

## ЗАСОБИ НАВЧАННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕРІЇ В УМОВАХ ДИФЕРЕНЦІАЦІЇ

**Постановка проблеми.** Основним засобом навчання студентів аналітичної геометрії є задачі та їх системи. Система задач повинна реалізовувати такі функції: навчальну, розвивальну, виховну, контролювальну [3; 5; 6]. Система задач має сприяти реалізації професійної спрямованості курсу геометрії. Під час навчання студентів важливо враховувати, що тільки спеціальним чином побудована диференційована система задач сприяє досягненню планованих результатів вивчення курсу аналітичної геометрії.

**Аналіз актуальних досліджень.** Великий вклад в теорію задач внесли М. Бурда, В. Гусев, Ю. Колягін, Д. Пойя, Г. Саранцев, О. Скафа, Н. Тарасенкова та ін. Окремі аспекти питань, які пов'язані з побудовою системи задач під час навчання студентів математичних дисциплін у ВНЗ, досліджували Т. Овсяннікова (вимоги до побудови системи задач алгоритмічного типу з аналітичної геометрії), О. Семеніхіна (побудова системи задач, яка є вимірником знань та вмінь студентів відносно освітнього стандарту з аналітичної геометрії), М. Саядан (професійна спрямованість навчання студентів під час розв'язування математичних задач) та ін. Для виваженої побудови диференційованої системи задач окрім дидактичних вимог до самостійної роботи, індивідуально-вікових особливостей студентів, необхідно враховувати також і особливості курсу аналітичної геометрії.

**Мета статті** – виділити вимоги до побудови диференційованої системи задач з аналітичної геометрії для студентів ВНЗ педагогічного профілю.

**Виклад основного матеріалу.** Для аналітичної геометрії визначальним є не тільки предмет її вивчення, а й метод аналітичної геометрії. Тому під час побудови системи задач доцільно розмежовувати задачі, що призначені для встановлення певного математичного факту, і задачі, головна функція яких – демонстрація правила застосування того чи того прийому, методу розв’язування класу задач. До першого виду задач треба віднести задачі, у результаті розв’язання яких встановлюються математичні факти, які часто й ефективно використовуються у розв’язанні інших задач. Наприклад, у курсі аналітичної геометрії задача «Якщо точка  $M$  – точка перетину медіан трикутника  $ABC$ ,

то  $\vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM} = \vec{0}$ » є базовою для задачі «Доведіть, що  $\Delta ABC$  є правильним, якщо  $\vec{AO} + \vec{BO} + \vec{CO} = \vec{0}$ , де  $O$  – центр описаного кола навколо  $\Delta ABC$ ».

Задачу, яка є зразком застосування певного прийому чи способу розв’язування (розкриває суть прийому) називаємо опорною задачею. Наприклад, у курсі аналітичної геометрії опорною є задача: «Визначте тип лінії, яку задану рівнянням  $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 6y + 3 = 0$ ».

Щоб віднести задачу до опорної або базової, доцільно враховувати об’єктивні й суб’єктивні чинники.

До перших ми відносимо: існування класу задач на її застосування; частоту використання схеми розв’язування задачі або математичного факту в інших задачах. Другий чинник пов’язаний із рівнями навченості та навчальності студентів. Більш детально взаємозв’язок між опорними та базовими задачами висвітлено у статті [2]. Отже, для побудови дидактично виваженої диференційованої системи задач необхідно враховувати *функції певної задачі в системі задач*.

Складність вивчення курсу аналітичної геометрії пов’язана з необхідністю одночасного оперування різноманітними знаково-символічними засобами. В аналітичній геометрії умова й вимога задачі можуть бути подані текстом, символьним записом, рисунком, комбіновано тощо. Від специфіки знаково-символьних оболонок, в які загорнено їх зміст, значною мірою залежить успішність першого кроку в аналізі умови та вимоги задачі – декодуванні вихідної інформації [7].

Наприклад, для першокурсника наведені нижче дві задачі є суттєво різними.

**Задача 1.** Знайдіть векторний добуток векторів  $\vec{i}(1;0;0)$ ,  $\vec{j}(0;1;0)$ .

**Задача 2.** Знайдіть координати вектора  $[\vec{j}, \vec{i}]$  (рис. 1).

Задача 1 подана текстом, задача 2 – рисунком. В залежності від специфіки формулювання задачі, студент обирає той чи той спосіб її розв’язування. Так, задачу 1 студенти розв’язують, використовуючи формулу для обчислення координат векторного добутку векторів, другу – використовуючи означення векторного добутку векторів. Рівень трудності задачі залежить від типу мислення студента (образне чи вербальне мислення).

