

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Технічні науки

Збірник наукових праць

Випуск 13

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2016

УДК 004.94:53.072

ББК 30

М34

Свідцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14522-3493Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до Переліку наукових фахових
видань ДАК Міністерства освіти і науки України з технічних наук
(наказ №1021 від 07 жовтня 2015 р.)

Друкуються згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол № 4 від 28 квітня 2016 року.

Рецензенти:

І. В. Бейко, доктор технічних наук, професор, Національний технічний
університет України «Київський політехнічний інститут»;

Р. Н. Квстний, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
Вінницького національного технічного університету.

Редакційна колегія:

Ю. Г. Кривонос, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук,
професор (*відповідальний редактор*);

А. Ф. Верлань, член-кореспондент НАПНУ,

доктор технічних наук, професор (*заст. відповідального редактора*);

В. А. Федорчук доктор технічних наук, професор (*відповідальний секретар*);

Т. Бокалруд, доктор філософії, професор, Норвегія;

В. П. Боюп, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

В. В. Васильєв, член-кореспондент НАНУ, доктор технічних наук, професор;

А. А. Верлань, доктор філософії, професор, Норвегія;

В. К. Задірака, академік НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор

І. М. Конет, доктор фізико-математичних наук, професор;

Б. Б. Нестеренко, доктор технічних наук, професор;

С. А. Положаєнко, доктор технічних наук, професор;

О. М. Хімич, член-кореспондент НАНУ, доктор фізико-математичних наук, професор.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб.
наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної
М34 академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. —
Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, 2016. — Вип. 13. — 220 с.

У збірнику друкуються результати досліджень, що стосуються проблем
застосування математичних моделей у різних галузях людської діяльності.

Збірник включений до бази даних наукових журналів Норвегії.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, докторантів, аспірантів,
студентів вищих навчальних закладів.

УДК 004.94:53.072

ББК 30

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2016

© Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, 2016

ISSN 2308-5916

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University

MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING

Series: Technical sciences

Scientific journal

ISSUE 13

Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University
2016

Critics:

I. Beyko, Doctor of Technical Science, Professor,
National Technical University of Ukraine
«Kyiv Polytechnic Institute»;

R. Kvyetnyy, Doctor of Technical Science, Professor,
Head of department Vinnytsia national technical university.

Editorial board:

Yu. Krivonos, Academician of the NAS of Ukraine, Doctor
of Physical and Mathematical Sciences, Professor (*Executive Editor*);

A. F. Verlan, Corresponding Member of the NAPS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor (*Vice Executive Editor*);

V. Fedorchuk, Doctor of Technical Science,
Professor (*Responsible Secretary*);

T. Bokalrud, Associate Professor, Norway;

V. Boyun, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor;

A. A. Verlan, Ph.D., Professor, Norway;

O. Himich, Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Doctor
of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

I. Konet, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;

B. Nesterenko, Doctor of Technical Science, Professor;

S. Polozhaenko, Doctor of Technical Science, Professor;

V. Vasiliev, Corresponding Member of the NAS of Ukraine,
Doctor of Technical Science, Professor;

V. Zadiraka, Academician of the NAS of Ukraine,
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences: scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University ; [Editorial Board: Yu. Krivonos (Executive Editor) and others]. — Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University, 2016. — ISSUE 13. — 220 p.

The book publishes results of studies on the mathematical models' application problems in various areas of human activity.

Joint with NTNU the journal has been included to the database of Norwegian Register for Scientific Journals, Series and Publishers.

Intended for scientific and engineering staff, researchers, undergraduate, graduate and Ph. D. students, post-graduates.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2016

© Kamianets-Podilsky National
Ivan Ohienko University, 2016

ISSN 2308-5916

P. Ali Zada*, Prof. Dr.,
N. Tuncay*, Prof. Dr.,
B. Ozturk*, Asst. Prof.,
C. Kivanc*, Res. Asst.,
H. A. Mamedov**, D-r of Tech. Sciences, Prof.,
S. A. Abdullaev**

*OKAN University, Istanbul, Turke,

**Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

PARAMETRICAL METHOD OF LOW-FREQUENCY HARMONICS SUPPRESSION IN RECTIFIER'S OUTPUT VOLTAGE UNDER SUPPLY VOLTAGE UNBALANCES (MATHEMATICAL MODEL, STUDY AND INDUSTRIAL APPLICATION)

This paper deals with using an original and pure electronic method for low-frequency harmonic suppression with wide industrial realization and application, in place of the usually heavy inductive, low-frequency harmonic filters. One of the main applications was made for small land power supply units of onboard complexes in ground-based air navigation when preflight ground check-service is made. The transport management at thousands of small provincial airports in the former country is still unfortunate. The same situation is in Northern and central Central Asia, Northern Caucasian and Trans-Caucasian Mountains, oriented to small civil and agricultural services airports, etc. Everywhere the phase and line voltage amplitude unbalance can reach between 10-15% at the settlement's power tiny transformer or generator and there are thousands and thousands of such local «airports» [1, 6]. This paper has been editing by a native speaker, Ms. Rachel Alcorn — our sincere thanks.

Key words: *noise, adaptive methods, telemetry canals.*

Introduction. Voltage disturbance is the most common type of power quality (PQ) degradation phenomenon [11–13]. Among the various types of voltage disturbances, voltage variation and unbalance occur frequently because of different regular switching loads in the supply network [14–15]. The presence of nonlinear loads across the power system network also degrades the PQ. Thereby, slight changes in the convertors voltage or load make the operating parameters change. Applying varying voltages (or their angles), or simultaneous variation of both of them to a three-phase bridge AC-DC convertor can cause the variation of side-operating parameters. In this case, it is necessary to study the operating performance under variable conditions. This paper presents the performance analysis of a three-phase bridge AC-DC convertor system for voltage variations using an experimental case study. In order to study the performance variations of

a three-phase AC-DC convertor system for voltage variations. Voltage unbalance has been interpreted and expressed mathematically as a voltage unbalance factor (VUF) in a number of ways [16]. The VUF as expressed by the IEC (International Electro technical Commission) is

$$VUF = (V_N / V_P) * 100 \%$$

where V_N and V_P are magnitudes of negative and positive sequence voltage components.

As discussed, there will be infinite possibilities of voltage combinations that will satisfy a VUF. This can be reduced to a unique case by considering the complex nature of the sequence components which is the complex voltage unbalance factor (CVUF) defined as the ratio of the negative sequence voltage phasor to the positive sequence voltage phasor, and it is expressed as $CVUF = K_V \angle V$, where K_V is the ratio of magnitudes negative sequence voltage to the positive sequence voltage and $\theta_V = (\theta_N - \theta_P)$ is the phase angle by which the negative sequence component leads the positive sequence component.

For most AC-DC convertor systems, it is quite difficult to measure the individual phase voltages, as the neutral point is often not externally available. Since all calculations are computed on a per-phase basis, to calculate the voltage unbalance factor (K_V), a definite relationship must exist between the magnitudes of the K_V computed using line and phase voltage values. Voltage variations and unbalance can be classified into balanced over voltage (BOV), balanced under voltage (BUV), unbalanced over voltage (UBOV), unbalanced under voltage (UBUV) and unbalanced equal voltage (UBEV); and by making use of the upper limit of voltage variations, the ambiguity among voltage combinations that lead to the calculation of CVUF can be greatly reduced.

This paper deals with an original and pure electronic method with its wide industrial realization and application for suppression rectifier's low-frequency harmonics due to the different types of the voltage unbalances mentioned above.

Body. The transportation management at thousands of small provincial airports is still unfortunate in Northern and central Siberia oil fields service, Ural, Turkey, Central Asia, Northern Caucasian and Transcaucasia Mountains, oriented to small airports or of distant agricultural services, etc.

Their converters often are fed through the weak three-phase airfield network, or from the settlement's autonomous diesel generator with a limited power supply. Besides, there are some random-fluctuation regimes that lead to a rising asymmetry (unbalance) of phases and lines' voltage amplitudes in the feeding network.

The generally recognized upper limit for running any motor or generator with unbalanced voltages is usually around 5% — Table 1, (10%

[10]). However, the allowable nameplate power of an electrical machine must be de-rated according to the following table for voltage unbalances 1% and greater [9] (extrapolated from the curve www.epri.com: «Power Plant Electrical Reference Series», Volume 6 Motors):

Table 1

Motors output as a function of unbalance in the supplied voltage

Voltage Unbalance	Output De-Rating
1%	98%
2%	96%
3%	92%
4%	85%
5%	76%

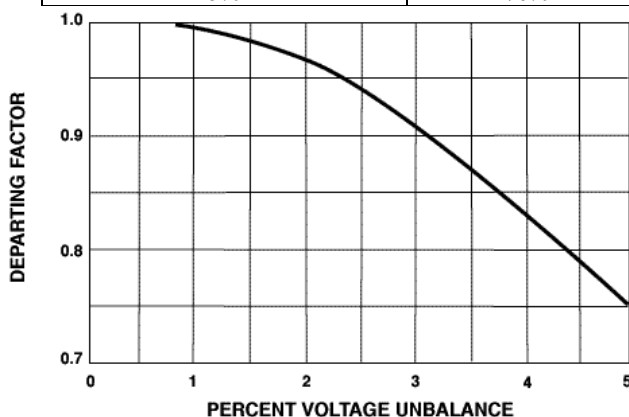


Fig. 1. Motors output as a function of unbalance in the supplied voltage

Phase voltage unbalance should be less than one percent for proper motor operation. If any three phase unit (a motor, rectifier, transformer etc) must be operated with a phase unbalance of greater than one percent, then the unit should be de-rated according to the presented table. A unit should not be operated at all where phase unbalance is greater than five percent. (<http://cipco.apogee.net/mnd/mspupha.asp>).

From the other point of view, it is known that under such voltage unbalance conditions (even up to 10%, for distant wilderness places) the low-frequency harmonic components appear in the rectifier load voltage and current output spectrums. They penetrate into the onboard network electrical motors or electronic devices, dramatically decreasing their output power and this may cause a reason for auto-oscillations or other undesirable processes [1–9, 11] only because of ineffective filtering of their low-frequency harmonics. In addition, these harmonics may become a source of interference for the airport's other ground service apparatuses.

Therefore, the problem of low-frequency harmonic suppression is very important, but the practical realization of low frequency filters (in particularly the inductive ones) clashes with the problem of the mobile rectifier's overall mass and dimensions, a converter's stability under certain conditions, its efficiency and other difficulties.

There are many well-known ways to improve the filtration efficiency of a thyristor voltage rectifier (TVR). One of these ways is the transition to multi-pulse rectifiers (3, 6, 12, 18, 24, etc.). The pulse frequency of such rectifiers is equal to $f * N$, where N is the pulses-number of the rectified voltage (3, 6, 12, 18, 24, etc.) and f is the frequency of the supply voltage. When the asymmetry of phase voltage amplitude has taken place, the influence of low frequency harmonic components are increased significantly in these rectifiers — usually by frequency $2f$ Hz pulsations appear in the rectifier's output voltage — about 10% of its maximum value (proportional to the level of the phase or line voltage amplitude unbalance). These pulsations can make the spectrum of output voltage harmonics even worse than the spectrum of 2- or 3- pulse rectifiers. The application of passive or resonant filters results in a considerable increase of the mobile rectifier's weight and size. Moreover as the onboard apparatuses work with sharply variable loads, there are output voltage fluctuations and possible voltage surge and overloads in these rectifier filters. Therefore, the passive and resonant filters are rarely applied for suppressing and smoothing the low-frequency harmonics in the ground service thyristor voltage rectifiers at small airports.

This paper outlines an untraditional [2, 3, 8], but a pure electronic approach to the suppression of low-frequency harmonics without the use of any additional low-pass filters with heavy inductors or big capacitors.

There is a rapidly growing interest in these so-called parametric methods for suppressing harmonics in the rectified voltage. They are simple for technical realization and efficient in practice. For the effective work on the parametric methods, it is necessary to find and technically understand the connection between the asymmetry characterizing main parameters and the level of the generated-additionally low-frequency harmonics.

Theoretically the rectifier semiconductor valve system can be described by the nonlinear, non-homogeneous (dissimilar) differential equations with periodically and discretely changing coefficients and perturbing functions by changing their amplitude and frequency:

$$\begin{aligned} a_{11}*y'_1 + a_{12}*y'_2 + \dots + a_{1n}*y'_n &= f_1(t, \omega) + b_{11}*y_1 + b_{12}*y_2 + \dots + b_{1n}*y_n, \\ a_{21}*y'_1 + a_{22}*y'_2 + \dots + a_{2n}*y'_n &= f_2(t, \omega) + b_{21}*y_1 + b_{22}*y_2 + \dots + b_{2n}*y_n, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (1)$$

$$a_{n1}*y'_1 + a_{n2}*y'_2 + \dots + a_{nn}*y'_n = f_n(t, \omega) + b_{n1}*y_1 + b_{n2}*y_2 + \dots + b_{nn}*y_n,$$

or in matrix form $[A].s[Y] = F(t, \omega) + [B].[Y]$.

The equations (1) are the generalized mathematical model of the semiconductor valve converter in which the models of a semiconductor valve and its control system are taken into consideration. Thus, this model allows us to investigate the semiconductor valve converters at any interval of the discreteness. However, its application for analyzing the harmonic composition of the rectified voltage takes a lot of time to calculate, as it is necessary to determine the conditions of the valves at each interval of the discreteness that is bound with the joint decision of the control system and electromagnetic process equations in the converter itself

$$A^T Z_B A i = A^T E_B, \quad (2)$$

where T — the matrix transposition symbol; A , Z_B and E_B — the matrix of the connections, resistances and electromotive forces branches matrixes; and i — the connection current matrix in accordance with the graph of the diagram. The problem is simplified considerably if the angle of bias $\Delta\alpha$ showing the switching point's bias in asymmetric modes is brought relative to the switching points of the symmetric modes (fig. 2) in the model. In this case it isn't necessary to conduct the work to find the switch-on/off moments of the valves at each interval of the discreteness or to solve the equation in full volume, but it may limit the mathematical model of the rectifier describing the voltage envelope. In this case, the equation of the mathematical model, for example, bridge thyristor rectifier for the continuous current mode can be written in the following way: $|\alpha_I| \geq (\Delta\alpha_{ib}) : \alpha_I < 60$ electric degrees from natural switching points. Thus, the non-symmetrical three-phase voltages can be written in the following way:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \sin(\omega t + \pi/6); \\ u_2(t) &= U_2 \sin(\omega t + \pi/2); \\ u_3(t) &= U_3 \sin(\omega t + 5\pi/6), \end{aligned} \quad (3)$$

where $U_{1m} = 1$, $U_{2m} > U_{1m}$, $U_{3m} = U_{1m}$. Then the equations of the output voltage envelope in the interval of the discreteness $\lambda = 2\pi/m$, corresponding to the symmetric mode taking into account $\Delta\alpha_{ib}$ for the asymmetric modes, will be the following:

$$u_{\lambda 1}(t) = [u_3(t) - u_2(t)] \times \begin{bmatrix} (\alpha_r + |\Delta\alpha_{1b}|) / \omega + [u_1(t) - u_2(t)] & \lambda_1 / \omega \\ 0 & (\alpha_r + |\Delta\alpha_{1b}|) / \omega \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$u_{\lambda 2}(t) = [u_1(t) - u_2(t)] \times \begin{bmatrix} (\lambda_1 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{2b}|) / \omega + [u_1(t) - u_3(t)] & \lambda_2 / \omega \\ \lambda_1 / \omega & (\lambda_1 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{2b}|) / \omega \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$u_{\lambda 3}(t) = [u_1(t) - u_3(t)] \times \begin{bmatrix} (\lambda_2 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{3b}|) / \omega + [u_2(t) - u_3(t)] & \lambda_3 / \omega \\ \lambda_2 / \omega & (\lambda_2 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{3b}|) / \omega \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$u_{\lambda 4}(t) = [u_2(t) - u_3(t)] \times \begin{bmatrix} (\lambda_3 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{4b}|) / \omega + [u_2(t) - u_1(t)] & \lambda_4 / \omega \\ \lambda_3 / \omega & (\lambda_3 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{4b}|) / \omega \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$u_{\lambda 5}(t) = [u_2(t) - u_1(t)] \times \begin{bmatrix} (\lambda_4 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{5b}|) / \omega + [u_3(t) - u_1(t)] & \lambda_5 / \omega \\ \lambda_4 / \omega & (\lambda_4 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{5b}|) / \omega \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$u_{\lambda 6}(t) = [u_3(t) - u_1(t)] \times \begin{bmatrix} (\lambda_5 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{6b}|) / \omega + [u_3(t) - u_2(t)] & \lambda_6 / \omega \\ \lambda_5 / \omega & (\lambda_5 + \alpha_r + |\Delta\alpha_{6b}|) / \omega \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

The advantages of these equations (4.1–4.6) are that both α_r and $\Delta\alpha_{ib}$ enter in each interval of the discreteness. On the one hand, α_r defines the degree of asymmetry of the output voltage curve; on the other hand, it defines the asymmetry of the control angles which appear.

Additionally, the equations (2) follow the idea that by means of α_r changing at each interval of the discreteness, this may compensate for the influence of $\Delta\alpha_{ib}$ and fix the same values of α_r at the intervals when the low-frequency pulse components will be:

$$\Delta\alpha_{ib} = 30^\circ - \arctg\left(\left(\frac{U_{i+1}}{U_i}\right) - \sin 120^\circ\right) / \sin 120^\circ. \quad (5)$$

Thus, the equation (2) makes us think that if it may be receiving the information about current value of $\Delta\alpha_{ib}$ in each interval of the discreteness, then by means of bringing the correction in the control angles, it may influence the output voltage spectrum structure as far as possible.

The way of practically carrying out the given algorithm consists of the following steps. First, the crossing point of the phase voltage across zero and natural switching point in each interval of the discreteness is measured, and then the control angle correction in the same interval according to received results is formulized.

The block diagram of the implemented method and voltage diagrams show the efficiency of the correction as presented in fig. 2 and fig. 3a, 3b, respectively.

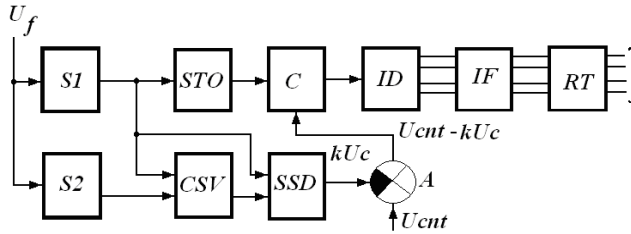


Fig. 2. The block diagram of the realized method

$S1$ — the First Synchronizer to synchronize the work of the Converter of the Slot to the Voltage (CSV) in each interval of the discreteness; $S2$ — the Second Synchronizer interrupting the work of CSV in the natural switching points (when equal to the line voltages). The time-slot between the synchronous pulses $S1$ and $S2$ is proportional to the measured voltage. In the capacity of CSV usually a Saw-Tooth Oscillator (STO) is used, the start of which is synchronized with $S1$ while the ending is synchronized with $S2$.

CSV output voltage is sent to the input of the Selection and Storage Device (SSD). The pulses with the output of $S1$ simultaneously enter the controlling input of SSD after each interval of the discreteness. These pulses allow the instantaneous value of the voltage corresponding to the ending of the interval between the moments of the synchronous pulses $S1$ and $S2$ in SSD to be recorded. The voltage kU_c enters one of the Adder's (A) inputs with the SSD output, another input, the controlling voltage U_{cnt} , is presented.

There is algebraic summation U_{cnt} and kU_c in the Adder and its sum $U_{\Sigma} = U_{cnt} - kU_c$ enters the Comparator block (C) with the adder's output. The Comparator block sets the corrected control angle, gives the signal throw Impulse Distributor (ID) and Impulse Former (IF) for switching the Rectifier's Thyristor (RT) off at the proper instant of the current period. Next period (in 60 el. degrees) the process is repeated and corrected signal feeds the next value etc.

Thus, in one period 6 correcting signals are formed which set corrected control angles accordingly. The value of correcting signal (voltage) U_c is defined in each synchronizing time period in the following way: as $\Delta t_c = \Delta \alpha_{ib} / \omega$, the amplitude dependence and Δt are changing linearly, then $U_c = tg \varphi \Delta t$, where φ — is the tilt angle of the CSV output voltage (saw-tooth voltage in our case). In one turn, $\Delta t = t_{s2} - t_{s1}$ is the time interval between two synchronous signals from $S2$ and $S1$. And t_{s1} can be decomposed into two components, one of which is constant and corresponds to the symmetric mode t_{s1h} , but another changes depending on the asymmetry of the supply voltages — Δt_{s1} . Therefore: $t_{s1} = t_{s1h} + \Delta t_{s1}$ and after substituting this expression into the equation U_c the following expression was received

$$U_c = tg\varphi(t_{s2} - t_{s1h}) + tg\varphi\Delta t_{s1} = U_{ch} + \Delta U_c, \quad (6)$$

where U_{ch} — the constant component, which corresponds to the symmetric mode.

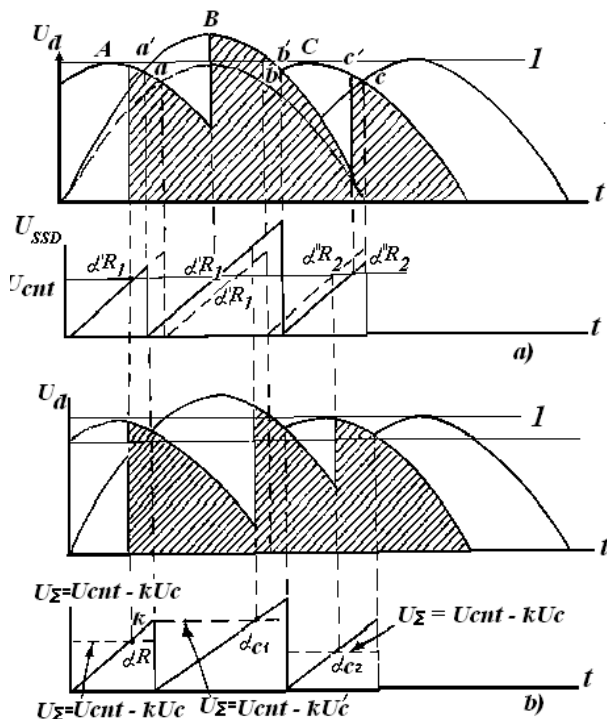


Fig. 3. Correction efficiency shown in the voltage diagrams

It may be compensated with entering a bias voltage in the control voltage U_{cnt} in the adder A. ΔU_c is the variable component of the correction voltage which is proportional to the supply voltage phase increment of the amplitude changing. Thus, it can be considered as proportionality $U \equiv \Delta U$. The coefficient k is defined as the ratio $\Delta\alpha_{ic}/\Delta\alpha_{ib}$, where $\Delta\alpha_{ic}$ — the angle increment in asymmetry. The system provides the full compensation of the switching moments changing (the control angles), that is, the constancy of the control angle in linearly scanning voltages of CSV and equal increasing speed of this voltages ($k=1$) the method allows changing k in any intervals to promote better correction and therefore better the smoothing of the output voltage.

The worst nonsymmetrical feeding case happens when phases A and C are 12% lower than phase B. The results of comparing the converter

output DC voltage spectrogram for the two cases — with and without the application of the electronic method mentioned above of low-frequency harmonic suppression in output DC voltage — are presented in Table 2.

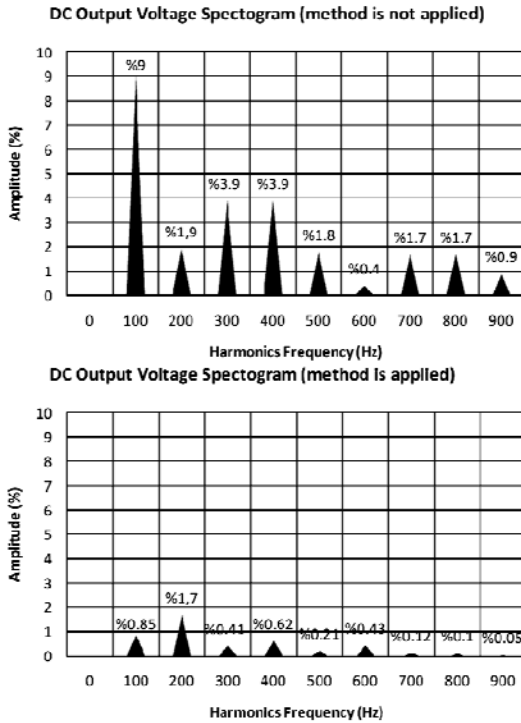


Fig. 4. Nonsymmetrical feeding of the converter (A and C phases are 10% lower): the DC output voltage spectrograms

Table 2

Voltage unbalances influence on low harmonic amplitudes (mainly 100 Hz)

Unbalance Case 10%	100Hz	200Hz	300Hz	400Hz	500Hz	600Hz
1. The method is not applied	9.2%	1.9%	3.9%	3.9%	1.8%	0.22%
2. The method is applied	0.85%	1.7%	0.41%	0.62%	0.21%	0.43%
Output de-rating (times) 1/2	10.82↓	1.11↓	9.5↓	6.3↓	8.6↓	0.51↑

Not wanting to overburden the paper with comments to the other unbalance cases (5% and 7.5%) DC output voltage spectrogram’s photo results, it is best to confine the final remarks about these two cases: the percentage of 100Hz harmonic and output de-rating (times) are **1.27% (3.61)** for 5%, and **2.53% (7.2)** for 7.5% unbalance cases, respectively. All these results confirm the efficiency of the method proposed and allow us to reject the use of the usually heavy inductive low-frequency-harmonic filters.

The thorough studies of the DC converter model, [7] and laboratory experiments have shown (table 2) the sensitivity and the almost linear proportionality between the phase-, voltage-amplitude unbalances and the low harmonic of the converter output voltage (100Hz amplitudes before and after applying the method). The other harmonics up to 600Hz are not too sensitive to the applied voltage unbalance and are usually suppressed by little traditional RLC filters.

Conclusion. The ground power supplies must completely correspond to the characteristics of the onboard power supplies during the ground service and maintenance of aircrafts' onboard complexes. If low-frequency harmonics appear in the output of the ground power supplies, it means that there is an amplitude asymmetry of the feeding voltages and their suppression is bound with well-known difficulties. Therefore, it is important to solve this question. This paper presented the simple mathematical model of the m-phase rectifier and its output voltage curves taking into account the real instant value of asymmetry in each interval of the discreteness. In addition, the description of the correction arrangement way is given, which allows the rectifier output voltage smoothing considerably increasing or, in other words, the ability of suppressing the converter's low-frequency voltage harmonics. It simultaneously raises the speed of the control system and the possibility of forming the necessary rectifier output characteristics.

Acknowledgments. *In memory of Prof., Dr. Sc. Abdullaev A.A. (Azerbaijan Technical University).* The authors wish to thank the individuals who supported and provided real practical help in workshops, on the field and in the lab study, and developed several pilot projects of the converter: from the Azerbaijan Electrical Engineering Technology Institute (Azelectrotechprom), colleagues from OKAN University (Turkey) and to all who have shared their comments, corrections and suggestions during several meetings and conferences. The authors gratefully acknowledge the contributions of the native speaker Ms. **Rachel Alcorn**, (Queen Margaret University, Edinburgh, Scotland) for the work to read and edit English content the original version of this document).

References:

1. Abdulaev A. A. Modulation in Rectifiers with a Control System of Synchronized Linear Voltage and a Correction Device / A. A. Abdulaev, S. A. Abdulaev, V. Y. Baranovsky // NTK Conf. Proc., Power Electronics for Transport, Ukraine. — 1990.
2. Abdulaev A. A., Baranovsky V. Y., Abdullaev S. A., PATENT No 1598083 Rectifier's Control Method, Publ. In BI. — 1990. — No. 37.
3. Abdulaev A. A., Baranovsky V. Y. , Abdullaev S. A., Alieva L. A., PATENT No 1644317 Rectifier's Control Device, Publ. in BI. — 1991. — No 15.
4. Kulizade K. N., Ali-zade P. G., Kuliev A. C., Cascade Converter for Electric Drive Motors, PATENT AC SU 543118. — 1974/1976.

5. Ali-Zada P. H., Kuliyeв H. M., Thyristor Converter, (Priority from 27 Jan. 1998) PATENT. — 2000 0207 01.11.2000, Azerbaijan.
6. Abdulaev A. A. Ground Power Supplies for Servicing the Onboard Complexes / A. A. Abdulaev, S. A. Abdullaev, N. A. Aliev, E. B. Abbasov // The first Eurasian Symposium on Space Science and Technologies, Turkey. — 1993.
7. Ustun O. Multifunctional Electrodynamic Model of Electric Drive and Motors / O. Ustun, P. G. Ali-Zade // The IV Electromechanical Symposium, Bursa, Dec.17-21, 1997, TURKEY.
8. Ali-Zade P. H. Ground Airport Power Supplies for Servicing the Onboard Complexes / P. H. Ali-Zade, H. A. Mamedov, S. A. Abdullaev, V. S. Allahverdiev // Creating The Future, 3rd FAE International Symposium Gemikonađı, 25-26 Nov, 2004. — Cyprus. — P. 497–500
9. Power Plant Electrical Reference Series, Volume 6: Motors. — Access mode: www.epri.com.
10. ПОТ PM-016-2001, Inter branch rules on a labor safety (rules) at operations of electro-installations. PEEP and PUE, (п.6.6 Tab. 6 the Appendix 1, PEEP). Access mode: <http://www.enerkomp.ru/documents/need.html>
11. Jalilian A. Analysis of Three-phase Induction Motor Performance under Different Voltage Unbalance Conditions Using Simulation and Experimental Results / A. Jalilian, R. Roshanfekar // Taylor & Francis, Inc., Electric Power Components and Systems. — 2009. — Vol. 37. — Issue 3. — P. 300–319.
12. Aung M. T. Stochastic prediction of voltage sags by considering the probability of the failure of the protection system / M. T. Aung and J. V. Milanovic // IEEE Trans. Power Del. — 2006. — Vol. 21, № 1. — P. 322–329.
13. Milanovic J. V. The influence of fault distribution on stochastic prediction of voltage sags / J. V. Milanovic, M. T. Aung, C. P. Gupta // IEEE Trans. Power Del. — 2005. — Vol. 20, № 1. — P. 278–285.
14. Aung M. T. The influence of transformer winding connections on the propagation of voltage sags / M. T. Aung, J. V. Milanovic // IEEE Trans. Power Del. — 2006. — Vol. 21, № 1. — P. 262–269.
15. Gupta J. V. M. C. P. Probabilistic assessment of financial losses due to interruptions and voltage sags: Part II: Practical implementation / J. V. M. C. P. Gupta // IEEE Trans. Power Del. — 2006. — Vol. 21, № 2. — P. 925–932.
16. A new method for classification and presentation of voltage reduction events / S. Djokic, J. V. Milanovic, M. F. McGranaghan and other // IEEE Trans. Power Del. — 2005. — Vol. 20, № 4. — P. 2576–2584.
17. Indulkar C. S. Monte Carlo Analysis of a Three-phase Induction Motor for Unbalanced Voltage Supply / C. S. Indulkar // Journal of The Institution of Engineers (India). — 2007. — Vol. 87. — P. 37–41.
18. IEEE Recommended Practice for Monitoring Electric Power Quality, IEEE Std. 1159–1995, 1995.
19. Bollen M. H. J. Understanding Power Quality Problems: Voltage Sags and Interruption / M. H. J. Bollen. — New York : IEEE, 1995. — P. 325–349.
20. Dorr D. S. Point of utilization power quality study results / D. S. Dorr // IEEE Trans. Ind. Appl. — 1995. — Vol. 31, № 4. — P. 658–666.
21. Seljeseth H. Voltage quality measurements / H. Seljeseth, A. Pleym. — 1992 to 1996 (in Norwegian) EFI, Trondheim, Norway, EFI TR A4460.

22. SIMPOW, Power System Simulation and Analysis Software User Manual // ver. (ABB) 10.1.093, STRI, Ludvika, Sweden, 2003.

У статті розглядається використання оригінального і чисто електронного методу низькочастотного зниження рівня гармонік для широкої промислової реалізації та застосування в якості індуктивних низькочастотних фільтрів гармонік. Одним з основних застосувань методу було здійснено для невеликих блоків живлення бортових комплексів наземного базування повітряної навігації при проведенні передпольотної наземної перевірки та обслуговування. Управління транспортом у великій кількості невеликих провінційних аеропортів проводилося невдало. Та ж ситуація спостерігається в північній і центральній частині Середньої Азії, Північного Кавказу і Закавказьких гір, які орієнтовані на невеликі аеропорти цивільних і сільськогосподарських послуг і т.д. Скрізь в локальних аеропортах дисбаланс фази і амплітуди напруги в лініях може досягати 10-15% при включенні живлення невеликого трансформатора поселення або генератора [1, 6]. Висловлюємо подяку за редагування статті пані Рейчел Алкорн.

Ключові слова: шум, адаптивні методи, телеметричний канал зв'язку.

Отримано: 20.04.2016

УДК 519.6

М. В. Артюх,

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук, професор

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

ЗАСТОСУВАННЯ ДИВІДІРІАЛЬНОГО ТА МУЛЬТИГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕНЬ В ДОСЛІДЖЕННІ ЕКОНОМІКИ СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА УКРАЇНИ

У статті наведено основні поняття дивідіріального та мультигрального числень, розглянуто виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності. Розроблено математичні моделі виробничих функцій для дослідження економіки сільського господарства України.

Ключові слова: дивідіріальне числення, мультигральне числення, виробничі функції, коефіцієнт еластичності, ВВП сільського господарства, основні засоби, оборотні активи.

Вступ. Застосування економіко — математичного моделювання відіграє велику роль при дослідженні й прогнозуванні економічних систем різного рівня. Оскільки на результат виробництва має вплив

багато факторів, тому важливо проводити дослідження, яким чином якісно та кількісно ці фактори впливають на кінцевий результат, тобто рівень випуску. Для цього застосовують економіко-математичне моделювання за допомогою виробничих функцій.

Уперше поняття виробничої функції з'явилося в 30-х роках ХХ століття. Американські вчені Джордж Кобб та Пітер Дуглас в своїй статті [1, с. 151–160] використали дані американської легкої промисловості за 24 роки, та на їх основі побудували виробничу функцію, яка потім отримала назву «виробнича функція Кобба-Дугласа». Ця функція має вигляд:

$$Y = AL^\alpha K^\beta . \quad (1)$$

У цій виробничій функції основними факторами, що впливають на випуск продукції Y вважаються K — основний капітал та L — робоча сила. Параметри A , α , β задовольняють таким умовам: $A > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Коефіцієнти α , β відображають вклад праці та капіталу у виготовлення продукту [2, с. 6]. В своїх дослідженнях Кобб і Дуглас методом найменших квадратів визначили всі вказані параметри і функція Кобба-Дугласа набула такого вигляду:

$$Y = 1,01L^{0,75} K^{0,25} . \quad (2)$$

З теоретичної і практичної точок зору важливими є наступні властивості виробничої функції Кобба-Дугласа:

- функція $Y = F(K, L)$ неперервна;
- функція $Y = F(K, L)$ двічі диференційовна по аргументах K і L ;
- виробництво неможливе при відсутності принаймні одного ресурсу, тобто $F(0, L; t) = F(K, 0; t) = 0$.

Як правило, вважають, що виробнича функція (1) — однорідна по аргументах K і L , тобто існує таке $\gamma > 0$ (міра однорідності), що для довільного $\lambda > 0$ справедливо: $F(\lambda K, \lambda L; t) = \lambda^\gamma F(K, L; t)$. Досить часто вважають, що виробнича функція (1) є лінійно-однорідною, тобто, що пропорційне збільшення витрат факторів приводить до зростання випуску в тій же пропорції. У цьому випадку $\gamma = 1$ [3, с. 211–212].

Величина $\gamma = \alpha + \beta$ показує, що при збільшенні K , L в λ разів об'єм продукції зростає у λ^γ разів. Завдяки цьому коефіцієнт однорідності γ називають ще коефіцієнтом ефективності виробництва.

Параметри α, β функції Кобба-Дугласа є частинними коефіцієнтами еластичності:

- 1) частинний коефіцієнт еластичності продукту по фондах

$$E_K = \frac{\partial Y}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y} = A\beta L^\alpha K^{\beta-1} \frac{K}{AL^\alpha K^\beta} = \beta, \quad (3)$$

- 2) еластичність продукту по праці

$$E_L = \frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y} = A\alpha L^{\alpha-1} K^\beta \frac{L}{AL^\alpha K^\beta} = \alpha. \quad (4)$$

Ці коефіцієнти еластичності відображають відсоток приросту обсягу випуску продукції при збільшенні витрат ресурсу на 1%.

Для функції Кобба-Дугласа коефіцієнти α, β постійні й не залежать від обсягу факторів K, L .

Також важливою характеристикою для виробничих функцій є ефект заміщення ресурсів. Ця числова характеристика показує на яку величину x_2 зменшиться обсяг витрат другого ресурсу, якщо збільшити обсяг витрат першого ресурсу на x_1 , щоб при цьому обсяг випуску Y залишився незмінним. Тобто гранична норма S_{x_1, x_2} заміни одного ресурсу іншим — це величина, що показує який обсяг ресурсу вивільняється при збільшенні витрат ресурсу — заміника на одиницю.

$$S_{x_1, x_2} = -\frac{x_2}{x_1}. \quad (5)$$

Тоді еластичність заміни ресурсів показує, на скільки відсотків повинно змінитись співвідношення ресурсів (при $Y = const$), при змінненні граничної норми заміни на 1% [2, с. 12–16]:

$$\sigma_{x_1, x_2} = \frac{\partial \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}{\partial S_{x_1, x_2}} \cdot \frac{S_{x_1, x_2}}{x_2 / x_1}. \quad (6)$$

Актуальність. Основною особливістю виробничої функції Кобба-Дугласа є те, що вона має сталі коефіцієнти еластичності α, β . Але при більш детальному дослідженні [див. 4, зокрема аналіз даних, що використовувалися] виявляється, що частинні коефіцієнти еластичності виробничої функції Кобба-Дугласа можуть бути функціями від обох факторів L та K . Тоді в нагоді стає теорія дивіді-рального та мультигрального числень, оскільки дивідіра 2-го роду — це еластичність.

Введемо позначення дивідіри та мультиграла.

Означення 1. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) : f(x)}{\Delta x} \rightarrow = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x)}{f(x)} \right]^{1/\Delta x},$$

то будемо її називати дивідірою першого роду від функції $f(x)$ у точці x і позначати так:

$$\frac{\delta f(x)}{dx} \rightarrow := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) : f(x)}{\Delta x} \rightarrow. \quad (7)$$

Означення 2. Операцію, яка дозволяє по дивідірі першого роду функції $f(x)$ знайти її первісну, тобто функцію $F(x)$ із властивістю

$$\frac{\delta F(x)}{dx} \rightarrow = f(x),$$

назвемо невизначеним мультигралом першого роду від функції $f(x)$ і позначатимемо так:

$$n f(x)^{dx} := F(x)C \Leftrightarrow \frac{\delta F(x)}{dx} \rightarrow = f(x), \quad (C = const). \quad (8)$$

Означення 3. Якщо існує границя

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x} \left\langle \frac{f(x_1) : f(x)}{x_1 : x} \right\rangle &= \lim_{h \rightarrow 1} \left\langle \frac{f(x \times h) : f(x)}{h} \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 1} \log_h \left(\frac{f(x \times h)}{f(x)} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\ln f(x \times h) - \ln f(x)}{\ln h} = \frac{x f'(x)}{f(x)}, \end{aligned}$$

назвемо її дивідірою другого роду від функції $f(x)$ у точці x і позначимо її так:

$$\left\langle \frac{\delta f(x)}{\delta x} \right\rangle := \lim_{h \rightarrow 1} \left\langle \frac{f(x \times h) : f(x)}{h} \right\rangle. \quad (9)$$

Означення 4. Операцію, обернену до $\left\langle \frac{\delta f}{\delta x} \right\rangle$, назвемо невизначеним мультигралом другого роду від функції $f(x)$ і позначимо так

$(C = const)$:

$$n \delta x \uparrow f(x) = n \delta x^{f(x)} := F(x)C \Leftrightarrow \left\langle \frac{\delta F(x)}{\delta x} \right\rangle = f(x) \quad (10)$$

Основні властивості дивідір та мультигралів наведено в таблицях 1 та 2.

Таблиця 1

Зіставлення властивостей похідної $\frac{dy}{dx}$ і дивідір $\frac{\delta y}{dx}$, $\leftarrow \frac{\delta y}{\delta x}$

Похідна	Дивідіра 1-го роду	Дивідіра 2-го роду
$y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} =$ $= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta) - y(x)}{\Delta}$	$\frac{\delta y(x)}{dx} \Rightarrow$ $= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{y(x+\Delta) : y(x)}{y(x)} \Rightarrow$ $= e \uparrow \frac{y'}{y}$	$\leftarrow \frac{\delta y(x)}{\delta x} \Rightarrow$ $= \lim_{\Delta \rightarrow 1} \frac{y(x \cdot \Delta) : y(x)}{\Delta} \Rightarrow$ $= \frac{d \ln y}{d \ln x} = \frac{xy'}{y}$
$\frac{d}{dx}(f + -g) =$ $= \frac{df}{dx} + - \frac{dg}{dx}$	$\frac{\delta}{dx} \rightarrow (f \times : g) =$ $= \frac{\delta f}{dx} \rightarrow \times : \frac{\delta g}{dx}$	$\leftarrow \frac{\delta y}{\delta x} \rightarrow (f \times : g) =$ $= \leftarrow \frac{\delta f}{\delta x} \rightarrow + - \leftarrow \frac{\delta g}{\delta x}$
$\frac{d}{dx} a = 0, a = const$	$\frac{\delta}{dx} \rightarrow a = 1$	$\leftarrow \frac{\delta}{\delta z} \rightarrow a = 0$
$\frac{d}{dx}(a \times x) = a$	$\frac{\delta}{\delta x} \rightarrow (a \times x) = a$	$\leftarrow \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow (x \uparrow a) = a$
$\frac{d}{dx}(f \times g) =$ $= \frac{df}{dx} \times g + f \times \frac{dg}{dx}$	$\frac{\delta}{dx} \rightarrow (f \uparrow g) =$ $= \frac{\delta f}{dx} \rightarrow \uparrow g \times f \uparrow \frac{dg}{dx}$	$\leftarrow \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow (f \uparrow \ln g) = \leftarrow \frac{\delta f}{\delta x} \rightarrow$ $\times \ln g + \ln f \times \leftarrow \frac{\delta g}{\delta x} \rightarrow$
$\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{d} \right) =$ $= \frac{df}{dx} \times g - f \times \frac{dg}{dx}$ $g \uparrow 2$	$\frac{\delta}{dx} \rightarrow \left(\frac{f}{g} \right) =$ $= \frac{\delta f}{dx} \rightarrow \uparrow g : f \uparrow \frac{dg}{dx}$ $g \uparrow 2$	$\leftarrow \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow (f \downarrow \ln g) =$ $= \leftarrow \frac{g \uparrow \frac{\delta f}{dx} : f \uparrow \frac{\delta g}{dx}}{g \uparrow \ln g}$
$\frac{d}{dx} f(g(x)) =$ $= \frac{df(g)}{dg} \times \frac{dg(x)}{dx}$	$\frac{\delta}{dx} \rightarrow f(g(x)) =$ $= \frac{\delta f(g)}{dg} \rightarrow \uparrow \frac{dg}{dx}$	$\leftarrow \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow f(g(x)) =$ $= \leftarrow \frac{\delta f(g)}{\delta g} \rightarrow \times \leftarrow \frac{\delta f(x)}{\delta x} \rightarrow$

Продовження таблиці 1

$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$	$\ln \left[\frac{\delta y}{dx} \rightarrow \uparrow y \right] =$ $= 1 : \ln \left[\frac{\delta y}{dx} \rightarrow \uparrow x \right]$	$\frac{\delta y}{\delta x} = 1 : \frac{\delta x}{\delta y}$
$\frac{d}{dx}(e \uparrow x) = e \uparrow x$	$\frac{\delta}{\delta x} \rightarrow (e \uparrow (e \uparrow x)) =$ $= e \uparrow (e \uparrow x)$	$\leftarrow \frac{\delta}{\delta x} \rightarrow \left(\frac{1 : e}{x} \right) =$ $= \leftarrow \frac{1 : e}{x} \rightarrow = -\frac{1}{\ln x}$
$dy = \frac{dy}{dx} \times dx$	$\delta y = \frac{\delta y}{\delta x} \rightarrow \uparrow dx$	$\delta y = \delta x \uparrow \leftarrow \frac{\delta y}{\delta x} \rightarrow$

Властивості дивідір першого роду:

$$\delta_Y = \frac{dY(t)}{dt} (Y(t))^{-1}, \quad \delta_K = \frac{dK(t)}{dt} (K(t))^{-1} \quad \text{і} \quad \delta_L = \frac{dL(t)}{dt} (L(t))^{-1}$$

темпи випуску продукції, праці і капіталу відповідно.

Економічна інтерпретація дивідір другого роду. Нехай $D(P)$ — попит на продукцію в залежності від ціни P . Тоді еластичність попиту

$$\text{від ціни } E_P(D) = \frac{P \frac{dD(P)}{dP}}{D(P)} = E(P) \quad [5, \text{ с. } 37, 46, 57, 63, 115\text{--}122, 139\text{--}144].$$

Таблиця 2

Зіставлення властивостей інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ і мультигралів

$$n \int_a^b f(x) dx, \quad n \int_a^b \delta x f(x)$$

Визначений інтеграл	Визначений мультиграл 1-го роду	Визначений мультиграл 2-го роду
$\int_a^b f(x) dx =$ $= \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$	$n \int_a^b f(x) dx =$ $= \lim_{\substack{\Delta \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \prod_{i=1}^n f(\xi_i) \uparrow \Delta x_i =$ $= e \uparrow \int_a^b \ln f(x) dx$	$n \int_a^b \delta x f(x) =$ $= \lim_{\substack{\delta \rightarrow 1 \\ n \rightarrow \infty}} \prod_{i=1}^n \delta x_i \uparrow f(\xi_i) =$ $= e \uparrow \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx$

Продовження таблиці 2

$\int_a^b c f dx = c \int_a^b f dx,$ <p style="text-align: center;">$c - const$</p>	$\begin{aligned} n_a^b (f^c)^{dx} &= \\ &= \left[n_a^b f^{dx} \right] \uparrow c \end{aligned}$	$\begin{aligned} n_a^b \delta x^c f &= \\ &= \left[n_a^b \delta x^c f \right] \uparrow c \end{aligned}$
$\begin{aligned} \int_a^b (f \pm g) dx &= \\ &= \int_a^b f dx \pm \int_a^b g dx \end{aligned}$	$\begin{aligned} n_a^b (f \times g) \uparrow dx &= \\ &= n_a^b f \uparrow dx : n_a^b g \uparrow dx \end{aligned}$	$\begin{aligned} n_a^b \delta x \uparrow (f \pm g) &= \\ &= n_a^b \delta x \uparrow f : n_a^b \delta x \uparrow g \end{aligned}$
$\begin{aligned} \int f(x) dx = F(x) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big _a^b &= \\ = F(b) - F(a) \end{aligned}$	$\begin{aligned} n f(x)^{dx} = F(x) &\Rightarrow \\ \Rightarrow n_a^b f(x)^{dx} &= \\ = F(x) \Big _a^b = F(b) : F(a) \end{aligned}$	$\begin{aligned} n \delta x^{f(x)} = F(x) &\Rightarrow \\ \Rightarrow n_a^b \delta x^{f(x)} &= \\ = F(x) \Big _a^b = F(b) : F(a) \end{aligned}$
<p>Середнє арифметичне</p> $M_1(f) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$	<p>Середнє геометричне</p> $M_a = \frac{n_a^b f x^{dx}}{b-a} \rightarrow$	<p>Середнє логарифмічне</p> $M_L = \frac{n_a^b \delta x^{f(x)}}{b:a}$
$\begin{aligned} \int_a^b f \times g' \times dx &= \\ &= f \times g \Big _a^b - \\ &- \int_a^b g \times f' \times dx \end{aligned}$	$\begin{aligned} n(f \uparrow g)^{dx} &= \\ &= f \times g \Big _a^b - \int_a^b g \times f' \times dx \end{aligned}$	$\begin{aligned} n_a^b \delta g^{f'} &= \\ &= g^f \Big _a^b : n_a^b \delta f^{f \ln g} \\ e \uparrow \int_a^b f d \ln g &= \\ &= g^f \Big _a^b : e \uparrow \int_a^b (\ln g) df \end{aligned}$

Таким чином, властивість дивідіри 2-го роду — еластичність функції можемо застосовувати для дослідження і виробничих функцій, оскільки вони містять таке поняття, як еластичність заміни.

Постановка задачі. Розглянемо виробничу функцію зі змінними коефіцієнтами еластичності, яка моделює виробничий процес в галузі

сільського господарства України. Побудуємо залежність випуску продукції від оборотних активів та основних засобів сільського господарства, а також залежність випуску продукції від кількості працюючих та основних засобів.

Математична модель 1. Нехай виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y(O, V, C_1, a, b) = e^{C_1} \cdot O^{f(O, V, a)} \cdot V^{g(O, V, b)}, \quad (11)$$

$$f(O, V, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(O) \cdot \varphi_m(V); \quad (12)$$

$$g(O, V, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(O) \varphi_m(V); \quad (13)$$

$$\varphi_i(O) = O^i; \quad \varphi_m(V) = V^m,$$

де Y — ВВП сільського господарства України, V — основні засоби сільського господарства, O — оборотні активи сільського господарства, C_1, a_{im}, b_{im} — невідомі параметри (коефіцієнти), M, N — параметри, покладемо $M = 1, N = 1$.

Теорема 1. Для знаходження невідомих C_1, a_{im}, b_{im} з умов

$$Y_p(O_p, V_p, C_1, a, b) = e^{C_1} \cdot O_p^{f(O_p, V_p, a)} \cdot V_p^{g(O_p, V_p, b)}, \quad (14)$$

методом найменших квадратів

$$j(C) = \sum_{p=1}^Q \left(\ln Y_p(O_p, V_p, C_1, a, b) - \ln Y_p \right)^2 \rightarrow \min_{A, a_m, b_m}$$

матриця невідомих коефіцієнтів $C = [C_1 \ a_{00} \ a_{10} \ a_{01} \ b_{00} \ b_{10} \ b_{01}]$ знаходиться за формулою: $C = (B \cdot B^T)^{-1} \cdot B \cdot Y1$, де B — матриця з Q рядками наступного вигляду:

$$B_p = \left[1 \ \ln O_p \ (\ln O_p) O_p \ (\ln O_p) V_p \ \ln V_p \ (\ln V_p) O_p \ (\ln V_p) V_p \right]^T,$$

а $Y1_p = \ln Y_p$, $p = \overline{1, Q}$, що отримується, якщо

$$f(O, V, a) = a_{00} + a_{10} O + a_{01} V; \quad g(O, V, b) = b_{00} + b_{10} O + b_{01} V.$$

Для аналізу сільського господарства України використовувались статистичні дані за 2004–2013 р. [6, 7].

При проведенні обчислювального експерименту отримали такі значення невідомих коефіцієнтів: $C_1 = 27,11$, $a_{00} = 3,366$, $a_{10} = 0,128$, $a_{01} = 0,023$, $b_{00} = -9,197$, $b_{10} = -0,166$, $b_{01} = 0,026$. Таким чином, виробнича функція має вигляд:

$$Y_Z = e^{27,11} \times O^{3,366+0,128 \cdot O+0,023V} \times V^{-9,197-0,166 \cdot O+0,026 \cdot V} \quad (15)$$

Також було обчислено виробничу функцію зі сталими коефіцієнтами:

$$Y_C = 3,78 \times O^{0,521} \times V^{0,326} \quad (16)$$

Отримані функції відображено на графіках (рис. 1, рис. 2).

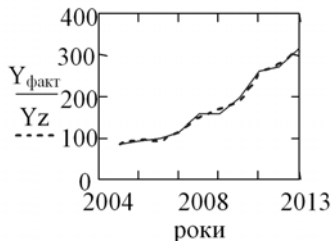


Рис. 1. Функція зі змінними коефіцієнтами еластичності (15)

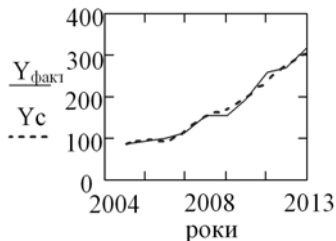


Рис. 2. Функція за сталими коефіцієнтами (16)

Для функції зі змінними коефіцієнтами середньоквадратичне відхилення — $\sigma_1 = 0,029$, а для функції зі сталими коефіцієнтами — $\sigma_2 = 0,042$.

Таким чином, підтверджено, що функція зі змінними коефіцієнтами $f(O, V, a)$, $g(O, V, b)$ дає краще наближення.

Математична модель 2. Нехай виробнича функція зображується в наступному вигляді:

$$Y(L, K, C_1, a, b) = e^{C_1} \cdot L^{f(L, K, a)} \cdot K^{g(L, K, b)}, \quad (17)$$

$$f(L, K, a) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N a_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (18)$$

$$g(L, K, b) = \sum_{i=0}^M \sum_{m=0}^N b_{im} \varphi_i(L) \varphi_m(K); \quad (19)$$

$$\varphi_i(L) = L^i; \quad \varphi_m(K) = K^m,$$

де Y — ВВП сільського господарства України, K — основні засоби сільського господарства, L — кількість найманих працівників, C_1, a_{im}, b_{im} — невідомі параметри (коефіцієнти), M, N — параметри, покладемо $M = 1, N = 1$.

Згідно з теоремою 1 проведено обчислювальний експеримент. Отримали такі значення коефіцієнтів: $C_1 = 29,089$, $a_{00} = -23,818$, $a_{10} = -7,391$, $a_{01} = 0,046$, $b_{00} = -12,302$, $b_{10} = 5,69$, $b_{01} = 0,014$. Відповідно, виробнича функція:

$$YZ = e^{29,089} \times L^{-23,818-7,391 \cdot L+0,046K} \times K^{-12,302+5,69 \cdot L+0,014 \cdot K} \quad (20)$$

За цими ж даними виробнича функція зі сталими коефіцієнтами:

$$Y_C = 2,374 \times L^{-0,779} \times K^{0,91} \quad (21)$$

Для цих функцій маємо такі графіки:

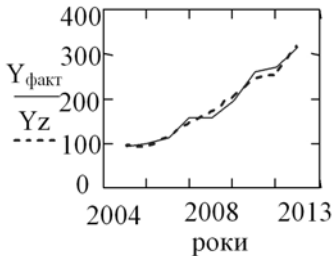


Рис. 3. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами (20)

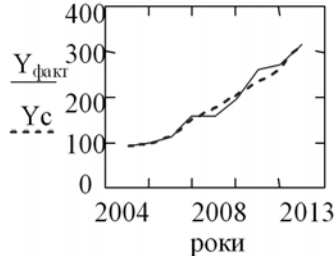


Рис. 4. Функція зі сталими коефіцієнтами (21)

Бачимо, що виробнича функція зі змінними коефіцієнтами краще наближує функцію, ніж зі сталими коефіцієнтами. Це підтверджують і значення середньоквадратичного відхилення. Для функції (20) середньоквадратичне відхилення $\sigma_3 = 0,047$, а для функції (21) — $\sigma_4 = 0,057$.

Висновки. Таким чином, в даній роботі ми стверджуємо, що, взагалі кажучи, виробничі функції зі змінними частинними коефіцієнтами еластичності дозволяють більш точно відновлювати взаємозв'язок між обсягом виробленої продукції та факторами, що впливають на нього. Крім того, враховуючи, що дивідіра другого роду — це коефіцієнт еластичності обсягу виробництва в залежності від факторів, які впливають на обсяг виробництва (коефіцієнт еластичності попиту в залежності від ціни) або еластичність заміни факторів, то доцільно виробничі функції будувати з використанням дивідіріального та мультигрального числень, як найбільш природно пов'язаних із досліджуваними економічними процесами.

Список використаних джерел:

1. Cobb C. W. A Theory of Production / C. W. Cobb, P. H. Douglas // American Economic Review. — 1928. — P. 139–165.
2. Гераськин М. И. Математическая экономика: теория производства и потребительского выбора : учеб. пособие / М. И. Гераськин. — Самара : Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2004. — 102 с.
3. Зацеркляний М. М. Основи економічної кібернетики : навч. посібник / М. М. Зацеркляний, О. Ф. Мельников. — Чернівці : ТОВ «Видавництво «Наші книги», 2008. — 392 с.
4. Артюх М. В. Виробнича функція зі змінними коефіцієнтами еластичності, побудована на основі даних Кобба-Дугласа / М. В. Артюх, О. М. Лит-

- вин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ» : зб. наук. праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків : НТУ «ХПІ», 2012. — № 27. — С. 124–129.
- Литвин О. М. Дивідіріальні та мультигральні числення : монографія / О. М. Литвин. — К. : Наук. думка, 2006. — 144 с.
 - Статистичний щорічник України (2008–2013 р.). — К. : Державний комітет статистики України, 2009–2013.
 - Праця України (2008–2013): Статистичний збірник.

In this paper the basic concept of dyvidirial and multyhral calculus, considered production function with variable coefficients of elasticity. Developed mathematical models of production functions to study agricultural economics of Ukraine.

Key words: *dyvidirial calculus, multyhral calculus, production function, elasticity coefficient, fixed assets, current assets.*

Отримано: 25.04.2016

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А. Я. Бомба, д-р, техн. наук, професор,
С. В. Ярошак, канд. техн. наук,
В. І. Бойцов

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕІЗОТЕРМІЧНОЇ БАГАТОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ В СИСТЕМІ ПАРАЛЕЛЬНИХ СВЕРДЛОВИН ЗА ТЕХНОЛОГІЮ ТЕРМОГРАВІТАЦІЙНОГО ДРЕНАЖУ

У роботі розвинуто методи комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу.

Ключові слова: *математичне моделювання, неізотермічна фільтрація термогравітаційний дренаж, квазіконформні відображення.*

Вступ. Тепловий вплив на пласт змінює основні фільтраційні параметри процесу: в'язкість флюїду, капілярні сили, реологічні властивості агентів, і т.п. [6]. Найбільш ефективними є технології нагнітання в пласт різних робочих агентів — теплоносіїв, з метою підтримки пластового тиску [1, 4–6]. При цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, покращується гідродинамічний зв'язок між ними [6, 7].

Однією із таких технологій є термогравітаційний дренаж, при застосуванні якої на висоті 4-6 метрів, одна над одною, буриться пара паралельних горизонтальних свердловин — нагнітальна та експлуатаційна. Проте в більшості випадків продуктивний пласт має неоднорідну будову, в результаті чого буріння лише однієї пари свердловин призводить до неконтрольованого виходу теплоносія за межі ділянки, що призводить до збільшення його витрат. Тому доцільним є буріння групи горизонтальних свердловин (рис. 1) [4].

У роботі розвинуто методи [2] комплексного аналізу математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу [7, 8]. На основі методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних крайових задач.

Загальна постановка задачі. Розглянемо задачу двофазної неізотермічної фільтрації при витісненні нафти теплоносієм (зокрема, водою) з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу. Вважається, що динамічні в'язкості фаз змінюється зі зміною температури, рух рідини — повільний та відбувається без фазових переходів.

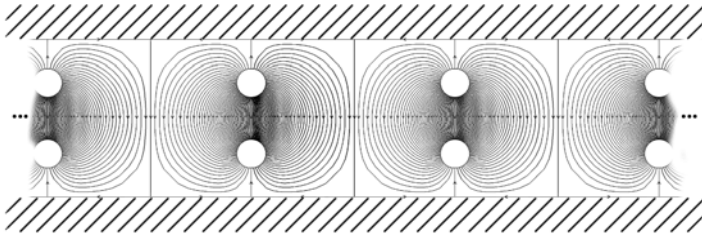


Рис. 1. Поперечний переріз пласта з групою паралельних свердловинам

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t)$, згідно з [1, 7, 9] представимо у вигляді:

$$\bar{v}_l = \frac{k\tilde{k}_l(s)}{\mu_l(T)} \text{grad}\varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div}\bar{v}_l = 0, \quad l = \overline{1, 2}, \quad s_1 + s_2 = 1,$$

де \bar{v}_l , $\mu_l(T)$ — вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості для l -тої фази, $T(x, y, t)$ — температура; $k(x, y)$ — коефіцієнт абсолютної проникності ґрунту; $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ — відносні фазові проникності ($s = s_2$); σ — коефіцієнт пористості ґрунту; $s_l(x, y, t)$ — на-

сиченість пористого середовища відповідною фазою в точці $(x, y) \in \tilde{G}_z$ у момент часу t (тут і надалі час t та інші величини вимірюються в одиницях СІ), \tilde{G}_z — область поперечного перерізу пласта (рис. 1). В зв'язку з існуючою симетрією області \tilde{G}_z , для спрощення викладок розглядатимемо елемент G_z ($z = x + iy$), що містить половину нагнітальної та половину експлуатаційної свердловини (рис. 2).

З урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s, T) \operatorname{grad} \varphi, \quad (1)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} f(s, T) = 0, \quad (2)$$

$$\text{де } f(s, T) = \frac{\mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T) \tilde{k}_1(s) + \mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1(T)} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T)}.$$

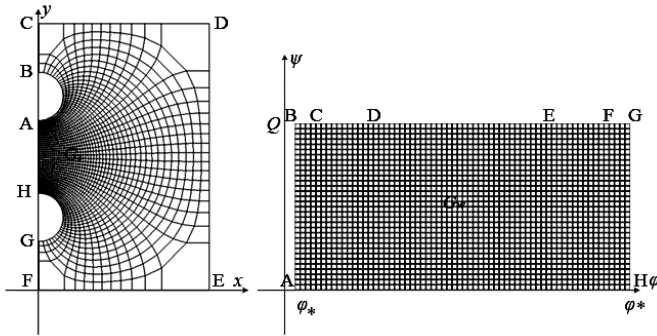


Рис. 2. Елемент поперечного перерізу пласта та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Вважаємо, що на контурах нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо: φ_* та φ^*), а інші ділянки границі області G_z є екіпотенціальними лініями та лініями течії, вздовж яких, мають місце рівності

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{CD} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{DE} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{EF} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{FG} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{HA} = 0, \quad \text{де } HA = \{z : x = 0, a + 2r \leq y \leq h - b - 2r\}, \quad h = |ED|,$$

$$BC = \{z : x = 0, h - b \leq y \leq h\}, \quad CD = \{z : y = h, 0 \leq x \leq d\}, \quad DE = \{z : x = d,$$

$0 \leq y \leq h\}$, $EF = \{z: y = 0, 0 \leq x \leq d\}$, $d = |EF|$, $FG = \{z: x = 0, 0 \leq y \leq a\}$,
 $a = |GF|$, $b = |BC|$, $L_* = \{z: x = r \cdot \cos(\theta), y = h - b + r \cdot (\sin(\theta) - 1),$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, $L^* = \{z: x = r \cdot \cos(\theta), y = a + r \cdot (\sin(\theta) + 1), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$;
 r — радіус свердловин. Початковий розподіл насиченості в пласті і її
 значення на нагнітальній свердловині позначимо відповідно через
 $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$ та $s|_{L_*} = s_*$.

