JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 19, No. 3 (2015) 3001(19 p.)

ТУНЕЛЮВАННЯ КРIЗЬ БАР'ЄРИ АЛЬБРЕХТА З ДИСИПАТИВНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

С. П. Майданюк
Iнститут ядерних дослiджень НАН України, Київ, 03680, Україна
e-mail: maidan@kinr.kiev.ua
(Отримано 25 листопада 2014 р.)

Представлено новий метод знаходження хвильової функцiї для опису нестацiонарного тунелювання частинки через одномiрний потенцiальний бар'єр Альбрехта з дисипативною компонентою, що будується на основi хвильових пакетiв. Дослiджено роль дисипативних ефектiв при тунелюваннi на основi аналiзу проникностi прямокутного бар'єра на прикладi задачi захоплення α-частинки ядром ^{44}Ca.

Ключовi слова: дисипацiя, хвильовий пакет, тунелювання, потенцiал Альбрехта, багаторазовi внутрiшнi вiдбивання, проникнiсть, альфа-захоплення.

PACS number(s): 03.65.−w, 03.65.Xp, 25.40.Lw

I. ВСТУП

Квантування систем iз силами тертя є однiєю з фундаментальних проблем квантової фiзики. Наявнi пiдходи, розробленi з намаганням увести дисипацiю у квантову фiзику, можна роздiлити на двi групи. До першої групи можна внести методи, спрямованi на безпосереднє розв'язання рiвняння Шредингера з намаганням (при отриманнi розв'язкiв) якнайбiльш коректно зберегти всi принципи квантової механiки та квантовi властивостi дослiджуваних систем. Однак найпростiшi спроби реалiзувати формалiзм таким способом для опису реалiстичних квантових систем натрапляють на суттєвi складнощi. Чим можна пояснити, що робiт з цiєї давньої та практично нерозв'язаної проблеми досить мало.

До другої групи можна вiднести методи, спрямованi на опис дисипативних властивостей реалiстичних систем, що знайшли своє природне застосування в задачах ядерної фiзики. Ядерна дисипацiя в цьому напрямку являє собою перетворення енергiї колективного руху в ядрах до енергiї внутрiшнiх одночастинкових збурень. Початок розвитку цього напрямку можна пов'язати з появою праць Святецького (Swiatecki) ще в 1969 роцi [1,2], якi привертали суттєву увагу дослiдникiв до останнього часу. Однак сам формалiзм починається з уведення рiзного типу спрощень, наближень, неквантових узагальнень початкових квантових рiвнянь. Щоб розробити формалiзм, потрiбно вiдходити вiд початкового рiвняння Шредингера та стандартної квантової механiки.

На початку розвитку методiв другої групи дисипативнi ефекти в ядерних реакцiях вивчали за допомогою класичних рiвнянь руху, що описують зiткнення iндивiдуальних нуклонiв у ядерному середовищi зi в'язкiстю з пiдключенням сил тертя [3–18]. Але з роками, класичнi представлення ядерної дисипацiї отримували точнiше квантове формулювання. Iнтенсивно удосконалювалися моделi захоплення, злиття, подiлу, глибоконепружних зiткнень важких йонiв на основi використання рiвнянь Ланжевена (Langevin) [19–28] (тут знайшли своє мiсце методи Монте-Карло (Monte-Carlo), формалiзм Фоккера–Планка (Fokker–Planck), моделi квантової молекулярної динамiки та багато iнших). На сьогоднi такий напрямок теорiї iнтенсивно розробляють для опису утворення та властивостей надважких елементiв (наприклад, див. [29]). Застосовують сучаснi квантовi пiдходи на основi теорiї Хартрi–Фока (Hartree–Fock theory) з рiзними видами параметризацiї взаємодiй Скирма (Skyrme), де для опису дисипативних процесiв застосовуються квазiкласичнi та напiвкласичнi пiдходи (наприклад, формалiзм розподiлiв Вiгнера [31, 32], моделi флуктацiйно-дисипативних траєкторiй (fluctuation-dissipation trajectory models) з рiзного типу фолдiнг-розрахунками [33], моделi класичних дисипативних траєкторiй [34].).

Привабливою перевагою методiв останньої групи є можливiсть уводити характеристики, фiзичний змiст яких стає достатньо простим та ясним у класичному наближеннi (з квантової механiки). До цiєї групи можна включити пiдходи, спрямованi на опис дисипативних ефектiв у подiлi ядер, фiзицi важких йонiв, синтезi надважких ядер. Цей напрямок набув своєї популярностi, кiлькiсть праць є справдi вражаючою. На сьогоднi для роботи в цьому напрямку розробленi спецiальнi чисельнi методи (наприклад, див. [37, 38]).

Тут можна вiдокремити незалежний пiдхiд, що ввели Калдейра (Caldeira) та Леггетт (Leggett) у [39, 40]. Вiн спрямований на опис системи броунiвських частинок у середовищi за допомогою гармонiчних осциляторiв, на яку згодом накладається канонiчне квантування. Цей формалiзм iнтенсивно застосовували до широкого ряду задач, включаючи системи з зовнiшнiм середовищем (systems coupled with environment), такi, як дифузiя мюонiв у металах, рух електронiв у бiологiчних та хiмiчних системах, радiацiйне загасання (radiation damping) та iнше.

У цiй статтi свiй iнтерес ми спрямуємо на першу групу методiв, щоб побудувати повнiстю квантовий апарат для опису дисипативних процесiв у квантовiй фiзицi. Ми очiкуємо, що такий пiдхiд забезпечить найточнiше збереження квантових властивостей при описi дисипативних систем. Як ми вважаємо, найбільш широко відомий (та, можливо, найперший серед створених) підхід у цій групі — це формалізм на основі гамільтоніанів Калдірола–Канаї (Caldirola–Kanai) [41,42] (див. також інтенсивні дослідження [43–48], узагальнення [49–55]). Серед інших підходів можна видалити побудову нелінійних (неермітових, non-hermitian) гамільтоніанів з операторами Костіна (Kostin) [56], Альбрехта (Albrecht) [57], Хассе (Hasse) [58], лінійних (ермітових) гамільтоніанів Ґізіна (Gisin) [59], Екснера (Exner) [60], Поліхронакоса (Polychronakos) та Тзані (Tzani) [61]. У цій статті ми виберемо напрямок Альбрехта, у формалізмі якого потенціал із дисипативною компонентою визначаємо на основі усереднення за хвильовими пакетами [57]:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0(x) + \gamma W(x), \\ W(x) &= (x - \langle x \rangle)\,[cp + (1-c)\,\langle p \rangle] - \frac{i\hbar c}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $V_0(x)$ — потенціал стандартного стаціонарного рівняння Шредингера, γ та c — довільні дійсні параметри, $\langle x \rangle$ та $\langle p \rangle$ — усереднені координата та імпульс, де усереднення виконується по координаті x з використанням хвилевих пакетів, що базуються на розв'язках рівняння Шредингера з потенціалом $V(x)$. Ця властивість виділяє підхід Альбрехта серед інших своєю підвищеною складністю в математичному формулюванні та комп'ютерних розрахунках. Але саме тому ми вважаємо, що після вдалої побудови такого формалізму для визначення хвилевої функції більшість інших підходів цієї групи можна далі буде розв'язати на основі подібних, уже знайдених ідей. Відповідно до [57], при $c > 0$ більшість потенціалів V дає загасаючі розв'язки та не локалізує основного стану, тоді як випадок $c = 0$ зберігає основні стани. Щоб зрозуміти, як побудувати підхід для знаходження розв'язків рівняння за довільного параметра c, у цій праці ми спершу розберемося з найпростішим випадком $c = 0$.

Основи такого формалізму покладено в роботах [62,63]. Але перед тим, як застосувати такий формалізм для складних реалістичних ядерних задач, потрібно було б довести його до рівня розрахунків проникностей бар'єрів простої форми з наявністю дисипативної компоненти в потенціалі взаємодії та проаналізувати основні властивості методу. Деякі загальні властивості тунелювання з включеною дисипативною компонентою в потенціалі можна дослідити в задачі тунелювання через найпростіший одномірний бар'єр прямокутної форми. Знаходження розв'язку такої задачі — мета цієї праці. Ми будемо припускати, що як наступний крок у такому напрямку досліджень цей підхід можна вдосконалити для роботи з реалістичними бар'єрами для задач ядерної фізики, де напрямок досліджень треба спрямувати саме на бар'єри довільної форми (де можна застосувати метод багаторазових внутрішніх відбиттів, який, за нашою оцінкою, є найточнішим у знаходженні розв'язку таких задач [64–70]).

Для досліджень ми візьмемо потенціальні бар'єри із задач ядерної фізики. Тут найглибше вивчені та відтестовані потенціали взаємодій між фраґментами малої маси та ядрами. Придатними кандидатами для таких фраґментів можуть бути протони та α-частинки. Тут прояв дисипативних ефектів у α-ядерних реакціях є вагомішим. Найінтенсивніше та найглибше α–ядерні взаємодії вивчали в задачах α-розпаду ядер (див. експериментальні дослідження [71–82], різні мікроскопічні моделі [83–96], макроскопічні кластерні моделі [97–111], моделі поділу [112, 113]) та розсіяння α-частинок на ядрах [114–118]. α-розпади ядер характеризуються періодами напіврозпаду, що визначаються на основі формування α-частинки у внутрішній просторовій області ядра, її подальших (квантових) осциляцій та вильоту назовні з тунелюванням через бар'єр. α-захват характеризується перерізами, що визначаються на основі проникностей бар'єра за різних значень кутового моменту та процесами злиття α-частинки з ядром, де саме й проявляються дисипативні ефекти. Відповідно до такої логіки, α-захват є найцікавішою реакцією, що саме ми й вибираємо для аналізу в цій статті. Зазначимо, що фізика процесів злиття при α-захопленні досліджена найменш глибоко [102–105], тому будь-яка нова інформація могла б бути корисною. Оцінки ймовірностей захоплення α-частинок використовують, описуючи ядерні реакції в зірках [111, 117, 119].

На сьогодні найбільш поширений підхід до визначення перерізів α-захоплення заснований на розрахунках проникності бар'єрів без включення процесів злиття (наприклад, див. [102]). У літературі можна знайти, що визначення ймовірностей злиття являє собою серйозну та давню загадку, незважаючи на довгу історію досліджень реакцій захоплення. Тут Глас (Glas) та Мосел (Mosel) застосували *підхід різкого обрізання кутових моментів (sharp angular momentum cutoff approach)* [120, 121], який широко застосовували до останнього часу (наприклад, див. [122, 123]). Еберхард та ін. (Eberhard et al) запропонували формулу, що дає деяку інформацію про злиття при α-захопленні на основі порівняння розрахункових перерізів з експериментальними даними за деяких обраних енерґій [124]. У [125] ми показали, що включення процесів злиття в задачу дозволяє суттєво поліпшити узгодженість між теорією та експериментом. Експериментально ці реакції не досліджені достатньо глибоко: ми маємо дані вимірів для α-захоплення ядрами ^{40}Ca, ^{44}Ca [124], ^{59}Co [126], ^{208}Pb [127], ^{209}Be [127].

II. МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ НЕСТАЦІОНАРНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДИНҐЕРА З ПОТЕНЦІАЛОМ АЛЬБРЕХТА

У цьому розділі ми коротко розглянемо метод визначення хвильової функції для нестаціонарного рівняння Шредингера з потенціалом Альбрехта [62, 63].

A. Рівняння Шредингера з дисипативною компонентою

Розгляньмо нестаціонарне рівняння Шредингера:

$$i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(x,t)=\left(-\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\right)\Psi(x,t),\qquad(2)$$

у якому потенціал має деяку залежність від часу. Розгляньмо хвильову функцію, залежну від часу, у вигляді інтеґрала Фур'є:

$$\Psi(x,t)=\int\limits_0^{E_0} g(E)\,e^{-iEt/\hbar}\,\varphi(E,x)\,dE,\qquad(3)$$

де $\varphi\,(E,x)$ — компонента хвильової функції, що не залежить від часу t, $g(E)$ — ваговий фактор у формі ґаусіана

$$g(E)=A\,e^{-a^2(k-\bar{k})^2},\qquad(4)$$

де A та a — сталі, $\bar{k}$ — значення імпульсу, щодо якого локалізується пакет. Підставляючи хвильову функцію (3) у вираз (2), отримаємо:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{E_0} g(E)\,e^{-iEt/\hbar}\,\varphi(E,x)\,EdE\\&=\;-\,\frac{\hbar^2}{2m}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,e^{-iEt/\hbar}\frac{\partial^2\varphi(E,x)}{\partial x^2}\,dE\\&+\int\limits_0^{E_0} g(E)\,V(x,\bar{E},t)\,e^{-iEt/\hbar}\,\varphi(E,x)\,dE.\end{aligned}\qquad(5)$$

Застосуймо обернене Фур'є-перетворення до цього рівняння. Ліва частина матиме вигляд

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int dt\,e^{iE't/\hbar}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,e^{-iEt/\hbar}\,\varphi(E,x)\;E\,dE\\&=\;\hbar\int\limits_0^{E_0} g(E)\,\varphi(E,x)\,\delta(E'-E)\;E\,dE\\&=\hbar\,g(E')\,E'\,\varphi(E',x),\end{aligned}\qquad(6)$$

а права частина перетвориться як

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\pi}\,\frac{\hbar^2}{2m}\int dt\,e^{iE't/\hbar}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,e^{-iEt/\hbar}\frac{\partial^2\varphi(E,x)}{\partial x^2}\,dE\;+\;\frac{1}{2\pi}\int dt\,e^{iE't/\hbar}\int\limits_0^{E_0} g(E)\,V(x,\bar{E},t)\,e^{-iEt/\hbar}\,\varphi(E,x)\,dE\\&=-\,\frac{\hbar^3}{2m}\,g(E')\frac{\partial^2\varphi(E',x)}{\partial x^2}\;+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\,g(E)\,\varphi(E,x)\int V(x,\bar{E},t)\,e^{i(E'-E)t/\hbar}\,dt.\end{aligned}\qquad(7)$$

Об'єднуючи ці частини, ми одержимо таке рівняння:

$$\begin{aligned}&\hbar\,g(E')\,E'\,\varphi(E',x)=-\,\frac{\hbar^3}{2m}\,g(E')\frac{\partial^2\varphi(E',x)}{\partial x^2}\\&+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\,g(E)\,\varphi(E,x)\int V(x,\bar{E},t)\,e^{i(E'-E)t/\hbar}\,dt.\end{aligned}\qquad(8)$$

За $c=0$ дисипативна компонента $W_A(x)$ має вигляд:

$$W_A(x)=\langle p\rangle(x-\langle x\rangle).\qquad(9)$$

Визначимо усереднення як

$$\begin{aligned}\langle p\rangle\;&=\;\int\Psi^*(x,t)\Big(-\,i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Psi(x,t)\,dx,\\\langle x\rangle\;&=\;\int\Psi^*(x,t)\,x\,\Psi(x,t)\,dx,\end{aligned}\qquad(10)$$

звідки отримаємо дисипативну компоненту

$$\begin{aligned}W_A(x,t)=-i\hbar\int dx_1\int dx_2\int\limits_0^{E_0} dE_1\int\limits_0^{E_0} dE_2\int\limits_0^{E_0} dE_3\int\limits_0^{E_0} dE_4 g(E_1)g(E_2)g(E_3)g(E_4)\\\times\,e^{i(E_1-E_2+E_3-E_4)t/\hbar}\,\Big(x-x_2\Big)\,\varphi^*(E_1,x_1)\,\frac{\partial\varphi(E_2,x_1)}{\partial x_1}\,\varphi^*(E_3,x_2)\,\varphi(E_4,x_2)\end{aligned}\qquad(11)$$

та розрахуємо повний потенціал

$$V(x,t) = V_0(x) - i\,\hbar\,\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4\; g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)$$
$$\times\, e^{i(E_1-E_2+E_3-E_4)t/\hbar} \Bigl(x - x_2\Bigr)\, \varphi^*(E_1,x_1)\, \frac{\partial \varphi(E_2,x_1)}{\partial x_1}\, \varphi^*(E_3,x_2)\, \varphi(E_4,x_2). \tag{12}$$

Ураховуючи ці перетворення, ми знайдемо другий складник правої частини (8):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{E_0} dE\, g(E)\, \varphi(E,x) \int V(x,\bar{E},t)\, e^{i(E'-E)t/\hbar}\, dt \;=\hbar\, g(E')\, \varphi(E',x)\, V_0(x)\;-$$
$$-i\,\hbar^2\gamma\cdot \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4\; g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'')$$
$$\times \Bigl(x - x_2\Bigr)\, \varphi^*(E_1,x_1)\, \frac{\partial \varphi(E_2,x_1)}{\partial x_1}\; \varphi^*(E_3,x_2)\, \varphi(E_4,x_2)\, \varphi(E'',x), \tag{13}$$

де

$$E'' = E' + E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \tag{14}$$

Отже, рівняння (8) перетворюється до наступного (при $E' \to E$)

$$\Bigl(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E\Bigr)\varphi(E,x) = i\hbar\gamma \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4$$
$$\times \frac{g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'')}{g(E)}\, \Bigl(x - x_2\Bigr)\varphi^*(E_1,x_1)\, \frac{\partial \varphi(E_2,x_1)}{\partial x_1}\, \varphi^*(E_3,x_2)\, \varphi(E_4,x_2)\, \varphi(E'',x). \tag{15}$$

Ми знайшли нове рівняння без часу, яке залежить від дисипативного параметра γ. Якщо цей параметр прямує до нуля, тоді рівняння (14) перетвориться до стаціонарного рівняння Шредингера зі стаціонарним потенціалом $V_0(x)$ без дисипативної компоненти $W_A(x)$, тобто ми отримаємо стаціонарний процес.

B. Метод послідовних наближень

Припускаючи параметр γ достатньо малим, ми будемо шукати розʼязок невідомої функції $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \gamma\, \varphi_1(x), \tag{16}$$

де $\varphi_0(x)$ — хвильова функція стаціонарного рівняння Шредингера з потенціалом $V_0(x)$ за енергії E_0. Підставляючи розвʼязок (16) у рівняння (15), ми отримаємо нове рівняння, що до членів за γ^1 має вигляд:

$$\Bigl(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E\Bigr)\Bigl(\varphi_0(E,x) + \gamma\, \varphi_1(E,x)\Bigr) =\; i\,\hbar\,\gamma\cdot \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4$$
$$\times\, \frac{g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'')}{g(E)}\, \Bigl(x - x_2\Bigr)\varphi_0^*(E_1,x_1)\, \frac{\partial \varphi_0(E_2,x_1)}{\partial x_1}\, \varphi_0^*(E_3,x_2)\, \varphi_0(E_4,x_2)\, \varphi_0(E'',x). \tag{17}$$

Перепишімо окремо компоненти за різних ступенів γ у (17) (позначення $E = E_0$):

$$\gamma^0:\Bigl(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0\Bigr)\varphi_0(E_0,x) = 0,$$
$$\gamma^1:\Bigl(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0\Bigr)\varphi_1(E_0,x) = i\,\hbar \int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4$$
$$\times\, \frac{g(E_1)\, g(E_2)\, g(E_3)\, g(E_4)\, g(E'')}{g(E_0)}\, \Bigl(x - x_2\Bigr)\varphi_0^*(E_1,x_1)\, \frac{\partial \varphi_0(E_2,x_1)}{\partial x_1}\, \varphi_0^*(E_3,x_2)\, \varphi_0(E_4,x_2)\, \varphi_0(E'',x), \tag{18}$$

де

$$E'' = E_0 + E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \tag{19}$$

Перше рівняння в отриманій системі (18) — це тотожність згідно з умовами задачі. Друге рівняння визначає невідому функцію φ_1 на основі заданої функції φ_0. Це диференційне рівняння другого порядку, для його розв'язку можна застосувати чисельні методи.

C. Точний розв'язок для корекції φ_1

Для того щоб знайти розв'язки рівнянь (18), нам потрібно знати корекцію φ_1, яка невідома. Перепишімо праву частину другого рівняння за γ^1 як

$$\begin{aligned} f\,(E_0, x) = i \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4 \\ \times\, \frac{g(E_1)\,g(E_2)\,g(E_3)\,g(E_4)\,g(E'')}{g(E_0)} \\ \times\, \varphi_0(E'', x)\, \Big\{ x\, I_1(E_3, E_4) - I_2(E_3, E_4) \Big\} \cdot I_3(E_1, E_2), \end{aligned} \tag{20}$$

де

$$\begin{aligned} I_1(E_1, E_2) &= \int \varphi_0^*(E_1, x)\, \varphi_0(E_2, x)\; dx, \\ I_2(E_1, E_2) &= \int \varphi_0^*(E_1, x)\, \varphi_0(E_2, x)\; x\, dx, \\ I_3(E_1, E_2) &= \int \varphi_0^*(E_1, x)\, \frac{\partial \varphi_0(E_2, x)}{\partial x}\; dx, \end{aligned} \tag{21}$$

та рівняння (18) за γ^1 матимуть такий вигляд:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\, \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x) - E_0 \right) \varphi_1(E_0, x) = \hbar\, f(E_0, x). \tag{22}$$

Домножуючи це рівняння зліва на хвильову функцію $\varphi_0(x)$, отримаємо:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\, \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi_0^2(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} \right] = \hbar\, \varphi_0(x)\, f(x). \tag{23}$$

Ураховуючи, що функції $\varphi_0(x)$ та $f(x)$ відомі, ми проінтеґруємо це рівняння за dx:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\, \varphi_0^2(x)\, \frac{\partial}{\partial x}\, \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = \hbar \int \varphi_0(x)\, f(x)\; dx + C_1, \tag{24}$$

та одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\, \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} = -\frac{2m}{\hbar}\, \frac{1}{\varphi_0^2(x)} \left\{ \int \varphi_0(x)\, f(x)\; dx + C_1 \right\}. \tag{25}$$

Інтеґруючи це рівняння за dx ще раз, отримаємо точний розв'язок для функції φ_1:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = -\,\varphi_0(x) \\ \times \left\{ \frac{2m}{\hbar} \int \frac{1}{\varphi_0^2(x)} \left[\int \varphi_0(x)\, f(x)\; dx + C_1 \right] dx + C_2 \right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Використовуючи сталі C_1 та C_2, можна деформувати корекцію φ_1 до цієї хвильової функції φ_0 (тобто ми створили метод явної деформації повної хвильової функції, що могло би бути цікавим при пошуках нових квантових систем з заданими властивостями). Як було показано в роботі [62], у вузлах хвильової функції $\varphi_0(x)$ її корекція φ_1 має вигляд:

$$\varphi_1(x) \;=\; -\,\varphi_0(x) \left\{ \frac{2m}{\hbar} \int \frac{f(x)}{2\, \varphi_0'(x)}\; dx + C_2 \right\}. \tag{27}$$

Отже, корекція $\varphi_1(x)$ прямує до нуля у вузлах, і на цій основі вона не має розбіжностей.

