

УДК 629.76.01+531.551

А.В. Дегтярев, В.С. Шеховцов

Государственное предприятие КБ «Южное», Днепропетровск

## ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ ПРИ ОДНОКРАТНОМ И ДВУХКРАТНОМ ВКЛЮЧЕНИИ ДВИГАТЕЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ СТУПЕНИ

Предложена методика определения оптимальных траекторий выведения для случая движения ракеты-носителя в ньютоновском поле тяготения. Методика позволяет учесть ограничения на параметры движения ракеты-носителя с выключенным двигателем, число включений и время работы двигателей ступеней, характерных для носителей рассматриваемого типа. Показано, что применение полученных условий оптимальности тяги двигателей носителя позволяет при оценке энергетических характеристик носителя численное решение задачи свести к последовательному решению однопараметрических краевых задач.

**Ключевые слова:** энергетические характеристики, схема выведения, оптимальные режимы полета, сопряженная система, условия трансверсальности.

### Введение

Одним из важных направлений проектирования и разработки ракет-носителей (РН) в создавшихся условиях является создание РН на базе штатных ракет, в качестве которых используются или существующие ракеты-носители или ступени межконтинентальных баллистических ракет. В этом случае часть основных характеристик и параметров оказывается заданными и основная задача сводится к модернизации используемых ракетных блоков и выбору характеристик и параметров третьей ступени РН. На начальных этапах проектирования решение этой комплексной задачи связано с исследованием конструктивно-компоновочных схем ракеты-носителя, выбором рационального уровня ее характеристик и параметров, среди которых определение энергетических характеристик РН занимает одно из центральных мест. При этом под энергетическими возможностями РН понимается вес полезной нагрузки, которую ракета-носитель способна вывести на заданные орбиты.

Решение этой задачи связано с многократным расчетом оптимальных траекторий выведения РН полезного груза на орбиту, при которых расход топлива минимален.

Для определения таких траекторий для вновь проектируемых РН используются результаты решения известной задачи по выбору наиболее выгодных режимов полета РН, определяемых оптимальными программами тангажа и тяги маршевых двигателей. Эта задача решена многими авторами в различной постановке и при различных ограничениях [1 – 4]. В работе [4] решение получено для случая, когда траектория содержит участки движения с выключенными двигателями. Доказано существование локальных оптимумов, соответствующих определенным числам чередующихся активных и пассивных участков полета. Показано, что отклонение локаль-

ного оптимума от глобального есть убывающая функция от числа активных участков.

Однако, при реальном проектировании этими результатами можно воспользоваться частично, так как ряд дополнительных ограничений, характерных для рассматриваемой задачи, не учитывается. К их числу можно отнести ограничения на параметры движения РН с выключенным двигателем, время работы маршевых двигателей базовых ступеней, допустимое количество включений двигателей верхних ступеней, число активных участков и участков движения с выключенным двигателем и другие.

Ниже приводится решение задачи по определению оптимальных траекторий выведения для случая проектирования трехступенчатой ракеты-носителя на базе штатной двухступенчатой РН с применением дополнительной ступени.

### Математическая формулировка задачи

Определить такие программы угла тангажа и тяги маршевых двигателей ракеты-носителя, чтобы соответствующая траектория выведения КА с поверхности Земли на заданную орбиту обеспечивала минимально возможный расход топлива дополнительной ступени и при этом выполнялись следующие положения и ограничения:

- семейство возможных программ угла тангажа, время работы и тяга двигателей первой ступени задана;
- ограничение на максимальный скоростной напор и углы атаки, при которых обеспечиваются требуемые прочностные характеристики, температурные режимы, управляемость РН, а также условия разделения ступеней, заданы;
- семейство программ угла тангажа и тяги двигателя второй ступени выбирается заново, исходя из условия обеспечения минимума расхода топлива при выведении КА на орбиту; тяга двигателя

второй ступени может измениться от нулевого до некоторого конечного максимального значения; двигатель допускает однократное включение; время работы двигателя задано;

- двигатель дополнительной ступени работает с тягой, изменяющейся от нулевого значения до некоторого конечного значения и допускает однократное и двухкратное включение;

- траектория выведения содержит только один кеплеровский участок движения ракеты-носителя с выключенным двигателем;

- полет ракеты-носителя с выключенным двигателем происходит вне атмосферы по восходящей ветви траектории ( $V_r > 0, t_{j0} \leq t \leq t_{jk}$ );

- влиянием атмосферы на параметры движения второй и третьей ступеней можно пренебречь;

- ограничение на угловую дальность выведения не накладывається;

- параметры движения первой ступени в момент окончания работы ее маршевого двигателя служат начальными параметрами движения второй ступени и зависят от угла тангажа  $\varphi_0$ , который определяется при числе  $M = 0,8$ ;

- параметры движения первой ступени определяются традиционными методами.

