t,H_1,H_2)$

Позначимо $\pi^{(r)}_{0j}(H_1,H_2)$, $\pi^{(r)}_{1j}(H_1,H_2)$, $r=1,2$, $j=0,1,...$ стаціонарні ймовірності системи. У подальшому для скорочення викладок будемо використовувати позначення $\pi^{(r)}_{0j}$, $\pi^{(r)}_{1j}$, опускаючи індекси (H_1,H_2).

Головна мета роботи – вивчення умов існування стаціонарного режиму для $Q(t,H_1,H_2)$ та побудова розрахункових формул для стаціонарних ймовірностей $\pi^{(r)}_{ij}$, $(i,j,r)\in S$.

Теорема 1. Якщо параметри моделі типу $M/M/1$ з однією спробою повтору та керованою інтенсивністю вхідного потоку в класі гістерезисних стратегій є невироджені $h_1,h_2,\mu,\nu>0$, то для процесу обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$, $t\geq 0$ існує стаціонарний режим і стаціонарні ймовірності можна подати у вигляді:

$$\pi^{(1)}_{00}=\frac{\mu}{h_1}\pi^{(1)}_{10},\ \pi^{(1)}_{0j}=\frac{\mu\alpha^{(1)}_j\pi^{(1)}_{10}}{h_1+j\nu},\ \pi^{(1)}_{1j}=\alpha^{(1)}_j\pi^{(1)}_{10},\ j=1,...,H_1,$$

$$\pi^{(1)}_{0j}=\frac{\mu}{h_1+j\nu}\left[\alpha^{(1)}_j-\frac{h_1\alpha^{(1)}_{H_2}\beta^{(1)}_{j,H_1+1}}{\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1}}\right]\pi^{(1)}_{10},\ \pi^{(1)}_{1j}=\left[\alpha^{(1)}_j-\frac{h_1\alpha^{(1)}_{H_2}\beta^{(1)}_{j,H_1+1}}{\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1}}\right]\pi^{(1)}_{10},\ j=H_1+1,...,H_2,$$

$$\pi^{(2)}_{0H_1+1}=\frac{h_1\mu\alpha^{(1)}_{H_2}}{(H_1+1)(\mu+h_2+(H_1+1)\nu)(\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1})}\pi^{(1)}_{10},$$

$$\pi^{(2)}_{1H_1+1}=\frac{h_1\alpha^{(1)}_{H_2}(h_2+(H_1+1)\nu)}{(H_1+1)(\mu+h_2+(H_1+1)\nu)(\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1})}\pi^{(1)}_{10},$$

$$\pi^{(2)}_{0j}=\frac{\mu h_1\alpha^{(1)}_{H_2}\beta^{(2)}_{j,H_1+1}}{(h_2+j\nu)(\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1})}\pi^{(1)}_{10},\ \pi^{(2)}_{1j}=\frac{h_1\alpha^{(1)}_{H_2}\beta^{(2)}_{j,H_1+1}}{\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1}}\pi^{(1)}_{10},\ j=H_1+2,...,H_2+1,$$

$$\pi^{(2)}_{0j}=\frac{\mu\alpha^{(2)}_j h_1\alpha^{(1)}_{H_2}\beta^{(2)}_{H_2+1,H_1+1}}{(h_2+j\nu)\alpha^{(2)}_{H_2+1}\left(\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1}\right)}\pi^{(1)}_{10},\ \pi^{(2)}_{1j}=\frac{\alpha^{(2)}_j h_1\alpha^{(1)}_{H_2}\beta^{(2)}_{H_2+1,H_1+1}}{\alpha^{(2)}_{H_2+1}\left(\nu+h_1\beta^{(1)}_{H_2,H_1+1}\right)}\pi^{(1)}_{10},\ j=H_2+2,...,$$

де
$$\pi_{10}^{(1)}=\left[\frac{\mu+h_1}{h_1}+\sum_{j=1}^{H_1}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\alpha_j^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{H_2}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\left(\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\left(\frac{1}{H_1+1}+\sum_{j=H_1+2}^{H_2+1}\frac{\beta_{j,H_1+1}^{(2)}(h_2+\mu+j\nu)}{h_2+j\nu}+\sum_{j=H_2+2}^{\infty}\frac{(h_2+\mu+j\nu)\alpha_j^{(2)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1,}^{(2)}(h_2+j\nu)}\right)\right]^{-1},$$
$$\alpha_j^{(r)}=\frac{h_r^j}{j!\nu^j}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{h_r+(j-k)\nu}{h_r+\mu+(j-k)\nu},\ r=1,2,$$
$$\beta_{jm}^{(r)}=\sum_{i=0}^{j-m}\frac{(j-i-1)!h_r^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\frac{h_r+(j-k)\nu}{h_r+\mu+(j-k)\nu},\ r=1,2.$$

Доведення. Для того, щоб довести існування стаціонарного режиму для процесу обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$, $t\ge 0$ застосуємо теорему Твіді [4]. Розглянемо
$$\phi(i,j,r)=ai+j+r\ ,\ (i,j,r)\in S$$
в якості тест-функцій Ляпунова, де параметр a буде визначено пізніше.

Якщо показати, що параметр a можна вибрати так, щоб середній перенос для цих функцій, який визначається формулою
$$y_{ijr}=\sum_{(i',j',r')\ne(i,j,r)}b_{(i,j,r)(i',j',r')}\left(\phi(i',j',r')-\phi(i,j,r)\right),$$
буде рівномірно менше нуля відносно j, за винятком, можливо скінченної кількості точок (i,j,r), то виконуються умови теореми Твіді.

Таким чином, якщо врахувати вигляд інфінітезимальних характеристик ланцюга Маркова $Q(t,H_1,H_2)$, то достатньо обмежитись випадками 1) при $i=0$, $j=H_1+2,\dots$, $r=2$ та 2) при $i=1$, $j=H_1+2,\dots$, $r=2$, оскільки в інших випадках число точок (i,j,r) є скінченним.

Для даних випадків середній перенос визначається наступним чином:
$$y_{ijr}=\begin{cases}ah_2+j\nu(a-1), \text{при } i=0\ , j=H_1+2,\dots\ , r=2;\\ h_2-j\nu-a\mu, \quad \text{при } i=1\ , j=H_1+2,\dots\ , r=2.\end{cases}$$

Отже, $y_{0j2}=ah_2+j\nu(a-1)<0$ для $a<\dfrac{j\nu}{h_2+j\nu}$ та $y_{1j2}=h_2-j\nu-a\mu<0$ для $a>\dfrac{h_2-j\nu}{\mu}$.

Таким чином, для будь-яких $h_1,h_2,\mu,\nu>0$ можна вказати таке $a<1$, при якому будуть виконуватись умови теореми Твіді для тест-функцій, що розглядаються. Отже, процес обслуговування $Q(t,H_1,H_2)$ є регулярним, ергодичним і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним розподілом.

Для пошуку стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij}^{(r)}$, $r=1,2$ використаємо теорему про рівність потоку ймовірностей через границю замкненої області в стаціонарному режимі ([10], стор. 49). Для кожного $j=0,1,\dots,H_2$ побудуємо розбиття фазового простору $S=S_{0j}^{(1)}\cup\bar{S}_{0j}^{(1)}$, де $S_{0j}^{(1)}=\{(0,j,1)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_{0j}^{(1)}$, знаходимо
$$(h_1+j\nu)\pi_{0j}^{(1)}=\mu\pi_{1j}^{(1)},\ j=0,1,\dots,H_2. \tag{1}$$

Для кожного $j=H_1+1,\dots$ побудуємо розбиття фазового простору $S=S_{0j}^{(2)}\cup\bar{S}_{0j}^{(2)}$, де $S_{0j}^{(2)}=\{(0,j,2)\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_{0j}^{(2)}$, знаходимо
$$(h_2+j\nu)\pi_{0j}^{(2)}=\mu\pi_{1j}^{(2)},\ j=H_1+1,\dots \tag{2}$$

Тепер для $j=0,1,\dots,H_2$ побудуємо розбиття фазового простору $S=S_j^{(1)}\cup\bar{S}_j^{(1)}$, $S_j^{(1)}=\{(i,m,1):m\le j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(1)}$, отримаємо наступну систему рівнянь
$$j\nu\pi_{0j}^{(1)}+j\nu\pi_{1j}^{(1)}=h_1\pi_{1j-1}^{(1)},\ j=1,\dots,H_1, \tag{3}$$
$$j\nu\pi_{0j}^{(1)}+j\nu\pi_{1j}^{(1)}+(H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)}+(H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}=h_1\pi_{1j-1}^{(1)},\ j=H_1+1,\dots,H_2, \tag{4}$$
$$(H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)}+(H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}=h_1\pi_{1H_2}^{(1)}, \tag{5}$$