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, прийmemo однотемпературну модель [6], згідно з якою є миттєвою передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння:

$$\frac{\partial C(s)T}{\partial t} + \text{div}[(c_1 \rho_1 \vec{v}_1 + c_2 \rho_2 \vec{v}_2)T] = 0, \quad (3)$$

де $C(s) = \sigma \rho_1 c_1 (1-s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1-\sigma) \rho_3 c_3$ — об'ємна теплоємність пористого середовища, c_l , ρ_l ($l = \overline{1,3}$) — питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта. Використовуючи формули для визначення швидкостей руху нафти та води [3]: $\vec{v}_1 = (1-f(s,T)) \cdot \vec{v}$, $\vec{v}_2 = f(s,T) \cdot \vec{v}$ і співвідношення (1), рівняння (3) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \tilde{T}(s)}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \tilde{f}(s, T) = 0, \quad (4)$$

де $\tilde{T}(s) = C(s) \cdot T = (\tilde{\alpha}s + \tilde{\beta}) \cdot T$, $\tilde{f}(s, T) = (\tilde{\alpha}f(s, T) + c_1 \rho_1) \cdot T$, $\tilde{\alpha} = \rho_2 c_2 - \rho_1 c_1$, $\tilde{\beta} = \rho_1 c_1 + (\sigma^{-1} - 1) \rho_3 c_3$. Як бачимо, спрощений запис рівняння (4) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (2) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою для використання розроблених в роботах [2, 9] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатофазної фільтрації.

Для відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл в початковий момент часу $T(x, y, 0) = \tilde{T}(x, y)$ та значення температури на контурах області:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{CD} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{DE} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{EF} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{FG} = 0, \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{AH} = 0, T|_{L_*} = T_*. \quad (5)$$

Метод комплексного аналізу. Аналогічно до [2], ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у даний момент часу)

полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області

G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу G_ω :

$$\bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L'} = \varphi^*, \quad \psi|_{AH} = 0, \quad \psi|_{BC \cup CD \cup DE \cup EF \cup FG} = Q, \quad (6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_*} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right), \quad T|_{L_*} = T_*, \quad T|_{t=0} = \tilde{T}(x, y), \quad (8)$$

де $v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}$, $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad 0 < \psi < Q\}$,

$Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy$ — невідома витрата.

Обернуто до (6) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок, рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (9)$$

$$x(\varphi, Q) = 0, \quad b \leq x(\varphi, Q) \leq h, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi_C],$$

$$y(\varphi, Q) = h, \quad 0 \leq x(\varphi, Q) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_C, \varphi_D],$$

$$x(\varphi, Q) = d, \quad 0 \leq y(\varphi, Q) \leq h, \quad \varphi \in [\varphi_D, \varphi_E],$$

$$y(\varphi, Q) = 0, \quad 0 \leq x(\varphi, Q) \leq d, \quad \varphi \in [\varphi_E, \varphi_F],$$

$$x(\varphi, Q) = 0, \quad 0 \leq y(\varphi, Q) \leq a, \quad \varphi \in [\varphi_F, \varphi_G],$$

$$x(\varphi, 0) = 0, \quad a + 2r \leq y(\varphi, 0) \leq h - b - 2r, \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*],$$

$$x(\varphi_*, \psi) = r \cdot \cos(\theta), \quad y(\varphi_*, \psi) = h - b + r \cdot (\sin(\theta) - 1),$$

$$x(\varphi^*, \psi) = r \cdot \cos(\theta), \quad y(\varphi^*, \psi) = a + r \cdot (\sin(\theta) + 1),$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \psi \in [0, Q], \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (11)$$

Використавши підхід запропонований в [2, 9] задачі для відшукання насиченості та температури (7)–(8) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (12)$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (13)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [0, Q],$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = - \frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \quad (14)$$

$$\tilde{T}(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) \cdot T_*, \quad \psi \in [0, Q],$$

$$\tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \tilde{\beta}) \cdot \tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \psi \in [0, Q], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (15)$$

де рівняння (12) та (14) є фактично просторово-одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Алгоритм розв'язування відповідної крайової задачі представимо у вигляді наступної послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури; перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (12) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (14) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму [8] при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму.

Різницевий аналог задачі та алгоритм її розв'язання будемо аналогічно як в роботі [7].

Числові експерименти. Проведемо числові розрахунки при наступних значеннях параметрів моделі: $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\rho_1 = 800$, $c_1 = 1880$, $\rho_2 = 1000$, $c_2 = 4200$, $\rho_3 = 2200$, $c_3 = 1800$, $\sigma = 0.2$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $s_* = 1$, $s^0(x, y) = 0$, $T_* = 90$, $T^0(x, y) = 30$, $\tau = 0.01$, $n = 38$, $m = 35$, $k_* = 1$, $\tilde{k}_1(s) = (1-s)^2$, $\tilde{k}_2(s) = s^2$, що описують процес витіснення.

На рисунку (рис. 3) представлені поля насиченості при витісненні нафти водою у випадках ізотермічного (а, в) та неізотермічного (б, г), відповідно, процесів фільтрації в момент часу $t = 1.260$ (а, б), $t = 1.260$ (в, г) та відстані $|HA| = 5$.

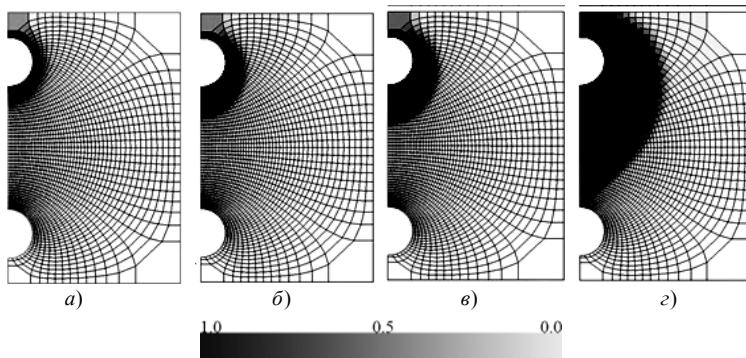


Рис. 3. Поля насиченості водою при ізотермічному (а, в) та неізотермічному (б, г) процесах фільтрації

За підрахунками (згідно формул з [3]) об'єм нафти, яка знаходилась у цих елементах симетрії до початку витіснення — $V_n = 19.171$, а об'єм добутої нафти та її залишок у модельному пласті за час протікання процесу, відповідно, становить: при $t = 1.260$: $V_{вн} = 0.132$, $V_{зл} = 19.038$ (у випадку ізотермічної фільтрації), $V_{вн} = 0.401$, $V_{зл} = 18.770$ (у випадку неізотермічної фільтрації); при $t = 6.610$: $V_{вн} = 0.446$, $V_{зл} = 18.725$ (у випадку ізотермічної фільтрації), $V_{вн} = 1.337$, $V_{зл} = 17.834$ (у випадку неізотермічної фільтрації).

Висновок. Комплексний підхід до математичного моделювання ізотермічної багатозфазної фільтрації узагальнено на випадок витіснення нафти теплоносієм з використанням групи паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу. Розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних крайових задач. Цей алгоритм є підґрунтям для розв'язання більш складної задачі, а саме: задачі оцінки динаміки зміни зон прогріву пласта паром, коли мають місце фазові переходи породжені охолодженням та конденсацією пару.

Список використаних джерел:

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. — 416 с.
2. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. — Рівне : НУВГП, 2013. — 415 с.

3. Бомба А. Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А.М. Сінчук, С. В. Ярошак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2012. — Вип. 6. — С. 11–26.
4. Зарипов А. Т. Технико-экономическая оценка методов добычи природных битумов для условий месторождений Республики Татарстан / А. Т. Зарипов. — М. : Коллектив авторов, 2006. — С. 64–66.
5. Николин И. В. Методы разработки тяжелых нефтей и природных битумов / И. В. Николин. — М. : Технологическая компания Шлюмберже, 2007. — 68 с.
6. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта / Э. Б. Чекалюк. — М. : Недра, 1965. — 238 с.
7. Ярошак С. В. Математичне моделювання процесу розробки родовищ нафти з використанням термогравітаційного дренажу / С. В. Ярошак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Рівне : РДГУ, 2014. — Вип. 11 (20). — С. 115–127.
8. Deutsch C. V. Guide to SAGD (Steam Assisted Gravity Drainage) Reservoir Characterization Using Geostatistics / C. V. Deutsch, J. A. McLennan // Centre for Computational Geostatistics (CCG). — 2005. Guidebook Series, 3. — 125 p.
9. Bomba A. Ya. Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions / A. Ya. Bomba, S. V. Yaroshak // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 184, № 1. — P. 56–69.

In this article we developed a complex analysis of the developed methods of mathematical modelling of isothermal multiphase flow in the case of oil displacement using a group of parallel wells by steam assisted gravity drainage technology.

Key words: *mathematical modelling, non-isothermal filtration, quasi-conformal mapping.*

Отримано: 08.04.2016

УДК 681.5.015–681.51.015:33.338.2

Н. О. Вацик, канд. економ. наук,
Л. І. Чернобай, канд. економ. наук,
В. І. Мороз, д-р техн. наук, професор

Національний університет «Львівська політехніка», Львів

ВИБІР ОПТИМАЛЬНИХ ПЛАНОВИХ ПАРАМЕТРІВ ЕКСПОРТНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СУБ'ЄКТА ГОСПОДАРЮВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ СТАТИСТИЧНИХ ТА ІНТЕГРАЛЬНИХ МЕТОДІВ

У статті запропоновано розв'язання задачі оптимізації планових параметрів експортної діяльності з використанням комплексного підходу, який включає статистичні методи та динамічні моделі. Для знаходження точки оптимального співвідношення витрат на експортну діяльність та рівня ефективності такої діяльності використано ідентифікацію об'єкта господарювання диференціальним рівнянням другого порядку, яке розв'язується рекурентною схемою на основі z -перетворення.

Ключові слова: експортна діяльність, ідентифікація системи, інтегральні методи, планові параметри, витрати, статистичні методи, z -перетворення.

Вступ. Здійснення експортної діяльності суб'єкта господарювання можливе через вирішення менеджментом підприємства низки завдань, серед яких — ефективне поточне планування витрат на кожній стадії залучення до зовнішнього ринку.

Одним з найважливіших етапів технології поточного планування витрат на експортну діяльність є вибір, формування і затвердження системи планових параметрів. Така система охоплює ключові види витрат на експортну діяльність відповідно до розробленої матриці [1, с. 14–26] та рівень ефективності експортної діяльності та описується соціально-економічними і техніко-технологічними характеристиками. До основних економічних показників експортної діяльності належать: витрати на експортну операцію; витрати, які пов'язані з післяреалізаційним обслуговуванням експортної продукції; прибуток від експортної діяльності; рівень ефективності експортної діяльності; обсяг виробництва та реалізації експортної продукції тощо. Соціальні показники експортної діяльності включають витрати на утримання експортного підрозділу, торгових представників, філій та дочірніх компаній тощо. Основні техніко-технологічні показники експортної діяльності охоплюють витрати, пов'язані з винахідництвом та раціоналізацією; витрати на утримання засобів праці та рівень ефективності їх використання [2].

Планування експортної діяльності може базуватися як на експертних оцінках, так і на математичних методах прогнозування, а вдале по-

еднання різних методів є фактором підвищення ефективності капіталовкладень. Якщо метод експертних оцінок має суб'єктивний характер, то математичні методи дають змогу внести фактор об'єктивності в процес прийняття рішень в економічній діяльності. Тому планування з використанням методів математичного прогнозу є важливим і актуальним.

У процесі аналізу економічної діяльності підприємств висловлено гіпотезу про можливість її опису з використанням комплексного підходу, який включає застосування статистичних методів та опису поведінки динамічною моделлю, а саме — динамічною ланкою другого порядку. Перевірка цієї гіпотези з метою формування оптимального співвідношення між плановими показниками експортної діяльності підприємства є метою даної статті.

Аналіз останніх досліджень. Застосування математичних методів для аналізу економічних систем є доволі поширеною практикою. Зокрема, широко використовуються статистичні методи дослідження, а саме: дискримінантний аналіз, кореляційні матриці, кореляційно-регресійний аналіз, функції описової статистики тощо. Серед авторів, які займалися питаннями дослідження можливостей застосування статистичних методів в економіці в цілому та при плануванні й оцінюванні витрат зокрема доцільно виділити праці В. Боровікова [3], С. Васена [9], Ф. Гарпа [6], Д. Лінда [7], В. Маршала [9], С. Мхітаряна [4], Г. Ньюенхіса [8], Р. Фецура [5] та ін.

Основними математичними методами для ідентифікації динамічних систем є класичні способи теорії автоматичного керування [11, 12]:

- ідентифікація за часовими характеристиками, при цьому можливі варіанти за видами вхідних збурень:
 - стандартизоване збурення (стрибокподібний сигнал у випадку аналізу за перехідною характеристикою, синусоїда, лінійно наростаючий сигнал тощо);
 - довільний сигнал;
- ідентифікація за частотними характеристиками системи;
- ідентифікації за стохастичними характеристиками.

Наприклад, аналіз кризового стану російської економіки здійснено з використанням динамічних моделей [10].

У випадку економічних систем потрібно у процесі ідентифікації враховувати дискретний характер даних в економіці (наприклад, щомісячні чи поквартальні дані витрат), що викликає потребу у відповідних математичних методах для дискретних систем [11–13].

У статті запропоновано застосування комплексного підходу до ідентифікування економічної системи з використанням статистичних методів та динамічної моделі.

Задачею досліджень є ідентифікування економічної системи як динамічної ланки за умови оптимального співвідношення планових параметрів на основі використання інтегральних методів.

Виклад основного матеріалу. Сукупність статистичних методів реалізується через послідовне виконання трьох підетапів з використанням програмного забезпечення Statistica, а саме:

- аналізування результатів дискримінантного аналізу, яке відбувається з використанням масиву вихідної інформації, для визначення змінних, що ввійшли у дискримінантну модель, та ідентифікування впливу цих змінних на рівень дискримінації; визначення змінних, що не ввійшли у дискримінантну модель;
- дослідження щільності взаємозв'язку між обсягами витрат на експортну діяльність та рівнем ефективності експортної діяльності; побудову кореляційної матриці, у якій наводяться коефіцієнти парної кореляції, що дають змогу ідентифікувати ті витрати на експортну діяльність, вплив яких на формування ефективності експортної діяльності є найсуттєвішим. Також доцільним на даному підетапі є представлення залежності рівня ефективності експортної діяльності від ключових витрат такої діяльності в усіх можливих комбінаціях;
- аналізування стадій залучення до зовнішнього ринку, притаманних певному суб'єкту господарювання, за допомогою сформованих масивів даних щодо витрат на експортну діяльність та рівня ефективності такої діяльності для кожної з стадій, з метою визначення основних параметрів описової статистики, які включають середнє значення, дисперсію та інтервальні оцінки для заданого рівня вірогідності, а також для побудови функції ефективності експортної діяльності від ключових витрат на експортну діяльність у можливих комбінаціях.

Слід зазначити, що вибір релевантної кореляційної залежності відбувається на підставі її оцінювання за певними критеріями адекватності. Вихідні дані для подальших розрахунків містять інформацію щодо величини витрат та рівня ефективності експортної діяльності з урахуванням стадій залучення ПАТ «ДЗАК» до зовнішнього ринку і наведені у табл. 1. Для аналізування результатів дискримінантного аналізу (підетап 1) використовувалась матриця виникнення витрат на експортну діяльність за стадіями залучення до зовнішнього ринку [14, с. 832–844].

Таблиця 1

*Зведена таблиця рівня ефективності експортної діяльності з урахуванням стадій залучення ПАТ «ДЗАК» до зовнішнього ринку**

Роки (№ кварталу)	Стадія залучення до зовнішнього ринку	Згруповані витрати на експортну діяльність	Ефективність експортної діяльності, коефіцієнт
2003 (I)	1	1 258,29	-0,1200
2003 (II)	1	771,40	-0,0900
2003 (III)	1	769,13	-0,0800
2003 (IV)	1	767,64	-0,0600
2004 (I)	1	2 577,20	-0,0040

Продовження таблиці 1

2004 (II)	1	2 378,63	-0,0040
2004 (III)	1	2 134,61	-0,0030
2004 (IV)	1	1 428,39	-0,0020
2005 (I)	2	6 631,50	0,0200
2005 (II)	2	7 022,95	0,0200
2005 (III)	2	3 312,92	0,0100
2005 (IV)	2	2 061,79	0,0100
2006 (I)	2	8 107,87	0,0400
2006 (II)	2	9 257,88	0,0300
2006 (III)	2	10 087,82	0,0300
2006 (IV)	2	5 614,07	0,0200
2007 (I)	3	37 318,69	0,0800
2007 (II)	3	29 298,79	0,0700
2007 (III)	3	15 330,45	0,0500
2007 (IV)	3	19 292,09	0,0400
2008 (I)	3	42 982,45	0,1100
2008 (II)	3	17 072,94	0,0900
2008 (III)	3	14 866,22	0,0700
2008 (IV)	3	30 400,70	0,0600
2009 (I)	4	15 742,20	0,2100
2009 (II)	4	6 278,24	0,1800
2009 (III)	4	10 381,57	0,1400
2009 (IV)	4	1 659,88	0,1200
2010 (I)	4	5 684,44	-0,0012
2010 (II)	4	5 868,05	-0,0010
2010 (III)	4	5 140,24	-0,0008
2010 (IV)	4	1 492,07	-0,0007
2011 (I)	4	8 818,52	0,0007
2011(II)	4	7 775,32	0,0006
2011 (III)	4	7 217,45	0,0005
2011 (IV)	4	6 321,41	0,0004

*Примітка: сформовано авторами з використанням програмного забезпечення MS Excel.

Умовні позначення: 1 — стадія початкового залучення; 2 — стадія нарощення експортної діяльності; 3 — стадія сформованості експортної діяльності; 4 — стадія скорочення експортної діяльності.

Початковою вихідною інформацією є дані для проведення дискримінантного аналізу, а саме: витрати, що використовуються для побудови дискримінантних функцій (функцій класифікації) з урахуванням стадії залучення до зовнішнього ринку.

На підставі інформації, представленої у табл. 1, і результатів дискримінантного аналізу одержуємо інформацію щодо змінних, які ввійшли у дискримінантну модель, а саме: Var_1 — витрати на вироб-

ництво експортної продукції; Var_{15} — витрати на утримання експортного відділу, торгових представників, філій та дочірніх компаній; Var_{17} — витрати на сертифікацію експортної продукції; Var_{13} — витрати на розрахунково-касове обслуговування, вплив яких є несуттєвим, тому дані витрати не враховуватимуться у подальших розрахунках; Var_{12} — витрати на транспортування експортної продукції; Var_{11} — витрати на реєстрацію експортної діяльності, підготовку, оформлення та укладання зовнішньоторговельного контракту.

Не менш важливим є визначення змінних, що не увійшли в дискримінантну модель, та їх характеристик, а саме: Var_8 — витрати на підготовку експортної продукції до відвантаження; Var_{10} — витрати на розробку експортного плану та Var_{21} — ефективність експортної діяльності.

Наступним кроком є дослідження щільності взаємозв'язку між обсягами витрат на експортну діяльність та рівнем ефективності експортної діяльності з метою визначення найбільш суттєвих витрат серед виокремлених, тобто тих витрат на експортну діяльність, що були включені у дискримінантну модель. Встановлення щільності взаємозв'язку є можливим шляхом побудови кореляційної матриці за допомогою модуля Basic Statistics (основної статистики) програмного забезпечення Statistica.

У кореляційній матриці наводяться середні значення змінних з урахуванням усіх стадій залучення до зовнішнього ринку (Means); стандартне відхилення (середнє квадратичне відхилення — Standard deviation), що показує розсіювання індивідуальних значень вищенаведених показників від їх середньої величини; та коефіцієнти парної кореляції, що дають змогу визначити як корелюють обрані змінні (витрати на експортну діяльність) та рівень ефективності експортної діяльності. Застосування коефіцієнтів парної кореляції при плануванні витрат на експортну діяльність є доречним, оскільки їх використання дозволяє зменшити розмірність витрат на експортну діяльність та визначити лінійну статистичну залежність між величинами. Зменшення розмірності є можливим за рахунок наявності високих коефіцієнтів кореляції, введення яких у модель є недоцільним з огляду на їх мультиколінеарність за умови наявності у матриці значень, що є більшими за 0,8.

На підставі наведеної вище інформації можна зробити висновок про існування декількох комбінацій кореляції змінних та рівня ефективності на кожній зі стадій залучення до зовнішнього ринку, притаманних ПАТ «ДЗАК», а саме:

$$Var_4 - Var_{11} - Var_{21};$$

$$Var_{15} - Var_{12} - Var_{11} - Var_{21};$$

$$Var_{17} - Var_{12} - Var_{11};$$

$$Var_{12} - Var_{15} - Var_{17};$$

$$\begin{aligned} &Var_{11} - Var_4 - Var_{15} - Var_{17} - Var_{21}; \\ &Var_{21} - Var_4 - Var_{15} - Var_{11}. \end{aligned}$$

З вищенаведених комбінацій видно, що з рівнем ефективності експортної діяльності корелюють лише змінні Var_4 , Var_{15} , Var_{11} , що відповідають витратам на виробництво експортної продукції; витратам на утримання експортного відділу, торгових представників, філій та дочірніх компаній; а також витратам на реєстрацію експортної діяльності, підготовку, оформлення та укладання зовнішньоторговельних контрактів. Усі інші змінні (Var_{12} , Var_{17}) не враховуватимуться у подальших розрахунках щодо визначення кореляційної залежності рівня ефективності експортної діяльності від витрат такої діяльності, оскільки характеризуються відсутністю щільного зв'язку з рівнем ефективності експортної діяльності.

Таким чином, остаточні комбінації кореляції витрат на експортну діяльність та рівнем ефективності такої діяльності, які будуть використовуватись для подальших розрахунків, включають:

$$\begin{aligned} &Var_4 - Var_{15} - Var_{21}; \\ &Var_4 - Var_{11} - Var_{21}; \\ &Var_{15} - Var_{11} - Var_{21}. \end{aligned}$$

Виявлені ймовірні комбінації кореляції змінних та рівня ефективності представлені за допомогою програмного забезпечення Statistica шляхом побудови діаграм розсіювання (Scatterplot), що відображають у тривимірному просторі співвідношення трьох змінних за абсолютними їх значеннями. Економічна інтерпретація побудованих діаграм полягає у виявленні взаємозв'язків між двома ключовими видами витрат на експортну діяльність та рівнем ефективності такої діяльності з вищенаведених комбінацій з метою ідентифікування мінімального / максимального рівня ефективності з досліджуваної сукупності вихідних даних як перетину між відповідними числовими даними. Застосування діаграм розсіювання сприяє формуванню об'єктивних висновків щодо наслідків змін рівня ефективності експортної діяльності залежно від зміни двох ключових видів витрат на експортну діяльність та виявлення лінійного зв'язку між досліджуваними змінними.

Перша комбінація описує співвідношення витрат на виробництво експортної продукції (вісь x), витрат на утримання експортного відділу, торгових представників, філій та дочірніх компаній (вісь y) та рівня ефективності експортної діяльності (вісь z). Кількість точок на діаграмі тотожна кількості випадків з урахуванням стадій залучення до зовнішнього ринку ПАТ «ДЗАК», а кожна точка відображає співвідношення цих показників за абсолютними їх значеннями (рис. 1).

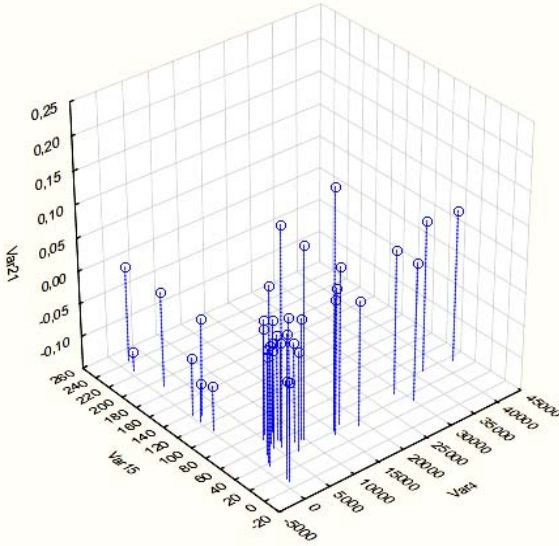


Рис. 1. Вікно результатів основної статистики щодо побудови діаграм розсіювання ПАТ «ДЗАК» з урахуванням стадій залучення до зовнішнього ринку

***Примітка:** сформовано авторами з використанням програмного забезпечення Statistica.

З вищенаведеної діаграми можна зробити висновок, що мінімальна точка є характерною для першого випадку, який відображає стадію початкового залучення ПАТ «ДЗАК» до зовнішнього ринку, з дотриманням наступного співвідношення змінних згідно з таблицями вихідних даних, а саме: $x = 734,49$ тис. грн.; $y = 226,64$ тис. грн.; $z = -0,12$. Максимальна точка досягається за умови такого співвідношення: $x = 15087,44$ тис. грн.; $y = 42,18$ тис. грн.; $z = 0,21$, притаманного для стадії скорочення експортної діяльності підприємства (25 випадок). Отже, для ПАТ «ДЗАК» з 1 по 25 випадок включно рівень ефективності експортної діяльності зростає, що відповідно свідчить про оптимізацію певних складових витрат на експортну операцію; сукупність випадків (26-36) свідчить про спад рівня ефективності експортної діяльності та перехід на стадію скорочення експортної діяльності підприємства.

Аналогічно проводиться аналіз двох наступних комбінацій. Максимальна точка співвідношення витрат на виробництво експортної продукції (вісь x), витрат на реєстрацію експортної діяльності, підготовку, оформлення та укладання ЗТК (вісь y) та рівня ефективності експортної діяльності (вісь z) досягається за умови такого співвідношення: $x = 15087,44$ тис. грн.; $y = 25,52$ тис. грн.; $z = 0,21$, притаманного для

стадії скорочення експортної діяльності підприємства (25 випадок). Для співвідношення витрат на утримання експортного відділу, торгових представників, філій та дочірніх компаній (вісь x), витрат на реєстрацію експортної діяльності, підготовку, оформлення та укладання ЗТК (вісь y) та рівня ефективності експортної діяльності (вісь z) максимальна точка досягається за умови такого співвідношення: $x = 42,18$ тис. грн.; $y = 25,52$ тис. грн.; $z = 0,21$, притаманного для стадії скорочення експортної діяльності підприємства (25 випадок).

Функції ефективності експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» будувались для кожної стадії залучення до зовнішнього ринку.

З метою ідентифікації першої стадії залучення до зовнішнього ринку з огляду на повільне зростання обсягів реалізації експортної продукції у грошовому вираженні для аналізування ключових показників експортної діяльності та виявлення залежності між ними слід використати лінійну модель виду:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_mx_m + \varepsilon, \quad (1)$$

де y — рівень ефективності експортної діяльності; b_0, b_1, b_2, b_m — невідомі параметри; x_1, x_2, x_m — ключові витрати на експортну діяльність на певній стадії залучення до зовнішнього ринку; ε — значення випадкової величини.

Результати оцінювання лінійної регресії для стадії початкового залучення ПАТ «ДЗАК» до зовнішнього ринку за фазами виробничого циклу наведені у табл. 2.

Таблиця 2

*Результати оцінювання лінійної регресії для стадії початкового залучення ПАТ «ДЗАК» до зовнішнього ринку за фазами виробничого циклу**

№ з/п	Одержані рівняння регресії	Коефіцієнт детермінації	Критерій Фішера	Рівень вірогідності	Критерій Дарбіна-Уотсона (DW)
			Фрозр		
1.	$y = -0,0744 + 6,7 \cdot 10^{-5}x_4 - 0,0003x_{15}$	0,9524	24,41	0,02	1,077
2.	$y = 0,0021 + 0,000021x_4 - 0,0021x_{11}$	0,9947	232,17	0,01	2,617
3.	$y = 0,0322 + 0,0001x_{15} - 0,0029x_{11}$	0,9897	119,20	0,01	2,446

*Примітка: сформовано авторами з використанням програмного забезпечення Statistica.

Умовні позначення: y — рівень ефективності експортної діяльності; x_4 — витрати на виробництво експортної продукції; x_{11} — витрати на реєстрацію експортної діяльності, підготовку, оформлення та укладання ЗТК; x_{15} — витрати на утримання експортного відділу, торгових представників, філій, дочірніх компаній.

З вищенаведеної таблиці можна зробити наступні висновки:

- оцінювання побудованих кореляційних залежностей у трьох випадках за коефіцієнтом детермінації та рівнем вірогідності свідчить про точність та значущість трьох лінійних моделей;
- розрахований коефіцієнт критерія Дарбіна-Уотсона свідчить про низьку автокореляцію залишків, придатність для прогнозування та високий рівень адекватності для ПАТ «ДЗАК» на стадії початкового залучення до зовнішнього ринку другої та третьої функціональної залежності. Однак, для прийняття оптимальних управлінських рішень слід вибрати одну залежність з урахуванням найвищого коефіцієнта детермінації, що притаманний для другої функціональної залежності.

Отже, для початкової стадії залучення ПАТ «ДЗАК» до зовнішнього ринку притаманним є наступна функціональна залежність рівня ефективності експортної діяльності від витрат такої діяльності:

$$y = 0,0021 + 0,000021x_4 - 0,0021x_{11}. \quad (2)$$

З метою ідентифікації другої стадії залучення до зовнішнього ринку з огляду на зростання обсягів реалізації експортної продукції у грошовому вираженні наростаючими темпами для аналізування ключових показників експортної діяльності та виявлення залежності між ними слід використати квадратичну модель.

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \dots + b_mx_m + b_mx_m^2, \quad (3)$$

де y — рівень ефективності експортної діяльності; b_0, b_1, b_2, b_m — невідомі параметри; x_1, x_2, x_m — ключові витрати на експортну діяльність.

Результати оцінювання нелінійної регресії для стадії нарощення експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» за фазами виробничого циклу наведені у табл. 3.

Таблиця 3

*Результати оцінювання нелінійної регресії для стадії нарощення експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» за фазами виробничого циклу**

№ з/п	Одержані рівняння регресії	Коефіцієнт детермінації	Критерій Фішера	Рівень вірогідності	Критерій Дарбіна-Уотсона (DW)
			Фрозр		
1.	$y = 0,1205 + 2,1 \cdot 10^{-5}x_4 - 0,037x_{15} - 2,9 \cdot 10^{-5}x_4^2 + 1,1 \cdot 10^{-5}x_4x_{15} + 2 \cdot 10^{-5}x_{15}^2$	0,8747	8,15	0,03	1,977
2.	$y = 0,1208 + 2 \cdot 10^{-5}x_4 - 0,0125x_{11} - 2,9 \cdot 10^{-5}x_4^2 + 3,8 \cdot 10^{-5}x_4x_{11} + 0,0002x_{11}^2$	0,8746	8,13	0,03	1,617

*Примітка: сформовано авторами з використанням програмного забезпечення Statistica.

Одержані результати двох перших кореляційних залежностей за першими трьома критеріями свідчать про точність та значущість побудованих квадратичних моделей. Однак, для прийняття оптимальних управлінських рішень на практиці слід застосовувати першу кореляційну залежність, виходячи із наближення критерія Дарбіна-Уотсона до 2.

Отже, для стадії нарощення експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» притаманною є така функціональна залежність рівня ефективності експортної діяльності від витрат такої діяльності:

$$y = 0,1205 + 0,000021x_4 - 0,037x_{15} - 0,000029x_4^2 + 0,000011x_4x_{15} + 0,00002x_{15}^2 \quad (4)$$

Третя стадія залучення до зовнішнього ринку характеризується піком експортної діяльності і передбачає стабілізацію основних показників такої діяльності, тому логічним для виявлення залежності рівня ефективності експортної діяльності від ключових витрат такої діяльності з урахуванням трьох комбінацій слід застосовувати лінійну залежність.

Результати оцінювання лінійної регресії для стадії сформованості експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» за фазами виробничого циклу наведені у табл. 4.

Таблиця 4

*Результати оцінювання лінійної регресії для стадії сформованості експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» за фазами виробничого циклу **

№ з/п	Одержані рівняння регресії	Коефіцієнт детермінації	Критерій Фішера	Рівень вірогідності	Критерій Дарбіна-Уотсона (DW)
			Фроз		
1.	$y = 0,0219 + 0,000013x_4 - 0,0011x_{15}$	0,6694	2,03	0,23	0,8475
2.	$y = 0,0219 + 0,000013x_4 - 0,0038x_{11}$	0,6689	2,02	0,23	0,8476
3.	$y = 0,0037 + 0,8219x_{15} - 2,7351x_{11}$	0,8432	6,15	0,04	1,3086

*Примітка: сформовано авторами з використанням програмного забезпечення Statistica.

З вищенаведеної табл. слід зробити наступний висновок: результати оцінювання двох перших побудованих кореляційних залежностей свідчать про недоцільність їх використання на практиці. Для третьої залежності виконується необхідне співвідношення і, отже, побудована лінійна залежність є придатною для прогнозування та адекватною для використання.

Отже, для стадії сформованості експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» притаманною є така кореляційна залежність рівня ефективності експортної діяльності від витрат:

$$y = 0,0037 + 0,8219x_{15} - 2,7351x_{11}. \quad (5)$$

Для стадії скорочення експортної діяльності притаманним є застосування квадратичних моделей з огляду на швидке скорочення обсягів реалізації експортної продукції. Результати оцінювання квадратичної регресії для стадії скорочення експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» за фазами виробничого циклу наведені у табл. 5.

Таблиця 5

*Результати оцінювання нелінійної регресії для стадії скорочення експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» за фазами виробничого циклу **

№ з/п	Одержані рівняння регресії	Коефіцієнт детермінації	Критерій Фішера	Рівень вірогідності	Критерій Дарбіна- Уотсона (DW)
			Фрозр		
1.	$y = -0,0152 - 0,00005x_4 + 0,0093x_{15} + 0,000026x_4^2 + 0,000035x_4x_{15} - 0,0001x_{15}^2$	0,7757	5,14	0,02	1,997
2.	$y = -0,076 + 0,000046x_4 + 0,0108x_{11} + 0,000036x_4^2 - 0,000024x_4x_{11} + 0,000041x_{11}^2$	0,6736	6,11	0,02	0,804
3.	$y = -0,0387 + 0,0012x_{15} + 0,0186x_{11} - 0,0003x_{15}^2 + 0,0011x_{15}x_{11} - 0,0017x_{11}^2$	0,3412	2,03	0,19	0,619

*Примітка: сформовано авторами з використанням програмного забезпечення Statistica.

Виходячи з одержаних результатів на стадії скорочення експортної діяльності ПАТ «ДЗАК» потрібно застосовувати першу кореляційну залежність з огляду на найвищий коефіцієнт детермінації та наближеність критерія Дарбіна-Уотсона до 2, а саме:

$$y = -0,0152 - 0,00005x_4 + 0,0093x_{15} + 0,000026x_4^2 + 0,000035x_4x_{15} - 0,0001x_{15}^2. \quad (6)$$

У той же час розв'язання задачі знаходження оптимального співвідношення планових параметрів можна звести до задачі опису підприємства як динамічної ланки, що є традиційним у теорії автоматичного керування. Для перевірки даної гіпотези прийнято в першому наближенні, що для підприємства достатнім є опис динамічною ланкою другого порядку (диференціальним рівнянням другого порядку). У такому випадку потрібно здійснити ідентифікацію об'єкта господа-

рювання як динамічної ланки, що може бути реалізовано за допомогою відомих методів теорії автоматичного керування.

Використання оптимізаційних функцій для реалізації процедури ідентифікації динамічних систем є достатньо ресурсоємною задачею, прискорити розв'язання якої можна за допомогою застосування ефективних методів числового моделювання (у випадку даної задачі — знаходження числового розв'язку диференціального рівняння другого порядку). Крім потреби в методах швидкісного моделювання потрібно відзначити ще одну особливість даної задачі — усі дані стосовно вхідних і вихідних величин є дискретними і рівномірно розподіленими в часі (щоквартальні дані значень витрат і рентабельності). Сукупність згаданих факторів для ефективного розв'язування поставленої задачі спонукає до застосування інтегральних методів, переваги яких відомі [15], зокрема, інтегрального перетворення для дискретних систем, відомого як z -перетворення [16].

На першому етапі досліджень диференціальне рівняння другого порядку з використанням відображення за Лапласом зводиться до еквівалентної передатної функції, якою запропоновано описати динаміку об'єкта господарювання:

$$a_2 \frac{d^2 r}{dt^2} + a_1 \frac{dr}{dt} + a_0 r = B \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (7)$$

де a_i — коефіцієнти диференціального рівняння; r — рентабельність підприємства; B — витрати на діяльність підприємства.

Застосування z -перетворення для розрахунку динаміки системи дає можливість отримати прості та водночас ефективні моделювальні рекурентні рівняння на основі методі відображення нулів та полюсів [17, 19]. Основною ідеєю цього методу є відповідність відображень за Лапласом в z -область за допомогою процедури дискретизації (відображення в дискретну область позначені верхнім індексом «зірочка»):

$$\prod_{i=1}^n (s - R_i) \xrightarrow{\text{дискретизація}} \prod_{i=1}^n (z - R_i^*), \quad (8)$$

де R_i — i -ий корінь чисельника/знаменника передатної функції системи (її нулі/полюси); R_i^* — i -ий корінь чисельника/знаменника дискретної передатної функції, що відповідає відображенню в дискретну область $R_i^* = e^{R_i \cdot h}$ (дискретні нулі/полюси), де h є періодом (кроком) дискретизації.

У результаті неперервна передатна функція може бути переписана як дискретна передатна функція з періодом дискретизації h внаслідок процедури дискретизації:

$$K \frac{\prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - P_j)} \xrightarrow{Z_i^* = e^{z_i h}, P_j^* = e^{p_j h}} K^* \frac{\prod_{i=1}^m (z - Z_i^*)}{\prod_{j=1}^n (z - P_j^*)}, \quad (9)$$

де K — коефіцієнт передачі неперервної системи на нульовій частоті; K^* — коефіцієнт передачі дискретної системи на нульовій частоті; m — порядок чисельника передатної функції системи; n — порядок знаменника передатної функції системи; Z_i — i -й корінь чисельника передатної функції системи (її нуль); Z_i^* — i -й корінь чисельника дискретної передатної функції системи (її дискретний нуль); P_j — j -й корінь знаменника передатної функції системи (її полюс); P_j^* — j -й корінь знаменника дискретної передатної функції системи (її дискретний полюс).

Останнім етапом процедури знаходження дискретної передатної функції є встановлення однакового коефіцієнту передачі на нульовій частоті для неперервної та дискретної систем:

$$\lim_{s \rightarrow 0} K \frac{\prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - P_j)} = \lim_{z \rightarrow 1} K^* \frac{\prod_{i=1}^m (z - Z_i^*)}{\prod_{j=1}^n (z - P_j^*)}. \quad (10)$$

Після елементарних перетворень одержимо:

$$K^* = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{\prod_{i=1}^m (s - Z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - P_j)} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\prod_{j=1}^n (z - P_j^*)}{\prod_{i=1}^m (z - Z_i^*)}. \quad (11)$$

Для ланки другого порядку, що описана відповідним диференціальним рівнянням, використання відображення нулів та полюсів неперервної ланки в одиничне коло дає змогу отримати пару дискретних полюсів:

$e^{\frac{h}{T}(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})}$. Після алгебричних перетворень отримано відповідну дискретну передатну функцію ланки другого порядку та рекурентну моделюючу формулу на її основі [17, 19]:

$$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} \Rightarrow \frac{1 - A + B}{z - A + B \cdot z^{-1}} \Rightarrow y_{i+1} = y_i \cdot A - y_{i-1} \cdot B + x_i \cdot (1 - A + B), \quad (12)$$

де $A = 2e^{-\xi \frac{h}{T}} \cos\left(\frac{h}{T} \sqrt{1 - \xi^2}\right)$, $B = e^{-2\xi \frac{h}{T}}$.

Така рекурентна формула окрім абсолютної стійкості є швидкодіючою (лише 4 операції додавання/віднімання та 3 операції множен-

ня, тому що коефіцієнти рекурентної формули можуть бути попередньо розраховані). Отримані з її допомогою значення рентабельності підприємства порівнюють з табличними в оптимізаційній процедурі, що дає, в результаті, можливість знайти значення коефіцієнтів шуканого диференціального рівняння.

Результати проведених розрахунків для різних підприємств відображені на рис. 2. Побічним наслідком ідентифікації виявився ефект згладжування значень щоквартальної рентабельності.

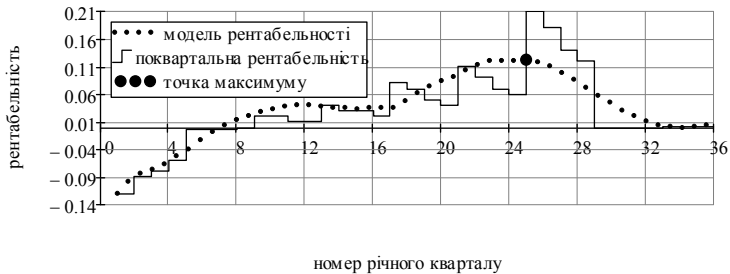


Рис. 2. Ідентифікація економічної системи ПАТ «ДЗАК»

Графічне відображення характеристик економічної системи зосереджує увагу менеджменту на поступовому зростанні рентабельності (рівня ефективності) експортної діяльності з 1 до 24 випадку, що відповідає 1, 2 і 3 стадіям залучення до зовнішнього ринку. 25-й випадок відповідає максимальному значенню рівня ефективності і розпочинає стадію скорочення.

У результаті застосування комплексного підходу до розв'язання поставленої задачі керівництво суб'єкта господарювання матиме змогу своєчасно впливати на величину ключових витрат на експортну діяльність на кожній стадії залучення до зовнішнього ринку, що, відповідно, сприятиме одержанню вищого рівня ефективності експортної діяльності.

Висновки. Задачу оптимізування планових параметрів експортної діяльності підприємства доцільно розв'язувати з використанням комплексного підходу, який базується на використанні сукупності статистичних та інтегральних методів. Прийняття управлінських рішень щодо здійснення експортної діяльності підприємства неможливе без об'єктивно сформованої системи планових параметрів для кожної стадії залучення до зовнішнього ринку з урахуванням фаз циклу виготовлення продукції, що сприятиме реалізації стратегії експортної діяльності суб'єкта господарювання. Обмеженням множини значень встановлених параметрів повинно виступати співвідношення між рівнем ефективності експортної діяльності та ключовими витратами такої діяльності. Застосування інтегральних методів розширює можливості менеджменту підприємства щодо прогнозування результатів експортної діяльності та узгодження стратегічних завдань із заходами поточного планування.

Список використаних джерел:

1. Кузьмін О. Є. Экспортна діяльність соціально-відповідальних суб'єктів господарювання: інструментарій підвищення ефективності / О. Є. Кузьмін, О. В. Пирог, Л. І. Чернобай, Н. О. Вацк // Науковий журнал «Економіка і Фінанси». — Дніпропетровськ, 2014. — № 12. — С. 14–26.
2. Череп А. В. Управління витратами суб'єктів господарювання : в 2 ч. / А. В. Череп. — Харків : ІНЖЕК, 2006. — Ч. 1. — 386 с.
3. Боровиков В. П. Популярное введение в программу Statistica / В. П. Боровиков // Компьютер Пресс. — 1998. — 266 с.
4. Мхитарян С. В. Практикум по дисциплине «Маркетинговые исследования рынка с использованием ППП Statistica» / С. В. Мхитарян. — М. : Московский гос. ун-т экономики, статистики и информатики, 2009. — 50 с.
5. Фещур Р. В. Управління соціально-економічним розвитком машинобудівних підприємств / Р. В. Фещур, М. Р. Тимошук // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». — 2009. — № 657. Менеджмент та підприємництво в Україні: Етапи становлення і проблеми розвитку. — С. 117–123.
6. Garp P. J. Financial Risk Manager. Handbook / P. J. Garp. — John Wiley & Sons, 2007. — 739 p.
7. Lind D. A. Statistical Techniques in Business and Economics / D. A. Lind. — 15 edition. — McGraw-Hill. Irwin Series Operations and Decision Sciences, 2011. — 800 p.
8. Nieuwenhuis G. Statistical methods for Business and Economics / G. Nieuwenhuis. — McGraw-Hill Higher Education, 2009. — 952 p.
9. Wathen S. Statistical Techniques in Business and Economics / S. Wathen, D. Lind, W. Marchal. — 16 edition. — McGraw-Hill Education, 2014. — 830 p.
10. Оленев Н. Н. Исследование устойчивости прогнозирования на модели российской экономики методом множеств идентификации / Н. Н. Оленев, Г. К. Каменев, В. Л. Гусман. — М. : Вычислительный центр РАН, 2012. — 49 с.
11. Півняк Г. Г. Цифрова ідентифікація параметрів електромеханічних систем в задачах енерго- і ресурсозбереження : монографія / Г. Г. Півняк, О.С. Бешта, С.Б. Тулуб ; за ред. акад. Г. Г. Півняка. — Дніпропетровськ : Національний гірничий ун-т, 2004. — 197 с.
12. Мокін Б. І. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. — Вінниця : ВНТУ, 2010. — 260 с.
13. Verhaegen M. Filtering and System Identification. A Least Squares Approach / M. Verhaegen, V. Verdult. — Cambridge University Press, 2007. — 410 p.
14. Кузьмін О. Є. Теоретические и прикладные аспекты экономической оценки расходов на экспортную деятельность с учетом стадий привлечения субъекта хозяйствования к экспортному рынку / О. Е. Кузьмин, Л. И. Чернобай, Н. О. Вацк // Международный научный журнал «Экономика и предпринимательство». — М., 2013. — № 1 (40). — С. 832–844.
15. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 544 с.
16. Jury E. I. Theory and Application of the Z-Transform Method / E. I. Jury. — New York: John Wiley & Sons, Inc. — 1964. — 327 p.

17. Смит Дж. М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей : [монография] / Дж. М. Смит ; [пер. с англ. Н. П. Ильиной ; под. ред. О. А. Чембровского]. — М. : Машиностроение, 1980. — 271 с.
18. Коновал В. Застосування z-перетворення для моделювання електроенергетичних систем / В. Коновал, В. Мороз // Сборник трудов Международной конференции «Моделирование-2012» (Simulation-2012), 16-18 травня 2012 р. — К. — С. 293–296.
19. Moroz V. High-Speed Power System Stability Analysis / V. Moroz, V. Konoval // Proceedings 2015 16th International Conference on Computational Problems of Electrical Engineering (CPEE-2015) [under auspices of IEEE]. — L'viv, 2015. — P. 129-131.

The article suggests solving the problem of optimizing the parameters of planned export activity using a comprehensive approach that includes statistical methods and dynamic models. To find the optimal balance point of costs of export activity and efficiency of this activity the objects of management identified by second order differential equation, which solved using recurrent equation based on the z-transform.

Key words: *export activity, identification of the system, integral methods, planning parameters, costs, statistical methods, z-transform.*

Отримано: 13.04.2016

УДК 004.94

А. А. Верлань*, канд. техн. наук,

В. А. Федорчук**, д-р техн. наук, професор

*Київський національний технічний університет «КПІ», м. Київ,

**Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ СКАЛЯРНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНИХ ЛАНОК КЕРОВАНИХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглядається задача отримання спрощених моделей, які задовольняють критеріям адекватності і точності по відношенню до базової моделі. Отримані моделі забезпечують умови їх застосування при створенні програмних засобів обробки інформації, в тому числі вбудованих у технічні системи з підвищеними вимогами до ресурсних затрат і швидкодії.

Ключові слова: *об'єкти з розподіленими параметрами, спрощені скалярні динамічні моделі, моделювання ланок електромеханічних систем.*

Вступ. Електромеханічні системи широко використовуються в машинобудуванні, енергетиці, при видобутку корисних копалин, в металургії, на транспорті тощо. Оскільки під час функціонування

електромеханічних систем спостерігається значне споживання електричної енергії, протягом багатьох років інтенсивно ведуться роботи щодо покращення їх енергетичних характеристик. Актуальними також залишаються задачі удосконалення динамічних характеристик шляхом використання систем автоматичного керування. В залежності від поставленої задачі автоматизована система керування повинна забезпечувати необхідні режими функціонування електромеханічної системи з контролем швидкості, потужності, механічного моменту, частоти тощо. Зараз для сучасних електромеханічних систем намітилась стійка тенденція зростання вимог щодо точності відпрацювання складних рухів виконавчих механізмів при умові збільшення швидкості їх переміщення [1]. Це стало можливим з появою потужних напівпровідникових силових перетворювачів та високоточних цифрових систем керування із вбудованими моделями об'єктів керування, які поклали початок розвитку мехатронних систем.

Для забезпечення високої точності відпрацювання керуючих впливів, при збереженні високої швидкодії, виникає задача врахування в моделях виконавчих механізмів ефекту розподіленості параметрів за просторовою координатою. Використання традиційного підходу до математичного опису ланок з розподіленими параметрами у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними супроводжується значними труднощами, оскільки числова реалізація таких моделей вимагає великих обчислювальних ресурсів, що є проблематичним для вбудованих систем автоматичного керування, які функціонують в режимі реального часу. Тому набуває актуальності задача спрощення моделей розподілених ланок із врахуванням їх ефективної числової реалізації.

Аналіз існуючих методів спрощення складних математичних моделей дає змогу визначитись з вибором підходу і методів розв'язування дослідницьких задач. Важливою особливістю задачі, що розв'язується, є визначення очікуваних результатів, а саме — отримання спрощених моделей, які задовольняють критеріям адекватності і точності по відношенню до базової моделі, і, разом з тим, які забезпечують умови застосовності при створенні програмних засобів обробки інформації, в тому числі «вбудованих» у технічні системи з підвищеними вимогами до ресурсних затрат і швидкодії.

Отже, актуальною залишається задача побудови за заданими базовими моделями спрощених математичних моделей динаміки ланок із розподіленими параметрами у вигляді звичайних диференціальних рівнянь, інтегральних операторів (динамічних моделей явного вигляду) та передатних функцій, як найбільш поширених в теперішній час видів моделей в широкій практиці технічних досліджень і розробок. Цілком очевидно, що для розв'язання таких задач необхідні вибір або побудова

ефективних методів спрощуючого перетворення базових моделей, причому саме структурно-спрощуючих методів, оскільки повинні виконуватись апроксимаційні або еквівалентні перетворення з отриманням моделей динаміки об'єктів із розподіленими параметрами, які вже відносяться до принципово інших класів математичних описів. Невід'ємною частиною досліджень є розробка і апробація програмних засобів, що реалізують отримані спрощені динамічні моделі.

Структурні (структурно-функціональні) моделі. Найбільш часто системи автоматичного керування та інші технічні системи, в тому числі мехатронні, відображаються за допомогою структурно-функціональних моделей.

Функціональна схема електромеханічної системи мехатронного типу приведена на рис. 1. Вона включає три підсистеми: 1 — інформаційну, 2 — енергоелектронну і 3 — електромеханічну.

Інформаційна підсистема містить систему керування, контролю і діагностики (СККД), набір сенсорних пристроїв (НСП), локальний інтерфейс (ЛІ) та зовнішній інтерфейс (ЗІ). *Енергоелектронна* підсистема включає силовий напівпровідниковий перетворювач (СНП) і силовий блок живлення (СБЖ). *Електромеханічна* підсистема містить виконавчий механізм (ВМ) і електромеханічний перетворювач (ЕМП). Слід відзначити, що в деяких мехатронних системах функціональні блоки можуть відрізнятися від приведених на схемі. Так, наприклад, електромеханічний перетворювач може бути конструктивною ланкою виконавчого механізму, або в деяких мехатронних системах може бути відсутній зовнішній інтерфейс, якщо не передбачається робота в складі групи пристроїв з централізованим управлінням.

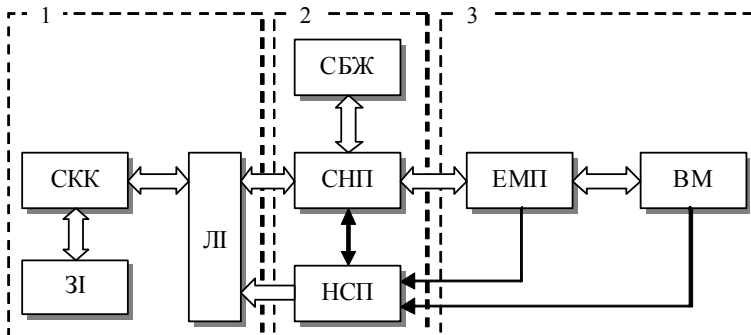


Рис. 1. Електромеханічна система мехатронного типу

Особливістю мехатронних систем є те, що вони охоплюють широкий клас задач завдяки універсальності комп'ютеризованих систем керування, контролю та діагностики. В залежності від задачі керування та особливостей виконавчого механізму (об'єкта керування) в

мехатронній системі можуть використовуватись різні за адекватністю моделі. Це приводить до різних шляхів отримання та корегування спрощених математичних моделей за відомою базовою моделлю.

Принцип спрощення і корегування математичних моделей.

Задачі спрощення і корегування математичних моделей припускають, що є відома деяка математична модель об'єкта

$$Y = L(A)X, \quad (1)$$

де $L(A)$ — у загальному випадку деякий відомий оператор. У випадку корегування задача полягає в уточненні числових параметрів $A = (a_1, \dots, a_s)$ математичної моделі, виходячи з даних про функціонування об'єкта. Дана задача відома також як задача оцінювання параметрів математичної моделі або задача параметричної ідентифікації.

До необхідності корегування математичної моделі можуть призводити наступні випадки. Математична модель, отримана аналітичним способом, часто включає ряд числових параметрів, які потребують подальшого уточнення або визначення на діючому об'єкті. В іншому випадку для об'єкта зі структурою, яка змінюється з часом, може бути прийнята математична модель зі сталими параметрами, з якими вона задовольняє вимогам точності для інтервалу $(t_0, t_0 + T]$, а для наступного інтервалу $(t_0 + T, t_0 + 2T]$ у зв'язку із зміною структури об'єкта може виникнути необхідність уточнення цих параметрів.

Для задач корегування або оцінювання параметрів математичної моделі важливим є характер взаємозв'язку між вихідними змінними $Y(t)$ і оцінюваними параметрами A . Характер цього зв'язку визначається як вихідною математичною моделлю, так і обраною функцією неузгодженості або якості математичної моделі

$$\delta(A) = \|Y_0(t) - L(A)X\|, \quad (2)$$

де $Y_0(t)$ — вектор виходів об'єкта, $\|\cdot\|$ — знак норми вектор-функції. З точки зору оцінювання параметрів математична модель називається лінійною, якщо $\delta(A)$ лінійна відносно параметрів. Тому математична модель може бути нелінійною в звичайному сенсі і лінійною відносно оцінюваних параметрів. Оскільки задача оцінювання параметрів A формулюється як екстремальна задача пошуку

$$\delta(A^*) = \min_{a \in \Theta} \delta(A), \quad (3)$$

де Θ — допустима множина векторів A , то складність алгоритмів пошуку точки мінімуму $A^* \in \Theta$ буде визначатися властивостями $\delta(A)$. На практиці функцію $\delta(A)$, зазвичай, вибирають так, щоб $\delta(A)$ була лінійною відносно A або зводилася до лінійної задачі визначення A . Для того, щоб точка мінімуму A^* була єдиною, бажано, щоб $\delta(A)$ була опуклою або хоча б унімодальною функцією.

Задачу корегування математичної моделі $Y(t) = L(A_0) X(t)$ можна поставити як задачу уточнення вихідних числових параметрів A_0 за X , Y , які належать заданій області D , до таких значень $\tilde{A} \in \Theta$, для яких критерій якості $\delta(A)$ задовольняє умові

$$\delta(\tilde{A}) \leq \Delta, \quad (4)$$

де Δ — необхідна точність. Для задачі корегування параметрів A_0 суттєвим є те, що при використанні ітераційних алгоритмів пошуку \tilde{A} в якості початкового наближення параметрів A слід брати лише $A = A_0$, тому що, зазвичай, достатньо вести пошук в околі вихідних значень A_0 . Крім того, ітераційні алгоритми можна завершувати не по досягненню точки мінімуму функції $\delta(A)$, а в точці \tilde{A} , в якій виконується (4). Проте не виключено, що навіть у точці глобального мінімуму A^* не буде досягнуто необхідної точності, тобто $\delta(A^*) > \Delta$. Це вказує на те, що вибрана структура математичної моделі погано описує реальний об'єкт і необхідно для підвищення точності моделі шукати її в іншому класі. Можливий також випадок, коли необхідна точність буде досягнута при тому ж $L(A)$, але при зміні обмежень D , Θ .

Задачу корегування параметрів A математичної моделі статистики

$$Y = f(X, A_0) \quad (5)$$

можна сформулювати наступним чином. За спостережуваними в статичному режимі на об'єкті значеннями $X^{(v)}$ і $Y_0^{(v)}$ та відповідним значенням моделі $Y^{(v)} = f(X^{(v)}, A_0)$ необхідно уточнити вихідні числові параметри A_0 таким чином, щоб справджувалась (4). Задачу корегування математичної моделі статистики нерідко можна звести до розв'язання системи лінійних або нелінійних рівнянь. Якщо, наприклад, математична модель статистики записується у вигляді

$$Y_j = \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(X), \quad j = \overline{1, n}, \quad \left(\sum_{j=1}^n s_j = s \right), \quad (6)$$

де $\varphi_{ij}(X)$ — задані координатні функції, або шляхом перетворення змінних її можна звести до такого вигляду, то за відсутності обмежень на A і за умови, що функція неузгодженості математичної моделі має вигляд

$$\delta(A) = \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n q_{vj} \left[Y_0^{(v)} - Y_j(X^{(v)}) \right]^2, \quad Y_0^{(v)} = Y_0(X^{(v)}), \quad (7)$$

де задані вагові коефіцієнти $q_{vj} \geq 0$, необхідна умова мінімуму

$$\frac{\partial \delta(A)}{\partial a_{ij}} = 0 \text{ приводить до } n \text{ систем лінійних алгебраїчних рівнянь}$$

$$\sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \sum_{\nu=1}^N \varphi_{ij} \left(X^{(\nu)} \right) \varphi_{kj} \left(X^{(\nu)} \right) = \sum_{\nu=1}^N Y_{0j}^{(\nu)} \varphi_{kj} \left(X^{(\nu)} \right), \quad k = \overline{1, s_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Проте при корегуванні параметрів не завжди вдається математичну модель звести до лінійного вигляду відносно A , і у цих випадках та у випадку функції (7) необхідна умова мінімуму призводить до нелінійної відносно A системи рівнянь. Часто виявляється, що замість розв'язування нелінійної системи прийнятніше розв'язувати безпосередньо задачу мінімізації (3).

У динаміці корегування параметрів математичної моделі (1) здійснюється за спостережуваними значеннями входів $X(t)$ і виходів $Y_0(t)$ об'єкта на деякому проміжку часу $[t_0, t_0 + T]$ і значеннями $Y(t)$ математичної моделі на цьому ж проміжку за таким ж значень входів $X(t)$. Зазвичай припускається, що в початковому стані Y_0 та Y співпадають.

На практиці розповсюджені математичні моделі динаміки, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = F(t, X, Y, A_0), \quad Y|_{t=t_0} = Y^0, \quad (9)$$

де параметри A_0 необхідно корегувати. Ця задача навіть для лінійних диференціальних рівнянь є доволі складною. Наприклад, у випадку одного лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dt} = a_0 y(t) + x(t), \quad y(0) = y^0, \quad (10)$$

для якого розв'язок можна записати в явному вигляді

$$y(t, a_0) = y^0 e^{a_0 t} + \int_0^t x(\tau) e^{a_0(t-\tau)} d\tau, \quad (11)$$

задача коригування одного параметра a_0 на основі критерію

$$\min_a \int_0^T [y(t, a) - y_0(t)]^2 dt \text{ є лінійною задачею.}$$

Нелінійної задачі вдається позбутися, якщо експеримент поставлений так, що крім $Y_0(t)$ вимірюється також і $\frac{dY_0}{dt}$. Тоді для математичної

моделі, заданої системою рівнянь виду (10), а також для систем нелінійних диференціальних рівнянь, в праві частини яких A входить лінійно:

$$\frac{dY_j}{dt} = \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(t, X, Y), \quad j = \overline{1, n} \quad (12)$$

задачу визначення A можна звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього функція якості моделі береться у вигляді

$$\delta(A) = \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n \left[Y_{0j}^{(v)} - \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(t_v, X^{(v)}, Y^{(v)}) \right]^2 \quad (13)$$

і всі її похідні по a_{ij} прирівнюються до нуля. До лінійної системи зводиться задача і тоді, коли $Y_0(t)$ не вимірюється, а визначається чисельними методами за наближеними експериментальними даними $Y_0(t_v)$. Цей підхід не можна вважати задовільним без належної обережності, оскільки чисельне диференціювання наближених експериментальних даних може бути причиною великих похибок.

У випадку впливу на об'єкт деякого вектора завод, коли вхідні і вихідні величини доцільно розглядати як випадкові, корегування параметрів моделі за спостережуваними $X^{(v)}$, $Y^{(v)}$ можна провести, базуючись на алгоритмах теорії оцінок математичної статистики або за допомогою процедур стохастичної апроксимації.

У задачі спрощення математичної моделі вважається, що вихідна математична модель відома із надлишковою точністю, причому використання цієї моделі пов'язане із певними труднощами — складністю алгоритмів, неприйнятним часом їх реалізації та ін. Для практичного застосування більш доцільно мати не лише точну, але і просту для реалізації математичну модель. Тому виникає задача за рахунок зниження точності отримати, базуючись на вихідній математичній моделі, спрощену математичну модель об'єкта.

Питання спрощення математичної моделі можна розв'язувати на різних етапах моделювання. Дійсно, нехай ступінь адекватності математичної моделі M об'єкту O характеризується функцією $\rho_1(O, M)$, а точність чисельної реалізації математичної моделі M у вигляді програми P — функцією $\rho_2(M, P)$. Будемо вважати, що функція неузгодженості $\rho(O, P)$ результатів, виміряних на об'єкті O і розрахованих програмою P , задовольняє нерівність

$$\rho(O, P) \leq \rho_1(O, M) + \rho_2(M, P) \leq \varepsilon, \quad (14)$$

де число ε може бути збільшене. З (14) випливає, що $\rho(O, P)$ можна збільшити двома шляхами: зробити спрощуючі допущення, гіпотези і припущення про фізичний процес, і тим самим перейти від математичної моделі M процесу до більш грубої математичної моделі M_1 ; взяти більш «грубі», а значить, і простіші чисельні методи реалізації алгоритмів математичної моделі M у вигляді програми P_1 .

Таким чином, надмірна точність математичної моделі M дає можливість перейти до простіших математичних моделей процесу M_1 і простіших чисельних методів для її реалізації. Природно, що такий перехід у кожному конкретному випадку повинен здійснюватися із врахуванням специфіки математичної моделі.

Методи перетворення динамічних моделей. В практиці розв'язування рівнянь із частинними похідними досить поширеними є ті чи інші прийоми спрощення вихідних залежностей. У тому числі методи апріорного подання форми (структури) шуканого розв'язку, такі як методи Фур'є, Гальоркіна та ін. Сюди ж слід віднести метод розділення змінних або розщеплення, тобто метод аналітичного подання шуканої функції двох і більше змінних у вигляді добутку функцій одного аргументу. Відомі також методи кускового наближення функцій та ряд інших методів. Вказані методи можуть служити основою для структурного спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами. Проте слід зазначити, що при використанні цих методів, як правило, ставиться за мету отримання спрощеної моделі для подальшого її самостійного застосування в якості основи функціонування комп'ютеризованих систем технічного призначення, таких як системи вимірювання, контролю, діагностики, керування, а також сучасних і перспективних систем моніторингу, які інтенсивно розвиваються. Завдання, поставлені за мету, відносились, як було сказано вище, до отримання чисельного результату для конкретної обчислювальної задачі. Таким чином, напрямком досліджень, який розглядається, потребує подальшого розвитку шляхом пошуку і створення ефективних методів спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами, розробки відповідних алгоритмів та програмних засобів моделювання.