Обозначим

$P$  – тяга двигательной установки;

$V_r, V_\tau$  – радиальная и трансверсальная составляющие скорости;

$r$  – радиус-вектор от центра Земли до центра масс РН;

$m$  – текущая масса РН;

$\varphi$  – угол тангажа, отсчитываемый от местного горизонта;

$c_2, c_3$  – секундный массовый расход второй и третьей ступени;

$g_0$  – ускорение земного притяжения;

$R$  – радиус Земли;

$M$  – число Маха;

$W$  – скорость истечения газа из сопла двигателя;

$n$  – число включений двигателя дополнительной ступени;

$h, C$  – кеплеровские интегралы энергии и площадей;

$V$  – скорость полета ракеты-носителя;

$V_{\tau_{i0}}, V_{r_{i0}}, r_{i0}, V_{\tau_{ik}}, V_{r_{ik}}, r_{ik}$  – параметры движения в момент начала и конца работы двигателя первой, второй и третьей ступеней РН ( $i = 1, 2, 3$ );

$V_{\dot{e}\delta}, r_{\dot{e}\delta}$  – скорость и радиус-вектор круговой орбиты;

$V_i, r_i$  – скорость и радиус-вектор эллиптической орбиты в точке перигея;

$t_{i0}, t_{ik}$  – время начала и конца работы двигателей первой, второй и третьей ступеней ( $i = 1, 2, 3$ );

$t_3$  – время работы двигателя дополнительной ступени;

$t_{31}$  – время первого выключения двигателя дополнительной ступени;

$t_{32}$  – время второго включения двигателя дополнительной ступени;

$t_x$  – искомое время полета дополнительной ступени с выключенным двигателем.

Уравнения движения второй и третьей ступеней в ньютоновском поле тяготения запишем в проекциях на радиус-вектор и трансверсаль:

$$\begin{aligned} \frac{dV_\tau}{dt} &= \frac{P}{m} \cos \varphi - \frac{V_\tau V_r}{r}; \\ \frac{dV_r}{dt} &= \frac{P}{m} \sin \varphi + \frac{V_\tau^2}{r} - \frac{g_0 R^2}{r^2}; \\ \frac{dr}{dt} &= V_r; \\ \frac{dm}{dt} &= -c_j \quad (j = 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений (1) при заданных начальных условиях  $V_{\tau 20}(\varphi_0), V_{r 20}(\varphi_0), r_{20}, m_{20}, c_{20}, m_{30}, c_{30}, g_0, R$ , заданных функциях  $\varphi(t), P(t)$  определяют траекторию движения второй и третьей ступеней из допустимого класса, формируемого заданными выше условиями и ограничениями.

В качестве типовых схем выведения космических аппаратов на орбиты примем схемы выведения КА на круговые и эллиптические орбиты с однократным и двухкратным включением двигателя дополнительной ступени (рис 1, 4).

Сформулируем задачу. Определить такие функции  $\varphi(t), P(t)$ , при которых соответствующая траектория, исходящая в начальный момент времени  $t_{20}$  из точки  $q_{20}$ , принадлежащей многообразию  $Q_{20}(V_{\tau 20}(\varphi_0), V_{r 20}(\varphi_0), r_{20}(\varphi_0))$ , проходила бы в некоторый момент времени  $t_{3k}$  через заданную точку  $q_{3k}(V_{\tau 3k}, V_{r 3k}, r_{3k})$ , и обеспечивала бы при заданных начальных условиях и ограничениях минимальный расход топлива на выведение:

$$J = \int_{t_{20}}^{t_{3k}} m dt. \quad (2)$$

### Решение задачи

*Выведение на круговую орбиту.* Воспользуемся идеей, предложенной в работе [5]. Предположим, что в состав оптимальной траектории выведения входит некоторый участок движения РН с выключенным двигателем – участок эллиптической орбиты ( $h, C$ ).