Для $j = H_1 + 1,...$ побудуємо розбиття фазового простору $S = S_j^{(2)} \cup \bar{S}_j^{(2)}$, де $S_j^{(2)} = \{(i,m,2) : H_1 + 1 \le m \le j\}$. Прирівнюючи потоки ймовірностей через границю області $S_j^{(2)}$, отримаємо наступну систему рівнянь

$$j\nu\pi_{0j}^{(2)} + j\nu\pi_{1j}^{(2)} = h_2\pi_{1j-1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}, \ j = H_1+2,...,H_2+1, \tag{6}$$

$$j\nu\pi_{0j}^{(2)} + j\nu\pi_{1j}^{(2)} + h_1\pi_{1H_2}^{(1)} = h_2\pi_{1j-1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)} + (H_1+1)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}, \ j = H_2+2,... \tag{7}$$

Використовуючи рівняння (1), подамо $\pi_{0j}^{(1)}$ через $\pi_{1j}^{(1)}$:

$$\pi_{0j}^{(1)} = \frac{\mu}{h_1 + j\nu}\pi_{1j}^{(1)}, \ j = 1,...,H_1,$$

Дане подання підставляємо у (3). Отримаємо рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(1)}$, що визначається через $\pi_{10}^{(1)}$:

$$\pi_{1j}^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)}, \ j = 1,...,H_1, \tag{8}$$

де $\alpha_j^{(1)} = \dfrac{h_1^j}{j!\nu^j}\displaystyle\prod_{k=0}^{j-1}\dfrac{h_1 + (j-k)\nu}{h_1 + \mu + (j-k)\nu}$.

Враховуючи рівняння (1), (2), підставляємо результат (8) у рівняння (4), отримаємо рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(1)}$, $j = H_1+1,...,H_2$, яке виражається через $\pi_{10}^{(1)}$ та $\pi_{1H_1+1}^{(2)}$,

$$\pi_{1j}^{(1)} = \alpha_j^{(1)}\pi_{10}^{(1)} - \frac{(H_1+1)(h_2 + \mu + (H_1+1)\nu)}{h_2 + (H_1+1)\nu}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}\pi_{1H_1+1}^{(2)}, \ j = H_1+1,...,H_2, \tag{9}$$

де $\beta_{jm}^{(1)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j-m}\dfrac{(j-i-1)!h_1^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\dfrac{h_1 + (j-k)\nu}{h_1 + \mu + (j-k)\nu}$.

Щоб отримати $\pi_{1H_2}^{(1)}$, в рекурентному співвідношенні (9) покладемо $j = H_2$. Підставляючи в рівняння (5) значення $\pi_{1H_2}^{(1)}$, знайдемо представлення для $\pi_{1H_1+1}^{(2)}$:

$$\pi_{1H_1+1}^{(2)} = \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}(h_2 + (H_1+1)\nu)}{(H_1+1)(\mu + h_2 + (H_1+1)\nu)(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)})}\pi_{10}^{(1)}. \tag{10}$$

Враховуючи (9), (10), можемо подати в рекурентній формі ймовірності $\pi_{1j}^{(1)}$, $j = H_1+1,...,H_2$ через $\pi_{10}^{(1)}$:

$$\pi_{1j}^{(1)} = \left[\alpha_j^{(1)} - \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right]\pi_{10}^{(1)}, \ j = H_1+1,...,H_2. \tag{11}$$

Використовуючи рівняння (2), (6), (10), маємо також рекурентні співвідношення для $\pi_{1j}^{(2)}$, $j = H_1+2,...,H_2+1$:

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(2)}}{\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\pi_{10}^{(1)}, \tag{12}$$

де $\beta_{jm}^{(2)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j-m}\dfrac{(j-i-1)!h_2^i}{j!\nu^i}\prod_{k=0}^{i}\dfrac{h_2 + (j-k)\nu}{h_2 + \mu + (j-k)\nu}$.

У свою чергу можна отримати рекурентне співвідношення для $\pi_{1j}^{(2)}$, $j = H_2+2,...$, якщо скористатися рівнянням (7) та врахувати результат (12) при $j = H_2+1$:

$$\pi_{1j}^{(2)} = \frac{\alpha_j^{(2)}h_1\alpha_{H_2}^{(1)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1}^{(2)}\left(\nu + h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}\right)}\pi_{10}^{(1)},$$

де $\alpha_j^{(2)} = \dfrac{h_2^j}{j!\nu^j}\displaystyle\prod_{k=0}^{j-1}\dfrac{h_2 + (j-k)\nu}{h_2 + \mu + (j-k)\nu}$.

Використовуючи рівняння (1), (2) можна отримати стаціонарні ймовірності $\pi_{0j}^{(1)}$, $j = 0,...,H_2$ та $\pi_{0j}^{(2)}$, $j = H_1+1,...$.

Вираз для $\pi_{10}^{(1)}$ знаходимо з умови нормування: $\sum_{j=0}^{H_2}\left(\pi_{0j}^{(1)}+\pi_{1j}^{(1)}\right)+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}\left(\pi_{0j}^{(2)}+\pi_{1j}^{(2)}\right)=1$.

Таким чином,

$$\pi_{10}^{(1)}=\left[\frac{\mu+h_1}{h_1}+\sum_{j=1}^{H_1}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\alpha_j^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{H_2}\frac{h_1+\mu+j\nu}{h_1+j\nu}\left(\alpha_j^{(1)}-\frac{h_1\alpha_{\mathrm{H}_2}^{(1)}\beta_{j,H_1+1}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{h_1\alpha_{\mathrm{H}_2}^{(1)}}{\nu+h_1\beta_{H_2,H_1+1}^{(1)}}\left(\frac{1}{H_1+1}+\sum_{j=H_1+2}^{H_2+1}\frac{\beta_{j,H_1+1}^{(2)}\left(h_2+\mu+j\nu\right)}{h_2+j\nu}+\sum_{j=H_2+2}^{\infty}\frac{\left(h_2+\mu+j\nu\right)\alpha_{\mathrm{j}}^{(2)}\beta_{H_2+1,H_1+1}^{(2)}}{\alpha_{H_2+1,}^{(2)}\left(h_2+j\nu\right)}\right)\right]^{-1}.$$

Теорему доведено.

Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в даній моделі дає можливість ставити і розв'язувати для неї оптимізаційні задачі.

В роботі розглядається оптимізаційна задача

$$C_1S_1(H_1,H_2)-C_2S_2(H_1,H_2)-C_3S_3(H_1,H_2)\to\max \tag{13}$$

$$H_1,H_2\in\{0,1,...\},\ H_1\le H_2,$$

де $\lim_{t\to\infty}t^{-1}S_i(t,H_1,H_2)=S_i(H_1,H_2)$ ($i=\overline{1,3}$); $S_1(t,H_1,H_2)$ – число викликів, обслуговування яких завершено в системі за час t в першому та другому режимах; $S_2(t,H_1,H_2)$ – число викликів, які отримали відмову в обслуговуванні і стали повторними викликами; $S_3(t,H_1,H_2)$ – число перемикань інтенсивності вхідного потоку; C_1 – прибуток, пов'язаний з обслуговуванням одного виклику в першому та другому режимах; C_2 – штраф за відмову в обслуговуванні; C_3 – штраф за перемикання інтенсивності вхідного потоку.

В умовах існування стаціонарного режиму функціонали $S_i(H_1,H_2)=\lim_{t\to\infty}t^{-1}S_i(t,H_1,H_2)$, $i=\overline{1,3}$ існують і можуть бути виписані через стаціонарні ймовірності:

$$S_1(H_1,H_2)=\sum_{j=0}^{H_2}\mu\pi_{1j}^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}\mu\pi_{1j}^{(2)},$$

$$S_2(H_1,H_2)=\sum_{j=0}^{H_2}h_1\pi_{1j}^{(1)}+\sum_{j=H_1+1}^{\infty}h_2\pi_{1j}^{(2)},$$

$$S_3(H_1,H_2)=h_1\pi_{1H_2}^{(1)}+\left(H_1+1\right)\nu\pi_{0H_1+1}^{(2)}+\left(H_1+1\right)\nu\pi_{1H_1+1}^{(2)}.$$

Розв'язком задачі (13) є такі пороги H_1,H_2, які максимізують середній прибуток від роботи системи. Подібні оптимізаційні задачі для систем з повторними викликами розглядалися в роботах [6], [7], [9].