При моделюванні динамічних об'єктів важливим методом вияву можливостей чисельної реалізації є представлення моделей в різних еквівалентних та апроксимаційних формах. Використання еквівалентних форм динамічних моделей стає розповсюдженим підходом. Зокрема, при дослідженні систем управління можуть бути застосовані часові моделі у вигляді диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь; операторні у вигляді передатних функцій; частотні у вигляді амплітудно-частотних характеристик і т. п., які використовуються для аналізу різних властивостей заданої системи. Часто отримання моделі, виходячи з її фізичних властивостей, зручне в одній формі, а її чисельна реалізація в іншій, еквівалентній вихідній. Для еквівалентного (аналітичного) перетворення динамічних моделей можна виділити наступні методи: методи перетворення диференціальних моделей в інтегральні, що включають в себе методи перетворення з розщепленням, послідовного інтегрування, старшої похідної; метод перетворення диференціального рівняння n -го порядку до системи диференціальних рівнянь першого порядку; метод перетворення диференціальної моделі в модель у вигляді передатних функцій; метод перетворення інтегро-диференціальних моделей в інтегральні моделі; методи на основі фундаментальної системи

розв'язків, старшої похідної, послідовного інтегрування; метод послідовного диференціювання для еквівалентного перетворення інтегро-диференціальної моделі в диференціальну модель.

Спрощення складної моделі завжди ґрунтується на деякій близькості або еквівалентності складної і спрощеної моделей. У зв'язку з тим, що оцінка близькості моделей суттєвим чином визначається цілями дослідження системи і специфікою складної моделі, класифікація методів спрощення моделей є достатньо складною. Достатнє уявлення про різноманіття способів і прийомів спрощення математичних моделей дає їх розгляд з точки зору простору змінних, в якому відбувається спрощення моделі. Відповідно двом основним просторам, які використовуються при аналізі систем, маємо дві наступні множини підходів до спрощення моделей.

1. Побудова спрощеної моделі за критерієм близькості показників якості вихідної і спрощеної моделі в просторі зображень. При цьому отримують: канонічні форми редуційних моделей, в яких зберігаються визначені власні значення вихідної системи, або задаються деякі полюси і зберігаються декілька марковських параметрів і (або) часових моментів; спрощені моделі зі збереженням домінуючих власних значень, полюсів або нулів вихідної моделі; спрощені моделі, що отримуються інтерполяцією Коші передатної функції $W(p)$ системи; апроксимацію передатної функції $W(p)$ системи поліномами Гурвіца, неперервними дробами (апроксимація Паде), поліномами Чебишева, формами Кауера, — з контролем положення полюсів, нулів, сталих часу, часових границь та (або) моментних характеристик перехідного процесу спрощених моделей. До методів перетворення в просторі зображень відносять частотні методи спрощення моделей, що використовують: перетворення змінних в комплексній площині, причому на високих частотах s — площина перетворюється в область всередині одиничного кола, а нові передатні функції перетворюються до модифікованих поліномів Чебишева; мінімізацію інтеграла від різниці дійсних і уявних частотних характеристик вихідної і спрощеної моделей у визначеному інтервалі частот; мінімізацію вагової міри відхилень частотних реакцій вихідної і спрощеної моделей на всьому діапазоні частот; квадратично-амплітудну частотну характеристику і методи Чебишева при апроксимації передатної функції ланцюговими дробами.

2. Побудова спрощеної моделі за критерієм близькості показників якості складної і спрощеної моделі в просторі станів. В цю множину методів спрощення моделей входять всі методи, які ґрунтуються на операціях над змінними в просторі станів. Різноманіття використовуваних показників якості систем обумовлює багаточисельність способів спрощення цієї групи. Значна їх кількість ґрунтується

ся на мінімізації різноманітних мір відхилень перехідних процесів, імпульсних і перехідних характеристик або деяких функціоналів від різниці вихідних координат складної і спрощеної моделей тощо.

При постановці і розв'язанні задачі спрощення моделей як у просторі зображень, так і в просторі станів не можна обійтися без інженерних, евристичних прийомів спрощення, що враховують специфіку конкретної задачі дослідження системи і відомості про порівняльну важливість факторів (або фрагментів), отримані в результаті попереднього досвіду використання спрощеної моделі. Прикладом такого роду евристичного прийому при спрощенні математичного опису електроенергетичних систем є використання того факту, що в складних системах вплив збудження по мірі віддалення від місця його виникнення зменшується в силу розсіювання енергії та інших причин.

Інженерний підхід використовується також і при спрощенні моделі, що отримується при послідовному нехтуванні деякими фрагментами в початковій моделі і оцінці їх значимості. Інженерним ж способом в більшості випадків визначається і допустима похибка при спрощенні математичних моделей. Відзначимо деяку складність цієї задачі при врахуванні похибок вхідної інформації і потрібної точності отриманих результатів.

Як при використанні будь-яких методів спрощення, що не враховують параметричну чутливість моделей, після спрощення вихідної моделі описаними в [2–4] алгебраїчними методами також необхідна оцінка точності отриманої спрощеної моделі із врахуванням збурень параметрів системи.

Системний підхід при спрощенні моделей має на увазі не тільки задовільну точність спрощеної моделі, що отримується, але й задоволення інших вимог, пов'язаних з її практичним застосуванням. Такими вимогами можуть бути спрощення обладнання і підвищення надійності — при апаратній реалізації спрощення моделі, мінімізація машинного часу і об'єму пам'яті, що використовується — при програмній реалізації. Робота [5] може бути наведена в якості прикладу реалізації такого підходу при розв'язанні задачі підвищення точності моделювання і спрощення обладнання, що використовується, при створенні спеціалізованого обчислювального обладнання для апроксимації залежностей між заданими векторами вхідних і вихідних координат системи.

Підхід до визначення допустимої похибки спрощення моделей неперервних процесів із врахуванням похибок вимірювання вхідних і вихідних координат системи і повної обчислювальної похибки визначення вихідних координат моделі поданий у [6].

Для прикладу розглянемо спосіб структурного спрощення математичної моделі об'єкта з розподіленими параметрами. Математич-

ний опис об'єкта з розподіленими параметрами задано у прямокутній області G з границею $\Gamma\{\alpha < x < \beta; t_0 < t < t_0 + l\}$ у вигляді диференціального рівняння із частинними похідними

$$a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + d(x, t)u = f(x, t), \quad (15)$$

$(a, b > 0 \text{ у } G + \Gamma),$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); & u(x_0 + l, t) = \varphi_l(t); & (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); & u(x, T) = \psi_T(x); & (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (16)$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)$ — задані функції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (15)–(16), отримаємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$a_k(t)\ddot{u}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{u}_k(t) + d_k(t)u_k(t) = f_k(t) + O(h^2), \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

де $x_k = x_0 + kh$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n)$, $h = \frac{l}{n+1}$, $x_k(t) = u(t, x_k)$.

Нехтуючи у (17) членами $O(h^2)$ та позначивши через $U_k(t)$ наближені значення розв'язку $u(t, x)$ на прямій $x = x_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$a_k(t)\ddot{U}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{U}_k(t) + d_k(t)U_k(t) = f_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Використовуючи граничні умови на Γ , маємо:

$$\left. \begin{aligned} U_0(t) &= \varphi_0(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_{n+1}(t) &= \varphi_l(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_k(t_0) &= \psi_0(x_k), & U_k(T) = \psi_T(x_k); & (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь (18) з граничними умовами (19) апроксимує з точністю до $O(h^2)$ диференціальне рівняння (15) з граничними умовами (16). Слід відзначити, що за допомогою методу прямих, по суті, проводиться декомпозиція вихідної моделі на n структурних елементів, кожен з яких реалізує диференціальне рівняння другого порядку.

Отже, на основі проведеної декомпозиції здійснюється побудова структурних моделей об'єктів з розподіленими параметрами. При цьому слід враховувати, що заміна моделі з нескінченною кількістю степенів свободи скінченновимірною приводить до розходжень значень їх власних частот. Для оцінки точності апроксимаційної моделі

можна скористатися визначенням величини відмінності власних частот вихідної та апроксимаційної моделі.

Висновки. Розглянуті способи отримання спрощених моделей дають змогу задовольнити критерії щодо адекватності і точності по відношенню до базової моделі, а також забезпечити умови їх застосовності при створенні програмних і апаратних засобів обробки інформації з підвищеними вимогами до ресурсних затрат і швидкодії.

Список використаних джерел:

1. Инжиниринг электроприводов и систем автоматизации / [М. П. Белов, О. И. Зементов, А. Е. Козярук и др.] ; под ред. В. А. Новикова, Л. М. Чернигова. — М. : Академия, 2006. — 368 с.
2. Mahadevan N. Wavelet-based model reduction of distributed parameter systems / N. Mahadevan, K. A. Hoo // Chemical Engineering Science. — Vol. 55. — Issue 19, October 2000. — P. 4271–4290.
3. Opmeer M. R. Model reduction for distributed parameter systems: A functional analytic view / M. R. Opmeer // Proceedings of the American Control Conference. — American Automatic Control Council. — 2012. — P. 1418–1423.
4. Roubal J. Simulation of Two-Dimensional Distributed Parameters Systems [Електронний ресурс] / J. Roubal, P. Trnka, V. Havlena // Digital Signal and Image Processing. In proceedings of MATLAB conference 2004. — Режим доступу: http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/matlab04/roubal.pdf.
5. Верлань А. Ф. Метод интегральных уравнений в задаче описания и расчета электрических цепей / А. Ф. Верлань // Электронное моделирование. — 1983. — № 5. — С. 8–12.
6. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие / В. В. Иванов. — К. : Наук. думка, 1986. — 584 с.

The problem of obtaining simplified models that meet the criteria of adequacy and accuracy on relation to the base model is considered. The models provide conditions for their use in creating software for processing information, including embedded in the technical systems, with increased requirements to their resources of calculating and performance.

Key words: *objects with distributed parameters, simplified scalar dynamic models, modelling of links of electromechanical systems.*

Отримано: 27.04.2016

УДК 519.6+004.02

Д. А. Верлань, канд. техн. наук,

Ю. О. Фургат, канд. техн. наук

ПП «ЕРУ Трейдінг», м. Київ,

Інститут проблем моделювання в енергетиці

імені Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ

СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРА І РОДУ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ В ЗАДАЧАХ ВІДНОВЛЕННЯ ВХІДНИХ СИГНАЛІВ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Розглянуто два способи розв'язання рівнянь Вольтерра I роду з виродженим ядром: чисельно-аналітичний, що зводить задачу до розв'язання еквівалентного диференційного рівняння, та структурно-алгоритмічний, що дозволяє застосовувати засоби системи Simulink. В обох випадках досягається висока швидкодія алгоритмів розв'язування.

Ключові слова: інтегральне рівняння Вольтерра, вироджене ядро, регуляризація, швидкодійні алгоритми.

Вступ. Інтегральні рівняння Вольтерра I роду використовуються в актуальних технічних задачах відновлення сигналу. Процес розв'язання таких рівнянь пов'язаний з їх некоректністю та складнощами у випадку ядра довільного вигляду. Розглянемо два способи розв'язання, що дозволяють подолати вказані труднощі.

Чисельно-аналітичний спосіб. Одним з методів розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерра I роду

$$\int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad (1)$$

де $K(x, s)$ і $f(x)$ — задані ядро і права частина, — постійна нижня межа інтегрування, є аналітичний перехід до рівнянь другого роду [1], що можливо у деяких окремих випадках. Іншим способом перетворення рівняння (1) є приведення його до диференційного рівняння a .

Розглянемо випадок виродженого ядра

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad (2)$$

до якого можуть бути приведені довільні ядра шляхом апроксимації [2].

Рівняння (1) з виродженим ядром (2) набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) y(s) ds = f(x) \quad (3)$$

і допускає такі перетворення.

Виділимо з суми (2) доданок $\alpha_q(x)\beta_q(s)$, виходячи з умови $\alpha_q(x) \neq 0; \beta_q(s) \neq 0$ ніде в області зміни x, s :

$$\alpha_q(x) \int_a^x \beta_q(s) y(s) ds + \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) y(s) ds = f(x) \quad (4)$$

позначимо

$$V(x) = \frac{1}{\alpha_q(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) y(s) ds, V(a) = 0, \quad (5)$$

де \sum' означає $\sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(s) - \alpha_q(x)\beta_q(s)$.

Тоді рівняння (4) перепишеться у вигляді виразу

$$\int_a^x \beta_q(s) y(s) ds + V(x) = \frac{1}{\alpha_q(x)} f(x), \quad (6)$$

диференціювання якого дає:

$$y(x) = \frac{[f(x)/\alpha_q(x)]' - V'(x)}{\beta_q(x)}. \quad (7)$$

Підстановка (7) в (5) приводить до інтегрального рівняння другого роду відносно $V(x)$

$$\begin{aligned} & V(x) \left[1 + \frac{1}{\alpha_q(x)\beta_q(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i(x)\beta_i(x) \right] - \\ & - \frac{1}{\alpha_q(x)} \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x V(s) [\beta_i(s)/\beta_q(s)]' ds = \\ & = \alpha_q(x) \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x [\beta_i(s)/\beta_q(s)] \cdot [f(s)/\alpha_q(s)]' ds. \end{aligned} \quad (8)$$

Після заміни

$$\int_a^x V(s) [\beta_i(s)/\beta_q(s)]' ds = W_i(x), W(a) = 0 \quad (9)$$

або

$$W_i'(x) = V(x) [\beta_i(x)/\beta_q(x)]' \quad (10)$$

переходимо до шуканого диференціального рівняння відносно $W_i(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{W_i'(x)}{[\beta_i(x)/\beta_q(x)]^r} \left[1 + \frac{1}{\alpha_q(x)\beta_q(x)} \sum_{j=1}^m \alpha_j(x)\beta_j(x) \right] - \\ & - \frac{1}{\alpha_q(x)} \sum_{j=1}^m \alpha_j(x)W_j(x) = \\ & = \frac{1}{\alpha_q(x)} \sum_{j=0}^m \alpha_j(x) \int_a^x [\beta_i(x)/\beta_q(x)] \cdot [f(s)/\alpha_q(s)]' ds, \end{aligned} \quad (11)$$

при $i \neq q$.

Практично для пошуку розв'язку вихідного рівняння (3) досить обчислити тільки функцію $W_i(x)$, так як з формули (10)

$$V(x) = \frac{W_i'(x)}{[\beta_i(x)/\beta_q(x)]^r},$$

і $y(x)$ знаходяться з (7).

Тобто задача зведена до розв'язання звичайного диференційного рівняння I порядку, яке можна розв'язувати штатними комп'ютерними засобами систем математичного моделювання (MATLAB та ін.), що забезпечують необхідну швидкодію.

Перевагою описаного способу є можливість цілеспрямованого вибору доданка $\alpha_q(x)\beta_q(x)$. Такий вибір відповідає одній з форм регуляризації, зазвичай неминучою при вирішенні рівнянь першого роду.

Приклад. Для розв'язання рівняння

$$\int_1^x (2s-x)y(s)ds = x^3 - 1$$

введемо позначення

$$x \int_1^x y(s)ds = V(x), \quad V(1) = 0. \quad (12)$$

Тоді вихідне рівняння переписеться у вигляді

$$2 \int_1^x y(s)ds - V(x) = x^3 - 1$$

або після диференціювання в вигляді

$$y(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \frac{V'(x)}{x}, \quad (13)$$

звідки, використовуючи (13), отримуємо

$$V(x) = x \int_1^x \left(\frac{3}{2}s + \frac{1}{2} \frac{V'(s)}{s} \right) ds.$$

Далі, за допомогою заміни

$$W(x) = \int_1^x \frac{1}{s^2} V(s) ds, \quad W(1) = 0 \quad (14)$$

переходимо до диференціального рівняння

$$W'(x) - \frac{1}{x} W(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \frac{1}{x},$$

розв'язок якого

$$W(x) = \frac{3}{2}x \left[x + \frac{1}{x} - 2 \right].$$

З виразу (15) отримуємо

$$V(x) = x^2 W'(x) = 3x^2(x-1)$$

і за формулою (14) остаточно маємо

$$y(x) = 3(2x-1).$$

Структурно-алгоритмічний спосіб. Розглянемо задачу розв'язання рівняння (1) з виродженим ядром вигляду (2). Шляхом перетворень введемо в рівняння параметр регуляризації γ наступним чином. Виконаємо еквівалентне перетворення рівняння (3) до вигляду

$$y(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) y(s) ds = y(x) + f(x). \quad (15)$$

Апроксимуємо рівняння (15) виразом

$$\tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) \tilde{y}(s) ds = (1-\gamma) \tilde{y}(x) + f(x), \quad \gamma \ll 1, \quad (16)$$

($\tilde{y}(x)$ — наближений розв'язок), або виразом

$$\tilde{y}(x) = - \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) \tilde{y}(s) ds + (1-\gamma) \tilde{y}(x) + f(x). \quad (17)$$

Наближене рівняння (17) відносно $\tilde{y}(x)$ з параметром регуляризації γ може бути віднесене до рівняння Вольтерра II роду, що дає можливість при його розв'язанні використати засоби системи Simulink.

Структура засобів Simulink для розв'язання рівняння (17), що побудована відповідно до методу, визначеного в роботах [3;4], наведена на рис. 1.

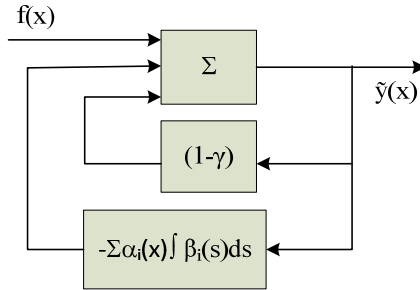


Рис. 1. Структура розв'язуючої схеми

Такий спосіб дозволяє отримувати наближений розв'язок рівняння (1) шляхом швидкодіючого алгоритму, що реалізується вказаною структурою.

Висновок. Таким чином, в роботі розглянуті способи отримання швидкодіючих алгоритмів для розв'язання інтегрального рівняння (1) з можливістю комп'ютерної реалізації даної моделі динамічного об'єкта в режимі реального часу.

Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. — К. : Наукова думка, 1986. — 543 с.
2. Верлань Д. А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей / Д. А. Верлань // Электронное моделирование — К., 2014. — Т. 36, № 3. — С. 41–57.
3. Верлань А. Ф. Способ регуляризации задачи численного дифференцирования / [А. Ф. Верлань, Л. Н. Костьян, В. А. Федорчук, Ю. О. Фуртат] // Праці міжнародної наукової школи-семінару «Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)» — С. 22.
4. Верлань А. Ф. Методи зменшення впливу завад у вхідному сигналі на процес отримання похідних вищих порядків / А. Ф. Верлань, Ю. О. Фуртат // Матеріали Третьої Міжнародної науково-технічної конференції «Обчислювальний інтелект (ОІ-2015)». — С. 294.

Two methods of solving Volterra equations of the 1st kind with distributed core are considered: numerical-analytical, which reduces the problem to solving an equivalent differential equation, and structural-algorithmic, that allows to utilize the Simulink system means. In both cases, high performance of solution algorithms is achieved.

Key words: *Volterra integral equation, distributed core, regularization, high-speed algorithms.*

Отримано: 11.04.2016

УДК 519.63.001.57

О. М. Гладка, канд. техн. наукНаціональний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне**ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ НА ОСНОВІ МЕТОДІВ
КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ТА СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ
ДЛЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ЗАДАЧ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ**

Розроблену на основі синтезу числових методів комплексного аналізу та сумарних зображень методику математичного моделювання фільтраційних процесів (процесів витіснення нафти) поширено на безнапірний рух нафти у нафтоносному пласті-колекторі. Створено обчислювальну технологію розв'язування крайових задач для розрахунку фільтраційного режиму у криволінійних, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, областях з вільною (невідомою) ділянкою межі. Розроблений алгоритм автоматично вирішує проблему вибору вузлів і побудови динамічної сітки, знаходження невідомої ділянки межі, обчислення повної витрати і розрахунку поля величини швидкості.

Ключові слова: математичне моделювання, числові методи комплексного аналізу, квазіконформні відображення, методи сумарних зображень, фільтраційний процес, нафтоносний пласт, область з вільною межею.

Вступ. У попередніх роботах (див., напр. [1]) розроблено методику математичного моделювання квазіідеальних процесів витіснення вуглеводнів із нафтогазових пластів з використанням LEF-пластів. У цій роботі розглядається безнапірний рух рідини (нафти) у нафтоносному пласті-колекторі, де п'єзометрична поверхня є вільною поверхнею. Задачі безнапірного руху (з вільними межами), здебільшого вивчаються у гідродинаміці та гідротехніці при розрахунках процесів фільтрації через ґрунтові греблі, притоку води до дрен, свердловин тощо. У видобуванні нафти безнапірний рух зустрічається значно рідше, ніж напірний, в основному, при шахтній чи кар'єрній розробці родовищ. Але розв'язування задач з вільними межами є значно складнішим, ніж у випадках повністю заданих меж. На сьогоднішній день розроблені підходи до розв'язування таких задач лише для окремих випадків чи для геометрично простих областей. Окрім цього, вивчення безнапірного руху рідини має велике практичне значення, оскільки такий рух є аналогічним до фільтрації газу [2–3].

Для математичного опису таких процесів і розв'язання відповідних задач використано розроблену раніше методику [4–6], яка базується на синтезі числових методів комплексного аналізу (конформних та квазіконформних відображень) [7] і сумарних зображень Г. М. Поло-

жого [8]. При цьому, розв'язування задачі зводиться до обернення конформного (квазіконформного) відображення даної криволінійної фізичної області на відповідну область комплексного потенціалу з невідомим параметром. Координати вузлів динамічної сітки розраховуються за числово-аналітичними формулами сумарних зображень, що дозволяє на кожному ітераційному кроці враховувати вплив усіх граничних вузлів i , тому, прискорює досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій, а також дає змогу розпаралелити обчислювальний процес. В результаті розв'язування задачі автоматично вирішується проблема визначення вузлів розрахункової сітки та побудови динамічної сітки, знаходження невідомої ділянки межі області і координат точки перетину її з заданою ділянкою та значення потенціалу (напору) у цій точці, обчислення повної фільтраційної витрати.

Постановка задачі. Розглядається квазіідеальний процес у нафтоносному пласті (LEF-пласті [1]), який має залишкові підшовні поклади нафти, тиск над якою є атмосферним (тобто, надлишковий тиск дорівнює нулю). Для спрощення моделі вважатимемо процеси плоско-паралельними і розглядатимемо не просторову, а плоску задачу. Така задача зводиться до розв'язування крайової задачі дивергентного типу для криволінійної, обмеженої лініями течії та еквіпотенціальними лініями, LEF-області з вільною межею.

Область фільтрації будемо розглядати як криволінійну область G_z у комплексній площині ($z = x + iy$), що обмежена кривими $AB = \{z : f_*(x, y) = 0\}$, $DA = \{z : f_*^*(x, y) = 0\}$, $B_0C = \{z : f_*^*(x, y) = 0, y_C \leq y \leq y_*\}$, $CD = \{z : f_*^*(x, y) = 0, y \leq y_C\}$, BB_0 — вільна (невідомо) межа (крива депресії), y_B, y_C — задані ординати точок B і C відповідно, x_*, y_* — шукані координати точки B_0 (рис. 1).

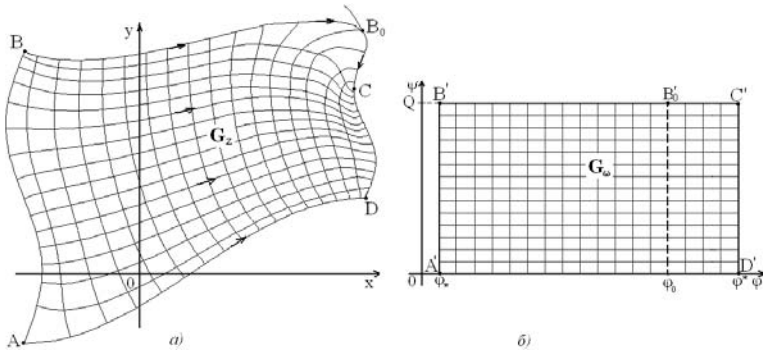


Рис. 1. Схема LEF-області з вільною межею (а)
і відповідної їй області комплексного потенціалу (б)

Як і в [1, 4–6], процес руху нафти описуватимемо рівнянням руху $\vec{v} = \kappa_f \cdot \text{grad } \varphi$ (законом Дарсі) та рівнянням нерозривності $\text{div } \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ — швидкість фільтрації, $\kappa_f = \kappa / \mu_n$ — коефіцієнт фільтрації, κ — коефіцієнт проникності пласта, μ_n — динамічна в'язкість нафти в пластових умовах, а для потенціалу швидкості $\varphi = \varphi(x, y)$ задані умови: $\varphi|_{AB} = \varphi_*$, $\varphi|_{CD} = \varphi^*$, $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{BB_0C} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{DA} = 0$, $\varphi_{BB_0} = g(y)$, $H \geq y \geq y_* = f^*(x_*)$ (n — зовнішня нормаль до відповідної ділянки межі області, $g(y)$ — деяка монотонно спадна функція: $g(H) = \varphi_*$, $g(y_*) = \varphi^*$, H — ефективна товщина пласта).

Задача на конформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ ($\psi = \psi(x, y)$ — функція течії комплексно спряжена до $\varphi = \varphi(x, y)$) з невідомим параметром — повною фільтраційною витратою $Q = \int_{AB} -v_y dx + v_x dy$ — має вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa_f \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \varphi|_{BC} = g(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ v(x, y) = \sqrt{v_x^2(x, y) + v_y^2(x, y)}, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) \cdot \text{grad}(y(\varphi_*, \psi) - f_*(x(\varphi_*, \psi))) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) \cdot \text{grad}(y(\varphi, 0) - f^*(x(\varphi, 0))) = 0, \\ \text{grad } \psi(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) \cdot \text{grad}(y(\varphi^*, \psi) - f^*(x(\varphi^*, \psi))) = 0, \\ \text{grad } \varphi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) \cdot \text{grad } \psi(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

Використовуючи формули переходу $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial x}$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

обернену до (1) задачу на конформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z отримаємо аналогічно [1, 7] і можемо звести її до вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} Lx \equiv \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_f} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_f \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \quad Ly = 0, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ y(\varphi_*, \psi) = f_*(x(\varphi_*, \psi)), \quad y(\varphi^*, \psi) = f^*(x(\varphi^*, \psi)), \quad 0 \leq \psi \leq Q, \\ y(\varphi, 0) = f_*^*(x(\varphi, 0)), \quad y(\varphi, Q) = g^{-1}(\varphi), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\varphi^*} = 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_*^*}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) \Big|_{\psi=Q} = 0, \\ v_x = \frac{\kappa_f}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\kappa_f}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad Q = \int_0^Q \frac{\kappa_f}{J} \left(\left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi. \end{array} \right. \quad (2)$$

Різницевий аналог задачі (2) при $g(y) = -y$ отримаємо аналогічно до [1], визначивши у G_ω ортогональну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j)\}$: $\varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i$, $i = \overline{0, m+1}$; $\psi_j = \Delta\psi \cdot j$, $j = \overline{0, n+1}$; $\Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}$, $\Delta\psi = \frac{Q}{n+1}$, $m, n \in \mathbb{N}$ }, де $\gamma = \Delta\varphi / \Delta\psi$ — конформний інваріант. При цьому, диференціальні рівняння, крайові умови і умови ортогональності ліній динамічної сітки до відповідних ділянок межі області апроксимуємо різницевими рівняннями:

$$\begin{aligned} & \gamma^2 (\dot{\kappa}_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \dot{\kappa}_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j})}{\dot{\kappa}_{i+1/2,j}} - \\ & - \frac{(x_{i,j} - x_{i-1,j})}{\dot{\kappa}_{i-1/2,j}} = 0, \quad \gamma^2 (\dot{\kappa}_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \dot{\kappa}_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \\ & + \frac{(y_{i+1,j} - y_{i,j})}{\dot{\kappa}_{i+1/2,j}} - \frac{(y_{i,j} - y_{i-1,j})}{\dot{\kappa}_{i-1/2,j}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$y_{0,j} = f_*(x_{0,j}), \quad y_{m+1,j} = f^*(x_{m+1,j}), \quad j = \overline{0, n+1}, \quad (4)$$

$$y_{i,0} = f_*^*(x_{i,0}), \quad y_{i,n+1} = -\varphi_i, \quad i = \overline{0, m+1},$$

$$f_*^*(x_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) + (x_{1,j} - x_{0,j}) = 0,$$

$$f^*(x_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) + (x_{m,j} - x_{m+1,j}) = 0, \quad j = \overline{0, n+1},$$

$$f_*^*(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) + (x_{i,1} - x_{i,0}) = 0, \quad (5)$$

$$(x_{i+1,n+1} - x_{i,n+1})(y_{i+1,n+1} - y_{i,n+1}) + (x_{i,n} - x_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) = 0, i = \overline{0, m+1},$$

$$\text{де } x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \kappa_{i,j} = \kappa_f(\varphi_i, \psi_j),$$

$$\dot{\kappa}_{i,j+1/2} = \kappa_f(0.5(x_{i,j+1} + x_{i,j}), 0.5(y_{i,j+1} + y_{i,j})),$$

$$\dot{\kappa}_{i,j-1/2} = \kappa_f(0.5(x_{i,j} + x_{i,j-1}), 0.5(y_{i,j} + y_{i,j-1})),$$

$$\dot{\kappa}_{i+1/2,j} = \kappa_f(0.5(x_{i+1,j} + x_{i,j}), 0.5(y_{i+1,j} + y_{i,j})),$$

$$\dot{\kappa}_{i-1/2,j} = \kappa_f(0.5(x_{i,j} + x_{i-1,j}), 0.5(y_{i,j} + y_{i-1,j})).$$

Конформний інваріант γ отримаємо на підставі умови «конформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей [7]:

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\gamma_{i,j}}{\kappa_{i,j}}, \quad (6)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}},$$

а невідому фільтраційну витрату Q наближено обчислюємо за формулою:

$$Q = \Delta_\varphi \cdot \frac{n+1}{\gamma}. \quad (7)$$

Різницеві формули для визначення компонент вектора швидкості мають вигляд:

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,j} = 2\kappa_{i,j} \Delta_\psi J_{i,j}^{-1} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}, x_{i+1,j} - x_{i-1,j}), \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,j} = 2\kappa_{0,j} \Delta_\psi J_{0,j}^{-1} (y_{1,j} - y_{0,j}, x_{1,j} - x_{0,j}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,n+1} = \kappa_{i,n+1} \Delta_\psi J_{i,n+1}^{-1} (y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1}, x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1}), \quad i = \overline{1, m},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{m+1,j} = 2\kappa_{m+1,j} \Delta_\psi J_{m+1,j}^{-1} (y_{m+1,j} - y_{m,j}, x_{m+1,j} - x_{m,j}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = \kappa_{i,0} \Delta_\psi J_{i,0}^{-1} (y_{i+1,0} - y_{i-1,0}, x_{i+1,0} - x_{i-1,0}), \quad i = \overline{1, m},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,0} = \kappa_{0,0} \Delta_\psi J_{0,0}^{-1} (y_{1,0} - y_{0,0}, x_{1,0} - x_{0,0}), \quad (8)$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,n+1} = \kappa_{0,n+1} \Delta_\psi J_{0,n+1}^{-1} (y_{1,n+1} - y_{0,n+1}, x_{1,n+1} - x_{0,n+1}),$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{m+1,n+1} = \kappa_{m+1,n+1} \Delta_\psi J_{m+1,n+1}^{-1} (y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1}, x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1}),$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{m+1,0} = \kappa_{m+1,0} \Delta_\psi J_{m+1,0}^{-1} (y_{m+1,0} - y_{m,0}, x_{m+1,0} - x_{m,0}),$$

де

$$\begin{aligned}
 J_{i,j} &= (x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}), \\
 J_{0,j} &= (x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j}), \\
 J_{i,n+1} &= (x_{i+1,n+1} - x_{i-1,n+1})(y_{i,n+1} - y_{i,n}) - (x_{i,n+1} - x_{i,n})(y_{i+1,n+1} - y_{i-1,n+1}), \\
 J_{m+1,j} &= (x_{m+1,j} - x_{m,j})(y_{m+1,j+1} - y_{m+1,j-1}) - (x_{m+1,j+1} - x_{m+1,j-1})(y_{m+1,j} - y_{m,j}), \\
 J_{i,0} &= (x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}), \\
 J_{0,0} &= (x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,0}) - (x_{0,1} - x_{0,0})(y_{1,0} - y_{0,0}), \\
 J_{0,n+1} &= (x_{1,n+1} - x_{0,n+1})(y_{0,n+1} - y_{0,n}) - (x_{0,n+1} - x_{0,n})(y_{1,n+1} - y_{0,n+1}), \\
 J_{m+1,n+1} &= (x_{m+1,n+1} - x_{m,n+1})(y_{m+1,n+1} - y_{m+1,n}) - (x_{m+1,n+1} - x_{m+1,n})(y_{m+1,n+1} - y_{m,n+1}), \\
 J_{m+1,0} &= (x_{m+1,0} - x_{m,0})(y_{m+1,1} - y_{m+1,0}) - (x_{m+1,1} - x_{m+1,0})(y_{m+1,0} - y_{m,0}).
 \end{aligned}$$

Алгоритм числового розв'язання. Алгоритм розв'язання різницевої задачі (3)–(8) побудуємо з використанням методу сумарних зображень. Формули сумарних зображень, що є розв'язками рівнянь (3) при $\kappa = const$, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i a_k + v_k^i b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{j-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right), \\
 y_{i,j} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left(\mu_k^i c_k + v_k^i d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{v_k^{j-t}}{\mu_k - v_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right), \quad (9) \\
 i &= \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},
 \end{aligned}$$

де елементи матриці $P = [p_{j,k}]_{j,k=1}^n$ обчислюються як

$$p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}, \quad \text{а елементи діагональних матриць}$$

$$\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n, \quad v^i = [v_k^i]_{k=1}^n \quad \text{визначаються із формул } \mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1},$$

$$v_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \eta_k = 1 + \gamma^2 \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

Системи рівнянь для обчислення a_k, b_k, c_k, d_k мають вигляд:

$$\left\{ \begin{aligned}
 a_k + b_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{0,j} - S_k^{(0)}, \\
 \mu_k^{m+1} a_k + v_k^{m+1} b_k &= \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* x_{m+1,j} - S_k^{(m+1)}, \quad k = \overline{1, n};
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_k + d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{0,j} - S_k^{*(0)}, \\ \mu_k^{m+1} c_k + \nu_k^{m+1} d_k = \sum_{j=1}^n p_{j,k}^* y_{m+1,j} - S_k^{*(m+1)}, \quad k = \overline{1, n}, \end{array} \right.$$

де $p_{j,k}^*$ ($j, k = \overline{1, n}$) — елементи матриці P^* , оберненої до P ,

$$\begin{aligned} S_k^{(0)} &= \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^t}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}), \\ S_k^{(m+1)} &= \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{m+1-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}), \\ S_k^{*(0)} &= \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^t}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}), \\ S_k^{*(m+1)} &= \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{m+1-t}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}), \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

В алгоритмі (аналогічно до [1, 7]) будемо поетапно фіксувати значення параметрів γ (або Q), координат граничних та внутрішніх вузлів сітки G_ω^γ , використовуючи ідеї методу блочної ітерації. Задаємо кількості m та n вузлів розбиття сіткової області G_ω^γ , параметр ε , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі та бажаний рівень конформності відображення δ_* , початкові наближення координат граничних вузлів $x_{0,j}^{(0)}$, $y_{0,j}^{(0)}$, $x_{m+1,j}^{(0)}$, $y_{m+1,j}^{(0)}$, $x_{i,n+1}^{(0)}$, $y_{i,n+1}^{(0)}$, $x_{i,0}^{(0)}$, $y_{i,0}^{(0)}$. Обчислюємо методом сумарних зображень (9) відповідні початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ і знаходимо за формулами (6), (7) початкові наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ конформного інваріанту γ та повної витрати Q . Далі уточнюємо координати граничних вузлів (4), (5) (даний граничний вузол на k -ому кроці підправляємо за умов, що фіксованими є навколишні та відповідні приграничні [7]). Нове наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$ ($k = 0, 1, \dots$ — номер кроку ітерації) знову проводимо за формулами

сумарних зображень (9), які, на відміну від сіткових ітераційних методів, дозволяють відразу (за один крок без організації внутрішнього ітераційного процесу) отримати прийнятний розв'язок. Після цього, знову уточнюємо γ та Q . Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення вузлів на границі за проведену k -ту ітерацію; якщо вона більша за ε , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь конформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного потенціалу на фізичну область, де δ_1, δ_2 — нев'язки апроксимації умов Коші-Рімана:

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\delta_{i,j}^{(1)}|, \quad \delta_{i,j}^{(1)} = \gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - (y_{i,j+1} - y_{i,j-1});$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\delta_{i,j}^{(2)}|, \quad \delta_{i,j}^{(2)} = \gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}).$$

Результати розрахунку. Проведено розрахунки за описаним алгоритмом для областей $G_z^{(1)}$: $AD = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, y = 0\}$, $CD = \{(x, y) : y = \sqrt{x-l}, l \leq x \leq x_*\}$, $AB = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\}$ (рис. 2) і $G_z^{(2)}$: $AD = \{(x, y) : 0 \leq x \leq l, y = 0\}$, $AB = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq H\}$, $CD = \{(x, y) : y = 0, l \leq x \leq x_*\}$ (рис. 3).

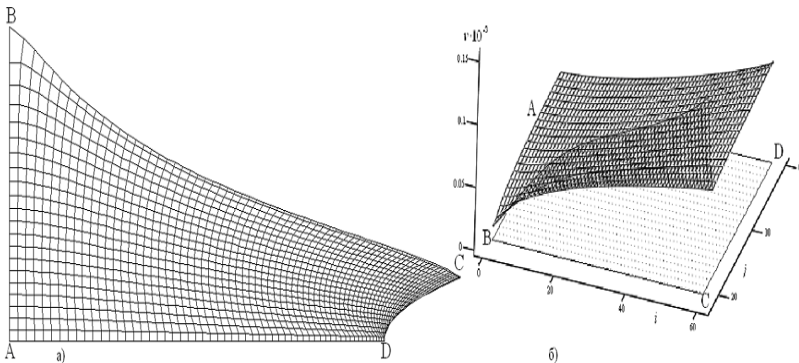


Рис. 2. Динамічна сітка в області $G_z^{(1)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

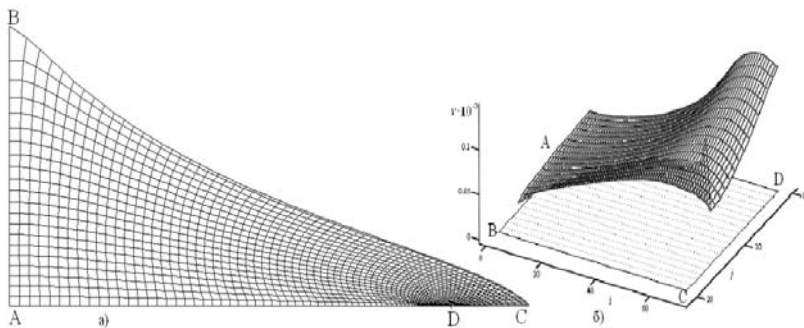


Рис. 3. Динамічна сітка в області $G_z^{(2)}$ (а) і поверхня величини швидкості відносно відповідної області комплексного потенціалу (б)

При розбитті областей $m \times n = 70 \times 20$, точності наближення $\varepsilon = 10^{-5}$, модельних параметрах елемента пласта-колектора $H = 10$ м, $l = 20$ м і заданих $\kappa_f = 10^{-3} \text{ мм}^2 / \text{Па} \cdot \text{с}$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, знайдено значення фільтраційних витрат $Q = 0,023501 \text{ м}^3 / \text{добу}$ і $Q = 0,022982 \text{ м}^3 / \text{добу}$ та координати точки C — $(23.946, 1.986)$ і $(23.423, 0)$ для областей $G_z^{(1)}$ і $G_z^{(2)}$ відповідно.

Висновки. Таким чином, розроблений раніше конструктивний підхід до математичного моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів поширено на випадок безнапірного руху нафти у нафтовому пласті. Запропоновано методика розв'язання крайових задач для криволінійних областей з вільною межею, обмежених лініями течії і екіпотенціальними лініями, на основі синтезу числових методів конформних відображень та сумарних зображень. Побудований алгоритм забезпечує можливість автоматичного розрахунку динамічної сітки, обчислення повної фільтраційної витрати, знаходження невідомої ділянки межі і координат точки перетину її із заданою ділянкою та значення потенціалу (напору) у цій точці. Проведено числові розрахунки характерних параметрів фільтрації у модельному пласті-колекторі. Поєднання методів комплексного аналізу (обернень конформних відображень) і формул сумарних зображень для наближення внутрішніх вузлів дозволило покращити існуючі алгоритми розв'язання такого класу задач.

Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень : [монографія] / А. Я. Бомба, О. М. Гладка, А. П. Кузьменко. — Рівне : ТзОВ «Ассоль», 2016. — 283 с.

2. Басниев К. С. Нефтегазовая гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриев, Г. Д. Розенберг. — М. ; Ижевск : Ин-т комп. исследований., 2005. — 544 с.
3. Ahamadi M. Modeling and Simulation of Compressible Three-Phase Flows in an Oil Reservoir: Case Study of Tsimiroro Madagascar / M. Ahamadi, H. T. Rakotondramiarana // American Journal of Fluid Dynamics. — 2014. — № 4 (4). — P. 181–193.
4. Бомба А. Я. Методы комплексного анализа идентификации параметров квазиидеальных процессов в нелинейно двоякостроистых пористых пластах / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 6. — С. 17–28.
5. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А. Я. Бомба, О. М. Гладка // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — Львів, 2013. — № 18. — С. 32–42.
6. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains / O. Hladka, A. Bomba // Journal of Mathematics and System Science (USA). — 2014. — Vol. 4, № 7 (Ser. No. 29). — P. 514–521.
7. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак — Рівне : НУВГП, 2013. — 415 с.
8. Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. — К. : Наукова думка, 1973. — 264 с.

The developed methodology of mathematical modeling filtration processes (processes of oil displacement) on the basis of syntheses of the numerical methods of complex analysis and summary representations was extended to the free-flow movement of oil in the oil reservoir. The computational technology of decision of the boundary value problems for the calculation the mode of filtration in curvilinear domains bounded by lines of flow and equipotential lines with a free (unknown) border was created. Constructed algorithm automatically solves the problem of choice of units and the construction of a dynamic grid, finding the unknown border, calculate the total flow and calculate the field values of speed.

Key words: *mathematical modeling, numerical methods of complex analysis, quasiconformal mappings, summary representations methods, filtration process, reservoir of oil, domain with free boundary.*

Отримано: 18.04.2016

УДК 519.63

К. О. Гомон, аспірант,

І. І. Дияк, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПАРАЛЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВІ ГІБРИДНИХ СКІНЧЕННО- ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

Розглядається використання паралельних обчислень при розв'язуванні задач теорії пружності методом декомпозиції області. Формулюється гетерогенна числова модель. В одній частині підобластей використовуються апроксимації методу скінченних елементів, а в іншій — прямого методу граничних елементів. Для розв'язування системи лінійних рівнянь розроблено паралельний алгоритм на основі методу спряжених градієнтів. Наведено результати апробації запропонованого підходу на модельному прикладі.

Ключові слова: *метод декомпозиції області, паралельні обчислення, метод скінченних елементів, метод граничних елементів, паралельний метод спряжених градієнтів.*

Вступ. Серед сучасних числових методів розв'язання крайових задач математичної фізики найпоширенішими є метод скінченних різниць, метод скінченних елементів (МСЕ) і метод граничних елементів (МГЕ). Кожен із методів має свої характерні переваги та недоліки, що зумовлюють область його застосування. Відтак для розв'язування задач, які містять підобласті з різними фізико-механічними чи геометричними характеристиками та властивостями, доцільно використовувати комбіновані методи скінченних та граничних елементів у рамках однієї чисельної моделі, що поєднує переваги обох методів. Окрім того, однією із основних вимог до сучасних чисельних алгоритмів є можливість їх ефективного розпаралелювання та організації розподілених обчислень. Побудові такого підходу присвячена дана робота.

Постановка задачі. Розглядається крайова задача в області Ω . Область Ω представляється як об'єднання n_p підобластей, тобто $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_{n_p}$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, n_p$. Пропонується для розв'язування задачі використовувати у частині підобластей $\Omega_i, i \in I_{МСЕ}$ — МСЕ, а в іншій групі підобластей $\Omega_i, i \in I_{МГЕ}$ — МГЕ. Поділ області Ω на підобласті Ω_i зумовлюється специфікою задачі (наявність локальних неоднорідностей, зон концентрацій напружень і

т. п.) і відповідно віднесення їх до конкретної групи з майбутнім використанням МСЕ чи МГЕ. Для побудови комбінованої чисельної схеми розв'язування крайової задачі на основі МСЕ і МГЕ необхідно сформулювати відповідну гетерогенну модель [1, 3].

Формулювання задачі для гетерогенної моделі. Нехай $\Omega \subset R^2$ — обмежена область з Ліпшицевою границею $\Gamma = \partial\Omega$. $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, де Γ_D і Γ_N — частини границі, на яких задані кінематичні та статичні граничні умови, відповідно. Розглядається змішана крайова задача лнійної теорії пружності:

$$\Delta^* u = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} u) = 0 \text{ у } \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma_D} = g, \quad (2)$$

$$p(u)|_{\Gamma_N} = h, \quad (3)$$

де u — поле переміщень, Δ — Лапласіан, λ і μ — сталі Ляме,

$$p(u(x))|_{\Gamma_N} = \lambda(\operatorname{div} u) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \mu \times \operatorname{rot} u = \sigma_{ij} n_j \text{ — оператор зусиль,}$$

$\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, n — вектор одиничної зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$.

Для простоти викладу та побудови гетерогенної чисельної схеми вважатимемо, що область Ω розбивається тільки на дві підобласті, а саме Ω_F — підобласть, у якій розв'язок знаходиться МСЕ і Ω_B — підобласть, у якій розв'язок знаходиться МГЕ. Γ_C — спільна границя підобластей Ω_F і Ω_B , на якій задаються умови нерозривності $u|_{\Gamma_C \cap \Omega_B} = u|_{\Gamma_C \cap \Omega_F}$, $p|_{\Gamma_C \cap \Omega_B} + p|_{\Gamma_C \cap \Omega_F} = 0$ (рис. 1).

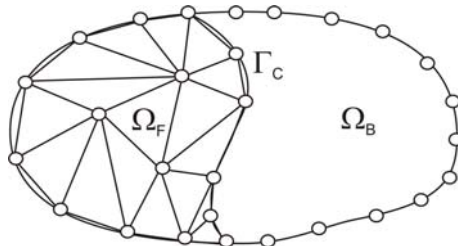


Рис. 1. Декомпозиція області на підобласті для застосування МСЕ і МГЕ

Введемо позначення: $u_F = u|_{\Omega_F}$, $u_B = u|_{\Omega_B}$, $\Gamma_{BD} = \partial\Omega_B \cap \Gamma_D$

$\Gamma_{BN} = \partial\Omega_B \cap \Gamma_N$, $\Gamma_{FD} = \partial\Omega_F \cap \Gamma_D$, $\Gamma_{FN} = \partial\Omega_F \cap \Gamma_N$.

Енергетичний простір пробних функцій позначимо

$$H_D^1(\Omega_F) = \{v_F \in H^1(\Omega_F) : v_F = 0 \text{ при } x \in \Gamma_{FD}\}. \quad (4)$$

Значимо, що $\forall u \in H^1(\Omega_B)$, її слід $\bar{u} \in H^{1/2}(\partial\Omega_B)$, а $p \in H^{-1/2}(\partial\Omega_B)$ — простору, спряженому до $H^{1/2}(\partial\Omega_B)$. Скалярний добуток у $H^{1/2}(\partial\Omega_B)$, або відношення двоїстості між $H^{1/2}(\partial\Omega_B)$ і $H^{-1/2}(\partial\Omega_B)$, запишемо у вигляді

$$\langle p, u \rangle = \int_{\partial\Omega_B} (p, u) d\Gamma, \quad (5)$$

де (\cdot, \cdot) — скалярний добуток в R^n .

Уведемо також підпростір

$$H_0^{-1/2}(\partial\Omega_B) := \{\chi \in H^{-1/2}(\partial\Omega_B) : \langle \chi, 1 \rangle = 0 \wedge \langle \chi, r \rangle = 0\},$$

де r — радіус-вектор точки.

Уведемо простір мортарних функцій

$$\tilde{u} \in H^{1/2}(\partial\Omega_B) := \left\{ \tilde{w} = w, x \in \partial\Omega_B : w \in H^1(\Omega) \text{ і } \|\tilde{w}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_B)} := \inf \|w\|_{H^1(\Omega)} \right\}$$

і простір-добуток

$$\mathfrak{R} = \left\{ (w_F, \tilde{w}) \in H^1(\Omega_F) \times H^{1/2}(\partial\Omega_B) : \tilde{w} = w_F, x \in \Gamma_C \right\} \quad (6)$$

з нормою

$$\|(w_F, \tilde{w})\|_{\mathfrak{R}} := \inf \left\{ \|w\|_{H^1(\Omega)}, w \in H^1(\Omega), w = w_F, x \in \Omega_F \text{ і } w = \tilde{w}, x \in \partial\Omega_B \right\}.$$

Простір пробних функцій визначимо як

$$\mathfrak{R}_D = \left\{ (v_F, \tilde{v}) \in \mathfrak{R} : v_F \in H^1(\Omega_F) \text{ і } \tilde{v} = 0, x \in \Gamma_{BD} \right\}. \quad (7)$$

Оскільки Δ^* — оператор задачі Ляме є симетричний та додатковизначений, то слабке формулювання для гетерогенної чисельної схеми можна записати так:

знайти

$$\left((u_F, \tilde{u}), u_B, p_B \right) \in \mathfrak{R} \times H^{1/2}(\Gamma_B) \times H^{-1/2}(\Gamma_B) \quad (8)$$

при

$$u_F = g, x \in \Gamma_{FD}, \tilde{u} = g, x \in \Gamma_{BD}, \quad (9)$$

що задовольняє варіаційне рівняння $\forall (v_F, \tilde{v}) \in \mathfrak{R}_D$

$$a_{\Omega_F}(u_F, v_F) + \langle p_B, \tilde{v} \rangle_{\Gamma_B} = \int_{\Gamma_{FN}} h v_F d\Gamma + \int_{\Gamma_{BN}} h \tilde{v} d\Gamma, \quad (10)$$

умови спряження

$$\int_{\Gamma_B} (\tilde{u} - u_B) \chi_B d\Gamma = 0 \quad \text{для } \forall \chi_B \in H_0^{-1/2}(\Gamma_B) \quad (11)$$

та граничне інтегральне рівняння

$$\left\langle \left(\frac{1}{2} I + K \right) u_B, \chi_B \right\rangle_{\Gamma_B} = \langle V p_B, \chi_B \rangle_{\Gamma_B}, \quad \forall \chi_B \in H_0^{-1/2}(\Gamma_B) \quad (12)$$

У рівнянні (12) V і K — граничні інтегральні оператори пружного простого та подвійного шару, відповідно.

Постановка задачі (8)–(12) дозволяє використовувати апроксимації МСЕ і МГЕ у відповідних підобластях. Для розв'язування цієї задачі у роботах [1, 3, 4] розроблено паралельні та послідовні ітераційні алгоритми методу декомпозиції області (МДО), досліджено збіжність ітераційних схем, продемонстрована їх ефективність на модельних задачах.

Метод розв'язування. Незважаючи на велику кількість різних формулювань гібридних гранично-скінченноелементних методів у численних наукових публікаціях, відомо два основні способи реалізації МДО, тобто методів поділу області без налягання підобластей. Прямі методи [5] передбачають формування єдиної глобальної системи рівнянь для всієї області і їх, у свою чергу, можна поділити на дві підгрупи. У першому випадку підобласть для МГЕ трактується як один скінченний суперелемент (макроелемент). Рівняння МГЕ, які пов'язують переміщення і зусилля, перетворюють у рівняння зв'язку між силами та переміщеннями, як у МСЕ. У другому підході, шляхом відповідних перетворень, записують рівняння для підобласті МСЕ у вигляді, подібному до рівнянь МГЕ. Результируюча матриця системи лінійних рівнянь (СЛАР) при цьому втрачає властивість розрідженості і, у загальному випадку, симетричності. Альтернативою прямим методам є побудова ітераційних алгоритмів [1, 4], в яких рівняння для підобластей розв'язують окремо. У ітераційному процесі, граничні умови на спільній межі підобластей оновлюються, до тих пір поки не виконається умова збіжності. У [1, 4] досліджено ефективність застосування паралельних і послідовних ітераційних схем МДО для розв'язування різних задач, а також проведено аналіз їх збіжності.

У даній роботі розглядається підхід паралельної реалізації МДО на n_p процесорах, суть якого полягає у формуванням єдиної глобальної системи рівнянь для всієї області де підобласті для МГЕ трактуються як окремі скінченні суперелементи. У випадку послідовного алгоритму всі етапи розв'язування виконуються послідовно: введення вхідних даних; побудова сітки МСЕ чи МГЕ; обчислення локальних (елементних) матриць; формування матриць системи

$$Ax = b, \quad (13)$$

розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь (13).

У запропонованому підході глобальна система рівнянь для всієї області не формується. Алгоритм ґрунтується на представленні матриць і векторів для всієї області через локальні матриці та вектори для підобластей з використанням булевих матриць зв'язності, які відображають співвідношення між локальними степенями вільності та незалежними невідомими для всієї області.

Позначимо через \tilde{A}_i матрицю жорсткості, \tilde{x}_i — вектор невідомих, \tilde{b}_i — вектор правих частин підобласті Ω_i без вкладів з сусідніх підобластей, а через \bar{A}_i , \bar{x}_i , \bar{b}_i ті ж величини, але з вкладами з сусідніх підобластей у глобально розподіленому форматі. Також допустимо, що нумерація невідомих у підобласті здійснена від 1 до n_i , а N — розмірність системи (13). Глобальну матрицю жорсткості A можна представити, використовуючи булеву матрицю $C_i \in Z^{n_i \times N}$ (матрицю зв'язності), формулою

$$A = \sum_{i=1}^{n_p} C_i^T \tilde{A}_i C_i. \quad (14)$$

Аналогічно глобальні вектори x і b можна представити через глобально розподілені вектори \bar{x}_i і \bar{b}_i

$$\bar{x}_i = C_i x, \quad \bar{b}_i = C_i b, \quad (15)$$

або через локально розподілені вектори \tilde{x}_i і \tilde{b}_i

$$x = \sum_{i=1}^{n_p} C_i^T \tilde{x}_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n_p} C_i^T \tilde{b}_i. \quad (16)$$

Відповідно локально розподілені вектори \tilde{x}_i і \tilde{b}_i , використовуючи формули (15), (16), можна перетворити у глобально розподілені вектори \bar{x}_i і \bar{b}_i за формулами

$$\bar{x}_i = C_i \sum_{i=1}^{n_p} C_i^T \tilde{x}_i, \quad \bar{b}_i = C_i \sum_{i=1}^{n_p} C_i^T \tilde{b}_i. \quad (17)$$

Необхідно відзначити, що саме обчислення за формулами (17) вимагають комунікації між процесорами, тобто здійснення обміну між процесорами частинами векторів \tilde{x}_i і \tilde{b}_i , які необхідні для обчислення \bar{x}_i і \bar{b}_i . Позначимо процедуру перетворення \tilde{x}_i у \bar{x}_i і \tilde{b}_i у \bar{b}_i як

$$\bar{x}_i \equiv \sum_{\Leftrightarrow}^{\partial\Omega_i} \tilde{x}_i, \quad \bar{b}_i \equiv \sum_{\Leftrightarrow}^{\partial\Omega_i} \tilde{b}_i. \quad (18)$$

Паралельний алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь методом спряжених градієнтів. Наступним етапом, який вима-

гає розпаралелення обчислень між n_p процесами, є розв'язування системи лінійних рівнянь. Подамо алгоритм на основі методу спряжених градієнтів (МСГ), який не вимагає побудови глобальної матриці жорсткості та дає можливість ефективно використовувати паралельні обчислення. Основні кроки алгоритму:

1.1. Вибрати початкове наближення $\tilde{x}_i^0 (i=1, n_p)$ і точність обчислення $\varepsilon > 0$.

1.2. Обчислити $\tilde{r}_i^0 = \tilde{b}_i - \tilde{A}_i \tilde{x}_i^0$.

1.3. Перетворити \tilde{r}_i^0 у $\bar{r}_i^0 \equiv \sum_{\Omega_i} \tilde{x}_i$. Для цього здійснюється пересилка між процесорами тих частин векторів \tilde{r}_i^0 , які роблять вклад у сусідні області з подальшим їх сумуванням.

1.4. Задати $\bar{p}_i^0 = \bar{r}_i^0$ і $k = 0$ (номер ітерації).

1.5. Обчислити $\|r^0\|_2$. Для цього використовуються елементи вектора \bar{r}_i^0 . Ті частини вектора, які належать декільком областям Ω_i враховуються тільки один раз.

2.1. Обчислити скалярний добуток $\rho_k = \sum_{i=1}^{n_p} (\tilde{r}_i^k, \bar{p}_i^k)$. Для цього кожний процес обчислює $(\tilde{r}_i^k, \bar{p}_i^k)$. Далше проводиться сумування результатів з усіх процесів з відправкою на процес з номером 0, а потім розсилка ρ_k на усі процеси.

2.2. Обчислити $\tilde{q}_i^k = \tilde{A}_i \bar{p}_i^k$.

2.3. Аналогічно до кроку 2.1 обчислити $\gamma_k = \sum_{i=1}^{n_p} (\tilde{q}_i^k, \bar{p}_i^k)$.

2.4. Обчислити $\alpha_k = \frac{\rho_k}{\gamma_k}$.

2.5. Обчислити нове наближення $\bar{x}_i^{k+1} = \bar{x}_i^k + \alpha_k \bar{p}_i^k$.

2.6. Обчислити $\tilde{r}_i^{k+1} = \tilde{r}_i^k - \alpha_k \tilde{q}_i^k$.

2.7. Аналогічно до кроку 1.3 обчислити \bar{r}_i^{k+1} .

2.8. Обчислити $\|r^{k+1}\|_2$ (аналгічно до кроку 1.5).

2.9. Здійснити перевірку збіжності $\|r^{k+1}\|_2 / \|r^0\|_2 < \varepsilon$. Якщо «так», то припинити алгоритм, інакше продовжити обчислення.

3.1. Обчислити $g_k = \sum_{i=1}^{n_p} (\bar{r}_i^{k+1}, \tilde{q}_i^k)$.

3.2. Обчислити $\beta_k = \frac{g_k}{\gamma_k}$.

3.3. Обчислити $\bar{p}_i^{k+1} = \bar{r}_i^{k+1} - \beta_k \bar{p}_i^k$.

3.4. Збільшити k на одиницю і перейти до кроку 2.1.

Тестовий приклад. Апробація запропонованого підходу до розпаралелення обчислень у методі декомпозиції області проводилась на кластері Львівського національного університету імені Івана Франка, який складається з 14 обчислювальних вузлів і сервера. Обчислювальні вузли — AMD® Athlon II 2x із частотою 2,9 ГГц, 8 Гб ОЗП, 500 Гб HDD. GPU — Nvidia GTS450 (CUDA 2.1). Операційна система: Scientific Linux 6.2 (ядро 3.6.6). Усі обчислювальні вузли для обміну даними між паралельними процесами користувацьких задач об'єднані мережею Ethernet 1 Гбіт/с.

Дослідження проводились на одному (последовний алгоритм), двох і чотирьох вузлах. Для цього область Ω розбивалась на дві ($n_p = 2$) і чотири підобласті ($n_p = 4$). Розбиття всієї області і кожної підобласті здійснювалось таким чином, щоб розмірність СЛАР була однаковою у всіх трьох випадках, тобто для последовного алгоритму, паралельного на двох процесорах і паралельного на чотирьох процесорах. У таблиці 1 наведено результати обчислень для різної кількості розбиття на елементи. У першому стовбці таблиці наведено розмірність СЛАР, стовбці таблиці 4 і 6 містять відношення часу обчислення на одному процесорі до відповідного часу на кожному з двох або чотирьох процесорів, тобто ефективність використання паралельних обчислень.

Таблиця 1

Результати обчислень

розмірність СЛАР	последовний алгоритм (час)	2 процесори (час)	2 процесори (прискорення)	4 процесори (час)	4 процесори (прискорення)
1 268	1.49	0.51	2.92	0.38	3.96
7 132	142.99	38.24	3.74	14.46	9.89
14 300	884.45	227.24	3.89	60.28	14.67

Висновки. Запропонована гетерогенна числова модель дозволяє використовувати в одній частині підобластей апроксимації методу скінченних елементів, а в іншій — прямого методу граничних елементів. Такий підхід особливо ефективний у випадку наявності у задачі локальних неоднорідностей. Розроблений паралельний алгоритм розв'язування СЛАР на основі методу спряжених градієнтів дозволяє

не формувати глобальну матрицю у МДО, що значно скорочує загальний час розрахунку задачі. Як видно з результатів таблиці 1 у залежності від розміру задачі та структури сітки зменшення часу обчислень становило від 3-4 до 10-14 разів.

Список використаних джерел:

1. Григоренко А. Я. Применение метода декомпозиции области с использованием гибридных аппроксимаций для решения задач теории упругости / А. Я. Григоренко, И. И. Дьяк, И. И. Прокопышин // Прикладная механика. — 2008. — Т. 44, № 11. — С. 18–29.
2. Дьяк І. І. Чисельне дослідження плоскої задачі теорії пружності методом граничних елементів / І. І. Дьяк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — Т. 40. — С. 60–64.
3. Дьяк І. Числова ефективність гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій задач теорії пружності на підставі методу декомпозиції області / І. Дьяк, І. Макар, І. Прокопишин // Вісник Львівського університету. — 2007. — № 12: Серія прикладна математика та інформатика. — С. 93–100.
4. Dyjak I. I. Domain Decomposition Methods for Problems of Unilateral Contact Between Elastic Bodies with Nonlinear Winkler Covers / I. I. Dyjak, I. I. Prokopyshyn, R. M. Martynyak, I. A. Prokopyshyn // Lecture Notes in Computational Science and Engineering / ed. J. Erhel, M. J. Gander and oth. Springer Int. Publ. Switzerland. — 2014. — P. 739–748.
5. Elleithy W. Analysis of Problems in Elasto-Plasticity via an Adaptive FEM-BEM Coupling Method / W. Elleithy // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Vol. 197, Issues 45–48. — P. 3687–3701.

The parallel computing for solving the problems of elasticity by domain decomposition method is used. The heterogeneous numerical model is formulated. We use the finite element method in one of the subdomains and a direct boundary element method in another. Parallel algorithm based on conjugate gradient method is developed for solving a system of linear equations. The results of testing the proposed approach for modeling example are considered.