III. ТУНЕЛЮВАННЯ КРІЗЬ ПРЯМОКУТНИЙ БАР'ЄР

Тепер ми розгляньмо одномірну задачу тунелювання частинки з масою m у напрямку осі x через прямокутний потенційний бар'єр. Позначмо область I за $x < 0$, область II за $0 < x < a$ та область III за $x > a$ відповідно. Стаціонарна хвильова функція для такого процесу тунелювання така:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_R\, e^{-ikx} & \text{при } x < 0, \\ \alpha\, e^{\xi x} + \beta\, e^{-\xi x} & \text{при } 0 < x < a, \\ A_T\, e^{ikx} & \text{при } x > a, \end{cases} \tag{28}$$

де $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$, $\xi = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_1 - E)}$, E — повна енерґія частинки. Амплітуди A_T, A_R, α та β можна визначити, якщо використати умови неперервності хвильової функції та її похідної на кожній межі бар'єра. Ми маємо (наприклад, див. [64, 65, 67–70]):

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{i4k\xi\, e^{-\xi a - ika}}{F_{\rm sub}}, & \alpha &= \frac{2k\,(i\xi - k)\, e^{-2\xi a}}{F_{\rm sub}}, \\ A_R &= \frac{k_0^2\, D_-}{F_{\rm sub}}, & \beta &= \frac{2k\,(i\xi + k)}{F_{\rm sub}}, \end{aligned} \tag{29}$$

де

$$\begin{aligned} F_{\rm sub} &= (k^2 - \xi^2)\, D_- + 2ik\xi D_+, \\ D_\pm &= 1 \pm e^{-2\xi a}, \\ k_0^2 &= k^2 + \xi^2 = \frac{2mV_1}{\hbar^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Підставляючи у (3) хвилю $\varphi_{\rm inc}(k, x)$, що падає на бар'єр, а також хвилю, що пройшла $\varphi_{\rm tr}(k, x)$ або відбиту хвилю $\varphi_{\rm ref}(k, x)$ від хвильової функції $\varphi(k, x)$, що дана (28), ми відповідно отримаємо пакет, що падає на бар'єр або пакет, що відбився чи пройшов.

На основі таких розв'язків тепер ми можемо знайти інтеґрали I_1, I_2 та I_3. Такі розрахунки являють собою математично складну проблему вони наведені в Додатку А. Отже, ми отримаємо такі розв'язки:

$$
\begin{aligned}
I_1(E_1,E_2) &= \delta(k_1-k_2)\cdot f_{11}(E_1,E_2)+f_{12}(E_1,E_2),\\
I_2(E_1,E_2) &= f_{21}^{(+)}(E_1,E_2)\cdot \frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=k_2+k_1}\\
&+ f_{21}^{(-)}(E_1,E_2)\cdot \frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=k_2-k_1} + f_{22}(E_1,E_2),\\
I_3(E_1,E_2) &= \delta(k_1-k_2)\cdot f_{31}(E_1,E_2)+f_{32}(E_1,E_2),
\end{aligned}
\tag{31}
$$

де

$$
\begin{aligned}
f_{11}(E_1,E_2) &= \pi\left(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}+A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2}+1\right),\\
f_{12}(E_1,E_2) &= \frac{\alpha_1^{*}\alpha_2\,e^{(\xi_1+\xi_2)a}-\beta_1^{*}\beta_2\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a}-\alpha_1^{*}\alpha_2+\beta_1^{*}\beta_2}{\xi_1+\xi_2}\;-\\
&- \frac{i\,(A_{R,\,1}^{*}-A_{R,\,2})}{k_1+k_2}+\Biggl\{\frac{i\left(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\,e^{i(k_2-k_1)a}+A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2}-1\right)}{k_2-k_1}\\
&+ \frac{\alpha_2\,\beta_1^{*}\,e^{(\xi_2-\xi_1)a}-\alpha_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a}-\alpha_2\,\beta_1^{*}+\alpha_1^{*}\,\beta_2}{\xi_2-\xi_1}\Biggr\}\Bigg|_{E_1\neq E_2}\\
&+ a\cdot\left\{\alpha_1^{*}\,\beta_2+\beta_1^{*}\,\alpha_2-A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\right\}\Big|_{E_1=E_2},
\end{aligned}
\tag{32}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{21}^{(+)}(E_1,E_2) &= i\,\pi\,(A_{R,\,2}-A_{R,\,1}^{*}),\\
f_{21}^{(-)}(E_1,E_2) &= i\,\pi\,(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}-A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2}-1),\\
f_{22}(E_1,E_2) &= \frac{1}{(\xi_1+\xi_2)^2}\Bigl\{\bigl[(\xi_1+\xi_2)\,a-1\bigr]\,\alpha_1^{*}\,\alpha_2\,e^{(\xi_1+\xi_2)a}\\
&- \bigl[(\xi_1+\xi_2)\,a+1\bigr]\,\beta_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a}\;+\;\alpha_1^{*}\,\alpha_2+\beta_1^{*}\,\beta_2\Bigr\}\\
&+ \frac{A_{R,\,1}^{*}+A_{R,\,2}}{(k_1+k_2)^2}\;+\;\frac{a^2}{2}\cdot\left\{\alpha_1^{*}\,\beta_2+\beta_1^{*}\,\alpha_2-A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\right\}\Big|_{E_1=E_2}\\
&+ \Biggl\{\frac{1}{(\xi_2-\xi_1)^2}\Bigl(\bigl[(\xi_2-\xi_1)\,a-1\bigr]\,\alpha_2\,\beta_1^{*}\,e^{(\xi_2-\xi_1)a}\\
&- \bigl[(\xi_2-\xi_1)\,a+1\bigr]\,\alpha_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a}+\alpha_2\,\beta_1^{*}-\alpha_1^{*}\,\beta_2\Bigr)+\\
&+ \frac{A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}}{(k_2-k_1)^2}\Bigl(\bigl[i(k_2-k_1)\,a-1\bigr]\,e^{i(k_2-k_1)a}+1\Bigr)\\
&+ \frac{A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}-A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2}+1}{(k_1-k_2)^2}\Biggr\}\Bigg|_{E_1\neq E_2},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{31}(E_1,E_2) &= \pi\,ik_2\,(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}-A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2}+1),\\
f_{32}(E_1,E_2) &= \frac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2}\Bigl[\alpha_1^{*}\,\alpha_2\,e^{(\xi_1+\xi_2)a}+\beta_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a}-\;\alpha_1^{*}\,\alpha_2-\beta_1^{*}\,\beta_2\Bigr]\\
&+ \frac{k_2\,(A_{R,\,1}^{*}+A_{R,\,2})}{k_1+k_2}+a\cdot\left\{\xi_2\,\beta_1^{*}\,\alpha_2-\xi_2\,\alpha_1^{*}\,\beta_2-ik_2\,A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\right\}\Big|_{E_1=E_2}-\\
&- \Biggl\{\frac{k_2\left(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\,e^{i(k_2-k_1)a}-A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2}-1\right)}{k_2-k_1}\\
&- \frac{\xi_2\left(\alpha_2\,\beta_1^{*}\,e^{(\xi_2-\xi_1)a}+\alpha_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a}-\alpha_2\,\beta_1^{*}-\alpha_1^{*}\,\beta_2\right)}{\xi_2-\xi_1}\Biggr\}\Bigg|_{E_1\neq E_2}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Використовуючи отримані розв'язки для інтеґралів, тепер ми знайдемо функцію $f(E_0,x)$, яка визначена у (20). Її обчислення наведено в Додатку Б та розв'язок має такий вигляд:

$$\begin{aligned} f(E_0,x) \;&=\; \frac{i}{g(E_0)}\,\frac{\hbar}{m}\,J_1(E_0)\,\biggl\{x\,\frac{\hbar}{m}\,g(E_0)\,\varphi_0(E_0,x)\cdot J_2(E_0) \\ &+\; x\cdot J_3(E_0,x) \;+\; \frac{2\,\hbar}{m}\,g(E_0)\,\varphi_0(E_0,x) \\ &\times\; \biggl(\Bigl[g^2(E_3)\,f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\,k_3\Bigr]\Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} \;-\; J_4(E_0)\biggr) \;-\; J_5(E_0,x)\biggr\} \\ &+\; \frac{i}{g(E_0)}\cdot\biggl\{x\cdot\frac{\hbar}{m}\cdot J_6(E_0,x)\cdot J_2(E_0)\;+x\cdot J_7(E_0,x) \\ &+\; \frac{2\,\hbar}{m}\cdot J_6(E_0,x)\cdot\Bigl[g^2(E_3)\,f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\,k_3\Bigr]\Big|_{E_3=0}^{E_3=E_0} \\ &-\; \frac{2\,\hbar}{m}\cdot J_6(E_0,x)\cdot J_4(E_0)\;-\;J_8(E_0,x)\biggr\}, \end{aligned} \tag{35}$$

де розрахунки інтеґралів $J_1(E_0)\ldots J_8(E_0,x)$ наведено у (Б.15) та (Б.16) у Додатку Б.