В якості прикладу розглянемо задачу оптимізації системи масового обслуговування з наступними характеристиками: $h_1=8$, $h_2=1$, $\mu=1$, $\nu=5$. Вартісні коефіцієнти функціоналу якості: $C_1=1000$, $C_2=23$, $C_3=3$. На рис. 3 представлено графік залежності функціоналу якості від гістерезисної стратегії H_1,H_2. Максимальний прибуток 907,96 досягається при $H_1=1$, $H_2=7$.

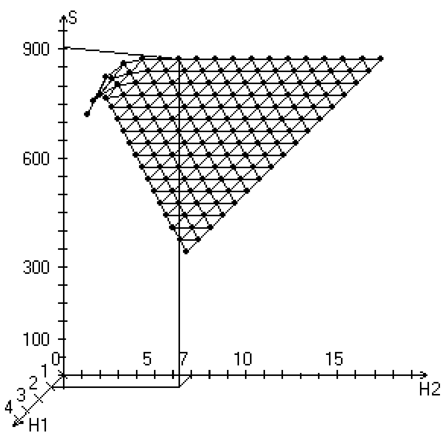

Рис. 3. Залежність прибутку від порогів

1. Anisimov V.V. and Artalejo J.R. Approximation of multiserver retrial queues by means of generalized truncated models. Top (2002), vol. 10, Num.1 (2002), pp. 51–66. 2. ArtalejoJ.R., Gymez-Corral A. Retrial Queueing Systems. A Computational Approach. – Springer, 2008, 318 p. 3. Artalejo J.R. and Falin G.I. Standard and retrial queueing systems: a comparative analysis. Revista matemŕatica complutense (2002) vol. XV, num. 1, pp.101–129. 4. Falin G. I. and Templeton J. G. C.Retrial queues. – London: Chapman & Hall, 1997. – 328 p. 5. Shin Y.W., Moon D.H. Retrial queues with limited number of retrials: numerical investigations. In: The seventh international symposium on operations research and its applications (ISORA'08), Lijiang, China; October 31-November 3, 2008, pp. 237–247. 6. Дудин А.Н., Клименок В.И. Оптимизация динамического управления входной нагрузкой в узле информационно-вычислительной сети. // Автоматика и вычислительная техника. – 1991. – № 2. – С. 25–31. 7. Клименок В.И. Оптимизация динамического управления режимом работы информационно-вычислительных систем с повторными вызовами. // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 1.– С. 25–30. 8. Лебєдєв Є.О., Прищепа О.В. Стохастичні системи із повторними викликами та нетерплячими вимогами. Вісник Київського університету. Серія фіз.–мат.науки –Вип. 2, 2007. – С.169–173. 9. Лебєдєв Є.О., Прищепа О.В. Системи з повторними викликами, нетерплячими вимогами та керованим вхідним потоком.// Журнал Обчислювальної та прикладної математики, Вип. 2(95), 2007. – С. 59–64. 10. Уолрэнд Дж. Введение в теорию сетей массового обслуживания. - М.: Мир, 1993. – 336 с.

Надійшла до редколегії 17.10.11

УДК 517.929

Т. И. Шакотько , инж., Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук, проф.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ ВОЛЬТЕРРА С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрено математические модели динамики популяции, которые описаны двумя дифференциальными уравнениями с квадратичной правой частью. Вычислены точки спокойствия, определен их тип. Введено запаздывание. Показано, что стационарное состояние равновесия неустойчивое. Приведены результаты численного моделирования.

The mathematical models of the population dynamics are considered wich are described by two differential equations with quadratic right side. Calculated stationary points and specified their type. We get the delay. The stationary state of equilibrium position is unstable are shown. The results of numerical modeling are shown.

Введение. Рассмотрим математическую модель популяции, предложенную В.Вольтерра [1–3]. Она представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздыванием с квадратичной правой частью. Построим фазовые портреты систем без запаздывание. Далее рассмотрим влияние запаздывания [4–6]. Учитывая специфику уравнений с последействием, построение фазового портрета системы с запаздыванием вызывает затруднение. Поэтому фазовый портрет системы с запаздыванием строится в предположении, что начальные условия для решений системы с запаздыванием представляют собой постоянные значения ("система с замороженными начальными условиями").

1. Построение фазового портрета системы. Построение фазового портрета нелинейной системы на плоскости будет проводиться следующим образом.

- Находятся особые точки.
- Строятся фазовые портреты каждой из особых точек в отдельности.
- Находятся периодические решения (циклы) и строятся их фазовые портреты.
- Производится "сшивание" отдельных фазовых портретов в фазовый портрет системы в целом.

Следует отметить, если для нахождения особых точек требуется решать системы нелинейных (квадратичных) уравнений, то конструктивные алгоритмы нахождения периодических траекторий отсутствуют. Фазовый портрет в окрестности особой точки $O_0(x_0, y_0)$ строится методом линеаризации. Пусть исходная нелинейная система имеет вид

$$\dot{x} = P(x,y), \ \dot{y} = Q(x,y).$$

Нелинейные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ в окрестности особой точки $O_0(x_0, y_0)$ раскладывают в ряд с точностью линейного приближения

$$\dot{x} = P(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y - y_0) + R_1(x,y)$$

$$\dot{y} = Q(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) + \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y - y_0) + R_2(x,y).$$

Поскольку $O_0(x_0, y_0)$ особая точка, то $P(x_0,y_0) = 0$ и $Q(x_0,y_0) = 0$. Обозначив

$$\left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = a_0, \ \left.\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = b_0, \ \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = c_0, \ \left.\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = d_0$$

и отбросив нелинейные члены, получаем систему, линейного приближения в точке $O_0(x_0, y_0)$

$$\dot{x} = a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0), \ \dot{y} = c_0(x - x_0) + d_0(y - y_0), \tag{1.1}$$

или

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_0 z(t), \ \ z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Если собственные числа линеаризованной системы имеют ненулевые действительные части, то в достаточно малой окрестности положения равновесия $O(x_0, y_0)$ фазовый портрет линеаризованной системы топологически эквивалентен фазовому портрету исходной нелинейной системы [7].

2. Модель Вольтера (простая) без запаздывания. Предварительно рассмотрим классическую модель "хищник-жертва" без учета запаздывания (времени полового созревания)

$$\dot{x}(t) = \left[a - cy(t)\right]x(t),\ \dot{y}(t) = -\left[d - gx(t)\right]y(t). \tag{2.1}$$

Предполагается, что все параметры положительные, т.е.

$$a > 0,\ c > 0,\ d > 0,\ g > 0.$$

Точки покоя (стационарные точки) определяются из системы уравнений

$$\left[a - cy\right]x = 0,\ \left[d - gx\right]y = 0 \tag{2.2}$$

и равны $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = \frac{d}{g}$, $y_2 = \frac{a}{c}$, т.е. система имеет две точки покоя.

2.1. Система (2.1), линеаризованная в точке $O_1(x_1, y_1)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_1 z(t),\ A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

Ее собственными числами будут

$$\lambda_1 = a > 0,\ \lambda_2 = -d < 0.$$

Положение равновесия – седло. Сепаратрисами будут: $x = 0$ - устойчивая сепаратриса, $y = 0$ - неустойчивая сепаратриса.

2.2. Система, линеаризованная в точке $O_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\dot{x}(t) = \left[a - cy_2\right]\left(x(t) - x_2\right) - cx_2\left(y(t) - y_2\right),$$

$$\dot{y}(t) = gy_2\left(x(t) - x_2\right) - \left[d - gx_2\right]\left(y(t) - y_2\right).$$

После подстановки значений точки $O_2(x_2, y_2)$, получаем

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_2\left(z(t) - z_2\right),\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c\frac{d}{g} \\ g\frac{a}{c} & 0 \end{bmatrix},\ z_2 = \begin{pmatrix} \frac{d}{g} \\ \frac{a}{c} \end{pmatrix}.$$

Собственные числами будут чисто мнимыми

$$\lambda_1 = i\sqrt{ad},\ \lambda_2 = -i\sqrt{ad}.$$

Положением равновесия (критический случай) могут быть либо центр, либо фокус (устойчивый или неустойчивый). Многочисленными исследованиями (например, [1]) показано, что положением равновесия является центр.

Пример 2.1. Рассмотрим систему уравнений с параметрами $a = 2$, $c = 2$, $d = 2$, $g = 2$. Фазовый портрет системы в целом, соответствующий этим параметрам, изображен на рис 2.1.

