ISSN 2312–4547. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". 2015. Вип. 7, № 8. С. 125–137

УДК 536.24

СИНТЕЗ АДЕКВАТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ю. Л. Меньшиков

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова, 18/14, Днепропетровск, 49010, e-mail: menshikov2003@list.ru

Рассмотрены вопросы построения адекватных алгебраических математических моделей физических процессов. Установлены свойства реальных процессов, для которых можно построить алгебраические математические модели. Дано определение адекватных математических моделей в алгебраической форме и сформулированы некоторые их свойства. Далее предложен алгоритм идентификации параметров указанных моделей. Для получения устойчивых результатов идентификации использован метод регуляризации А. Н. Тихонова. Рассмотрены различные варианты постановки таких задач. В качестве примера рассмотрена задача идентификации параметров физического процесса выплавки стали. Даны методические рекомендации.

Ключевые слова: алгебраические математические модели, адекватные модели, идентификация параметров, регуляризация, модель процесса выплавки стали.

1. Введение

Математическое моделирование физических процессов является важным инструментом исследования окружающего мира. Математические модели физических процессов могут быть заданы в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений или системы уравнений в частных производных, алгебраических соотношений, интегральных уравнений и т.д. Во многих случаях математическая модель строится как алгебраическое соотношение между характеристиками физического процесса. Такого типа модели получили значительное распространение в технике, экологии, экономике и т.д. [1, 2]. Для обоснованного применения математических моделей указанного типа необходимо принимать во внимание, что они получены при определенных условиях. Рассмотрим эти условия более детально. Пусть физический процесс в начальный момент времени $t = t_0$ характеризуется в общем случае бесконечным количеством переменных (характеристик) $q_1, q_2, ..., q_n, ...$. Далее эти переменные обрабатываются и преобразуются с течением времени по некоторому алгоритму, в результате чего имеют место иные характеристики физического процесса $u_1, u_2, ..., u_k$ в момент времени $t = T$. Выбор характеристик физического процесса $u_1, u_2, ..., u_k$ определяется конечными целями исследований. Если алгоритм преобразования со временем не изменяется, тогда можно получить связь между переменными $q_1, q_2, ..., q_n, ...$ и характеристиками $u_1, u_2, ..., u_k$ в алгебраической форме. В общем случае эта связь является сложной нелинейной функцией бесконечного множества переменных:

$$\overline{\varphi}(q_1, q_2, \dots) = (\varphi_1(q_1, q_2, \dots), \varphi_2(q_1, q_2, \dots), \dots, \varphi_k(q_1, q_2, \dots))^T = \\ = \overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T, \tag{1.1}$$

где $(.)^T$ — операция транспонирования.

Если только некоторые переменные процесса $q_1, q_2, ..., q_n$ изменяются со временем, а остальные практически не изменяются, или главное воздействие на показатели $u_1, u_2, ..., u_k$ оказывают только характеристики $q_1, q_2, ..., q_n$, тогда связь (1.1) преобразуется в следующую приближенную более простую алгебраическую зависимость:

$$\widetilde{\overline{\varphi}}(q_1, q_2, \dots, q_n) = (\widetilde{\varphi}_1(q_1, \dots, q_n), \widetilde{\varphi}_2(q_1, \dots, q_n), \dots, \widetilde{\varphi}_k(q_1, \dots, q_n))^T = \\ = \widetilde{\overline{u}} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \dots, \widetilde{u}_k)^T. \tag{1.2}$$

Если ограничиться только малыми изменениями характеристик $q_1, q_2, ..., q_n$ в малой окрестности D точки $q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0$, тогда любую гладкую функцию $\overline{\varphi}(q_1, q_2, ..., q_n)$ в уравнении (1.2) можно приближенно заменить линейной зависимостью:

$$B\overline{q} = \widetilde{\overline{u}}, \quad \overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^T, \tag{1.3}$$

где B — матрица линейных математических моделей связи вектора $\overline{q}$ с вектором $\widetilde{\overline{u}}$ размером $k \times n$.

Рассмотрим одну строку в (1.3):

$$b_{k,1}q_1 + b_{k,2}q_2 + b_{k,3}q_3 + \cdots + b_{k,n}q_n = \widetilde{u}_k, \tag{1.4}$$

где $b_{k,1}, b_{k,2}, ..., b_{k,n}$ — параметры приближенной математической модели связи показателей $q_1, q_2, ..., q_n$ физического процесса с показателем $\widetilde{u}_k$.