Розглянемо ще дві задачі.

**Задача 3.** Складіть рівняння прямої  $m$ , яка проходить через точку  $A(1; 1)$  і перпендикулярна до прямої  $x - y - 5 = 0$ .

**Задача 4.** Складіть рівняння прямої  $m$  з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку  $A(1; 1)$  і перпендикулярна до прямої  $x - y - 5 = 0$ .

Інформаційна основа цих задач однакова. Однак процес входження у розв’язування задачі 4 є простішим для студента, бо в умові вказано, яким рівнянням прямої треба

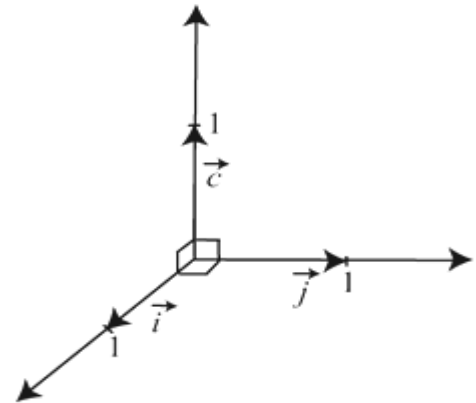


Рис. 1. Умова задачі 2

скористатися. Вимогу задачі 4 можна переформулювати так: знайдіть кутовий коефіцієнт прямої  $m$ .

У задачі 3 вимогу можна переформулювати по-різному: а) знайдіть кутовий коефіцієнт прямої  $m$ ; б) знайдіть напрямний вектор прямої  $m$ ; в) знайдіть вектор нормалі прямої  $m$ ; г) знайдіть відрізки на осях прямої  $m$ . Спосіб розв'язування задачі у кожному випадку буде різним. Варіативність у виборі рівняння прямої і є однією з причин труднощів, пов'язаних з першим кроком розв'язування таких задач.

Як зазначає Н. А. Тарасенкова [7], складність декодування умови й вимоги задачі залежить від таких характеристик: в якому плані (реальному чи символічному) сформульовано задачу, які знаково-символьні засоби задіяно у формулюванні; чи має формулювання властивість гіпертекстовості; чи є необхідним створення додаткових замінників для конкретизації умови та діяльності перекодування. Так, декодування умови задачі, яка сформульована у математичних термінах, є простішим для студентів, ніж декодування умови прикладної задачі.

Формальне ж заучування рівнянь ліній, фактів аналітичної геометрії, невміння студента перекодувати рівняння лінії в інше рівняння цієї лінії без втрати змісту, невміння встановлювати взаємно однозначну відповідність між формою знаково-символьних засобів та їх об'єктивним змістом стає причиною виникнення конфлікту між логічним і візуальним.

Тому у навчанні аналітичної геометрії доцільно використовувати різні знаково-символьні оболонки текстів задач та навчати студентів переформулювати умову та вимогу задач. Для розвитку вміння переосмислювати умову задачі корисним є розв'язування задач таких типів: задачі з несформульованим запитанням; з недостатньою кількістю даних; з надлишком даних. Складність задач доцільно нарощувати за принципом: спочатку нарощувати складність задач, загортаючи їх в однаковий тип знаково-символьних оболонок, а потім у різні знаково-символьні оболонки.

Отже, для побудови дидактично виваженої диференційованої системи задач також необхідно також враховувати *спосіб подання умови та вимоги задачі*.

Під час побудови диференційованої системи задач необхідно враховувати те, що одну й ту саму задачу курсу аналітичної геометрії можна розглядати в різних контекстах. Наведемо приклад.

**Задача.** Доведіть, що середини  $M$  і  $N$  основ трапеції  $ABCD$ , точка  $O$  перетину її діагоналей і точка  $F$  перетину прямих, що містять бічні сторони трапеції, лежать на одній прямій.

Ця задача в курсі аналітичної геометрії може бути розв'язана кількома способами, зокрема: векторним методом; методом координат; методом геометричних перетворень. Тому звернення до цієї задачі під час вивчення відповідної теми провокуватиме вибір відповідного способу її розв'язання. Тобто зміст теми підказує, які факти, правила необхідно використати для розв'язання цієї задачі. Якщо ця задача розглядається в інших темах (наприклад, «Лінії другого порядку»), то таких підказок немає, і, як наслідок, в студентів виникають труднощі в її розв'язанні. Отже, під час побудови диференційованої системи задач треба враховувати внутрішньопредметне контекстне наповнення змісту задачі.