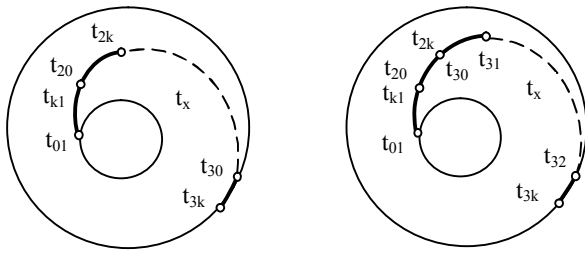


Рис. 1. Схемы выведения на круговую орбиту с однократным и двухкратным включением двигателя дополнительной ступени

Рассмотрим решение задачи при этом предположении для случая движения РН с однократным включением двигателя дополнительной ступени. Разделим общую задачу на две: выведение второй ступенью третьей на промежуточную орбиту (h, C) и выведение полезного груза третьей ступенью с орбиты (h, C) на заданную орбиту.

Первая задача представляет собой оптимальную задачу с подвижным левым и правым концом; вторая – оптимальную задачу с подвижным левым концом.

Функционалами для каждой из задач очевидно будут

$$J_1 = \int_{t_{20}}^{t_{30}} mdt; \quad J_2 = \int_{t_{20}}^{t_{3k}} mdt. \quad (3)$$

Введение предположения о существовании оптимального участка движения дополнительной ступени с выключенным двигателем по орбите (h, C) и разделении задачи на две упрощают получение искомого решения: условия оптимальности направления и величины тяги работающих двигателей известны [1], участок движения дополнительной ступени с выключенным двигателем по орбите (h, C), по предположению, оптимален, а искомый функционал (2) равен сумме функционалов (3):

$$\int_{t_{20}}^{t_{3k}} mdt = \int_{t_{20}}^{t_{30}} mdt + \int_{t_{30}}^{t_{3k}} mdt. \quad (4)$$

Для получения искомого решения необходимо дополнительно удовлетворить условиям трансверсальности на подвижных концах траектории каждой из задач, построить правило определения оптимальной точки включения двигателя дополнительной ступени с нулевой тяги на ненулевую и провести сопряжение оптимального участка орбиты (h, C) с примыкающими к его концам оптимальным активным участкам.

Выпишем известные результаты, следуя работам [4, 5]:

1. Гамильтониан

$$H = m\dot{H}_1 + D = 0 \quad \text{на участках } t_{20} \leq t \leq t_{3k}, \quad (5)$$

где

$$H_1 = \frac{W}{m}(\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) - \lambda_4; \quad (6)$$

$$D = -\lambda_1 \frac{V_\tau V_r}{2} + \lambda_2 \left( \frac{V_\tau^2}{2} - \frac{g_0 R^2}{r^2} \right) + \lambda_3 V_r, \quad (7)$$

где  $H_1$  – функция переключения Лоудена;  $\lambda_1 \dots \lambda_4$  – компоненты вспомогательного вектора.

2. Сопряженная система уравнений

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_1 \frac{V_r}{r} - \lambda_2 \frac{2V_\tau}{r};$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \lambda_1 \frac{V_\tau}{r} - \lambda_3;$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\lambda_1 \frac{V_\tau V_r}{r} + \lambda_2 \left( \frac{V_\tau^2}{r^2} - \frac{2g_0 R^2}{r^3} \right); \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = \frac{P}{m^2}(\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi).$$

3. Аналитическое решение сопряженной системы дифференциальных уравнений для участка полета РН с выключенным двигателем

$$\lambda_1 = \frac{r}{r_{2k}} \left( \lambda_{120} - \frac{\lambda_{220}}{CV_{r2k}} (V_{r2k}^2 - V_r^2) \right);$$

$$\lambda_2 = \lambda_{220} \frac{V_r}{V_{r2k}}; \quad (9)$$

$$\lambda_3 = \frac{\lambda_{120}}{r_{2k}} + \frac{\lambda_{220}}{CV_{r2k}} (V_r^2 - V_{r2k}^2) + \frac{\lambda_{220}}{r^2} - \frac{V_r^2}{r}$$

$$\lambda_4 = \text{const}$$

4. Условия оптимальности функций  $\varphi(t)$ ,  $P(t)$

$$\text{tg} \varphi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad (10)$$

$$P = \begin{cases} P_{\max}, & \text{àñèè } H_1 > 0 \\ P_{\min} \neq 0, & \text{àñèè } H_1 < 0 \end{cases}. \quad (11)$$

Условием переключения двигателя с режима  $P_{\max}$  ( $P_{\min} \neq 0$ ) на режим  $P_{\min} \neq 0$  ( $P_{\max}$ ) будет равенство функции переключения Лоудена (6) нулю.

$$H_1 = \frac{W}{m}(\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) - \lambda_4 = 0. \quad (12)$$

С учетом уравнения (5) условие оптимальности тяги можно записать в виде

$$P = \begin{cases} P_{\max}, & \text{àñèè } D < 0; \\ P_{\min} \neq 0, & \text{àñèè } D > 0. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае условие переключения двигателя с режима  $P_{\max}$  ( $P_{\min} \neq 0$ ) на режим  $P_{\min} \neq 0$  ( $P_{\max}$ ) может быть также записано, с учетом условий (5) и (12), в форме

$$D = -\lambda_1 \frac{V_\tau V_r}{r} + \lambda_2 \left( \frac{V_\tau^2}{r} - \frac{g_0 R^2}{r^2} \right) + \lambda_3 V_r = 0. \quad (14)$$

Условие трансверсальности на левом конце траектории для первой задачи запишем с учетом заданного времени работы  $t_{1k}$  двигателя первой ступени.

$$\lambda_{20}q_{1k} = 0, \quad (15)$$

где  $\lambda_{20}$  – вспомогательный вектор, компонентами которого являются  $\lambda_{120}$ ,  $\lambda_{220}$ ,  $\lambda_{320}$  в момент начала работы  $t_{20}$  двигателя второй ступени;

$q_{1k}$  – вектор вариаций фазовых координат, компонентами которого являются  $\delta V_{\tau 1k}(\varphi_0)$ ,  $\delta V_{r 1k}(\varphi_0)$ ,  $\delta r_{1k}(\varphi_0)$  в момент окончания работы  $t_{1k}$  двигателя первой ступени.

Условие трансверсальности на правом конце траектории для первой задачи с учетом заданного времени работы второй ступени и выхода ее на промежуточную орбиту (h, C)

$$2kq_{2k} = 0, \quad (16)$$

где  $2k$  – вспомогательный вектор с компонентами  $\lambda_{12k}$ ,  $\lambda_{22k}$ ,  $\lambda_{32k}$  в момент окончания работы  $t_{2k}$  двигателя второй ступени;  $q_{2k}$  – вектор вариации фазовых координат с компонентами  $\delta V_{\tau}$ ,  $\delta V_r$ ,  $\delta r$  в момент выхода  $t_{2k}$  второй ступени на промежуточную орбиту (h, C).

Условие трансверсальности (15) можно представить в виде

$$\lambda_{120} \frac{\partial V_{\tau 1k}}{\partial \varphi_0} + \lambda_{220} \frac{\partial V_{r 1k}}{\partial \varphi_0} + \lambda_{320} \frac{\partial r_{1k}}{\partial \varphi_0} = 0, \quad (17)$$

условие трансверсальности (16) – в виде:

$$\lambda_{12k} \delta V_{\tau} + \lambda_{22k} \delta V_r + \lambda_{32k} \delta r = 0. \quad (18)$$

Вариации  $\delta V_{\tau}$ ,  $\delta V_r$ ,  $\delta r$  определим из условия постоянства интегралов энергии h и площадей C орбиты (h, C).

$$\begin{aligned} \delta h &= \frac{\partial h}{\partial V_{\tau}} \delta V_{\tau} + \frac{\partial h}{\partial V_r} \delta V_r + \frac{\partial h}{\partial r} \delta r = 0; \\ \delta C &= \frac{\partial C}{\partial V_{\tau}} \delta V_{\tau} + \frac{\partial C}{\partial V_r} \delta V_r + \frac{\partial C}{\partial r} \delta r = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В рассматриваемом случае условие (17) будет использоваться для определения  $\lambda_{20}$ .

Уравнение (18) с учетом уравнений (19) представим в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{12k} \left( \frac{\partial h}{\partial V_r} \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial C}{\partial V_r} \right) + \lambda_{22k} \left( \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial C}{\partial V_{\tau}} - \frac{\partial h}{\partial V_{\tau}} \frac{\partial C}{\partial r} \right) \\ + \lambda_{32k} \left( \frac{\partial h}{\partial V_{\tau}} \frac{\partial C}{\partial V_r} - \frac{\partial h}{\partial V_r} \frac{\partial C}{\partial V_{\tau}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Частные производные определим, используя выражения для интегралов энергии и площадей кеплеровской орбиты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial V_{\tau}} = 2V_{\tau}; \quad \frac{\partial h}{\partial V_r} = 2V_r; \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{2g_0 R^2}{r^2}; \\ \frac{\partial C}{\partial V_{\tau}} = r; \quad \frac{\partial C}{\partial V_r} = 0; \quad \frac{\partial C}{\partial r} = V_{\tau}. \end{aligned} \quad (21)$$

С учетом уравнений (21) и условия равенства начальных параметров движения по кеплеровской орбите параметрам движения второй ступени в момент окончания работы  $t_{2k}$  ее двигателя условие (20) запишем в виде

$$\begin{aligned} -\lambda_{12k} \frac{V_{\tau 2k} V_{r 2k}}{r_{2k}} + \lambda_{22k} \left( \frac{V_{\tau 2k}^2}{r_{2k}} - \frac{g_0 R^2}{r_{2k}^2} \right) + \\ + \lambda_{32k} V_{r 2k} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Для второй задачи условие трансверсальности на левом конце траектории имеет вид

$$\lambda_{30} \delta q_{30} = 0, \quad (23)$$

где  $\lambda_{30}$  – вспомогательный вектор с компонентами  $\lambda_{130}$ ,  $\lambda_{230}$ ,  $\lambda_{330}$  в момент включения  $t_{30}$  двигателя дополнительной ступени;  $\delta q_{30}$  – вектор вариаций фазовых координат орбиты (h, C) в момент включения  $t_{30}$  двигателя дополнительной ступени.

По аналогии с условием трансверсальности (22) условие трансверсальности (23) будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\lambda_{130} \frac{V_{\tau 30} V_{r 30}}{r_{30}} + \lambda_{230} \left( \frac{V_{\tau 30}^2}{r_{30}} - \frac{g_0 R^2}{r_{30}^2} \right) + \\ + \lambda_{330} V_{r 30} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

При движении РН по орбите (h, C) с выключенным двигателем время и параметры движения  $V_{\tau}$ ,  $V_r$ ,  $r$  можно определить, используя формулы кеплеровского движения.

Зависимость компонент вспомогательного вектора от фазовых координат при движении по орбите (h, C) можно определить, используя систему уравнений (9)

Сравним условия (14), (22), (24). Условие трансверсальности на подвижном правом конце траектории (22) для первой задачи совпадает с условием переключения двигателя на режим минимальной тяги (14) в точке  $t_{2k}$ . Условие (14) должно выполняться в каждой точке траектории при движении с выключенным двигателем по орбите (h, C), так как в соответствии с условием (5) гамильтониан должен быть равен нулю в каждой точке оптимальной траектории. Условие трансверсальности на левом подвижном конце (24) для второй задачи также совпадает с условием (14).

Из результатов сравнения условий (14), (22), (24) следует два замечательных правила.

Первое – если выбором начального значения одной из компонент вспомогательного вектора в

момент времени  $t_{20}$  обеспечить выполнение условия (14) в момент времени  $t_{2k}$  то при выполнении условий (1), (8), (10), (11) два участка траектории – участок движения второй ступени с включенным двигателем и участок движения РН по орбите (h, C) с выключенным двигателем – можно рассматривать как единый участок оптимальной траектории.

Второе – если при решении второй задачи одно из граничных условий на правом конце траектории обеспечивать выбором соответствующего значения времени полета ступени с выключенным двигателем по орбите (или радиуса  $r$ ) при выполнении в каждой точке орбиты условия (14), то оптимальная точка переключения двигателя с режима нулевой тяги на режим тяги, не равной нулю, определится с точностью, соответствующей точности численного решения соответствующей краевой задачи.

Таким образом, для того, чтобы при заданных начальных условиях  $V_{\tau 20}(\varphi_0)$ ,  $V_{r 20}(\varphi_0)$ ,  $t_{20}(\varphi_0)$ ,  $m_{20}$ ,  $c_2$ ,  $m_{30}$ ,  $c_3$ ,  $g_0$ ,  $R$  для схемы выведения с однократным включением двигателя дополнительной ступени при заданных условиях и ограничениях траектория вне атмосферы была оптимальной, необходимо:

- существование оптимального восходящего участка движения РН с выключенным двигателем (промежуточной эллиптической орбиты);
- параметры движения оптимальной траектории РН с работающим маршевым двигателем определять при выполнении условий трансверсальности (14), (22), (24), условий оптимальности направления и величины тяги (10), (11), (14), интегрированием системы уравнений движения (1), сопряженной системы (8) при движении с включенным двигателем и аналитического решения (9) при движении по орбите (h, C) при движении РН с выключенным двигателем;
- условие оптимального переключения двигателя на режим нулевой тяги обеспечивать выбором в момент  $t_{20}$  начального значения одной из компонент вектора  $\dot{r}$ , обеспечивающего выполнение в момент времени  $t_{2k}$  условия (14);
- оптимальную точку переключения двигателя с режима нулевой тяги на режим минимальной ненулевой тяги определять выбором времени полета  $t_x$  РН с выключенным двигателем по орбите (или радиуса  $r$ ) при выполнении в каждой точке орбиты условия (14); время полета  $t_x$  по орбите (h, C) с выключенным двигателем выбирать, исходя из условия обеспечения одного из граничных условий на правом конце траектории выведения.

Численное решение задачи при схеме выведения с однократным включением двигателя может быть получено последовательным решением однопараметрических краевых задач

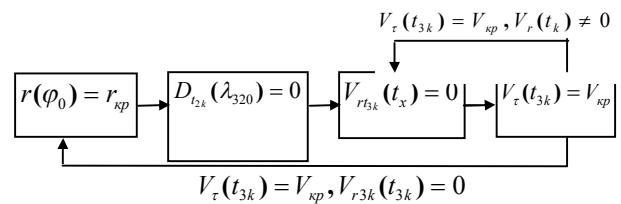


Рис. 2. Последовательность решения краевых задач для схемы выведения с однократным включением двигателя

Следует отметить, что приведенные выше условия оптимальности являются необходимыми, но недостаточными. На практике при их использовании для того, чтобы установить существование минимума, следует или привлечь результаты численных решений или соответствующие физические соображения.

Условия построения оптимальности траектории при схеме выведения с двукратным включением двигателя дополнительной ступени аналогичны условиям, полученным для схемы выведения с однократным включением двигателя. Отличие будет состоять лишь в том, что за счет возможности двукратного включения двигателя траектория движения первой ступени должна выбираться исходя из минимально допустимых углов тангажа в каждой точке ее траектории, а заданная высота орбиты на правом конце траектории – обеспечиваться выбором соответствующего значения времени работы двигателя дополнительной ступени при его первом включении. Для того чтобы воспользоваться полученными условиями оптимальности для второй схемы, достаточно в момент окончания времени работы  $t_{1k}$  двигателя первой ступени вместо условия трансверсальности (15) выполнить условие

$$\operatorname{tg} \varphi_{\min}^{\text{доп}}(t_{1k}) = \frac{\lambda_{220}}{\lambda_{120}}, \quad (25)$$

а выполнение условия трансверсальности (22) обеспечивать в момент окончания времени работы двигателя третьей ступени при первом включении  $t_{31}$ .

Численное решение задачи при второй схеме может быть также получено последовательным решением однопараметрических краевых задач:

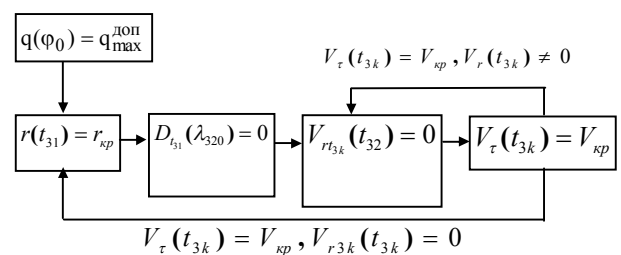


Рис. 3. Последовательность решения краевых задач для схемы выведения с двукратным включением двигателя

*Выведение на эллиптическую орбиту.* Оптимальные траектории выведения в точку перигея эллиптической орбиты (рис. 4) при однократном и двухкратном включении двигателя дополнительной ступени определяется теми же системами уравнений и условиями оптимальности, что и при выведении на круговую орбиту.

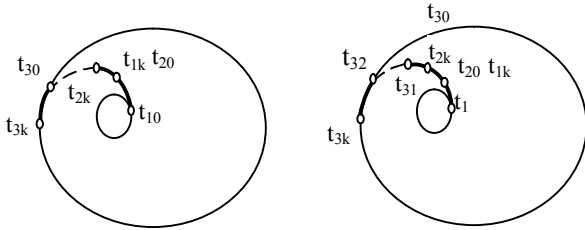


Рис. 4. Схемы выведения на эллиптическую орбиту с однократным и двухкратным включением двигателя дополнительной ступени

При однократном включении двигателя дополнительной ступени численное решение задачи состоит в выборе начальных значений  $\varphi_0, \lambda_{320}, t_x, t_{3k}$ , при которых

$$r_{3k} = r_I, D(\lambda_{320}) = 0, V_{r3k} = 0, V_{\tau k} = V_I$$

при двухкратном включении двигателя численное решение задачи, после обеспечения условия (25), состоит в выборе значения  $t_{31}, \lambda_{320}, t_x, t_{3k}$ , при которых

$$r_{3k} = r_I, D(\lambda_{320}) = 0, V_{r3k} = 0, V_{\tau k} = V_I.$$

### Результаты расчетов

На рис. 5 для гипотетической трехступенчатой РН и схемы выведения с однократным включением двигателя дополнительной ступени приведены зависимости относительного расхода топлива и функции оптимальности тяги  $D$  от времени полета ступени по орбите ( $h, C$ ) с выключенным двигателем.