Так как физический процесс согласно предположению является неизменным во временеми, то параметры математической модели этого физического процесса будут постоянными.

Рассмотрим некоторую связную открытую окрестность $Q_q \subset E^n$ из области изменения параметров $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Определение 1.1. Пусть $\widetilde{\overline{q}} = (\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, ..., \widetilde{q}_n)^T \in Q_q$ — экспериментальные измерения. Если при подстановке этих измерений $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, ..., \widetilde{q}_n$ в (1.3) получаем показатель $B\widetilde{\overline{q}}$, который отличается от измерения $\widetilde{\overline{u}}$ на величину δ и эта величина не превосходит ошибки δ_0 измерения показателя $\widetilde{\overline{u}}$, тогда математическую модель (1.3) будем называть линейной локальной адекватной математической моделью физического процесса по показателям $\widetilde{\overline{u}}$.

Определение 1.2. Если при подстановке измерений $\widetilde{q}_1, \widetilde{q}_2, ..., \widetilde{q}_n \in Q_q$ в (1.4) получаем показатель u_k, который отличается от измерения $\widetilde{u}_k$ на величину δ_k и эта величина не превосходит ошибки $\delta_{k,0}$ измерения показателя $\widetilde{u}_k$, тогда математическую модель (1.4) будем называть линейной локальной адекватной математической моделью физического процесса по показателю u_k.

Определение 1.3. Если выполняется неравенство $\delta_{k,0} < \delta_k$ для показателя $\widetilde{u}_k$, тогда математическую модель (1.4) будем называть линейной локальной условно-адекватной с погрешностью δ_k по показателю u_k.

На основе процесса построения математической модели (1.3) можно сделать вывод, что не существует в принципе математической модели типа (1.3), которая бы точно описывала связь параметров реального физического процесса.

Исходя из условий построения приближенной математической модели физического процесса в алгебраическом виде, можно сформулировать следующие ограничения на исследуемые физические процессы:

1) алгоритм преобразования переменных $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$ физического процесса к показателю $\widetilde{\overline{u}}$ не изменяется во времени (стабильный во времени);

2) изменение характеристик $q_1, q_2, ..., q_n$ происходит в некоторой малой связной области $Q_q \subset R^n$;

3) влияние характеристик $q_{n+1}, q_{n+2}, ...$ на показатель $\widetilde{\overline{u}}$ является незначительным или эти характеристики не изменяются в процессе исследования физического процесса.

Из вышеизложенного вытекают свойства локальной линейной математической модели физического процесса в алгебраическом виде:

1) математические модели типа (1.3) при любом выборе параметров $b_{k,1}$, $b_{k,2}, b_{k,3}, ..., b_{k,n}$ являются приближенными;

2) математические модели типа (1.3) хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой малой окрестности изменения переменных $Q_q \subset R^n$.

Следует потребовать также, чтобы результаты построения математической модели (параметров $b_{k,1}, b_{k,2}, b_{k,3}, \ldots, b_{k,n}$) были устойчивыми к малым изменениям исходных данных. Кроме того, желательно, чтобы количество исходных данных для расчетов параметров математической модели было минимальным.

С учетом постоянства алгоритма преобразования переменных этот физический процесс можно называть стабильным в указанном выше смысле.

2. Постановка задачи идентификации параметров адекватных линейных математических моделей

Для построения математической модели типа (1.4) используется подход, предложенный в работах [3, 4]. В данной работе количество измерений характеристик процесса предполагается равным количеству этих переменных. Погрешность измерений имеет интервальный тип и величина ее предполагается заданной [5, 6].

Рассматривается задача синтеза линейной математической модели статичного процесса с n переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n$ относительно переменной q_1 с количеством измерений каждой переменной равной n в детерминированной постановке, как задача решения алгебраической системы [3, 4]:

$$A_p(q_2, ..., q_n)z = q_1 = u_1, \tag{2.1}$$

где оператор $A_p(q_2, \ldots, q_n)z$ определяется следующим образом:

$$A_p(q_2, \ldots, q_n)z = z_1 q_2 + z_2 q_3 + \cdots + z_{n-1} q_n + z_n e,$$

e — единичный вектор размерности n; $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ — искомый вектор параметров математической модели процесса, $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in})^T, i = \overline{1, n}$.