Інший приклад пов'язаний із контекстними нашаруваннями, які привносять прикладні аспекти задач (міжпредметне контекстне наповнення змісту задач). Розглянемо задачі.

**Задача 1.** У пунктах  $A$  і  $B$  розміщені звукометричні батареї. Звук від пострілу знаряддя  $M$  був почутий у пунктах  $A$  і  $B$  не одночасно. У пункті  $A$  він був почутий  $t$  секундами пізніше, ніж у пункті  $B$ . Знайдіть розміщення батареї відносно пунктів  $A$  і  $B$ .

**Задача 2.** Світловий промінь, що виходить з лівого фокуса еліпса, відбивається від еліпса в точці  $(2; 5)$ . Визначте координати точки еліпса, в якій відіб'ється цей промінь. Знайдіть кут відбиття променя.

**Задача 3.** Нехай на залізничній лінії в точках  $A$  і  $B$  розміщені станції. З населеного пункту  $N$  в околиці станції  $B$  вантаж можна доставляти на станцію  $A$  двома способами: безпосередньо з населеного пункту  $N$  автотранспортом на станцію  $B$ , а потім по залізничній

дорозі від станції  $B$  до станції  $A$ . Визначте, для яких населених пунктів  $N$  який спосіб вигідніший (визначити *область впливу* станції  $B$ ) [1].

Задачі 1 і 2 – фізичного змісту, задача 3 – економічного. Задачі 1 і 2 доцільно пропонувати студентам під час навчання аналітичної геометрії студентів спеціальності «Математика і фізика», задачу 3 для студентів спеціальності «Математика і економіка».

Для розв'язування наведених трьох задач використовується один і той самий математичний апарат. Однак, якщо в умові задачі 2 є контекстна підказка (вжито термін «еліпс», що підказує, з якої саме теми треба використати відомості), то в умовах задач 1 і 3 таких підказок немає. Тому у студентів виникають труднощі у виборі математичного апарату розв'язування таких задач.

Для виваженого використання міжпредметного контекстного наповнення змісту задач під час комплектування диференційованої системи задач необхідно дотримуватися такої послідовності: 1) задачі суто математичного змісту; 2) прикладні задачі, умова чи вимога яких містить контекстні підказки; 3) прикладні задачі, умова чи вимога яких не містить таких підказок.

Отже, під час складання диференційованої системи задач треба враховувати *контекстне наповнення змісту задачі* як внутрішньопредметне, так і міжпредметне.

Під час проведення занять з аналітичної геометрії доцільно приділяти належну увагу професійній підготовці вчителя математики.

На практичних заняттях з аналітичної геометрії важливо розглядати задачі шкільного курсу математики, у розв'язуванні яких використовуються факти аналітичної геометрії, метод аналітичної геометрії; з'ясовувати, розв'язування яких типів задач спрощується завдяки застосування векторно-координатного методу; розв'язувати задачі, які є узагальненням задач шкільного курсу математики; зіставляти різні способи розв'язування однієї і тієї ж задачі; показувати переваги методу аналітичної геометрії, межі його застосовності, з'ясовувати цінність задачі, системи вправ, що розв'язуються на практичному занятті, тощо.

Отже, до системи задач доцільно включати: 1) задачі шкільного курсу математики, під час розв'язування яких використовуються методи аналітичної геометрії; 2) задачі, які допомагають поглянути на елементарну математику з точки зору вищої; 3) задачі, які сприяють формуванню евристичних умінь; 4) задачі, які моделюють способи доведення теореми тощо.

Найбільш ефективною для відпрацювання знань і вмінь на практичному занятті виявилася система задач, що складається з трьох блоків диференційованих задач.

Системотвірним фактором системи задач *першого блоку* є обов'язкові для засвоєння студентами факти теми. Тому до першого блоку задач ми відносимо цикли задач, кожен з яких містить базову задачу з теми та задачі, які розв'язуються з використанням факту, установленого в базовій задачі. До кожної теми виділяємо цикли:  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , де  $n$  – число базових задач теми.