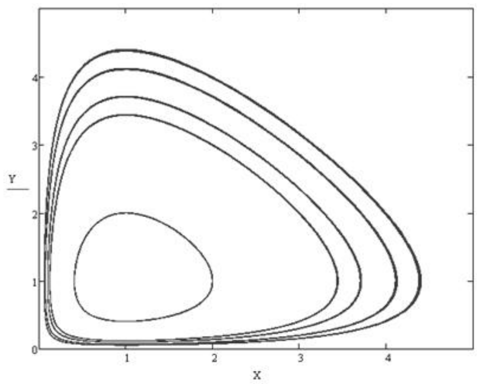

Рис. 2.1 Динамика системы Вольтера без запаздывания

3. Модель Вольтера (простая) с запаздыванием. Далее рассмотрим модель "хищник-жертва", учитывающую время полового созревания, т.е. модель с запаздыванием. Она имеет вид

$$\dot{x}(t) = \left[a - cy(t - \tau)\right]x(t),\ \dot{y}(t) = -\left[d - gx(t - \tau)\right]y(t). \tag{3.1}$$

Как и в предыдущем случае, все параметры положительные, т.е. $a > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $g > 0$.

Точки покоя (стационарные точки) определяются из системы уравнений (2.2)

Они равны $O_1(x_1, y_1)$, $O_2(x_2, y_2)$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = \frac{d}{g}$, $y_2 = \frac{a}{c}$.

3.1. Система (3.1), линеаризованная в точке $O_1\left(x_1, y_1\right)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A_1 z(t)\,,\ A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}.$$

и является системой без запаздывания. Как и в предыдущем случае, положением равновесия является седло с сепаратрисами, являющимися осями координат.

3.2. Система, линеаризованная во второй точке $O_2\left(x_2, y_2\right)$, имеет вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = B_2\left(z(t-\tau) - z_2\right),\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -c\dfrac{d}{g} \\ g\dfrac{a}{c} & 0 \end{bmatrix},\ z_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{g} \\ \dfrac{a}{c} \end{pmatrix}.$$

Ее характеристическим уравнением является

$$\det\left\{A - \lambda E\right\} = \begin{vmatrix} -\lambda & -c\dfrac{d}{g}e^{-\lambda\tau} \\ g\dfrac{a}{c}e^{-\lambda\tau} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 e^{-2\lambda\tau} = 0\,,\ \omega = \sqrt{ad}\,.$$

Исследуем расположение корней полученного характеристического квазиполинома

$$\lambda^2 + \omega^2 e^{-2\lambda\tau} = 0\,. \tag{3.2}$$

Представим полученное характеристическое (3.2) уравнение в виде

$$\left(\lambda + i\omega e^{-\lambda\tau}\right)\left(\lambda - i\omega e^{-\lambda\tau}\right) = 0\,.$$

Уравнение распадается на два

$$\lambda + i\omega e^{-\lambda\tau} = 0\,,\ \lambda - i\omega e^{-\lambda\tau} = 0\,. \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть, что если λ_0 является решением одного из уравнений, то $\overline{\lambda}_0$ будет решением другого. Поэтому будем рассматривать только второе из уравнений. Его решение ищем в виде $\lambda = u + iv$.
Подставив в уравнение, получаем

$$u + iv = i\omega e^{-u\tau}\left(\cos v\tau - i\sin v\tau\right).$$

Разделив действительную и мнимую части, запишем систему двух уравнений относительно переменных u, v.

$$ue^{u\tau} = \omega\sin v\tau\,,\ ve^{v\tau} = \omega\cos v\tau = 0\,. \tag{3.4}$$

После замены $x = u\tau$, $y = v\tau$, $\omega_1 = \omega\tau$ получаем

$$xe^x = \omega_1\sin y\,,\ ye^x = \omega_1\cos y\,. \tag{3.5}$$

Покажем, что система (3.5) имеет хотя бы одно решение $\left(x_0, y_0\right)$, у которого $x_0 > 0$.

Рассмотрим промежуток $0 \le y < \frac{\pi}{2}$**.** На этом промежутке $\cos y \ne 0$. Разделим первое уравнение на второе. Получаем систему

$$x = ytgy\,,\ ye^{ytgy} = \omega_1\cos y\,. \tag{3.6}$$

На промежутке $0 \le y < \dfrac{\pi}{2}$ функция $f_1(y) = ye^{ytgy}$ удовлетворяет условиям

$$f_1(0) = 0\,,\ f_1(y) > 0\,,\ f_1(y) \to +\infty \text{ при } y \to \frac{\pi}{2} - 0\,.$$

Функция $f_2(y) = \omega_1\cos y$ удовлетворяет следующим условиям

$$f_2(0) = \omega_1\,,\ f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,,\ f_2(y) > 0\,.$$

Графики функций представлены на рис. 3.1.

Поэтому всегда найдется пересечение графиков кривых , т.е. точка $y_0 : 0 < y_0 < \dfrac{\pi}{2}$, которая удовлетворяет условию $f_1(y_0) = f_2(y_0)$, т.е. является решением второго из уравнений (3.6). Поскольку $0 < y_0 < \dfrac{\pi}{2}$, то

$$x_0 = y_0 tgy_0 > 0\,.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (3.2) при любых $\omega > 0$ и $\tau > 0$ будет иметь хотя бы один корень λ_0 с положительной действительной частью.

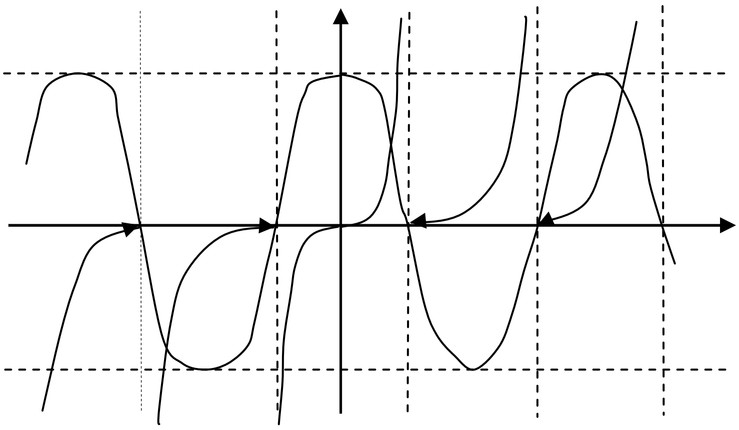

Рис. 3.1. Графическое решение уравнения (3.6).

Пример 2.2. Оценим зависимость запаздывания на динамику системы. Рассмотрим пример системы с запаздыванием с теми же параметрами $a = 2$, $c = 2$, $d = 2$, $g = 2$. Особые точки имеет тот же вид.

Рассмотрим вторую особую точку $O_2\left(x_2, y_2\right)$, $x_2 = 1$, $y_2 = 1$.

Система, линеаризованная в этой точке имеет вид

$$\frac{d}{dt} z(t) = B_2\left(z(t) - z_2\right), \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Построим графики фазовых траекторий системы (3.7), соответствующие "замороженным" начальным условиям при различных величинах запаздываний $\tau > 0$.

В отличие от уравнений без последействия, дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием являются уравнениями в бесконечномерном функциональном пространстве и построить фазовый портрет системы на плоскости без дополнительных ограничений не удается.

На Рис.3.2–3.5 приведены траектории движений системы, начинающиеся из одной точки при "замороженных" начальных данных, т.е. при условиях $x(t) = 1$, $y(t) = 1$, $-\tau \le t \le 0$. Показано, что при возникновении запаздывания и его увеличении происходит бифуркация и фазовый портрет системы (3.7) меняется.

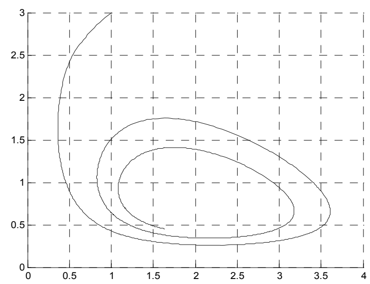

Рис. 3.2.

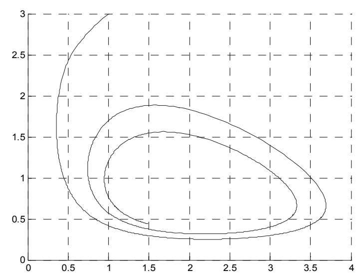

Рис. 3.3.

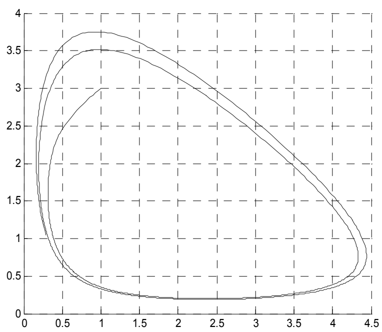

Рис. 3.4.