Поскольку измерения переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ получены экспериментальным путем, то предполагается, что каждое измерение $q_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ имеет погрешность, максимальная величина которой известна априори:

$$| q_{ij} - q_{ij}^{ex} | \leq \delta_i, 1 \leq i, j \leq n, \tag{2.2}$$

где q_{ij}^{ex} — точное измерение переменной q_{ij}. Подобная информация об ошибках измерений определяется техническими характеристиками измерительных устройств. Статистические характеристики ошибок измерений неизвестны.

Обозначим через p вектор из пространства $E^{n(n-1)} = E^n \oplus E^n \oplus \cdots \oplus E^n$:

$$p^T = (q_{21}, q_{22}, \ldots, q_{2n}, q_{31}, q_{32}, \ldots, q_{n1}, q_{n2}, \ldots, q_{nn}),$$

где E^n — евклидово векторное пространство размерности n со стандартной нормой.

Каждый вектор q_i может принимать значение в замкнутой области $D_i \subset E^n$ согласно неравенствам (2.2). Вектор p может принимать значения в замкнутой области $D = D_2 \oplus D_3 \oplus \cdots \oplus D_n \subset E^{n(n-1)}$. Каждому вектору p из области D соответствует определенный оператор A_p, а множеству $D \subset E^{n(n-1)}$ — класс операторов $\{A_p\} = K_A$. Однако при этом необходимо учитывать, что среди возможных матриц в системе (1.4) возможно есть вырожденные. Кроме того, в случае вырожденности матриц системы, правая часть системы (1.4) может удовлетворять условию существования решений.

Представим (2.1) как

$$A_p z = u_{\delta_1}, \tag{2.3}$$

где $u_{\delta_1} = q_1; u_{\delta_1} \in U = E^1; z \in Z = E^n; \| u_{\delta_1} - u_1^{ex} \|_U \leq \delta_1, u_1^{ex}$ — точная правая часть уравнения (2.3);

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \| A_{p_\alpha} - A_{p_\alpha} \| \leq h_1,$$

$\| \, . \, \|_Z, \| \, . \, \|_U$ — нормы в векторном евклидовом пространстве.

Задачу построения адекватных математических моделей в алгебраической форме можно сформулировать таким образом: определить вектор $z \in Z$, который при подстановке в уравнение (2.3) дает вектор $A_p z$, который отличается по норме от u_{δ_1} на величину, меньшую δ_1.

Тогда множество возможных решений этой задачи (множество адекватных математических моделей) при фиксированном операторе $A_p \in K_A$ будет определяться следующим образом:

$$Q_{\delta_1,p} = \{z : \|A_p z - u_{\delta_1}\|_U \leq \delta_1\}.$$

Множество $Q_{\delta_1,p}$ ограничено, если $\Delta = det A_p \neq 0$, и, возможно, неограничено, если $\Delta = det A_p = 0$. Если учитывать погрешность измерений, то можно показать, что в множестве $\{A_p\} = K_A$ обязательно присутствует хотя бы один оператор, определитель матрицы которого равен нулю. Кроме того, из построения линейной математической модели следует, что в случае $\Delta = det A_p = 0$ правая часть может удовлетворять условию разрешимости.

Любой вектор из множества $Q_{\delta_1,p}$ представляет собой адекватную математическую модель процесса, так как после действия фиксированного оператора A_p вектор $A_p z$ совпадает с заданным вектором u_{δ_1} с точностью δ_1 в каждой строке системы (2.3). Таких адекватных математических моделей существует бесконечно много.

Следует отметить, что широко используемый на практике метод наименьших квадратов для получения математических моделей в алгебраической форме не требует выполнения условия адекватности модели в процессе их построения.

Для выбора индивидуальной математической модели из множества $Q_{\delta_1,p}$ необходима дополнительная информация. Если такая информация отсутствует, то возможно принимать за решение уравнения (2.3) элемент $z_p \in Q_{\delta_1,p}$, для которого выполняется равенство [7]

$$\| z_p \|^2 = \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \| z \|^2 . \qquad (2.4)$$

Вектор $z \in Q_{\delta_1,p}$ можно интерпретировать как максимально устойчивый элемент к малым изменениям факторов, не принятых во внимание (наиболее стабильная часть). Влияние указанных факторов будет только повышать норму вектора z_p [7]. Такое свойство решения z_p особенно важно при дальнейшем использовании этого решения, например для построения достоверного краткосрочного прогноза.

Теорема 2.1. *Экстремальная задача* (2.4) *на множестве* $Q_{\delta_1,p}$ *имеет единственное решение.*

Доказательство. Покажем, что множество $Q_{\delta_1,p}$ в общем случае может быть неограниченным. Запишем систему (2.1) для n измерений $q_{ij}, j = \overline{1,n}$ каждой характеристики $q_i, i = \overline{1,n}$.

$$\begin{pmatrix} q_{2,1} & q_{3,1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,1} & 1 \\ q_{2,2} & q_{3,2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,2} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2,n-1} & q_{3,n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,n-1} & 1 \\ q_{2,n} & q_{3,n} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{1,1} = u_{1,1} \\ q_{1,2} = u_{1,2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{1,n-1} = u_{1,n-1} \\ q_{1,n} = u_{1,n} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Введем в рассмотрение вектора $\hat{q}_i = (q_{2,i}, q_{3,i}, \ldots, q_{n,i}), i = \overline{1,n}, \hat{q}_i \in E^{n-1}$.

Пусть первые вектора $\hat{q}_i, i = \overline{1,n}$ являются линейно независмыми в E^{n-1}. Тогда определитель матрицы A_1, составленной из этих векторов, будет не равным нулю, $detA_1 \neq 0$. В этом случае вектор $\hat{q}_n \in E^{n-1}$ будет линейной комбинацией первых векторов $\hat{q}_i, i = \overline{1,n-1}$:

$$\hat{q}_n = \gamma_1 \hat{q}_1 + \gamma_2 \hat{q}_2 + \cdots + \gamma_{n-1} \hat{q}_{n-1}, \tag{2.6}$$

где $\gamma_j, j = \overline{1,n-1}$ — константы, $\hat{q}_n = (q_{2,n}, q_{3,n}, \ldots, q_{n,n}), \hat{q}_n \in E^{n-1}$.

Умножим теперь первую строку матрицы A в системе (2.5) на $-\gamma_1$, вторую строку на $-\gamma_2$ и т.д. Предпоследнюю строку матрицы A умножим на константу $-\gamma_{n-1}$. Затем эти строки складываем с последней строкой матрицы A. В последней строке матрицы A будем иметь нулевые элементы, кроме последнего $a_{n,n}$. Этот элемент $a_{n,n}$ будет равен

$$a_{n,n} = -\gamma_1 - \gamma_2 - \cdots - \gamma_{n-1} + 1. \tag{2.7}$$

Пусть вывполняется равенство

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{n-1} = 1. \tag{2.8}$$

Тогда последний элемент $a_{n,n}$ будет равен нулю. Отсюда вытекает, что $detA = 0$ для случая (2.6). Если же $detA_1 = 0$, тогда и $detA = 0$. Множество векторов $\hat{q}_i, i = \overline{1,n-1}$, удовлетворяющих условию (2.6), представляет собой некоторую поверхность в E^{n-1}. Таким образом, существует множество возможных исходных данных, для которых матрица A будет вырожденная. Поскольку проверку выполнения условия (2.6) на практике можно выполнить лишь с конечной точностью, то множество исходных данных, удовлетворяющих условию вырожденности, нужно еще более расширить.

Рассмотрим матрицу A_3, полученную из матрицы A заменой одного столбца (кроме последнего) на столбец правой части $\hat{\hat{q_1}} = (q_{1,1}, q_{1,2}, \ldots, q_{1,n})^T$, $\hat{\hat{q_1}} \in E^n$. Предположим, что заменен третий столбец

$$A_3 = \begin{pmatrix} q_{2,1} & q_{3,1} & q_{1,1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,1} & 1 \\ q_{2,2} & q_{3,2} & q_{1,2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,2} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2,n-1} & q_{3,n-1} & q_{1,n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,n-1} & 1 \\ q_{2,n} & q_{3,n} & q_{1,n} & \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,n} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Повторяя рассуждения, проведенные выше, можно получить в матрице A_3 последнюю строку, состоящую из нулей (кроме последнего элемента в этой строке). Следовательно, при любом выборе исходных данных ранг матрицы A_3 равен $(n-1)$.

Рассмотрим случай, когда в последнем столбце матрицы A помещен столбец $\hat{\hat{q_1}} = (q_{1,1}, q_{1,2}, \ldots, q_{1,n})^T$ вместо столбца из единиц:

$$A_n = \begin{pmatrix} q_{2,1} & q_{3,1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,1} & q_{1,1} \\ q_{2,2} & q_{3,2} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,2} & q_{1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{2,n-1} & q_{3,n-1} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,n-1} & q_{1,n-1} \\ q_{2,n} & q_{3,n} & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & q_{n,n} & q_{1,n} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Ранее предполагалось, что ранг матрицы $(n-1)$-го порядка, стоящей в левом верхнем углу, равен $(n-1)$.

Рассмотрим вектора $q^i = (q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,n-1})^T \in E^{n-1}, \overline{i = 2, n}$. Эта система векторов линейно независима в E^{n-1}. Тогда вектор q^1 линейным образом выражается через вектора $q^i = (q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots, q_{i,n-1})^T \in E^{n-1}, \overline{i = 2, n}$:

$$q^1 = \alpha_1 q^2 + \alpha_2 q^3 + \cdots + \alpha_{n-1} q^n, \tag{2.11}$$

где $\alpha_j, j = \overline{1, n-1}$ — константы.

Умножим теперь первый столбец матрицы A в системе (2.5) на $-\alpha_1$, второй столбец — на $-\alpha_2$ и т.д; предпоследний столбец матрицы A — на константу α_{n-1}. Затем эти столбцы складываем с последним столбцом матрицы A. В последнем столбце матрицы A будем иметь нулевые элементы, кроме последнего элемента $a_{n,n}$. Этот элемент $a_{n,n}$ будет равен

$$a_{n,n} = q_{1,n} - \alpha_1 q_{2,n} - \alpha_2 q_{3,n} - \cdots - \alpha_{n-1} q_{n,n}. \tag{2.12}$$

Множество значений элемента $a_{n,n}$ будет заполнять отрезок между максимальным и минимальным элементами $q_{1,i}$, если выполняется равенство

$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = 1$. Следовательно, такое значение исходных данных возможно. В этом случае ранг расширенной матрицы A системы (2.5) будет совпадать с рангом исходной матрицы A. Решение системы (2.5) будет существовать и определяться с точностью до слагаемых из подпространства, перпендикулярного подпространству натянутому на вектора $q^i \in E^{n-1}, \overline{i = 2, n}$.

Из приведенных рассуждений следует, что в общем случае множество возможных решений (множество адекватных математических моделей)

$$Q_{\delta_1,p} = \{z : \|A_p z - u_{\delta_1}\|_U \le \delta_1\}$$

может быть неограниченным.

Покажем, что множество $Q_{\delta_1,p} = \{z : \|A_p z - u_{\delta_1}\|_U \le \delta_1\}$ замкнуто. Выберем сходящуюся последовательность элементов $\{z_k\}$ из этого множества: $\|z_k - z_0\| \to 0$. Очевидно, что для каждого элемента $\{z_k\}$ выполняется неравенство $\|A_p z_k - u_{\delta_1}\|_U \le \delta_1$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ и учитывая непрерывность оператора A_p, имеем $\|A_p z_0 - u_{\delta_1}\|_U \le \delta_1$.

Множество $Q_{\delta_1,p} = \{z : \|A_p z - u_{\delta_1}\|_U \le \delta_1\}$ выпуклое. Пусть $z_1, z_2 \in Q_{\delta_1,p}$. Рассмотрим элемент $z_\alpha = \alpha z_1 + (1-\alpha) z_2, 0 \le \alpha \le 1$. Покажем, что элемент $z_\alpha \in Q_{\delta_1,p}$.

$$\|A_p z_\alpha - u_{\delta_1}\|_U = \|A_p(\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2) - u_{\delta_1}\|_U =$$
$$= \|\alpha A_p z_1 + (1-\alpha) A_p z_2 - \alpha u_{\delta_1} + (1-\alpha) u_{\delta_1}\|_U \le$$
$$\le \alpha \|A_p z_1 - u_{\delta_1}\|_U + (1-\alpha)\|A_p z_2 - u_{\delta_1}\|_U \le \delta_1.$$

Очевидно, что множество Лебега $M(v)$ для функционала $\|z\|^2$

$$M(v) = \{z : z \in Q_{\delta_1,p}, \|z\|^2 \le \|v\|^2\}$$

компактно в E^n. Кроме того, функционал $\|z\|^2$ является непрерывным и сильно выпуклым на $Q_{\delta_1,p}$ [10]. С использованием результатов теоремы 4.3.1 [10] завершается доказательство.

Рассмотрим задачу идентификации параметров с учетом погрешности задания оператора A_p.

Введем в рассмотрение множество $Q^* = \bigcup_{p \in D} Q_{\delta_1,p}$.

В данном случае возможна постановка следующей экстремальной задачи (в условиях отсутствия дополнительной информации):

$$\| z^* \|^2 = \inf_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \| z \|^2 . \tag{2.13}$$

Теорема 2.2. *Решение z^* задачи* (2.13) *существует и оно единственно.*

Доказательство основано на свойстве непрерывности решения z_p экстремальной задачи (2.4) от параметра $p \in D$ и результатов теоремы 2.1.

Вектор $z^* \in Q^*$ является адекватной математической моделью процесса, которая имеет наименьшую норму среди всех возможных, если учесть погрешность оператора A_p.

Также возможна постановка следующей экстремальной задачи:

$$\| z^*_{sup} \|^2 = \sup_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \| z \|^2 . \tag{2.14}$$

Вектор $z^*_{sup} \in Q^*$ имеет наибольшую норму среди решений задачи (2.4) на множествах $Q_{\delta_1,p}$.

Модели z^*, z^*_{sup} могут быть использованы для краткосрочного прогноза изменения показателя q_1, так как, с одной стороны, модели z^*, z^*_{sup} получены с использованием минимального количества измерений, а с другой стороны, они устойчивы к факторам, которые не были учтены.

Кроме задач идентификации параметров в постановках (2.13),(2.14) возможны другие варианты постановок:

$$\| z_{0,0,\dots,0,1} \|^2 = \inf_{q_2 \in D_2} \dots \inf_{q_{n-1} \in D_{n-1}} \sup_{q_n \in D_n} \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \| z \|^2, \tag{2.15}$$

$$\| z_{0,0,\dots,0,1,1} \|^2 = \inf_{q_2 \in D_2} \dots \sup_{q_{n-1} \in D_{n-1}} \sup_{q_n \in D_n} \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \| z \|^2, \tag{2.16}$$

....

$$\| z_{1,1,\dots,1,1} \|^2 = \sup_{q_2 \in D_2} \dots \sup_{q_{n-1} \in D_{n-1}} \sup_{q_n \in D_n} \inf_{z \in Q_{\delta_1,p}} \| z \|^2 . \tag{2.17}$$

В некоторых случаях необходимы следующие постановки задач идентификации параметров:

$$\| z^{0,0,\dots,0,0} \|^2 = \inf_{z \in Q_{\delta_1,p^{0,0,\dots,0}}} \| z \|^2, \tag{2.18}$$

$$\| z^{0,0,\dots,0,1} \|^2 = \inf_{z \in Q_{\delta_1,p^{0,0,\dots,1}}} \| z \|^2, \tag{2.19}$$

....

$$\| z^{1,1,\dots,1,1} \|^2 = \inf_{z \in Q_{\delta_1,p^{1,1,\dots,1}}} \| z \|^2 . \tag{2.20}$$

где вектор $p^{0,0,\dots,0}$ имеет минимально возможные значения всех компонент вектора $p \in D$, вектор $p^{0,0,\dots,1}$ — минимально возможные значения компонент $q_2, \dots, q_{n-1}$ и максимально возможное значение q_n ; $\dots$; вектор $p^{1,1,\dots,1}$ — максимально возможные значения всех компонент вектора $p \in D$.

В ряде случаев возможна и такая постановка задачи идентификации параметров:

$$\| A_{p^{opt}} z^{pl}_{\delta_1} - u_{\delta_1} \|^2 = \inf_{z_a \in Q^*} \sup_{A_p \in K_A} \| A_p z_a - u_{\delta_1} \|^2 . \tag{2.21}$$

где z_a — решение экстремальной задачи:

$$\| z_a \|^2 = \inf_{z \in Q_{\delta_1,a}} \| z \|^2, a \in D. \tag{2.22}$$

Модель $z_{\delta_1}^{pl}$ будем называть наиболее правдоподобной адекватной математической моделью.

Использование этой модели для прогноза показателя q_1 позволяет получить прогноз с наименьшими отклонениями максимально возможных отклонений при заданной ошибке измерений переменных $q_2, \ldots, q_n$.

3. Метод решения и тестовые результаты

Для решения экстремальной задачи (2.4) использовался метод регуляризации А.Н.Тихонова [8], при котором экстремальная задача (2.4) заменяется на решение эквивалентной задачи минимизации сглаживающего функционала более удобной для применения численных методов [8]:

$$M^{\alpha}[z, A_p, u_{\delta_1}] = \| A_p z - u_{\delta_1} \|^2 + \alpha \| z \|^2 . \tag{3.1}$$

Уравнение Эйлера для функционала (3.1) имеет вид

$$A_p^* A_p z + \alpha z = A_p^* u_{\delta_1}. \tag{3.2}$$

где A_p^* — сопряженный оператор к оператору A_p.

Параметр регуляризации α определялся из уравнения невязки [8]:

$$\| A_p z_p - u_{\delta_1} \|^2 = \delta^2. \tag{3.3}$$

где z_p — вектор, на котором достигается минимум функционала (3.1) на множестве возможных решений $Q_{\delta_1,p}$ при фиксированном операторе A_p.

В качестве тестового примера выбрана задача построения линейной алгебраической математической модели процесса выплавки стали [9]. Этот процесс является стабильным и допускает описание с помощью линейной математической модели в малой окрестности выбранной точки области изменения переменных. Исходными данными для тестовых расчетов выбраны данные из работы [9] о химическом составе, параметрах термообработки и прочностных свойствах стали (табл.1). Были приняты следующие обозначения (для химического состава стали содержание элементов задано в массовых процентах): $C(q_2)$ — количество углерода; $Si(q_3)$ — количество кремния; $Mn(q_4)$ — количество марганца; $P(q_5)$ — количество фосфора;$S(q_6)$ — количество серы ; $Cr(q_7)$ — количество хрома; $Mo(q_8)$ — количество молибдена; $Ni(q_9)$ — количество никеля; $Al(q_{10})$ — количество алюминия; $Cu(q_{11})$ — количество меди; $Ti(q_{12})$ — количество титана; $V(q_{13})$ — количество ванадия; Т(q_{14}) — температура закалки (C^o); $\tau(q_{15})$ — время закалки (с); расход воды (q_{16}) — расход воды на охлаждение (м^3/час); $\sigma(q_1)$ — предел прочности стали (МПа).

Выполним построение линейной алгебраической математической модели связи предела прочности стали $\sigma(q_1)$ с характеристиками процесса выплавки стали $(q_2, \ldots, q_{16})$.

Матрица A размером 16×16 формировалась следующим образом: строками матрицы A являются строки табл 1 со второй по семнадцатую без последних элементов, последний столбец матрицы A заполняется единицами.

Решение уравнения (3.2) выполнялось численными методами с выбором параметра регуляризации α из уравнения невязки.

Таблица 1. Исходные данные для тестовых расчетов small

N/	C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Ni	Al
/N	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
1	0.53	0.67	0.69	0.005	0.006	0.17	0.0	0.05	0.024
2	0.53	0.62	0.68	0.005	0.007	0.17	0.0	0.05	0.023
3	0.53	0.69	0.69	0.006	0.006	0.17	0.0	0.05	0.025
4	0.57	0.69	0.78	0.01	0.012	0.11	0.0	0.05	0.033
5	0.57	1.27	0.78	0.009	0.013	0.11	0.0	0.05	0.032
6	0.56	1.27	0.78	0.009	0.012	0.11	0.0	0.05	0.032
7	0.59	1.26	0.75	0.01	0.011	0.11	0.0	0.05	0.034
8	0.57	0.99	0.78	0.009	0.011	0.11	0.0	0.06	0.032
9	0.55	1.1	0.78	0.008	0.011	0.11	0.0	0.06	0.031
10	0.73	0.32	0.75	0.014	0.005	0.13	0.0	0.06	0.022
11	0.73	0.32	0.75	0.014	0.005	0.13	0.0	0.06	0.022
12	0.73	0.32	0.75	0.014	0.005	0.13	0.0	0.06	0.022
13	0.73	0.32	0.75	0.014	0.005	0.13	0.0	0.06	0.022
14	0.68	0.33	0.78	0.006	0.007	0.18	0.12	0.13	0.022
15	0.68	0.33	0.78	0.006	0.007	0.18	0.12	0.13	0.022
16	0.68	0.33	0.78	0.006	0.007	0.18	0.12	0.13	0.022
17	0.53	0.64	0.69	0.006	0.006	0.17	0.0	0.06	0.023

Продолжение таблицы 1

N/	Cu	Ti	V	T	τ	Расход воды	σ
/N	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}	q_{16}	q_1
1	0.08	0.006	0.018	920	180	80	989.8
2	0.09	0.006	0.019	920	180	80	1009.4
3	0.08	0.006	0.018	920	180	100	989.8
4	0.06	0.008	0.088	900	180	70	1136.8
5	0.07	0.008	0.087	900	180	70	1136.8
6	0.06	0.008	0.088	900	220	76	1110.3
7	0.07	0.008	0.086	900	220	76	1146.6
8	0.06	0.007	0.089	900	180	70	1100.5
9	0.07	0.007	0.088	900	220	76	1110.3
10	0.08	0.006	0.0	815	140	80	1241.9
11	0.08	0.006	0.0	815	160	80	1237.3
12	0.08	0.006	0.0	815	180	80	1216.9
13	0.08	0.006	0.0	815	80	80	1231.0
14	0.09	0.006	0.009	815	180	76	1195.6
15	0.09	0.006	0.009	815	180	60	1078.0
16	0.09	0.006	0.009	815	180	103	1185.8
17	0.10	0.007	0.019	920	180	100	989.9

В результате получена следующая линейная алгебраическая математическая модель процесса выплавки стали:

$$q_1 = 690q_2 - 30.65q_3 + 420.4q_4 + 28.7q_5 + 4.4q_6 + 116.6q_7 - 53.9q_8 + 5.5q_9 + 10.5q_{10} +$$
$$+4.9q_{11} + 3.92q_{12} - 11.04q_{13} - 0.121q_{14} + 0.33q_{15} + 1.42q_{16} + 313.9. \qquad (3.4)$$

При этом параметр регуляризации α оказался равен 0.0462.

Для дополнительной проверки адекватности полученной математической модели в алгебраической форме на новом измерении был выполнен расчет показателя q_1 с использованием последней строки в табл. 1 (без последнего элемента). В результате расчетов был получен показатель q_1, равный 1061.7МПа, который мало отличается от известного табличного значения 989.9МПа (последний элемент в последней строке).

Следует заметить, что адекватность математической модели на будущие измерения, которые выходят из малой окрестности, определить невозможно. Однако можно надеяться, что, если условия при построении адекватной математической модели не изменяются в будущем, тогда можно считать полученную математическую модель адекватной и для будущих измерений в той же малой окрестности изменения переменных.

Мы полагаем, что предложенный подход позволяет синтезировать и нелинейные математические модели путем последовательного перебора малых окрестностей, в которых строились линейные многомерные локальные адекватные математические модели.

Библиографические ссылки

1. *Kuchuk, F. J.* Pressure Transient Formation and Well Testing / F. J. Kuchuk, M. Onur, F. Hollaender // Dev. in Petr. Science, v.57, Elsevier Science, USA, 2010. — 414 p.
2. *Алексанян, И. Ю.* Математическое моделирование тепло-массопереноса при распылительной сушке растительных экстрактов / И. Ю. Алексанян, Ю. А. Максименко, Ю. С. Феклунова // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. — Сер. Управление, вычисл. техн. информ.— № 1.— 2013.— С. 9–13.
3. *Menshkov, Yu. L.* Identification of Mathematical Model Parameters of Stationary Process / Yu. L. Menshkov // J. of Applied Mathematics and Physics.— 2014.— Vol.2, No.5.— P. 189–193.
4. *Menshkov, Yu. L.* Features of Parameters Identification of Algebraic Mathematical Models / Yu. L. Menshkov // Intern. J. of Eng. and Innovative Technology (IJEIT).— 2014.— Vol.4, No.5.— P.5.
5. *Menshkov, Yu. L.* Идентификация параметров математической модели при минимуме априорной информации / Yu. L. Menshkov, IV междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления"SICPRO'05, M.— 2005. — С. 312–320.
6. *Поляк, Б. Т.* Оценивание параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью / Б. Т. Поляк, С. А. Назин // Пробл. упр. и информатики.— 2006.— №1-2.— С. 38–49.
7. *Меньшиков, Ю. Л.* Идентификация параметров при минимуме априорной информации / Ю. Л. Меньшиков // Автоматика: 13 міжнар. конф. з автоматичного управління, 2006.— С. 267–270.

8. *Тихонов, А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин // М. : Наука, 1979. — 256 с.
9. *Тогобицкая, Д. Н.* Физико-химические критерии и модели для оценки влияния химического состава на свойства колесной стали / Д. Н. Тогобицкая, А. И. Бабаченко, А. С. Козачек // Наук. вісті. Сучасні пробл. металургії.— 2014.— №16.— С.89.
10. *Васильев, Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев // М. : Наука, 1980. — 520 с.

Надійшла до редколегії 30.01.2015