A. Проблема інтерференції між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитою хвилею

Повну хвильову функцію φ_{total} у першій області $x<0$ можна переписати як суму хвилі φ_{inc}, що падає на барьер, та відбитої хвилі φ_{ref}:

$$\varphi_{\text{total}} = \varphi_{\text{inc}} + \varphi_{\text{ref}}, \tag{36}$$

звідки ми отримаємо повний потік:

$$\begin{aligned} j\,(\varphi_{\text{total}}) &= \frac{i\hbar}{2m}\,\Bigl[\Bigl(\varphi_{\text{inc}}+\varphi_{\text{ref}}\Bigr)\nabla\Bigl(\varphi_{\text{inc}}^{*}+\varphi_{\text{ref}}^{*}\Bigr)-\text{h. c.}\Bigr)\Bigr] \\ &= j_{\text{inc}}+j_{\text{ref}}+j_{\text{mixed}}, \end{aligned} \tag{37}$$

де

$$\begin{aligned} j_{\text{inc}} &= \frac{i\hbar}{2m}\,\Bigl(\varphi_{\text{inc}}\nabla\varphi_{\text{inc}}^{*}-\text{h. c.}\Bigr), \\ j_{\text{ref}} &= \frac{i\hbar}{2m}\,\Bigl(\varphi_{\text{ref}}\nabla\varphi_{\text{ref}}^{*}-\text{h. c.}\Bigr), \\ j_{\text{mixed}} &= \frac{i\hbar}{2m}\,\Bigl(\varphi_{\text{inc}}\nabla\varphi_{\text{ref}}^{*}+\varphi_{\text{ref}}\nabla\varphi_{\text{inc}}^{*}-\text{h. c.}\Bigr). \end{aligned} \tag{38}$$

Тут компонента j_{mixed} описує інтерференцію між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитею хвилею у першій області за $x<0$ (далі ми будемо називати її *змішаною компонентою від повного потоку* або просто *потоком змішування (flux of mixing)*). З умови збереження повного потоку j_{total} ми отримаємо потік j_{tr} для хвилі, що пройшла через бар'єр, та:

$$j_{\text{inc}} = j_{\text{tr}} - j_{\text{ref}} - j_{\text{mixed}},\;\; j_{\text{tr}} = j_{\text{total}} = \text{const}. \tag{39}$$

Звідси можна бачити, що потік змішування вносить невизначеність у знаходження проникності та відбиття за однієї і тієї ж відомою повною хвильовою функцією.

Ми визначимо коефіцієнти проникності, відбиття та змішування так:

$$T = \frac{j_{\text{tr}}}{j_{\text{inc}}},\;\; R = \frac{j_{\text{ref}}}{j_{\text{inc}}},\;\; M = \frac{j_{\text{mixed}}}{j_{\text{inc}}}. \tag{40}$$

Тоді з формул (39) та (40) одержимо (j_{tr} та j_{ref} направлені у протилежних напрямках, а j_{inc} та j_{tr} — в однаковому напрямку):

$$|T| + |R| - M = 1. \tag{41}$$

Звідси ми бачимо, що умова $|T|+|R|=1$ має сенс у квантовій механіці тільки тоді, коли немає інтерференції між хвилею, що падає на бар'єр, та відбитою хвилею, тобто

$$j_{\text{mixed}} = 0. \tag{42}$$

B. Проникність

Припускаючи коефіцієнт γ достатньо малим, ми будемо шукати розв'язок для невідомої функції $\varphi(x)$ як

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \gamma\varphi_1(x) = \varphi_0(x)\,\bigl\{1+\gamma\,\phi(x)\bigr\}, \tag{43}$$

де

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} \\ &= -\,\frac{2m}{\hbar^2}\int\frac{1}{\varphi_0^2(x)}\,\Bigl[\int\varphi_0(x)\,f(x)\,dx + C_1\Bigr]\,dx + C_2. \end{aligned} \tag{44}$$

Знайдемо потік, що пройшов через бар'єр:

$$j_{\rm tr} = \frac{i\hbar}{2m} \Bigl(\varphi_{\rm tr} \nabla\varphi_{\rm tr}^{*} - {\rm h.\ c.}\Bigr) = \frac{i\hbar}{2m} \Bigl(\varphi_{\rm tr,0}\, \nabla\varphi_{\rm tr,0}^{*} + \gamma\, \varphi_{\rm tr,0}\, \nabla\varphi_{\rm tr,0}^{*} \bigl(\phi_{\rm tr} + \phi_{\rm tr}^{*}\bigr) + \gamma^{2}\, \varphi_{\rm tr,0}\, \nabla\varphi_{\rm tr,0}^{*}\, |\phi_{\rm tr}|^{2} + \gamma\, |\varphi_{\rm tr,0}|^{2}\, \nabla\phi_{\rm tr}^{*} + \gamma^{2}\, |\varphi_{\rm tr,0}|^{2}\, \phi_{\rm tr}\, \nabla\phi_{\rm tr}^{*} - {\rm c.\ c.}\Bigr). \tag{45}$$

Забираючи всі компоненти при γ^2, отримаємо для потоку, що пройшов через бар’єр, такий вираз:

$$j_{\rm tr} \;=\; j_{\rm tr,0} + \gamma \cdot \Bigl\{ j_{\rm tr,0}\, \bigl(\phi_{\rm tr} + \phi_{\rm tr}^{*}\bigr) + \frac{i\hbar}{2m}\, |\varphi_{\rm tr,0}|^{2}\, \bigl(\nabla\phi_{\rm tr}^{*} - {\rm h.\ c.}\bigr) \Bigr\} \tag{46}$$

та відповідний вираз для проникності:

$$\begin{aligned} T \;&=\; \frac{j_{\rm tr,0}}{j_{\rm inc}} + \gamma \cdot \Bigl\{ j_{\rm tr,0}\, \bigl(\phi_{\rm tr} + \phi_{\rm tr}^{*}\bigr) + \frac{i\hbar}{2m}\, |\varphi_{\rm tr,0}|^{2}\, \bigl(\nabla\phi_{\rm tr}^{*} - {\rm h.\ c.}\bigr) \Bigr\} \frac{1}{j_{\rm inc}} \\ &=\; T_{0} + \gamma \cdot \Bigl\{ T_{0}\, \bigl(\phi_{\rm tr} + \phi_{\rm tr}^{*}\bigr) + \frac{i\hbar}{2m}\, \frac{1}{j_{\rm inc}} |\varphi_{\rm tr,0}|^{2}\, \bigl(\nabla\phi_{\rm tr}^{*} - {\rm h.\ c.}\bigr) \Bigr\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Перепишімо його в такому вигляді:

$$T = T_0 + \gamma \cdot \Delta T, \tag{48}$$

де

$$\Delta T = T_0\, \bigl(\phi_{\rm tr} + \phi_{\rm tr}^{*}\bigr) + \frac{i\hbar}{2m}\, \frac{1}{j_{\rm inc}} |\varphi_{\rm tr,0}|^{2}\, \bigl(\nabla\phi_{\rm tr}^{*} - {\rm h.\ c.}\bigr). \tag{49}$$

Підставляючи сюди компоненту хвильової функції відповідно до хвилі, що пройшла через бар’єр:

$$\begin{aligned} & \varphi_{\rm tr,0} = A_T\, e^{ikx}, \\ & \nabla\varphi_{\rm tr,0} = ik\, A_T\, e^{ikx}, \quad \nabla\varphi_{\rm tr,0}^{*} = -\,ik\, A_T^{*}\, e^{-ikx}, \end{aligned} \tag{50}$$

одержимо

$$\frac{i\hbar}{2m}\, |\varphi_{\rm tr,0}|^{2} = i\, \frac{j_{\rm tr,0}}{2k}. \tag{51}$$

Тепер ми перепишімо розв’язок (49) так:

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_0 \Bigl\{ \phi_{\rm tr} + \phi_{\rm tr}^{*} + \frac{i}{2k}\, \bigl(\nabla\phi_{\rm tr}^{*} - {\rm h.\ c.}\bigr) \Bigr\} \\ &= T_0 \Bigl\{ 2\, \Re(\phi_{\rm tr}) + \frac{1}{k}\, \nabla\Im(\phi_{\rm tr}) \Bigr\}. \end{aligned} \tag{52}$$

Отже, ми отримали такий вираз для проникності:

$$\begin{aligned} & T = T_0 + \gamma \cdot \Delta T, \quad \Delta T = T_0 \Bigl\{ 2\, \Re(\phi_{\rm tr}) + \frac{1}{k}\, \nabla\Im(\phi_{\rm tr}) \Bigr\}, \\ & T = T_0 \cdot \delta T, \qquad \delta T = 1 + \gamma\, \Bigl\{ 2\, \Re(\phi_{\rm tr}) + \frac{1}{k}\, \nabla\Im(\phi_{\rm tr}) \Bigr\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Будемо називати ΔT *дисипативною корекцією проникності.*

IV. АНАЛІЗ

Вивчатимемо прояв та властивості дисипативних сил при тунелюванні через прямокутний бар’єр у задачі захоплення α-частинки ядром. Для аналізу ми виберемо ядро ^{44}Ca, на яке налітає α-частинка з наступним захопленням. Для опису взаємодії між α-частинкою та ядром будемо використовувати підхід [102], де параметри α-ядерного потенціалу здобуті з орієнтацією на реакції α-захоплення. Визначимо межі бар’єра з внутрішньою та зовнішньою точками повороту R_1 та R_2 для потенціалу за параметризації [102] при енерґії налітаючої α-частинки 5 МеВ. Отримаємо $R_1 = 8.128$ фм та $R_2 = 10.650$ фм; висота бар’єра — $V_{\max} = 6.168$ МеВ (ми маємо орбітальний момент $l = 0$).

Дані про вплив дисипації на процеси тунелювання ліпше отримати на основі характеристик, які не залежать від дисипативного параметра γ (тому що цей параметр може змінюватися довільно і він не визначає властивостей дисипативних процесів, що можуть виникати при тунелюванні через бар’єр, див. (1)). Таку інформацію надає нам дисипативна корекція ΔT до проникності або її відношення до проникності без дисипації $\Delta T/T_0$.

На рис. 1 ми подаємо результати наших розрахунків останньої характеристики залежно від енерґії α-частинки. Аналізуючи отримані результати, ми робимо такі висновки:

- У повній області енерґій дисипативна корекція ΔT негативна. Звідси випливає, що включення дипативного члена W_A типу Альбрехта в потенціал (1) знижує проникність бар’єра. Цей результат природний, але він отриманий на основі нетривіальних розрахунків на основі розробленого методу, що вказує на його ефективність.

- Ми виявляємо чіткий мінімум у залежності дисипативної корекції $\Delta T/T_0$ від енерґії налітаючої α-частинки при $E = 5.27$ МеВ, де вплив дисипативних сил на процеси тунелювання повинен бути максимальним (є також інший але суттєво менший мінімум у цій залежності за $E = 2.22$ МеВ). Із зростанням енерґії вплив дисипативних сил зменшується.

- Зі зменшенням енерґії α-частинки (починаючи з 5.27 МеВ), що відповідає зниженню енерґетичних рівнів тунелювання глибше під бар’єр, дисипативна корекція $\Delta T/T_0$ зменшується. Це вказує на ослаблення впливу дисипативних сил на процес тунелювання.
- Загальна залежність дисипативної корекції $\Delta T/T_0$ від енерґії α-частинки має осциляційний характер. Можна пояснити таку поведінку хвильовою природою процесів тунелювання під бар’єром (де більшість характеристик має гармонічний характер зміни від енерґії).