Key words: *domain decomposition method, parallel computing, finite element method, direct boundary element method, parallel conjugate gradient method.*

Отримано: 04.04.2016

УДК 621.501.72

П. І. Ковальчук*, д-р. техн. наук,

О. С. Демчук**, канд. техн. наук,

Р. Ю. Коваленко*

*Інститут водних проблем і меліорації НААН України, м. Київ,

**Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗАБРУДНЕННЯ В РІЧКАХ ПРИ ПРОМИВКАХ ІЗ ВОДОСХОВИЩ

Розглянуто проблему математичного моделювання процесів поширення забруднень в річках при промивках із водосховищ. Розроблено балансову двошарову модель динаміки руху потоку при промивці. Створено програмний комплекс, що реалізує моделювання процесів промивки р. Інгулець водами з Карачунівського водосховища.

Ключові слова: забруднення річки, промивка із водосховища, балансова модель, донні відкладення, якість води для зрошення, витрата води.

Вступ. Водогосподарська ситуація гірничорудних підприємств Кривбасу характеризується надлишком зворотних вод. Щорічно в Кривбасі відкачується майже 18-20 млн. м³ кар'єрних вод та 20-22 млн м³ шахтних вод з мінералізацією від 5 до 96 г/л. Шахтні води є переважно хлоридними водами з високим вмістом хлорид-, натрій-, сульфат-, магній-, та кальцій-іонів, що перевищують ГДК для поверхневих вод [1].

Найбільшими забруднювачами басейну р. Інгулець являються: голвна притока р. Саксагань; хвостосховища, які знаходяться біля р. Інгулець; ставки, зокрема балка Свистуново. В залежності від виду забруднювачів здійснюється формалізація їх впливу на об'єкт (безпосереднє змішування потоків, поширення забруднень через ґрунтові води та ін.).

У хвостосховищах в басейні р. Інгулець складаються відходи збагачення залізних та уранових руд. Крім того, вони виконують важливу водорегулюючу функцію, оскільки є найважливішою складовою ланкою системи оборотного водопостачання комбінатів [2].

Проблема хвостосховищ полягає в тому, що в них скидаються також і високомінералізовані шахтні води, внаслідок чого мінералізація води у водоймах хвостосховищ збільшується. Ці води утворюють небезпеку виникнення потужних гідрохімічних аномалій, які мають негативний вплив на прилеглу територію і поверхневі води. У Криворізькому басейні розташовані наступні хвостосховища (рис. 1):

Північного гірничо-збагачувального комбінату (ПівнГЗК), Центрального гірничо-збагачувального комбінату (ЦГЗК), хвостосховище Миролюбівське Інгулецького гірничо-збагачувального комбінату (ІнГЗК) та об'єднане хвостосховище Новокриворізьського (НкГЗК) та Південного (ПівдГЗК) гірничо-збагачувальних комбінатів [1].

Через ґрунтові води розчини мігрують із хвостосховищ у притоки р. Інгулець або в саму річку. Цим самим вони являються дифузними джерелами забруднення поверхневих вод. Математичне моделювання інфільтрації забруднюючих речовин у річку здійснюється на основі моделі [3] із розв'язанням оберненої задачі визначення інтенсивності впливу дифузного джерела забруднень.

З метою поліпшення ситуації Держводагентство України організовує проведення промивання русла р. Інгулець за рахунок подачі води по каналу Дніпро-Інгулець (60–65 млн. м³). Це у деякій мірі поліпшує хімічний склад води у р. Інгулець, але повністю не вирішує проблему одержання задовільної якості води для зрошення.

Ставиться задача сценарного аналізу різних варіантів промивки й вибору найбільш оптимального з них, що забезпечить необхідну якість води для здійснення зрошення на Інгулецькій зрошувальній системі (рис. 1).

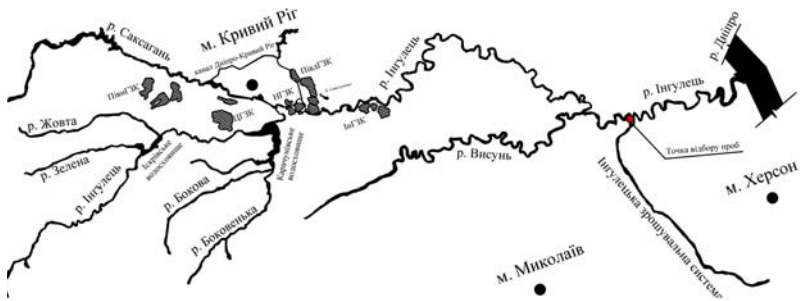


Рис. 1. Схема басейну р. Інгулець з її притоками та розташуванням основних хвостосховищ у Криворізькому басейні

Математична модель динаміки забруднення річки при промивці з водосховища. Із системи рівнянь Сен-Венана, що описує нестационарний рух рідини у відкритих руслах, матимемо:

$$b \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = q, \quad (1)$$

де $y_1(x, t)$ — глибина води (у верхньому шарі); $Q_1(x, t)$ — витрати води в руслі (верхній шар); $q(x, t)$ — розподілений боковий притік; $b(y)$ — ширина потоку по вільній поверхні води.

Це рівняння з координатою t , як нестационарне, розглядається вздовж руху хвилі по x . Після проходження хвилі $\frac{\partial y_1}{\partial t} = 0$ і дане рівняння стає стаціонарним: $\frac{\partial Q_1}{\partial x} = q$ з постійною витратою Q_1 .

Фізична модель може бути представлена різницеvim рівнянням:

$$Q_1^{i+1} = Q_1^i + q \cdot \Delta x. \quad (2)$$

Коли потік із Карачунівського водосховища з витратою Q_1 проходить по p . Інгулець, він піднімає мул, який рухається зі швидкістю $v_2 \leq v_1$ і витратою Q_2 .

Перенесення і взаємодія верхнього шару води з нижнім (з мулом і високою концентрацією забруднюючих речовин) описується системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} a(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \mu(x)S + f(x, t); & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -v_2(x) \frac{\partial S}{\partial x} - \mu(x)S + d(x, t), & (4) \end{cases}$$

де u, S — концентрації забруднюючих речовин у верхньому і нижньому шарах відповідно; v_1, v_2 — швидкість руху води у верхньому та нижньому шарах; $a(x)$ — коефіцієнт дифузії; $\mu(x)$ — інтенсивність вимивання забруднень з нижнього шару.

Рівняння (3) та (4) в різницеvій формі матимуть вигляд:

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{\Delta x} \left[\left(a^2(x) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - v_1 u_i^n \right) - \left(a^2(x) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - v_1 u_{i-1}^n \right) \right] + \\ + \tau \mu_i S_i^n \pm \tau f(x_i, t_n); & (5) \\ S_i^{n+1} = S_i^n - \tau \mu(x) S_i^n + \frac{\tau}{\Delta x} (v_2 S_{i-1}^n - v_2 S_i^n). \end{cases}$$

Балансова модель динаміки руху потоку при промивці р. Інгулець водами Карачунівського водосховища. Побудуємо різницеvі балансові моделі, виходячи з наступних міркувань. Після випуску води з Карачунівського водосховища в р. Інгулець відбуваються три процеси:

- 1) витіснення солонуватих вод у р. Дніпро (у нижній течії р. Інгулець);
- 2) переміщення водних мас у двох шарах — придонному і поверхневому;

3) часткове змішування двох водних потоків — придонного і поверхневого, після чого встановлюються нові концентрації солей в обох шарах.

У відповідності з рівняннями (1), (3) та (4), які описують загальний вигляд нестационарного руху рідини та переносу забруднень, для вивчення промивки р. Інгулець імпульсним методом [4] розроблено балансову модель.

Пропонується балансова камерна модель (336 комірок з кроком 1 км., 337-а комірка — стік в Дніпро). Тоді рівняння переміщення (витіснення) водних мас мають вигляд:

- для верхнього шару:

$$W_i^{n+1} = r(W_i^n + q_i^n) + (1-r)(W_{i-1}^n + q_{i-1}^n), \quad (6)$$

де W_i^n , W_{i-1}^n — об'єми води в i -й момент часу в i -й та $(i-1)$ -й комірці; q_i^n , q_{i-1}^n — об'єми води в n -й момент часу в i -й та $(i-1)$ -й комірці, що надходять з приток або фільтруються з ґрунтовими водами; W_i^{n+1} — водні ресурси в i -й комірці в $(n+1)$ -й момент часу; r — коефіцієнт що залежить від швидкості потоку: при $r = 0$, водні маси з i -й комірки переходять цілком в $(i+1)$ -й комірку, при $r = 1$ — повністю стояча вода, $0 < r < 1$ — частина води залишається в i -й комірці, інша частина надходить з $(i-1)$ -ї комірки; $0 \leq r \leq 1$; $i = 1, \dots, 336$; $r = 0,02$ (взято в сценарії).

- для нижнього шару:

$$D_i^{n+1} = D_i^n \mu + p_i^n \mu + (1-\mu)(D_{i-1}^n + p_{i-1}^n), \quad (7)$$

де D_i^n , D_{i-1}^n — водні ресурси, що надходять з i -ї та $(i-1)$ -ї комірок; p_i^n , p_{i-1}^n — водні ресурси, які надходять в нижній шар з приток або фільтруються з ґрунту; μ — коефіцієнт швидкості руху води, при $\mu = 1$ — стояча вода; $\mu = 0$ — все надходить з $(i-1)$ -ої комірки; $0 \leq \mu \leq 1$; $\mu = 0,25$ (взято в сценарії).

Процеси перемішування нижнього та верхнього шарів відбуваються в такій послідовності: спочатку відбувається перетік води, а потім змінюються концентрації забруднюючої речовини в результаті змішування.

Концентрація в $(n+1)$ -й момент часу в i -й комірці в результаті змішування у верхньому шарі знаходиться за формулою:

$$U_i^{n+1} = \frac{rW_i^n U_i^n + r q_i^n C_{q_i}^n + (1-r)W_{i-1}^n U_{i-1}^n + (1-r)q_{i-1}^n C_{q_{i-1}}^n + \lambda D_i^n S_i^n - \lambda D_i^n U_i^n}{W_i^{n+1}}, \quad (8)$$

де змішуються у верхній частині потоку: $rW_i^n U_i^n$ — водні ресурси rW_i^n з концентрацією U_i^n в i -й комірці (в n -й момент часу); $r q_i^n C_{q_i}^n$ — водні ресурси $r q_i^n$, які поступили з притоки чи з ґрунтових вод з концентрацією $C_{q_i}^n$ в i -й комірці; $(1-r)W_{i-1}^n U_{i-1}^n$ — водні ресурси $(1-r)W_{i-1}^n$ з концентрацією U_{i-1}^n в i -й комірці; $(1-r)q_{i-1}^n C_{q_{i-1}}^n$ — водні ресурси, $(1-r)q_{i-1}^n$, що надійшли з $(i-1)$ -ої комірки в дану комірку з притоки чи з ґрунтових вод з концентрацією $C_{q_{i-1}}^n$.

Між верхнім і нижнім шаром іде водообмін: з нижнього шару надходять у верхній водні ресурси λD_i^n з концентрацією S_i^n і опускаються в нижній шар — λD_i^n з концентрацією U_i^n .

Концентрація в $(n+1)$ -й момент часу в i -й комірці нижнього шару знаходиться за формулою:

$$S_i^{n+1} = \frac{\mu D_i^n S_i^n + \mu p_i^n R_{q_i}^n + (1-\mu)D_{i-1}^n S_{i-1}^n + (1-\mu)p_{i-1}^n R_{q_{i-1}}^n - \lambda D_i^n S_i^n + \lambda D_i^n U_i^n}{D_i^{n+1}}, \quad (9)$$

де змішуються в нижній частині потоку: $\mu D_i^n S_i^n$ — водні ресурси μD_i^n з концентрацією S_i^n , що залишилися в i -й комірці; $\mu p_i^n R_{q_i}^n$ — водні ресурси μp_i^n з концентрацією $R_{q_i}^n$, що надходять із ґрунту з ґрунтовими водами або з притоку річки (μ — коефіцієнт, при $\mu \rightarrow 0$, швидкість потоку зростає, при $\mu \rightarrow 1$, швидкість потоку зменшується до нуля); $(1-\mu)D_{i-1}^n S_{i-1}^n$ — водні ресурси, що надійшли з $(i-1)$ -ї комірки з концентрацією S_{i-1}^n ; $(1-\mu)p_{i-1}^n R_{q_{i-1}}^n$ — водні ресурси $(1-\mu)p_{i-1}^n$ з концентрацією $R_{q_{i-1}}^n$, що надходять в $(i-1)$ -у комірку з притоку або з ґрунтових вод; $-\lambda D_i^n S_i^n$ — водні ресурси $-\lambda D_i^n$ з концентрацією S_i^n , що надходять в верх, у верхній шар (знак «мінус» означає убування з нижнього шару); $\lambda D_i^n U_i^n$ — водні ресурси, що надходять з верхнього шару в нижній з концентрацією U_i^n (яка у верхньому шарі).

Тобто, процес промивки полягає в тому, що більш солоня вода піднімається у верхній шар, а менш солоня опускається в нижній шар.

Натурне та теоретичне обґрунтування промивки р. Інгулець дніпровською водою. Існуючий регламент промивки р. Інгулець полягає в тому, що весною, в залежності від погодних умов року, проводиться промивка великими витратами (15–20 м/с) води р. Інгулець, яка триває кілька діб. Поступова витрата води зменшується до 5 м/с і залишається сталою протягом вегетаційного періоду. Як показує характеристика основних забруднювачів р. Інгулець, їх специфічний вплив полягає в тому, що вони забруднюють річку протягом всього року. Так, в період з листопада по лютий забруднення скидаються у великих кількостях відповідно до Регламенту скидів зворотних, високомінералізованих шахтних вод у річки Інгулець і Саксагань. У вегетаційний період (з березня по жовтень кожного року) часто відбуваються аварійні скиди забруднень та неорганізовані скиди з дифузних джерел, хвостосховищ та ставків. В цей час за рахунок неорганізованих викидів через ґрунтові води, загальна мінералізація води, а також її значення по окремих показниках зростають.

Для обґрунтування імпульсного методу промивки відбирались проби води біля головної насосної станції Інгулецької зрошувальної системи (рис. 1) до проведення промивок і під час промивки з різних глибин (1 м і 3 м від поверхні). Оцінювання здійснювалось за екологічними та агрономічними критеріями якості води для зрошення. Встановлено, що в результаті промивки вміст показника аніон-хлору (Cl^-) зменшується, а, отже, промивка сприяє поліпшенню якості води, категорія якості якої змінюється від «непридатної» до «обмежено придатної» (рис. 2).

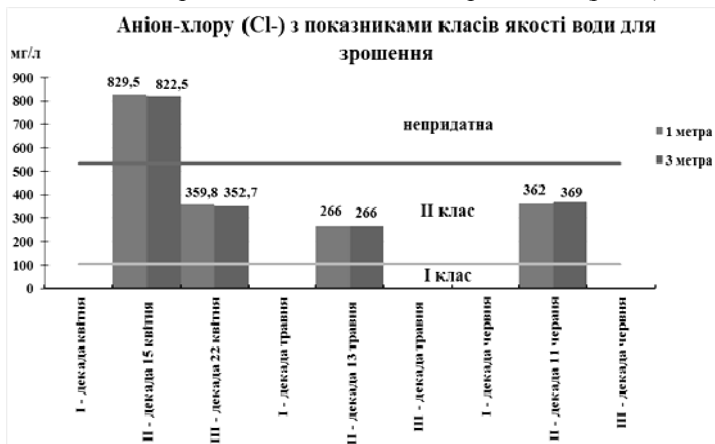


Рис. 2. Динаміка якості води для зрошення в точці водозабору Інгулецької зрошувальної системи за показником аніон-хлору в процесі промивки р. Інгулець з Карачунівського водосховища

В результаті аналізу процесу промивки зафіксовано швидке покращення (за 1–2 доби) показників якості води для зрошення, що важливо для оцінки ефективності варіанту управління та побудови моделей промивки забруднених вод. Проте при зниженні інтенсивності промивки з $24 \text{ м}^3/\text{с}$ до $10 \text{ м}^3/\text{с}$, а в подальшому і до $5 \text{ м}^3/\text{с}$, концентрація дещо підвищилася, хоча залишилася в межах другого класу, тобто є обмежено придатною. Підвищення концентрації пояснюється впливом антропогенних джерел забруднення в басейні р. Інгулець, які діють як дифузні неорганізовані джерела, впливу яких не можна запобігти. Отже, в певний момент часу потрібен ще один імпульс промивки, який знизить величину аніон-хлору та інших показників якості води для зрошення [5].

Проведене теоретичне дослідження та комп'ютерний експеримент показали аналогічний хід динаміки в часі аніон-хлору (СІ) (рис. 2) в процесі промивки р. Інгулець з Карачунівського водосховища.

Висновки.

1. Математичне моделювання процесів забруднення в річках при промивках із водосховищ дозволяє провести сценарний аналіз різних варіантів промивки та вибрати найбільш ефективний з них, що забезпечить водою необхідної якості Інгулецьку зрошувальну систему.
2. В подальшому необхідно встановити біля забору на Інгулецьку зрошувальну систему моніторинговий контроль за якістю води біля забору на зрошення і, в міру потреби, подавати імпульс промивки дніпровською водою з Карачунівського водосховища.

Список використаних джерел:

1. Гідрогеохімічне навантаження хвостосховищ на навколишнє середовище (на прикладі Криворізького рудного регіону) / О. В. Криворучкіна, С. І. Терещенко, І. М. Байсарович, М. М. Коржнев. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Геологія. — 2009. — № 47. — С. 300.
2. Федоров И. С. Складирование отходов рудообогачения / И. С. Федоров, М. Н. Захаров. — М. : Недра, 1989. — 228 с.
3. Kovalchuk P. I. Identification of the model of pollutants distribution in the surface waters based on fieldies / P. I. Kovalchuk, A. V. Gerus // International Conference RIVER BASINS 2015. Monitoring, Modelling & Management of Pollutants. June 24th and 25th 2015. Germany, Karlsruhe — 2015. — P. 101–105.
4. Ковальчук П. І. Сценарне моделювання для оптимізації варіантів формування якості води для зрошення в басейні р. Інгулець / П. І. Ковальчук, Р. Ю. Коваленко. // Чиста вода. Фундаментальні, прикладні та промислові аспекти : матер. III Міжнар. наук.-практ. конф.. — 2015. — С. 99–102.
5. Коваленко Р. Ю. Теоретико-експериментальне обґрунтування регламенту промивки р. Інгулець на основі імпульсного методу подачі води / Р. Ю. Коваленко / Всеукраїнська науково-практична конференція присвячена, Всесвітньому дню води «Вода і робочі місця», ІВПІМ. м. Київ. — 2016. — С. 56–57.

The problem of mathematical modeling of river pollution processes under leaching from reservoirs is devoted. Balance two-layer model of the dynamics of the flow during flushing is developed. Software package that implements the simulation of river Ingulets washing processes from Karachunevske water reservoir is created.

Key words: *river pollution, flushing of the reservoir, balance model, sediment, water quality for irrigation, water consumption.*

Отримано: 19.04.2016

УДК 519.644; 519.711

О. М. Коломис, канд. фіз.-мат. наук,

Л. В. Луц, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики НАН України, м. Київ

ЕФЕКТИВНІ ЗА ШВИДКОДІЄЮ АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЕННЯ ОЦІНОК ВЗАЄМНО КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ РІЗНОЇ ДОВЖИНИ

Запропоновані ефективні за швидкодією алгоритми секціонування для обчислення оцінок взаємно кореляційних функцій стаціонарних ергодичних випадкових процесів послідовностей різної довжини, у випадку, коли одна з них суттєво довші за іншу; отримані оцінки їх основних характеристик.

Ключові слова: *оцінка взаємно кореляційних функцій, «непрямий» алгоритм, алгоритми секціонування, оцінка евклідової норми, похибка заокруглення.*

Вступ. Із появою алгоритму швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [1], було розроблено ряд обчислювальних алгоритмів прискореного розв'язання деяких задач цифрової обробки сигналів. Побудовані і обґрунтовані ефективні за швидкодією алгоритми обчислення таких оцінок ймовірнісних характеристик: оцінок згортки, кореляційних функцій, спектральних щільностей стаціонарних випадкових процесів, виявлення прихованих періодичностей [2] та інші, які базуються на використанні ШПФ.

Одне з найбільш важливих застосувань алгоритму ШПФ пов'язане з використанням теореми про дискретну згортку двох функцій [2]. Такий підхід дозволяє в багатьох випадках суттєво зменшити обсяг обчислювальних витрат і відповідно оцінки похибок заокруглення.

Застосування теореми про дискретну згортку для обчислення оцінок авто- та взаємно кореляційних функцій дозволяє будувати «швидкі», тобто ефективні за швидкодією алгоритми.

Оцінки взаємно кореляційних функцій випадкових послідовностей $x(n)$ і $h(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, має вигляд

$$R(l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-l-1} h(m)x(m+l), \quad l = \overline{0, L-1}. \quad (1)$$

Швидкі алгоритми обчислення (1) можна віднести до двох основних груп: «непрямого» алгоритму та алгоритмів секціонування з різними способами вибору секцій, в залежності від значень N та L . В роботах [2–4] наведено ряд таких алгоритмів, отримані оцінки їх якості та обгрунтована їх ефективність за точністю та швидкодією. В даній статті продовжуються дослідження, пов'язані з побудовою ефективних за швидкодією алгоритмів обчислення (1) і використовуються представлені в цих роботах результати для побудови «швидких» алгоритмів обчислення (1) у випадку, коли послідовності $x(n)$, $n = \overline{0, N_1-1}$ та $h(m)$, $m = \overline{0, N_2-1}$, різної довжини N_1 та N_2 відповідно, причому $N_1 \gg N_2$, тобто, коли одна з них суттєво довша за іншу. В цьому випадку послідовність $R(l)$, $l = \overline{0, L-1}$, має довжину $L = N_1 + N_2$ відліків і оцінка взаємно кореляційної функції має вигляд

$$R(l) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-l-1} h(m)x(m+l), \quad (2)$$

де $M \geq N_1 + N_2$, $M = 2^\gamma$, $\gamma > 0$ — ціле, $l = \overline{0, L-1}$. Нехай $N_1 \gg N_2$. Розглянемо ряд ефективних за швидкодією алгоритмів обчислення (2).

1. «Непрямий» алгоритм. Цей алгоритм базується на використанні теореми про дискретну згортку двох послідовностей $h'(n)$ та $x'(n)$, $n = \overline{0, N_1 + N_2 - 1}$, які містять по $(N_1 + N_2)$ відліків, що досягається доповненням кожної з двох послідовностей відповідним числом нульових відліків. Після цього можна знайти $(N_1 + N_2)$ — точкові дискретні перетворення Фур'є (ДПФ) доповнених послідовностей, помножити їх та виконати обернене ДПФ (ОДПФ) добутку. В результаті отримуємо шукану оцінку взаємно кореляційної функції $y(l)$ $l = \overline{0, M-1}$ вигляду (2).

Таким чином, *покроковий опис алгоритму* має вигляд:

Крок 1. Формуємо послідовності

$$h'_n = h'(n) = \begin{cases} h(n), & n = \overline{0, N_2-1}, \\ 0, & n = \overline{N_2, M-1}, \end{cases} \quad (3)$$

$$x'_n = x'(n) = \begin{cases} x(n), & n = \overline{0, N_1-1}, \\ 0, & n = \overline{N_1, M-1}, \end{cases} \quad (4)$$

де $M = N_1 + N_2$, $M = 2^\gamma$, $\gamma > 0$ — ціле.

Додавання нулів в (3) пов'язане з усуненням міжперіодичної інтерференції.

Крок 2. Обчислимо ДПФ послідовності $h'(n)$ та $x'(n)$, $n = \overline{0, M-1}$, з використанням алгоритму ШПФ:

$$\hat{X}'(q) = \sum_{n=0}^{M-1} x'(n)W_M^{-nq}, \quad \hat{H}'(q) = \sum_{n=0}^{M-1} h'(n)W_M^{-nq}, \quad (5)$$

де $q = \overline{0, M-1}$, $W_N = e^{-i2\pi/M}$.

Крок 3. Обчислимо добуток

$$\hat{R}(q) = (\hat{H}'(q))^* \cdot \hat{X}'(q), \quad q = \overline{0, M-1}, \quad (6)$$

де * — означає комплексно спряжену величину.

Крок 4. Обчислимо ОДПФ добутку $\hat{R}(q)$, $q = \overline{0, M-1}$, з використанням алгоритму ШПФ та отримаємо шукане значення оцінки взаємно кореляційної функції (2)

$$R(l) = \frac{1}{M} \sum_{q=0}^{M-1} \hat{R}(q)W_M^{lq}, \quad l = \overline{0, M-1}. \quad (7)$$

Зауваження. Для практичних застосувань важливо зауважити, що ДПФ можна виконувати за довільною кількістю відліків L , яка задовольняє умові $L \geq N_1 + N_2$. В цьому випадку на відміну від (3), послідовності $h(n)$ та $x(n)$ доповнюються іншою кількістю нульових відліків. Доцільно вибирати L рівним степеню двійки і не менше за $N_1 + N_2$.

В багатьох практичних задачах необхідно обчислювати оцінку взаємно кореляційної функції двох скінченних послідовностей, коли одна з них суттєво довша за іншу (напр., $N_1 \gg N_2$) і в цьому випадку вибір $L \geq N_1 + N_2$ та використання непрямого алгоритму не завжди ефективне. По-перше, перед обчисленням $R(n)$ вигляду (2) треба мати всю довшу послідовність $x(n)$, $n = \overline{0, N_1-1}$. По-друге, оскільки обробка починається тільки після прийому всієї послідовності, то результат отримується з великою затримкою. Крім того, при занадто великих ($N_1 + N_2$) обчислення ДПФ значно ускладнюються. Від перелічених недоліків вільні алгоритми секціонування обчислення оцінки взаємно кореляційної функції. Вони ґрунтуються на розбитті довгої послідовності $x(n)$, $n = \overline{0, N_1-1}$, на невеликі секції та обчисленні часткових оцінок взаємно кореляційних функцій, з яких потім формується шукана оцінка $R(l)$, $l = \overline{0, M-1}$ [4, 5].

2. Алгоритми секціонування. Розглянемо два алгоритми секціонування, які відрізняються способом розбиття довшої послідовності на секції, а також способом формування шуканої вихідної оцінки взаємно кореляційної функції $R(l)$ вигляду (2) із часткових взаємно кореляційних функцій і ґрунтуються на результатах робіт [4, 5].

Алгоритм 1. Основна ідея алгоритму 1 полягає в тому, що з довшої послідовності $x(n)$, $n = \overline{0, N_1 - 1}$, формуються короткі суміжні секції, які не перекриваються. Ці секції формуються таким чином, що часткові оцінки кореляційних функцій цих секцій мають певні ділянки перекриття і тому їхні відліки на цих ділянках потрібно додати.

Визначимо довжину секції в $N = N_2 + N_3$ відліків послідовностей $h(m)$, $m = \overline{0, N_2 - 1}$ та $x(n)$, $n = \overline{0, N_1 - 1}$, де N_3 — деяке число. В [5] пропонується вибирати його таким чином, щоб N_3 було того ж порядку, що і N_2 . Нехай $N_3 \geq N_2$, $N = 2^\gamma$, $\gamma > 0$ — ціле.

Наведемо покроковий опис алгоритму 1 обчислення (2).

Крок 1. Сформуємо послідовність

$$h'(m) = \begin{cases} h(m), & m = \overline{0, N_2 - 1}, \\ 0, & m = \overline{N_2, N - 1}. \end{cases} \quad (8)$$

Крок 2. Обчислимо ДПФ послідовності (8) з використанням алгоритму ШПФ:

$$\hat{H}'(q) = \sum_{m=0}^{N-1} h'(m) W_N^{-qm}, \quad q = \overline{0, N - 1}. \quad (9)$$

Крок 3. Розділимо послідовність $x(n)$, $n = \overline{0, M - 1}$ на суміжні секції довжиною $N = N_2 + N_3$. Кожну секцію k , $k = \overline{0, p - 1}$, сформуємо наступним чином:

$$x_0(n) = \begin{cases} x(n), & n = \overline{0, N_3 - 1}, \\ 0, & n = \overline{N_3, N - 1}. \end{cases} \quad (10)$$

$$x_k(n) = \begin{cases} 0, & n = \overline{0, N_3 - 1}, \\ x(n + (k - 1)N_2), & n = \overline{N_3, N - 1}, \end{cases}$$

де $k = \overline{1, p - 1}$, $p = \frac{M_1}{N_3}$ — ціле, $M_1 \geq N_1$ і таке, щоб $p = \frac{M_1}{N_3}$ було ціле. Якщо $M_1 \neq N_1$, то визначимо $x(n) = 0$ для $n = \overline{N_1, M_1 - 1}$.

Крок 4. Обчислимо ДПФ послідовностей $x_k(n)$, $n = \overline{0, N - 1}$ з використанням алгоритму ШПФ:

$$\widehat{X}_k(q) = \sum_{n=0}^{N-1} x_k(n) W_M^{-qn}, \quad q = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Крок 5. Обчислимо добуток

$$\widehat{R}_k(q) = (\widehat{H}(q))^* \cdot \widehat{X}_k(q), \quad kq = \overline{0, N-1}. \quad (12)$$

Крок 6. Обчислимо ОДПФ сигналу $\widehat{Y}_k(q)$ і знайдемо значення оцінок часткової взаємно кореляційної функції на k -ій секції

$$R_k(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{R}_k(q) W_N^{qn}, \quad l = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{0, p-1}. \quad (13)$$

Крок 7. Довжина кожної із часткових оцінок взаємно кореляційних функцій $R_k(n)$ дорівнює $N = N_3 + N_2$ відліків, тобто існує ділянка довжиною N_2 відліків, на якій k -а і $(k+a)$ -а часткові оцінки взаємно кореляційних функцій перекриваються, тому їх відліки на ділянці треба додати. Отже, із отриманих значень $R_k(n)$ формуємо послідовність $R(l)$:

$$R(l) = r_p(l), \quad l = \overline{0, M_1-1}, \quad (14)$$

де $r_0(l) = y_0(l)$, $l = \overline{0, N-1}$,

$$r_k(l) = \begin{cases} r_{k-1}(l), & l = \overline{0, kN_2 + N_3 - 1}, \\ r_{k-1}(l) + y_k(l - kN_2 - N_3), & l = \overline{kN_2 + N_3, (k+1)N_2 + N_3 - 1}, \end{cases}$$

де $k = \overline{1, p}$.

Крок 8. Для отримання кінцевого результату кроки 3–7 повторюємо p разів, поки не вичерпаються всі M елементів x_n , $n = \overline{0, M-1}$.

Зауваження. Для спрощення алгоритму 1 доцільно вибирати $N_3 = N_2$. В цьому випадку суміжні секції довжиною $N = 2N_3$ формуються наступним чином

$$x_k(n) = \begin{cases} 0, & n = \overline{0, N_3 - 1}, \\ x(n + (k-1)N_3), & n = \overline{N_3, 2N_3 - 1}, \end{cases} \quad (15)$$

а послідовність $R(l)$ із отриманих значень $R_k(l)$ визначається співвідношеннями (14), де

$$r_k(l) = \begin{cases} r_{k-1}(l), & l = \overline{0, (k+1)N_3 - 1}, \\ r_{k-1}(l) + y_k(l - (k+1)N_3), & l = \overline{(k+1)N_3, (k+2)N_3 - 1}, \end{cases} \quad (16)$$

де $k = \overline{1, p}$.

Алгоритм 2. Основна ідея алгоритму 2, на відміну від алгоритму 1 полягає в тому, що в даному випадку перекриваються вхідні, а не вихідні

секції, а помилкові відліки часткових оцінок кореляційних функцій, пов'язані з усуненням міжперіодної інтерференції, відкидаються. Решта відліків накопичуються і з них формується кінцевий результат.

Наведемо покроковий опис запропонованого алгоритму 2:

Кроки 1–2 співпадають з кроками 1–2 алгоритму 1.

Крок 3. З вхідної послідовності x_n , $n = \overline{0, M-1}$, формуємо перекриваючі секції довжиною $N = N_2 + N_3$ таким чином:

$$x_k(n) = x(kN_3 + l), \quad (17)$$

де $n = \overline{0, N-1}$, $k = \overline{0, p-1}$, $p = \left\lceil \frac{M}{N_3} \right\rceil$.

Побудовані таким чином секції перекриваються одна з одною на ділянках довжиною $(N_2 - 1)$ відліків (в нашому випадку $N_3 = N_2$), причому ділянки перекриття знаходяться в кінці секції.

Кроки 4–6 співпадають з кроками 4–6 алгоритму 1.

Крок 7. Останні $(N_2 - 1)$ відліків кожної із послідовностей $R_k(l)$, $l = \overline{0, N-1}$, відкидаємо (вони хибні), а решта приєднуємо до істинних відліків послідовності $R_{k-1}(l)$ і т. д. В результаті отримаємо шукану оцінку взаємно кореляційної функції $R(l)$, $l = \overline{0, M-1}$. Тобто, у обчисленій оцінці $R_k(l)$ зберігаємо тільки N_3 перших компонент і отримаємо

$$R(kN_3 + l) = R_k(l), \quad l = \overline{0, N_3 - 1}, \quad k = \overline{0, p-1}. \quad (18)$$

Крок 8. Кроки 3–7 повторюємо $(p - 1)$ разів, поки не вичерпаємо всі M елементів x_n , $n = \overline{0, M-1}$.

В роботах [2, 4] наведені оцінки евклідової норми похибки заокруглення обчислення $R(l)$, $l = \overline{0, M-1}$, «непрямим» алгоритмом та алгоритмами секціонування. Ці оцінки можуть бути використані для отримання відповідних оцінок похибок заокруглення представлених в статті «швидких» алгоритмів обчислення оцінок взаємно кореляційних функцій з урахуванням особливостей задання інформаційного оператора $\varphi = \varphi(N_1, N_2, L)$, параметрів алгоритмів (наприклад, значень M , N_3) та запропонованих способів формування коротких секцій та обчислення $R(l)$, $l = \overline{0, M-1}$ з часткових оцінок $R_k(l)$, $k = \overline{0, p-1}$. Отже, мають місце теореми [4]. Наведемо їх без доведення

Теорема 1¹. Оцінка евклідової норми похибки заокруглення обчислення $R(l)$, $l = \overline{0, M-1}$ «непрямим» алгоритмом з використан-

¹ Для теорем 1, 2 виконується умова $N \cdot 2^{-\tau} < 0,1$

ням ШПФ при $M = 2^\gamma$, $\gamma > 0$ — ціле для режиму з плаваючою комою з τ розрядами в мантисі числа має вигляд

$$\|\Delta_{заокр}\|_E = \|f(R) - R\|_E < 8 \cdot 1,06 \cdot \sqrt{M} \cdot \gamma \cdot 2^{-\tau} \cdot \|x\|_E \cdot \|h\|_E, \quad (19)$$

де $f(*)$ — означає результат обчислення виразу, розміщеного в дужках, на ПК, $\|\cdot\|_E$ — евклідову норму, $M = 2^\gamma$, $\gamma > 0$ — ціле.

Теорема 2. Для похибки заокруглення запропонованих алгоритмів секціонування 1 та 2 обчислення $R(l)$, $l = 0, M-1$ з використанням ШПФ для режиму з плаваючою комою з τ розрядами в мантисі числа, з точністю до величини другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ справедлива оцінка [2, 6]

$$\|\Delta_{заокр}\|_E < 1,06 \cdot \left(8 \cdot \sqrt{N} \cdot \max_k \|\hat{X}_k\|_E \cdot \|\hat{H}_k\|_E + \left[\frac{M}{N} \right] \right) \cdot \|R\|_I \cdot 2^{-\tau}, \quad (20)$$

де $\|R\|_I = \max_j \sum_{k=0}^{[M/N]} |R_k(j)|$, $N = N_1 + N_2 = 2^{\gamma_1}$, $\gamma_1 > 0$ — ціле.

Розглянемо питання про обсяг обчислювальних витрат, необхідних для чисельної реалізації запропонованих алгоритмів. Справедлива теорема.

Теорема 3. Загальний обсяг обчислювальних витрат, необхідний для реалізації запропонованих алгоритмів обчислення $R(l)$, $l = 0, M-1$, як функцію довжини секції S , можна оцінити виразом

$$Q(S) = (1 + 2p)(3\tau_1 + 2\tau_2)S \log_2 S + 2pS(\tau_1 + 2\tau_2) + t(p, S), \quad (21)$$

де τ_1 , τ_2 — час виконання на ПК операції додавання та множення відповідно,

$$S = \begin{cases} M, & \text{для непрямого алгоритму,} \\ N, & \text{для алгоритмів секціонування,} \end{cases} \quad (22)$$

$$p = \begin{cases} 1, & \text{для непрямого алгоритму,} \\ \left[\frac{M}{N} \right], & \text{для алгоритмів секціонування,} \end{cases} \quad (23)$$

$$t_{p,s} = \begin{cases} 0, & \text{для непрямого алгоритму,} \\ N_3 \tau_1, & \text{для алгоритму 1,} \\ 0, & \text{для алгоритму 2.} \end{cases} \quad (24)$$

Доведення. Відомо [2], що число дійсних операцій множення для обчислення ДПФ S компонентних значень за допомогою ШПФ дорів-

ное $2S \log_2 S$, а число дійсних додавань дорівнює $3S \log_2 S$. Таким чином загальна кількість арифметичних операцій при обчисленні ДПФ дорівнює $(3\tau_1 + 2\tau_2)S \log_2 S$. ШПФ в запропонованих алгоритмах застосовується при реалізації кроків 2, 4 та 6, тобто $(2p + 1)$ разів, отже

$$t_1(s, p) = (1 + 2p)(3\tau_1 + 2\tau_2)S \log_2 S. \quad (25)$$

Далі для реалізації кроку 5 в наведених алгоритмах необхідно виконати

$$t_2(p, s) = 2ps(2\tau_1 + 4\tau_2) \quad (26)$$

арифметичних операцій.

Позначимо $t(p, s)$ — кількість арифметичних операцій, які реалізуються на кроці 6, розглянутих алгоритмів. Очевидно, що $t(p, s)$ визначається співвідношенням (24).

Підсумовуючи співвідношення (24)–(26), отримуємо оцінку (21), як суму кількості обчислювальних витрат, необхідних для чисельної реалізації кожного кроку алгоритмів.

Теорема 3 доведена.

Висновки. Робота присвячена розробці ефективних за швидкістю алгоритмів обчислення оцінок взаємно кореляційних функцій: «непрямого» та двох алгоритмів секціонування, кожний з яких має свою область ефективного застосування, в залежності від постановки задачі та особливостей задання сіткового інформаційного оператора та наведено їх покроковий опис. Наведені оцінки евклідової норми похибки заокруглення представлених «швидких» алгоритмів обчислення оцінок взаємно кореляційних функцій з урахуванням особливостей задання.

Список використаних джерел:

1. Cooley J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series / J. W. Cooley, J. W. Tukey // Math. Comput. — 1965. — Apr. — P. 257–301.
2. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье / В. К. Задирака. — К. : Наук. думка, 1983. — 216 с.
3. Задирака В. К. Цифровая обработка сигналов / В. К. Задирака, С. С. Мельникова. — К. : Наук. думка, 1993. — 294 с.
4. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування / І. В. Сергієнко, В. К. Задирака, О. М. Литвин, С. С. Мельникова, О. П. Нечуйвітер. — К. : Наук. думка, 2011. — Т. 1. Алгоритми. — 447 с.; Т. 2. Застосування. — 346 с.
5. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. — М. : Мир, 1978. — 848 с.
6. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных чисел / Дж. Х. Уилкинсон. — М. : Наука, 1970. — 564 с.

The effective by fast-acting algorithms for calculating the estimations of cross-correlation functions of sequences of different length and spectral density of stationary ergodic random processes are developed, and the analysis of their quality is performed; estimates of their basic characteristics are obtained.

Key words: *estimation of cross-correlation function, the «indirect» algorithm, sectioning algorithms, evaluation of Euclidean norm, rounding error.*

Отримано: 25.04.2016

УДК 519.61/.64:627.05

Н. В. Медвідь, аспірант

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ КОНТАКТНОЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ВЗДОВЖ ВОДОВОДУ НА ПОЛОЖЕННЯ ДЕПРЕСІЙНОЇ ПОВЕРХНІ В ГРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі при наявності зони контактної розмиву вздовж водоводу. Сформульована слабка постановка крайової задачі та знайдено її чисельний розв'язок методом скінченних елементів. Досліджено вплив контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу в греблі на положення депресійної поверхні.

Ключові слова: *фільтраційна консолідація, ґрунтова гребля, депресійна поверхня, метод скінченних елементів, FreeFem++.*

Вступ. Для пропуску води із верхнього б'єфу в нижній в ґрунтових греблях широко використовують водоводи, наявність яких може бути причиною аварій і пошкоджень. Водовід в тілі греблі має суттєвий вплив на характер фільтрації в навколотрубній зоні. Зокрема, можуть розвинутися небезпечні фільтраційні деформації, викликані контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу з розмивом ґрунтів, підйомом депресійної поверхні [1]. Навіть при справній роботі водоводу може відбуватися суфозійний розмив ґрунту в навколотрубній зоні тіла греблі контактною зосередженою фільтрацією [10]. Тому, дослідженню впливу водоводу на процеси фільтрації в тілі ґрунтової греблі слід приділяти серйозну увагу. Це актуально на етапі проектування з метою здійснення прогнозних розрахунків для недопущення критичних та аварійних ситуацій в процесі експлуатації гідротехнічної споруди.

Вихідні передумови. Відомо чимало випадків аварій та пошкоджень ґрунтових гребель, викликаних ерозією ґрунту та утворенням зосереджених шляхів фільтрації [8], в тому числі пов'язаних з наявністю водоводу в тілі греблі.

Серед таких аварій і пошкоджень варто згадати, що руйнування греблі Кюддов в Німеччині відбулося по причині контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу [4]. Також подібні руйнування декількох ґрунтових гребель внаслідок посиленої фільтрації вздовж водоводу сталося у Воронезькій області [5]. Відома аварія на ґрунтовій греблі в Ставропольському краї, яка сталася внаслідок контактної зосередженої фільтрації в навколотрубній зоні при неякісно виконаній зворотній засипці трубчастого водовипуску [3]. В Тульській області в 1982 році внаслідок суфозії ґрунту та зосередженої фільтрації виникла порожнина на низовому схилі греблі [4]. На ґрунтовій греблі South Fork в США в результаті суфозійного розмиву ґрунту зосередженою фільтрацією в навколотрубних зонах утворились зони вимиву [2]. Тому, аналіз роботи ґрунтової греблі з водоводом і наслідки можливих аварій має важливе значення для забезпечення нормальної роботи як нових гребель, що проектуються, так і гребель, які уже введені в експлуатацію.

Постановка задачі та її математична модель. Фізична постановка задачі полягає в наступному. В тілі греблі наявний водовід. В результаті виникнення зосередженої фільтрації вздовж водоводу там утворюється зона вимиву (рис. 1). Зона вимиву являє собою порожнину, яка сполучена з верхнім б'єфом і заповнена рідиною.

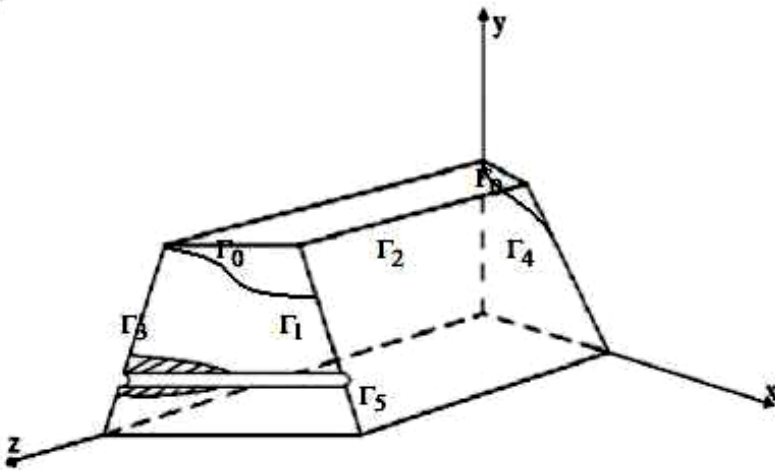


Рис. 1. Тіло ґрунтової греблі та зона вимиву вздовж водоводу

Математична модель тривимірної задачі фільтраційних процесів в тілі ґрунтової греблі з водоводом містить наступне рівняння [6]:

$$\nabla \cdot (K \nabla h(X, t)) = \beta \frac{\partial h}{\partial t}, \quad X \in \Omega, \quad (1)$$

де K — тензор коефіцієнтів фільтрації; $h(X, t)$ — напір в поровій рідині.

Вказане рівняння доповнюється наступними граничними умовами:

$$\begin{aligned} h(X, 0) &= h_0(X), \quad X \in \bar{\Omega}, \\ h(X) \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_0} &= y, \quad X \in \Gamma_1 \cup \Gamma_0, \quad h(X) \Big|_{\Gamma_2} = H_1(X), \quad X \in \Gamma_2, \\ (u, n) \Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5} &= 0, \quad X \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \end{aligned}$$

де $h_0(X), H_1(X)$ — відомі функції; n — вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; $u = -K \nabla h(X, t)$; u — вектор швидкості фільтрації.

З математичної точки зору товщиною порожнини вздовж стінок водоводу нехтуємо і її присутність відображається в математичній моделі заданням граничних умов виду:

$$h(X, t) \Big|_{\Gamma_p} = y,$$

де y — вертикальна координата поверхні порожнини. Поки що розміри порожнини вважаємо незмінними. В результаті присутності зосередженого шляху фільтрації вздовж водоводу, депресійна поверхня в тілі греблі буде змінювати своє положення. Ціль роботи — прогнозування зміни положення депресійної поверхні засобами математичного моделювання.

Вільна межа Γ_0 (крива депресії) описується співвідношенням [7]:

$$\varphi(X, t) = (y - h(X, t)) \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

і на ній задається кінематична гранична умова [7]:

$$(u, n) \Big|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

де σ — пористість ґрунту греблі. При цьому має бути відомим початкове положення вільної поверхні.

Чисельне розв'язування. Для відшукання наближеного розв'язку поставленої крайової задачі використано метод скінченних елементів (МСЕ).

Слабке формулювання крайової задачі полягає в наступному. Домножимо рівняння (1) та початкову умову для напорів на пробну функцію

$v(X) \in H_0 = \{v(X) : v(X) \in W_2^1(\Omega)\}$, $v(X)|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0$, інтегруємо їх по області Ω , виконуємо спрощуючі перетворення і отримаємо

$$-\iiint_{\Omega} (K \nabla h \nabla v) d\Omega = \iiint_{\Omega} \beta \frac{\partial h}{\partial t} \cdot v(X) d\Omega,$$

$$\iiint_{\Omega} h(X, 0) \cdot v(X) d\Omega = \iiint_{\Omega} h_0(X) \cdot v(X) d\Omega..$$

Наближений розв'язок для напорів знаходимо у вигляді:

$$h(X, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \cdot N_j^{(h)}(X),$$

а $v(X)$ покладається рівною кожній $N_i^{(h)}(X)$, $i = \overline{1, n}$. Тут $N_j^{(h)}(X)$ — базисні вектор-функції, $a_j(t)$ — невідомі коефіцієнти. Отримаємо задачу Коші

$$M \cdot \frac{dA}{dt} + L \cdot A(t) = 0,$$

$$M \cdot A^{(0)} = F^{(0)}, t = 0,$$

де $A = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))^T$, $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$, $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n$,

$$A^{(0)} = (a_1(0), \dots, a_n(0))^T, F^{(0)} = (f_i^0)_{i=1}^n; m_{ij} = \beta \iiint_{\Omega} N_i^h N_j^h d\Omega;$$

$$l_{ij} = \iiint_{\Omega} K \left(\frac{\partial N_i^{(h)}}{\partial x} \frac{\partial N_j^{(h)}}{\partial x} + \frac{\partial N_i^{(h)}}{\partial y} \frac{\partial N_j^{(h)}}{\partial y} + \frac{\partial N_i^{(h)}}{\partial z} \frac{\partial N_j^{(h)}}{\partial z} \right) d\Omega;$$

$$f_i^0 = \iiint_{\Omega} h_0 \cdot N_i^h d\Omega.$$

Розіб'ємо часовий проміжок на m рівних частин з кроком $\tau = \frac{T}{m}$. Наближений розв'язок задачі Коші отримаємо за допомогою лінеаризованої неявної різницевої схеми

$$M \cdot \frac{A^{(j+1)} - A^{(j)}}{\tau} + L \cdot A^{(j+1)} = 0,$$

$$M^{(0)} \cdot A^{(0)} = F^{(0)}, j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Результати чисельного експерименту. Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь МСЕ [9]. Проведено ряд чисельних експериментів, результати яких відображено на рис. 2–7.

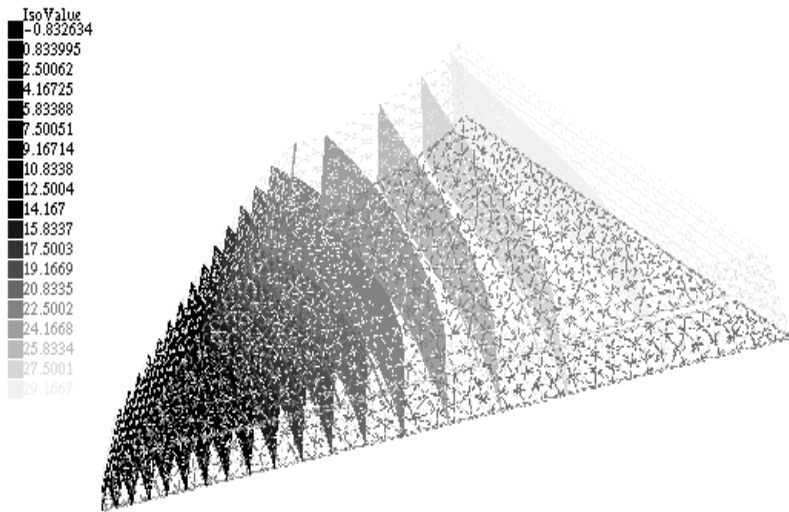


Рис. 2. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом без контактної зосередженої фільтрації через 10 років при $K = 0.001$ м / доба

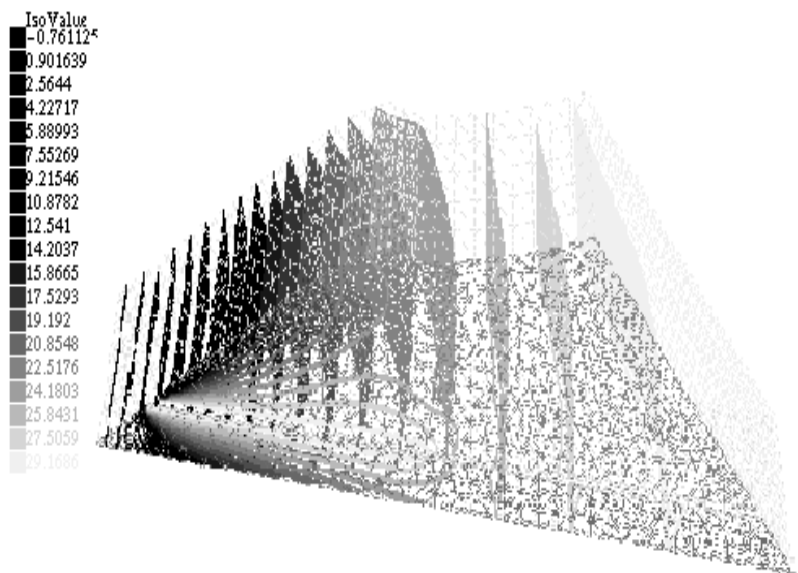


Рис. 3. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 1 рік при $K = 0.001$ м / доба

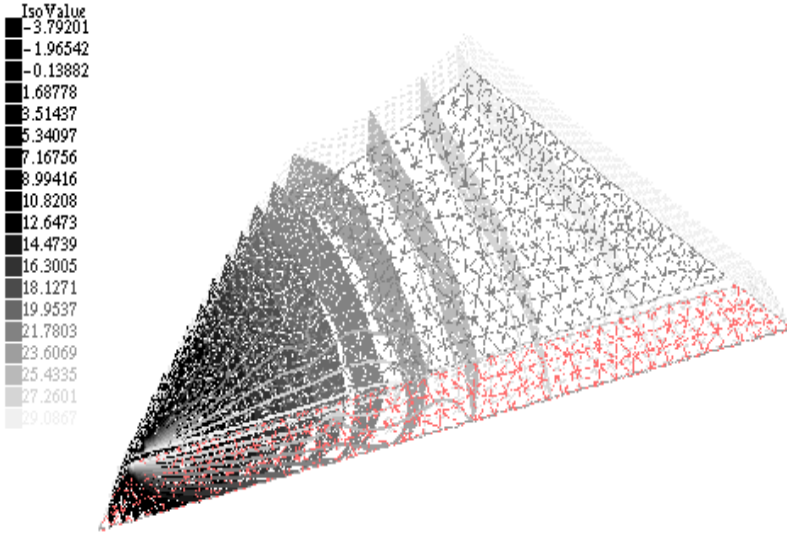


Рис. 4. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при $K = 0.001$ м / доба

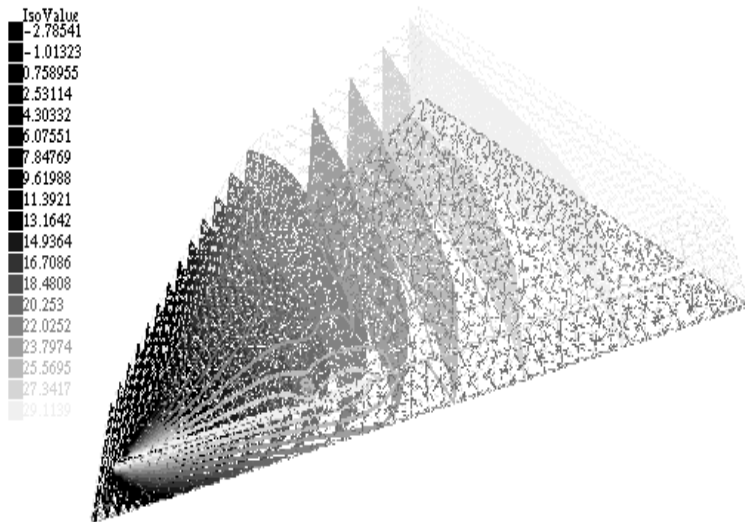


Рис. 5. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при $K = 0.01$ м / доба

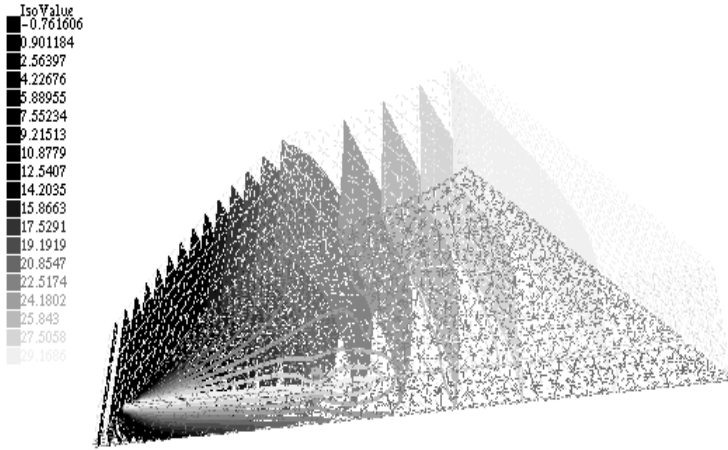


Рис. 6. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при $K = 0.1$ м / доба

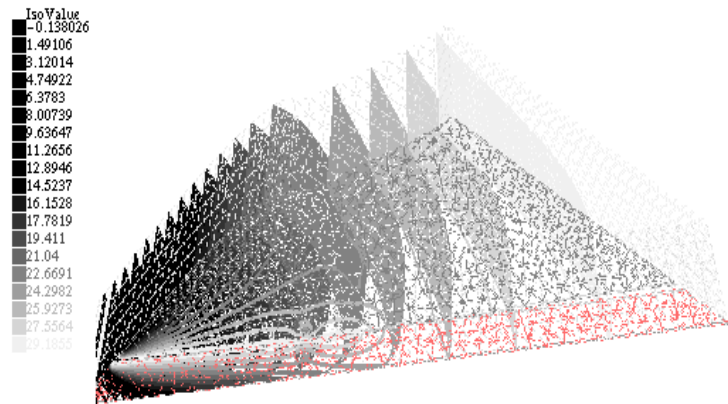


Рис. 7. Розподіл напорів в ґрунтовій греблі з водоводом та контактною зосередженою фільтрацією вздовж водоводу через 10 років при $K = 1$ м / доба

Висновки. Наявність зони контактного розмиву вздовж водоводу суттєво впливає на положення депресійної поверхні в околі водоводу. При цьому, депресійна поверхня піднімається і максимальна різниця між положеннями вільних меж в греблях при наявності та відсутності водоводу через 1 рік складає майже 0,03 м, а через 10 років ця різниця складає вже 0,22 м при коефіцієнті фільтрації $K = 0.001$ м/доба . При

$K = 0.01$ м/доба через 10 років ця різниця складає 0,25 м, при $K = 0.1$ м/доба — 0,33 м, а при $K = 1$ м/доба 0,39 м. Підняття рівня вільної поверхні може негативно позначитися на стійкості ґрунтової греблі. Нехтувати впливом наявності водоводу в тілі ґрунтової греблі не можна.

Список використаних джерел:

1. Анахаев К. Н. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами: причины и способы совершенствования противофильтрационной защиты / К. Н. Анахаев, К. А. Гегиев, Б. Х. Амшоев // Гидротехническое строительство. — 2004. — №3. — С. 30–36.
2. Белов В. А. Противофильтрационные мероприятия на малых водоемах / В. А. Белов. — Ростов-на-Дону : СКНЦ ВШ, 2000. — 191 с.
3. Запорожченко Э. В. Природно-антропогенные процессы и явления/ Э. В. Запорожченко и др. // Сб. научных трудов ин-та «Севкавгипроводхоз». — 1999. — № 14. — 144 с.
4. Косиченко Ю. М. Оценка уровня фильтрационной безопасности земляных плотин и эффективности инженерной защиты малых водохранилищ/ Ю. М. Косиченко и др. — Новочеркасск, 2001. — 57 с.
5. Кремез С. А. Опыт строительства и эксплуатации малых водохранилищ ЦЧО / С. А. Кремез. — Воронеж : ВГУ, 1965. — 138 с.
6. Медвідь Н. В. Дослідження впливу тепло-солеперенесення на швидкість фільтрації в ґрунтовій греблі (просторова задача) / Н. В. Медвідь, П. М. Мартинюк // Вісник Тернопільського національного технічного університету. — 2015. — № 4. — С. 169–178.
7. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
8. Foster M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by internal erosion and piping / M. Foster, R. Fell //20th Congress on Large Dams. — Beijing, 2000. — P. 237–259.
9. FreeFem++. ThirdEdition / F. Hecht, S. Auliac, O. Pironneau, J. Morice, A. LeHyaric, K. Ohtsuka. — Laboratoire Jacques — Louis Lions, Universite Pierreet Marie Curie, Paris. — 378 p. — Режим доступу: <http://www.freefem.org/ff++/ftp/freefem++doc.pdf>.
10. Sellmeijer J. B. Numerical computation of seepage erosion below dams (piping) / J. B. Sellmeijer // Proceedings of Third International Conference on Scour and Erosion. — 2006. — P. 596–601.

Mathematical model of filtration consolidation in the body of soil dam at the presence of contact erosion zone along the conduit has been created. Variational formulation of the boundary problem was formulated. Also numerical solution was found by finite element method. The impact of contact concentrated filtration along conduit in the dam on position of depression surface was investigated.

Key words: *filtration consolidation, soil dam, depression surface, finite element method, FreeFem++.*

Отримано: 15.04.2016

УДК 519.85

О. Р. Мічута, канд. техн. наук

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ АДСОРБЦІЇ (ДЕСОРБЦІЇ) ТА НЕІЗОТЕРМІЧНИХ УМОВ НА ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ЗАСОЛЕНИХ ҐРУНТІВ В ОДНОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Побудовано математичну модель одновимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу адсорбції (десорбції) і неізотермічних умов. Чисельний розв'язок відповідної крайової задачі знайдено методом скінченних різниць. Наведено результати чисельних екскрементів.

Ключові слова: *консолідація, засолений ґрунт, адсорбція, десорбція, неізотермічний режим.*

Вступ. Однією із задач класичної механіки ґрунтів є задача фільтраційної консолідації водонасиченого ґрунту. Вона полягає у визначенні динаміки зміни надлишкових напорів в поровій рідині пористого середовища. Причиною виникнення цих надлишкових напорів є прикладені навантаження на ґрунтове середовище у вигляді цивільних та промислових споруд, або власна вага ґрунту у випадку будівництва гідротехнічних об'єктів. Сам процес розсіювання надлишкових напорів в ґрунті призводить до зближення частинок ґрунту і, в результаті, до ущільнення ґрунтової основи під впливом прикладеного навантаження. Такі процеси математично досить повно описані в роботах [1, 3, 7]. Крім того, в роботах [2, 5] класичні математичні моделі фільтраційної консолідації доповнені та вдосконалені шляхом урахування впливу тепло-солепереносу.

Мета та наукова новизна статті полягає у побудові математичної моделі консолідації засолених ґрунтів з урахуванням впливу процесів адсорбції (десорбції) та температури, а також чисельне розв'язання відповідної крайової задачі. Елементи таких досліджень наведено в роботах [2, 6, 8]. Також із вищевказаного напрямку потрібно відзначити роботу [9].

Математична модель задачі. Математична модель одновимірної задачі консолідації ґрунту в області Ω під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу адсорбції та неізотермічних умов на основі робіт [4, 5] може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\mu_e \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, c, T) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} = n \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \gamma_1 (cn - \alpha N), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x, c, T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

$$u = \bar{e}v - k(x, c, T) \frac{\partial h}{\partial x} + v(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} + \mu(x, c, T) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad (6)$$

$$h(0, t) = 0, \quad u|_{x=l} = 0,$$

$$c(0, t) = C_m, \quad \left(D(x, c, T) \frac{\partial c}{\partial x} + D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (7)$$

$$T(0, t) = T_1(t), \quad T(l, t) = T_2(t),$$

де $x \in [0; l]$, $t > 0$; $T_1(t)$, $T_2(t)$, $h_0(x)$, $c_0(x)$, $T_0(x)$ — задані функції. Тут використані наступні позначення: $h(x, t) = p/\gamma$ — надлишковий напір; p — надлишковий тиск в поровому розчині; $c(x, t)$ — концентрація порового сольового розчину; $T(x, t)$ — температура; $N(x, t)$ — концентрація солей в твердій фазі; k , D , D_T , v , λ , μ — коефіцієнти фільтрації, конвективної дифузії, термодифузії, хімічного осмосу, ефективної теплопровідності вологого ґрунту, термічного осмосу; ρ — густина порового розчину; c_p — питома теплоємність порового розчину; c_T — об'ємна теплоємність вологого ґрунту; u — швидкість фільтрації сольового розчину; v — швидкість руху твердих частинок ґрунту; t — час; γ — питома вага сольового розчину; n — пористість ґрунту; μ_e — коефіцієнт пружної ємності шару ґрунту; γ_1 , $\alpha(T)$ — кінетичні коефіцієнти; C_m — концентрація граничного насичення в рідкій фазі.