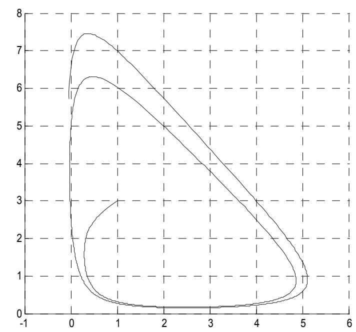

Рис. 3.5.

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976. – 288 с.. 2. Смит Дж. Модели в экологии. – М., 1976. – 180 с.. 3. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. – Новосибирск, 1997.. 4. Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics/ – Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht/Boston/London. – 1992. – 514 p. 5. Jean Jacques Loisean, Wim Michiels, Selvin Julian Niculescu and Rifat Sipahi. Topics in Time Delay Systems. Analysis, Algorithms and Control. – Lecture Notes in Control and Information Sciences, 388. – Springer. – 2009. – 418 p. 6. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1970. – 240 с. 7. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с..8. Колесніков К.,, Коварж І., Грицай І. Дослідження розподілу характеристичних показників коливального рівняння з запізненням // Вісник Київського національного університету. Серія: Фізико-математичні науки, №3, 2004. – С.382-368.

Надійшла до редколегії 17.10.12

УДК 004.42:510.69

О. С. Шкільняк, канд. фіз.мат.наук, асист.

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ МУЛЬТИМОДАЛЬНИХ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Досліджуються першопорядкові композиційно-номінативні мультимодальні логіки. Для таких логік кванторного рівня запропоновано числення секвенційного типу. Для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

In this paper first-order composition-nominative multimodal logics are studied. For the defined logics of quantifier level we introduce sequent calculi. Soundness and completeness theorems are proved for these calculi.

Модальні логіки успішно використовуються для опису і побудови сучасних інформаційних і програмних систем. Апарат темпоральних логік ефективно застосовується для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. На базі таких логік збудовано низку систем та мов специфікації. Епістемічні логіки використовуються для опису інтелектуальних систем, баз даних і баз знань. Можливості традиційних модальних логік і композиційно-номінативних логік квазіарних часткових предикатів [1] поєднують композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [2]. Центральним для КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). На основі спеціального уточнення цього поняття збудовано та досліджено [3–5] нові класи КНМЛ. Враховуючи аспект зміни й розвитку предметних областей, дуже важливим класом КНМС є транзиційні модальні системи (ТМС), які описують переходи від одного стану світу до іншого. Вони лежать в основі транзиційних КНМЛ, у межах яких природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні тощо.

ТМС – це об'єкт вигляду $((\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C), Fm, Jm)$. Тут $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу; $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на станах вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$, Pr – множина предикатів на даних станів світу; C – множина композицій на Pr; Fm – множина формул мови; Jm – відображення інтерпретації формул в станах світу.

Для КНМЛ номінативних рівнів $\boldsymbol{S}$ конкретизуємо як множину неокласичних [1] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^VA_\alpha \to \{T, F\}$.

Тоді $Pr = \bigcup\limits_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – множина предикатів усіх станів світу, $A = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу.

Нові класи ТМС – мультимодальні транзиційні системи (ММС) – запропоновано в [5]. ММС – це ТМС із $\boldsymbol{R} = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, у яких кожному $\rhd_i$ зіставлено відповідну $\mathbf{K}_i$.

Окремим випадком ММС є загальні ТМС, для них $\boldsymbol{R} = \{\rhd\}$ та маємо єдину базову модальну композицію $\Box$.

Метою даної статті є дослідження мультимодальних логік еквітонних предикатів кванторного рівня та побудова для них числень секвенційного типу. Для таких числень доведено теореми коректності та повноти.

Невизначені в статті поняття будемо тлумачити в сенсі робіт [1, 4].

Мова та семантичні властивості мультимодальних логік. Опишемо мову мультимодальних логік (ММЛ) кванторного рівня. Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів; символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина $Ms = \{\mathrm{K}_i \mid i \in I\}$ символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p \in Ps$ є формулою; такі формули назвемо атомарними;

FP) нехай Φ та Ψ – формули; тоді $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ – формула;

FR) нехай Φ – формула; тоді $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ – формула;

F∃) нехай Φ – формула; тоді $\exists x\Phi$ – формула;

FM) нехай Φ – формула, $\mathrm{K}_i \in Ms$; тоді $\mathrm{K}_i\Phi$ – формула.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на світах $Im : Ps \times S \to Pr$, при цьому $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Таке Im продовжимо до відображення інтерпретації формул на світах $Jm : Fm \times S \to Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

IA) $Jm(p, \alpha) = Im(p, \alpha)$ для кожного $p \in Ps$;

IP) $Jm(\neg\Phi, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$; $Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

IR) $Jm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,\Phi, \alpha) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi, \alpha))$;

I∃) $$Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

IM) $$Jm(\mathrm{K}_i\Phi, \alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S \text{ таких, що } \alpha \rhd_i \delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta \in S:\ \alpha \rhd_i \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для стану α не існує такого β, що $\alpha \rhd_i \beta$, то $Jm(\mathrm{K}_i\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^VA$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, будемо позначати Φ_α.

Залежно від того, як визначити $\Phi_\delta(d)$ при умові $d \notin {}^VA_\delta$, виділено [5] ММС із сильною умовою визначеності на станах, або *St*-ММС (при умові $d \notin {}^VA_\delta$ вважаємо $\Phi_\delta(d)\uparrow$), та ММС із загальною умовою визначеності на станах, або *Gn*-ММС (при умові $d \notin {}^VA_\delta$ вважаємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$, де d_δ – скорочене позначення ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$). Для *Gn*-ММС предикати стану δ "відчувають" лише компоненти даних вигляду $v \mapsto a$ із $a \in A_\delta$, тому $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$ для всіх $d \in {}^VA$.

Модальні композиції *St*-ММС не зберігають еквітонність предикатів, але зберігають слабшу властивість – слабку еквітонність. Водночас [5] у випадку *Gn*-ММС композиції $\mathbf{K}_i$, $i \in I$, зберігають еквітонність.

В даній роботі будемо досліджувати ММС із загальною умовою визначеності на станах.

Φ істинна в ММС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо предикат Φ_α є істинним для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$.

Φ всюди істинна (позначаємо $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх ММС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

ММС номінативних рівнів скорочено позначатимемо також як $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$.

Залежно від властивостей відношень $\rhd_i$ можна визначати різні класи ММС. Розглянемо випадки, коли $\rhd_i$ можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо всі $\rhd_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ *R*; якщо всі $\rhd_i$ транзитивні, то пишемо *T*; якщо всі $\rhd_i$ симетричні, то пишемо *S*.

Звідси, окрім загального, маємо такі чисті типи ММС:
R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Можливі істотно складніші, змішані типи ММС, коли різні відношення $\rhd_i$ мають різні властивості.

Модальні композиції можна проносити [5] через реномінації: формули вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \mathrm{K}_i \Phi \leftrightarrow \mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \Phi$ всюди істинні.

Розглянемо взаємодію в ММС модальних композицій та кванторів.

Для довільної ММС $\boldsymbol{M}$ маємо [5]: $\boldsymbol{M} \models \exists x\, \mathrm{K}_i \Phi \to \mathrm{K}_i \exists x \Phi$ та $\boldsymbol{M} \models \mathrm{K}_i \forall x \Phi \to \forall x\, \mathrm{K}_i \Phi$.

Звідси формули $\exists x \mathrm{K}_i \Phi \to \mathrm{K}_i \exists x \Phi$ та $\mathrm{K}_i \forall x \Phi \to \forall x\, \mathrm{K}_i \Phi$ всюди істинні.

Водночас формули $\forall x\, \mathrm{K}_i \Phi \to \mathrm{K}_i \forall x \Phi$ та $\mathrm{K}_i \exists x \Phi \to \exists x\, \mathrm{K}_i \Phi$ не є всюди істинними.

Для ММС номінативних рівнів введемо поняття логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Δ є логічним наслідком Γ в ММС $\boldsymbol{M}$ (позначаємо $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^V A$ із того, що $\Phi_\alpha(d) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$, випливає, що неможливо $Ш_\beta(d) = F$ для всіх $Ш^\beta \in \Delta$.

Δ є логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma \models \Delta$), якщо $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ для всіх ММС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Відсутність логічного наслідку $\Gamma \models \Delta$ означає: існують ММС $\boldsymbol{M}$ та $d \in {}^V A$ такі, що $\Phi_\alpha(d) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ та $Ш_\beta(d) = F$ для всіх $Ш^\beta \in \Delta$.