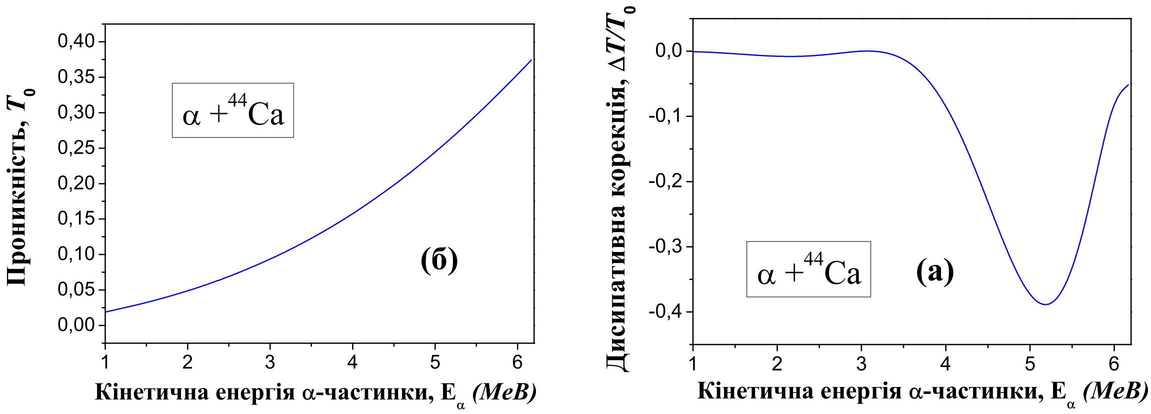

Рис. 1. Вплив дисипативної компоненти на проникність бар’єра для α-захоплення ядром ^{44}Ca. (а) Дисипативна корекція до проникності $\Delta T/T_0$, визначена першою формулою у (53). (б) Проникність T_0 — бар’єра без включення дисипативних сил (тобто без дисипативної компоненти W_A у потенціалі (1)).

V. ВИСНОВКИ

У цій статті представлено новий метод знаходження хвильової функції для квантових систем у полі одномірного потенціалу Альбрехта з дисипативною компонентою, що визначається на основі хвильових пакетів. Інтенсивністю впливу дисипативних сил такого типу на процеси тунелювання можна управляти завдяки довільному параметру γ. Для частинки, що тунелює через прямокутний бар’єр, метод визначає проникність у залежності від дисипативного параметра γ. Проаналізовано загальні властивості дисипативних ефектів при тунелюванні на прикладі захоплення α-частинки ядром ^{44}Ca. Ми встановили, що включення дисипативної компоненти в потенціал Альбрехта зменшує проникність бар’єра; вплив дисипативних сил такого типу на процес тунелювання має осциляційний характер залежно від енерґії α-частинки, маючи свій максимум.

ДОДАТОК А: РОЗРАХУНКИ ІНТЕҐРАЛІВ I_1, I_2 ТА I_3

У цьому додатку ми будемо шукати інтеґрали I_1, I_2 та I_3, що визначені у (21). Передусім запишімо перший інтеґрал:

$$
\begin{aligned}
I_1(E_1, E_2) \;=\; & \int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x}\, dx + A^*_{R,\,1} \int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x}\, dx \\
& + A_{R,\,2} \int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x}\, dx \;+ (A^*_{T,\,1} A_{T,\,2} + A^*_{R,\,1} A_{R,\,2}) \int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x}\, dx \\
& + \frac{i\, A^*_{T,\,1}\, A_{T,\,2}}{k_2-k_1} \Bigl(e^{i(k_2-k_1)a} - 1\Bigr)\Bigr|_{k_1\ne k_2} - a\, A^*_{T,\,1}\, A_{T,\,2}\Bigr|_{k_1=k_2} \\
& + \biggl\{ \frac{\alpha_1^*\,\alpha_2}{\xi_1+\xi_2}\, e^{(\xi_1+\xi_2)a} - \frac{\beta_1^*\,\beta_2}{\xi_1+\xi_2}\, e^{-(\xi_1+\xi_2)a} - \frac{\alpha_1^*\alpha_2 - \beta_1^*\beta_2}{\xi_1+\xi_2} \biggr\}\biggr|_{\xi_1\ne -\xi_2} \\
& + \biggl\{ \frac{\alpha_2\,\beta_1^*}{\xi_2-\xi_1}\, e^{(\xi_2-\xi_1)a} - \frac{\alpha_1^*\,\beta_2}{\xi_2-\xi_1}\, e^{-(\xi_2-\xi_1)a} - \frac{\alpha_2\,\beta_1^* - \alpha_1^*\,\beta_2}{\xi_2-\xi_1} \biggr\}\biggr|_{\xi_1\ne \xi_2} \\
& + a\cdot \bigl\{\alpha_1^*\,\alpha_2 + \beta_1^*\,\beta_2\bigr\}\Bigr|_{\xi_1=-\xi_2} + a\cdot \bigl\{\alpha_1^*\,\beta_2 + \beta_1^*\,\alpha_2\bigr\}\Bigr|_{\xi_1=\xi_2}.
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

Згідно з означенням дельта-функції, ми маємо таку властивість:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ikx}\, dx \;=\; \pi\,\delta(k) + i\,\Big\{\pi\,\delta(k) + \frac{1}{k}\Big\}\Big|_{k\neq 0}. \tag{A.2}$$

Друга компонента у правій частині цього виразу виникає за $k \neq 0$. Отже, ми маємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_2 \mp k_1)x}\, dx = \pi\,\delta(k_1 \mp k_2) + i\,\Big\{\pi\,\delta(k_1 \mp k_2) \pm \frac{1}{k_1 \mp k_2}\Big\}\Big|_{k_1\neq k_2},\\
&\int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_1 \pm k_2)x}\, dx = \pi\,\delta(k_1 \pm k_2) + i\,\Big\{\pi\,\delta(k_1 \pm k_2) \pm \frac{1}{k_1 \pm k_2}\Big\}\Big|_{k_1\neq -k_2}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Для виконання наступних розрахунків ми зафіксуємо дельта-функцію так:

$$\delta\,(\alpha \neq 0) = 0. \tag{A.4}$$

Тепер ми знайдемо інтеґрал (A.1) (ми маємо тільки позитиві значення для k_i та ξ_i):

$$I_1(E_1, E_2) = \delta(k_1 - k_2) \cdot f_{11}(E_1, E_2) + f_{12}(E_1, E_2), \tag{A.5}$$

де

$$\begin{aligned}
f_{11}(E_1, E_2) \;&=\; \pi\,\big(A^{*}_{T,\,1}\, A_{T,\,2} + A^{*}_{R,\,1}\, A_{R,\,2} + 1\big),\\
f_{12}(E_1, E_2) \;&=\; \frac{\alpha_1^{*}\,\alpha_2\, e^{(\xi_1+\xi_2)a} - \beta_1^{*}\,\beta_2\, e^{-(\xi_1+\xi_2)a} - \alpha_1^{*}\,\alpha_2 + \beta_1^{*}\,\beta_2}{\xi_1+\xi_2}\\
&- \frac{i\,(A^{*}_{R,\,1} - A_{R,\,2})}{k_1+k_2} + \Big\{\frac{i\,\big(A^{*}_{T,\,1}\, A_{T,\,2}\, e^{i(k_2-k_1)a} + A^{*}_{R,\,1}\, A_{R,\,2} - 1\big)}{k_2-k_1}\\
&+ \frac{\alpha_2\,\beta_1^{*}\, e^{(\xi_2-\xi_1)a} - \alpha_1^{*}\,\beta_2\, e^{-(\xi_2-\xi_1)a} - \alpha_2\,\beta_1^{*} + \alpha_1^{*}\,\beta_2}{\xi_2-\xi_1}\Big\}\Big|_{E_1\neq E_2}\\
&+ a\cdot\big\{\alpha_1^{*}\,\beta_2 + \beta_1^{*}\,\alpha_2 - A^{*}_{T,\,1}\, A_{T,\,2}\big\}\Big|_{E_1=E_2}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Для другого інтеґрала I_2 маємо:

$$\begin{aligned}
I_2(E_1, E_2) \;&=\; -\int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x}\, x\,dx - A^{*}_{R,\,1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x}\, x\,dx\\
&- A_{R,\,2}\int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x}\, x\,dx \,- A^{*}_{R,\,1}\, A_{R,\,2}\int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x}\, x\,dx\\
&+ \int\limits_0^{a}\Big\{\alpha_1^{*}\,\alpha_2\, e^{(\xi_1+\xi_2)x} + \alpha_2\,\beta_1^{*}\, e^{(\xi_2-\xi_1)x} + \alpha_1^{*}\,\beta_2\, e^{-(\xi_2-\xi_1)x} + \beta_1^{*}\,\beta_2\, e^{-(\xi_1+\xi_2)x}\Big\}\, x\,dx\\
&+ A^{*}_{T,\,1}\, A_{T,\,2}\int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x}\, dx - A^{*}_{T,\,1}\, A_{T,\,2}\int\limits_0^{a} e^{i(k_2-k_1)x}\, dx.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Окремо знайдімо суму всіх власних інтеґралів:

$$\begin{aligned}
I_2^{(1)}(E_1,E_2) \quad &= \quad \frac{1}{(\xi_1+\xi_2)^2}\Big\{\big[(\xi_1+\xi_2)\,a-1\big]\,\alpha_1^*\,\alpha_2\,e^{(\xi_1+\xi_2)a} \\
&- \quad \big[(\xi_1+\xi_2)\,a+1\big]\,\beta_1^*\,\beta_2\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a} \;+\; \alpha_1^*\,\alpha_2+\beta_1^*\,\beta_2\;\Big\} \\
&+ \quad \frac{a^2}{2}\cdot\big\{\alpha_1^*\,\beta_2+\beta_1^*\,\alpha_2-A_{T,\,1}^*\,A_{T,\,2}\big\}\Big|_{E_1=E_2} \\
&+ \quad \Bigg\{\frac{1}{(\xi_2-\xi_1)^2}\Big(\big[(\xi_2-\xi_1)\,a-1\big]\,\alpha_2\,\beta_1^*\,e^{(\xi_2-\xi_1)a} \\
&- \quad \big[(\xi_2-\xi_1)\,a+1\big]\,\alpha_1^*\,\beta_2\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a}+\alpha_2\,\beta_1^*-\alpha_1^*\,\beta_2\Big) \\
&+ \quad \frac{A_{T,\,1}^*\,A_{T,\,2}}{(k_2-k_1)^2}\Big(\big[i(k_2-k_1)\,a-1\big]\,e^{i(k_2-k_1)a}+1\Big)\Bigg\}\Bigg|_{E_1\neq E_2}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