Закон (6) є узагальненим законом Дарсі-Герсеванова на випадок руху сольових розчинів [7]. В ньому враховується вплив на швидкість фільтрації осмотичних явищ, які мають місце в нерівномірно засолених ґрунтах при наявності градієнта температури. В роботі [5] був прийнятий закон, який дозволяв враховувати або лише нормальні, або лише аномальні хімічні осмотичні явища. Врахувати ж одночасно наявність аномальної та нормальної хімічної осмотичної фільт-

рації дозволяє прийняття залежності в законі (6) коефіцієнта хімічного осмосу ν від концентрації розчинених солей c . В даній роботі було враховано залежність коефіцієнта фільтрації як від концентрації розчинених солей так і від температури.

Вважається, що верхня та нижня межі масиву ґрунту дреновані. Концентрація порового сольового розчину, як і температура, на обох межах є відомою. Причому, верхня межа змочена концентрованим сольовим розчином.

Чисельне розв'язання крайової задачі. Числовий розв'язок виснаженої крайової задачі (1)–(7) знайдемо методом скінченних різниць. Для цього покриємо область $\bar{Q}_{t_0} = [0; l] \times [0; t_0]$ рівномірною сіткою з кроками h_x та τ відповідно по змінній x та часу t . Нехай m_1 — кількість кроків по просторовій змінній, n_1 — кількість кроків по часу.

Для дискретизації рівняння (1) використаємо неявну різницеву схему, а для рівняння (2), (4) — монотонну різницеву схему Самарського. В результаті отримаємо наступний скінченнорізницевий аналог диференціальних рівнянь (1)–(5):

$$\mu_e \frac{h_i^{(j+1)} - h_i^{(j)}}{\tau} = \left(a_{i+1}^{(j+1)} \frac{h_{i+1}^{(j+1)} - h_i^{(j+1)}}{h_x} - a_i^{(j+1)} \frac{h_i^{(j+1)} - h_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} \right), \quad (8)$$

$$n \cdot \frac{c_i^{(j+1)} - c_i^{(j)}}{\tau} = \frac{\eta_i^{(j)}}{h_x} \cdot \left(d_{i+1}^{(j)} \cdot \frac{c_{i+1}^{(j+1)} - c_i^{(j+1)}}{h_x} - d_i^{(j)} \cdot \frac{c_i^{(j+1)} - c_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} \right) + \frac{1}{h_x} \cdot \left((d_T)_{i+1}^{(j)} \cdot \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h_x} - (d_T)_i^{(j)} \cdot \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} \right) + \quad (9)$$

$$+ \frac{(u^+)_{i+1}^{(j)}}{D_i^{(j)}} \cdot d_{i+1}^{(j)} \cdot \frac{c_{i+1}^{(j+1)} - c_i^{(j+1)}}{h_x} + \frac{(u^-)_{i+1}^{(j)}}{D_i^{(j)}} \cdot d_i^{(j)} \cdot \frac{c_i^{(j+1)} - c_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} - \gamma_1(nc_i^{(j+1)} - \alpha \cdot N_i^{(j+1)}),$$

$$c_T \cdot \frac{T_i^{(j+1)} - T_i^{(j)}}{\tau} = \frac{\bar{\eta}_i^{(j)}}{h_x} \cdot \left(\bar{\lambda}_{i+1}^{(j)} \cdot \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h_x} - \bar{\lambda}_i^{(j)} \cdot \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} \right) + \quad (10)$$

$$+ \rho \cdot c_\rho \cdot \left(\frac{(u^+)_{i+1}^{(j)}}{\lambda_{i+1}^{(j)}} \cdot \bar{\lambda}_{i+1}^{(j)} \cdot \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h_x} + \frac{(u^-)_{i+1}^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}} \cdot \bar{\lambda}_i^{(j)} \cdot \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} \right),$$

$$N_i^{(j+1)} = \gamma_1 \tau \left(c_i^{(j)} n - \alpha N_i^{(j)} \right) + N_i^{(j)}, \quad (11)$$

$i = \overline{1, m_1 - 1}, j = \overline{0, n_1 - 1}$, та закону (6)

$$\begin{aligned}
 u_i^{(j)} = e \cdot v - k_i^{(j)} \cdot \frac{h_{i+1}^{(j)} - h_{i-1}^{(j)}}{2h_x} + \\
 + v_i^{(j)} \cdot \frac{c_{i+1}^{(j)} - c_{i-1}^{(j)}}{2h_x} + \mu_i^{(j)} \cdot \frac{T_{i+1}^{(j)} - T_{i-1}^{(j)}}{2h_x}, i = \overline{1, m_1 - 1}, j = \overline{1, n_1},
 \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$a_i^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot (k_i^{(j)} + k_{i-1}^{(j)}), b_i^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot (v_i^{(j)} + v_{i-1}^{(j)}), z_i^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot (\mu_i^{(j)} + \mu_{i-1}^{(j)}),$$

$$d_i^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot (D_i^{(j)} + D_{i-1}^{(j)}), (d_T)_i^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot ((D_T)_i^{(j)} + (D_T)_{i-1}^{(j)}),$$

$$\bar{\lambda}_i^{(j)} = \frac{1}{2} \cdot (\lambda_i^{(j)} + \lambda_{i-1}^{(j)}),$$

$$\eta_i^{(j)} = \frac{1}{1 + \frac{h_x \cdot |u_i^{(j)}|}{2 \cdot D_i^{(j)}}} = 1 - \frac{h_x \cdot |u_i^{(j)}|}{2 \cdot D_i^{(j)}} + O(h_x^2),$$

$$\bar{\eta}_i^{(j)} = \frac{1}{1 + \frac{h_x \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot |u_i^{(j)}|}{2 \cdot \lambda_i^{(j)}}} = 1 - \frac{h_x \cdot \rho \cdot c_\rho \cdot |u_i^{(j)}|}{2 \cdot \lambda_i^{(j)}} + O(h_x^2),$$

$$(u^+)_i^{(j)} = \frac{-u_i^{(j)} + |u_i^{(j)}|}{2} \geq 0, (u^-)_i^{(j)} = \frac{-u_i^{(j)} - |u_i^{(j)}|}{2} \leq 0.$$

Для знаходження напору $h(x, t)$ з різницевого рівняння (12) використаємо метод прогонки [10]. Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_i h_{i-1}^{(j+1)} - c_i h_i^{(j+1)} + b_i h_{i+1}^{(j+1)} = -h_i^{(j)} - s_i^{(j+1)},$$

де

$$a_i = \frac{\tau}{\mu_e h_x^2} a_i^{(j+1)}, c_i = 1 + \frac{\tau}{\mu_e h_x^2} (a_i^{(j+1)} + a_{i+1}^{(j+1)}), b_i = \frac{\tau}{\mu_e h_x^2} a_{i+1}^{(j+1)}.$$

Умови стійкості прогонки $|c_i| > |a_i| + |b_i|$ виконуються. Значення напорів на часовому шарі $(j+1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$h_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} h_{i+1}^{(j+1)} + \beta_{i+1},$$

$$\text{де } \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + h_i^{(j)}}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

Для знаходження концентрації $c(x, t)$ з різницевого рівняння (9) використаємо метод прогонки [10]. Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_i c_{i-1}^{(j+1)} - c_i c_i^{(j+1)} + b_i c_{i+1}^{(j+1)} = -c_i^{(j)} - s_i^{(j+1)},$$

$$\text{де } a_i = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{d_i^{(j)}}{h_x} \cdot \left(\frac{\eta_i^{(j)}}{h_x} - \frac{(u^-)_i^{(j)}}{D_i^{(j)}} \right), \quad b_i = \frac{\tau}{n} \cdot \frac{d_{i+1}^{(j)}}{h_x} \cdot \left(\frac{\eta_i^{(j)}}{h_x} - \frac{(u^+)_i^{(j)}}{D_i^{(j)}} \right),$$

$$c_i = 1 + \frac{\tau}{n} \cdot \left(\frac{\eta_i^{(j)} \cdot (d_{i+1}^{(j)} + d_i^{(j)})}{h_x^2} + \frac{1}{D_i^{(j)}} \cdot ((u^+)_i^{(j)} \cdot d_{i+1}^{(j)} - (u^-)_i^{(j)} \cdot d_i^{(j)}) + \gamma_1 h_x n \right),$$

$$s_i^{(j+1)} = \frac{\tau}{n} \cdot \left(\gamma_1 \alpha \cdot \left(\frac{N_i^{(j+1)} - N_i^{(j)}}{\tau} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{h_x} \left((d_T)_{i+1}^{(j)} \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h_x} - (d_T)_i^{(j)} \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x} \right) \right).$$

Легко бачити, що умови стійкості прогонки $|c_i| > |a_i| + |b_i|$ виконуються. Значення концентрації на часовому шарі $(j+1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$c_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} \cdot c_{i+1}^{(j+1)} + \beta_{i+1},$$

$$\text{де } \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + c_i^{(j)} + s_i^{(j+1)}}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

Для знаходження температури $T(x, t)$ з різницевого рівняння (10) використаємо метод прогонки. Для цього зведемо дане рівняння до прогоночного вигляду

$$a_i T_{i-1}^{(j+1)} - c_i T_i^{(j+1)} + b_i T_{i+1}^{(j+1)} = -T_i^{(j)},$$

$$\text{де}$$

$$a_i = \frac{\tau}{c_T} \cdot \frac{\bar{\lambda}_i^{(j)}}{h_x} \cdot \left(\frac{\bar{\eta}_i^{(j)}}{h_x} - \frac{\rho c_\rho (u^-)_i^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}} \right),$$

$$b_i = \frac{\tau}{c_T} \cdot \frac{\bar{\lambda}_{i+1}^{(j)}}{h_x} \cdot \left(\frac{\bar{\eta}_i^{(j)}}{h_x} - \frac{\rho c_\rho (u^+)_i^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}} \right),$$

$$c_i = 1 + \frac{\tau}{c_T} \cdot \left(\frac{\bar{\eta}_i^{(j)} \cdot (\bar{\lambda}_{i+1}^{(j)} + \bar{\lambda}_i^{(j)})}{h_x^2} + \frac{1}{\lambda_i^{(j)}} \cdot (\rho c_\rho (u^+)_i^{(j)} \cdot \bar{\lambda}_{i+1}^{(j)} - \rho c_\rho (u^-)_i^{(j)} \cdot \bar{\lambda}_i^{(j)}) \right).$$

Неважко показати, що умови стійкості прогонки $|c_i| > |a_i| + |b_i|$ виконуються. Значення температури на часовому шарі $(j+1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$T_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} \cdot T_{i+1}^{(j)} + \beta_{i+1},$$

$$\text{де } \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + T_i^{(j)}}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

Для початкових умов отримаємо наступні скінченнорізницьві аналоги:

$$h_i^{(0)} = h_0(ih_x), c_i^{(0)} = c_0(ih_x), T_i^{(0)} = T_0(ih_x), i = \overline{0, m_1}.$$

Граничні умови другого роду в (7) апроксимуємо з точністю $o(\tau + h^2)$ аналогічно до роботи [10].

Результати чисельних експериментів. Дослідження оцінки впливу наявності процесів адсорбції та десорбції на процес консолідації ґрунту в неізотермічних умовах для даної одновимірної задачі проведено на тестовому прикладі. В зв'язку з цим розглянуто задачу фільтраційної консолідації шару глинистого ґрунту товщиною $l = 20$ м з наступними вихідними даними:

$$D = 0.002 \text{ м}^2/\text{доба}, \gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}, n = 0.4, \gamma_1 = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1},$$

$$\mu_e = 5 \cdot 10^{-5}, c_0(x) = 8 \text{ г/літр}, \alpha = 1/2, N_0(x) = 240 \left(-\left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40,$$

$$\delta = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}, T_0 = 4^0 \text{ C}, \nu = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба},$$

$$\lambda = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \mu = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба},$$

$$\rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, c_\rho = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, c_T = 796 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$T_1(t) = 30^0 \text{ C}.$$

У випадку сталого коефіцієнта фільтрації $k = 0.001$ м/доба.

На верхню межу ґрунту рівномірно прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 20 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. При проведенні числових експериментів в законі (6) знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

Виходячи з експериментальних наступних даних, врахована залежність концентрації граничного насичення солі від температури:

*Залежність концентрації граничного насичення
кам'яної солі від температури*

$T, ^\circ C$	0...19	20...24	25...29	30...39	40...50
$C_m(T), \frac{г}{л}$	357	359	360	361	364

Прийнята наступна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації соляного розчину [4, 5]:

$$k(c) = a_5 \cdot \left(\frac{c}{C_m}\right)^5 + a_4 \cdot \left(\frac{c}{C_m}\right)^4 + a_3 \cdot \left(\frac{c}{C_m}\right)^3 + a_2 \cdot \left(\frac{c}{C_m}\right)^2 + a_1 \cdot \left(\frac{c}{C_m}\right) + a_0,$$

де, $a_5 = 0,042557151$, $a_4 = -0,12857957$, $a_3 = 0,140291508$,
 $a_2 = -0,0643274$, $a_1 = 9,345668647 \cdot 10^{-3}$, $a_0 = 0,0010339$.

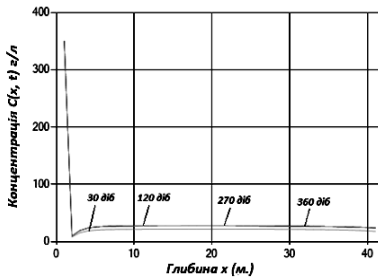


Рис. 1. Концентрація солей у рідкій фазі

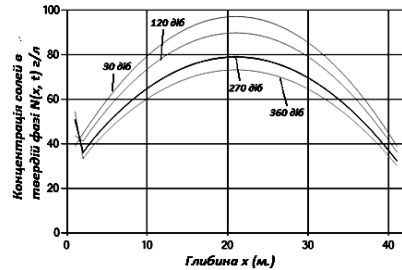


Рис. 2. Концентрація солей в твердій фазі

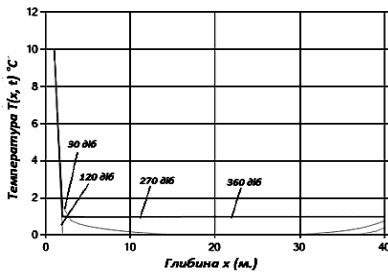


Рис. 3. Розподіл температури

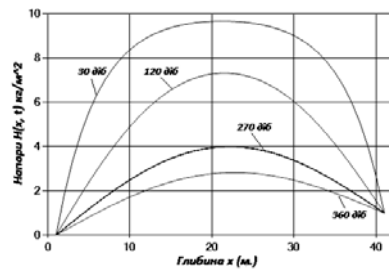


Рис. 4. Розподіл надлишкових напорів

Отже, урахування дії не чистої води, а соляного розчину може значно змінити прогностні розрахунки просідання будівель на засоленних ґрунтах. Крім того, урахування наявності адсорбції (десорбції) та залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в твердій фазі та температури значно впливає і на розподіл надлишкових напорів в засоленому ґрунті — напори розсіюються повільніше.

Висновки. В роботі досліджено вплив адсорбції (десорбції) та температури на розподіл надлишкових напорів. При проведенні і аналізі чисельних експериментів виявлено, що неізотермічні умови та врахування залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в твердій фазі та температури може значно змінити прогнозні розрахунки просідання ґрунту та розподіл надлишкових напорів в ньому. Подальші дослідження будуть стосуватися двовимірної задачі.

Список використаних джерел:

1. Аравин В. И. Naturные исследования фильтрации / В. И. Аравин, О. Н. Носова. — Л. : Энергия, 1969. — 255 с.
2. Богаєнко В. О. Моделювання впливу засоленості на динаміку геохімічних процесів / В. О. Богаєнко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фіз.-мат. науки. — 2010. — Вип. 3. — С. 3–12.
3. Веригин Н. Н. Конвективная дифузия и массообмен при фильтрации растворов в пористой среде / Н. Н. Веригин, В. С. Саркисян // Гидрогеол. исслед. водозаборн., водопонизительн. и дренаж. систем. — М., 1980. — С. 19–24.
4. Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузло // Меліорація та водне господарство : міжвідомчий тематич. наук. зб. — К. : Аграрна наука, 2000. — Вип. 87. — С. 65–72.
5. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Вид-во НУВГП, 2008. — 416 с.
6. Добронравов О. О. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації / О. О. Добронравов, В. С. Крємез // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. — 2006. — Вип. 7. — С. 141–146.
7. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. — М. : Высш. шк., 1991. — 447 с.
8. Желизко В. В. Математическое моделирование фильтрации воды в дамбах накопителей промышленных отходов и жидких стоков с учетом кольматации / В. В. Желизко, В. С. Крємез, А. А. Добронравов // Киевский национальный университет строительства и архитектуры. — 2004. — С. 31–37.
9. Сабадаш В. В. Абсорбційні процеси у природних дисперсних системах / В. В. Сабадаш, Я. М. Гуманицький, М. І. Басумак // Національний університет «Львівська політехніка». — 2013. — С. 277–280.
10. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М. : Научный мир, 2003. — 316 с.

The mathematical model of one-dimensional filtration consolidation problem of soil has been built taking into account adsorption (desorption) and non-isothermal conditions. The numerical solution of the corresponding boundary problem have been found by the finite difference method. The series of numerical experiments and their analysis have been carried out.

Key words: *filtration consolidation, salt soil, adsorption, desorption, isothermal mode.*

Отримано: 26.04.2016

УДК 539.3

Р. С. Мусій, д-р фіз.-мат. наук,

Н. Б. Мельник, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНІКИ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ

Запропоновано математичну модель дослідження термонапруженого стану, несучої здатності і властивостей контактного з'єднання складових тіл кусково-однорідного електропровідного тіла за дії імпульсних електромагнітних полів. Записано вихідні співвідношення термомеханіки такого тіла у переміщеннях і напруженнях. Сформульовано крайові умови на ключові функції як на зовнішніх поверхнях тіла, так і на поверхнях з'єднань його складових тіл. Як приклад наведено результати числових досліджень несучої здатності довгого біметалевого порожнистого циліндра за електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом за використання частот електромагнітного поля поза околум резонансних та рівних першій резонансній частоті.

Ключові слова: *математична модель, термомеханіка, кусково-однорідне електропровідне тіло, імпульсне електромагнітне поле, несуча здатність, властивості контактного з'єднання.*

Вступ. Елементами конструкцій сучасних машин і механізмів є кусково-однорідні електропровідні тіла (КОЕТ), які за експлуатації цих пристроїв зазнають впливу різних фізико-механічних полів, зокрема імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) [1, с. 14–15; 10, с. 211–213].

У літературі розглянуто математичні моделі однорідних і кусково-однорідних тіл за нестационарних силових і теплових навантажень [4, с. 43–50, 125–160; 5, с. 117–131; 6, с. 437, 548; 9, с. 115–168] та наявні математичні моделі термомеханіки однорідних електропровідних тіл за дії ЕМП різних типів [2; 3, с. 23–40; 8, с. 34–46; 12, с. 27–41]. Дана модель враховує адіабатичність процесів нагріву та деформування електропровідного тіла імпульсним ЕМП (ІЕМП), що експериментально спостерігається за дії ІЕМП різних типів, зокрема з модуляцією амплітуди в режимах з імпульсним модульним сигналом (ІМС) та згасної синусоїди (РЗС) і поодинокого електромагнітного імпульсу (ЕМІ). Такі ІЕМП широко використовують в технологіях імпульсної електромагнітної обробки матеріалів [1, с. 13–14]. В рамках цієї моделі досліджено термомеханічну поведінку і несучу здатність однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії розглядуваних характерних типів ІЕМП. Крім температури, зумовленої Джоулевым теплом, досліджено додатковий складник температури, створений нагрівом електропровідного тіла внаслідок

його об'ємної деформації за рахунок дії об'ємної пондеромоторної сили. Отримано, що цей складник температури є нехтовним за дії ЕМП та за дії в РІМС і РЗС при використанні частот несучих електромагнітних коливань поза околом резонансних частот ЕМП і складає на першій резонансній частоті 10-20 % від величини складника температури, зумовленого джоулевим теплом.

Аналіз отриманих якісних та кількісних результатів деформування однорідних електропровідних тіл ІЕМП характерних типів на основі розглядуваної моделі підтверджує раціональність її використання для визначення термонапруженого стану однорідних електропровідних тіл за дії ІЕМП з модуляцією амплітуди радіочастотного діапазону.

Розрахункова модель. При розгляді КОЕТ виникає питання врахування електромагнітного, теплового і механічного контактів між складовими тілами та впливу цього контакту на розподіл фізико-механічних полів в кожному складовому тілі. Тому розрахункова модель визначення термонапруженого стану (ТНС) КОЕТ за дії ІЕМП складається з трьох етапів [7]. На першому етапі в кожному n -му складовому тілі КОЕТ зі співвідношень Максвелла визначається нестационарне ЕМП, яке описується вектором напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}$, та зумовлені ним джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ і пондеромоторні сили $\vec{F}^{(n)}$ за врахування заданих граничних умов на зовнішніх поверхнях тіл та умов ідеального електромагнітного контакту на поверхнях їх розділу. На другому етапі з рівняння теплопровідності, в якому джоулеві тепловиділення $Q^{(n)}$ є об'ємними джерелами тепла, визначається нестационарне температурне поле $T^{(n)}$ в кожному n -му складовому тілі КОЕТ за умов конвективного теплообміну з довкіллям на зовнішніх поверхнях та ідеального теплового контакту на поверхнях з'єднання складових тіл. На третьому етапі з рівнянь динамічної термомпружності за знайденими температурою $T^{(n)}$ та пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$ визначаємо вектор переміщень $\vec{U}^{(n)}$ та тензор динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ в кожному n -му складовому тілі КОЕТ.

Для оцінки несучої здатності КОЕТ визначаємо інтенсивності $\sigma_i^{(n)}$ сумарних напружень $\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{(n)Q} + \hat{\sigma}^{(n)F}$ (зумовлених як джоулевим теплом, так і пондеромоторними силами) [11, с. 463] в кожному n -му складовому тілі, які обчислюються за формулою [5, с. 183]

$$\sigma_i^{(n)} = \sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)}) - I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)})) / 2} \quad (1)$$

і порівнюємо їх величину з межею пружного деформування $\sigma_d^{(n)}$ матеріалу n -го тіла. Тут $I_j(\hat{\sigma}^{(n)})$ — j -й інваріант тензора напружень.

КОЕТ втрачає несучу здатність в цілому, якщо її втрачає хоча б одне зі складових тіл, тобто в n -му складовому тілі

$$\max \sigma_i^{(n)} \leq \sigma_d^{(n)}. \quad (2)$$

Ця умова відповідає умові Губера-Мізера [5, с. 65; 6, с. 437] початку пластичності для ізотропного тіла, згідно якої пластичні деформації виникають тоді, коли інтенсивність напружень σ_i досягає межі плинності матеріалу σ_d при його розтягу.

У технічних пристроях, елементами конструкцій яких є КОЕТ, важливим також є збереження властивостей контактної з'єднання їх складових тіл. Для оцінки межі збереження цих властивостей величини інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)*}$ в складових тілах на поверхні контакту n -го і $(n+1)$ -го складових тіл порівнюються з межею міцності $\sigma_M^{(n)}$ n -го контактної з'єднання. Якщо

$$\sigma_i^{(n)*} \leq \sigma_M^{(n)}, \quad (3)$$

то властивості n -го контактної з'єднання зберігаються. Зауважимо, що величини $\sigma_d^{(n)}$ та $\sigma_M^{(n)}$ для використовуваних в техніці матеріалів складових тіл КОЕТ відомі з експериментів.

Вихідні співвідношення термомеханіки КОЕТ за дії ІЕМП.

Сформулюємо вихідні фізичні та математичні положення і запишемо вихідні співвідношення для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в КОЕТ за дії ІЕМП з модуляцією амплітуди. Такі ЕМП задаються значеннями вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$ на зовнішніх поверхнях складових шарів КОЕТ у вигляді

$$\vec{H}(\vec{r}_s^{(n)}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}_s^{(n)}, t) \equiv \vec{H}^0(\vec{r}_s^{(n)}, t) \sin(\omega t + \varphi_n). \quad (4)$$

Тут $\vec{H}^0(\vec{r}_s^{(n)}, t) = H_*(t) \vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$ — модульована амплітуда;

$\vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$ — амплітуда несучого сигналу; $H_*(t)$ — безрозмірна функція імпульсного характеру зміни в часі t сигналу, який модулює амплітуду електромагнітних коливань (амплітуду несучого сигналу), і задовольняє умови $H_*(t) \leq 1$ при $t \in [0, t_i]$, $H_*(0) = 0$, $H_*(t_i) = 0$; ω — частота несучого сигналу; t_i — час тривалості електромагнітної дії; φ_n — початкова фаза, \vec{r} і $\vec{r}_s^{(n)}$ — радіус-вектори точок об'єму V і зовнішніх поверхонь S_n складових шарів КОЕТ.

Приймаємо, що параметри ω , t_i , $\vec{H}_0^*(\vec{r}_s^{(n)})$, $H_*(t)$ є такими, що діюче імпульсне ЕМП належить до класу імпульсних «неруйнівних» ЕМП, дія яких ще не приводить до виникнення ударних хвиль (з імпульсом довжиною менше часток секунди ($t_i < 0,01$ с) і з найбільшим значенням напруженості магнітного поля на поверхнях тіла $H_{\max} \leq 10^7$ А/м.

Матеріали складових шарів КОЕТ вважаються однорідними ізотропними недіелектричними неферомагнітними, для яких електромаханічні та термоелектричні ефекти неістотні, вектори індукцій $\vec{D}^{(n)}$ і $\vec{B}^{(n)}$ паралельні до векторів напруженостей електричного $\vec{E}^{(n)}$ та магнітного $\vec{H}^{(n)}$ полів, а струми провідності $\vec{j}^{(n)}$ паралельні до $\vec{E}^{(n)}$. Приймаємо, що матеріальні рівняння електродинаміки в кожному n -му шарі мають вигляд

$$\vec{D}^{(n)} = \varepsilon_n \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{B}^{(n)} = \mu_n \vec{H}^{(n)}, \quad \vec{j}^{(n)} = \sigma_n \vec{E}^{(n)}, \quad (5)$$

де $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \varepsilon_{*n}$, $\mu_n = \mu_0 \mu_{*n}$, ε_{*n} , μ_{*n} — відносні електрична і магнітна проникливості, σ_n — коефіцієнт електропровідності матеріалу n -го складового шару, ε_0 , μ_0 — відповідно електрична і магнітна сталі.

За таких припущень вплив імпульсного ЕМП на процеси теплопровідності та деформування в електропровідному тілі, як і у відомих в літературі моделях для квазіусталених ЕМП [12, с. 33–44], враховуємо через зумовлені цим полем фізичні чинники — джоулеві тепловиділення і пондеромоторні сили

$$\vec{Q}^{(n)} = \sigma_n \vec{E}^{(n)} \vec{E}^{(n)}, \quad \vec{F}^{(n)} = \sigma_n \mu_n \vec{E}^{(n)} \times \vec{H}^{(n)}. \quad (6)$$

Ці фактори призводять до виникнення нестационарних температурних та механічних полів. Пондеромоторні моменти $\vec{M}^{*(n)} = \vec{M}_E^{*(n)} + \vec{M}_M^{*(n)}$, де $\vec{M}_E^{*(n)} = \vec{P}^{(n)} \times \vec{E}^{(n)}$ — електричні моменти, $(\vec{M}_M^{*(n)} = \vec{M}^{(n)} \times \vec{B}^{(n)})$ — магнітні моменти; $\vec{P}^{(n)} = \vec{D}^{(n)} - \varepsilon \vec{E}^{(n)}$, $\vec{M}^{(n)} = \vec{B}^{(n)} / \mu_{0n} - \vec{H}^{(n)}$ — відповідно вектори поляризації і намагнічування) внаслідок паралельності векторів індукцій і напруженостей електричного та магнітного полів є рівні нулю. В такому наближенні і за сталих характеристик матеріалу (зокрема, рівних середнім значенням у розглядуваному інтервалі зміни температур) вихідні співвідношення для кількісного опису параметрів, що характеризують електромагнітні, теплові та механічні процеси в тілах за імпульсної електромагнітної дії, формулюємо за три етапи, згідно вибраної розрахункової схеми.

На першому етапі визначаємо параметри ЕМП в n -му складовому шарі КОЕТ. За ключову функцію вибираємо вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$. Нехтуючи струми зміщення для тривалостей фронтів імпульсної електромагнітної дії більших, ніж 10^{-6} с і частот електромагнітних коливань менших, ніж 10^8 Гц, на основі співвідношень Максвелла і закону Ома за прийнятих припущень [11, с. 416–421]

$$\operatorname{rot} \vec{H}^{(n)} = \vec{j}^{(n)}, \operatorname{rot} \vec{E}^{(n)} = -\mu_n \frac{\partial \vec{H}^{(n)}}{\partial t}, \vec{j}^{(n)} = \sigma_n E^{(n)} \quad (7)$$

отримуємо рівняння для визначення $\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, t)$ в n -му складовому тілі

$$\Delta \vec{H}^{(n)} - \sigma_n \mu_n \frac{\partial \vec{H}^{(n)}}{\partial t} = 0, \operatorname{div} \vec{H}^{(n)} = 0 \quad (8)$$

за крайових умов

$$\vec{H}^{(n)}(\vec{r}_s, t) = \vec{H}_*^{(n)}(t) H_0^* \left(\vec{r}_s^{(n)} \right) \quad (9)$$

на зовнішніх поверхнях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ n -го тіла та умов ідеального електромагнітного контакту, який на поверхні $\vec{r} = \vec{r}_n$ з'єднання n -го і $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ запишеться у вигляді

$$\vec{H}^{(n)} = \vec{H}^{(n+1)}, \operatorname{rot} \vec{H}^{(n)} = k_\sigma^n \operatorname{rot} \vec{H}^{(n+1)} \quad (10)$$

та нульових початкових умов

$$\vec{H}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0. \quad (11)$$

Тут Δ — оператор Лапласа, $k_\sigma^n = \sigma_n / \sigma_{n+1}$.

Питомі густини джоулевого тепла $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$ і пондеромоторних сил $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$ визначаються за формулами

$$Q^{(n)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sigma_n} \left(\operatorname{rot} H^{(n)}(\vec{r}, t) \right)^2, \quad (12)$$

$$F^{(n)}(\vec{r}, t) = \mu_n \cdot \operatorname{rot} H^{(n)}(\vec{r}, t) \times H^{(n)}(\vec{r}, t). \quad (13)$$

На другому етапі за знайденим розподілом джоулевого тепла $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$ визначається температура $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ в n -му шарі КОЕТ з рівняння теплопровідності

$$\Delta T^{(n)} - \frac{1}{\kappa_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = -\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n} \quad (14)$$

з урахуванням умов конвективного теплообміну з довкіллям

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial n} + H \left(T^{(n)} - T_s^{(n)} \right) = 0 \quad (15)$$

на зовнішніх поверхнях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ n -го тіла, умов

$$T^{(n)} = T^{(n+1)}, \quad \text{grad } T^{(n)} = k_\lambda^n \text{grad } T^{(n+1)} \quad (16)$$

ідеального теплового контакту на поверхні $\vec{r} = \vec{r}_n$ з'єднання n -го і $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ та початкових умов

$$T^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0. \quad (17)$$

Тут $T^{(n)}$ — відхилення температури від початкової $T_0^{(n)}$, К; $\partial T^{(n)} / \partial n = \vec{n} \text{grad } T^{(n)}$; \vec{n} — вектор нормалі до зовнішньої поверхні $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$; $T^{(n)}$ — задана постійна температура довкілля зовні n -го тіла; $H_n = H_{*n} / \lambda_n$ — відносний коефіцієнт тепловіддачі; H_{*n} — коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь n -го тіла; $k_\lambda^n = \lambda_{n+1} / \lambda_n$; κ_n , λ_n — коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів n -го тіла.

На третьому етапі за відомими виразами температури $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ і пондеромоторної сили $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$ визначається термонапружений стан КОЕТ з рівнянь незв'язаної динамічної задачі термопружності, записаних для n -го тіла

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} &= \rho_n \frac{\partial \vec{u}^{(n)}}{\partial t}, \\ \vec{\sigma}^{(n)} &= 2G_n \left\{ \vec{e}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[e_{jj}^{(n)} - \alpha_n \frac{1+\nu_n}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \vec{I} \right\}, \\ \vec{e}^{(n)} &= \text{Def } \vec{u}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \vec{u}^{(n)} + \vec{u}^{(n)} \vec{\nabla} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Тут $\vec{e}^{(n)} = \{ e_{ij}^{(n)} \}$ — тензор деформацій; Def — деформатор; $\vec{\nabla}$ — оператор Гамільтона; $\vec{I} = \{ \delta_{ij} \}$ — одиничний тензор; δ_{ij} — символ Кронекера; $\vec{\nabla} \vec{u}^{(n)}$, $\vec{u}^{(n)} \vec{\nabla}$ — діадний добуток векторів $\vec{\nabla}$ і $\vec{u}^{(n)}$; α_n , ν_n — коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; $G_n = E_n / 2(1+\nu_n)$ — модуль зсуву; E_n — модуль Юнга; ρ_n — густина матеріалу n -го тіла. Всі теплофізичні та фізико-механічні характеристики матеріалів складових тіл вважаються постійними.

Рівняння (18) розв'язуються за відповідних крайових (теплових і механічних) та початкових умов. За початкові умови переважно задають значення вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$, швидкості $\partial\vec{u}^{(n)}/\partial t$ та температури $T^{(n)}$ у всій області кожного n -го складового тіла в початковий момент часу при $t = 0$. Якщо ці функції дорівнюють нулю, то початкові умови мають вигляд

$$u_i^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_i^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0, \quad T^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (19)$$

Залежно від вигляду крайових умов, система рівнянь (18) розв'язується в переміщеннях або в напруженнях. Якщо визначальними функціями задачі термопружності є температура $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ і тензор напружень $\hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, t)$, то отримуємо систему

$$\text{Def} \left(\text{div} \hat{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} \right) = \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1 + \nu_n}{E_n} \hat{\sigma}^{(n)} + \left(\alpha_n T^{(n)} - \frac{\nu_n}{E_n} \sigma_*^{(n)} \right) \hat{I} \right], \quad (20)$$

а у випадку визначальних функцій $T^{(n)}(\vec{r}, t)$ і $\vec{u}^{(n)}(\vec{r}, t)$ — систему

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{1}{1 - 2\nu_n} \text{grad div} \right) \vec{u}^{(n)} - \frac{2(1 + \nu_n)\rho_n}{E_n} \frac{\partial^2 \vec{u}^{(n)}}{\partial t^2} = \\ = \frac{\alpha_n E_n}{1 - 2\nu_n} \text{grad} T^{(n)} - \frac{2(1 + \nu_n)}{E_n} \vec{F}^{(n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тут $\sigma_*^{(n)} \equiv I_1(\hat{\sigma}^{(n)})$. Рівняння (20) розв'язуємо за крайових умов

$$\hat{\sigma}^{(n)} \vec{n} = 0, \quad (22)$$

що відповідають відсутності на зовнішніх поверхнях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$ складових тіл силового навантаження, та умов ідеального механічного контакту

$$\hat{\sigma}^{(n)} = \hat{\sigma}^{(n+1)}, \quad \text{div} \hat{\sigma}^{(n)} + \vec{F}^{(n)} = k_\rho^n \left(\text{div} \hat{\sigma}^{(n+1)} + \vec{F}^{(n+1)} \right) \quad (23)$$

на поверхні $\vec{r} = \vec{r}_n$ з'єднання n -го і $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ, та за початкових умов

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \\ \frac{1}{2G_n} \frac{\partial \hat{\sigma}^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} + \left(\alpha_n \frac{\partial T^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} - \frac{\nu_n}{E_n} \frac{\partial \sigma_*^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} \right) \hat{I} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

при $t = 0$. Тут $k_\rho^n = \rho_n / \rho_{n+1}$.

Рівняння (21) в переміщеннях розв'язуємо за крайових умов

$$\left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[\text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\} \vec{n} = 0, \quad (25)$$

що відповідають умовам (22), записаним відносно вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$, на вільних від силового навантаження зовнішніх поверхнях $\vec{r} = \vec{r}_s^{(n)}$, та умов ідеального механічного контакту

$$\vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{(n+1)}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[\text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} = \\ & = k_E^n \left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n+1)} + \frac{\nu_{n+1}}{1-2\nu_{n+1}} \left[\text{div } \vec{u}^{(n+1)} - \frac{\alpha_{n+1}(1+\nu_{n+1})}{1-2\nu_{n+1}} T^{(n+1)} \right] \hat{I} \right\} \end{aligned}$$

на поверхні $\vec{r} = \vec{r}_n$ з'єднання n -го і $(n+1)$ -го складових тіл КОЕТ, а також початкових умов

$$\vec{u}^{(n)}(\vec{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \vec{u}^{(n)}(\vec{r}, 0)}{\partial t} = 0, \quad (27)$$

при $t = 0$. Тут $k_E^n = E_{n+1}(1+\nu_n)/E_n(1+\nu_{n+1})$.

За знайденим вектором переміщень $\vec{u}^{(n)}$ визначаємо тензор напружень $\vec{\sigma}^{(n)}$ в n -му тілі зі співвідношення

$$\vec{\sigma}^{(n)} = 2G_n \left\{ \text{Def } \vec{u}^{(n)} + \frac{\nu_n}{1-2\nu_n} \left[\text{div } \vec{u}^{(n)} - \frac{\alpha_n(1+\nu_n)}{1-2\nu_n} T^{(n)} \right] \hat{I} \right\}. \quad (28)$$

Для оцінки вкладу джоулевого тепла $Q^{(n)}(\vec{r}, t)$ і пондеромоторних сил $\vec{F}^{(n)}(\vec{r}, t)$ на термонапружений стан КОЕТ тензор напружень $\vec{\sigma}^{(n)}$ і вектор переміщень $\vec{u}^{(n)}$ подаємо у вигляді суми двох складників

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \vec{\sigma}^{Q(n)} + \vec{\sigma}^{F(n)}, \quad \vec{u}^{(n)} = \vec{u}^{Q(n)} + \vec{u}^{F(n)} \quad (29)$$

зумовлених відповідно джоулевым теплом і пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$. Складники $\vec{\sigma}^{Q(n)}$, $\vec{u}^{Q(n)}$ визначаємо з рівнянь (20)–(21) при $\vec{F}^{(n)} = 0$, а складники $\vec{\sigma}^{F(n)}$ і $\vec{u}^{F(n)}$ — з цих рівнянь при $T^{(n)} = 0$.

За знайденими сумарними векторами переміщень $\vec{u}^{(n)}$ і тензорами напружень $\vec{\sigma}^{(n)}$ з врахуванням формули (28) для знайдених переміщень $\vec{u}^{(n)}$ визначаємо за формулою (1) інтенсивності напружень в n -му складовому тілі КОЕТ та на основі виконання нерівностей (2) і (3) досліджуємо несучу здатність та збереження властивостей контактного з'єднання.

Чисельний аналіз. На основі запропонованої математичної моделі досліджено термонапружений стан і несучу здатність довгого біметалевого порожнистого циліндра, виготовленого з нержавної сталі Х18Н9Т та міді з радіусами: внутрішнім $r_0 = 8$ мм, поверхні з'єднання $r_1 = 9$ мм і зовнішнім $r_2 = 10$ мм за електромагнітної дії в РІМС тривалістю $t_i = 10^{-3}$ с поза околom резонансних частот ЕМП при $\omega = \omega_* = 6.28 \cdot 10^4$ 1/с і на першій резонансній частоті при $\omega = \omega_{r1} = 2.32 \cdot 10^5$ 1/с.

На рис. 1, 2 показано зміну в часі інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)}$ на поверхні з'єднання $\vec{r} = \vec{r}_1$ складових шарів біметалевого циліндра при $\omega = \omega_*$ (рис. 1) і при $\omega = \omega_{r1}$ (рис. 2). Лінії 1 на рис. 1, а також рис.2, а відповідають сталевому, а лінії 2 на рис. 1 та рис. 2,б — мідному шарам.

$$\sigma_i^{(n)} \cdot 10^5 / H_0^2, \text{ Па} \frac{\text{М}^2}{\text{А}^2}$$

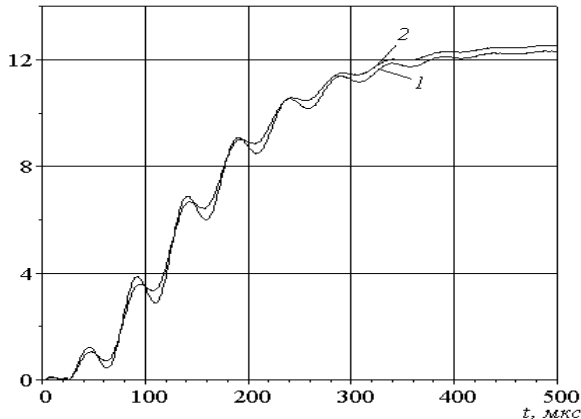


Рис. 1. Зміна в часі інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)}$ при $\omega = \omega_*$

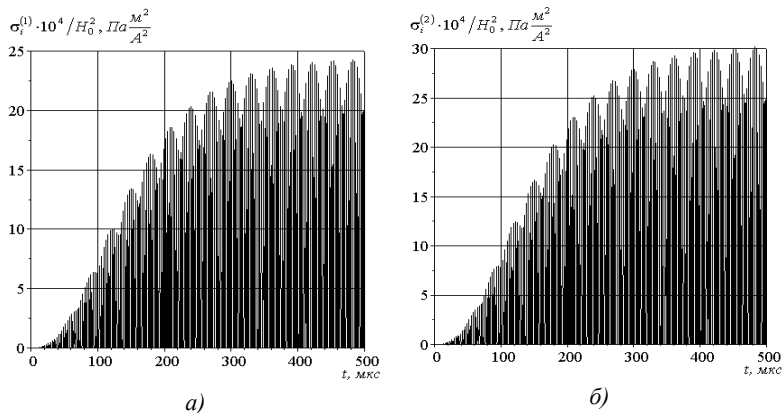


Рис. 2. Зміна в часі інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)}$ при $\omega = \omega_{r1}$

На рис. 3 подано залежності максимальних значень σ_i^{\max} інтенсивностей напружень в складових шарах циліндра на поверхні їх з'єднання за різних тривалостей дії в РІМС від величини H_0 — максимального значення напруженості магнітного поля на зовнішніх поверхнях циліндра за розглядуваної електромагнітної дії.

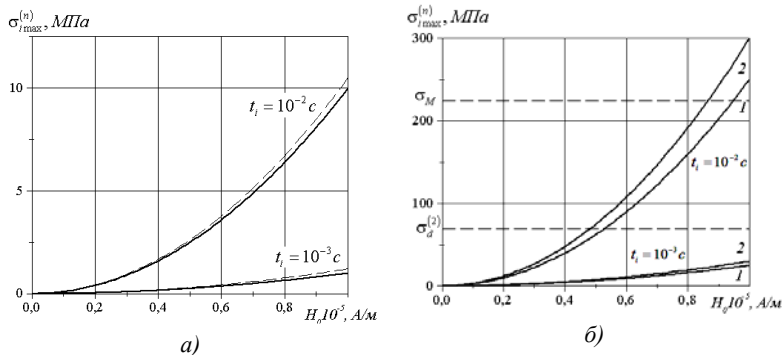


Рис. 3. Залежності максимальних значень σ_i^{\max} інтенсивностей напружень від величини H_0

Залежності σ_i^{\max} для тривалостей $t_i = 10^{-3} \text{с}$, 10^{-2}с дії в РІМС, приведені на рис. 3,а, відповідають частоті $\omega = \omega_*$, а на рис. 3,б — частоті $\omega = \omega_{r1}$. Суцільні лінії на рис. 3,а відповідають першому, сталевому, а штрихові — другому, мідному, шарам.

Висновки. Записані співвідношення математичної моделі КОЕТ дають можливість визначення термонапруженого стану і несучої здатності КОЕТ за дії зовнішніх ІЕМП. На основі отриманих в роботі залежностей максимальних значень інтенсивностей напружень в розглядуваному біметалевому циліндрі від амплітудно-частотних характеристик електромагнітної дії в РІМС встановлено:

- а) за частоти електромагнітних коливань несучого сигналу поза околом резонансних частот несуча здатність та властивості контактного з'єднання розглядуваного циліндра зберігаються;
- б) за частоти електромагнітних коливань, рівний першій резонансній частоті ЕМП розглядуваний біметалевий циліндр втрачає несучу здатність і властивості контактного з'єднання за тривалості $t_i \geq 7 \cdot 10^{-3} c$.

Список використаних джерел:

1. Батыгин Ю. В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий / Ю. В. Батыгин, В. И. Лавинский, Л. Т. Хименко. — Харьков : МОСТ — Торнадо, 2003. — 288 с.
2. Бурак Я. Й. Термопружність електропровідних тіл за умов дії імпульсних електромагнітних полів / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* — 2006. — Вип. 49, № 1. — С. 75–84.
3. Гачкевич О. Р. Термомеханіка неферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди / О. Р. Гачкевич, Р. С. Мусій, Д. В. Тарлаковський. — Львів : СПОЛОМ, 2011. — 216 с.
4. Грибанов В. Ф. Связанные и динамические задачи термоупругости / В. Ф. Грибанов, Н. Г. Паничкин. — М. : Машиностроение, 1984. — 184 с.
5. Ионоу В. Н. Напряжения в телах при импульсивном нагружении / В. Н. Ионоу, П. М. Огибалов. — М. : Высш. школа, 1975. — 463 с.
6. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1970. — 940 с.
7. Термонапруженное состояние и несущая способность биметаллических цилиндров при импульсных электромагнитных воздействиях / Р. С. Мусій [и др.] // *Теоретическая и прикладная механика.* — 2013. — № 6 (52). — С. 89–98.
8. Мусій Р. С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми: монографія / Р. С. Мусій. — Львів : Растр-7, 2010. — 216 с.
9. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1976. — 312 с.
10. Сильные и сверхсильные магнитные поля и их применение / под ред. Ф. Херлаха. — М. : Мир, 1988. — 456 с.
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм — М. : Наука, 1976. — 616 с.
12. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач [и др.] — К. : Наук. думка, 1977. — 248 с.

A mathematical model of analyzing a thermal stress state, load capacity, and properties of contact connection of components of piecewise ho-

mogenous conducting body under the influence of pulsed electromagnetic fields. The initial ratios of the thermodynamics of the body during movement and stresses have been recorded. The boundary conditions on key functions on both outside surfaces of the body and on contact surfaces between its components have been formulated. An example of numerical analysis of the load capacity of a long bimetallic empty cylinder under the influence of an electromagnetic field with pulsed modulating signal on the first resonance frequency and beyond resonance frequencies.

Key words: *mathematical model, thermomechanics, piecewise homogenous conducting body, pulsed electromagnetic field, load capacity, properties of the contact connection.*

Отримано: 15.06.2016

УДК 658.5:004.94

Ю. А. Романенков, канд. техн. наук,

В. М. Варганян, д-р техн. наук,

Т. Г. Зейниев

Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ ОРГАНИЗАЦИИ

Рассмотрена задача оптимального распределения инвестиционных ресурсов между отдельными бизнес-процессами организации. Учтена интервальная неопределенность экспертных оценок, характерная для отраслевого экспертного опроса. Предложен интервальный вариант матричной модели оценки уровня относительной эффективности иерархической системы бизнес-процессов в организации, который позволил свести задачу оптимального распределения ресурсов к задаче линейного программирования с интервально заданной целевой функцией. Предложена интервальная модификация аппарата нормированных диаграмм в качестве графоаналитического средства анализа.

Ключевые слова: *интервальная оптимизационная модель, распределение ресурсов, эффективность бизнес-процессов, задача линейного программирования.*

Введение. Проблема эффективного стратегического управления организацией чрезвычайно многогранна и многослойна. Сложность объекта управления, противоречивость внутренних многосвязных процессов неизбежно порождает массу моделей и методов, призванных решать задачу управления таким объектом в условиях неопреде-

ленности, причем как внешней, так и внутренней [1]. Их число обусловлено многовариантностью способов формализации отдельных функций и свойств организации [2]. Практическое применение таких моделей, как правило, характеризуется жестко ограниченным запасом времени на моделирование, недостатком квалификации или информации для эффективного моделирования, слабой надежностью при работе с нечеткими данными, а также межуровневой несогласованностью между лицами, принимающими решение.

В сложившейся повышается роль специализированных информационных технологий стратегического управления организацией [3], которые призваны не только реализовывать современные эффективные модели и методы, но и расширять их возможности для работы с разными типами данных, в том числе и в интервальной форме.

Анализ последних публикаций и постановка проблемы. Согласно [4], система бизнес-процессов организации может быть представлена функциональными областями деятельности (например, организационная структура управления, система управления, маркетинг, система организации производства, персонал предприятия, снабжение, сбыт и т.д. [5]). Актуальной задачей при выбранном способе формализации является обоснованный выбор варианта оптимального распределения инвестиционных ресурсов между отдельными бизнес-процессами организации.

В работе [6] предложен матричный метод оценки уровня относительной эффективности иерархической системы бизнес-процессов в организации, формализующий иерархическую структуру бизнес-процессов, и позволяющий оценивать эффективность структуры любого порядка и размерности.

В работе [7] разработан оптимизационный механизм выбора стратегий повышения конкурентоспособности организации, обеспечивающий оптимальное распределение ресурсов между объемами мероприятий по повышению эффективности отдельных бизнес-процессов, а также предложен аппарат нормированных диаграмм в качестве графоаналитического средства анализа относительной эффективности системы бизнес-процессов. Он позволил свести поставленную задачу к классической задаче линейного программирования (ЗЛП) [8].

Адаптация разработанного инструментария к работе с интервальными данными — актуальная научно-практическая задача, решение которой позволит расширить границы практической применимости предложенных моделей и методов.

Большое количество публикаций, посвященных решению ЗЛП с интервально заданными параметрами, предопределено двумя основными факторами. Во-первых, интервальная форма данных — доволь-

но простая форма учета естественной неопределенности данных, обусловленной как неточностью знаний о значениях показателей реальных систем, так и нестационарностью, т.е. изменчивостью этих показателей во времени [9]. Во-вторых, задача в интервальной постановке различными способами к группе детерминированных, которые благополучно решаются классическими методами, например [10, 11].

Основная часть. Используя обозначения и логику, принятые в [6], опишем методику оценки уровня относительной эффективности иерархической системы бизнес-процессов в организации с учетом интервальной неопределенности данных.

Система бизнес-процессов организации может быть охарактеризована составной матрицей X следующей структуры

$$X = \begin{bmatrix} [X_1] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & X_2 & & & 0 \\ \dots & & & & \\ & & X_k & & \\ \dots & & & & \\ & X_n & & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $X_1 = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1l_1}]$, $X_2 = [x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2l_2}]$, ..., $X_n = [x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nl_n}]$ — набор векторов эффективности n бизнес-процессов организации, каждый из которых состоит из компонент относительных показателей эффективности соответствующего бизнес-процесса; l_1, l_2, \dots, l_n — размерности векторов X_1, X_2, \dots, X_n ; X_k — вектор максимальной размерности из набора X_1, X_2, \dots, X_n ,

$$l_k = \max_{i=1}^n \{l_i\}.$$

Элемент x_{ij} трактуется как относительная эффективность j -й компоненты i -го бизнес-процесса, и определяется путем сравнения с аналогичными бизнес-процессами организаций-конкурентов. Исходя из этого, их значения ограничены интервалом $x_{ij} \in [0, 1]$, причем верхняя граница соответствует максимальной эффективности j -й компоненты i -го бизнес-процесса среди всей группы оцениваемых организаций.

Пусть каждый из n бизнес-процессов в организации характеризуется вектором-столбцом коэффициентов относительной значимости компонент бизнес-процесса

$$[A_i] = \left[[\alpha_{i1}], [\alpha_{i2}], \dots, [\alpha_{il_i}] \right]^T, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $[\alpha_{ij}] = [\underline{\alpha}_{ij}, \overline{\alpha}_{ij}]$ — интервальный коэффициент относительной значимости j -й компоненты i -го бизнес-процесса, причем $[\alpha_{ij}] \subset [0, 1]$. Очевидно, что свойство точечных оценок $\sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} = 1$, $i = \overline{1, n}$ для интервально заданных коэффициентов не выполняется, но в рамках решаемой задачи этот факт не является значимым.

Природа интервальной формы коэффициента $[\alpha_{ij}]$ обусловлена механизмом его получения, а именно процедурой интервального оценивания. Наряду с согласованной точечной оценкой на различных этапах исследования может быть использована оценка интервальная. Идея использования данных такого типа состоит в естественном желании исследователя учесть неопределенность, выраженную подобным образом, в решении задачи. К примеру, в случае единственности решения ЗЛП в интервальной постановке, исследователь получает, помимо самого решения, еще и гарантию того факта, что оно останется неизменным при любом сочетании интервальных коэффициентов модели. При этом ширина интервалов предполагается малосущественной по сравнению с серединой соответствующих интервалов, так как в противном случае задача фактически будет поставлена в общем виде и не сможет быть решена по определению.

Набор векторов (3) может быть представлен в виде составной матрицы интервальной матрицы $[A]$, составленной аналогично X :

$$[A] = \begin{bmatrix} [[A_1]]^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ [[A_2]]^T & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ [[A_k]]^T & & & & \\ \dots & & & & \\ [[A_n]]^T & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $[A_k]$ — интервальный вектор максимальной размерности из набора (2).

Произведение матриц $X[A]$ — квадратная матрица размером $n \times n$, которая содержит в главной диагонали интервальную оценку относительной эффективности каждого из n бизнес-процессов в организации:

$$X[A] = \begin{bmatrix} X_1[A_1] & X_1[A_2] & \dots & X_1[A_n] \\ X_2[A_1] & X_2[A_2] & \dots & X_2[A_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n[A_1] & X_n[A_2] & \dots & X_n[A_n] \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Определим $[B]$ как интервальную матрицу размером $n \times n$, содержащую в главной диагонали интервальные оценки относительных коэффициентов значимости бизнес-процессов

$$[B] = \begin{bmatrix} [\beta_1] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & [\beta_2] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [\beta_{n-1}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & [\beta_n] \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $[\beta_i] = [\underline{\beta}_i, \overline{\beta}_i]$ — интервальная оценка относительного коэффициента значимости i -го бизнес-процесса в организации, причем $[\beta_i] \subset [0, 1]$.

Матрица $X[A][B]$ содержит в главной диагонали интервальные оценки взвешенных относительных эффективностей всех бизнес-процессов в организации:

$$X[A][B] = \begin{bmatrix} [\beta_1]X_1[A_1] & [\beta_2]X_1[A_2] & \dots & [\beta_n]X_1[A_n] \\ [\beta_1]X_2[A_1] & [\beta_2]X_2[A_2] & \dots & [\beta_n]X_2[A_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\beta_1]X_n[A_1] & [\beta_2]X_n[A_2] & \dots & [\beta_n]X_n[A_n] \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Интервальную оценку комплексной относительной эффективности бизнес-процессов в организации можно найти, определив след интервальной матрицы $X[A][B]$:

$$\begin{aligned} [E] &= [\underline{E}, \overline{E}] = tr(X[A][B]) = \\ &= [\beta_1]X_1[A_1] + [\beta_2]X_2[A_2] + \dots + [\beta_n]X_n[A_n] = \sum_{i=1}^n [\beta_i]X_i[A_i] \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, значение комплексной относительной эффективности бизнес-процессов в организации можно представить не точно, а в интервальной форме, что на данном этапе исследования позволит учесть неопределенность экспертного оценивания.

Предположим, что существует набор стратегий, состоящих из отдельных мероприятий, направленных на совершенствование бизнес-процессов по накопительному принципу.

Рассматриваемая задача с такими допущениями может быть сведена к ЗЛП в интервальной форме.

Набор элементов главной диагонали матрицы (6) представим в виде нормированной диаграммы для интервальных оценок (рис. 1).

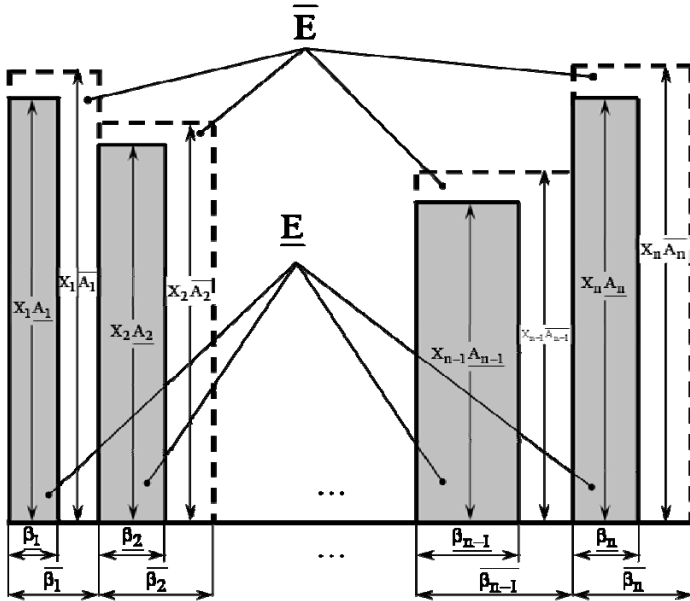


Рис. 1. Нормированная диаграмма интервальной оценки эффективности бизнес-процессов в организации

Интервальная оценка комплексной относительной эффективности бизнес-процессов в организации, согласно (7), ограничена слева площадью фигуры \underline{E} (сумма площадей заштрихованных прямоугольников на рис. 1) и справа площадью фигуры \overline{E} (сумма площадей заштрихованных прямоугольников на рис. 1). Именно эта оценка может выступать функционалом в ЗЛП, которую в данном случае можно формализовать в стандартной форме в соответствии с и введенными выше обозначениями.

Пусть Q — вектор материальных, информационных, технологических, кадровых и других ресурсов, предназначенных для повышения конкурентоспособности организации:

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_m], \quad (8)$$

где m — количество видов ресурсов; а c_{ij} — объем ресурса i -го вида, необходимое для повышения на 1% эффективности j -го бизнес-процесса (табл. 1).

Таблица 1

Исходные данные для ЗЛП в стандартной форме

Вид ресурса	Запас ресурса	Кол-во единиц ресурса на 1% роста эффективности бизнес-процесса (БП)				
		БП ₁	БП ₂	...	БП _{n-1}	БП _n
1	q_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n-1}	c_{1n}
2	q_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n-1}	c_{2n}
...
$m-1$	q_{m-1}	c_{m-11}	c_{m-12}	...	c_{m-1n-1}	c_{m-1n}
m	q_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn-1}	c_{mn}

В качестве целевой функции используем интервальную функцию прироста комплексной эффективности бизнес-процессов в организации:

$$[Z] = [\Delta E] = 0,01 \sum_{j=1}^n [\beta_j] X_j [A_j] y_j \rightarrow \max, \quad (9)$$

где y_j — объем мероприятий, направленных на повышение эффективности j -го бизнес-процесса.

Окончательно, интервальная ЗЛП в стандартной форме будет выглядеть следующим образом: обеспечить максимальное значение интервальной целевой функции (9) при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \leq q_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (10)$$

Очевидно, что имеет место ЗЛП с линейной интервально-заданной функцией.

Согласно [9], интервальную задачу (9)–(10) можно свести к двум детерминированным задачам следующего вида.

Нижняя граничная задача:

$$\bar{Z} = \max,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \leq q_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (11)$$

Верхняя граничная задача:

$$\underline{Z} = \max, \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n c_{ij} y_j \leq q_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (12)$$

Решение задачи (9)–(10) составляется из решений ее нижней и верхней граничных задач в следующем виде:

$$\left\{ Y^* \in M_n(y) \cap M_o(y), [Z]_{\max} = \left[\underline{Z}_{\max}, \overline{Z}_{\max} \right] \right\}, \quad (13)$$

где $M_n(y)$, $M_o(y)$ — множества точек $y = (y_1, \dots, y_n)$ решений нижней и верхней граничной задачи, \underline{Z}_{\max} , \overline{Z}_{\max} — полученные максимальные значения целевых функций этих задач.

В качестве точки решения в (13) берется любая точка из пересечения множеств $M_n(y)$, $M_o(y)$, а в качестве максимального значения целевой функции $[Z]_{\max}$ интервал от максимума целевой функции нижней граничной задачи \underline{Z}_{\max} до максимума целевой функции верхней граничной задачи \overline{Z}_{\max} .

Преимуществом подобного подхода к решению интервальной задачи условной оптимизации заключается в возможности применения традиционных, хорошо разработанных методов решения детерминированных задач оптимизации [9].

Решение ЗЛП $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ отражает оптимальное соотношение между объемами мероприятий по повышению эффективности отдельных бизнес-процессов в организации при любых параметрах системы внутри заданных интервалов.

Пример. Рассмотрим плоскую задачу перераспределения ресурсов для реализации двух альтернативных стратегий относительно двух рассматриваемых бизнес-процессов в организации [7] (табл. 2).

Таблица 2

Интервальные относительные коэффициенты значимости бизнес-процессов организации

Бизнес-процесс	Интервальные относительные коэффициенты значимости	Значение
Маркетинг	$[\beta_1]$	$[0,34; 0,36]$
Система организации производства	$[\beta_2]$	$[0,64; 0,66]$

Пусть используется три вида ресурсов: q_1 — финансовый (грн.), q_2 — кадровый резерв (чел/час) и q_3 — производственно-технологический (% загрузки оборудования).

Запасы ресурсов и их удельное количество на 1% роста эффективности бизнес-процессов в эквиваленте денежных единиц, представлены в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные для плоской ЗЛП (пример)

Вид ресурса	Резерв ресурса	Удельное количество ресурса на 1% роста эффективности	
		БП ₁	БП ₂
q_1	20	2	5
q_2	40	8	5
q_3	30	5	6

На основании табл. 2 указанным в (5) способом формируем матрицу [B]:

$$[B] = \begin{bmatrix} [0,34; 0,36] & 0 \\ 0 & [0,64; 0,66] \end{bmatrix}.$$

Структура бизнес-процессов, оценки их относительной эффективности и значимости представлены в табл. 4.