Наведемо властивості відношення $\models$ на кванторному рівні. В першу чергу, це немодалізовані властивості, успадковані від композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models \Delta$.

U) Нехай $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Sigma$; нехай $\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$.

¬) $\neg\Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\alpha$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \neg\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$.
∨) $\Phi \vee \Psi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ та $\Psi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi \vee \Psi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$.
ΦN) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ при $y \in \mu(\Phi)$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$ при $y \in \mu(\Phi)$.
RT) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.
R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.
R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)^\alpha$.
RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)^\alpha$.
R∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$ (при $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$).
R∃∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y \Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)^\alpha$ (при $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$).
∃) $\exists x \Phi^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_y^x(\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta$,	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_y^x(\Phi)^\alpha, \exists x \Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \exists x \Phi^\alpha$.

де *y* тотально неістотне, $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$;

Наведемо тепер властивості, пов'язані з модальними композиціями.

RK$_i$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i \Phi)^\alpha \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i \Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.
K$_i$) $\mathrm{K}_i \Phi^\alpha, \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd_i \beta\} \cup \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta$;	$\Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i \Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів β: $\alpha \rhd_i \beta$.

Секвенційні числення мультимодальних логік еквітонних предикатів. Секвенційні числення композиційно-номінативних ММЛ будуємо на основі реляційної семантики таких логік.

Специфікацією стану називають [3] слово вигляду α|– чи α–|, де α – *префікс стану світу*. В цьому префіксі вказуємо стан світу, в якому розглядається специфікована формула. Спеціальний символ $*$ вказує на довільний стан, пов'язаний із даним станом відношенням досяжності. Це уточнюється [3] залежно від виду модальної логіки. Стани світу іменуємо натуральними числами.

Секвенції збагачуємо збудованими на даний момент множиною $\boldsymbol{S}$ станів світу та множиною $\boldsymbol{R}$ відношень на $\boldsymbol{S}$. Секвенційні форми для числень номінативних рівнів повинні враховувати можливість зміни носіїв станів світу (форма $_\vdash\exists$, в окремих випадках форми $_\vdash$R∃∃, $_\dashv$R∃∃), тому для кожного із станів $\alpha \in \boldsymbol{S}$ вказуємо збудовану на даний момент множину його базових даних A_α. Збагачені секвенції будемо записувати у вигляді Σ // $\alpha\{A_\alpha\}$, $\beta\{A_\beta\}$, … // *M*, де Σ – множина специфікованих формул, *St* – збудована на даний момент множина імен станів, $\alpha\{A_\alpha\}$, $\beta\{A_\beta\}$, … – збудовані на даний момент стани із множинами їх базових даних, *M* – схема моделі світу, тобто збудоване на даний момент відношення досяжності, записане для імен станів. Скорочений запис збагаченої секвенції: Σ // *St* // *M*.

Секвенційні форми мусять зберігають $\models$ при переході від засновків до висновку та $\not\models$ при переході від висновку до засновків. Це гарантується відповідними властивостями відношення $\models$. Зауважимо, що при цьому із властивостей $\vee$ та K$_i$ отримуємо: $\Phi \vee \Psi^\alpha, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta$ або $\Psi^\alpha, \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta$; $\Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \mathrm{K}_i \Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \not\models_{\boldsymbol{M}} \Delta, \Phi^\beta$ для деякого β: $\alpha \rhd_i \beta$.

До базових секвенційних форм числень ММЛ кванторного рівня віднесемо форми $_\vdash\neg$, $_\dashv\neg$, $_\vdash\vee$, $_\dashv\vee$, $_\vdash$RT, $_\dashv$RT, $_\vdash$RR, $_\dashv$RR, $_\vdash$R¬, $_\dashv$R¬, $_\vdash$R∨, $_\dashv$R∨, $_\vdash$ΦN, $_\dashv$ΦN, $_\vdash$R∃, $_\dashv$R∃, $_\dashv$R∃∃, $_\vdash$R∃∃, $_\vdash\exists$, $_\dashv\exists$, які подібні до відповідних форм секвенційних числень логіки еквітонних предикатів [1]. Вони не змінюють схему моделі світу M, але форми $\vdash\exists$ (в окремих випадках $\dashv$R$\exists\exists$ і $\vdash$R$\exists\exists$) змінюють стани. До цих форм додаємо базові форми для модальних операторів $\vdash$RK$_i$, $\dashv$RK$_i$, $\vdash\mathbf{K}_i$, $\dashv\mathbf{K}_i$, де $i\in I$. При цьому форми $\vdash\mathbf{K}_i$ зазвичай не змінюють множини базових даних станів і схему моделі світу, форма $\dashv\mathbf{K}_i$ для стану α вводить новий стан β такий, що $\alpha\rhd_i\beta$ та $A_\beta = A_\alpha$.

Наведемо базові секвенційні форми числень ММЛ еквітонних предикатів кванторного рівня.

$$\vdash\neg\ \frac{{}_{\alpha-|}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\neg\ \frac{{}_{\alpha|-}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\neg A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\vee\ \frac{{}_{\alpha|-}A,\ \Sigma\ //\ St\ //M \qquad {}_{\alpha|-}B,\ \Sigma\ //\ St\ //M}{{}_{\alpha|-}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //M};\qquad \dashv\vee\ \frac{{}_{\alpha-|}A,\ {}_{\alpha-|}B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}A\vee B,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ\frac{\bar{w}}{\bar{y}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\mathrm{A})),\Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ\frac{\bar{w}}{\bar{y}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\mathrm{A})),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha|-}\neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha-|}\neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A})\vee\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A})\vee\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}\vee\mathrm{B}),\Sigma\ //\ St\ //\ M};$$

$$\vdash\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\in\mu(A);\qquad \dashv\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\in\mu(A);$$

$$\vdash\mathrm{RK}_i\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i A),\Sigma\ //\ St\ //\ M},\ \text{де } i\in I;\qquad \dashv\mathrm{RK}_i\ \frac{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_i R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i A),\Sigma\ //\ St\ //\ M},\ \text{де } i\in I;$$

$$\vdash\mathrm{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha|-}\exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\notin\{\bar{v},\bar{x}\};\qquad \dashv\mathrm{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha-|}\exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\mathrm{A}),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\notin\{\bar{v},\bar{x}\};$$

$$\vdash\mathrm{R}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha|-}\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ\frac{y}{z}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\mathrm{R}\exists\exists\ \frac{{}_{\alpha-|}\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ\frac{y}{z}(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yA),\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для форм $\vdash$R$\exists\exists$ та $\dashv$R$\exists\exists$ такі умови: $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, z тотально неістотне та $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A))$.

Таким чином, при умові $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$ використовуємо $\vdash$R$\exists$ та $\dashv$R$\exists$, якщо ж $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то використовуємо $\vdash$R$\exists\exists$ та $\dashv$R$\exists\exists$.

$$\vdash\exists\ \frac{{}_{\alpha|-}R_y^x(A),\Sigma\ //\ St'\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\exists xA,\Sigma\ //\ St\ //\ M};\qquad \dashv\exists\ \frac{{}_{\alpha-|}\exists xA,\ {}_{\alpha-|}R_z^x(A),\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha-|}\exists xA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Для $\vdash\exists$ y тотально неістотне та $y\notin nm(\Sigma, A)$. При цьому до носія A_α стану α додається новий елемент y.

Наведемо тепер секвенційні форми для елімінації модальних операторів. Форми $\vdash\mathbf{K}_i$ та $\dashv\mathbf{K}_i$ записуються порізному залежно від властивостей відношень досяжності $\rhd_i$, $i\in I$. Обмежимося для прикладу двома випадками.