та запишімо суму всіх невласних інтеґралів:

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)}(E_1,E_2) \quad &= \quad -\int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x}\;x\,dx-A_{R,\,1}^*\int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x}\;x\,dx \\
- \quad A_{R,\,2}\int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x}\;x\,dx &- (A_{T,\,1}^*\,A_{T,\,2}-A_{R,\,1}^*\,A_{R,\,2})\int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x}\;x\,dx.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Для наступних розрахунків ми будемо використовувати властивість

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{ikx}x\,dx=-i\frac{\partial}{\partial k}\int\limits_0^{+\infty} e^{ikx}\,dx=-i\frac{\partial}{\partial k}\Big[\pi\,\delta(k)+\frac{i}{k}\Big|_{k\neq0}\Big]=-i\pi\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)-\frac{1}{k^2}\Big|_{k\neq0}, \tag{A.10}$$

за допомогою якої ми обчислюємо інтеґрали (A.9):

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)}(E_1,E_2) \;=\; i\,\pi\,(A_{R,\,2}-A_{R,\,1}^*)\,\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=k_1+k_2} &+ i\,\pi\,(A_{T,\,1}^*\,A_{T,\,2}-A_{R,\,1}^*\,A_{R,\,2}-1)\,\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=k_2-k_1} \\
+ \quad \frac{A_{R,\,1}^*+A_{R,\,2}}{(k_1+k_2)^2} \;+\; \frac{A_{T,\,1}^*\,A_{T,\,2}-A_{R,\,1}^*\,A_{R,\,2}+1}{(k_1-k_2)^2}\Big|_{E_1\neq E_2}&,
\end{aligned} \tag{A.11}$$

де ми врахували властивість:

$$\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=-k_1}=-\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=+k_1}. \tag{A.12}$$

Сумуючи $I_2^{(1)}$ та $I_2^{(2)}$, ми знайдемо остаточний інтеґрал I_2:

$$\begin{aligned}
I_2(E_1,E_2) \quad &= \quad f_{21}^{(+)}(E_1,E_2)\cdot\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=k_2+k_1} \\
&+ \quad f_{21}^{(-)}(E_1,E_2)\cdot\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Big|_{k=k_2-k_1}+f_{22}(E_1,E_2),
\end{aligned} \tag{A.13}$$

де

$$\begin{aligned}
f_{21}^{(+)}(E_1, E_2) &= i\,\pi\,(A_{R,\,2} - A_{R,\,1}^{*}), \\
f_{21}^{(-)}(E_1, E_2) &= i\,\pi\,(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2} - A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2} - 1), \\
f_{22}(E_1, E_2) &= \frac{1}{(\xi_1+\xi_2)^2} \Bigl\{ \bigl[(\xi_1+\xi_2)\,a - 1\bigr]\,\alpha_1^{*}\,\alpha_2\,e^{(\xi_1+\xi_2)a} \\
-\;& \bigl[(\xi_1+\xi_2)\,a + 1\bigr]\,\beta_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a} \;+\; \alpha_1^{*}\,\alpha_2 + \beta_1^{*}\,\beta_2 \Bigr\} \\
+\;& \frac{A_{R,\,1}^{*} + A_{R,\,2}}{(k_1+k_2)^2} \;+\; \frac{a^2}{2}\cdot\bigl\{\alpha_1^{*}\,\beta_2 + \beta_1^{*}\,\alpha_2 - A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\bigr\}\Bigr|_{E_1=E_2} \\
+\;& \Biggl\{ \frac{1}{(\xi_2-\xi_1)^2} \Bigl(\bigl[(\xi_2-\xi_1)\,a - 1\bigr]\,\alpha_2\,\beta_1^{*}\,e^{(\xi_2-\xi_1)a} \\
-\;& \bigl[(\xi_2-\xi_1)\,a + 1\bigr]\,\alpha_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a} + \alpha_2\,\beta_1^{*} - \alpha_1^{*}\,\beta_2 \Bigr) + \\
+\;& \frac{A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}}{(k_2-k_1)^2} \Bigl([i(k_2-k_1)\,a - 1]\,e^{i(k_2-k_1)a} + 1 \Bigr) \\
+\;& \frac{A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2} - A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2} + 1}{(k_1-k_2)^2} \Biggr\}\Biggr|_{E_1\ne E_2}.
\end{aligned}$$

Тепер ми обчислимо останній інтеґрал I_3:

$$\begin{aligned}
I_3(E_1, E_2) \;=\;& i\,k_2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_2-k_1)x}\,dx + i\,k_2\,A_{R,\,1}^{*} \int\limits_0^{+\infty} e^{-i(k_1+k_2)x}\,dx \\
& - ik_2 A_{R,\,2} \int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_1+k_2)x} dx + ik_2 (A_{T,\,1}^{*} A_{T,\,2} - A_{R,\,1}^{*} A_{R,\,2}) \int\limits_0^{+\infty} e^{i(k_2-k_1)x} dx \\
& - \frac{k_2\,A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}}{k_2-k_1} \Bigl(e^{i(k_2-k_1)a} - 1 \Bigr)\Bigr|_{k_1\ne k_2} - i\,k_2\,a\,A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\Bigr|_{k_1=k_2} \\
& + \xi_2 \left\{ \frac{\alpha_1^{*}\,\alpha_2}{\xi_1+\xi_2}\,e^{(\xi_1+\xi_2)a} + \frac{\beta_1^{*}\,\beta_2}{\xi_1+\xi_2}\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a} - \frac{\alpha_1^{*}\alpha_2 + \beta_1^{*}\beta_2}{\xi_1+\xi_2} \right\}\Biggr|_{\xi_1\ne-\xi_2} \\
& + \xi_2 \left\{ \frac{\alpha_2\,\beta_1^{*}}{\xi_2-\xi_1}\,e^{(\xi_2-\xi_1)a} + \frac{\alpha_1^{*}\,\beta_2}{\xi_2-\xi_1}\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a} - \frac{\alpha_2\beta_1^{*} + \alpha_1^{*}\beta_2}{\xi_2-\xi_1} \right\}\Biggr|_{\xi_1\ne\xi_2} \\
& + \xi_2\,a\cdot\bigl\{\alpha_1^{*}\,\alpha_2 - \beta_1^{*}\,\beta_2\bigr\}\Bigr|_{\xi_1=-\xi_2} + \xi_2\,a\cdot\bigl\{\beta_1^{*}\,\alpha_2 - \alpha_1^{*}\,\beta_2\bigr\}\Bigr|_{\xi_1=\xi_2}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Використовуючи властивість (A.10), отримаємо:

$$I_3(E_1, E_2) = \delta(k_1 - k_2)\cdot f_{31}(E_1, E_2) + f_{32}(E_1, E_2), \tag{A.15}$$

де

$$\begin{aligned}
f_{31}(E_1, E_2) &= \pi\,ik_2\,(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2} - A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2} + 1), \\
f_{32}(E_1, E_2) &= \frac{\xi_2}{\xi_1+\xi_2} \Bigl[\alpha_1^{*}\,\alpha_2\,e^{(\xi_1+\xi_2)a} + \beta_1^{*}\,\beta_2\,e^{-(\xi_1+\xi_2)a} - \alpha_1^{*}\,\alpha_2 - \beta_1^{*}\,\beta_2 \Bigr] \\
+\;& \frac{k_2\,(A_{R,\,1}^{*} + A_{R,\,2})}{k_1+k_2} + a\cdot\bigl\{\xi_2\,\beta_1^{*}\,\alpha_2 - \xi_2\,\alpha_1^{*}\,\beta_2 - ik_2\,A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\bigr\}\Bigr|_{E_1=E_2} \\
-\;& \Biggl\{ \frac{k_2\,\bigl(A_{T,\,1}^{*}\,A_{T,\,2}\,e^{i(k_2-k_1)a} - A_{R,\,1}^{*}\,A_{R,\,2} - 1\bigr)}{k_2-k_1} \\
-\;& \frac{\xi_2\,\bigl(\alpha_2\beta_1^{*}\,e^{(\xi_2-\xi_1)a} + \alpha_1^{*}\beta_2\,e^{-(\xi_2-\xi_1)a} - \alpha_2\beta_1^{*} - \alpha_1^{*}\beta_2\bigr)}{\xi_2-\xi_1} \Biggr\}\Biggr|_{E_1\ne E_2}.
\end{aligned}$$

ДОДАТОК Б: РОЗРАХУНКИ ФУНКЦІЇ $F(E_0, X)$

Використовуючи розв'язки для інтеґралів I_1, I_2 та I_3, отримані в Додатку А, тепер шукатимемо функцію $f(E_0, x)$. Із (20) цю функцію можна переписати так:

$$f(E_0,x) \,=\, i \int\limits_0^{E_0} dE_3 \int\limits_0^{E_0} dE_4 \, \frac{g(E_3)\, g(E_4)}{g(E_0)} \, \Big\{ x \left[\delta(k_3-k_4)\, f_{11}(E_3,E_4) + f_{12}(E_3,E_4)\right]$$
$$- \quad \Big[f_{21}^{(+)}(E_3,E_4)\, \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\Big|_{k=k_4+k_3} + f_{21}^{(-)}(E_3,E_4)\, \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\Big|_{k=k_4-k_3}$$
$$+ \quad f_{22}(E_3,E_4)\Big]\Big\} \int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2 \; g(E_1)\, g(E_2)\, g(E'')\, \varphi_0(E'',x)$$
$$\times \quad \big[\delta(k_1-k_2)\cdot f_{31}(E_1,E_2) + f_{32}(E_1,E_2)\big].$$

У цьому виразі спершу ми проінтеґруємо за dE_1 та dE_2:

$$\int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2\, g(E_1) g(E_2) g(E'')\, \varphi_0(E'',x)\, \big[\delta(k_1-k_2)\, f_{31}(E_1,E_2) + f_{32}(E_1,E_2)\big]$$
$$= \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} g(E_1)\, dE_1 \int\limits_{E_2=0}^{E_2=E_0} g(E_2)\, g(E'')\, \varphi_0(E'',x)\; f_{31}(E_1,E_2)\cdot \delta(k_1-k_2)\; k_2\, dk_2 \tag{Б.1}$$
$$+ \int\limits_0^{E_0} g(E_1)\, dE_1 \int\limits_0^{E_0} g(E_2)\, g(E'')\, \varphi_0(E'',x)\, f_{32}(E_1,E_2)\; dE_2.$$

Тут хвильові числа k_1 та k_2 визначаються як $k_i = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE_i}$, тобто вони є додатними за будь-якої енергії. Для наступних розрахунків ми введемо визначення *умовно нормованої дельта-функції* відповідно до виразу:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(a-x)\, \delta(x)\; dx = \begin{cases} f(a) & \text{при} \quad x_1 \le a \le x_2, \\ 0 & \text{при} \quad a < x_1 \text{ або } a > x_2. \end{cases} \tag{Б.2}$$

Таке визначення можна переписати коротшою формулою:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(a-x)\, \delta(x)\; dx = f(a)\Big|_{x_1 \le a \le x_2}. \tag{Б.3}$$

Тепер ми перетворимо інтеґрали в (Б.1) так:

$$\int\limits_0^{E_0} dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_2\, g(E_1) g(E_2) g(E'') \varphi_0(E'',x)\, \big[\delta(k_1-k_2)\, f_{31}(E_1,E_2) + f_{32}(E_1,E_2)\big]$$
$$= \frac{\hbar}{m} \Big\{ g(E')\varphi_0(E',x) \Big\}\Big|_{E'=E_0+E_3-E_4} \int\limits_0^{E_0} g^2(E_1)\, f_{31}(E_1,E_1) k_1 dE_1 \tag{Б.4}$$
$$+ \int\limits_0^{E_0} g(E_1)\, dE_1 \int\limits_0^{E_0} g(E_2)\, g(E'')\, \varphi_0(E'',x)\, f_{32}(E_1,E_2)\; dE_2$$

та отримаємо таку формулу для функції f:

$$\begin{aligned}
f(E_0,x) \;\; = \;\; & \frac{i}{g(E_0)} \int\limits_0^{E_0} g^2(E_1)\, f_{31}(E_1,E_1)\, k_1\, dE_1 \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \\
\times \;\; & \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4) \biggl\{ x \cdot \bigl[\delta(k_3-k_4)\cdot f_{11}(E_3,E_4) + f_{12}(E_3,E_4)\bigr] \\
- \;\; & \Bigl[f_{21}^{(+)}(E_3,E_4) \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3} + f_{21}^{(-)}(E_3,E_4) \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\Bigr|_{k=k_4-k_3} \\
+ \;\; & f_{22}(E_3,E_4)\Bigr]\biggr\} \cdot \frac{\hbar}{m}\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4} \\
+ \;\; & \frac{i}{g(E_0)} \int\limits_0^{E_0} dE_1\, g(E_1) \int\limits_0^{E_0} dE_2\, g(E_2)\, f_{32}(E_1,E_2) \\
\times \;\; & \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, g(E'')\, \varphi_0(E'',x) \\
\times \;\; & \biggl\{ x \cdot \bigl[\delta(k_3-k_4)\cdot f_{11}(E_3,E_4) + f_{12}(E_3,E_4)\bigr] - f_{22}(E_3,E_4) \\
- \;\; & f_{21}^{(+)}(E_3,E_4) \frac{\partial \delta(k)}{\partial k}\biggr|_{k=k_4+k_3} - f_{21}^{(-)}(E_3,E_4) \frac{\partial \delta(k)}{\partial k}\biggr|_{k=k_4-k_3} \biggr\}.
\end{aligned} \tag{Б.5}$$

Ми бачимо, що цей вираз має досить складний вигляд. Щоб його розрахувати, передусім шукатимемо перший інтеґрал:

$$\begin{aligned}
& \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4) \biggl\{ x \cdot \bigl[\delta(k_3-k_4)\cdot f_{11}(E_3,E_4) + f_{12}(E_3,E_4)\bigr] \\
- \;\; & \Bigl[f_{21}^{(+)}(E_3,E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3} + f_{21}^{(-)}(E_3,E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\Bigr|_{k=k_4-k_3} \\
+ \;\; & f_{22}(E_3,E_4)\Bigr]\biggr\} \cdot \frac{\hbar}{m}\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \;\; & x \cdot \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, \delta(k_3-k_4)\;\; f_{11}(E_3,E_4) \cdot \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4} \\
+ \;\; & x \cdot \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, f_{12}(E_3,E_4)\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4} \\
- \;\; & \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4) \biggl\{ f_{21}^{(+)}(E_3,E_4) \cdot \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\biggr|_{k=k_4+k_3} \biggr\} \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4} \\
- \;\; & \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4) \cdot f_{21}^{(-)}(E_3,E_4)\; \frac{\partial}{\partial k}\, \delta(k)\biggr|_{k=k_4-k_3} \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4} \\
- \;\; & \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, f_{22}(E_3,E_4)\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}.
\end{aligned} \tag{Б.6}$$

Перший інтеґрал у цьому виразі дорівнює

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{11}(E_3,E_4)\, \Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\\ &\times\ \delta(k_3-k_4)\, dE_4 \ = \frac{\hbar}{m}\, g(E_0)\,\varphi_0(E_0,x)\cdot \int\limits_0^{E_0} g^2(E_3)\, f_{11}(E_3,E_3)\, k_3\, dE_3.\end{aligned} \tag{Б.7}$$

Другий інтеґрал у виразі (Б.6) практично скорочується та тому його далі потрібно знаходити чисельно. Тепер розгляньмо третій інтеґрал (без коефіцієнта нормування):

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{21}^{(+)}(E_3,E_4)\, \Biggl\{\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3}\Biggr\}\cdot\Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\, dE_4\\ =\ &\frac{\hbar}{m}\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{21}^{(+)}(E_3,E_4)\, \Biggl\{\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3}\Biggr\}\cdot\Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\, k_4\, dk_4.\end{aligned} \tag{Б.8}$$

Ми маємо властивість:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3} \ &=\ \frac{\partial k_4}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k_4}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3} + \frac{\partial k_3}{\partial k}\frac{\partial}{\partial k_3}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3}\\ &=\ \frac{\partial}{\partial k_4}\,\delta(k_4+k_3) + \frac{\partial}{\partial k_3}\,\delta(k_4+k_3).\end{aligned} \tag{Б.9}$$

Тоді перепишімо (Б.8) так:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{21}^{(+)}(E_3,E_4)\cdot \Biggl\{\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4+k_3}\Biggr\}\,\Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\, dE_4\\ =\ &\frac{\hbar}{m}\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{21}^{(+)}(E_3,E_4)\cdot \frac{\partial}{\partial k_4}\,\delta(k_4+k_3)\,\Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\, k_4\, dk_4\\ +\ &\frac{\hbar}{m}\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3)\frac{\partial}{\partial k_3}\int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{21}^{(+)}(E_3,E_4)\cdot \delta(k_4+k_3)\,\Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\, k_4\, dk_4 \ = 0.\end{aligned} \tag{Б.10}$$

Отже, цей інтеґрал дорівнює нулеві (згідно з умовою задачі, енерґія має тільки додатні значення). Для четвертого інтеґрала у виразі (Б.6) ми знаходимо (без коефіцієнта нормування):

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} g(E_4)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_4)\, \Bigl\{g(E')\,\varphi_0(E',x)\Bigr\}\Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}\cdot\Biggl\{\frac{\partial}{\partial k}\,\delta(k)\Bigr|_{k=k_4-k_3}\Biggr\}\, dE_4\\ =\ &-\frac{2\,\hbar}{m}\, g(E_0)\,\varphi_0(E_0,x)\int\limits_0^{E_0} g(E_3)\,\frac{\partial}{\partial k_3}\Bigl\{g(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3\Bigr\}\, dE_3.\end{aligned} \tag{Б.11}$$

Цей інтеґрал можна проінтеґрувати частинами:

$$\begin{aligned}=\ &-\frac{2\,\hbar}{m}\, g(E_0)\,\varphi_0(E_0,x)\int\limits_0^{E_0} g(E_3)\,\frac{\partial}{\partial k_3}\Bigl\{g(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3\Bigr\}\, dE_3\\ =\ &-\frac{2\,\hbar}{m}\, g(E_0)\,\varphi_0(E_0,x)\cdot\Biggl\{\Bigl[g^2(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3\Bigr]\Bigr|_{E_3=0}^{E_3=E_0}\\ -\ &\int\limits_0^{E_0} g(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3\,\frac{\partial g(E_3)}{\partial k_3}\, dE_3\Biggr\}.\end{aligned} \tag{Б.12}$$

Тоді права частина формули (Б.6) матиме вигляд:

$$
\begin{aligned}
& x \cdot \frac{\hbar^2}{m^2}\, g(E_0)\, \varphi_0(E_0,x) \cdot \int\limits_0^{E_0} g^2(E_3)\, f_{11}(E_3,E_3)\, k_3\, dE_3 \\
+ \; & x \cdot \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, f_{12}(E_3,E_4)\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Bigr\} \Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4} \\
+ \; & \frac{2\,\hbar^2}{m^2}\, g(E_0)\, \varphi_0(E_0,x) \cdot \Biggl\{ \Bigl[g^2(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3 \Bigr] \Bigr|_{E_3=0}^{E_3=E_0} \\
- \; & \int\limits_0^{E_0} g(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3\, \frac{\partial g(E_3)}{\partial k_3}\, dE_3 \Biggr\} \\
- \; & \frac{\hbar}{m} \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, f_{22}(E_3,E_4)\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Bigr\} \Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}.
\end{aligned}
\tag{Б.13}
$$

Тепер ми знаходимо функцію f:

$$
\begin{aligned}
f(E_0,x) \; = \; & \frac{i}{g(E_0)}\, \frac{\hbar}{m}\, J_1(E_0) \Biggl\{ x\, \frac{\hbar}{m}\, g(E_0)\, \varphi_0(E_0,x) \cdot J_2(E_0) \; + \; x \cdot J_3(E_0,x) \\
+ \; & \frac{2\,\hbar}{m}\, g(E_0)\, \varphi_0(E_0,x) \left(\Bigl[g^2(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3 \Bigr] \Bigr|_{E_3=0}^{E_3=E_0} - J_4(E_0) \right) - J_5(E_0,x) \Biggr\} \\
+ \; & \frac{i}{g(E_0)} \cdot \Biggl\{ x \cdot \frac{\hbar}{m} \cdot J_6(E_0,x) \cdot J_2(E_0) \; + x \cdot J_7(E_0,x) \\
+ \; & \frac{2\,\hbar}{m} \cdot J_6(E_0,x) \cdot \Bigl[g^2(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3 \Bigr] \Bigr|_{E_3=0}^{E_3=E_0} \\
- \; & \frac{2\,\hbar}{m} \cdot J_6(E_0,x) \cdot J_4(E_0) \; - \; J_8(E_0,x) \Biggr\},
\end{aligned}
\tag{Б.14}
$$