Таблица 4

Структура и характеристики бизнес-процессов

Бизнес-процесс	Компоненты бизнес-процесса	Относительная эффективность компоненты x_{ij}	Интервальный относительный коэффициент значимости компоненты $[\alpha_{ij}]$
1. Маркетинг	1.1 Система организации маркетинга	1	[0,17; 0,19]
	1.2 Система исследования рынка	0,9	[0,17; 0,19]
	1.3 Ассортиментная политика	0,8	[0,15; 0,17]
	1.4 Ценовая политика	0,8	[0,15; 0,17]
	1.5 Коммуникационная политика	0,7	[0,15; 0,17]
	1.6 Распределительная политика	0,8	[0,15; 0,17]
2. Система организации производства	2.1 Численность занятых в производстве	0,8	[0,9; 0,11]
	2.2 Основные используемые технологии	0,8	[0,11; 0,13]
	2.3 Инновации в производственном процессе	0,8	[0,11; 0,13]
	2.4 Степень овладения существующими технологиями	0,8	[0,12; 0,14]
	2.5 Техничко-технологическая база предприятия	0,9	[0,14; 0,16]
	2.6 Система планирования производства	0,8	[0,13; 0,15]
	2.7 Система обеспечения качество продукции	0,8	[0,13; 0,15]
	2.8 Производительность труда	0,7	[0,9; 0,11]

На основании данных из табл. 4 сформируем согласно (1) и (2) векторы X_i и $[A_i]$:

$$X_1 = [1 \ 0,9 \ 0,8 \ 0,8 \ 0,7 \ 0,8],$$

$$X_2 = [0,8 \ 0,8 \ 0,8 \ 0,8 \ 0,9 \ 0,8 \ 0,8 \ 0,7],$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} [0,17;0,19] \\ [0,17;0,19] \\ [0,15;0,17] \\ [0,15;0,17] \\ [0,15;0,17] \\ [0,15;0,17] \end{bmatrix}, \quad [A_2] = \begin{bmatrix} [0,09;0,11] \\ [0,11;0,13] \\ [0,11;0,13] \\ [0,12;0,14] \\ [0,14;0,16] \\ [0,13;0,15] \\ [0,13;0,15] \\ [0,09;0,11] \end{bmatrix}.$$

Сформируем из них матрицы X и $[A]$ согласно (1) и (3):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,8 & 0,8 & 0,7 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,9 & 0,8 & 0,8 & 0,7 \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0,17;0,19][0,09;0,11] \\ [0,17;0,19][0,11;0,13] \\ [0,15;0,17][0,11;0,13] \\ [0,15;0,17][0,12;0,14] \\ [0,15;0,17][0,14;0,16] \\ [0,15;0,17][0,13;0,15] \\ 0 & [0,13;0,15] \\ 0 & [0,09;0,11] \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц $X[A]$ согласно (4):

$$X[A] = \begin{bmatrix} [0,788;0,888] & [0,575;0,675] \\ [0,767;0,865] & [0,741;0,869] \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц $X[A][B]$ согласно (6):

$$X[A][B] = \begin{bmatrix} [0,26792;0,31968] & [0,368;0,4455] \\ [0,26078;0,3114] & [0,47424;0,57354] \end{bmatrix}.$$

Интервальная оценка комплексной относительной эффективности бизнес-процессов в организации согласно (7):

$$[E] = tr(X[A][B]) = [0,74216; 0,89322].$$

Нормированная диаграмма эффективности будет выглядеть следующим образом (рис. 2).

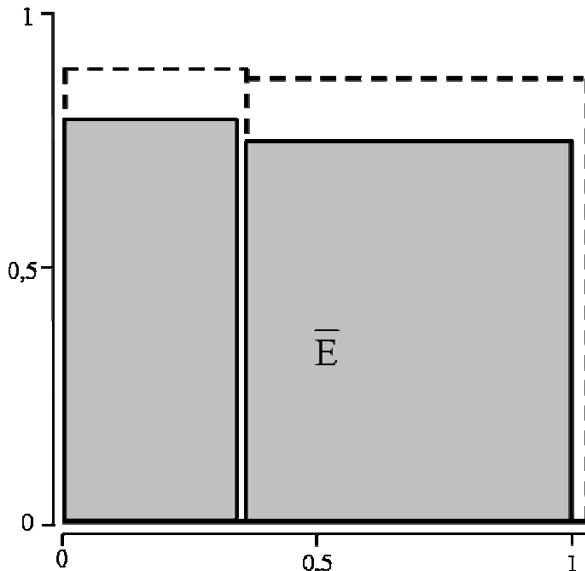


Рис. 2. Нормированная диаграмма эффективности двух бизнес-процессов в организации (пример)

Запишем интервальную целевую функцию согласно (9):

$$[Z] = 0,01 \cdot [0,34; 0,36] \cdot [0,788; 0,888] \cdot y_1 + 0,01 \cdot [0,64; 0,66] \cdot [0,741; 0,869] \cdot y_2 \rightarrow \max,$$

и ограничения согласно (11):

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_2 \leq 20, \\ 8y_1 + 5y_2 \leq 40, \\ 5y_1 + 6y_2 \leq 30, \\ y_1 \geq 0, \\ y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для решения нижней (11) и верхней (12) задачи воспользуемся симплекс-методом, реализованном в пакете simplex системы компьютерной алгебры Maple (рис. 3).

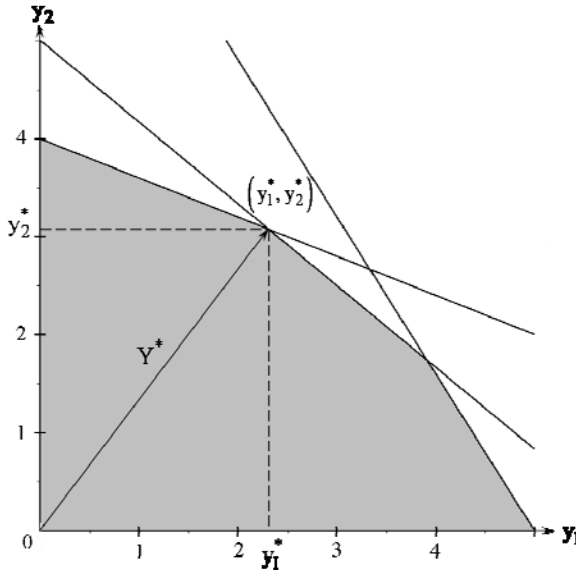


Рис. 3. Графічне зображення обмежувальних умов з використанням графічних засобів MAPLE

Полученное оптимальное решение $Y^* = (y_1^*, y_2^*) = \left(\frac{30}{13}, \frac{40}{13}\right)$,

$[Z] = [0,021; 0,025]$ отображает пропорции на выделение ресурсов на соответствующие стратегии при любом сочетании исходных данных в границах заданных интервалов.

Таким образом, в рассмотренной задаче оптимального распределения инвестиционных ресурсов между отдельными бизнес-процессами организации учтена интервальная неопределенность экспертных оценок, характерная для отраслевого экспертного опроса.

Выводы. Рассмотрена задача оптимального распределения инвестиционных ресурсов между отдельными бизнес-процессами организации. Учтена интервальная неопределенность экспертных оценок, характерная для отраслевого экспертного опроса. Предложен интервальный вариант матричной модели оценки уровня относительной эффективности иерархической системы бизнес-процессов в организации, который позволил свести задачу оптимального распределения ресурсов к задаче линейного программирования с интервально заданной целевой функцией. Предложена интервальная модификация аппарата нормированных диаграмм в качестве графоаналитического средства анализа.

Список использованной литературы:

1. Василенко В. А. Теорія і практика розробки управлінських рішень : навчальний посібник / В. А. Василенко. — К. : ЦУЛ, 2003. — 420 с.
2. Экономико-математическое обеспечение управленческих решений в менеджменте / В. М. Варганын, Д. В. Дмитришин, А. И. Лысенко, А. Г. Осиевский и др. ; под ред. В. М. Варганына. — Харьков : ХГЭУ, 2001. — 288 с.
3. Бажин И. И. Информационные системы менеджмента / И. И. Бажин. — М. : ГУ-ВШЭ, 2000. — 688 с.
4. Практика и проблематика моделирования бизнес процессов / Е. И. Всяких, А. Г. Зуева, Б. В. Носков, С. П. Киселев, Е. В. Сидоренко ; под общ. ред. И. А. Треско. — М. : ДМК Пресс ; Компания АйТи, 2008. — 246 с.
5. Модели, методы и инструментальные средства поддержки принятия решений в наукоёмком высокотехнологическом производстве : монография / В. М. Варганын, Б. Б. Стелюк, М. А. Голованова, И. В. Дронова. — Х. : ИД «ИНЖЕК», 2009. — 224 с.
6. Романенков Ю. А. Матричный метод оценки уровня относительной эффективности иерархической системы бизнес-процессов в организации / Ю. А. Романенков, Т. Г. Зейниев // Автоматизация технологических и бизнес-процессов. — Одесса : ОНАПТ, 2014. — № 4 (20). — С. 121–129.
7. Романенков Ю. А. Оптимизационный механизм выбора стратегий повышения конкурентоспособности организации / Ю. А. Романенков, В. М. Варганын, Т. Г. Зейниев // Радиоэлектронные и компьютерные системы. — 2014. — № 4 (68). — С. 150–156.
8. Раскин Л. Г. Прикладное континуальное линейное программирование : монография / Л. Г. Раскин, И. О. Кириченко, О. В. Серая. — 2 изд., перераб. и доп. — Харьков, 2014. — 292 с.
9. Левин В. И. Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности [Электронный ресурс] / В. И. Левин // Системы управления, связи и безопасности. — 2015. — № 4. — С. 123–141. — Режим доступа: <http://seccs.intelgr.com/archive/2015-04/07-Levin.pdf>.
10. Ащепков Л. Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов. — М. : Наука, 2006. — 285 с.
11. Романенков Ю. А. Детерминированный анализ оптимизационных моделей с интервально-заданными параметрами / Ю. А. Романенков, Л. Г. Шах // Авиационно-космическая техника и технология. — 2003. — Вып. 8(43). — С. 123–127.

The problem of the optimal allocation of investment resources between the single business processes of the company. Interval uncertainty of expert estimations that is typical for the industry expert survey is noted. An interval variant of the matrix model for assessing the relative efficiency level of hierarchic system of business processes of the company, which allowed to reduce the problem of optimal resource allocation to the linear programming problem with interval given target function. An interval modification of normalized diagrams as a graphic-analytical analysis tools is proposed.

Key words: *interval optimization model, resource allocation, efficiency of business processes, linear programming problem.*

Отримано: 15.04.2016

УДК 519.6

О. О. Ситник, канд. техн. наук

Черкаський державний технологічний університет, м Черкаси

ДЕЯКІ АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ І-ГО РОДУ У ЗАДАЧІ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

Досліджено можливість розв'язання задачі відновлення сигналів із застосуванням інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду. Показано, що використання багатокрокових алгоритмів при розв'язанні рівнянь Вольтерри першого роду дає змогу отримувати більш точний результат порівняно з методами, що базуються на застосуванні простих квадратурних формул.

Ключові слова: відновлення сигналів, інтегральні рівняння Вольтерри І-го роду, багатокрокові алгоритми.

Вступ. Задача відновлення вхідних впливів полягає в тому, що за заданою моделлю динамічного об'єкту

$$Ay = f \quad (1)$$

і експериментально отриманому вихідному сигналі у визначається вхідний сигнал f . Оператор A відображає динамічні властивості об'єкта і може бути представлений у вигляді диференціального оператора, що є, наприклад, сумою операцій диференціювання, тобто модель (1) є диференціальним рівнянням. Якщо ж оператор A є інтегральним оператором довільної складності (зокрема, сумою операцій інтегрування різної кратності), то (1) є інтегральним рівнянням. Можливе змішане подання оператора A у вигляді комбінації диференціальних та інтегральних операторів, тобто в цьому випадку (1) є інтегродиференціальним рівнянням.

Постановка задачі. Розв'язання задачі відновлення полягає в отриманні і чисельної реалізації оператора, зворотного оператору A , тобто в застосуванні співвідношення

$$\tilde{y} = A^{-1}(\tilde{f}), \quad (2)$$

де \tilde{y} і \tilde{f} – відповідно, обтяжені завадами (похибками) вхідний і виміряний вихідний сигнали.

Реалізацію оператора A^{-1} в реальних технічних системах виконують комп'ютерними засобами, тобто програмно або апаратно (спеціалізованими обчислювачами). Структура системи об'єкт — блок обробки вихідного сигналу з помилкою в f наведена на рис. 1. Ця система з певним наближенням вирішує задачу відновлення вхідного сигналу, динамічно спотвореного перетворювальними властивостями об'єкта

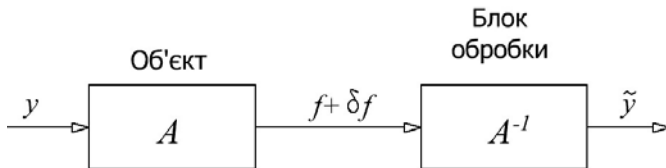


Рис. 1. Загальна схема реалізації завдання відновлення вхідного впливу

Розглянуту схему обробки вихідного сигналу широко застосовують у системах реєстрації сигналів (вимірювальних системах) і в більш складних системах обробки інформації, таких як системи контролю, діагностики, управління, тобто в системах, що працюють у реальному часі. Труднощі, що виникають при цьому, визначаються некоректністю математичної задачі зворотного оператора A , тобто принципово нестійкою задачею розв'язання рівняння (1). Для успішного розв'язання задачі відновлення необхідно застосовувати методи регуляризації [1, 2] і розробляти стійкі і точні алгоритми їх чисельної реалізації. Вибір методу регуляризації і якість розроблених чисельних алгоритмів істотно залежать від властивостей кожної конкретної розв'язуваної задачі, зокрема від застосованого виду математичної моделі динамічного об'єкта. Прийнятий у даній роботі підхід ґрунтується на застосуванні інтегральних динамічних моделей, тобто в цьому випадку залежність (1) є інтегральним рівнянням.

Основним видом інтегральної моделі задачі відновлення вхідного сигналу динамічного об'єкта є рівняння Вольтерри I роду, що збігається за структурою з оператором Вольтерри. Відмінність полягає в тому, що оператор Вольтерри є моделлю явного виду, описує «пряму» задачу аналізу і призначений для визначення реакції $y(t)$ об'єкта на вхідний вплив $x(t)$. Та сама модель забезпечує визначення вхідного сигналу $x(t)$ за відомою реакцією $y(t)$, однак при цьому необхідно розв'язувати інтегральне рівняння щодо функції $x(t)$, що входить під знак інтеграла.

Непараметричні моделі динамічних об'єктів у формі інтегральних операторів і рівнянь є самостійним видом математичного опису задач динаміки. На відміну від параметричних моделей, для формування яких як вихідні дані використовують задані параметри об'єкта, непараметричні динамічні моделі формуються на основі заданих динамічних характеристик об'єкта або його елементів. Динамічні характеристики являють собою функціональні залежності, які можуть бути отримані у вигляді експериментальних даних або в аналітичному вигляді. Застосування непараметричних динамічних моделей дає змогу розширити коло ефективно розв'язуваних дослідних і проектних задач.

Основним підходом до реалізації інтегральних моделей є можливість використання квадратурних алгоритмів відновлення вхідних

впливів на основі розв'язання рівнянь Вольтерри I роду. Такий підхід є ефективним, його застосовують на практиці. Однак при цьому виникають певні труднощі, викликані низкою особливостей у застосуванні квадратурних алгоритмів розв'язання і пов'язані з некоректністю зазначеної задачі, що має особливості [3].

У цій роботі пропонується до розгляду використання багатокрокових алгоритмів розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри I роду, які дають змогу отримувати високу точність результатів під час розв'язання задачі відновлення.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо лінійне інтегральне рівняння I роду типу Вольтерра

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad x \in \beta = [0, T] \quad (3)$$

з ядрами

$$K(x,x) \neq 0 \quad \forall x \in \beta \quad \text{і} \quad f(0) = 0 \quad (4)$$

і

$$K(x,x) \equiv 0, \quad K'_x(x,x) \neq 0 \quad \forall x \in \beta, \quad f(0) = f'(0) = 0. \quad (5)$$

Як відомо з теорії інтегральних рівнянь, якщо права частина $f(x)$ і ядро задовольняють певним умовам гладкості, то розв'язок $\varphi(x)$ задачі (3) існує, є єдиним і, отже, задача (3) коректна за спеціально обраною парою просторів. Однак задача розв'язання рівняння (3) за наближено заданими функціями $\tilde{f}(x)$, $\tilde{K}(x,t)$ є некоректною.

Відомі різні регуляризаційні алгоритми (р.а.) для стійкого розв'язання рівняння (3) [1, 4]. У [5] показано, що при використанні однокрокових методів, що ґрунтуються на найпростіших формулах прямокутників, породжуються регуляризаційні алгоритми, в яких параметром регуляризації є крок дискретизації. Однак однокрокові методи мають низький порядок збіжності. Задача побудови стійких методів високого порядку точності є нетривіальною.

У роботах [6, 7] для чисельного розв'язання задачі (3), (4) запропонована загальна схема побудови лінійних багатокрокових методів, заснована на використанні формул типу Адамса. Взявши за основу ці роботи, розглянемо задачу стійкої побудови каркасів наближених розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерра I роду.

1. *Алгоритми для випадку* $K(x,x) \neq 0$. Введемо на $[0, T]$ рівномірну сітку $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n+1$, де $h = T/(n+1)$ і позначимо через φ_i^h наближення до точного розв'язання $\varphi(x_i)$ в точці x_i . Важливий клас чи-

сельних методів наближеного розв'язання рівняння Вольтерри отримуюмо через дискретизацію в (3) за допомогою сімейства квадратурних формул, тобто через заміну (3) на систему рівнянь з трикутною матрицею

$$h \sum_{v=0}^{i+1} \omega_{i+1,v} K(x_{i+1}, x_v) \varphi_v^h = f(x_{i+1}), \quad i = q, \dots, n, \quad (6)$$

де $\varphi_s^h, s = 0, 1, \dots, q$ — задані початкові значення, а $\omega_{i+1,v}$ — ваги квадратурної формули.

При конструюванні багатокрокових методів високої точності не всі інтерполяційні квадратурні формули придатні, наприклад, типу Сімпсона і Грегорі. Багатокрокові збіжні методи мають вигляд (6), вони побудовані в роботі [9], де використано модифікації інтерполяційних формул і циклічно різні квадратурні формули відповідно.

На відміну від методу (6), багатокрокові збіжні методи, засновані на використанні «екстраполяційних» формул типу Адамса, побудовані в [6, 7]. Загальна форма запису багатокрокових методів, що використовують ці формули, має вигляд:

$$h \sum_{v=0}^i \omega_{i+1,v} K(x_{i+1}, x_v) \varphi_v^h = f(x_{i+1}), \quad i = q, \dots, n, \quad (7)$$

де $\varphi_0^h, \dots, \varphi_{q-1}^h$ — задані початкові значення, а $\omega_{i+1,v}$ — ваги квадратурної формули.

Для вибору ваги $\omega_{i+1,v}$ будемо розглядати такі квадратурні формули:

$$\int_0^{x_{i+1}} y(t) dt = \int_0^{x_q} y(t) dt + \sum_{j=q}^i \int_0^{x_{j+1}} y(t) dt = h \sum_{v=0}^q a_v y(x_v) + \widehat{r}_q(y) + \sum_{j=q}^i \left(h \sum_{v=0}^q b_v y(x_{j-v}) + r_{j+1}(y) \right) = h \sum_{v=0}^i \omega_{i+1,v} y(x_v) + R_{i+1}(y). \quad (8)$$

Тут a_v — ваги квадратурної формули Ньютона-Котеса з $q+1$ вузлом, а ваги b_v можуть бути знайдені єдиним способом із системи рівнянь

$$\sum_{v=0}^q b_v (-v)^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, q, \quad 0^0 = 1. \quad (9)$$

При такому виборі ваги $r_{j+1}(y) = h^{q+2} y^{(q+1)}(x_j) C_{q+1} + O(h^{q+3})$, де

$$C_q = \frac{1}{q!} \int_0^1 a(a+1) \dots (a+q-1) da, \quad \text{а } \widehat{r}_q(y) = O(h^{q+2}) \text{ і, отже, метод має}$$

похибку апроксимації $R_{i+1}(y) = O(h^{q+1})$.

Перейдемо до збіжності методу (7) з довільним параметром q . Як і при розв'язанні диференціальних рівнянь, властивості стійкості методів розв'язання інтегральних рівнянь можна пов'язати з характеристичним поліномом

$$\rho(\theta) = \sum_{v=0}^q b_v \theta^{q-v}.$$

Будемо вважати, що метод (7) задовольняє сильну кореневу умову, якщо всі корені полінома знаходяться точно всередині одиничного кола.

Умову збіжності формулюємо таким чином. Нехай

$$K(x, t) \in C_{\Omega}^{(q+2)} \left(\Omega = \{(x, t), 0 \leq t \leq x \leq T\} \right),$$

$$K(x, x) \neq 0 \quad \forall x \in \beta, \quad \varphi(x) \in C_{\beta}^{(q+1)}, \quad f(0) = 0$$

і початкові значення задані з точністю $O(h^{q+1})$. Тоді, якщо метод (7), заснований на формулі (8), задовольняє сильну кореневу умову, то він збігається з порядком $q+1$, тобто

$$\max_{0 \leq i \leq n} \left| \varphi_i^h - \varphi(x_i) \right| = O(h^{q+1}).$$

Використовуючи критерій Рауса-Гурвіца [11], неважко показати, що метод (7) задовольняє сильну кореневу умову для $q = 0, 1, \dots, 5$. Метод не задовольняє, починаючи з $q \geq 6$.

Методи виду (7), що використовують квадратурні формули (8), вимагають спеціальних процедур для початку обчислень. Для обчислення початкових значень φ_s^h з точністю $O(h^u)$ можна скористатися неявним методом типу Рунге-Кутта, запропонованим у [8].

2. Побудова багатокрокових методів для випадку $K(x, x) \equiv 0$.

Розглянемо випадок $K(x, x) \equiv 0$, $K'_x(x, t)|_{t=x} \neq 0 \quad \forall x \in \beta$. У [7] показано, що для розв'язання таких класів задач може бути застосований метод, що ґрунтується на квадратурних формулах, непридатних у стандартному випадку, таких, як формула Сімпсона і Грегорі I і II порядку. Збіжні методи ґрунтуються на комбінації формули Сімпсона з правилом 3/8, побудовані також у [9]. Покажемо, що можна узагальнити методи (7) для розв'язання задач (3), (5) і далі побудуємо збіжні методи високого порядку точності, які ґрунтуються на інтерполяційних формулах типу Адамса.

Щоб визначити, які квадратурні формули породжують збіжні методи, розглянемо модельну задачу

$$\int_0^x (x-t)\varphi(t) dt \equiv 0, \quad \varphi(x) \equiv 0. \quad (10)$$

Застосовуючи метод (7), заснований на формулі (8) до (10), отримаємо $\varphi_s^h, 0 \leq s \leq q-1$,

$$h \sum_{v=0}^q a_v (x_{i+1} + x_v) \varphi_v^h - h \sum_{j=q}^i \sum_{v=0}^q b_v (x_{i+1} - x_{j-v}) \varphi_{j-v} = 0. \quad (11)$$

З (11) нескладно отримати різницеве рівняння q -го порядку з постійними коефіцієнтами

$$b_0 \varphi_i^h + \sum_{v=1}^q \{(v+1)b_v - (v-1)b_{v-1}\} \varphi_{i-v}^h - qb_q \varphi_{i-1-q}^h = 0.$$

Таким чином, збіжність методу (7) буде залежати від нулів полінома

$$\rho(\theta) = b_0 \theta^{q+1} \sum_{v=1}^q \{(v+1)b_v - (v-1)b_{v-1}\} \theta^{q+1-v} - qb_q. \quad (12)$$

Нехай $K(x, t) \in C_{\Omega}^{(q+3)}$, $K(x, x) \equiv 0$, $K'_x(x, x) \neq 0 \forall x \in \beta$, $\varphi(x) \in C_{\beta}^{(q+1)}$, $f(0) = f'(0) = 0$ і початкові умови $\varphi_s^h, 0 \leq s \leq q-1$ задані з точністю $O(h^q)$. Тоді, якщо метод (7), заснований на формулі (8), задовольняє сильну кореневу умову, то він збігається з порядком q , тобто

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i^h - \varphi(x_i)| = O(h^q).$$

Визначимо максимальний порядок точності методу (7). Вважаючи в (12) $q = 1$ ($b_0 = 3/2, b_1 = -1/2$), одержимо характеристичне рівняння

$$3\theta^2 - 2\theta + 1 = 0,$$

корені якого знаходяться точно всередині одиничного кола. При $q = 2$ ($b_0 = 23/12, b_1 = -16/12, b_2 = 5/12$), матимемо

$$23\theta^3 - 32\theta^2 + 31\theta - 10 = 0, |\theta_i| < 1, i = 1, 2, 3.$$

Проте, вже при $q = 3$ ($b_0 = 55/24, b_1 = -59/24, b_2 = 37/24, b_3 = -9/24$) корені рівняння

$$55\theta^4 - 118\theta^3 + 170\theta^2 - 110\theta + 27 = 0$$

не знаходяться всередині одиничного кола.

Таким чином, багатокроковий метод (7), заснований на формулі (8), відповідає сильній кореневій умові для $q = 1, 2$ і, отже, максимально можливий порядок точності методу (7) дорівнює двом.

3. Для побудови *методів високої точності* розглянемо інтерполяційну формулу типу Адамса

$$\int_0^{x_{i+1}} y(t) dt = \int_0^{x_q} y(t) dt + \sum_{j=q}^i \int_{x_j}^{x_{j+1}} y(t) dt = \left\{ h \sum_{v=0}^q a_v y(x_v) + \widehat{r}_q(y) \right\} + \quad (13)$$

$$+ \sum_{j=q}^i \left\{ h \sum_{v=-1}^q b_v y(x_{j-v}) + r_{j+1}(y) \right\} = h \sum_{v=0}^{i+1} \omega_{i+1,v} y(x_v) + R_{i+1}(y).$$

Тут a_v — ваги квадратурної формули Ньютона-Котеса з $q+1$ вузлом, а ваги b_v визначаються однозначно із системи рівнянь [9]

$$\sum_{v=-1}^q b_v (-v)^j = \frac{1}{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, q+1. \quad (14)$$

При такому виборі ваг, маємо

$$r_{j+1}(y) = h^{q+3} y^{(q+2)}(x_j) C_{q+2} + O(h^{q+1}),$$

де

$$C_{q+1} = \frac{1}{(q+1)!} \int_{-1}^0 a(a+1)\dots(a+q) da, \quad \widehat{r}_q(y) = O(h^{q+2}).$$

Отже, $R_{i+1}(y) = O(h^{q+2})$

Формула (13), де ваги b_v визначаються формулою (14), відповідає квадратурній формулі Грегорі [10]. Очевидно, що використання формули Грегорі (13) щодо функції $y(t) = K(x, t)\varphi(t)$ через умову $K(x, x) \equiv 0$ призводить до трикутної системи рівнянь виду (7) для наближеного знаходження φ_i^h .

Знову застосовуючи метод (7), заснований на формулі (13), щодо задачі (10) можна з'ясувати, що збіжність методу буде залежати від нулів полінома

$$\rho(\theta) = \sum_{v=0}^q \left\{ (v+1)b_v - (v-1)b_{v-1} \right\} \theta^{q+1-v} - qb_q. \quad (15)$$

Нехай $\varphi(x) \in C_\beta^{q+2}$, $K(x, t) \in C_\Omega^{(q+4)}$, $K(x, x) \equiv 0$, $K'_x(x, x) = k \neq 0 \forall x \in \beta$, $f(0) = f'(0) = 0$ і початкові значення φ_s^h , $s = 0, 1, \dots, q-1$ задані з точністю $O(h^q)$. Можна показати що, якщо всі корені полінома (15) знаходяться точно всередині одиничного кола, то метод (17), заснований на формулі (13), збігається з порядком q , тобто

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i^h - \varphi(x_i)| = O(h^q).$$

Таким чином, метод (7), заснований на формулі Грегорі q -го порядку, збігається зі швидкістю $O(h^q)$, якщо початкові значення задані з точністю $O(h^q)$.

У табл. 1 виписані характеристичні рівняння для $q = 1, \dots, 5$.

Таблиця 1

Результати аналізу збіжності методу

Порядок точності	Вид характеристичного рівняння
$q = 1$	$13\theta^2 - 2\theta + 1 = 0$
$q = 2$	$14\theta^3 - 5\theta^2 + 4\theta - 1 = 0$
$q = 3$	$299\theta^4 - 176\theta^3 - 194\theta^2 - 96\theta + 19 = 0$
$q = 4$	$317\theta^5 - 266\theta^4 + 374\theta^3 - 276\theta^2 - 109\theta - 18 = 0$
$q = 5$	$84199\theta^6 - 92922\theta^5 + 157973\theta^4 - 155852\theta^3 + 92193\theta^2 - 30426\theta - 1315 = 0$

Стійкість багатокрокового методу щодо збурень вихідних даних. У більшості додатків інтегральних рівнянь Вольтерри замість f і K задані наближення \tilde{f} і \tilde{K} такі, що $\|\tilde{f} - f\|_c \leq \delta$, $\|\tilde{K} - K\|_c \leq \tau$. Потрібно за даними \tilde{f} і \tilde{K} відновити стійкий каркас наближених розв'язків задач (3), (4) або (3), (5). Проведемо аналіз стійкості багатокрокового методу щодо збурень вихідних даних.

Розглянемо випадок, коли ядро задано точно, а замість точної правої частини f задана безперервна функція \tilde{f} така, що $\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_c \leq \|\delta(x)\|_c \leq \delta$.

Спочатку перейдемо до дослідження стійкості наближеного розв'язку задачі (3), (4), отриманого методом (7), що ґрунтується на формулі (8).

Нехай каркас наближеного розв'язку знаходиться з трикутної системи рівнянь

$$h \sum_{v=0}^i \omega_{i+1,v} K(x_{i+1}, x_v) \varphi_v^\delta = \tilde{f}(x_{i+1}), \quad i = q, \dots, n, \quad (16)$$

де $\varphi_0^h, \dots, \varphi_{q-1}^h$ — задані початкові значення, $\omega_{i+1,v}$ — ваги квадратурної формули.

Знайдемо оцінку похибки методу (16). Вважаючи $\varepsilon_i^\delta = \varphi_i^\delta - \varphi(x_i)$ і записуючи рівняння помилки у вигляді

$$h \sum_{v=0}^i a_v K_{i+1,v} \varepsilon_i^\delta + h \sum_{j+q}^i \sum_{v=0}^q b_v K_{i+1,j-v} \varepsilon_{j-v}^\delta = R_{i+1} + \delta_{i+1},$$

можна показати, що

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i^\delta| \leq c_1 h^{q+1} + c_2 \frac{\delta}{h}, \quad (17)$$

де c_i — постійні незалежні від h .

З оцінки (17) видно, що перший доданок характеризує точність методу, зменшується зі зменшенням h , а другий доданок, пов'язаний з похибкою вихідних даних, навпаки, зростає.

З (17), вибираючи $h(\delta) \approx \delta^{\frac{1}{q+2}}$, знаходимо

$$\max_i |\varphi_i^\delta - \varphi(x_i)| = O(\delta^{\frac{q+1}{q+2}}). \quad (18)$$

Нехай виконані умови збіжності та $\|\tilde{f}(x) - f(x)\|_c \leq \delta$. Тоді багатокроковий метод, заснований на формулі (18) для $q = 1, 2, \dots, 5$,

породжує р.а., причому справедлива оцінка (18), якщо $h(\delta) \approx \delta^{\frac{1}{q+2}}$.

У роботах [5, 6] показано, що метод, заснований на формулі середніх прямокутників, дає порядок збіжності за δ , що дорівнює $2/3$. У той самий час, метод, заснований на формулі (18), може давати найвищий порядок збіжності, що дорівнює $6/7$.

Для того, щоб побудувати стійкий розв'язок задачі (3), (5), використовуємо метод, заснований на формулі (13). При цьому оцінка похибки методу має вигляд

$$\max_i |\varphi_i^\delta - \varphi(x_i)| = c_1 h^q + c_2 \frac{\delta}{h^2}, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \quad (19)$$

Таким чином, для досить малого δ , вибираючи $h(\delta) \approx \delta^{\frac{1}{q+2}}$, матимемо оцінку похибки р.а.

$$\max_{0 \leq i \leq n} |\varphi_i^\delta - \varphi(x_i)| = O(\delta^{\frac{q}{q+2}}), \quad q = 1, \dots, 4.$$

Числові результати.

Приклад 1. Як приклад розглянемо задачу [6],

$$\int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = 1 - \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

яка має розв'язок $\varphi(x) = x$. У табл. 2 наведено максимальні похибки розв'язків для h , що дорівнює 0.1, 0.05, 0.025, 0.02.

Таблиця 2

Залежність максимальної похибки розв'язку від кроку дискретизації

q	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.02$
1	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$
2	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$
3	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$3,3 \cdot 10^{-7}$
4	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$6,1 \cdot 10^{-7}$	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-9}$
5	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$4,5 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	$3,9 \cdot 10^{-10}$

Результати табл. 2 показують $q + 1$ -й порядок збіжності методу, але для $q = 4, 5$ помітний ефект машинного округлення.

Приклад 2. Розглянемо задачу [7]

$$\int_0^x (1 - e^{-t-x}) \varphi(t) dt = x - 0,5(\sin x - \cos x - e^x), \quad 0 \leq x \leq 2,$$

яка має розв'язок $\varphi(x) = 1 + \sin x$. У табл. 3 наведено максимальні похибки розв'язку.

Таблиця 3

Порівняння максимальних похибок розв'язку різними методами задачі відновлення

Метод	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,025$	$h = 0,02$
А	$4,9 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-3}$
Б	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$
В	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
Г	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
Д	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$
Е	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$

З табл. 3 видно, що методи типу А — метод з $q = 1$, Б — Грегори I порядку, мають перший порядок збіжності, В — метод з $q = 2$, Г — Грегори II порядку, — другий порядок, Д — Грегори III порядку — третій порядок, Е — Грегори IV порядку — четвертий порядок збіжності.

Висновок. Аналіз багатокрокових квадратурних алгоритмів дав змогу встановити, що, виходячи з їх умов стійкості, можуть бути отримані можливості ефективного застосування квадратурних формул високого порядку точності, що підтверджують обчислювальні експерименти під час розв'язання модельних задач.

Список використаних джерел:

1. Лаврентьев М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. И. Шишатский. — М. : Наука, 1980. — 285 с.
2. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1986. — 288 с.
3. Верлань А. Ф. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределенными параметрами / А. Ф. Верлань, М. В. Сагагов, А. А. Сытник // 36. наук. праць ПІМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України. — 2000. — № 6. — С. 131–136.
4. Денисов А. М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода / А. М. Денисов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15. — № 4. — С. 1053–1056.
5. Апарцин А. С. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм / А. С. Апарцин, А. В. Бакушинский // Дифференциальные и интегральные уравнения. — Иркутск, 1972. — Вып. 1. — С. 248–258.
6. Тен Мен Ян. Линейные многошаговые методы для численного решения Вольтерра I рода / Тен Мен Ян // Методы оптимизации и исследование операций. — Иркутск : СЭМ СО АН СССР, 1984. — С. 254–257.
7. Тен Мен Ян. Метод типа Адамса-Башфорта для устойчивого решения интегральных уравнений Вольтерра I рода / Тен Мен Ян // Труды Всесоюзной школы-семинара по некорректно поставленным задачам. — Саратов, 1985. — С. 138–139.
8. Василенко Г. И. Теория восстановления сигналов. О редукции к идеальному прибору в физике и технике / Г. И. Василенко. — М. : Сов. радио, 1979. — 272 с.
9. Andrade C. Convergence of linear multistep method for Volterra first kind equations with $K(x, x) \equiv 0$ / C. Andrade, F. M. Bertoldi, S. Mckee // Computing. — 1981. — Vol. 27. — № 3. — P. 189–201.
10. Хеминг Р. В. Численные методы / Р. В. Хеминг. — М. : Наука, 1972. — 400 с.
11. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1970. — 720 с.

The possibility of solving the problem of restoration of signals using the Volterra integral equations of the first kind. It is shown that the use of multi-algorithms in solving Volterra equations of the first kind allows to obtain more accurate results compared to purpose-ladies based on the use of simple quadrature formulas.

Key words: *recovery signals Volterra integral equations I-go kind bahatokrokovy algorithms.*

Отримано: 22.04.2016

УДК 519.237(045)

М. А. СтадникТернопільський національний технічний університет
імені Івана Пулюя, м. Тернопіль**ОЦІНЮВАННЯ ІНФОРМАТИВНИХ ПАРАМЕТРІВ
УСТАЛЕНИХ ЗОРОВИХ ВИКЛИКАНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ
З ВИКОРИСТАННЯМ ЇХ РОЗКЛАДІВ ЗА БАЗИСАМИ
ДИСКРЕТНИХ ОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ**

Використовуючи метод ортогонального перетворення за базисами дискретних ортогональних поліномів Чебишева, Лагера, Кравчука, отримано оцінки спектрів математичного сподівання усталених зорових викликаних потенціалів. При аналізі спектру відібрано оптимальний ортонормований дискретний базис для подальшого отримання інформативних параметрів для діагностики зорової системи людини.

Ключові слова: *інформативні параметри, усталений зоровий викликаний потенціал, ортогональний розклад, дискретні ортогональні поліноми, діагностика, зорова система.*

Вступ. Зорова система людини виконує чи не одну із найбільших ролей при світосприйнятті та опрацюванні інформації. За даними «Центру медичної статистики МОЗ України» приблизно 300 тис. людей лише в нашій державі страждають від різноманітних форм порушення зору. В сучасному світі, який майже не щодень дивує різноманітними новітніми технологіями, уже не достатньо використовувати суб'єктивні методи для діагностики. Оскільки, процент помилок при таких методах є достатньо великим, тому зростає актуальність у побудові інформаційної технології для діагностики, яка би забезпечила достовірну оцінку стану зорової системи людини у комплексі (око і весь зоровий тракт). Перше, що є необхідним, для побудови такої системи, це правильне обрання інформаційного сигналу та відповідної методики його реєстрації, наступним кроком є побудова адекватної математичної моделі сигналу та отримання інформативних параметрів для достовірної діагностики.

Лазерна біометрія, авторефрактокератометрія, пневмотонометрія — це ті методи, які офтальмологи використовують на даний час при діагностиці складних захворювань зору [1]. Проте ці методики не є придатними для дослідження зорової системи в цілому і їх не можливо застосувати для виявлення порушень у дітей раннього віку та новонароджених. Метод зорових викликаних потенціалів використовується у медичній діагностиці для оцінки: діяльності зорового нерву, стадії розвитку амбліопії, сліпоті (отриманої внаслідок порушення роботи кори головного мозку), патології зору при захворюваннях альбінізмом, гостроти зору у дітей [2, с. 419].

Зоровий викликаний потенціал (ЗВП) — це електрична реакція зорових відділів кори головного мозку людини на зовнішнє подразнення (світловий спалах, просторово-структуровані стимули). За частотою стимуляції розрізняють ЗВП фазові (transient, 1–4 Гц) та усталені (steady-state, 5–30 Гц). На даний час, усталені ЗВП (уЗВП) використовуються для оцінки зорової системи, а також дозволяють визначити зорову увагу, робочу пам'ять, ритми мозку, бінокулярну конкуренцію, є одним із сигналів, на базі яких виконується прийняття рішень у нейро-комп'ютерному інтерфейсі.

Основна теорія виникнення ЗВП полягає в тому, що ЗВП є сумою багатьох компонент, що генеруються різними нейронами мозку [3, с. 692], при цьому на графіку вони будуть відобразитися відповідними екстремумами. Внаслідок цього, найпоширенішою методикою в офтальмологічній практиці є вимірювання та аналіз амплітудно-часових характеристик екстремумів отриманих реалізацій ЗВП: оцінювання часових інтервалів між сусідніми екстремумами та перетинів нульової лінії, кутових коефіцієнтів [4]. Цей метод є досить таки суб'єктивним, оскільки немає чіткого розмежування між нормою та патологією. Тому виникає завдання, що і відображає основну мету написання статті, — пошук та оцінювання інформативних параметрів, які би з найменшою похибкою і максимальною завадостійкістю сформулювали множини станів в нормі та при захворюваннях для подальшого прийняття рішення діагностики.

Математична модель. На основі останніх робіт та теорій електрогенезису у статті [5, 6] подано детальне обґрунтування математичної моделі усталеного ЗВП (у ЗВП) у вигляді лінійного періодичного випадкового процесу (ЛПВП) $\xi(t), t \in (-\infty; \infty)$, що зображується наступним чином:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\pi_1(\tau), t \in (-\infty, \infty), \quad (1)$$

де $\pi_1(\tau), \tau \in (-\infty, \infty), \mathbf{P}\{\pi_1(0) = 0\} = 1$ — узагальнений неоднорідний пуассонівський процес; $\varphi(\tau, t) = e^{-\beta(\tau)(t-\tau)} \sin(\omega(\tau)(t-\tau))U(t-\tau)$ — ядро ЛВП, де $U(s)$ — функція Хевісайда; $\beta(\tau) > 0$ та $\omega(\tau) > 0$ — коефіцієнт затухання та частота імпульсу, що виникає у зоровій корі у момент часу τ .

При цьому виконуються наступні умови для зображення (1):

$$\varphi(\tau, t) = 0 \text{ при } t < \tau, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(\tau, t) d\tau < \infty, \forall t, \varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T), \text{ а}$$

також $\pi_1(\tau)$ — пуассонівський процес із незалежними T -періодичними приростами, де $T > 0$ — період процесу (1).

Усталений ЗВП є сумою імпульсів, що генеруються у відповідь на дію породжуючого процесу $\pi_1(\tau)$, $\tau \in (-\infty, \infty)$, стрибки якого виникають у послідовні пуассонівські моменти часу і дорівнюють випадковим величинам, що відображають значення амплітуди імпульсів.

Оцінювання ймовірнісних характеристик. У статті [4] детально пояснено та обґрунтовано те, що лінійний періодичний випадковий процес (1) є T -періодичним за Слущким [7, с. 132, 8], тобто послідовність скінченно вимірних функцій розподілу

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), \quad t_1, t_2, \dots, t_n \in (-\infty, \infty)$$

цього процесу задовольняє умову:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для оцінювання ймовірнісних характеристик періодичного процесу необхідно перш за все отримати оцінку періоду, що є базовим параметром для усіх періодичних процесів. Для цього було застосовано відомий метод φ -серій, що представлений у статті [7, с. 130–134]. Внаслідок цього було отримано асимптотично незсунену та козистентну оцінку періоду T випадкового процесу (1).

Моментні функції ЛПВП (1) є також є періодичними за сукупністю аргументів. Зокрема, для математичного сподівання $\mathbf{M}\xi(t)$ та кореляційної функції $R(t_1, t_2)$ такого процесу виконуються наступні співвідношення [6]: $\mathbf{M}\xi(t) = \mathbf{M}\xi(t + T)$, $R(t_1, t_2) = R(t_1 + T, t_2 + T)$.

Позначимо через $\xi_{kl} = \xi(k\Delta t + lT)$ — k -ту φ -серію вхідної послідовності ξ_t (реалізації електроенцефалографічного сигналу зареєстрованого над зоровими відділами мозку), при $k = \overline{0, L-1}$, $l \in Z$,

$$L = \frac{T}{\Delta t} > 1, \quad \Delta t \text{ — крок дискретизації.}$$

Оскільки, φ -серії є сукупністю впорядкованих за часом відліків процесу $\xi(t)$, взятих через період T і є стаціонарними та стаціонарно зв'язаними випадковими послідовностями, то для оцінювання математичного сподівання $\mathbf{M}\xi(t)$ можна застосувати добре розроблений математичний апарат статистичного аналізу стаціонарних випадкових послідовностей.

Для отримання оцінки дискретизованого математичного сподівання $M\xi(k\Delta t)$ (будемо аналізувати математичне сподівання лише на одному періоді, оскільки, як було вказано вище, воно є періодичним) на інтервалі $[0, T)$ використаємо статистику:

$$\widehat{M}_k = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \xi_{kl}, k = \overline{0, L-1}, \quad (2)$$

де m — кількість циклів процесу, який досліджується. Статистика (2) є незсуненою і конзистентною оцінкою відліків математичного сподівання [7].

На рис. 1 наведено приклад реалізації оцінки математичного сподівання уЗВП отриманого при стимуляції світловими спалахами із частотою 10 Гц ($T = 0.1$ с, $\Delta t = 1/510$ с, $m = 30$, $k = \overline{0, 51}$).

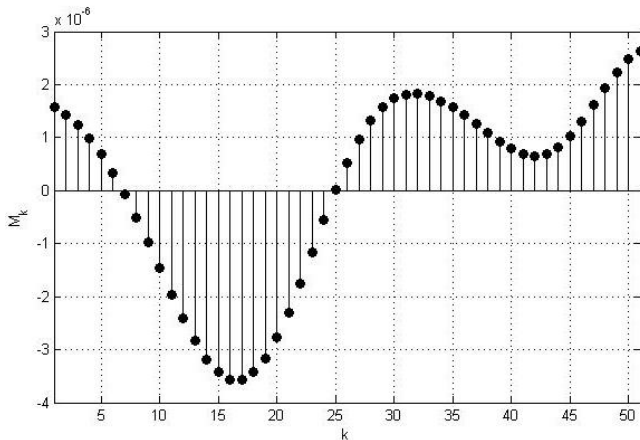


Рис. 1. Реалізація оцінки математичного сподівання уЗВП

Для знаходження інформативних параметрів досліджуваного сигналу, скористаємося відомим методом ортогонального перетворення, в результаті якого отримуємо спектр розкладу.

Метод ортогонального перетворення. Метод ортогональних перетворень для задач ідентифікації інформативних параметрів можна сформулювати наступним чином [9, с. 48–51].

Нехай маємо вектор $Z = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{L-1} \end{pmatrix}$, де $z_k = \mathbf{M} \xi(k \Delta t)$, $k = \overline{0, L-1}$ та

деяку іншу матрицю \mathbf{B} розмірністю $L \times L$ із елементами b_{nk} , $n, k = \overline{0, L-1}$. Рядки чи стовпці матриці \mathbf{B} утворюють ортонормований базис у L -вимірному дійсному евклідовому просторі R^L .

Тоді дискретне ортогональне перетворення вектора \mathbf{M} зобразимо у наступному вигляді:

$$\mathbf{C} = \mathbf{BZ}. \quad (3)$$

Вектор $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{L-1} \end{pmatrix}$ називається спектром вектора \mathbf{M} за орто-

нормованим базисом, заданим рядками матриці \mathbf{B} в просторі R^L .

Обернене до дискретного перетворення (3) зобразимо у наступному вигляді:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{CB}. \quad (4)$$

Для отримання оцінки спектру \mathbf{C} скористаємося статистикою

$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{Z}}$, де $\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \hat{z}_0 \\ \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \vdots \\ \hat{z}_{L-1} \end{pmatrix}$ — вектор, елементи якого отримані за допо-

могою статистики (2).

Для виконання будь-якого ортогонального перетворення необхідно вибрати ортогональний базис серед множини усіх базисів (класичних, поліноміальних), на основі якого і буде здійснено розклад вхідного сигналу.

Ортогональні базисні функції. Ортогональний розклад вектора \mathbf{Z} (4) представимо у розгорнутому вигляді:

$$z_k = \sum_{n=0}^{L-1} c_n b_{nk}, k = \overline{0, L-1}. \quad (5)$$

Слід також зазначити, що кожен n -ий рядок матриці являє собою функцію дискретного аргументу $b_{nk}, k = \overline{0, L-1}$. Сукупність з $L-1$ цих функцій утворює ортогональний базис в R^L .

В якості ортогональних поліноміальних базисних функцій будемо досліджувати дискретні ортогональні базиси Чебишева, Кравчука та Лагера, оскільки вони є найбільш дослідженими і значно простішими при реалізації [10]. Для їх побудови у загальному випадку використовують відповідні ортонормовані поліноми та рекурентні співвідношення.

Ортогональні функції Чебишева на скінченному інтервалі $0, L-1$ співпадають із ортонормованими поліномами Чебишева дискретного аргументу і визначають наступною формулою [10, с. 47–78]:

$$b_{nk} = \frac{t_{nk}}{\|t_{nk}\|} \cdot U(n, 0, L-1), \quad n, k = \overline{0, L-1}, \quad (6)$$

де $t_{nk} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{k+j}{j} \frac{(L-1)^{[k]}}{(L-1)^{[j]}} n^{[j]}$ — поліном Чебишева і його норма $\|t_{nk}\|$.

$$U(n, a, b) = U(n-a)U(b-n) = \begin{cases} 1, & a \leq n \leq b \\ 0, & n < a \text{ або } n > b \end{cases} \quad \text{— функція Хевісайда;}$$

$$n^{[j]} = \prod_{m=1}^j (n-m+1).$$

Коефіцієнти ортогонального розкладу визначаються із наступного виразу:

$$c_k = \frac{2k+1}{L(L^2-1)\dots(L^2-k^2)} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} z_k t_{nk}, \quad k = \overline{0, L-1}. \quad (7)$$

Ортогональний базис функцій Лагера дискретного аргументу має наступний вигляд:

$$b_{nk} = ((-1)^k e^{-\frac{\lambda n}{2}} \cdot \widehat{l}_{nk} U(n)), \quad n, k = \overline{0, L-1}, \quad (8)$$

де $\widehat{l}_{nk} = [e^{\lambda k} (1 - e^{-\lambda})]^{1/2} l_{nk}$ — ортонормований поліном Лагера;

$$l_{nk} = \frac{a^k}{(a+1)^k} \sum_{k=0}^{L-1} \binom{L-1}{k} \frac{(-1)^k n^{[k]}}{a^k k!}, \quad a = (e^\lambda - 1)^{-1} \quad \text{— поліном Лагера;}$$

$U(n)$ — функція Хевісайда; $\lambda > 0$ — параметр.

Ортогональну систему функцій Кравчука на скінченному інтервалі отримуємо за допомогою наступного виразу:

$$b_{nk} = \sqrt{j_n} \cdot \frac{K_{nk}}{\|K_{nk}\|} U(n, 0, L), \quad n, k = \overline{0, L-1}, \quad (9)$$

$$\text{де } j_n = \binom{L}{n} p^n q^{L-n}, \quad p > 0, q > 0, p + q = 1; \quad K_{nk} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \times$$

$$\times p^{k-j} (L-j)^{[k-j]} n^{[j]} \quad \text{— поліном Кравчука; } \|K_{nk}\| = \sqrt{\binom{L}{k} (p \cdot q)^k} \quad \text{—}$$

норма полінома Кравчука.

Вибір дискретного ортогонального базису та його використання для оцінювання інформативних параметрів. Для отримання реалізацій уЗВП використовувався цифровий електроенцефалограф DX-NT-

32 (виробництво м. Харків, Україна), з такими характеристиками: вхідний опір підсилювачів — 20 МОм, коефіцієнт дискримінації синфазної завади — 100 дБ, частотний діапазон — 0,05–70 Гц, частота дискретизації — 512 Гц, квантування по рівню — 10 біт, стимуляція — світлодіодні лампочки (три). Інформаційно-вимірвальна система дозволяє встановлювати частоту стимуляції в діапазоні 1–30 Гц. Для накладання електродів використовувалася міжнародної системи 10–20. Протокол дослідження виконувався згідно стандарту із залученням 20 людей (8 чоловіків, 12 жінок) за їхньої згоди.

Згідно вище написаних теоретичних відомостей було обчислено оцінки математичного сподівання уЗВП (використовуючи статистику (2)), отриманих при наступних частотах стимуляції: 7, 10, 12 Гц. Одна із них представлена на рисунку 1.

Наступним було виконано завдання ортогонального розкладу за дискретними ортонормованими базисними функціями Чебишева, Лагера, Кравчука, використовуючи відповідно наступні зображення (5), (6), (8), (9). Спектри коефіцієнтів розкладу за відповідними базами уЗВП при частоті стимуляції 10 Гц зображено на рисунках 2–4.

При подальшій діагностиці дуже важливо використовувати таку кількість складових розкладу, які би несли достатньо корисної інформації для діагностики.

Для ідентифікації діагностичних параметрів скористаємося рівністю Парсеваля, яка стверджує, що сума квадратів коефіцієнтів ортогонального розкладу дорівнює енергії сигналу E , тобто:

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |z_k|^2 = \sum_{k=0}^{L-1} |c_k|^2. \quad (10)$$

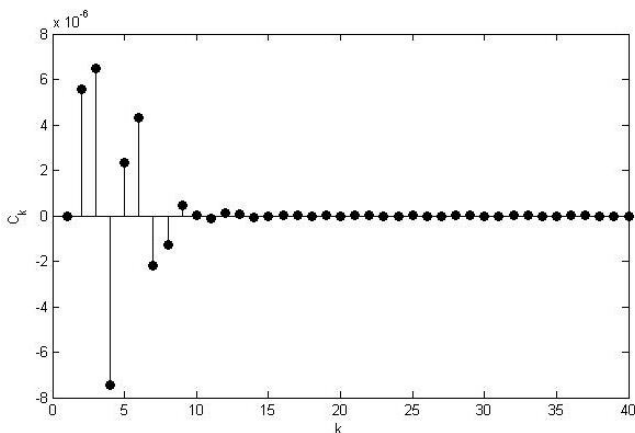


Рис. 2. Реалізація оцінки спектру уЗВП (частота стимуляції 10 Гц) за базисом Чебишева

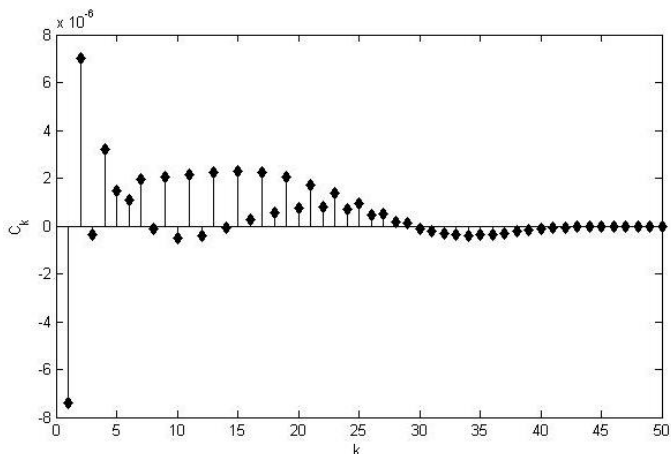


Рис. 3. Реалізація оцінки спектру уЗВП
(частота стимуляції 10 Гц) за базисом Кравчука

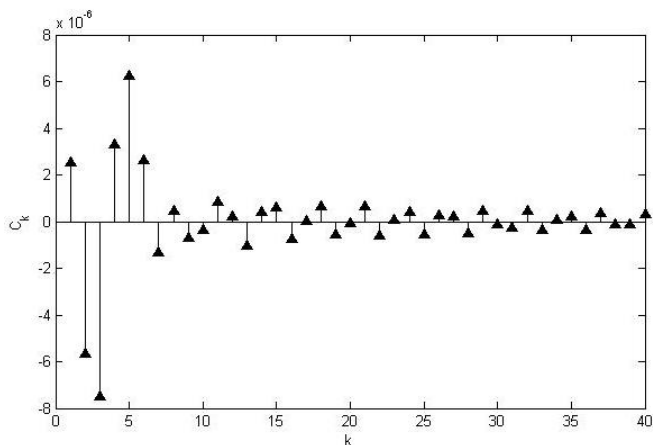


Рис. 4. Реалізація оцінки спектру уЗВП
(частота стимуляції 10 Гц) за базисом Лагера

Використовуючи зображення на рис. 2–4 можна зробити висновок, що лише кілька перших коефіцієнтів розкладу (5) вносять значний енергетичний вклад в повну енергію вектора $\hat{\mathbf{Z}}$. Внаслідок цього, саме вони і є інформативними та використовуватимуться в подальшому для діагностики.

Для знаходження кількості коефіцієнтів розкладу, які будуть використовуватися в якості інформативних введемо статистику, отриману на основі (10):

$$\hat{I}_n = \frac{\sum_{k=1}^n |\hat{c}_k|^2}{\sum_{k=0}^{L-1} |\hat{z}_k|^2 - c_0}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (11)$$

де c_0 — елемент спектру, що характеризує постійну складову сигналу і через те не може бути інформативним.

На основі статистики (11) було здійснено розрахунок кількості спектральних складових n по кожній із досліджуваних систем ортогональних функцій дискретного аргументу, які вносять енергетичний вклад в повну енергію вектора $\hat{\mathbf{Z}}$, тобто $\hat{I}_n \leq 0.99$. На основі отриманих результатів сформовано таблицю 1, що відображає залежність кількості коефіцієнтів розкладу, частоти стимуляції та обраного ортогонального базису.

Таблиця 1

Кількість складових ортогонального розкладу для відображення 99% енергії сигналу у ЗВП

Кількість складових ортогонального розкладу за функціями дискретного аргументу	Частота стимуляції при реєстрації усталених ЗВП, Гц		
	7	10	12
Чебишева	9	7	7
Кравчука	27	20	21
Лагера	17	17	18

Аналізуючи таблицю 1, зауважимо, що лише 7-9 коефіцієнтів розкладу за базисом Чебишева складають 99% енергії, що є значно менше в порівнянні з іншими досліджуваними, тому можна стверджувати про доцільність використання саме цього ортогонального базису.

В подальших дослідженнях необхідно вирішити наступні завдання: дослідити відповідність між обраними ідентифікаційними параметрами та офтальмологічними захворюваннями, що в значній мірі є завданням медичних працівників; розробити критерій прийняття рішення для діагностики зорової системи.

Висновки. На основі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

- здійснено розклад математичного сподівання уЗВП за базисами дискретних ортогональних поліномів Чебишева, Кравчука і Лагера, що дозволяє отримати множину параметрів для виявлення із них інформативних;
- для оцінювання кількості інформативних параметрів використано статистику, яка відображає енергетичний вклад компонентів ортогонального розкладу в повну енергію сигналу;

- на основі аналізу спектру розкладу математичного сподівання у ЗВП за ортонормованим базисом Чебишева оцінено інформативні параметри — 7–8 складових спектру, що будуть в подальшому використані для діагностики.
- збільшення частоти стимуляції при реєстрації уЗВП призводить до зменшення кількості складових ортогонального розкладу за базисами дискретних ортогональних поліномів, що несуть корисну інформацію.

Список використаних джерел:

1. Сидоренко Є. І. Офтальмологія : підручник / Є. І. Сидоренко. — М. : GEOTAR-Мед, 2002. — 408 с.
2. Vialatte F.-B. Steady-state visually evoked potentials: Focus on essential paradigms and future perspectives / F.-B. Vialatte, M. Maurice, J. Dauwels, A. Cichocki // Elsevier. — Progress in neurobiology. — Vol. 90. — P. 418–438.
3. Makeig S. Dynamic brains our ces of visual evoked responses / S. Makeig, M. Westerfield, T. Jung, S.Enghoff, J. Townsend // Science. — Vol. 295. — P. 690–694.
4. Шпак А. А. Исследование зрительных вызванных потенциалов в офтальмологии и офтальмохирургии / А. А. Шпак // МНТК «Микрохирургия глаза». — 1993. — 160 с.
5. Fryz M. Justification of mathematical model of the steady-state visual evoked potential in a form of the linear random process / M. Fryz, M. Stadnyk. — К. : Electronics and control systems, 2013. — № 1 (35). — P. 100–106.
6. Фриз М. Є. Лінійний періодичний випадковий процес як математична модель усталеного зорового викликаного потенціалу / М. Є. Фриз, М. А. Стадник // Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. — К., 2014. — № 72. — С. 36–43.
7. Марченко Б. Г. Побудова моделі та аналіз стохастично-періодичних навантажень енергосистем / Б. Г. Марченко, М. В. Приймак // Праці інституту електродинаміки Національної академії наук України. — 1991, — В.1. — С. 129-153.
8. Serpedin E. Bibliography on cyclostationarity / E.Serpedin, F. Panduru, I. Sari, G. B. Giannakis // Elsevier. — Signal processing. — Vol. 85. — P. 2233–2303.
9. Ідентифікація інформативних ознак світлового біосигналу методом ортогональних перетворень / Б. Г. Марченко, Н. Б. Марченко, Б. Б. Млинко, М. Є. Фриз // Електроніка та системи управління. — 2008. — № 3(17). — С. 47–51.
10. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике / В. Б. Марченко. — К. : Наук. думка, 1992. — 212 с.

The spectrum estimations of steady-state visual evoked potential's mathematical expectation were calculated by method orthogonal transformation that uses Chebyshev, Laguerre, Kravchuk discrete orthogonal polynomials. The discrete orthonormal basis as the best basis for obtaining further information parameters for the diagnostics of the human visual system was selected by using spectrum analysing.

Key words: *informative parameters, steady-state visual evoked potentials, orthogonal decomposition, discrete orthogonal polynomial, diagnostics, visual system.*

Отримано: 11.04.2016

UDK 681.325

Jo Sterten, Assistant Professor

Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

NUMERICAL SIMULATION OF DYNAMIC OBJECT BASED ON CONVOLUTION OPERATIONS

A recursive digital filter construction method is considered for simulation of inertial element as a typical component of complex dynamic object. New computational formulas are obtained. Their high accuracy as compared to traditional ones is shown. Decomposition of initial model of simulated object by convolution operations with several typical exponential kernels is proposed instead of traditional operations of integration and differentiation.

Key words: *mathematical model, transfer function, Volterra integral operator, convolution operator, digital filter.*

Introduction. A wide range of control system units can be described with acceptable accuracy as a linear stationary dynamic object with lumped parameters. There are several mathematical descriptions of such an object. Common higher order linear differential equation is its traditional mathematical model.

Well-known software packages for simulation of continuous objects (SPSCO), such as MATHLAB, SIMULINK, CC, PSPACE, MCAP, SIGNAL, EURIKA, MATCAD, as well as domestic SPSCO, DISPAS, are based on computational solution of differential equations. They have limited accuracy and low tolerance to noise interference or rapidly changing signals, that is especially evident while solving inverse problems of systems dynamics, in particular signal recovery problem [1].

In Laplace image space, traditional differential model of continuous object is associated with rational fractional transfer function that can be decomposed into partial fractions. Then, on the basis of the convolution theorem and tables of Laplace transform basic functions one can pass to the originals. As a result, we obtain an equivalent linear integral equation based on convolution operator with a complex kernel in the form of superposition of exponential and power functions.

Integrated mathematical model has a number of advantages as compared to the differential one [1, 2]. In particular, when it is used, accuracy of numerical simulation of the object under investigation is enhanced. The

algorithms obtained are characterized by deeper parallelization. The last of these properties is very important for simulation of an object in real time, when the computation should be completed during the step of discretization of input and output signals.

Digital filtration techniques. Application of digital filters seems to be very promising for simulation of continuous objects. The simplest and most common technique is to synthesize a transversal digital filter with finite high-order impulse response (usually one or two hundred units). This leads to emergence of technical difficulties. Advantage of this method consists in simplicity of organization of computer-aided calculation of transversal filters [3]. Very promising perspective stems from development of recursive digital filters [4] with simple technical implementation (usually they have low orders — one, two or three units) and high level of computational process parallelization.

Traditionally, an analog prototype is used for development of a recursive digital filter. It means formally that with equivalent algebraic manipulations, operator of primary continuous mathematical model can be reduced to a form suitable for realization in analog integrators, that are replaced thereafter with digital ones.

Image $F(p)$ of continuous original function $f(t)$ according to definition of integral Laplace transform can be found as follows:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f(t) dt,$$

where t is argument of the original function (as a rule, it is time); p is a mapping function argument (frequency or spatial coordinate) [5].

It is convenient to use this transformation, as well as Fourier transform, for spectral analysis of harmonic signals. Infinitely long in time sine waves are transformed in images into infinitely narrow by spatial coordinate spectral lines. Dynamic operations of differentiation or integration, complicated in the originals, are reduced to simple multiplication operations in images. This method makes possible significant simplification of analytical calculations of complex dynamical system response to an arbitrary continuous input signal. Sometimes performance of reverse transformation for transition to the originals causes significant difficulties.

Image $F(z)$ of the original discrete function $f(nh)$ according to definition of Jury discrete transform (z -transform) is found as follows:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) z^{-n},$$

where n is argument of the original function (formally it is number h of discretization step); z is argument of the image function [5].

It is very convenient to use Jury transform when developing recurrence formulas for numerical determination of values of the original function in equidistant sampling nodes. It is enough to calculate value of the function in some start nodes. Digital filters do work on this principle. They make it possible to simulate complex dynamic objects in real time, i.e. to calculate response of such an object to an arbitrary input signal. Next output signal value is determined from several input and output values of the object in previous discretization time points. Simplicity of inverse transformation that leads to recurrence formulas is an important advantage of Jury transform.