1. *Загальний випадок.* Якщо на $\rhd_i$ не накладені додаткові умови, то маємо такі форми.

$$\vdash\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\alpha*|-}A,\ {}_{\beta_1|-}A,\ \ldots,{}_{\beta_n|-}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}$$

Тут ${}_{\alpha*|-}A$ – допоміжна специфікована формула, яка конкретизується в даній секвенції через специфіковані формули ${}_{\beta_1|-}A$, ..., ${}_{\beta_n|-}A$ для всіх наявних в даний момент станів β_1, …, β_n таких, що $\alpha\rhd_i\beta_1$, ..., $\alpha\rhd_i\beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо специфіковану формулу ${}_{\beta|-}A$.

$$\dashv\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\beta-|}A,\ {}_{\beta|-}B_1,\ \ldots,{}_{\beta|-}B_m,\ \Sigma\ //\ St'\ //\ M\cup\{\alpha\rhd_i\beta\}}{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //M}$$

Тут β – новий стан, B_1, …, B_m – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*|-}B_j$, породжених формулами ${}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iB_j$ (якщо Σ містить такі формули). Останнє означає, що при появі нового стану β, досяжного із α, для допоміжних формул вигляду ${}_{\alpha*|-}B_j$ треба записати нові специфіковані формули ${}_{\beta|-}B_j$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha\rhd_i\beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

2. *Відношення $\rhd_i$ транзитивне та рефлексивне.* У цьому випадку маємо такі форми.

$$\vdash\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\alpha*|-}A,\ {}_{\alpha|-}A,\ {}_{\beta_1|-}A,\ \ldots,{}_{\beta_n|-}A,\ {}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_iA,\ \ldots,{}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}$$

Допоміжна формула ${}_{\alpha*\vdash}A$ конкретизується через специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}A, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}A$ та ${}_{\beta_1\vdash}\mathrm{K}_iA, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\mathrm{K}_iA$ для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha \triangleright_i \beta_1, \ldots, \alpha \triangleright_i \beta_n$. Специфіковані формули ${}_{\beta_1\vdash}\mathrm{K}_iA, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\mathrm{K}_iA$ тут необхідні в силу транзитивності відношення $\triangleright_i$. Згідно рефлексивності відношення $\triangleright_i$ явно виділяємо ${}_{\alpha\vdash}A$.

$$_{\dashv}\mathbf{K}_i \ \frac{{}_{\beta\dashv}A,\ {}_{\beta\vdash}B_1,\ \ldots, {}_{\beta\vdash}B_m,\ {}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iB_1,\ \ldots, {}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iB_m,\ \Sigma \,//\, St' \,//\, M \cup \{\alpha \triangleright_i \beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma \,//\, St \,//\, M}$$

Тут β – новий стан світу, $B_1, \ldots, B_m$ – усі формули, що фігурують в допоміжних специфікованих формулах вигляду ${}_{\alpha*\vdash}B_j$, породжених формулами ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iB_j$ (якщо Σ містить такі формули). Специфіковані формули ${}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iB_j$ необхідні в силу транзитивності відношення $\triangleright_i$. До схеми моделі світу M додаємо $\alpha \triangleright_i \beta$, для введеного нового стану β задаємо $A_\beta = A_\alpha$.

Зауважимо, що при введенні нового стану β такого, що $\alpha \triangleright_i \beta$, задаємо $A_\beta = A_\alpha$. Проте нові елементи даних стану можуть з'являтися (наприклад, за рахунок форм ${}_{\vdash}\exists$) як в A_α, так і в A_β, тому надалі можливе як $A_\alpha \subset A_\beta$, так і $A_\beta \subset A_\alpha$.

Процедура побудови секвенційного дерева в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень логік квазіарних предикатів [1], але побудова дерева ведеться паралельно із побудовою схеми моделей світу. При цьому схема моделей світу оновлюється при використанні ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форм, які додають нові стани. Така побудова розбита на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Спочатку виконуємо ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форми, які додають нові стани, далі ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форми. Потім виконуємо всі ${}_{\vdash}\exists$-форми, після цього – всі $\mathbf{R}\exists\exists$-форми, далі – усі інші секвенційні форми. При цьому ${}_{\dashv}\exists$-форма до ${}_{\alpha\dashv}\exists xA$ застосовується багатократно – для усіх імен доступних формул секвенції ${}_{\alpha\dashv}\exists xA, \Sigma$ та її наступників.

Беручи до уваги наведені вище властивості відношення $\models$, дістаємо:

Теорема 1. *Нехай* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \,//\, St' \,//\, M'}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \,//\, St \,//\, M}$ *та* $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \,//\, St \,//\, M \quad {}_{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z} \,//\, St \,//\, M}{{}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta \,//\, St \,//\, M}$ *– секвенційні форми. Тоді з умови* $\Lambda \models \mathrm{K}$ *випливає* $\Gamma \models \Delta$; *з умови* $\Lambda \models \mathrm{K}$ *та* $\mathrm{X} \models \mathrm{Z}$ *випливає* $\Gamma \models \Delta$.

Зрозуміло, що для цих секвенційних форм маємо: із $\Gamma \not\models \Delta$ випливає $\Lambda \not\models \mathrm{K}$; із $\Gamma \not\models \Delta$ випливає $\Lambda \not\models \mathrm{K}$ або $\mathrm{X} \not\models \mathrm{Z}$.

Коректність і повнота секвенційних числень мультимодальних логік еквітонних предикатів. Теорема коректності для секвенційних числень ММЛ кванторного рівня формулюється традиційним чином.

Теорема 2. *Нехай секвенція* ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ *вивідна. Тоді* $\Gamma \models \Delta$.

Доведення аналогічне доведенню відповідної теореми секвенційних числень загальних ТМЛ [3]. Воно проводиться індукцією за побудовою замкненого секвенційного дерева для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$.

Для доведення повноти секвенційних числень використаємо метод систем модельних множин [6].

Система модельних множин – це пара $(\Omega, \boldsymbol{R})$, де $\Omega = \{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{S}\}$, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень досяжності на $\boldsymbol{S}$.

Множина $\boldsymbol{H}_\alpha$ специфікованих формул із $W_\alpha = nm(\boldsymbol{H}_\alpha)$ – модельна множина стану α, якщо виконуються такі умови.

MC) Для кожної формули Φ лише одна зі специфікованих формул ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ чи ${}_{\alpha\dashv}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$.

MN) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y \in \mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y \in \mu(\Phi)$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MT) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

M¬) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

M∨) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\Phi \vee \Psi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$ або ${}_{\alpha\vdash}\Psi \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\Phi \vee \Psi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MRR) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MR¬) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MR∨) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MR∃) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\vdash}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\dashv}\exists yR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MR∃S) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\vdash}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{z}^{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то ${}_{\alpha\dashv}\exists zR_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{z}^{y}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ (тут z тотально неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi))$).

MRK) Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{K}_i\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_iR_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ (тут $i \in I$).

M∃) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то існує $y \in W_\alpha$ таке: ${}_{\alpha\vdash}R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то для всіх $y \in W_\alpha$ маємо ${}_{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

MK) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_i\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\beta$ для всіх $\beta \in \boldsymbol{S}$: $\alpha \triangleright_i \beta$; якщо ${}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_i\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\beta$ для деякого $\beta \in \boldsymbol{S}$: $\alpha \triangleright_i \beta$ (тут $i \in I$).

Процедура побудови секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися. Якщо процедура завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо процедура завершена негативно або не завершується, то маємо скінченне чи нескінченне незамкнене дерево. Тоді в дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Теорема 3. *Нехай* $\wp$ *– незамкнений шлях в секвенційному дереві,* $\boldsymbol{H}_\alpha$ *– множина всіх специфікованих* ${}_{\alpha\vdash}$ *чи* ${}_{\alpha\dashv}$ *формул секвенцій шляху* $\wp$, *де* $\alpha \in \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$ *– множина відношень досяжності на* $\boldsymbol{S}$. *Тоді* $\mathbf{H}_{\boldsymbol{M}} = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{S}\}, \boldsymbol{R})$ *– система модельних множин.*

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм. Переходи згідно таких форм відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Допоміжні специфіковані формули (їхній префікс містить $*$) для модельних множин не беремо до уваги. Кожна непримітивна формула на шляху

$\wp$ рано чи пізно буде розкладена згідно відповідної секвенційної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконується пункт МС визначення системи модельних множин.

Теорема 4. *Нехай* $\mathbf{H}_{M}$ *– система модельних множин,* $W = nm(\mathbf{H}_{M})$. *Тоді існують ММС* $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$ *з* $|A| = |W|$ *та ін'єктивна* $\delta\in{}^{V}A$ *з* $im(\delta) = W$ *такі:* 1) ${}_{\alpha|\!-}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha} \Rightarrow \Phi_{\alpha}(\delta) = T$; 2) ${}_{\alpha-\!|}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha} \Rightarrow \Phi_{\alpha}(\delta) = F$.

Доведення теореми ведемо індукцією за складністю формули згідно побудови системи модельних множин.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A| = |W|$, та деяку ін'єктивну $\delta\in{}^{V}A$ з $im(\delta) = W$. Така δ є бієкцією W на A. Позначивши $W_{\alpha} = nm(\boldsymbol{H}_{\alpha})$, маємо $A_{\alpha} = \delta(W_{\alpha})$. Тоді δ_{α} є бієкцією W_{α} на A_{α}. Множини A та A_{α} продубльовують W та W_{α}.