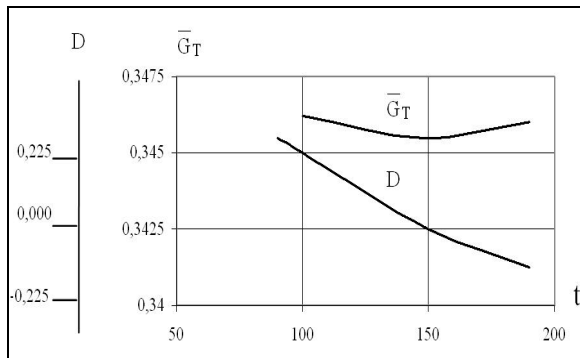


Рис. 5. Зависимость относительного веса топлива  $\bar{G}_T$  и постоянной величины  $D$  от времени полета  $t$  дополнительной ступени с выключенным двигателем

При ненулевом значении функции  $D$  каждая точка, принадлежащая кривой  $\bar{G}_T(t_x)$ , представляет собой результат решения задачи при использовании полученных условий и произвольно заданном времени включения двигателя дополнительной ступени. Нулевому значению функции  $D$  соответствует минимальный расход топлива  $\bar{G}_{Tmin}$ . Эту точку мы получаем при решении задачи по предлагаемой методике. На рис. 6 для схемы выведения с однократным включением двигателя дополнительной ступени приведена зависимость функции оптимальности тяги  $D$  от времени полета РН по оптимальной траектории.

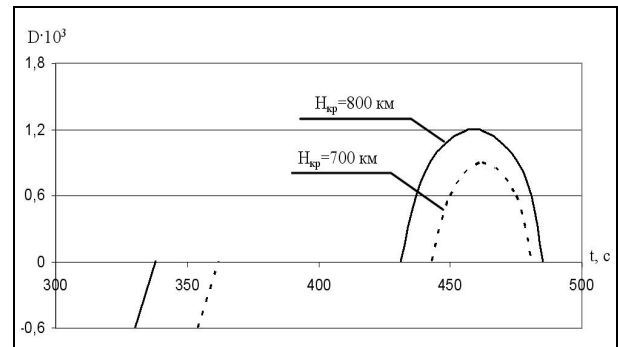


Рис. 6. Изменение функции оптимальности программы тяги  $D$  двигателей гипотетической РН от времени полета (схема с однократным включением двигателя дополнительной ступени)

Из рис. 6 и условия (13) следует, что оптимальная программа тяги отличается от классической [2]. Если в классическом случае оптимальная программа тяги имеет вид  $P_{max} - 0 - P_{max}$ , то в рассматриваемом  $- P_{max} - 0 - P_{min} \neq 0$ .

На рис. 7, 8 для гипотетической РН приведены типовые зависимости относительного полезного веса  $\bar{G}_\Pi$  от высоты круговой орбиты  $h_{\delta\delta}$  и перигея эллиптической орбиты  $h_I$ .

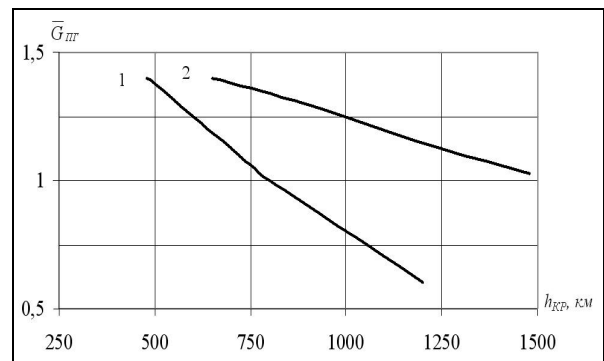


Рис. 7. Зависимость относительного полезного груза от высоты круговой орбиты для гипотетической РН при однократном (1) и двухкратном (2) включении двигателя дополнительной ступени

## Выводы

1. Разработана проектная методика определения оптимальных траекторий выведения в центральном поле тяготения с учетом ограничений, характерных для ракет-носителей, создаваемых на базе отработанных ракетных блоков и дополнительных ступеней.