From the formulas that determine Laplace transform and Jury transform formally follows that $z = \exp(-ph)$, or $p = (1/h)\ln(z)$. Substitution of continuous differentiation operator p with finite difference expression leads to an infinite series. As a rule, truncation of the logarithm expansion into Laurent series is used. Thus bilinear z -transform, that uses the first two terms of expansion into Laurent series, is widely used: $\ln(z) = =2(z-1)/(z+1)$. Hence $p = (2/h)(z-1)/(z+1)$. This method of recursive digital filter synthesis is also called Tustin's method [3].

This is how traditional digital filter synthesis method for simulation of continuous dynamic object is built [3]. Its main drawback consists in low accuracy of calculation of the output signal of simulated dynamic object in discretization nodes, caused by incorrect substitution of continuous operator with discrete one. This is because the source model of dynamic object has been defined as a rational fractional transfer function, i.e. as an initial decomposition of continuous operator of object on differentiation stage.

However, primary continuous operator of dynamic object can be represented as a decomposition of rational fraction expression into partial fractions. It corresponds in the originals to decomposition of continuous operator into several convolution operations with several type kernels (exponential, exponential power and exponential trigonometric) [6]. Analog model of dynamic object can be developed without integrators, solely on inertial and oscillation elements [7].

It should be noted that integration is a subclass of convolution operation, when kernel is a singular constant function [2, 5].

Convolution method. Replacement of continuous convolution operator with finite difference expression can be performed more accurately. Kernel of convolution operator is often an exponential function, that leads to very low orders of difference equation of the desired digital filter. Let's prove a simple but important theorem.

Theorem. Continuous operator $1/(Tp+1)$ in Laplace image space is associated with discrete operator $(l-g)z/(z-g)$, $g = \exp(-h/T)$ in z -image space.

Proof. Output signal Y of inertial element is related with input signal X by a simple equation in Laplace images

$$Y(p) = V(p)X(p), V(p) = 1 / (Tp + 1),$$

where T is inertial element time constant. Product of two functions in images is associated in originals with convolution of two functions, that is reduced to the problem of realization of Volterra integral operator:

$$y(t) = \int_0^t V(t-s)x(s)ds.$$

Convolution operation is formally defined for infinite integration limits. However, since the argument of signal is time and not a spatial coordinate, and kernel $V(t) = 0$ for $t < 0$, one can choose finite integration limits. Signal start ($t = 0$) can be taken as a reference-starting point, upper limit of integration will be variable here.

Let's find kernel function $V(f)$ in originals according to Laplace Transform Table. Let's reduce the $V(p)$ function in images to tabular style:

$$V(p) = (1/T) / (p + (1/T)).$$

Its parallel in the originals

$$V(t) = (1/T) \exp(-t/T).$$

Consequently, passage of signal through inertial element in the originals is associated with operation of the signal function convolution with kernel in the form of exponential function.

Let's discretize time t at increments of h , and move on to discrete convolution:

$$y(nh) = \sum_{k=0}^n v((n-k)h)x(kh)h.$$

Keep in mind that the value ds in continuous operator is associated with increment of h in discrete operator. Thus, $v(nh) = (h/T) \exp(-nh/T)$. In z -images we obtain

$$Y(z) = V(z)x(z), V(z) = (h/T)z / (z - g), g = \exp(-h/T).$$

Let's move on to discrete originals through the shift theorem:

$$Y(z)(z - g) = (h/T)zx(z),$$

$$Y(z)(1 - gz^{-1}) = (h/T)x(z),$$

$$Y(z) = gz^{-1}Y(z) + (h/T)x(z),$$

$$y_n = gy_{n-1} + (h/T)x_n, y_n = y(nh), x_n = x(nh).$$

Let's perform correction of digital filter static balance mode for the case $y_n = y_{n-1} = x_n$ with $T \rightarrow 0$. As a result, we obtain a working formula for numerical simulation of inertial element:

$$y_n = gy_{n-1} + (1+g)x_n.$$

Next value of discrete output signal is calculated from the current value of input signal and one of the previous values of the output signal.

Coming back to z -images, we get $V(z) = (1 - g)z / (z - g)$. Thus, from Laplace images we can pass to z -images through the following substitution:

$$1 / (Tp + 1) \Rightarrow (1 - g)z / (z - g), g = \exp(-h / T).$$

The theorem is proven.

Accuracy of simulation of the primary continuous operator depends solely on length of the filter order grid and according to [6] does not depend on discretization increment (unlike Tustin's method). The validity of this statement can be verified by analyzing disparity between calculations of inertial element transient response obtained with digital filtering formula and analytical formula $y(t) = 1 - \exp(-t / T)$.

If Tustin's method is used, significant dynamic error is observed in numerical simulation of continuous object. Magnitude of this error decreases with decrease of discretization increment. Computational formula structure is more complex [2].

Concepts of direct current static transmission factor for continuous and discrete transfer functions are substantially different. In the first case, this value is equal to one (constant), and in the second case it is close to zero and has not physical, but mathematical meaning. In order to ensure equal levels of input and output signals of dynamic object in equilibrium state, this value can be chosen in such a way that its discrete transfer function shall be equal to one for $z = 1$. This condition ensures physical equality to one of transmission factor of continuous object discrete model.

Conclusions and generalization. If input signals used are smoother than a jump, minor error in numerical simulation of inertial element output signal can emerge as compared to analytical calculation. However, this error can be eliminated with additional weak transversal filtering. In this case, signal averaging in several adjacent points is actually performed in accordance with high-order quadrature formulas.

Thus, convolution method can be considered the most efficient method for synthesis of recursive digital filter to simulate linear stationary object with lumped parameters. Structure of its recurrence computational formulas is simpler than traditional one, and accuracy of numerical simulation of object is higher, even with error down to zero with respect to analytical calculation.

Depending on the kind of roots (simple, multiple, complex conjugate) of denominator polynomial of the primary rational fractional (in Laplace images) transfer function of the channel we get several kinds of partial fractions. We restricted ourselves to the case of one simple root, since all cases of complex roots generally can be reduced to it. Thus, the case of multiple root corresponds to a serial connection of several identical inertial elements [1], and the case of complex conjugate roots corresponds to loop joint of two inertial elements [7]. Parameters of each elementary unit of dynamic objects can have functional dependences on time or input signal amplitude, that allows for simulation of nonstationary or nonlinear objects respectively.

Thus, it may be concluded that instead of common integration or differentiation operations for development of dynamic models of continuous objects it makes sense to use more complex operations in the form of convolutions with exponential power kernels. It improves accuracy of numerical simulation of continuous objects.

A recursive digital filter construction method is considered for simulation of inertial element as a typical component of complex dynamic object. New computational formulas are obtained. Their high accuracy as compared to traditional ones is shown. Decomposition of initial model of simulated object by convolution operations with several typical exponential kernels is proposed instead of traditional operations of integration and differentiation.

References:

1. Methods and devices for interpretation of experimental dependencies in the study and control of energy processes / A. F. Verlan, B. B. Abdusatarov, A. A. Ignatchenko, N. A. Maksimovich. — Kyiv : Nauk. dumka, 1993. — 208 p.
2. Verlan A. F. Integral equations: methods, algorithms, programs / A. F. Verlan, V. S. Sizikov. — Kyiv : Nauk. dumka, 1986. — 544 p.
3. Sibert U. M. Circuits, signals, systems. 4.1 / U. M. Sibert. — M. : Mir, 1988. — 336 p.
4. Verlan A. F. Development of recursive digital filter for recovery of continuous signals / A. F. Verlan, N. A. Maksimovich // USiM (Control Systems and Machines). — 1999. — № 1. — P. 18–25.
5. Korn G. Mathematics handbook for scientists and engineers / G. Korn, T. Korn. — M. : Nauka, 1984. — 832 p.
6. Maksimovich N. A. Computational dynamic control system correctors. Author's extended abstract of PhD in Technical Sciences dissertation / N. A. Maksimovich. — Kyiv, 1991. — 16 p.
7. Maksimovich N. A. Integration-free models of oscillating element / N. A. Maksimovich, V. A. Fedorchuk // Collection of research papers of Kamnents-Podolskiy State University. Series physics and mathematics. 3rd issue. — 1997. — P. 58–64.

Розглянуто метод побудови рекурсивного цифрового фільтра для імітації ланки — типового елементу складного динамічного об'єкта. Отримано нові розрахункові формули. Показано їх високу точність порівняно з традиційними та доцільність декомпозиції вихідної моделі об'єкта, що імітується, за операціями згортки з декількома типовими експоненціальними ядрами замість традиційних операцій інтегрування та диференціювання.

Ключові слова: *математична модель, передатна функція, інтегральний оператор Вольтерри, оператор згортки, цифровий фільтр.*

Отримано: 26.04.2016

УДК 519.718.2

Т. О. Стефанович, канд. техн. наук,**С. В. Щербовських**, д-р. техн. наук, професор

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПРИЧИН НЕПРАЦЕЗДАТНОСТІ НАСОСНОГО ВУЗЛА ІЗ ПОЛЕГШЕНИМ КОВЗНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ

Запропоновано математичну модель надійності насосного вузла із полегшеним ковзним резервуванням. Така модель надійності адекватно враховує вплив коефіцієнта навантаження для розподільника, який вмикає резервний насос, на ймовірнісні характеристики причин непрацездатності насосного вузла. Для визначення характеристик надійності застосовано динамічне дерево відмов та марковську модель.

Ключові слова: *модель надійності, ковзне резервування, дерево відмов, марковська модель, причина непрацездатності.*

Вступ. На підприємствах харчової, хімічної та переробної промисловості використовують насосні вузли, призначені для перекачування робочого середовища. Для підвищення надійності насосних вузлів застосовують ковзне резервування. В цьому випадку група основних насосів резервується одним чи декількома насосами, кожний з яких може замінити будь-який із насосів основної групи у випадку його відмови. Для вмикання резервного насоса замість непрацездатного насоса з основної групи в системі встановлений гідравлічний розподільник. За незатребуваного резервного насоса гідравлічний розподільник перебуває у полегшеному режимі. Після вмикання ним насоса він переходить у навантажений режим роботи. У результаті постає проблема формування математичної моделі надійності, яка адекватно враховуватиме вплив зміни навантаження розподільника на ймовірнісні характеристики надійності, а саме на причини непрацездатності такої системи

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для побудови моделей надійності насосних вузлів виділяємо такі підходи. У працях [1, 2] застосовують дерева відмов, які базуються на логіко-ймовірнісному методі. Недолік такого підходу полягає у тому, що він не забезпечує адекватне врахування явищ, пов'язаних зі зміною навантаження, а також не розрізняє катастрофічні і некатастрофічні відмови елементів. У працях [3, 4] використовують моделі надійності, які ґрунтуються на імітаційному моделюванні за методом Монте-Карло. Недоліком цього підходу є те, що одержані результати спотворені флуктуаціями, амплітуда яких для робочого діапазону параметрів співмірна із зна-

ченнями досліджуваних характеристик. У працях [5, 6] використовують марковські моделі надійності, які базуються на аналізі простору станів. Основним недоліком таких моделей є обмеження експоненціальним розподілом, а також висока трудомісткість їх побудови.

Для розв'язання поставленої проблеми використано підхід, який ґрунтується на поєднанні динамічних дерев відмов та марковських моделей надійності. Для послаблення обмеження експоненціальним розподілом застосовано розщеплення простору станів на основі тензорного аналізу [7–9], яке забезпечило врахування довільних розподілів і «запам'ятовування» передісторії напрацювання елементів системи за навантаженням.

Завдання дослідження:

- математично описано надійність системи на основі динамічного дерева відмов;
- побудовано модель станів та подій і розщеплену однорідну марковську модель системи;
- визначено ймовірнісні характеристики причин непрацездатності системи.

Опис системи та її динамічне дерево відмов. Насосний вузол складається із основної і резервної груп елементів (рис. 1). До основної групи входять насоси 1 та 2, які з'єднані між собою паралельно. До резервної групи входять розподільник 3 та насос 4, які сполучені між собою послідовно. Подача усіх трьох насосів 1, 2 та 4 однакова і становить для кожного із них половину від сумарної подачі насосного вузла.

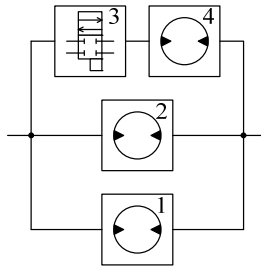


Рис. 1. Функціональна схема насосного вузла

Система функціонує таким чином. Насоси 1 і 2 перекачують робоче середовище, поділяючи сумарну подачу порівну, а розподільник 3 і насос 4 у цей час перебувають у резерві. У такому режимі навантаження насосів 1 і 2 номінальне, розподільника 3 — полегшене, а насоса 4 — відсутнє. Втрата працездатності системи може розвиватись двома шляхами. Перший шлях полягає у тому, що настає непрацездатність одного із насосів основної групи, внаслідок якої розподі-

льник вмикає резервний насос. У такому режимі навантаження працездатного насоса із основної групи, а також навантаження обох елементів резервної групи номінальне. Другий шлях полягає у тому, що настає непрацездатність розподільника, яка унеможливує подальше вмикання резервного насоса. У такому режимі навантаження обох насосів із основної групи залишається номінальним, а резервного насоса — відсутнє. Якщо у першому чи другому випадку до завершення ремонту непрацездатного елемента настає відмова ще одного елемента, то це викликає відмову усієї системи.

Формалізуємо надійність системи динамічним деревом відмов, яке подано на рис. 2а, а відповідна йому структурна схема надійності — на рис. 2б. Динамічне дерево відмов є математичною моделлю, яка описує умову непрацездатності системи та умови зміни навантаження між її елементами на основі блоків, які позначають логічні операції та операції відношення.

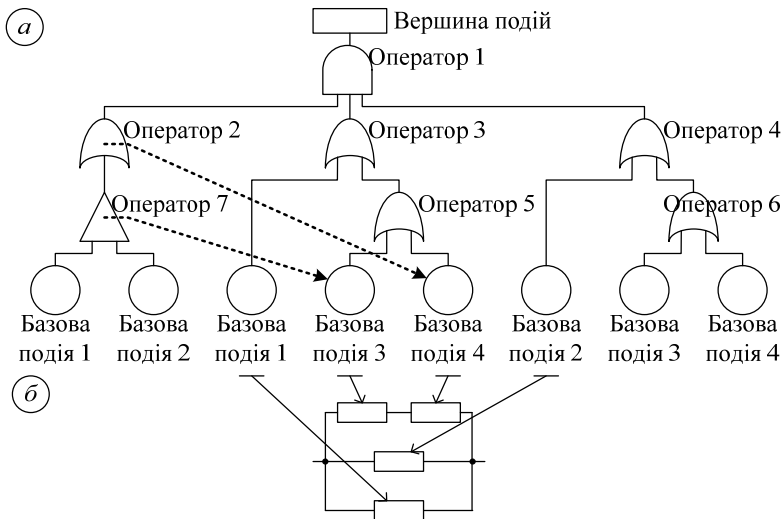


Рис. 2. Динамічне дерево відмов (а)

та структурна схема надійності (б) насосного вузла

Непрацездатність системи позначено блоком «Вершина подій». Вважаємо, що така подія є катастрофічною, тобто поки вона не відбулась, ремонтування елементів системи можна виконати стільки разів, скільки у цьому виникає потреба, а якщо вона наступила, то подальше ремонтування не розглядаємо. Відновлений елемент за експлуатаційними характеристиками вважаємо аналогічним новому, а інші елементи системи такими, що мають попереднє напрацювання. Непрацездатність системи настає, якщо відбулось три події, що описує блок «Опе-

ратор 1», тип якого задано логічною операцією І. Зауважимо, що ці події є сумісними, і, якщо настала одна із них, то це спрощує настання двох інших. Перша подія настає внаслідок відмови хоча б одного насоса 1 чи 2 із основної групи, що описує блок «Оператор 2», тип якого задано логічною операцією АБО. Непрацездатність цих насосів описують блоки «Базова подія 1» та «Базова подія 2», а напрацювання їх до відмови вважаємо розподіленим за законом Вейбулла із параметрами α_1 і β_1 та α_2 і β_2 . Друга подія настає внаслідок відмови насоса 1 або групи резервних елементів, що описує блок «Оператор 3», тип якого задано логічною операцією АБО. Третя подія настає внаслідок відмови насоса 2 або групи резервних елементів, що описує блок «Оператор 4», тип якого задано логічною операцією АБО. Непрацездатність групи резервних елементів відбувається у разі відмови розподільника 3 або резервного насоса 4, що описують для другої події блок «Оператор 5», а для третьої блок «Оператор 6», тип яких задано логічною операцією АБО. Непрацездатність елементів резервної групи описують блоки «Базова подія 3» та «Базова подія 4», а напрацювання їх до відмови вважаємо розподіленим за законом Вейбулла із параметрами α_3 і β_3 та α_4 і β_4 . Тривалість ремонтування елементів системи вважаємо розподіленою експоненціально із параметром μ .

У системі відбувається два динамічні процеси, які полягають у зміні навантаження елементів резервної групи залежно від стану елементів основної групи. Для опису цих процесів введемо у структуру динамічного дерева відмов блок «Оператор 7», який є повторювачем логічного сигналу, і задамо у ньому, а також у блоці «Оператор 2» умови зміни навантаження. Якщо на вхід блоку «Оператор 7» подається логічний сигнал ХИБНО, тобто група основних елементів працездатна, то інтенсивність процесу напрацювання розподільвача 3, заданого блоком «Базова подія 3», вважаємо нижчою від номінальної в k разів. З іншого боку, якщо на вхід блоку «Оператор 2» поступає логічний сигнал ХИБНО, що так само означає працездатність групи основних елементів, то інтенсивність процесу напрацювання резервного насоса 4, заданого блоком «Базова подія 4», вважаємо рівною нулю.

Модель станів та подій. На основі поданого вище динамічного дерева відмов системи згідно із формалізованими правилами [10] складено модель станів та подій. Така модель є математичним описом станів, в яких може перебувати система, та подій, які у ній можуть відбуватися, у проекційному зв'язку до процесів, що у ній протікають. Граф такої моделі подано на рис. 3, а її параметри у табл. 1. У моделі станів та подій процес напрацювання для насоса 1 позначено як P_1 , для насоса 2 — P_2 , для розподільника 3 — P_3 та для резервного насоса 4 — P_4 .

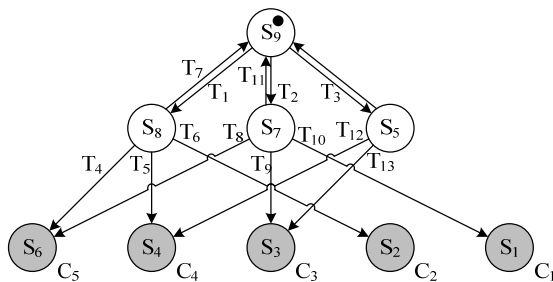


Рис. 3. Граф станів та переходів насосного вузла

Таблиця 1

Параметри моделі станів та подій насосного вузла

Опис станів						Опис подій										
Поч. стан	Графічний опис стану	Коефіцієнти масштабування				у	Назва події	Заверш. процес	Кін. стан.							
		P ₁ /P ₅	P ₂ /P ₆	P ₃ /P ₇	P ₄											
S ₉		1 / 0	1 / 0	k / 0	0	1	T ₁	P ₁	S ₈							
							T ₂	P ₂	S ₇							
							T ₃	P ₃	S ₅							
S ₈		0 / 1	1 / 0	1 / 0	1	1	T ₄	P ₂	S ₆							
							T ₅	P ₃	S ₄							
							T ₆	P ₄	S ₂							
							T ₇	P ₅	S ₉							
S ₇		1 / 0	0 / 1	1 / 0	1	1	T ₈	P ₁	S ₆							
							T ₉	P ₃	S ₃							
							T ₁₀	P ₄	S ₁							
S ₆		0 / 0	0 / 0	0 / 0	0	—	—	—	—							
							S ₅		1 / 0	1 / 0	0 / 1	0	1	T ₁₂	P ₁	S ₄
														T ₁₃	P ₂	S ₃
S ₄		0 / 0	0 / 0	0 / 0	0	0	—	—	—							
S ₃		0 / 0	0 / 0	0 / 0	0	0	—	—	—							
S ₂		0 / 0	0 / 0	0 / 0	0	0	—	—	—							
S ₁		0 / 0	0 / 0	0 / 0	0	0	—	—	—							

Процеси ремонтування для насосів 1 та 2 позначено як P₅ та P₆, а для розподільника 3 — P₇. Відмова резервного насоса 4 призводить одразу до катастрофічної відмови, тому процес його ремонтування не зада-

Для подій T_1, T_8 та T_{12} , спричинених завершенням процесу P_1 :

$$A_{T_1} = A_{T_8} = A_{T_{12}} = p_1 C_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 \otimes E_7.$$

Для подій T_2, T_4 та T_{13} , спричинених завершенням процесу P_2 :

$$A_{T_2} = A_{T_4} = A_{T_{13}} = E_1 \otimes p_2 C_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 \otimes E_7.$$

Для подій T_3, T_5 та T_9 , спричинених завершенням процесу P_3 :

$$A_{T_5} = A_{T_9} = E_1 \otimes E_2 \otimes p_3 C_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 \otimes E_7,$$

$$A_{T_3} = k A_{T_5}.$$

Для подій T_6 та T_{10} , спричинених завершенням процесу P_4 :

$$A_{T_6} = A_{T_{10}} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes p_4 C_4 \otimes E_5 \otimes E_6 \otimes E_7.$$

Для події T_7 , спричиненої завершенням процесу P_5 :

$$A_{T_7} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes p_5 C_5 \otimes E_6 \otimes E_7.$$

Для події T_{11} , спричиненої завершенням процесу P_6 :

$$A_{T_{11}} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes p_6 C_6 \otimes E_7.$$

Для події T_{14} , спричиненої завершенням процесу P_7 :

$$A_{T_{14}} = E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \otimes E_4 \otimes E_5 \otimes E_6 \otimes p_7 C_7.$$

У матриці C одиничний вектор-рядок I має розмірність, яка дорівнює добутку розмірностей усіх матриць інтенсивності переходів A_1 – A_7 . Цю матрицю складено так, щоб п'ять її рядки відповідали ймовірнісним характеристикам причин непрацездатності системи C_1 – C_5 . Одержана модель містить 144 рівняння.

Ймовірнісні характеристики системи. Значення параметрів для елементів системи взято такими: $\alpha_1 = \dots = \alpha_4 = 10\,000$ год., $\beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = 1.2$ та $\beta_3 = 1.1$, інтенсивність відновлення $\mu = 0.02$ 1/год. На основі розщепленої однорідної марковської моделі обчислено ймовірнісні характеристики причин непрацездатності системи. На рис. 4 подано сімейство кривих ймовірнісних характеристик для різних значень коефіцієнта навантаження k . Цей коефіцієнт вказує, наскільки зменшується інтенсивність напруцювання розподільника у режимі очікування порівняно із номінальним режимом. Коефіцієнт може набувати значення у межах від 0 до 1. Значення 0 означає, що у режимі очікування навантаження розподільника відсутнє, а значення 1 — що у режимі очікування його навантаження є номінальним. Штрихові криві 1 і 2 відповідають ймовірності непрацездатності системи внаслідок причин C_1 , за якої непрацездатні насоси 2 і 4, та C_2 , за якої непрацездатні насоси 1 і 4. Суцільні криві 3–8 — ймовірності непрацездатності системи внаслідок причини C_3 , за якої непрацездатні насос 2 і розподільвач 3, та C_4 , за якої непрацездатні насос 1 і розподільвач 3.

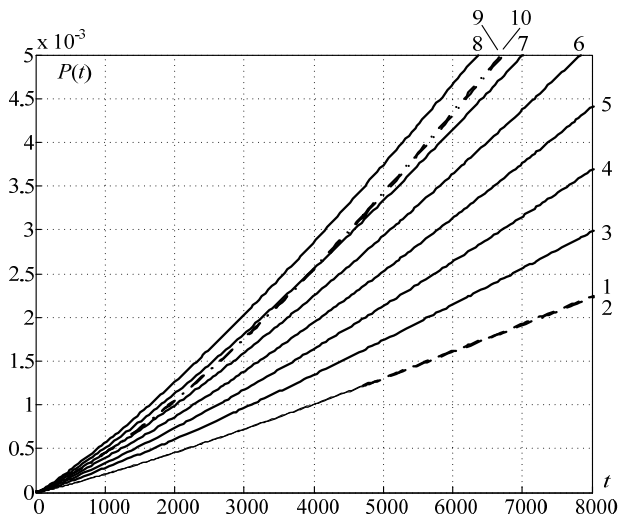


Рис. 4. Криві ймовірнісних характеристик причин непрацездатності насосного вузла

Штрих-пунктирні криві 9 і 10 — ймовірності непрацездатності системи внаслідок причини C_5 , за якої непрацездатні насоси 1 та 2. Криві 1, 3 і 9 відповідають значенню $k = 0$; крива 4 — $k = 0.2$; крива 5 — $k = 0.4$; крива 6 — $k = 0.6$; крива 9 — $k = 0.8$; а криві 2, 8 та 10 — $k = 1$. Як видно із рис. 4 зі збільшенням коефіцієнта k у досліджуваній області ймовірнісні характеристики непрацездатності системи внаслідок причин C_1 , C_2 та C_5 незначно спадають у діапазонах, обмежених кривими 1 і 2 та кривими 9 і 10. Ймовірнісні характеристики непрацездатності системи внаслідок причини C_3 і C_4 різко зростають у діапазоні, обмеженому кривими 3 і 8. Це означає, що залежно від значення коефіцієнта k та досліджуваного часового інтервалу відносний внесок причин непрацездатності змінюється. Зокрема, для напрацювання 8 000 год та для $k = \{0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ домінуючою причиною непрацездатності є C_5 , а для $k = 1.0$ на перше місце виходять C_3 та C_4 . Для напрацювання 4 000 год. описана вище тенденція зберігається, окрім значення $k = 0.8$, за якого C_3 та C_4 домінують над C_5 .

Висновки. Розроблено математичну модель надійності насосного вузла із полегшеним ковзним резервуванням. Одержана модель призначена для кількісного аналізу причин непрацездатності такої системи. Надійність насосного вузла математично описано динамічним деревом відмов, в якому задано логічні умови зміни навантаження розподільника залежно від стану насосів основної групи. Ймовірнісні характеристики насосного вузла визначено за марковською моделлю, в якій на основі тензорних виразів розщеплення простору ста-

нів, враховано вплив перерозподілу навантаження між елементами системи, тривалість напрацювання до відмови яких розподілено за законом Вейбулла. За допомогою такої моделі проаналізовано, як впливає зміна коефіцієнта навантаження розподільника на причини непрацездатності системи. Кількісно показано, що зі збільшенням коефіцієнта навантаження розподільника у режимі очікування непрацездатність системи внаслідок відмови одного із насосів основної групи та розподільника із другорядної причини стає домінуючою.

Подальші дослідження скеровані на розроблення моделі надійності насосного вузла із перехресним перерозподілом навантаження між елементами такої системи.

Список використаних джерел:

1. Vega M. Algorithm to evaluate substation reliability with cut and path sets / M. Vega, H. G. Sarmiento // *Industry Applications, IEEE Transactions on.* — 2008. — Vol. 44, № 6. — P. 1851–1858.
2. Wei-Chang Yeh. A new algorithm for generating minimal cut sets in k-out-of-n networks / Wei-Chang Yeh // *Reliability Engineering & System Safety.* — 2006. — Vol. 91, № 1. — P. 36–43.
3. Khanh Nguyen T. P. Method for evaluating an extended Fault Tree to analyse the dependability of complex systems: Application to a Satellite-based railway system / T. P. Khanh Nguyen, Julie Beugina, Juliette Marais // *Reliability Engineering & System Safety.* — 2015. — Vol. 133. — P. 300–313.
4. Zhu P. A stochastic approach for the analysis of dynamic fault trees with spare gates under probabilistic common cause failures / P. Zhu, J. Han, L. Liu, F. Lombardi // *Reliability, IEEE Transactions on.* — Vol. 64, № 3. — P. 878–892.
5. Manno G. Conception of Repairable Dynamic Fault Trees and resolution by the use of RAATSS, a Matlab® toolbox based on the ATS formalism / G. Manno, F. Chiacchio, L. Compagno, D. D'Urso, N. Trapani // *Reliability Engineering & System Safety.* — 2014. — Vol. 121, № 1. — P. 250–262.
6. Daniele Codetta-Raiteri. Integrating several formalisms in order to increase Fault Trees' modeling power / Daniele Codetta-Raiteri // *Reliability Engineering & System Safety.* — 2011. — Vol. 96, № 5. — P. 534–544.
7. Shcherbovskiykh S. Failure intensity determination for system with standby doubling / S. Shcherbovskiykh, O. Lozynsky, Ya. Marushchak // *Przeglad Elektrotechniczny.* — 2011. — Vol. 87, № 5. — P. 160–162.
8. Mandziy B. Mathematical model for failure cause analysis of electrical systems with load-sharing redundancy of component / B. Mandziy, O. Lozynsky, S. Shcherbovskiykh // *Przeglad Elektrotechniczny.* — 2013. — Vol. 89, № 11. — P. 244–247.
9. Stefanovych T. The reliability model for failure cause analysis of pressure vessel protective fittings with taking into account load-sharing effect between valves / T. Stefanovych, S. Shcherbovskiykh, P. Drozdziel // *Diagnostyka.* — 2015. — Vol. 16, № 4. — P. 17–24.
10. Щербовських С. В. Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження: монографія / С. В. Щербовських. — Львів : Вид-во Львівської політехніки, 2012. — 296 с.

The mathematical reliability model for pump unit with reduced sliding redundancy is suggested. This reliability model adequately takes into account impact of load-sharing coefficient of directional control valve that reserve pump turn on failure cause probability characteristics of pump unit. For reliability characteristics determination dynamic fault tree and Markov model are used.

Key words: *reliability model, sliding redundancy, fault tree, Markov model, failure cause.*

Отримано: 12.04.2016

УДК 004.89+004.932

Р. О. Ткаченко, д-р техн. наук, професор,

І. В. Ізонін, канд. техн. наук,

Д. А. Батюк, аспірант,

Р. В. Сидоренко,

В. І. Прострельчук

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

ПЕРЕДИСКРЕТИЗАЦІЯ ЗОБРАЖЕНЬ ЗАСОБАМИ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

У роботі розроблено метод передискретизації зображень з цільовим коефіцієнтом зменшення засобами машинного навчання. Подано алгоритмічну реалізацію процедури синтезу матриці вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків, що лежить в основі процесу передискретизації. Підбрано оптимальні параметри нейронних мереж машини геометричних перетворень для роботи в режимі навчання при розв'язанні поставленої задачі. Наведено числові та графічні результати передискретизації за розробленим методом на різних зображеннях.

Ключові слова: *зображення, передискретизація, машинне навчання.*

Вступ. Топологічні підходи в задачах передискретизації зображень, зокрема з цільовим коефіцієнтом зменшення, передбачають використання різноманітних скінченних покриттів відкритими множинами. Це дає можливість будувати різноманітні вектори ознак, що характеризуватимуть елемент визначеної на зображенні топології. Існування в просторі ознак значної кількості векторів, іноді також великої розмірності, є вагомим аргументом для використання чи розробки методів машинного навчання в задачах обробки цифрових зображень.

Аналіз попередніх досліджень і постановка задачі. У роботах [1, 2] розв'язано задачу передискретизації цифрових зображень засобами машинного навчання, зокрема з використанням нейроподібних структур

машини геометричних перетворень (НПС МГП). Вибір цього інструментарію для практичної реалізації методу обґрунтовується високою швидкістю роботи, а також достатньою надійністю процедури навчання НПС [3].

У роботі [4] описано нейромережеву технологію зменшення масштабу зображень, алгоритмічна реалізація якої передбачає виконання трьох основних етапів: 1) попередня обробка пари вхідних зображень високої і низької роздільної здатності; 2) реалізація процедури навчання, зокрема з використанням графічного інтерфейсу func*net Express [3]; 3) застосування навченої НПС МГП для розв'язання поставленої задачі.

У цій роботі ми пропонуємо розв'язувати задачу передискретизації цифрових зображень із заданим коефіцієнтом зменшення шляхом використання вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків, отриманих під час навчання нейроподібної структури МГП з багатьма виходами.

Метод передискретизації зображень засобами машинного навчання. Як і у [4] перший етап методу передбачає необхідність диз'юнктивної декомпозиції пари зображень (високої та низької роздільної здатності) на однакову кількість фреймів (квадратних областей функції інтенсивності зображення). Слід відмітити, що розмірність фрейму із зображення низької роздільної здатності повинна бути в m разів меншою за розмірність фрейму із другого зображення навчальної пари. Таким чином m — визначатиме коефіцієнт зменшення у процедурі передискретизації зображень, $m \in N, m > 0$. Із відповідних векторів, отриманих із обох зображень пари формуємо вектори $A_1^{(m)}$ і A_1 для зображень високої та низької РЗ відповідно, а з них — матрицю навчальних даних M :

$$M = \begin{pmatrix} A_1^{(m)} & A_1 \\ \dots & \dots \\ A_{n^2}^{(m)} & A_{n^2} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $\dim(A_1^{(m)})$ визначатиме кількість входів НПС МГП, а $\dim(A_1)$ — кількість виходів нейроподібної структури МГП.

Оскільки алгоритм навчання НПС МГП відомий, тому на ньому зупинятися не будемо. Реалізацію процедури навчання нейроподібних структур детально описано у [3, 4].

Третій етап методу ми модифікуємо наступним чином. Для цього використаємо лінійну структуру НПС МГП, включаючи лінійні функції активації, а також лінійні значення синаптичних зв'язків між нейронами. Використання саме цих значень обґрунтовано при розв'язанні задачі збільшення масштабу зображень [1]. Це дозволяє нам використати принципи лінійної суперпозиції і перейти від початкових схем до еквівалентних схем НПС МГП. Цей процес, а також повторюваність розв'язку,

яка забезпечується перевагами використовуваного алгоритму навчання НПС, дозволяють отримати матрицю вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків з навченої НПС МГП. Її застосування забезпечує реалізацію процедури передискретизації зображень з цільових коефіцієнтом зменшення, без використання НПС МГП на стадії застосування. Така перевага суттєво зменшить як часові так і обчислювальні ресурси, необхідні для реалізації процесу передискретизації набору зображень.

Процедура синтезу матриці вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків між нейронами. Алгоритмічна реалізація процедури синтезу матриці вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків з НПС МГП з багатьма виходами для розв'язання поставленої задачі передбачає виконання наступних кроків:

- 1) процедура навчання НПС МГП на парі зображень згідно методики, описаної вище;
- 2) отримання матриці коефіцієнтів $\alpha_{i,j}$ площини відгуку на основі навченої НПС:

$$V = \left[\alpha_{i,j} \right]_{i=1, (km)^2}^{j=1, k^2+1}, \quad (2)$$

де k — змінна, що визначає розмірність фрейму для зображення низької РЗ, $k \in N, k > 0$.

Матрицю (2) отримуємо шляхом тестування НПС МГП матрицею тестових сигналів T :

$$T = \begin{pmatrix} \Omega \\ E \end{pmatrix}, \quad \Omega = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{(km)^2} \right\}, \quad (3)$$

де E — одинична діагональна матриця, $\dim(E) = (km)^2 \times (km)^2$.

- 3) на основі (2) будемо матрицю вагових коефіцієнтів синаптичних зв'язків еквівалентної схеми лінійної НПС МГП:

$$W = \left[w_{i,j} \right]_{i=1, (km)^2}^{j=1, k^2+1}, \quad (4)$$

де коефіцієнти $w_{i,j}$ обчислюються так:

$$\forall i \in \left[1, (km)^2 \right], \forall j \in \left[1, k^2 + 1 \right]: w_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{1,j}, & i = 1; \\ \alpha_{i,j} - \alpha_{1,j}, & i \neq 1. \end{cases} \quad (5)$$

- 4) використовуючи W , отримуємо шуканий фрейм $P_{i,j}$

$$\forall i, j \in \left[1, n \right]: P_{i,j} = \left[c_{x,y} \mid c_{x,y} = w_{1,(x-1)k+y} + \sum_{a=(i-1)+1}^{ki} \sum_{b=k(j-1)+1}^{kj} c_{a,b} w_{(a-k(i-1)-1)k+b-k(j-1)+1, (x-1)mk+y} \right]_{x,y=1, \overline{k}} \quad (6)$$

зображення низької РЗ із відповідного фрейму $P_{i,j}^{(m)}$ зображення високої РЗ, де $\forall a, b : c_{a,b} \in P_{i,j}^{(m)}$.

5) застосовуючи (9) до усіх вхідних фреймів, отримаємо шукане зображення.

Моделювання роботи методу. Процедура навчання НПС МГП для розв'язання задачі передискретизації зображень з цільовим коефіцієнтом зменшення з використанням засобів машинного навчання передбачає наявність навчальної пари зображень високої/низької РЗ. З цією метою для усіх експериментів, представлених у роботі використовувалася пара зображень, яку приведено на рис. 1а. (на рис. 1 приведено лише зображення низької РЗ). У режимі моделювання роботи методу використовувалися зображення, наведені на рис. 1 б, в, г. Слід відмітити, що масштаб усіх зображень з рис. 1 зменшено з метою представлення у роботі.



Рис. 1. Еталонні зображення з РЗ 252×252 пікселів:
а) навчальне; б), в), г) — тестові

Параметри НПС МГП наступні:

- 1) кількість входів — $\dim(A_1^{(m)})$;
- 2) прихованих шарів — 1;
- 3) кількість нейронів прихованого шару рівне $\dim(A_1^{(m)})$;
- 4) кількість виходів НПС — $\dim(A_1)$;
- 5) лінійне значення синаптичних зв'язків між нейронами.

Дослідження впливу розмірів фрейму на якість передискретизованих зображень. Метою експерименту є пошук таких значень розмірів фрейму ($k \times k$), яке б забезпечувало найкращий результат. Найкращий результат тут визначається з використанням наступних показників якості цифрових зображень: середньоквадратичне відхилення (MSE), універсальний індекс якості зображень (UIQ), співвідношення пікового сигналу до шуму (PSNR), а також індексу структурної подібності отриманого та еталонного зображень (SSIM). Зміну значень вищеперерахованих показників при зміні значення розмірів фрейму для тестових зображень зведено в табл. 1.

Таблиця 1

Значення показників якості цифрових зображень при зміні k

$m = 2$						
Зображення з рис.2	Співвідношення $k \times k$ для зображень високої/низької РЗ	UIQ	MSE	SSIM	PSNR	К-сть нейронів прихованого шару НПС
б)	2×2 — 1×1	0,9062	32,3548	0,9314	33,0314	4
в)	4×4 — 2×2	0,7226	164,515	0,7627	25,9687	16
г)	6×6 — 3×3	0,5233	398,4017	0,5694	22,1276	36
д)	8×8 — 4×4	0,4178	569,2429	0,4551	20,5778	64
е)	12×12 — 6×6	0,2945	772,7581	0,3417	19,2504	144

Як видно з табл. 1 найкращий результат по усім чотирьом показникам якості отримано для випадку найменшого значення k . Задля візуальної оцінки отриманих результатів, на рис. 2 наведено ряд передискретизованих зображень з коефіцієнтом зменшення $m = 2$ при зміні цього показника.

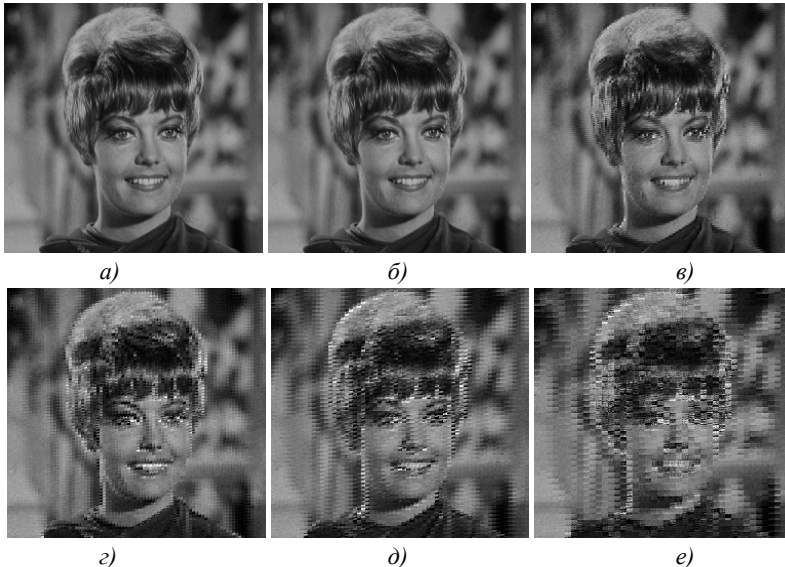


Рис. 2. Результати передискретизації з $m=2$ при зміні k : а) еталон; б) 2×2 — 1×1 ; в) 4×4 — 2×2 ; г) 6×6 — 3×3 ; д) 8×8 — 4×4 ; е) 12×12 — 6×6

Як видно з рис. 2, при збільшенні розмірів фрейму, якість передискретизованих зображень суттєво зменшується. Такі ж результати отримано і при зменшенні інших тестових зображень. Саме тому, у

подальших дослідженнях буде використовуватися найменше значення розміру фреймів.

Дослідження впливу параметрів НПС МГП на якість результуючих зображень. Цей експеримент передбачає пошук таких значень параметрів НПС, при яких отримується найкращий результат. При цьому збільшувалася кількість нейронів прихованого шару [1:4] при виконанні процедури навчання для фреймів, розміром 2×2 — 1×1 . Результати роботи нейроподібної структури при розв'язанні поставленої задачі в цьому випадку представлено в табл. 2.

Таблиця 2

Значення показників якості цифрових зображень при зміні кількості нейронів прихованого шару НПС МГП

Зображення з рис.1	SSIM	MSE	UIQ	PSNR	Кількість нейронів в прихованому шарі НПС МГП
					б)
в)	0,93	61,25	0,93	30,26	
г)	0,98	9,26	0,97	38,47	
б)	0,97	15,63	0,91	36,19	2 нейрона
в)	0,84	166,03	0,83	25,93	
г)	0,95	26,15	0,93	33,96	
б)	0,96	20,35	0,89	35,05	3 нейрона
в)	0,76	281,84	0,75	23,63	
г)	0,93	31,12	0,91	33,20	
б)	0,96	19,84	0,89	35,16	4 нейрона
в)	0,78	255,59	0,77	24,06	
г)	0,93	32,35	0,91	33,03	

На рис. 3 графічно наведено результати цього експерименту для зображень з рис. 1.

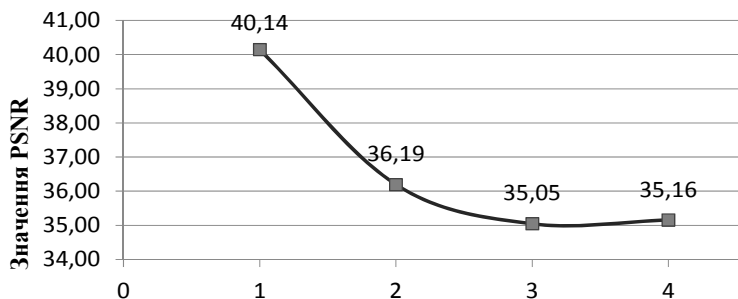


Рис. 3. Значення PSNR при зміні кількості нейронів в прихованому шарі з $m = 2$ (для зображення з рис. 1)

Вибір в прихованому шарі лише одного нейрону дозволило нам додатково підвищити ефективність роботи розробленого методу, зокрема щодо якості передискретизації зображень з коефіцієнтом зменшення — 2 по усім чотирьом показникам.

Висновки. Розроблено новий метод передискретизації зображень з цільовим коефіцієнтом зменшення з використанням засобів машинного навчання. Особливістю розробленого методу є висока якість передискретизації зображень одного класу при зменшенні обчислювальних та часових ресурсів його роботи. Окрім цього, застосування інструментарію НПС МГП надає можливість швидкого автоматичного перенавчання. Це забезпечує можливість використання методу у системах технічного зору при передискретизації сценарних зображень, тип яких швидко змінюється.

Список використаних джерел:

1. Ізонін І. В. Метод збільшення роздільної здатності зображень на основі штучних нейронних мереж / І. В. Ізонін, Р. О. Ткаченко, Д. Д. Пелешко, Д. А. Батюк // Вісник Львівського державного університету безпеки життєдіяльності. — 2015. — № 11. — С. 47–56.
2. Izonin I. Learning-based image super-resolution using weight coefficients of synaptic connections / I. Izonin, R. Tkachenko, D. Peleshko, T. Rak, D. Batiuk // Computer science and information technologies: proc. of X intern. scien. and techn. conf., 14–17 Sep. 2015 y., Lviv, Ukraine. — Lviv : Lviv Polytechnic Publishing House, 2015. — P. 25–29.
3. Рашкевич Ю. М. Нейроподібні методи, алгоритми та структури обробки сигналів і зображень у реальному часі : монографія / Ю. М. Рашкевич, Р. О. Ткаченко, І. Г. Цмоць, Д. Д. Пелешко. — Львів, 2014. — 256 с.
4. Tytyk R. Neural Network Technology for Image Downscaling [Electronic edition] / R. Tytyk, R. Tkachenko, I. Izonin, K. Hrytsyk // Litteris et Artibus: proc. of 5 intern. youth science forum, 26–28 Nov. 2015 y., Lviv, Ukraine. — Lviv : Lviv Polytechnic Publishing House, 2015. — P. 72–74.

In this paper, the method of image oversampling with a target coefficient of decrease based on machine learning is developed. Posted implementation of algorithmic synthesis procedure of weighting coefficients matrix of synaptic connections. The optimum parameters of neural networks to work in a learning mode for solving the problem. The numerical and graphical results by oversampling method developed in different images are shown.

Key words: *image, oversampling, machine learning.*

Отримано: 25.04.2016

УДК 681.3.06

В. С. Цапар, канд. техн. наук,

О. А. Жученко, канд. техн. наук.

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ІМІТАЦІЙНОЇ МОДЕЛІ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМУ СКЛОВАРНОЇ ПЕЧІ

Робота присвячена дослідженню імітаційної моделі теплового режиму роботи скловарної печі. На базі математичної моделі отримано імітаційну модель скловарної печі. Наведені отримані результати імітаційного моделювання у вигляді температурного розподілу у декількох перерізах скловарної печі. Проведена перевірка на адекватність котра показала відповідність розробленої моделі реальному об'єкту.

Ключові слова: *скловарна піч, математична модель, Fluent, температурні поля.*

Вступ. Скло є матеріалом, який широко застосовується практично в усіх сферах людської діяльності — у промисловості та сільському господарстві, у будівництві та на транспорті, у побуті та медицині — завдяки своїм унікальним якостям: прозорості, твердості, хімічній стійкості до активних хімічних реагентів, відносної дешевизні виробництва. Без нього неможливо виготовити оптичні прилади, телевізори, космічні кораблі та інше. Попри успіхи у створенні нових матеріалів широкого призначення, скло залишається одним із найбільш поширених матеріалів, що застосовуються на практиці.

Скловарна піч є основним агрегатом заводу із виготовлення скляних виробів. У скловарній печі одержують скломасу шляхом плавлення суміші шихти та склобою. В залежності від того, яка саме скляна продукція виготовляється, скловарні печі можуть мати різноманітні конструкції, а шихта може відрізнитись хімічним складом. Також від найменування виробів залежить і тепловий режим роботи скловарної печі, який є визначальним для забезпечення необхідної якості виробів.

Постановка задачі. Щоб забезпечити безперервне функціонування скловарної печі у потрібному технологічному режимі, який забезпечував би високу якість готової продукції, необхідна ефективна система керування процесом скловаріння. Розробка такої системи керування пов'язана із значними труднощами, викликаними необхідністю проведення досліджень на працюючій печі, що, як правило, призведе до відхилення технологічного режиму від регламентного і, як результат, може призвести до отримання бракованої продукції та, як крайній випадок, до виникнення аварійних ситуацій, а значить, суттєвих втрат виробництва, що є неприпустимим.

Для того, щоб уникнути цього, єдиною альтернативою фактично є проведення дослідження скловарної печі та її системи керування, використовуючи метод математичного моделювання.

Отже, виникає актуальна науково-технічна задача створення і дослідження імітаційної моделі теплового режиму роботи скловарної печі.

Виклад основного матеріалу. Скловарна піч — складний технологічний об'єкт. У печі одночасно відбуваються хімічні та фізичні перетворення, паралельно протікають всі три види теплообміну, при чому як у газовому середовищі, так і у рідкій скломасі. Процес скловаріння характеризується багатьма взаємно пов'язаними між собою параметрами, які впливають як один на одного, так і на кількість та якість готової продукції в цілому. У зв'язку з цим імітаційне моделювання скловарної печі з урахуванням усіх фізико-хімічних процесів, які в ній відбуваються — неймовірно складна науково-технічна задача. Як показав аналіз відомих математичних та імітаційних моделей [1, с. 136–172; 2, с. 450–459; 3, с. 129–137], дана задача ще не повністю розв'язана.

За основу імітаційної моделі взято математичну модель наведену у [4, с. 32–37]. Розробка імітаційної моделі теплового режиму роботи скловарної печі проводилась у програмному пакеті ANSYS FLUENT.

Першим етапом розробки імітаційної моделі теплового режиму роботи скловарної печі є розробка геометрії об'єкта що моделюється. За допомогою ANSYS FLUENT була розроблена спрощена геометрична модель скловарної печі.

Для чисельного розв'язку даної моделі необхідно розбити її на кінцеві об'єми. У даній роботі було використано розбиття за допомогою тетраедрів із стороною $8 \cdot 10^{-2}$ м, зважаючи на геометричні розміри печі $9 \cdot 15 \cdot 2,6$ м, дане розбиття є достатньо детальним, подальше зменшення призводить до значного зростання часу обчислень.

У результаті моделювання були отримані наступні температурні розподіли, котрі наведені на рис. 1–4.

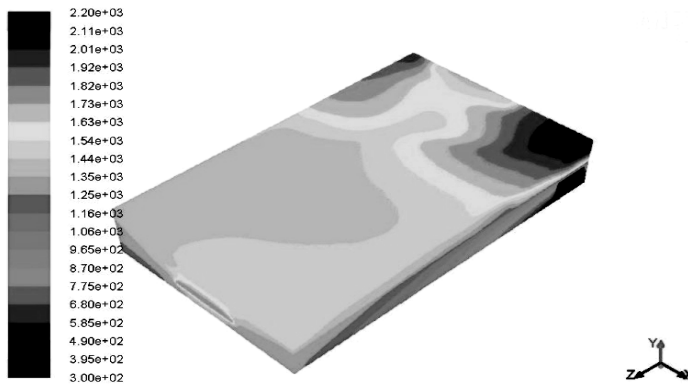


Рис. 1. 3D модель температурного розподілу у скловарній печі



Рис. 2. Температурний розподіл у газовому просторі скловарної печі



Рис. 3. Температурний розподіл у скломасі

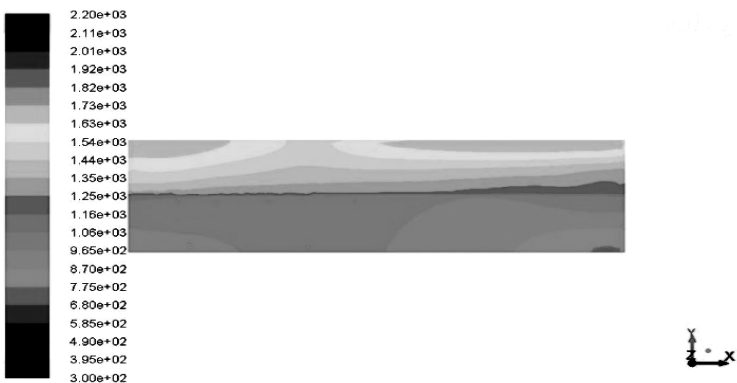


Рис. 4. Температурний розподіл поперечного перерізу скловарної печі на відстані 5м від початку печі

Дослідження адекватності імітаційної моделі. Отримана модель дозволяє визначати динаміку зміни температури у будь якій точці даної печі. Для оцінки працездатності даної моделі було проведено дослідження її адекватності.

Для проведення подальших досліджень системи керування процесу скловаріння методом імітаційного моделювання використання математичної моделі цього процесу замість самого процесу можливе при умові адекватності моделі реальному об'єкту в усіх режимах роботи, що досліджуються. Для об'єктивного вирішення питання про адекватність чи неадекватність необхідно мати кількісну оцінку ступеня адекватності моделі реальному об'єкту, яка може бути різною у залежності як від конкретного завдання, так і від ступеня вивченості та формалізації об'єкта управління, що розглядається [5].

У даній роботі скористаємося двома статистичними критеріями для перевірки адекватності імітаційної моделі скловарної печі — критерієм Стьюдента та критерієм Фішера.

Для перевірки на адекватність розробленої імітаційної моделі було проведено спостереження за двома вихідними змінними, що безпосередньо вимірюються на діючій печі Гостомельського скловарного заводу, протягом 100 годин:

T_{s1} — температура у точці «Склепіння 1».

T_{pr} — температура у точці «Проток».

В результаті спостережень було отримано по 100 значень для кожної змінної, відповідні часові ряди зображені на рис. 5–6.

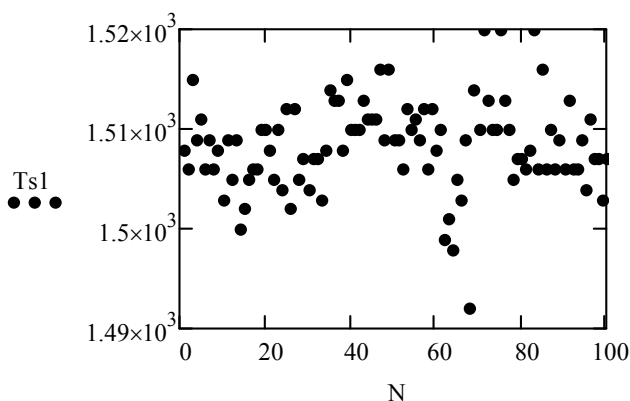


Рис. 5. Часовий ряд значень температури у точці «Склепіння 1» під час експерименту

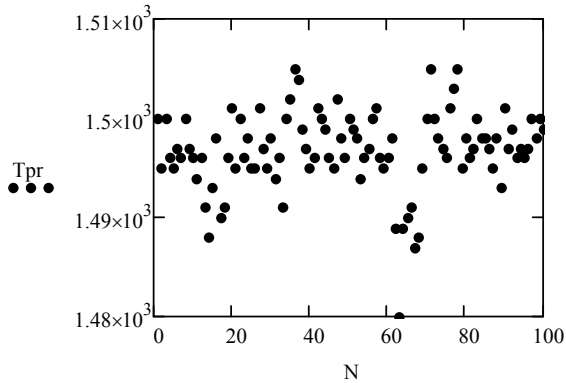


Рис. 6. Часовий ряд значень температури у точці «Проток» під час експерименту

Визначаємо точкові оцінки математичних сподівань
 Для температури у точці «Склепіння 1»: $M_Ts1 = 1508.43$.

Для температури у точці «Проток»: $M_Tpr = 1496.75$.

Визначимо точкові оцінки дисперсій.

Для температури у точці «Склепіння 1»: $S2_Ts1 = 20.3$.

Для температури у точці «Проток»: $S2_Tpr = 16.27$.

Визначимо точкові оцінки середніх квадратичних відхилень.

Для температури у точці «Склепіння 1»: $S_Ts1 = 4.5$.

Для температури у точці «Проток»: $S_Tpr = 4.03$.

Та ж сама процедура була проведена і з математичною моделлю печі, в результаті чого було отримано по 100 відгуків моделі для кожної змінної, відповідні часові ряди зображені на рис. 7–8.

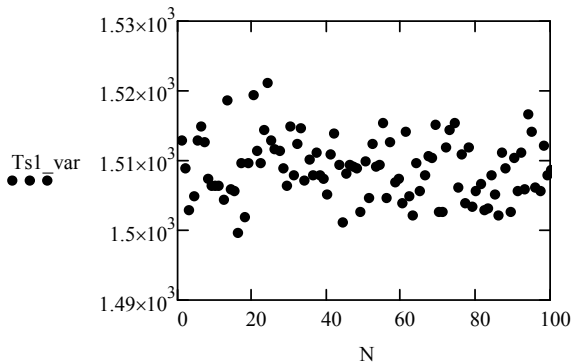


Рис. 7. Часовий ряд значень температури у точці «Склепіння 1» під час моделювання

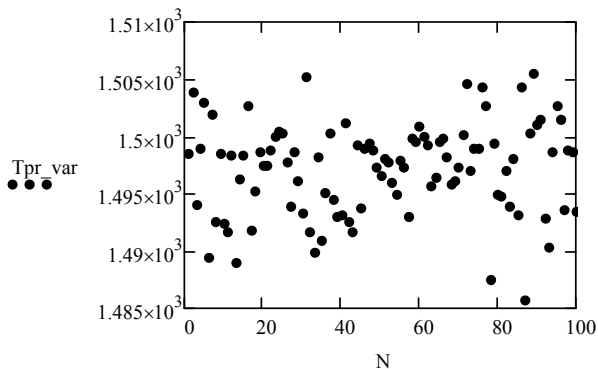


Рис. 8. Часовий ряд значень температури у точці «Проток» під час моделювання

Визначаємо точкові оцінки математичних сподівань.

Для температури у точці «Склепіння 1»:

$$M_Ts1_mod = 1508.91.$$

Для температури у точці «Проток»:

$$M_Tpr_mod = 1497.21.$$

Визначимо точкові оцінки дисперсій

Для температури у точці «Склепіння 1»:

$$S2_Ts1_mod = 18.65.$$

Для температури у точці «Проток»:

$$S2_Tpr = 16.19.$$

Визначимо точкові оцінки середніх квадратичних відхилень

Для температури у точці «Склепіння 1»:

$$S_Ts1 = 4.5.$$

Для температури у точці «Проток»:

$$S_Tpr = 4.02.$$

Для перевірки адекватності за першим способом для температури у точці «Склепіння 1», визначимо величину t .

$$t = \frac{|M_Ts1 - M_Ts1_mod|}{\sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N1}\right) \cdot \frac{(N-1) \cdot S2_Ts1 + (N1-1) \cdot S_Ts1_mod}{N + N1 - 2}}} = 1.02$$

За таблицею двосторонньої критичної області критерію Стьюдента було визначено його критичне значення $t_{kr} = 1.6849$.

$$t < t_{kr}.$$

Для перевірки адекватності за першим способом для температури у точці «Проток», визначимо величину t .

$$t = \frac{|M_Tpr - M_Tpr_mod|}{\sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N1}\right) \cdot \frac{(N-1) \cdot S2_Tpr + (N1-1) \cdot S_Tpr_mod}{N + N1 - 2}}} = 1.01.$$

За таблицею двосторонньої критичної області критерію Стьюдента було визначено його критичне значення $t_{kr} = 1.6849$.

$$t < t_{kr}.$$

Для перевірки адекватності за другим способом для температури у точці «Склепіння 1», визначимо величину вибіркового значення критерію Фішера.

$$F = \frac{S2_Tsl}{S2_Tsl_g} = \frac{20.48}{20.3} = 1.008,$$

де $S2_Tsl_g$ — дисперсія генеральних сукупностей відгуків моделі

Використовуючи інформацію про степені вільності $k_{больш}$, $k_{меньш}$ і рівень значущості визначають критичне значення цього критерію $F_{kr} = 1.69$.

$$F < F_{kr}.$$

Для перевірки адекватності за другим способом для температури у точці «Проток», визначимо величину вибіркового значення критерію Фішера.

$$F = \frac{S2_Tpr}{S2_Tpr_g} = \frac{16.41}{16.27} = 1.008,$$

де $S2_Tpr_g$ — дисперсія генеральних сукупностей відгуків моделі

Використовуючи інформацію про степені вільності $k_{больш}$, $k_{меньш}$ і рівень значущості визначають критичне значення цього критерію $F_{kr} = 1.69$.

$$F < F_{kr}.$$

Отримані результати дослідження наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Результати перевірки адекватності математичної моделі

Критерії	Вихідні змінні (температури у точках):	
	T_{sl}	T_{pr}
Фішера	1,008	1,008
Стьюдента	1,02	1,01

Табличні значення критеріїв адекватності для обсягу вибірки $n = 100$ та рівня значущості $0,05$: $F_{kr} = 1,69$, $t_{kr} = 1,6849$.

Оскільки для усіх досліджуваних величин розрахункове значення критерію Стьюдента менше за критичне, то можна зробити висновок, що модель, яку ми отримали адекватна реальному об'єкту за гіпотезою про близькість математичних сподівань кожної k -ї компоненти моделі та реальної системи.

Оскільки для усіх досліджуваних величин розрахункове значення критерію Фішера менше за критичне, то можна зробити висновок, що модель, яку ми отримали адекватна реальному об'єкту за гіпотезою про однорідність двох дисперсій $S_k^{2,s}$ і $S_k^{2,g}$ для кожної k -ї компоненти.

Висновок. Досліджена у роботі імітаційна модель теплового режиму роботи скловарної печі дозволяє проводити дослідження систем керування без ризику значних економічних втрат. Дослідження на адекватність показало можливість застосування даної імітаційної моделі для розробки реальних систем керування із необхідною точністю. В подальшому планується розробка імітаційних моделей основних різновидів скловарних печей.

Список використаних джерел:

1. Дзюзер В. Я. Математическая модель гидродинамики и внутреннего теплообмена // Проектирование энергоэффективных стекловаренных печей / В. Я. Дзюзер, В. С. Швыдкий ; общ. ред. В. Я. Дзюзер . — М. : Теплотехник, 2009 . — С. 136–172 .
2. Abbassi A. Numerical Simulation and Experimental Analysis of an Industrial Glass Melting Furnace / A. Abbassi, Kh. Khoshmanesh // Appl. Thermal Eng. — 2008. — Vol. 28 [5–6]. — P. 450–459.
3. Gershtein V. Yu. Mathematical model of complex heat transfer in the industrial furnace / V. Yu. Gershtein // Thermophysics and Aeromechanics. — 1995. — Vol. 2, № 2. — P. 129–137.
4. Жученко О. А. Математичне моделювання основних фізико-хімічних процесів при виробництві скла / А. І. Жученко, В.С. Цапар // Східно-Європейський журнал передових технологій. — 2014. — №1/3 (73). — С. 32–37.
5. Остапенко Ю. О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування / Ю. О. Остапенко. — К. : Задруга, 1999. — 424 с.

This work is devoted to the simulation model of thermal conditions of the glass melting furnace. Based on the mathematical model simulation model glass furnace. These results of simulation modeling as the temperature distribution in several sections of the furnace. The adequacy of the audit which showed compliance of the model of real objects.

Key words: *glass furnace, mathematical model, Fluent, temperature fields.*

Отримано: 19.04.2016

УДК 627.324.2/3:532.72

Ю. В. Чуй, аспірант,

П. М. Мартинюк, д-р техн. наук, професор

Національний університет водного господарства
та природокористування, м. Рівне

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТОНКИХ НАПІВПРОНИКНИХ ВКЛЮЧЕНЬ НА ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ В ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

Сформовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунтів із врахуванням наявних тонких напівпроникних включень. Для чисельного розв'язання двовимірної задачі використано метод скінченних елементів. Проведено ряд чисельних експериментів та виявлено вплив теплосолеперенесення на розподіл надлишкових напорів у неоднорідних ґрунтах.