Зауважимо, що $\Phi_{\alpha}(\delta) = \Phi_{\alpha}(\delta_{\alpha})$, адже ми розглядаємо ММС із загальною умовою визначеності на станах.

Спочатку задамо значення базових предикатів на δ та на ІМ вигляду $\mathbf{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)$.

Якщо ${}_{\alpha|\!-}p\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то визначимо $p_{\alpha}(\delta) = T$; якщо ${}_{\alpha-\!|}p\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то визначимо $p_{\alpha}(\delta) = F$.

Якщо ${}_{\alpha|\!-}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то визначимо $p_{\alpha}(\mathbf{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) = T$; якщо ${}_{\alpha-\!|}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, то визначимо $p_{\alpha}(\mathbf{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках (достатньо розглядати $d\in A_{\alpha}^{W_{\alpha}}$) значення $p_{\alpha}(d)$ задаємо довільним чином, враховуючи еквітонність і обмеження стосовно неістотності імен: для всіх d, $h\in A_{\alpha}^{W_{\alpha}}$ таких, що $d||\text{-}\mu(p) = h||\text{-}\mu(p)$, маємо $p_{\alpha}(d) = p_{\alpha}(h)$.

Задані таким чином значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю, враховуючи умови неістотності імен, на відповідні $h\in{}^{W}A$. Зрозуміло, що значення базових предикатів задані однозначно, причому враховано неістотність для p_{α} імен $y\in\mu(p)$. Отже, значення базових предикатів визначені коректно.

Для елементарних формул (вигляду $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p)$ чи атомарних) твердження 1) та 2) теореми випливають з визначення значень базових предикатів. При цьому предикати вигляду p_{α} та $(R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(p))_{\alpha}$ еквітонні та тотальні на відповідних $A_{\alpha}^{W_{\alpha}}$.

Крок індукції для тверджень 1) та 2) доводиться стандартним чином (доведення аналогічної теореми для загальних ТМЛ див. [3]). Наведемо тут доведення для пунктів М$\exists$ та МК.

Нехай ${}_{\alpha|\!-}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ існує $y\in W_{\alpha}$ таке, що ${}_{\alpha|\!-}R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$. За припущенням індукції $(R^{x}_{y}(\Phi))_{\alpha}(\delta) = T$. Звідси $\Phi_{\alpha}(\delta\nabla x\mapsto\delta(y)) = T$. Але $\delta(y)\in A_{\alpha}$ згідно $y\in W_{\alpha}$, тому для $a = \delta(y)\in A_{\alpha}$ маємо $\Phi_{\alpha}(\delta\nabla x\mapsto a) = T$, звідки $(\exists x\Phi)_{\alpha}(\delta) = T$.

Нехай ${}_{\alpha-\!|}\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ тоді ${}_{\alpha-\!|}R^{x}_{y}(\Phi)\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$ для всіх $y\in W_{\alpha}$. За припущенням індукції $(R^{x}_{y}(\Phi))_{\alpha}(\delta) = F$ для всіх $y\in W_{\alpha}$. Звідси $\Phi_{\alpha}(\delta\nabla x\mapsto\delta(y)) = F$ для всіх $y\in W_{\alpha}$. Проте кожне $b\in A_{\alpha}$ має вигляд $b = \delta(y)$ для деякого $y\in W_{\alpha}$, адже δ визначає бієкцію $\delta_{\alpha} : W_{\alpha}\to A_{\alpha}$. Звідси $\Phi_{\alpha}(\delta\nabla x\mapsto b) = F$ для всіх $b\in A_{\alpha}$, звідки $(\exists x\Phi)_{\alpha}(\delta) = F$.

Нехай ${}_{\alpha|\!-}\text{K}_{i}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, де $\text{K}_{i}\in Ms$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ маємо ${}_{\beta|\!-}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для всіх β таких, що $\alpha\triangleright_{i}\beta$. За припущенням індукції тоді $\Phi_{\beta}(\delta) = T$ для всіх β таких, що $\alpha\triangleright_{i}\beta$. За визначенням K_{i} отримуємо $(\text{K}_{i}\Phi)_{\alpha}(\delta) = T$.

Нехай ${}_{\alpha-\!|}\text{K}_{i}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha}$, де $\text{K}_{i}\in Ms$. За визначенням $\mathbf{H}_{M}$ маємо ${}_{\beta-\!|}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\beta}$ для деякого стану β такого, що $\alpha\triangleright_{i}\beta$. За припущенням індукції $\Phi_{\beta}(\delta) = F$. Звідси за визначенням K_{i} маємо $(\text{K}_{i}\Phi)_{\alpha}(\delta) = F$.

Зауважимо, що з побудови $\mathbf{H}_{M}$ випливає: якщо предикат (предикати), який є значенням простішої формули (права частина відповідних пунктів визначення $\boldsymbol{H}_{\alpha}$), еквітонний та тотальний на $A_{\alpha}^{W_{\alpha}}$, то предикат, який є значенням формули, утвореної відповідною композицією (ліва частина пунктів визначення $\boldsymbol{H}_{\alpha}$), теж еквітонний та тотальний на $A_{\alpha}^{W_{\alpha}}$. Це гарантує еквітонність усіх предикатів Φ_{α}, якщо такими є базові предикати на станах.

Таким чином, отримуємо теорему повноти секвенційних числень ММЛ еквітонних предикатів кванторного рівня.

Теорема 5. *Нехай* $\Gamma \models \Delta$. *Тоді секвенція* ${}_{|\!-}\Gamma_{-\!|}\Delta$ *вивідна.*

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ (тобто $\Gamma \models_{M} \Delta$ для кожної узгодженої ММС $\boldsymbol{M}$) і ${}_{|\!-}\Gamma_{-\!|}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma = {}_{|\!-}\Gamma_{-\!|}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Згідно теореми 3, $\mathbf{H}_{M} = (\{\boldsymbol{H}_{\alpha} \mid \alpha\in\boldsymbol{S}\}, \boldsymbol{R})$ – система модельних множин (тут $\boldsymbol{H}_{\alpha}$ – множина всіх специфікованих ${}_{\alpha|\!-}$ чи ${}_{\alpha-\!|}$ формул секвенцій цього шляху, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$). Згідно теореми 4 існують *ММС* $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Im)$ та $\delta\in{}^{V}A$ такі: ${}_{\alpha|\!-}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha} \Rightarrow \Phi_{\alpha}(\delta) = T$ та ${}_{\alpha-\!|}\Phi\in\boldsymbol{H}_{\alpha} \Rightarrow$ $\Rightarrow \Phi_{\alpha}(\delta) = F$. Зокрема, це вірно для формул секвенції ${}_{|\!-}\Gamma_{-\!|}\Delta$. Тому для всіх $\Phi^{\alpha}\in\Gamma$ маємо $\Phi_{\alpha}(\delta) = T$ та для всіх $Ш^{\beta}\in\Delta$ маємо $Ш_{\beta}(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma \models_{M} \Delta$. Отже, припущення про невивідність ${}_{|\!-}\Gamma_{-\!|}\Delta$ невірне, що й доводить теорему.

Висновки. В роботі досліджено першопорядкові композиційно-номінативні мультимодальні логіки кванторного рівня. Наведено основні семантичні властивості таких логік, зокрема, властивості відношення логічного наслідку для множин формул. На цій основі запропоновано числення секвенційного типу для мультимодальних логік еквітонних предикатів кванторного рівня. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти. В наступних роботах планується продовжити дослідження першопорядкових композиційно-номінативних мультимодальних логік на функціональних рівнях.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с. 2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні модальні логіки // Пробл. программирования. – 2002. – № 1–2. – С. 27–33. 3. *Шкільняк О.С.* Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення. – Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2008. – т. 86. – С. 25–34. 4. *Шкільняк О.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23. 5. *Шкільняк О.С. Шкільняк С.С.* Композиційно-номінативні логіки епістемічного типу. – Наукові записки НаУКМА. Сер.: Комп'ютерні науки. – 2011. – т. 125. – С. 4–7. 6. Семантика модальных и интенсиональных логик. – М.: Прогресс, 1981. – 494 с.

Надійшла до редколегії 26.08.11

Наукове видання

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КІБЕРНЕТИКА

Випуск 12

Друкується за авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 10,0. Наклад 150. Зам. № 212-6296.
Гарнітура Arial. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К1. Підписано до друку 04.12.12.

Видавець і виготовлювач
Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет",
б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua