

**Є. І. СОКОЛ, М. М. РЕЗИНКИНА, О. Л. РЕЗИНКІН, С. А. ЛИТВИНЕНКО, О. Г. ГРИБ**

### **МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ПОЛІВ В ОКОЛІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ СТРИЖНІВ – БЛИСКАВКОПРИЙМАЧІВ**

Метою роботи є розробка методу більш точного розрахунку розподілу електричного поля (ЕП) в системах з електропровідними стрижнями, забезпечуючи знаходження напруженості та потенціалу електричного поля при використанні просторової сітки з кроком, пропорційним довжині стрижня, а не його радіусу. Методика: описаний метод розрахунку електричного поля в околі електропровідних стрижнів з великим співвідношенням довжини до радіуса: більше  $10^2$ – $10^3$ . Запропонований метод заснований на техніці скінченного інтегрування та використанні інформації про нелінійне спадання напруженості та потенціалу ЕП у напрямках, перпендикулярних осі стрижня. Результати: показано, що найкращий збіг з аналітичними рішеннями може бути досягнутий шляхом отримання різницевих коефіцієнтів у вузлах, що оточують стрижень, за допомогою інтегрування виразів для ЕП струмопровідного еліпсоїда під потенціалом по поверхням комірок розрахункової сітки. Практичне значення: в результаті використання запропонованого методу стає можливим більш точний розрахунок напруженості електричного поля в зоні навколо стрижня під потенціалом або стрижня в однорідному ЕП при застосуванні сітки, крок якої порівняний з його довжиною, а не радіусом. Новизна: використання запропонованого способу для розрахунку напруженості ЕП в околі електропровідних стрижнів з урахуванням нелінійного характеру спадання напруженості та потенціалу в безпосередній близькості від стрижня за допомогою аналітичних виразів для ЕП витягнутого струмопровідного еліпсоїду під потенціалом зменшує відносні похибки розрахунку напруженості ЕП в зоні навколо стрижня і вище його вершини з 27 % до 3 % і менше. У цьому випадку просторовий крок обирається пропорційним довжині стрижня, а не його радіусу. Наведено приклад розрахунку напруженості електричного поля в умовах грози.

**Ключові слова:** електричне поле, струмопровідні стрижні, метод скінченного інтегрування, математичне моделювання, блискавкоприймач, струмопровідний еліпсоїд під потенціалом.

**Е. И. СОКОЛ, М. М. РЕЗИНКИНА, О. Л. РЕЗИНКИН, С. А. ЛИТВИНЕНКО, О. Г. ГРИБ**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОВОДЯЩИХ СТЕРЖНЕЙ – МОЛНИЕПРИЕМНИКОВ**

Целью данной работы является разработка метода для более точного расчета распределения электрического поля (ЭП) в системах с проводящими стержнями, обеспечивающего нахождение напряженности и потенциала электрического поля при использовании пространственной сетки с шагом, пропорциональным длине стержня, а не его радиусу. Методология: описан метод расчета электрического поля в окрестности проводящих стержней с большим отношением длины к радиусу: более  $10^2$ – $10^3$ . Предлагаемый метод основан на методе конечного интегрирования и использовании информации о нелинейном спадании напряженностей и потенциалов ЭП в направлениях, перпендикулярных оси стержня. Результаты: показано, что наилучшего совпадения с аналитическими решениями можно достичь, получив разностные коэффициенты в узлах, окружающих стержень, с помощью интегрирования выражений для напряженностей ЭП вытянутого проводящего эллипсоида под потенциалом по поверхностям ячейки вычислительной сетки. Практическая ценность: в результате использования предложенного метода становится возможным более точный расчет напряженности электрического поля в зоне вокруг стержня под потенциалом или стержня в однородном ЭП при использовании пространственной сетки, шаг которой сопоставим с его длиной, а не радиусом. Новизна: использование предложенного метода для расчета напряженности ЭП в окрестности проводящих стержней с учетом нелинейного характера спадания напряженностей и потенциалов ЭП в непосредственной близости от стержня с помощью аналитических выражений для ЭП проводящего эллипсоида под потенциалом уменьшает относительные погрешности расчета напряженности ЭП в зоне вокруг стержня и над его острием с 27 % до 3 % и менее. В этом случае пространственный шаг выбирается пропорциональным длине стержня, а не его радиусу. Приведен пример расчета напряженности электрического поля стержневых молниеотводов в условиях грозовой обстановки.

**Ключевые слова:** электрическое поле, токопроводящие стержни, метод конечного интегрирования, математическое моделирование, молниеотвод, токопроводящий эллипсоид под потенциалом.

**Y. I. SOKOL, M. M. REZINKINA, O. L. REZINKIN, S. A. LYTVYENKO, O. H. GRYB**

### **MODELING OF THE ELECTRIC FIELDS IN THE VICINITY OF THE CONDUCTIVE LIGHTNING RODS**

The aim of the work is to develop a method for more accurate calculation the electric field (EF) distribution in the systems with conducting lightning rods, ensuring that the electric field strengths and potentials can be found at the grid spatial step proportional to the rod length and not to its radius. Methodology: a method of the electric field calculation in the vicinity of conducting rods with a large ratio of length to radius: more than  $10^2$ – $10^3$  is described. The proposed method is based on the finite integration technique and usage of information on the nonlinear decrease of the EF strengths and potentials in the directions perpendicular to the rod axis. Results: it is shown that the best match with analytical solutions can be achieved by obtaining the difference coefficients at the nodes surrounding the rod with the help of integrating expressions for the EF strength of a conductive ellipsoid upon electric potential over the computational grid cell surfaces. Practical value: as a result of the proposed method usage, it become possible more accurate calculation of the electric field strength in the zone around a rod under potential or a rod in a homogeneous EF when applying a grid, the step of which is comparable with its length, not its radius. Originality: usage of the proposed method for calculation of the EF strength in the vicinity of the conducting rods, taking into account nonlinear character of the EF strength and potential decrease in the close vicinity of the rod with the help of analytical expressions for the EF of an elongated conducting ellipsoid upon electric potential, reduces relative errors of the EF strength calculation in the zone around the rod and above its tip from 27 % to 3 % and less. In this case, a spatial step is chosen proportional to the length of the rod, and not to its radius. An example of the electric field strength calculation in lightning storm conditions is presented.

**Keywords:** electric field, conductive rods, finite integration technique, mathematical modeling, lightning rod, conductive ellipsoid under potential.

**Вступ.** В ряді практично важливих випадків виникає задача розрахунку електричного поля (ЕП) в системах, що містять струмопровідні стрижні з великим співвідношенням довжини ( $L$ ) до радіуса ( $R$ ):  $L/R > 10^2 - 10^3$ . Такими стрижнями можуть бути представлені, наприклад, стрижневі блискавковідводи, неповні канали пробойів в ізоляції, лідерні канали блискавки [1–6]. Ще однією областю, яка потребує розв'язання таких задач, є field-emission devices using carbon nanofibre arrays [7–9]. Не зважаючи на те, що знаходженню залежності ступеню підсилення ЕП на верхівках стрижнів приділено багато уваги, повністю ця проблема не вирішена [10].

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** При використанні скінченно-різницевого методу для розв'язання задач розрахунку розподілення ЕП в системах, що містять подібні довгі та тонкі стрижні, виникає проблема обрання кроку розрахункової сітки  $\Delta$ . Для коректного розв'язання задачі  $\Delta$  має бути меншим за радіус стрижня  $R$ . Оскільки розглядаються стрижні, довжина яких на багато порядків перевищує їхній радіус, накладання на досліджувану область такої дрібної розрахункової сітки призвело б до різкого збільшення порядку розв'язуваної системи рівнянь та зробило б її такою, що не реалізується існуючими обчислювальними системами.

Відомий підхід до чисельного розрахунку електромагнітного поля в околі нескінченно довгого тонкого електропровідного циліндричного стрижня, в якому для отримання коефіцієнтів різницевого рівнянь у вузлах на стрижні та навколо нього використовується закон спадання напруженості ЕП зворотно пропорційно відстані до його осі [11–15]. При цьому крок просторової сітки може бути суттєво більшим за радіус стрижня. Цей підхід було розширено для стрижня скінченної довжини при його представленні у вигляді рівномірно зарядженої нитки або розташованого в рівномірному ЕП еліпсоїда [16, 17]. Як видно з порівняння результатів розрахунків, виконаних за допомогою такого підходу, а також розрахованих за допомогою аналітичних виразів для рівномірно зарядженої нитки або видовженого еліпсоїда [18], відносна похибка при знаходженні потенціалів ЕП в області, що відстоїть від осі стрижня на відстані, більшій за крок розрахункової сітки, складає порядку 5 % для випадку розташування стрижня в зоні зовнішнього рівномірного ЕП. При цьому похибка розрахунку напруженості ЕП може складати 10 % і більше. Для випадку прикладання до стрижня потенціалу за відсутності зовнішнього ЕП величина похибки при використанні таких підходів зростає ще більше. Так, проведені чисельні експерименти показали, що відносна похибка розрахунку напруженості ЕП в зоні верхівки стрижня під потенціалом може досягати 45 %. Для вирішення цієї проблеми та для отримання коефіцієнтів різницевого рівнянь у вузлах на стрижні та навколо нього пропонується використовувати аналітичні вирази для ЕП видовженого еліпсоїда, що знаходиться під потенціалом, а не еліпсоїда, розташованого в рівномірному ЕП. Відомо, що

структура виразів для потенціалів та напруженостей ЕП видовженого еліпсоїда під потенціалом та еліпсоїда, розташованого в рівномірному ЕП, відрізняються (див. наприклад [18]).

**Мета роботи.** Розробка уточненого методу чисельного розрахунку електричного поля в околі струмопровідних стрижнів-блискавкоприймачів з великим співвідношенням довжини до радіуса перетину за допомогою задавання спеціальним чином різницевого коефіцієнтів у вузлах розрахункової сітки, що оточує стрижень. В результаті, розв'язання задачі забезпечується при кроці розрахункової сітки, пропорційному довжині стрижня, а не його діаметру, та досягається збільшення точності розрахунку напруженостей ЕП в системах зі струмопровідними стрижнями.

**Основні матеріали досліджень.** Розглянемо систему, що містить заземлений стрижень, до якого подається напруга  $U_0$ . Найдоцільнішим для розрахунку ЕП в цьому випадку є застосування методу скінченних об'ємів (див. наприклад [19, 20]). Цей метод відрізняється від звичайних різницевого методів тим, що рівняння для розв'язання отримують шляхом інтегрування рівнянь Максвелла за об'ємами елементарних комірок  $V$ , на які розбита розрахункова область. При цьому розбиття виконується так, що вузли розрахункової сітки ( $i, j, k$ ), в яких визначаються потенціали ЕП, розташовані на границях розділу середовищ, а отже, і на осі струмопровідного стрижня (див. рис. 1). В результаті, умови на границях розділу середовищ виконуються автоматично. Такий підхід дозволяє також врахувати характер спадання потенціалу в напрямках, перпендикулярних осі стрижня.

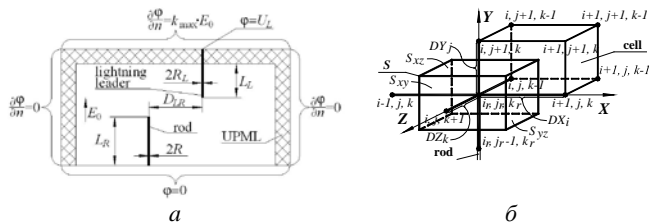


Рис. 1. Розрахункова схема (а) та комірка, що містить струмопровідний стрижень (б)

Застосувавши до рівняння Максвелла (див. наприклад [18])

$$\text{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \partial \mathbf{D} / \partial t,$$

де  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon_0 \epsilon \text{grad} \phi$  – електрична індукція;  $\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$  Ф/м;  $\mathbf{E}$  – напруженість електричного поля;  $\phi$  – електричний потенціал;  $\gamma$  – питома провідність;  $\mathbf{H}$  – напруженість магнітного поля, операцію дивергенції та взявши інтеграл від отриманого виразу за об'ємом елементарних комірок  $V$ , на які розбита розрахункова область, за допомогою теореми Остроградського-Гауса за відсутності об'ємних зарядів, коли другим доданком в правій частині останнього рівняння можна знехтувати, отримаємо необхідне рівняння через електричний потенціал  $\phi$ :

$$\int_V \gamma E dV = \oint_S \gamma E_n dS = \oint_S -\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0, \quad (1)$$

де  $n$  – нормаль до поверхні  $S$ , що охоплює об'єм  $V$ ;  
 $E_n$  – проекція вектора  $E$ , що є нормальною до  $S$ .

Рівняння вигляду (1) були записані для кожного вузла розрахункової сітки, причому під  $\gamma$  маємо на увазі питому провідність  $(i, j, k)$ -ї комірки розрахункової системи  $(\gamma_{i,j,k})$ . Оскільки радіус електропровідного стрижня ( $R$ ) на декілька порядків менший за його довжину ( $L$ ), він був замінений сукупністю розташованих на осі вузлів, яким наданий індекс  $r$  (див. рис. 1).

Аби врахувати закони спадання напруженості та потенціалу ЕП, які не є лінійними в напрямках, перпендикулярних осі стрижня, та наявність провідності між вузлами  $i_r, j_r, k_r$  в напрямку вздовж осі стрижня, вважатимемо, що питома провідність може бути представлена у вигляді тензора:

$$\tilde{\gamma}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} \gamma k_x & 0 & 0 \\ 0 & \gamma k_y & 0 \\ 0 & 0 & \gamma k_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де  $k_x, k_y, k_z$  – коефіцієнти, що дорівнюють 1 для усіх вузлів за виключенням  $(i_r, j_r, k_r), (i_{r-1}, j_r, k_r), (i_r, j_r, k_{r-1})$ ;  $k_y = 10^6$  для  $(i_r, j_r, k_r)$  вузлів.

Для знаходження  $k_x$  та  $k_z$  вузлів, що лежать на осі стрижня та навколо нього, а також  $k_y$  для вузла, розташованого на верхівці стрижня, виразимо потенціал  $\varphi$  та компоненти напруженості ЕП  $E_x, E_y, E_z$  в вигляді аналітичних залежностей від прикладеної до стрижня напруги  $U_0$  при його представленні у вигляді видовженого еліпсоїда (див. наприклад [18]):

$$\varphi = U_0 \cdot f_{\varphi U}; \quad (3)$$

$$E_x = -U_0 \cdot f_{UE_x}; \quad (4)$$

$$E_y = -U_0 \cdot f_{UE_y}; \quad (5)$$

$$E_z = -U_0 \cdot f_{UE_z}, \quad (6)$$

де  $x, y, z$  – декартові координати  $(i, j, k)$ -го вузла розрахункової сітки;

$$f_{\varphi U} = \frac{1}{2 \ln(2L/R)} \cdot \ln \frac{\sqrt{\xi + L^2} + \sqrt{L^2 - R^2}}{\sqrt{\xi + L^2} - \sqrt{L^2 - R^2}};$$

$$f_{UE_x} = f_{UE} \cdot d_{\xi x}; \quad f_{UE_y} = f_{UE} \cdot d_{\xi y};$$

$$f_{UE_z} = f_{UE} \cdot d_{\xi z};$$

$$f_{UE} = -\frac{1}{2 \ln(2L/R)} \cdot \frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{\sqrt{\xi + L^2} \cdot (\xi + R^2)};$$

$$d_{\xi x} = \left[1 - \frac{p - L^2}{\sqrt{p^2 - q}}\right]; \quad d_{\xi y} = \left[1 - \frac{p - R^2}{\sqrt{p^2 - q}}\right];$$

$$\xi = -p + \sqrt{p^2 - q}; \quad \xi > -b^2 \quad [9];$$

$$p = \frac{L^2 + R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2};$$

$$q = L^2 R - L^2 (x^2 + z^2) - R^2 y^2.$$

Виразивши  $U_0$  через різницю потенціалів у вузлах на осі стрижня та у вузлах, що розташовані від нього на відстані кроку розрахункової сітки, у вигляді (3) та підставивши отриманий вираз у формули для  $x$ -ї,  $y$ -ї та  $z$ -ї компонент напруженості ЕП (4–6), отримаємо  $k_x$  та  $k_z$  для вузлів  $(i_r, j_r, k_r), (i_{r-1}, j_r, k_r), (i_r, j_r, k_{r-1})$ , а також  $k_y$  для вузла, розташованого на верхівці стрижня (якому присвоєно індекс  $j_{rmax}$ ). Так, для  $x$ -ї компоненти напруженості ЕП виразимо  $\partial \varphi / \partial x$  через  $U_0$  у вигляді різниці потенціалів у вузлі на осі стрижня –  $\varphi(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr}) = U_0$  та у вузлі, що відстоїть від осі на крок розрахункової сітки –  $\varphi(x_{ir-1}, y_{jr}, z_{kr})$ , що відповідає, наприклад, похідній кроком назад:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=x_{ir-1}} \approx \Delta \varphi / \Delta x = [\varphi(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr}) - \varphi(x_{ir-1}, y_{jr}, z_{kr})] / \Delta x = U_0 \cdot [1 - f_{\varphi U}(x_{ir-1}, y_{jr}, z_{kr})] / \Delta x.$$

Оскільки при розв'язанні системи різницевих рівнянь знак похідної враховується автоматично, запишемо вираз для  $U_0$  через  $\partial \varphi / \partial x$ :

$$U_0 = \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cdot D_x, \quad (7)$$

$$\text{де } D_x = \frac{\Delta x}{|1 - f_{\varphi U}(x_{ir-1}, y_{jr}, z_{kr})|}. \quad (8)$$

Запишемо аналогічні вирази для  $\partial \varphi / \partial z$  та  $\partial \varphi / \partial y \Big|_{y=y_{jrmax}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &\approx \Delta \varphi / \Delta z = [\varphi(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr}) - \varphi(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr-1})] / \Delta z = \\ &= [\varphi(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr+1}) - \varphi(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr})] / \Delta z = \\ &= U_0 \cdot [1 - f_{\varphi U}(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr-1})] / \Delta z = \\ &= U_0 \cdot [f_{\varphi U}(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr+1}) - 1] / \Delta z; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \approx \Delta \varphi / \Delta y = [\varphi(x_{ir}, y_{jrmax+1}, z_{kr}) - \varphi(x_{ir}, y_{jrmax}, z_{kr})] / \Delta y = U_0 \cdot [1 - f_{\varphi U}(x_{ir}, y_{jrmax+1}, z_{kr})] / \Delta y.$$

Виразимо  $U_0$  в двох останніх виразах через  $\Delta \varphi / \Delta y$  та  $\Delta \varphi / \Delta z$ :

$$U_0 = \frac{\Delta \varphi}{\Delta z} \cdot D_z; \quad U_0 = \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \cdot D_y,$$

$$\text{де } D_z = \Delta z / |1 - f_{\varphi U}(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr-1})|;$$

$$D_y = \Delta y / |f_{\varphi U}(x_{ir}, y_{jrmax+1}, z_{kr}) - 1|.$$

Записавши (4) при  $x = x_{ir+1/2}$  – на відстані половини кроку від осі стрижня, тобто там, де розташована поверхня  $S_{yz}$ , по якій виконується обхід елементарних комірок, та підставивши в нього  $U_0$  у вигляді (7), отримаємо вираз для коефіцієнта  $k_{xx}$ , що характеризує нелінійний характер спадання значень потенціалів між вузлами, розташованими на осі стрижня та на відстані одного кроку по простору від нього:

$$E_x(x_{ir+1/2}, y_{jr}, z_{kr}) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot D_x \cdot F_{UE_x}(x_{ir+1/2}, y_{jr}, z_{kr}).$$

Тоді  $E_x = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cdot k_{xx}$ , де  $k_{xx} = D_x \cdot F_{UE_x}(x_{ir+1/2}, y_{jr}, z_{kr})$ .

В результаті аналогічних перетворень отримані вирази для коефіцієнтів  $k_{yy}$ ,  $k_{zz}$ :

$$k_{yy} = D_y \cdot F_{UE_y}(x_{ir}, y_{jr \max+1/2}, z_{kr});$$

$$k_{zz} = D_z \cdot F_{UE_z}(x_{ir}, y_{jr}, z_{kr-1/2}).$$

Коефіцієнти  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$  (см. (2)) отримані в результаті інтегрування  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_{zz}$  по відповідним поверхням  $S_{yz}$ ,  $S_{xz}$ ,  $S_{xy}$  (див. рис. 1) із використанням будь-якої стандартної підпрограми.

Розрахункова область, що розглядається, належить до так званих відкритих областей. Для зменшення її габаритів при розв'язанні задачі розрахунку ЕП, на її границях були розташовані допоміжні одноосні ідеально узгоджені шари (UPML) [15].

Для знаходження невідомих потенціалів була розв'язана система рівнянь, отримана в результаті запису для кожного вузла розрахункової системи рівнянь вигляду (1) в різнищевому вигляді. При цьому були використані ітераційний метод змінних напрямків та метод прогонки (докладніше див. [16, 17]). Граничні умови для скалярного потенціалу показані на рис. 1, а.

Для оцінки точності розрахунку ЕП в системах зі стрижнями проведено порівняння аналітичних та чисельних розв'язань для випадку, коли до стрижня подано потенціал  $U_0$ , а також для випадку його визначення в рівномірному зовнішньому ЕП з напруженістю  $E_0$ . В якості аналітичного рішення були використані формули для потенціалів та напруженостей видовженого еліпсоїда [18]. Як показали проведені розрахунки, для розглянутих стрижнів із  $L/R > 10^2 - 10^3$ , до яких подано напругу, а також для стрижнів, розташованих у зовнішньому однорідному ЕП, максимальні значення відносних похибок ( $\delta_E$ ) при розрахунку напруженостей ЕП не перевищують 3%. В той же час при використанні підходу, що описаний у [16],  $\delta_E$  може сягати 45%, а підходу, що описаний в [17], – 27%. Тестові розрахунки показали, що двократне зменшення кроку розрахункової сітки, а також двократне збільшення її габаритів не призводять до змін розподілення ЕП та величин відносних похибок.

**Приклад використання описаного методу для дослідження умов виникнення зустрічних лідерів від наземних об'єктів.** Відомо, що в умовах грозової обстановки при просуванні до землі низхідних лідерів блискавки негативної полярності для розвитку від

заземлених об'єктів висхідних лідерів, які мають позитивну полярність, необхідна наявність над такими об'єктами напруженості ЕП не менш ніж  $E_+ \sim 500$  кВ/м [4]. Аби оцінити вплив ЕП лідерного каналу блискавки, що просувається до землі та має потенціал  $U_L = 30$  МВ–100 МВ, на можливість розвитку висхідних лідерів проведено розрахунок розподілення ЕП в кількох випадках. При цьому розглянута найнесприятливіша ситуація початку росту сходинки негативного лідерного каналу блискавки, коли на переднім краї його стримерної зони починається ріст негативного стримера в області, в якій ще відсутній об'ємний заряд [4]. При розрахунках використовувались наведені вище граничні умови (див. рис. 1), крок по простору обирався рівним 1 м, на границях розрахункової області розміщувались UPML с числом шарів  $N = 10$ ,  $m = 3$ ,  $k_{\max} = 300$  [16, 17].

Перший випадок – низхідний лідер блискавки, що знаходиться під потенціалом, розташований на відстані декількох сотень метрів над заземленим об'єктом, що представляє собою заземлений стрижневий блискавковідвід висотою  $L_R$  із еквівалентним діаметром  $2R$ , так, що його ЕП не впливає на ЕП в околі верхівки блискавковідводу. В цьому випадку в умовах грозової обстановки блискавковідвід знаходиться в ЕП напруженістю  $E_0 = U_L/H_c$  (де  $H_c$  – середня висота розташування грозової хмари) між грозовою хмарою під потенціалом та землею. Нехай  $U_L = 100$  МВ,  $H_c = 2000$  м,  $E_0 = 50$  кВ/м,  $L_R = 60$  м,  $2R = 0,1$  м (див. рис. 1),  $2R_L = 0,01$  м (де  $2R_L$  – еквівалентний діаметр лідерного і стримерного каналу блискавки). Картина розподілення напруженості ЕП, яка розрахована в цьому випадку, показана на рис. 2, а. Як впливає з розрахунку, досягнута напруженість над вершиною блискавковідводу  $E_{top}$  не перевищує 100 кВ/м, що істотно менше за  $E_+$ , отже, розвиток висхідного лідера неможливий.

Розглянемо тепер випадок, при якому лідерний та його продовження – стримерний канал блискавки наблизився до блискавковідводу так, що відстань між їхніми верхівками  $H_L$  становить 20 м, а відстань між осями блискавковідводу та каналом блискавки –  $D_{LR} = 5$  м (див. рис. 2, б). Як впливає з розрахунку, в цьому випадку також  $E_{top}$  не перевищує 300 кВ/м, що істотно менше за  $E_+$ . На рис. 2, в надані розраховані лінії рівної напруженості ЕП для випадку, коли лідер блискавки та його продовження – стример знизився так, що  $H_L = 10$  м. Лише в цьому випадку  $E_{top} \geq E_+$ , отже, розвиток висхідного лідера можливий.

**Висновки.** Використання запропонованого методу розрахунку ЕП в околі електропровідних стрижнів, коли нелінійний характер спадання потенціалу та напруженості ЕП в безпосередній близькості від стрижня враховується за допомогою аналітичних виразів для ЕП видовженого струмопровідного еліпсоїда, що знаходиться під потенціалом, дозволило зменшити відносну похибку розрахунку напруженості ЕП до 3% та менше для стрижнів із  $L/R > 10^2 - 10^3$ . При цьому крок по простору обирався пропорційним довжині стрижня, а не його радіусу.

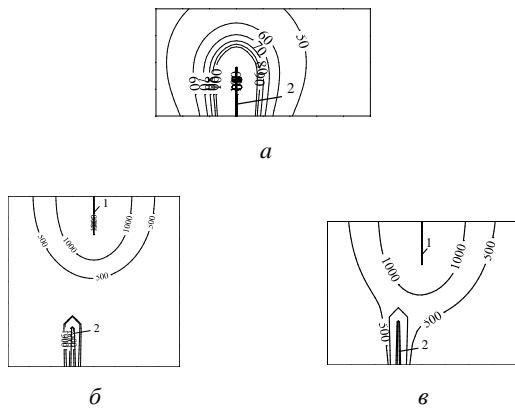


Рис. 2. Розраховані лінії рівної напруженості ЕП:  
1 – канал блискавки; 2 – блискавковідвід

За допомогою запропонованого методу розрахунку отримані розподілення напруженостей ЕП в умовах грозової обстановки. Порівняння рівнів напруженостей в околі верхівок стрижневих блискавковідводів із  $E_+$  показало, що розвиток від заземлених стрижневих блискавковідводів висхідних лідерів в найнесприятливішій ситуації, коли ріст негативного стримера починається в тій зоні, де ще відсутній просторовий заряд, можливий для розглянутої системи при наближенні лідерного каналу блискавки до верхівки блискавковідводу на відстань, меншу за 10 м.

#### Список літератури

1. Cooray V. *Lightning Protection*. London: The Institution of Engineering and Technology, 2010. 1036 p.
2. Moore C. B., Rison W., Mathis J., Aulich G. Lightning rod improvement studies. *Journal of applied meteorology*. 2000. Vol. 39. P. 593–609.
3. Moore C. B., Aulich G., Rison W. Measurement of lightning rod responses to nearby strikes. *Geophys. Res. Lett.* 2000. Vol. 27, no. 10. P. 1487–1490.
4. Bazelyan E. M., Raizer Yu. P. *Lightning Physics and Lightning Protection*. Bristol: IOP Publishing, 2000. 320 p.
5. Petrov N. I., Waters R. T. Determination of the striking distance of lightning to earthed structures. *Proc. R. Soc.* 1995. Vol. 450. P. 589–601.
6. Akyuz M., Cooray V. The franklin lightning conductor: conditions necessary for the initiation of a connecting leader. *Journal of Electrostatics*. 2001. Vol. 51–52. P. 319–325.
7. Cole M. T., Teo K. B. K., Groening O., Gangloff L., Legagneux P., Milne W. I. Deterministic cold cathode electron emission from carbon nanofibre arrays. *Scientific Reports*. 2014. Vol. 4. P. 1–5.
8. Park S., Gupta A. P., Yeo S. J., Jung J., Paik S. H., Mativenga M., Kim S. H., Shin J. H., Ahn J. S., Ryu J. Carbon nanotube field emitters synthesized on metal alloy substrate by PECVD for customized compact field emission devices to be used in X-ray source applications. *Nanomaterials*. 2018. Vol. 8. P. 378.
9. Bocharov G. S., Eletsii A. V., Grigory S. Theory of carbon nanotube (CNT)-based electron field emitters. *Nanomaterials*. 2013. Vol. 3. P. 393–442.
10. Collins C. M., Parmee R. J., Milne W. I., Cole M. T. High performance field emitters. *Advanced Science*. 2016. Vol. 3. P. 8.
11. Berenger J. P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Trans. Antennas and Propag.* 1996. Vol. 44. P. 110–117.
12. Raiton C. J., Schneider J. B. An analytical and numerical analysis of several locally conformal FDTD schemes. *IEEE trans. Microwave Theory and Techn.* 1999. Vol. 47. P. 56–66.
13. Dey S., Mittra R. A Conformal Finite-Difference Time-Domain Technique for Modeling Cylindrical Dielectric Resonators. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1999. Vol. 47, no. 9. P. 1737–1739.
14. Ismail M. S., Al-Basyoni K. S. A Logarithmic Finite Difference Method for Troesch's Problem. *Applied Mathematics*. 2018. Vol. 9, no. 5. P. 550–559.
15. Taflove A., Hagness S. *Computational electromagnetics: the finite difference time domain method*. Boston – London: Artech House, 2000. 852 p.
16. Rezykina M. M., Rezykin O. L., Sosina O. V. Mathematical modeling of distribution of magnetic field in the vicinity of the magnetic rods. *Tekhnichna Elektrodynamika*. 2014. No. 6. P. 30–36.
17. Rezykina M. M., Rezykin O. L., Svetlichnaya E. E. Electric field in the vicinity of long thin conducting rods. *Technical Physics*. 2015. Vol. 60, no. 9. P. 1277–1283.
18. Stratton J. A. *Electromagnetic theory*. NJ: IEEE Press, 2007. 614 p.
19. Clemens M., Weiland T. Discrete electromagnetism with the finite integration technique. *Progress in Electromagnetics Research*. 2001. Vol. 32. P. 65–87.
20. Clemens M., Weiland T. Regularization of eddy current formulations using discrete grad-div operators. *IEEE Transactions on Magnetics*. 2002. Vol. 38, no. 2. P. 569–572.

Надійшло (received) 01.10.2019

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Сокол Євген Іванович (Сокол Евгений Иванович, Sokol Yevgeny Ivanovych)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», ректор; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1960-3445>; e-mail: sokol@kpi.kharkov.ua

**Резинкіна Марина Михайлівна (Резинкина Марина Михайловна, Rezykina Marina Mikhailovna)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теоретичні основи електротехніки»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0454-3331>; e-mail: maryna.rezykina@gmail.com

**Резинкін Олег Лук'янович (Резинкин Олег Лукьянович, Rezykin Oleg Luk'yanovich)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Інженерна електрофізика»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8151-5636>; e-mail: orezynkin@gmail.com

**Литвиненко Світлана Анатоліївна (Литвиненко Светлана Анатольевна, Lytvynenko Svitlana Anatoliivna)** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теоретичні основи електротехніки»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0818-2470>; e-mail: svetlitvinenkoua@gmail.com

**Гриб Олег Герасимович (Гриб Олег Герасимович, Hryb Oleh Herasymovych)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Автоматизація та кібербезпека енергосистем»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3542-5625>; e-mail: ae\_khpi@ukr.net