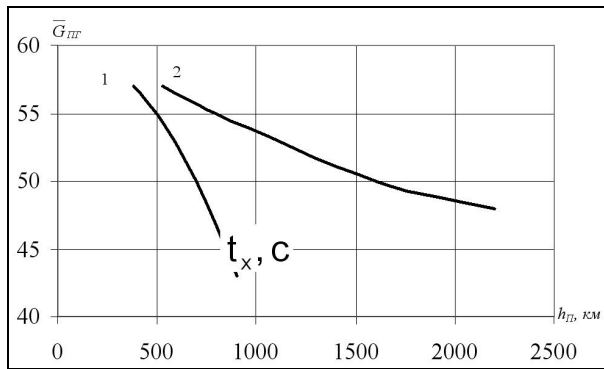


Рис. 8. Залежність відносного корисного ваги від висоти перигея  $h_g$  ракети-носія при виведенні КА на перехідну геостационарну орбіту ( $h_A = 35786$  км) при однократному (1) і двохкратному (2) включенні двигача додаткової ступені

2. Полученные условия оптимальности программы тяги двигачей носителя для заданных схем виведення відрізняються від класических. Их использование позволяет при оценке энергетических возможностей ракеты-носителя свести численное решение задачи к последовательному решению однопараметрических крайових задач.

3. Предлагаемая методика может быть использована в специализированных институтах и конструкторских бюро при баллистическом проектировании ракет-носителей рассматриваемого типа.

## Список литературы

1. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации / Д.Ф. Лоуден. – М.: Мир, 1966. – 150 с.
2. Тарасов Е.В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов / Е.В. Тарасов – М.: Оборонгиз, 1963. – 220 с.
3. Ильин В.А. Оптимальные перелеты космических аппаратов / В.А. Ильин, Г.Е. Кузмак. – М.: Наука, 1976 – 744 с.
4. Анрион Р. Теория второй вариации и ее приложение в оптимальном управлении / Р. Анрион. – М.: Наука, 1979. – 207 с.
5. Шеховцов В.С. Исследование и разработка проектных методов определения характеристик и параметров ракет и ракет-носителей: дис. ... д-ра техн. наук / В.С. Шеховцов. Днепропетровск КБ «Южное», 1996.

Поступила в редколлегию 7.06.2011

**Рецензент:** д-р техн., проф. А.И. Шевцов, Региональный филиал Национального института стратегических исследований, Днепропетровск.

## ОЦІНКА ЕНЕРГЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАКЕТ-НОСІЇВ ПРИ ОДНОРАЗОВОМУ ТА ДВОРАЗОВОМУ ВКЛЮЧЕННІ ДВИГУНА ДОДАТКОВОГО СТУПЕНЯ

О.В. Дегтярев, В.С. Шеховцов

Запропонована методика визначення оптимальних траєкторій виведення для випадку руху ракети-носія в ньютоніанському полі тяжіння. Методика дозволяє врахувати обмеження на параметри руху носія з вимкненим двигуном, кількість включень і час роботи двигунів ступенів, характерних для носіїв, що розглядаються. Показано, що використання отриманих умов оптимальності тяги двигунів носія дозволяє при оцінці енергетичних характеристик носія звести чисельне рішення задачі до послідовного вирішення однопараметричних крайових задач.

**Ключові слова:** енергетичні характеристики, схема виведення, режими польоту, сопряжена система, програми кута тангажу і тяги, умови трансверсальності.

## EVALUATION OF LV POWER CHARACTERISTICS AT SINGLE AND DOUBLE STARTING OF ADDITIONAL STAGE ENGINE

A.V. Degtyarev, V.S. Shekhovtsov

Methods are proposed for determination of optimum injection trajectories for a case when a launch vehicle (LV) moves in Newtonian gravitational field. Those methods allow to take into account the limitations for LV motion parameters with a shutdown engine, a number of startings and time of operation of LV stages' engines which are characteristic for Launch Vehicles of the type reviewed. It is shown that application of obtained conditions of optimum thrust of LV engines permits to reduce a numerical solution of a task to a sequential solution of one-parametric boundary-value problems at evaluation of LV power characteristics.

**Keywords:** power characteristics, injection diagram, optimum flight modes, conjugated system, transversality conditions.