Системотвірним фактором системи задач *другого блоку* слугує спосіб діяльності, тому що по закінченню вивчення аналітичної геометрії студент має не тільки знати основні поняття й факти курсу, але й володіти методами та прийомами доведення теорем, способами розв'язування задач. Орієнтація студента під час розв'язування задачі не лише на результат, а й на процес його отримання, націлюватиме студента на виділення кроків розв'язування задачі, складання схеми її розв'язування, порівняння можливих способів розв'язування. Тому до *другого блоку* задач відносимо цикли задач, кожен з яких містить опорну задачу з теми й задачі, що розв'язуються з використанням прийому, продемонстрованого в опорній задачі. До кожної теми виділяємо цикли задач:  $O_1, O_2, \dots, O_m$ , де  $m$  – число опорних задач теми.

В процесі опанування поняттями, фактами й способами діяльності з певного модуля, студентів доцільно вчити обирати той чи той факт, метод (прийом) розв'язування задач. Тому диференційовані задачі *третього блоку* містять цикли задач, побудовані навколо певного геометричного об'єкта:  $T_1, T_2, \dots, T_r$ . Такі цикли задач слугують формуванню у студентів узагальнених умінь, що є необхідною умовою формування в них системних знань.

Складність певної задачі циклу залежить від кількості геометричних об'єктів, поданих у задачі, кількості й типу зв'язків між ними, кількості кроків розв'язування, способу подання вимоги та умови задачі, контекстних нашарувань.

Для побудови диференційованої системи задач, насамперед, доцільно виділити опорні та базові задачі з даної теми. Їх кількість визначається найвищим рівнем засвоєння студентами матеріалу теми. Серед вибраних задач доцільно виділити ті, які повинні уміти розв'язувати всі студенти групи (обов'язковий рівень). Кількість задач у циклах залежить від рівнів навчальності студентів. Їх має бути достатньо для формування умінь застосовувати факт чи прийом кожним студентом. Тому під час добору задач до циклів доцільно орієнтуватися на найнижчий рівень навчальності студентів групи.

**Висновки.** Для побудови дидактично виваженої диференційованої системи задач доцільно дотримуватися таких вимог: 1) диференційована система задач повинна сприяти засвоєнню означень, фактів та способів діяльності; 2) спосіб подання задач системи має бути різним; 3) до диференційованої системи задач доцільно включати задачі прикладного змісту, задачі шкільного курсу математики; 4) до системи бажано включати задачі на обчислення, на побудову, на доведення, на дослідження. Ефективною під час відпрацювання знань і вмінь на практичному занятті є система задач, яка складається з трьох блоків диференційованих задач. Перший блок побудований навколо базових фактів курсу. Другий слугує для відпрацювання методів та прийомів розв'язування задач з аналітичної геометрії. Третій блок містить цикли задач, розв'язання яких сприяє узагальненню та систематизації знань студентів. Подальше дослідження пов'язане з виділенням вимог до системи задач для дистанційного курсу аналітичної геометрії.

### **Література:**

1. Бахвалов С. В. Аналитическая геометрия : учеб. для пед. ин-тов / С. В. Бахвалов, Л. И. Бабушкин, В.П. Иваницкая; под ред. С. В. Бахвалова. – [3-е изд.]. – М. : Просвещение, 1965. – 368 с.
2. Коломієць О. М. Деякі проблеми реалізації алгоритмічного підходу у навчанні розв'язування геометричних задач / О. М. Коломієць // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. праць : у 3 т. – Кривий Ріг, 2002. – Т. 1. – С. 142–148.
3. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. Ч. 1. / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – 109 с.
4. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. – [3-е изд.]. – М. : Наука, 1968. – 176 с.
5. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология : [монография] / Е. И. Скафа. – Донецк : Изд-во ДонНУ, 2004. – 439 с.
6. Слєпкань З. І. Методика навчання математики : підручник для студ. мат. спец. пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. – К. : Зодіак-Еко, 2000. – 512 с.
7. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : [монографія] / Н. А. Тарасенкова. – Черкаси : Відлуння-плюс, 2002. – 399 с.

*У статті пропонується спосіб побудови диференційованої системи задач з аналітичної геометрії для студентів ВНЗ педагогічного профілю.*

**Ключові слова:** система задач, диференційоване навчання, аналітична геометрія.

*В статье предлагается способ построения дифференцированной системы задач по аналитической геометрии для студентов ВНЗ педагогического профиля.*

**Ключевые слова:** система задач, дифференцированное обучение, аналитическая геометрия.

*The way of construction of the differentiated system of problems of analytical geometry for students of higher educational establishments pedagogical profile is offered.*

**Key words:** the system of problems, differentiated teaching, analytical geometry.