Ключові слова: *фільтраційна консолідація, умови спряження, напівпроникне включення, метод скінченних елементів.*

Вступ. У природі ґрунт є неоднорідним пористим середовищем, в якому твердий скелет може містити тонкі неоднорідності [6, 11, 12]. Напівпроникне включення здатне спрацьовувати як природний фільтр: пропускати воду і лише частково пропускати хімічні елементи, асоційовані в ній. Глинисті ґрунти володіють властивостями напівпроникних мембран [15]. При цьому в природних геологічних неоднорідних формаціях спостерігаються стрибки напорів при переході через тонкі включення з глинистих ґрунтів. Звідси виникає необхідність враховувати напівпроникні властивості таких включень при побудові математичних моделей фільтраційних процесів в такого роду ґрунтових масивах для підвищення їх (математичних моделей) адекватності.

Актуальність дослідження процесів фільтрації, фільтраційної консолідації, теплосолеперенесення в неоднорідних середовищах зумовлюється необхідністю визначення стійкості гідротехнічних, промислових та цивільних споруд [8], в основах яких залягають ґрунти із напівпроникними включеннями. Також велике значення набуває дослідження процесів ущільнення основ поверхневих накопичувачів промислових і побутових стоків. В них глини використовуються як матеріал протифільтраційних екранів.

Дослідженню процесів в неоднорідних пористих середовищах присвячені праці таких авторів, як І. В. Сергієнко, В. В. Скопечкий, В. С. Дейнека, Т. J. S. Keijzer, М. Р. Петрик, Є. І. Воробієв [6, 10-12, 15-16].

У роботі А. Я. Бомби [1] досліджено фільтраційні процеси у неоднорідному анізотропному середовищі (тріщинувато-пористих ґрунтах). У роботі В. М. Булавацького [2] розглянуті неklasичні моделі процесу

фільтраційної консолідації деформівних пористих середовищ в умовах релаксаційної фільтрації порової рідини з урахуванням закону Дарсі.

У працях [13–14] побудовано математичні моделі, перша з яких описує процес напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами, а друга — процес напірної фільтрації у пористому середовищі з включеннями. Контакт між тілом і включенням є ідеальним, наявність додаткових джерел, стоків, неізотермічних, хіміко-біологічних чи міжфазних процесів не передбачається.

У роботі [9] моделювання фільтраційних потоків в області, яка містить непроникну межу, межу заданого тиску і напівпроникне включення зведено до розв'язування інтегральних рівнянь. При цьому під напівпроникним включенням розуміється ціла підобласть, в якій розміщено ґрунт з іншими фільтраційними характеристиками. В [4] побудовано математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах теплосолеперенесення при наявності тонких включень, які володіють властивостями напівпроникних мембран.

Однак до цього часу залишилось невирішеним ряд проблем. Зокрема, не враховано вплив процесів теплосолеперенесення на фільтраційну консолідацію у ґрунтах із напівпроникними включеннями для двовимірною випадку. Цим і визначається ціль даної статті.

Постановка проблеми та її математична модель. Нехай задано область Ω , яка складається з однорідного ґрунту та містить тонкі напівпроникні включення. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що таке включення одне (γ^* на рис. 1).

Математична модель двовимірної задачі процесу фільтраційної консолідації ґрунту в області Ω з урахуванням впливу перенесення солей в неізотермічному режимі буде описуватись наступною крайовою задачею [3, 4]:

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} [\operatorname{div}(K\nabla h - v\nabla c - \mu\nabla T)] = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

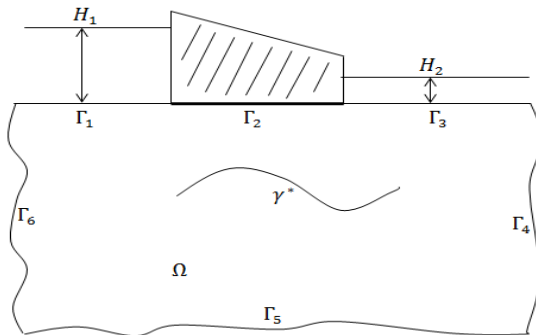


Рис. 1. Досліджувана область ґрунту з напівпроникним включенням

$$\operatorname{div}(D\nabla c + D_T \nabla T) - (u, \nabla c) - \gamma_1 (c - C_m) = n \frac{\partial c}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\lambda(c) \nabla T) - \rho c_\rho (u, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (3)$$

$$u = -K(c, T, e) \nabla h + \nu(c) \nabla c + \mu \nabla T, \quad (4)$$

$$(u, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (5)$$

$$h|_{(x,y) \in \Gamma_1} = H_1, \quad h|_{(x,y) \in \Gamma_3} = H_2, \quad (6)$$

$$(D\nabla c + D_T \nabla T - uc, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (7)$$

$$c|_{(x,y) \in \Gamma_1} = c_1, \quad c|_{(x,y) \in \Gamma_3} = c_2, \quad (8)$$

$$(\lambda(c) \nabla T - \rho c_\rho u T, n)|_{(x,y) \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6} = 0, \quad (9)$$

$$T|_{(x,y) \in \Gamma_1} = T_1, \quad T|_{(x,y) \in \Gamma_3} = T_2, \quad (10)$$

$$(u, n)_{\gamma^*}^\pm = -\frac{k_{\gamma^*}}{d} (h^+ - h^-) + \frac{\nu_{\gamma^*}}{d} (c^+ - c^-) + \frac{\mu_{\gamma^*}}{d} (T^+ - T^-), \quad (11)$$

$$(x, y) \in \gamma^*, t > 0$$

$$(q_c, n)_{\gamma^*}^\pm = (1 - \alpha) \left[(u, n)_{\gamma^*}^\pm - \frac{D_{\gamma^*}}{d} (c^+ - c^-) - \frac{D_T^{\gamma^*}}{d} (T^+ - T^-) \right], \quad (12)$$

$$(x, y) \in \gamma^*, t > 0,$$

$$(q_T, n)_{\gamma^*}^\pm = \rho c_\rho (u, n)_{\gamma^*}^\pm T^\pm - \frac{\lambda_{\gamma^*}}{d} (T^+ - T^-), (x, y) \in \gamma^*, t > 0, \quad (13)$$

$$[(u, n)]|_{\gamma^*} = 0, [(q_c, n)]|_{\gamma^*} = 0, [(q_T, n)]|_{\gamma^*} = 0, t > 0, \quad (14)$$

$$q_c = uc - D\nabla c - D_T \nabla T, \quad q_T = \rho c_\rho u T - \lambda(c) \nabla T, \quad (15)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad c(x, y, 0) = c_0(x, y), \quad T(x, y, 0) = T_0(x, y), \quad (16)$$

де h — напір; c — концентрація; T — температура; $K = K(c, T, e)$ — коефіцієнт фільтрації; ν — коефіцієнт хімічного осмосу; μ — коефіцієнт термічного осмосу; γ — питома вага порової рідини; e — коефіцієнт пористості ґрунту; ξ — коефіцієнт бічного тиску ґрунту; a — коефіцієнт стисливості ґрунту; u — вектор швидкості фільтрації; D — коефіцієнт конвективної дифузії; D_T — коефіцієнт термодифузії; C_m — концентрація граничного насичення; γ_1 — коефіцієнт швидкості масообміну; n — пористість ґрунту;

λ — коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ — густина порового розчину; c_ρ — питома теплоємність порового розчину; c_T — об'ємна теплоємність ґрунту; d — товщина напівпроникного включення; k^γ , v^γ , μ^γ , D^γ , D_T^γ , λ^γ — характеристики напівпроникного включення γ^* ; n — певним чином зорієнтований вектор напрямних косинусів нормалі до напівпроникного включення; $h_0(x, y)$, $c_0(x, y)$, $T_0(x, y)$, H_1 , H_2 , c_1 , c_2 , T_1 , T_2 — задані функції; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_6 = \Gamma$ — межа області Ω .

Чисельний розв'язок крайової задачі методом скінченних елементів (МСЕ). Нехай H_0 — простір вектор-функцій $s(x, y) = (s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y))$, кожна із компонент $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$, $s_3(x, y)$ яких належать простору Соболева $W_2^1(\Omega)$ окрім точок межі Γ та включення γ^* , і набуває нульових значень на тих межах області Ω , де, відповідно для функцій $h(x, y, t)$, $c(x, y, t)$, $T(x, y, t)$ задані граничні умови першого роду.

Домножуючи рівності (1)–(3) та кожен з початкових умов (16) на функції $(s_1(x, y); s_2(x, y); s_3(x, y)) \in H_0$ та проінтегрувавши одержані рівності по області Ω , після застосування формули Остроградського-Гауса, врахувавши граничні умови (5)–(10) та умови спряження (11)–(14), отримуємо

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1 dx dy + \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \left(\iint_{\Omega} (K(c, T, e) \nabla h - v(c) \nabla c - \mu \nabla T) \times \nabla s_1 dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} (k^\gamma [h] - v^\gamma [c] - \mu^\gamma [T]) [s_1] d\Gamma \right) = 0, \quad (17)$$

$$\iint_{\Omega} h(x, y, 0) s_1(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} h_0(x, y) s_1(x, y) dx dy, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & n \iint_{\Omega} \frac{\partial c}{\partial t} s_2 dx dy + \iint_{\Omega} (D \nabla c, \nabla s_2) dx dy + \iint_{\Omega} (D_T \nabla T, \nabla s_2) dx dy + \\ & + \iint_{\Omega} (u, \nabla c) s_2 dx dy + \gamma_1 \iint_{\Omega} c s_2 dx dy + (1-\alpha) \times \int_{\gamma^*} \left(\frac{D^\gamma}{d} [c] + \frac{D_T^\gamma}{d} [T] - \right. \\ & \left. - (u, n)_{\gamma^*}^- c^- \right) [s_2] + (u, n)_{\gamma^*}^- [c s_2] d\Gamma = \gamma_1 C_m \iint_{\Omega} s_2 dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\iint_{\Omega} c(x, y, 0) s_2(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} c_0(x, y) s_2(x, y) dx dy, \quad (20)$$

$$c_T \iint_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} s_3 dx dy + \iint_{\Omega} (\lambda(c) \nabla T, \nabla s_3) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} \left(\frac{\lambda \gamma^*}{d} [T] - \rho c_{\rho} \times \right. \quad (21)$$

$$\left. \times (u, n)_{\gamma^*}^- T^- \right) [s_3] + \rho c_{\rho} (u, n)_{\gamma^*}^- [Ts_3] d\Gamma + \rho c_{\rho} \iint_{\Omega} (u, \nabla T) s_3 dx dy = 0,$$

$$\iint_{\Omega} T(x, y, 0) s_3(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} T_0(x, y) s_3(x, y) dx dy. \quad (22)$$

Наближений узагальнений розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} (\hat{h}(x, y, t); \hat{c}(x, y, t); \hat{T}(x, y, t)) = & \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) N_i^{(1)}(x, y); \sum_{j=1}^n b_j(t) N_j^{(2)}(x, y); \right. \\ & \left. \sum_{s=1}^n r_s(t) N_s^{(3)}(x, y) \right), \end{aligned}$$

де $N^i = (N_i^{(1)}; 0; 0)$; $N^j = (0; N_j^{(2)}; 0)$; $N^k = (0; 0; N_k^{(3)})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, n}$ — базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору $M_0 \subset H_0$, які розривні на включенні [6, 11, 12].

Для розв'язання задачі методом скінченних елементів покриємо область скінченноелементною (наприклад, трикутною) сіткою із подвійною нумерацією вузлів на включенні.

Підставляючи вигляд наближеного розв'язку в рівності (17)–(22), отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора $U(t) = (A(t); B(t); R(t))$

$$M^{(1)} \frac{dA}{dt} + L^{(1)} A(t) = G^{(1)} B(t) + G'^{(1)} R(t) + F^{(1)}, \quad (23)$$

$$M^{(2)} \frac{dB}{dt} + L^{(2)} B(t) = G^{(2)} R(t) + F^{(2)}, \quad (24)$$

$$M^{(3)} \frac{dR}{dt} + L^{(3)} R(t) = F^{(3)}, \quad (25)$$

$$M^{(1)} A^{(0)} = \tilde{F}^{(1)}, M^{(2)} B^{(0)} = \tilde{F}^{(2)}, M^{(3)} R^{(0)} = \tilde{F}^{(3)}, \quad (26)$$

де

$$m_{ij}^{(1)} = \iint_{\Omega} N_i^{(1)} N_j^{(1)} dx dy, f_i^{(1)} = 0, \tilde{f}_i^{(1)} = \iint_{\Omega} \tilde{h}_0 N_j^{(1)} dx dy,$$

$$\begin{aligned}
 l_{ij}^{(1)} &= \frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \iint_{\Omega} (K \nabla N_j^{(1)} \nabla N_i^{(1)}) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} k^{\gamma^*} [N_j^{(1)}] [N_i^{(1)}] d\Gamma, \\
 g_{ij}^{(1)} &= \frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \iint_{\Omega} (v \nabla N_j^{(2)} \nabla N_i^{(1)}) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} v^{\gamma^*} [N_j^{(2)}] [N_i^{(1)}] d\Gamma, \\
 g_{ij}^{(1')} &= \frac{(1+\bar{e})(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \iint_{\Omega} (\mu \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(1)}) dx dy + \frac{1}{d} \int_{\gamma^*} \mu^{\gamma^*} [N_j^{(3)}] [N_i^{(1)}] d\Gamma, \\
 m_{ij}^{(2)} &= n \iint_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx dy, \quad m_{ij}^{(3)} = c_T \iint_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx dy, \\
 l_{ij}^{(2)} &= \iint_{\Omega} \left((D \nabla N_j^{(2)}, \nabla N_i^{(2)}) + N_i^{(2)} (u, \nabla N_j^{(2)}) + \gamma_1 N_i^{(2)} N_j^{(2)} \right) dx dy + \\
 &+ (1-\alpha) \int_{\gamma^*} \left\{ \left(\frac{D^{\gamma^*}}{d} [N_j^{(2)}] - (u, n)_{\gamma^*}^- N_j^{(2)-} \right) [N_i^{(2)}] + (u, n)_{\gamma^*}^- [N_j^{(2)} N_i^{(2)}] \right\} d\Gamma, \\
 g_{ij}^{(2)} &= - \iint_{\Omega} (D_T \nabla N_j^{(3)} \nabla N_i^{(2)}) dx dy - (1-\alpha) \int_{\gamma^*} \frac{D_T^{\gamma^*}}{d} [N_j^{(3)}] [N_i^{(2)}] d\Gamma, \\
 f_i^{(2)} &= \iint_{\Omega} \gamma_1 N_i^{(2)} C_m dx dy, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \iint_{\Omega} N_i^{(2)} N_j^{(2)} dx dy, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = \iint_{\Omega} c_0 N_i^{(2)} dx dy, \\
 l_{ij}^{(3)} &= \iint_{\Omega} \left((\lambda \nabla N_j^{(3)}, \nabla N_i^{(3)}) + \rho c_{\rho} N_i^{(3)} (u, \nabla N_j^{(3)}) \right) dx dy + \frac{1}{d} \times \\
 &\times \int_{\gamma^*} \left\{ \left(\frac{\lambda^{\gamma^*}}{d} [N_j^{(3)}] - \rho c_{\rho} (u, n)_{\gamma^*}^- N_j^{(3)-} \right) [N_i^{(3)}] + \rho c_{\rho} (u, n)_{\gamma^*}^- [N_j^{(3)} N_i^{(3)}] \right\} d\Gamma, \\
 f_i^{(3)} &= 0, \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \iint_{\Omega} N_i^{(3)} N_j^{(3)} dx dy, \quad \tilde{f}_i^{(3)} = \iint_{\Omega} T_0 N_i^{(3)} dx dy.
 \end{aligned}$$

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (23)–(25) отримуємо за допомогою схеми Кранка-Ніколсона [7]

$$\begin{aligned}
 M^{(3)} \left(\frac{R^{(j+1)} - R^{(j)}}{\tau} \right) + L^{(3)} (A^{(j+1/2)}, B^{(j+1/2)}, R^{(j+1/2)}) R^{(j+1/2)} &= \\
 &= F^{(3)(j+1/2)}, \\
 M^{(2)} \left(\frac{B^{(j+1)} - B^{(j)}}{\tau} \right) + L^{(2)} (A^{(j+1/2)}, B^{(j+1/2)}, R^{(j+1/2)}) B^{(j+1/2)} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G^{(2)}R^{(j+1/2)} + F^{(2)(j+1/2)}, \\
M^{(1)}\left(\frac{A^{(j+1)} - A^{(j)}}{\tau}\right) + L^{(1)}(B^{(j+1/2)}, R^{(j+1/2)})A^{(j+1/2)} &= \\
&= G^{(1)}B^{(j+1/2)} + F^{(1)(j+1/2)},
\end{aligned}$$

де $\tau = \frac{t_0}{m_1}$, $j = 0, 1, 2, \dots, m_1 - 1$, $A^{(j)}$ — значення елементів при $t = \tau j$,

$j = \overline{0, m_1 - 1}$; $A^{(j+1/2)} = \frac{1}{2}(A^{(j+1)} + A^{(j)})$. Аналогічні позначення стосуються інших векторів та матриць.

Отримана схема є нелінійною відносно шуканих функцій на часових шарах $(j+1)$, $j = \overline{0, m_1 - 1}$. Тому для її розв'язування потрібно застосовувати ітераційні методи. Для уникнення цього можна використати схему предикатом-коректор [11].

Результати чисельних експериментів. Розглянемо прямокутну область ґрунту з координатами вершин $(-20 \text{ м}; 0 \text{ м})$, $(20 \text{ м}; 0 \text{ м})$, $(20 \text{ м}; 10 \text{ м})$, $(-20 \text{ м}; 10 \text{ м})$, із напівпроникним включенням у формі ламаної лінії, яка проходить через точки $(-12 \text{ м}; 5 \text{ м})$, $(2 \text{ м}; 6 \text{ м})$, $(12 \text{ м}; 5 \text{ м})$ з параметрами: $e = 0.7$, $\xi = 0.75$, $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$, $\gamma = 10^4 \text{ доба}^{-1}$, $q = 2 \cdot 10^5 \text{ м}$, $\nu_{11} = \nu_{22} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $\mu_{11} = \mu_{22} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}$, $k^{\gamma*} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}/\text{доба}$, $\nu^{\gamma*} = 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $\mu^{\gamma*} = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $d = 0.2 \text{ м}$, $C_m = 350 \text{ г}/\text{літр}$, $D^{\gamma*} = 0.0002 \text{ м}^2/\text{доба}$, $\alpha = 0.1$, $\rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c_\rho = 4.2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$, $\lambda = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $\lambda^{\gamma*} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $H_1 = 8 \text{ м}$, $H_2 = 2 \text{ м}$, $c_1 = 350 \text{ г}/\text{літр}$, $T_1 = 30^0 \text{ С}$, $c_0 = 5 \text{ г}/\text{літр}$, $T_1 = 20^0 \text{ С}$, $\tau = 10 \text{ діб}$. Експериментальні залежності для коефіцієнта фільтрації та їх апроксимації взято з роботи [5].

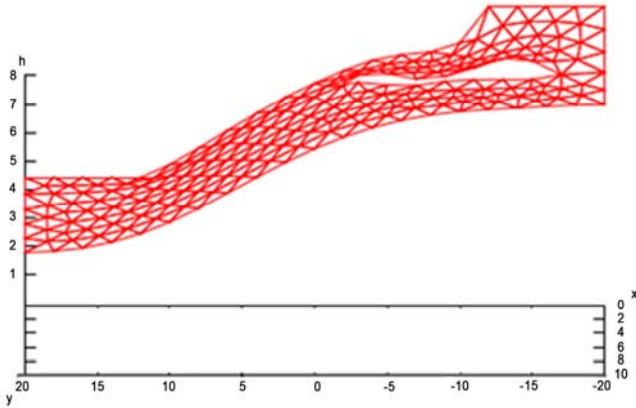


Рис. 2. Розподіл напорів при $t = 3600$ діб з урахуванням теплосолеперенесення (м)

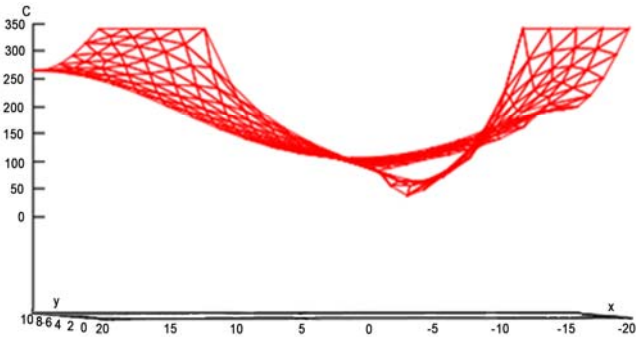


Рис. 3. Розподіл концентрації солей при $t = 3600$ діб з урахуванням теплосолеперенесення (г/літр)

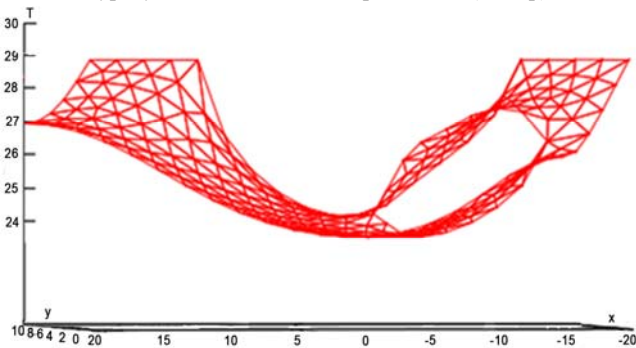


Рис. 4. Розподіл температури при $t = 3600$ діб з урахуванням теплосолеперенесення ($^{\circ}\text{C}$)

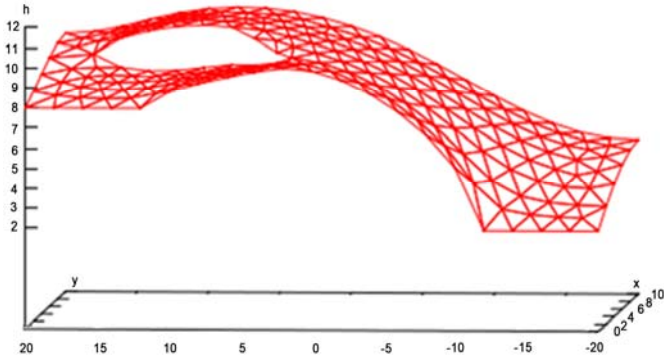


Рис. 5. Розподіл напорів при $t = 3600$ діб без урахування теплосолеперенесення (м)

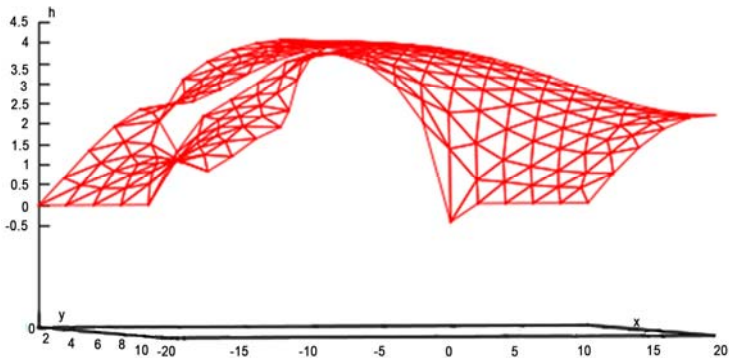


Рис. 6. Різниця розподілів напорів при $t = 3600$ діб без врахування та з урахуванням впливу перенесення солей (м)

З вищенаведених графіків (рис. 2–6) видно, як впливає тепло-солеперенесення на розподіл напорів, зокрема в околі розміщення напівпроникного включення. В даному випадку, якщо враховувати процес теплосолеперенесення, то процес фільтраційної консолідації прискорюється (поле надлишкових напорів розсіюється швидше. На включенні спостерігається стрибок напорів, причому спочатку він від'ємний, а на часовому шарі $t = 3600$ діб він стає додатнім і з часом збільшується, наприклад, для вузла $(-11,5; 5,5)$ стрибок напору на часовому проміжку $t = 3600$ діб дорівнює 0,419 м. При збільшенні параметра α , який відповідає за ступінь ідеальності напівпроникного включення, стрибок напору збільшується. Це можна пояснити тим, що чим більше α , тим менше проходить солей через напівпроникне включення, тобто солі більше накопичуються над верхньою межею включення і зростає вплив осмотичної фільтрації.

Висновки. Отже, нами сформовано математичну модель фільтраційної консолідації для ґрунтів з напівпроникними включеннями в двовимірному випадку. Показано вплив тепломасоперенесення та параметрів напівпроникного включення на розподіл напорів, солей та температури. Проведено ряд чисельних експериментів.

В подальшому планується розгляд даної задачі у тривимірній постановці, проведення теоретичних досліджень якісних характеристик отриманих наближених розв'язків.

Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Моделювання квазіідеальних полів для тонких просторово викривлених анізотропних пластів / А. Я. Бомба, А. В. Теремус // Доп. НАН України. — 2011. — № 10. — С. 37–43.
2. Булавацький В. М. Математические модели консолидации водонасыщенных пористых сред и нагруженные дифференциальные уравнения / В. М. Булавацький // Компьютерная математика. — 2011. — № 2. — С. 13–20.
3. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
4. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах : монографія / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 416 с.
5. Власюк А. П. Експериментальні залежності характеристик ґрунтів від впливу техногенних факторів та їх обробка за методом найменших квадратів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. В. Козюк // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. — 2007. — Вип. 1(37). — С. 268–281.
6. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
7. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. — М. : Мир, 1986. — 318 с.
8. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. — М. : Высш. школа, 1985. — 352 с.
9. Никольский Д. Н. Математическое моделирование плоских фильтрационных течений в областях с границами и полупроницаемыми включениями / Д. Н. Никольский // Ученые записи Орловского государственного университета. — 2010. — № 4. — С. 7–11.
10. Петрик М. Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації в неоднорідних багатокомпонентних циліндричних дисперсних мікропористих середовищах / М. Р. Петрик, В. С. Дейнека, Є. І. Воробієв // Комп'ютерна математика. — 2013. — № 1. — С. 37–45.
11. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
12. Сергієнко І. В. Інформаційна технологія дослідження процесів в багатокомпонентних ґрунтових середовищах та оптимальне керування їх ста-

- нами / І. В. Сергієнко, В. С. Дейнека // Наука та інновації. — 2005. — Т. 1, № 3. — С. 34–50.
13. Слупко О. М. Чисельне дослідження процесу напірної фільтрації в середовищі з тонкими каналами / О. М. Слупко, Я. Г. Савула, Л. М. Дяконюк // Математичні машини і системи. — 2011. — № 2. — С. 137–142.
 14. Слупко О. М. Комп'ютерне моделювання процесу напірної фільтрації у пористому середовищі з включеннями / О. М. Слупко, Я. Г. Савула, Т. І. Мандзак, Л. М. Дяконюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. — 2010. — Вип. 4. — С. 180–187.
 15. Keijzer Th. J. S. Chemical osmosis in natural clayey materials / Th. J. S. Keijzer // Geologica Ultraiectina. — 2000. — № 196. — 152 p.
 16. Skopetskii V. V. Mathematical modeling of filtration consolidation of water-saturated randomly inhomogeneous soil masses / V. V. Skopetskii, L. V. Volokh // Cybernetics and System Analysis. — 2008. — Vol. 44, № 1. — P. 68–77.

The mathematical model of the filtration consolidation of soil with taking into account available thin semipermeable inclusions has been formed. For the numerical solution of the problem has been used the finite element method. Number of numerical experiments has been conducted and influence of heat and salt transfer to distribution of excess pressures in the inhomogeneous soils has been detached.

Key words: *filtration consolidation, matching conditions, a semipermeable inclusion, method of finite element.*

Отримано: 26.04.2016

УДК 519.7

О. В. Щирба

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ФАЗОВИХ ТРАЕКТОРІЙ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ В УМОВАХ ЗАХИСНИХ МАНЕВРІВ

Розглядаються задачі побудови математичних моделей для обчислення та оптимізації фазових траєкторій ЛА із оптимізованими маневрами.

Ключові слова: *оптимальне керування, моделювання динамічних систем.*

Вступ. Математично-комп'ютерні методи моделювання і оптимізації є ефективним інструментарієм для підвищення надійності та ефективності керованих систем. Математична модель керованого ЛА включає залежність його траєкторії від кутів атаки та ковзання і від

швидкісних напорів та сили тяги, що визначається як реактивною витратою палива так і термодинамічними параметрами атмосфери. Збурення атмосфери та геометричні деформації ЛА призводять до локальних відхилень кутів атаки, відхилень вектора тяги реактивного двигуна та похибок датчиків навігаційної системи. Основні труднощі у побудові оптимального керування пов'язані із нелінійністю керованих систем, їх великою розмірністю, фазовими обмеженнями, неповнотою даних про параметри моделей та наявністю реальних збурень. Це змушує спрощувати постановку оптимізаційної задачі за допомогою апроксимації шуканих керувань у адекватно вибраних спрощених класах параметричних функцій. Успішному відшукуванню адекватного класу параметричної функції керування допомагає поглиблене теоретичне дослідження властивостей оптимального керування у конкретній задачі. Наприклад, побудова оптимального керування зводиться до розв'язання відповідно спрощеної оптимізаційної задачі відшукування оптимальних значень параметрів керування у вибраному класі параметричних функцій. Методами розв'язуючих операторів задача побудови оптимального керування зводиться до простіших задач оптимізації керувань, які не включають фазових траєкторій керованих системи. Для обчислення траєкторії керованого ЛА можуть одночасно використовуватися декілька систем координат. Для розрахунку траєкторії польоту ракет із великою дальністю польоту використовують геоцентричні системи координат. Для розрахунку руху ЛА на АДТ використовують зв'язані з Землею топоцентричні системи координат, початок яких знаходиться на поверхні Землі. Для обчислення аеродинамічних сил і моментів використовують зв'язану систему координат, яка жорстко зв'язана з характерними елементами конструкції ЛА і переміщується разом з ними. Початок зв'язаної системи координат збігається з центром мас ЛА, а осі спрямовані вздовж характерних елементів її конструкції. Швидкісна система координат належить до напівзв'язаних систем координат, являє собою прямокутну праву систему відліку, за допомогою якої визначають траєкторію польоту ЛА, при дії на нього аеродинамічних сил у цільних шарах атмосфери. На практиці вважають, що початок швидкісної системи координат збігається з центром мас ЛА.

Керування складними системами в реальних умовах неповних даних здійснюється за допомогою оптимізації математичних моделей, оптимізації стратегій керування та підвищення тактико-технічних характеристик ЛА [1–4]. Прикладом підвищення тактико-технічних характеристик є розробка бойових ракет МІМ-104 та ERINT для високо мобільної системи «Patriot» PAC-3, яка спроможна одночасно виявляти понад 100 повітряних цілей, неперервно супроводжувати вісім із них і одночасно здійснювати підготовку початко-

вих даних для пуску та наведення на кожну ціль до трьох керованих ракет ERINT або MIM-104 із дальністю перехоплення аеродинамічних цілей до 80 км., балістичних цілей до 24 км на висотах до 24 км. і на швидкостях понад 2200 м/сек. До задач оптимального керування ЛА належить відшукання керувань, які максимізують ймовірність досягнення цілей на заданих термінальних множинах.

Постановка задачі. Побудова оптимізованих траєкторій включає розв'язання ряду задач оптимального керування. У задачі 1 потрібно знайти керування $u(t)$, $t \in [t_0, T_1]$, яке максимізує відхилення

$$F(u, c) = (c, \bar{x}(T_1))$$

фазового стану ЛА $\bar{x}(T_1)$ у перший момент T_1 часу досягнення висоти радіо горизонту $h = H_1$ при заданих обмеженнях

$$\|V(T_1)\| \geq V_0$$

на швидкість $V(T_1)$ для вектора c із координатами $c_1 = \cos \alpha$, $c_3 = \sin \alpha$, та $c_i = 0$ для всіх інших значень i , для випадково вибраного значення кута α , рівномірно розподіленого на інтервалі $[0, 2\pi]$, та для значенням у момент часу t фазового стану $\bar{x}(t)$, що визначається трьома координатами центру мас $(x(t), y(t), z(t))$ і трьома координатами вектора швидкості

$$dx(t)/dt = V_x(t), \quad dy(t)/dt = V_y(t), \quad dz(t)/dt = V_z(t)$$

в інерційній системі координат із початком координат у точці старту, віссю OX направленою на горизонт цілі, віссю OY направленою вгору вертикально до площини горизонту та віссю OZ перпендикулярною до площини (OX, OY) , що доповнює систему до правої. Значення висоти радіо горизонту H_1 визначається тим, що на висотах $h < H_1$ ЛА залишається непомітним для радіолокаторів.

Максимізація $F(u, c)$ для заданого значення V_0 здійснюється при обмеженнях

$$y(T_1) = H_1, \quad \|V(T_1)\| \geq V_0.$$

У задачі 2 для заданого F_0 максимізуємо $F_y(T_1)$ при обмеженнях

$$y(T_1) = H_1, \quad F(u, c) = F_0, \quad V_x(T_1) = 0, \quad V_z(T_1) = 0.$$

У задачі 3 знаходимо керування на інтервалі часу $t \in [T_1, T_2]$ для досягнення у момент $t = T_2$ випадково вибраного із заданої термінальної множини X_2 стану x^T .

У задачах оптимальної швидкодії потрібно знайти керування, яке переводить керовану систему із заданого початкового фазового

стану $x(0)$ у заданий термінальний стан $x(T) = y(T)$ за мінімальний час $T > 0$, де $y(t)$ може бути ціллю рухомою.

Результати дослідження. Труднощі практичного розв'язання таких задач пов'язані із складними фазовими обмеженнями та складними обмеженнями на допустимі керування, що визначаються аеродинамічними характеристиками ракети і фізичними параметрами атмосфери та задаються таблицями даних натурних спостережень. Необхідний для побудови алгоритмів оптимального керування вектор прискорення

$$dV(t)/dt = (dV_x(t)/dt, dV_y(t)/dt, dV_z(t)/dt)$$

обчислюється за сумарною силою тяги двигуна ЛА та сил аеродинамічного опору $F(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ визначених у швидкісній системі координат, що задається віссю OX_1 у напрямку вектора швидкості $V(t)$, віссю OY_2 направленою вертикально вгору та віссю OZ_3 перпендикулярною до площини (OX_1, OY_1) , що доповнює систему координат до правої системи.

Для обчислення траєкторій над поверхнею Землі використовується геоцентрична система із початком координат у центрі мас Землі, а для обчислення траєкторій ракет між планетами Сонячної системи використовують геліоцентричну систему координат із початком координат у центрі мас Сонця. У геоцентричній абсолютній системі віссю O_0Y_0 є вісь обертання Землі спрямована на північ, вісь O_0Z_0 лежить у площині екватора і спрямована на точку весняного рівнодення, а вісь O_0X_0 перпендикулярна до осі O_0Y_0 і спрямована на схід.

Значення сумарної сили $F(t)$ на ділянках траєкторії у атмосфері залежить від атмосферного розподілу тиску, щільності і температури атмосфери, кутів $(\alpha(t), \beta(t))$ орієнтації ЛА відносно швидкісної системи координат, кутів $(\theta(t), \psi(t))$ орієнтації швидкісної системи координат відносно вибраної інерційної системи координат, матриці $M(t)$ переходу від швидкісної до інерційної системи координат,

$$M_{11} = \cos(\psi(t))\cos(\theta(t)), M_{12} = \cos(\psi(t))\sin(\theta(t)),$$

$$M_{13} = -\sin(\psi(t)), M_{21} = -\sin(\theta(t)), M_{22} = \cos(\theta(t)), M_{23} = 0,$$

$$M_{31} = \sin(\psi(t))\cos(\theta(t)), M_{32} = \sin(\psi(t))\sin(\theta(t)), M_{33} = \cos(\psi(t)),$$

маси $m(t)$ ракети та сили земного тяжіння $G(t)$,

$$F_x(t) = \cos(\beta(t))\cos(\alpha(t))P(t) - C_1(t),$$

$$F_y(t) = \cos(\beta(t))\sin(\alpha(t))P(t) + C_2(t)\alpha(t) / (\alpha^2(t) + \beta^2(t))^{-1/2},$$

$$F_z(t) = -\sin(\alpha(t))P(t) - C_2(t)\beta(t) / (\alpha^2(t) + \beta^2(t))^{-1/2},$$

$$dV(t)/dt = M^T(t)F(t)/m(t) + G(t).$$

Для обчислення траєкторій ЛА за заданими керуваннями використовується інерційна стартова система координат $OXYZ$ із початком координат у точці старту (на поверхні Землі), віссю OX направленою на лінію горизонту у напрямку на ціль (на термінальну точку), віссю OY направленою вертикально вгору і віссю OZ , яка доповнює інерційну систему координат до правої системи.

Нехай ЦМ ЛА знаходиться у точці з координатами (x, y, z) в інерційній системі координат $OXYZ$, а вектор швидкості ЛА $(V_x, V_y, V_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ дорівнює вектору \overline{OD} , визначеному точкою D із координатами

$$(V_x, V_y, V_z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

у стартовій системі координат $OXYZ$. Проекцію точки D на площину OXZ позначимо точкою A , проекцію на площину OXY — точкою C , а проекцію на координатну вісь OX — точкою B . Кут між вектором \overline{OD} і площиною OXY позначимо через ψ , а кут між вектором \overline{OC} і площиною OXZ позначимо через θ . У такому випадку координати вектора швидкості (V_x, V_y, V_z) у стартовій системі координат обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} V_z = \dot{z} &= -DC = -OD \cdot \sin \psi = -V \sin \psi, \\ V_x = \dot{x} &= OB = OC \cdot \cos \theta = OD \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta = V \cos \theta \cos \psi, \\ V_y = \dot{y} &= BC = OC \cdot \sin \theta = OD \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta = V \sin \theta \cos \psi. \end{aligned}$$

Аеродинамічні сили і моменти, які визначають фазову траєкторію ЛА, обчислюються у швидкісній системі координат, визначеній одиничними ортами $1_x, 1_y, 1_z$. Очевидно, орт 1_x є нормованим вектором швидкості, $\overline{1_x} = \frac{\overline{OD}}{|\overline{OD}|}$, із визначеними у стартовій системі координат:

$$\begin{aligned} pr_z \overline{1_x} &= pr_z \frac{\overline{OD}}{|\overline{OD}|} = \frac{\overline{CD}}{|\overline{OD}|} = \frac{-|\overline{OD}| \cdot \sin \psi}{|\overline{OD}|} = -\sin \psi, \\ pr_x \overline{1_x} &= pr_x \frac{\overline{OD}}{|\overline{OD}|} = \frac{\overline{OB}}{|\overline{OD}|} = \frac{|\overline{OD}| \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi}{|\overline{OD}|} = \cos \theta \cdot \cos \psi, \\ pr_y \overline{1_x} &= pr_y \frac{\overline{OD}}{|\overline{OD}|} = \frac{\overline{BC}}{|\overline{OD}|} = \frac{|\overline{OD}| \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi}{|\overline{OD}|} = \sin \theta \cdot \cos \psi. \end{aligned}$$

Отже, за відомих значень кутів θ і ψ координати вектора 1_x обчислюються за формулою

$$1_x = (\cos \theta \cdot \cos \psi, \sin \theta \cdot \cos \psi, -\sin \psi)^T.$$

Орт 1_y визначаємо як направлений вверх перпендикулярний до прямих OD та OC одиничний вектор 1_y , заданий у стартовій системі координатами

$$pr_x \bar{1}_y = -\sin \theta,$$

$$pr_y \bar{1}_y = \cos \theta,$$

$$pr_z \bar{1}_y = 0,$$

тобто,

$$1_y = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)^T,$$

а орт 1_z доповнює швидкісну систему координат до правої системи, тобто визначається у стартовій системі координатами

$$1_z = (\cos \theta \cdot \sin \psi, \sin \theta \cdot \sin \psi, \cos \psi)^T.$$

Беручи до уваги, що вектор прискорення \dot{V} дорівнює вектору рівнодійної сили $F = (F_x, F_y, F_z)$, поділеної на масу m , $\dot{V} = \frac{F}{m}$ отримуємо систему диференціальних рівнянь, що описує рух центра мас ЛА у стартовій системі координат:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_x, \quad \dot{y} = V_y, \quad \dot{z} = V_z, \\ \dot{V}_x &= \frac{F_x}{m}, \quad \dot{V}_y = \frac{F_y}{m}, \quad \dot{V}_z = \frac{F_z}{m}. \end{aligned}$$

Для абсолютного значення швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$ знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \right)' = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{V_x F_x}{m} + \frac{V_y F_y}{m} + \frac{V_z F_z}{m} \right)' = \\ &= \frac{F_x \cos \theta \cos \psi + F_y \sin \theta \cos \psi - F_z \sin \psi}{m}. \end{aligned}$$

Використовуючи залежності $\theta = \arctg \frac{CB}{OB} = \arctg \frac{V_y}{V_x}$, знаходимо похідну

$$\dot{\theta} = \left(\arctg \frac{CB}{OB} \right)' = \frac{\frac{F_y V_x}{m} - \frac{F_x V_y}{m}}{(V \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi)^2 + (V \cdot \sin \theta \cdot \cos \psi)^2} = \frac{F_y \cos \theta - F_x \sin \theta}{m \cdot V \cdot \cos \psi}.$$

Аналогічно знаходимо похідну

$$\psi = \left(\operatorname{arctg} \frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right)' = - \left(\frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \right)' / \left(1 + V_z^2 / (V_x^2 + V_y^2) \right) =$$

$$= - \frac{F_x \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta + F_y \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta + F_z \cdot \cos \psi}{m \cdot V}.$$

За законом всесвітнього тяжіння на тіло масою m на висоті h над поверхнею Землі діє гравітаційна сила $mg = \frac{GMm}{(R_3 + h)^2}$, де M — маса Землі, а значення гравітаційної сталої $G = g_0 r^2 / M$ обчислюється із формули $g_0 = \frac{GM}{R_3^2}$ із відомим значенням гравітаційного прискорення g_0 на поверхні Землі. Звідси випливає, що гравітаційна складова прискорення у точці з координатами (x, y, z) , заданими у стартовій системі координат, обчислюється за формулою

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}_0 = - \frac{g_0 R_3^2}{(x^2 + (y + R_3)^2 + z^2)^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y + R_3 \\ z \end{pmatrix}.$$

Координати вектора сили тяги двигуна

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta P_{ДВ} \\ \sin \alpha \cos \beta P_{ДВ} \\ -\sin \beta P_{ДВ} \end{pmatrix}$$

визначаються у швидкісній системі координат за значенням $P_{ДВ}$ сили тяги двигуна і за значеннями кутів α і β орієнтації ЛА відносно вектора швидкості. Значення сили тяги двигуна залежить від технічних характеристик двигуна, пального, швидкості та фізичних характеристик атмосфери (температури, тиску і густини повітря на висоті польоту h),

$$P_{ДВ} = P_h = P_\infty - S_a \cdot P_a(h) = I_{SP} \cdot \dot{G}(t) - S_a \cdot P_a(h),$$

де величиною

$$P_\infty = I_{SP} \cdot \dot{G}(t)$$

позначають значення сили тяги головного двигуна в вакуумі, а величиною P_h позначають силу тяги головного двигуна в атмосфері на висоті h , S_a — площа сопла, $P_a(h)$ — тиск атмосфери на висоті h , I_{SP} — питомий імпульс, \dot{G} — вагова секундна витрата ДУ. Значення перелічених величин, а також значення аеродинамічних сил

$$N = C_n \cdot q \cdot S,$$

$$T = C_x \cdot q \cdot S$$

задаються табличними залежностями від багатьох факторів, зокрема, від сили швидкісного напору $q = \rho \cdot V^2 / 2$ [кгс/м²], залежної від густини атмосфери ρ на висоті h та від атмосферної швидкості V , визначеної в одиницях (махах)

$$M = V / a,$$

де $a = 20.0463\sqrt{T}$, T — температура атмосфери в Кельвінах, a — швидкість звуку в повітрі при температурі T , а значення координат A_x, A_y, A_z вектора аеродинамічних сил

$$A_x = -C_x \cdot q \cdot S, \quad A_y = C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \alpha, \quad A_z = -C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \beta.$$

залежать від повітряної швидкості, геометричних розмірів ЛА, кутів орієнтації ЛА відносно вектора швидкості, фізичних параметрів атмосфери, площі міделевого перерізу S та аеродинамічних коефіцієнтів C_x і C_n^α ,

$$C_x = C_{x0}(M, G) + \Delta C_x(M, H) + B(M, G) \cdot \left(C_n^\alpha(M, G) \right)^2 \cdot (\alpha^2 + \beta^2).$$

Значення міделевої площі S і значення аеродинамічних коефіцієнтів C_x і C_n^α оцінюються експериментально за даними натурних спостережень.

Координати вектора сумарних сил $f = F + A$ у швидкісній системі координат обчислюються за формулами

$$f_x = \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot P_{ДV} - C_x \cdot q \cdot S,$$

$$f_y = \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot P_{ДV} + C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \alpha,$$

$$f_z = -\sin \beta \cdot P_{ДV} - C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \beta,$$

а сумарна сила F_{sum} у стартовій системі координат обчислюється за формулами

$$F_{sum} = 1_x f_x + 1_y f_y + 1_z f_z + gm = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix} f_x + \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} f_y + \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} f_z + g = M_0^V f + gm.$$

Із використанням матриці переходу

$$M_0^V = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\sin \theta & \cos \theta \sin \psi \\ \sin \theta \cos \psi & \cos \theta & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

прискорення ЛА обчислюється за формулою

$$\dot{V} = \frac{F_{sum}}{m} = \frac{M_0^V f}{m} + g,$$

а математична модель для обчислення фазової траєкторії $(x(t), y(t), z(t), V_x(t), V_y(t), V_z(t))$ визначається системою диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = V_x, \quad \dot{y} = V_y, \quad \dot{z} = V_z$$

$$\dot{V}_x = \frac{f_x \cos \theta \cos \psi - f_y \sin \theta + f_z \cos \theta \sin \psi}{m} + g_x,$$

$$\dot{V}_y = \frac{f_x \sin \theta \cos \psi + f_y \cos \theta + f_z \sin \theta \sin \psi}{m} + g_y,$$

$$\dot{V}_z = \frac{-f_x \sin \psi + f_z \cos \psi}{m} + g_z,$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}.$$

Беручи до уваги, що вектор похідних $(\dot{V}, \dot{\theta}, -\dot{\psi})$ обчислюється за формулами

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta \cos \psi}{m} & \frac{\sin \theta \cos \psi}{m} & \frac{-\sin \psi}{m} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \frac{mV \cos \psi}{m} & \frac{mV \cos \psi}{m} & \frac{\cos \psi}{m} \\ \frac{\cos \theta \sin \psi}{m} & \frac{\sin \theta \sin \psi}{m} & \frac{\cos \psi}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = M_1 M_2 F =$$

$$= M_1 M_2 (M_0^V f + gm) = M_1 M_2 M_0^V f + M_1 M_2 gm.$$

із матрицями

$$M_1 = \begin{pmatrix} m^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (mV \cos \psi)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (mV)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \theta \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

а також беручи до уваги, що добуток матриць $M_2 M_0^V$ є одиничною матрицею, маємо

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = M_1 f + M_1 M_2 g m =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{f_x}{m} + g_x \cos \theta \cos \psi + g_y \sin \theta \cos \psi - g_z \sin \psi \\ \frac{f_y}{mV \cos \psi} + \frac{-g_x \sin \theta + g_y \cos \theta}{V \cos \psi} \\ \frac{f_z}{mV} + \frac{g_x \cos \theta \sin \psi + g_y \sin \theta \sin \psi + g_z \sin \psi}{V} \end{pmatrix}$$

і отримуємо робочу модель

$$\dot{x} = V \cos \theta \cos \psi, \quad \dot{y} = V \sin \theta \cos \psi, \quad \dot{z} = -V \sin \psi,$$

$$\dot{V} = \frac{f_x}{m} + g_x \cos \theta \cos \psi + g_y \sin \theta \cos \psi - g_z \sin \psi,$$

$$\dot{\theta} = \frac{f_y}{mV \cos \psi} + \frac{-g_x \sin \theta + g_y \cos \theta}{V \cos \psi},$$

$$\dot{\psi} = -\frac{f_z}{mV} - \frac{g_x \cos \theta \sin \psi + g_y \sin \theta \sin \psi + g_z \sin \psi}{V}$$

підсистеми для обчислення фазової траєкторії

$$(x(t), y(t), z(t), V(t), \theta(t), \psi(t))$$

у фазовому просторі $(x, y, z, V, \theta, \psi)$.

Висновки. Отже, повна робоча модель для обчислення фазової траєкторії ЛА за заданими функціями керування задається системою диференціальних рівнянь і таблицями даних для обчислення всіх аеродинамічних сил і моментів.

$$\dot{x} = V_x, \quad \dot{y} = V_y, \quad \dot{z} = V_z,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{pmatrix} = \frac{M^T}{m} \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot P_{DV} - C_x \cdot q \cdot S \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot P_{DV} + \frac{C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \\ -\sin \beta \cdot P_{DV} - \frac{C_n^\alpha \cdot q \cdot S \cdot \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix} + \bar{g},$$

$$\theta = \arctg \frac{V_y}{V_x}, \quad \psi = \arctg \frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}},$$

$$\begin{aligned}V_x &= \dot{x} = V \cos \theta \cos \psi, \\V_x &= \dot{y} = V \sin \theta \cos \psi, \\V_z &= \dot{z} = -V \sin \psi.\end{aligned}$$

За допомогою методів внутрішньої точки [2] будуються прискорені алгоритми обчислення оптимального керування $u^{opt}(t) = (\alpha^{opt}(t), \beta^{opt}(t))$ та оптимізованих опорних траєкторій при наявних технічних обмеженнях

$$\begin{aligned}|\alpha| &\leq \alpha_{\max}, \quad |\beta| \leq \alpha_{\max}, \\|\dot{\alpha}| &\leq \dot{\alpha}_{\max} = \alpha_{\Sigma \max} \cdot K_{\Omega}(q), \quad |\dot{\beta}| \leq \dot{\alpha}_{\max}, \\|\ddot{\alpha}| &\leq \ddot{\alpha}_{\max} = \alpha_{\Sigma \max} \cdot K_{\varepsilon}(q), \quad |\ddot{\beta}| \leq \ddot{\alpha}_{\max}, \\|\ddot{\alpha}| &\leq \ddot{\alpha}_{\max} = \alpha_{\Sigma \max} \cdot K_{\xi}(q), \quad |\ddot{\beta}| \leq \ddot{\alpha}_{\max}\end{aligned}$$

за таблично заданими допустимими граничними значеннями

$$\alpha_{\max}, \alpha_{\Sigma \max}, K_{\Omega}(q), K_{\varepsilon}(q), K_{\xi}(q).$$

У загальній постановці оптимізаційні задачі зводяться до відшукування керування $u \in U$ із заданої множини U допустимих керувань U , яке максимізує ймовірність переведення заданої керованої системи

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}(t), u(t))$$

із допустимої множини початкових фазових станів $\bar{x}(t_0) \in X^0$ на множині фінальних станів $\bar{x}(t_f) \in X^f$ при наявності фазових обмежень $\bar{\psi}(x) \leq 0$, де множина X^0 визначається перетином термінальної множини $X(t_0, x(0))$ із заданою множиною $\{x \mid \varphi^0(x) = 0\}$, а множина X^f є множиною фазових станів $x(t_f)$, для яких існує допустиме керування, що переводить керовану систему із стану $x(t_f)$ у заданий стан $x(T) = x^T$ із ймовірністю $p(x(t_f))$. У випадку задачі переслідування керування u обчислюється за критерієм мінімізації часу \bar{T} досягнення нерівності $|x_i(\bar{T}) - y_i(\bar{T})| \leq \varepsilon$ для стану $y_i(\bar{T})$ переслідуваної системи

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(y(t), v(t))$$

із допустимими керуваннями $v(t) \in V = \{v \mid g_V(v) \leq 0\}$. У цьому випадку обчислюється екстремальне керування \bar{u} як розв'язок оптимізаційної задачі

$$\bar{T} = \inf_{u(\cdot) \in U} \max_{v(\cdot) \in V} T_{uv}, \quad T_{uv} = \min \{t \mid x_i(t) = y_i(t), i \in I\}.$$

Список використаних джерел:

1. Бейко І. В. Задачі, методи та алгоритми оптимізації / І. В. Бейко, П. М. Зінько, А. Г. Наконечний. — К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. — 799 с.
2. Згуровский М. З. Системный анализ: проблемы, методология, приложения / М. З. Згуровский, Н. Д. Панкратова. — К. : Наук. думка, 2011. — 728 с.
3. Игдалов И. М. Ракета как объект управления / И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун. — Днепропетровск : АРТ-ПРЕСС, 2014. — 542 с.
4. Зенитный ракетный комплекс «Patriot». Многофункциональная РЛС AN/MPQ-53 [Електронний ресурс] / Вестник ПВО. — Режим доступа: <http://pwo.guns/other/usa/patriot/index01.htm>.

We consider problems of mathematical models design for calculation and optimization of AC phase trajectories with optimized maneuvers.

Key words: *optimal control, dynamic systems modeling.*

Отримано: 13.04.2016

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Ali Zada Parviz — Doctor of Technical Science, Professor, Professor OKAN University, Istanbul, Turkey, parviz.alizade@okan.edu.tr

Артюх Марина Володимирівна — асистент кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії, м. Харків, marihaa@mail.ru

Батюк Данило Анатолійович — аспірант кафедри інформаційних технологій видавничої справи Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів

Бойцов Вадим Іванович — студент кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне

Бомба Андрій Ярославович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, abomba@ukr.net

Вартанян Василь Михайлович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри менеджменту Національного аерокосмічного університету імені М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, vartanyan_vm@ukr.net

Вацик Наталія Орестівна — кандидат економічних наук, асистент кафедри менеджменту і міжнародного підприємництва Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, Nataliia.o.vatsyk@lpnu.ua

Верлань Андрій Анатолійович — кандидат технічних наук, Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ, verlandr@gmail.com

Верлань Дмитро Анатолійович — кандидат технічних наук, менеджер по проєктах ПП «ЕРУ Трейдинг», м. Київ, dmitriverlan@gmail.com

Гладка Олена Миколаївна — кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, viklom@ukr.net

Гомон Катерина Олександрівна — аспірант кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, katja_gomon@ukr.net

Демчук Олена Станіславівна — кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, Idem1997@ukr.net

Дияк Іван Іванович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, декан факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, duyak@franko.lviv.ua

Жученко Олексій Анатолійович — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автоматизації хімічних виробництв Національного технічного університету України «КПІ», м. Київ, azhuch@ukr.net

Зейниев Теймур Гідаятович — асистент кафедри економіки та маркетингу Національного аерокосмічного університету імені М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, teymur_ztg@mail.ru

Ізонін Іван Вікторович — кандидат технічних наук, асистент кафедри інформаційних технологій видавничої справи Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, ivanizonin@gmail.com

Kivanc Ömer Cihan — Research Assistant, OKAN University, Istanbul, Turkey, cihan.kivanc@okan.edu.tr

Коваленко Роман Юрійович — аспірант Інституту водних проблем і меліорації НААН України, м. Київ, kovasik89@mail.ru

Ковальчук Павло Іванович — доктор технічних наук, професор, головний науковий співробітник лабораторії моніторингу та охорони вод відділення водних ресурсів Інституту водних проблем і меліорації НААН України, м. Київ, kovalchukvp@mail.ru

Коломис Олена Миколаївна — кандидат фізико-математичних наук, молодший науковий співробітник Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ, kolomys@ukr.net

Литвин Олег Миколайович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії, м. Харків, academ_mail@ukr.net

Луц Лілія Володимирівна — кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ, lv1@ukr.net

Мамедов Гавар Амир оглу — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматичного керування Азербайджанського технічного університету, м. Баку, Азербайджан

Мартинюк Петро Миколайович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, martinjuk@ukr.net

Медвідь Наталія Віталіївна — аспірант кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, tashamedvid@ukr.net

Мельник Наталія Богданівна — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри програмного забезпечення Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, melnyk.n.pz@gmail.com

Мічута Ольга Романівна — кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, michuta@ukr.net

Мороз Володимир Іванович — доктор технічних наук, професор, професор кафедри електроприводів і комп'ютеризованих електромеханічних систем Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, Volodymyr.i.Moroz@lpnu.ua

Мусій Роман Степанович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри біофізики, інформатики та вищої математики Львівського медичного інституту, м. Львів, musiy@polynet.lviv.ua

Ozturk Salih Baris – Assistant Professor, Professor OKAN University, Istanbul, Turkey, baris.ozturk@okan.edu.tr

Прострельчук Василь Ігорович — магістрант кафедри інформаційних технологій видавничої справи Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів

Романенков Юрій Олександрович — кандидат технічних наук, доцент, докторант кафедри менеджменту Національного аерокосмічного університету імені М. С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», м. Харків, KhAI.management@ukr.net

Сидоренко Роман Вікторович — асистент кафедри інформаційних технологій видавничої справи Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів

Ситник Олександр Олексійович — кандидат технічних наук, доцент, проректор з навчальної роботи Черкаського державного технологічного університету, м. Черкаси, sytnyk_a@mail.ru

Стадник Марія Андріївна — асистент кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, м. Тернопіль, maria.stadnyk@gmail.com

Sterten Jo — Assistant Professor, Gjovik University College, Hogskolen i Gjovik, Norway

Стефанович Тетяна Олександрівна — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри проектування та експлуатації машин Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, stefanovych@lp.edu.ua

Ткаченко Роман Олексійович — доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій видавничої справи Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів

Tuncay R. Nejat — Doctor of Technical Science, Professor, Professor OKAN University, Istanbul, Turkey, nejat.tuncay@okan.edu.tr

Федорчук Володимир Анатолійович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvlad@ukr.net

Фуртат Юрій Олегович — кандидат технічних наук, молодший науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ, saodhar@ukr.net

Цапар Віталій Степанович — кандидат технічних наук, Доцент кафедри автоматизації хімічних виробництв Національного технічного університету України «КПІ», м. Київ, cwst@ukr.net

Чернобай Ліана Іванівна — кандидат економічних наук, професор, професор кафедри менеджменту і міжнародного підприємництва Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, Liana_chernobaj@ukr.net

Чуй Юрій Васильович — аспірант кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, yurachuy@gmail.com

Щербовських Сергій Володимирович — доктор технічних наук, старший науковий співробітник, доцент кафедри систем автоматизованого проектування Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, shcherbov@gmail.com

Щирба Олеся Вікторівна — асистент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Ярошак Сергій Вікторович — кандидат технічних наук, доцент кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, yaroschak@mail.ru

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

А		М	
Abdullaev S. A.	5	Mamedov H. A.	5
Ali Zada P.	5	Мартинюк П. М.	191
Артюх М. В.	16	Медвідь Н. В.	99
		Мельник Н. Б.	115
Б		Мічута О. Р.	107
Батюк Д. А.	176	Мороз В. І.	34
Бойцов В. І.	26	Мусій Р. С.	115
Бомба А. Я.	26	О	
		Ozturk B.	5
В		П	
Вартанян В. М.	126	Прострельчук В. І.	176
Вацик Н. О.	34	Р	
Верлань А. А.	49	Романенков Ю. О.	126
Верлань Д. А.	61	С	
Г		Сидоренко Р. В.	176
Гладка О. М.	66	Ситник О. О.	139
Гомон К. О.	76	Стадник М. А.	150
Д		Sterten Jo	160
Демчук О. С.	84	Стефанович Т. О.	166
Дияк І. І.	76	Т	
Ж		Ткаченко Р. О.	176
Жученко О. А.	183	Tunçay R. N.	5
З		Ф	
Зейниев Т. Г.	126	Федорчук В. А.	49
І		Фуртат Ю. О.	61
Ізонін І. В.	176	Ц	
К		Цапар В. С.	183
Kivanc S.	5	Ч	
Коваленко Р. Ю.	84	Чернобай Л. І.	34
Ковальчук П. І.	84	Чуй Ю. В.	191
Коломис О. М.	91	Щ	
Л		Щербовських С. В.	166
Литвин О. М.	16	Щирба О. В.	201
Луц Л. В.	91	Я	
		Ярошак С. В.	26

ЗМІСТ

Ali Zada P., Tuncay N., Ozturk B., Kivanc C., Mamedov H. A., Abdullaev S. A.
 Parametrical method of low-frequency harmonics suppression in rectifier's output voltage under supply voltage unbalances (Mathematical model, study and industrial application) 5

Артюх М. В., Литвин О. М.
 Застосування дивідіріального та мультигрального числень в дослідженні економіки сільського господарства України 16

Бомба А. Я., Ярошак С. В., Бойцов В. І.
 Математичне моделювання неізотермічної багатофазної фільтрації в системі паралельних свердловин за технологією термогравітаційного дренажу 26

Вацик Н. О., Чернобай Л. І., Мороз В. І.
 Вибір оптимальних планових параметрів експортної діяльності суб'єкта господарювання з використанням статистичних та інтегральних методів 34

Верлань А. А., Федорчук В. А.
 Підходи до побудови скалярних динамічних моделей розподілених ланок керованих електромеханічних систем 49

Верлань Д. А., Фуртат Ю. О.
 Способи розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра I роду з виродженим ядром в задачах відновлення вхідних сигналів динамічних об'єктів 61

Гладка О. М.
 Обчислювальна технологія на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень для фільтраційних задач з вільними межами 66

Гомон К. О., Дяк І. І.
 Паралельний алгоритм розв'язування крайових задач на основі гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій 76

Ковальчук П. І., Демчук О. С., Коваленко Р. Ю.
 Математичне моделювання поширення забруднення в річках при промивках із водосховищ 84

Коломис О. М., Луц Л. В.
 Ефективні за швидкістю алгоритми обчислення оцінок взаємно кореляційних функцій послідовностей різної довжини 91

Медвідь Н. В.
 Комп'ютерне моделювання впливу контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу на положення депресійної поверхні в ґрунтовій греблі 99

Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу адсорбції (десорбції) та неізотермічних умов на процеси фільтраційної консолідації засоленних ґрунтів в одновимірному випадку	107
Мусій Р. С., Мельник Н. Б. Математична модель термомеханіки кусково-однорідних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів....	115
Романенков Ю. А., Вартамян В. М., Зейніев Т. Г. Интервальная оптимизационная модель распределения ресурсов в системе бизнес-процессов организации	126
Ситник О. О. Деякі алгоритми розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра I-го роду у задачі відновлення сигналів	139
Стадник М. А. Оцінювання інформативних параметрів усталених зорових викликаних потенціалів з використанням їх розкладів за базисами дискретних ортогональних поліномів	150
Sterten Jo Numerical simulation of dynamic object based on convolution operations	160
Стефанович Т. О., Щербовських С. В. Модель надійності для аналізу причин непрацездатності насосного вузла із полегшеним ковзним резервуванням	166
Ткаченко Р. О., Ізонін І. В., Батюк Д. А., Сидоренко Р. В., Прострельчук В. І. Передискретизація зображень засобами машинного навчання	176
Цапар В. С., Жученко О. А. Дослідження імітаційної моделі теплого режиму скловарної печі	183
Чуй Ю. В., Мартинюк П. М. Дослідження впливу тонких напівпроникних включень на процеси фільтраційної консолидації ґрунтів в двовимірному випадку	191
Щирба О. В. Побудова математичних моделей для обчислення фазових траєкторій літальних апаратів в умовах захисних маневрів	201
Відомості про авторів	213
Алфавітний покажчик авторів	217

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Технічні науки

Збірник наукових праць

Випуск 13

Підписано до друку 05.05.2016 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офсетний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 12,8. Обл.-вид. арк. 11,5.
Тираж 100. Зам. № 744.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.