де

$$
\begin{aligned}
J_1(E_0) \; & = \; \int\limits_0^{E_0} g^2(E_1)\, f_{31}(E_1,E_1)\, k_1\, dE_1, \\
J_2(E_0) \; & = \; \int\limits_0^{E_0} g^2(E_3)\, f_{11}(E_3,E_3)\, k_3\, dE_3, \\
J_3(E_0,x) \; & = \; \int\limits_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int\limits_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, f_{12}(E_3,E_4)\, \Bigl\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Bigr\} \Bigr|_{E'=E_0+E_3-E_4}, \\
J_4(E_0) \; & = \; \int\limits_0^{E_0} g(E_3)\, f_{21}^{(-)}(E_3,E_3)\, k_3\, \frac{\partial g(E_3)}{\partial k_3}\, dE_3,
\end{aligned}
\tag{Б.15}
$$

$$
\begin{aligned}
J_5(E_0) &= \int_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4\, g(E_4)\, f_{22}(E_3,E_4)\, \Big\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Big\}\Big|_{E'=E_0+E_3-E_4}, \\
J_6(E_0,x) &= \int_0^{E_0} dE_1\, g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2\, g(E_2)\, f_{32}(E_1,E_2)\, \Big\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Big\}\Big|_{E'=E_0+E_1-E_2}, \\
J_7(E_0,x) &= \int_0^{E_0} dE_1\, g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2\, g(E_2)\, f_{32}(E_1,E_2) \int_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 \\
&\times\; g(E_4)\, f_{12}(E_3,E_4)\, \Big\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Big\}\Big|_{E'=E_0+E_1-E_2+E_3-E_4}, \\
J_8(E_0,x) &= \int_0^{E_0} dE_1\, g(E_1) \int_0^{E_0} dE_2\, g(E_2)\, f_{32}(E_1,E_2) \int_0^{E_0} dE_3\, g(E_3) \int_0^{E_0} dE_4 \\
&\times\; g(E_4)\, f_{22}(E_3,E_4)\, \Big\{ g(E')\, \varphi_0(E',x) \Big\}\Big|_{E'=E_0+E_1-E_2+E_3-E_4}.
\end{aligned}
\tag{Б.16}
$$

---

[1] W. J. Swiatecki, in *Proceedings of the International Conference on Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions*, Heilderberg, Germany, 1969, edited by R. Bock, W. R. Hering (Notht-Holland, New York, 1970), p. 729.
[2] W. J. Swiatecki, J. Phys. Suppl. **33**, C5 (1972).
[3] J. Schirmer, S. Knaak, G. Süssman, Nucl. Phys. A **199**, 31 (1973).
[4] Y. Boneh, Z. Fraenkel, Phys. Rev. C **10**, 893 (1974).
[5] D. H. E. Gross, Nucl. Phys. A **240**, 472 (1975).
[6] G. Schütte, L. Wilets, Nucl. Phys. A **252**, 21 (1975).
[7] K. T. R. Davies, A. J. Sierk, J. R. Nix, Phys. Rev. C **13**, 2385 (1976).
[8] K. T. R. Davies, R. A. Managan, J. R. Nix, A. J. Sierk, Phys. Rev. C **16**, 1890 (1977).
[9] G. Wegmann, Phys. Lett. B **50**, 327 (1974).
[10] S. E. Koonin, R. L. Hatch, J. Randrup, Nucl. Phys. A **283**, 87 (1977).
[11] S. E. Koonin and J. Randrup, Nucl. Phys. A **289**, 475 (1977).
[12] A. J. Sierk, S. E. Koonin, J. R. Nix, Phys. Rev. C **17**, 646 (1978).
[13] D. Glas, U. Mosel, Phys. Lett. B **49**, 301 (1974).
[14] D. Glas, U. Mosel, Nucl. Phys. A **264**, 268 (1976).
[15] S. E. Koonin, J. R. Nix, Phys. Rev. C **13**, 209 (1976).
[16] D. H. E. Gross, H. Kalinowski, Phys. Rep. **45**, 175 (1978).
[17] K. Möhring, T. Srokowski, D. H. E. Gross, Nucl. Phys. A **533**, 333 (1991).
[18] J.-L. Tian, X. Li, S.-W. Yan, X.-Z. Wu, Z.-X. Li, Chin. Phys. Lett. **26**, 082504 (2009).
[19] P. Fröbrich, S. Y. Xu, Phys. Rep. **477**, 143 (1988).
[20] P. Fröbrich, J. Richert, Phys. Lett. B **237**, 328 (1990).
[21] J. Marten, P. Fröbrich, Nucl. Phys. A **545**, 854 (1992).
[22] P. Fröbrich, I. I. Gontchar, N. D. Mavlitov, Nucl. Phys. A **556**, 281 (1993).
[23] P. Fröbrich, I. I. Gontchar, Phys. Rep. **292**, 131–237 (1998).
[24] P. Van, T. Fulop, Phys. Lett. A **323**, 374 (2004).
[25] W. Ye, Phys. Rev. C **83**, 044611 (2011).
[26] D. Naderi, Phys. Rev. C **86**, 044609 (2012).
[27] M. R. Pahlavani, D. Naderi, Europ. Phys. J. A **48**, 129 (2012).
[28] Y. Aritomo, S. Chiba, Phys. Rev. C **88**, 044614 (2013).
[29] V. L. Litnevsky, V. V. Pashkevich, G. I. Kosenko, F. A. Ivanyuk, Phys. Rev. C **89**, 034626 (2014).
[30] P. Fröbrich, Phys. Rep. **116**, 337 (1984).
[31] N. Loebl, J. A. Maruhn, P.-G. Reinhard, Phys. Rev. C **84**, 034608 (2011).
[32] N. Loebl, A. S. Umar, J. A. Maruhn, P.-G. Reinhard, P. D. Stevenson, V. E. Oberacker, Phys. Rev. C **86**, 024608 (2012).
[33] I. I. Gontchar, R. Bhattacharya, M. V. Chushnyakova, Phys. Rev. C **89**, 034601 (2014).
[34] M. V. Chushnyakova, I. I. Gontchar, Phys. Rev. C **87**, 014614 (2013).
[35] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).
[36] K. V. Pavlii, Prob. At. Sci. Tech. **3**, 168 (2013).
[37] V. Blum, G. Lauritsch, J. Maruhn, P.-G. Reinhard, J. Comp. Phys. **100**, 364 (1992).
[38] P.-G. Reinhard, R. .Y. Cusson, Nucl. Phys. A **378**, 418 (1982).
[39] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **46**, 211 (1981).
[40] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Ann. Phys. **149**, 374 (1983).
[41] P. Caldirola, Nuovo Cim. **18**, 393 (1941).
[42] E. Kanai, Progr. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).
[43] S. Baskoutas, A. Jannussis, Nuov. Cim. **107**, 255 (1992).
[44] S. Baskoutas, A. Jannussis, J. Phys. A **25**, L1299 (1992).
[45] S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani, J. Phys. A **26**, 7137 (1993).
[46] S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani, V. Papatheou, J. Phys. A **26**, L819 (1993).
[47] S. Baskoutas, A. Jannussis, R. Mignani, J. Phys. A **27**, 2189 (1994).
[48] S. Baskoutas, Quantum Semiclass. Opt. **8**, 989 (1996).
[49] J.-R. Choi, Phys. Scripta **70**, 271 (2004).
[50] J. R. Choi, K. H. Yeon Phys. Scripta **78**, 045001 (2008).
[51] G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, X.-Y. Guo, J. Phys. A **44**, 185301 (2011).

[52] G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, X.-Y. Guo, J. Phys. A **44**, 305301 (2011).
[53] G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, C.-Y. Long, J. Phys. A **44**, 425301 (2011).
[54] G.-J. Guo, Z.-Z. Ren, G.-X. Ju, X.-Y. Guo, J. Phys. A **45**, 115301 (2012).
[55] D. Schuch, J. Math. Phys. **48**, 122701 (2007).
[56] M. Kostin, J. Chem. Phys. **57**, 358 (1972).
[57] K. Albrecht, Phys. Lett. B **56** (2), 127 (1975).
[58] R. Hasse, J. Math. Phys. **16**, 2005 (1975).
[59] N. Gisin, Physica A **111**, 364 (1982).
[60] P. Exner, J. Math. Phys. **24**, 1129 (1983).
[61] A. P. Polychronakos, R. Tzani, Phys. Lett. B **302**, 255 (1993).
[62] V. S. Olkhovsky, S. P. Maydanyuk, E. Recami, Phys. El. Part. At. Nucl. **41**, 42 (2010).
[63] E. Recami, V. S. Olkhovsky, S. P. Maydanyuk, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 1785 (2010), arXiv:0903.3187.
[64] V. S. Olkhovsky, S. P. Maydanyuk, Ukr. Phys. J. **45**, 1262 (2000), nucl-th/0406035.
[65] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, A. K. Zaichenko, J. Phys. Stud. **6**, 1 (2002), nucl-th/0407108.
[66] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, S. V. Belchikov, Probl. At. Sci. Tech. **1**, 16 (2002); preprint nucl-th/0409037(2004).
[67] С. П. Майданюк, дис. канд. фіз.-мат. наук (Київ, 2003).
[68] F. Cardone, S. P. Maidanyuk, R. Mignani, V. S. Olkhovsky, Found. Phys. Lett. **19**, 441 (2006).
[69] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, J. Phys. Stud. **14**, 40 (2011).
[70] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, J. Mod. Phys. **2**, 572 (2011).
[71] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, J. Phys. G **17**, 1223 (1991).
[72] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, Phys. Rev. C **45**, 2247 (1992).
[73] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, Atom. Data Nucl. Data Tables **54**, 53 (1993).
[74] S. B. Duarte *et al.*, Atom. Data Nucl. Data Tables **80**, 235 (2002).
[75] N. Dasgupta-Schubert, M. A. Reyes, Atom. Data Nucl. Data Tables **93**, 907 (2007).
[76] R. B. Firestone, V. S. Shirley, *Table of Isotopes*, 8th ed. New York: Wiley; 1996.
[77] Y. A. Akovali, Nucl. Data Sheets **84**, 1 (1998).
[78] G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A. H. Wapstra, Nucl. Phys. A **729**, 3 (2003).
[79] M. Gupta, T. W. Burrows, Nucl. Data Sheets **106**, 251 (2005).
[80] P. Belli *et al.*, Nucl. Phys. A **789**, 15 (2007).
[81] K. Nishio, H. Ikezoe, S. Mitsuoka, K. Satou, C. J. Lin, Phys. Rev. C **68**, 064305 (2003).
[82] Z. Y. Zhang *et al.*, Phys. Rev. C **89**, 014308 (2014).
[83] R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Varga, D. S. Delion, Phys. Rep. **294**, 265 (1998).
[84] R. G. Tomas, Prog. Theor. Phys. **12**, 253 (1954).
[85] S. G. Kadmenskii, V. I. Furman, Sov. J. Part. Nucl. **6**, 189 (1976).
[86] S. G. Kadmenskii, V. E. Kalechits, A. A. Martynov, Sov. J. Part. Nucl. **14**, 193 (1972).
[87] S. G. Kadmensky, S. D. Kurgalin, Yu. M. Tchuvil'sky, Phys. Part. Nucl. **38**, 699 (2007).
[88] T. L. Stewart, M. W. Kermode, D. J. Beachey, N. Rowley, I. S. Grant, A. T. Kruppa, Nucl. Phys. A **611**, 332 (1996).
[89] D. S. Delion, A. Insolia, R. J. Liotta, Phys. Rev. C **46**, 1346 (1992).
[90] D. S. Delion, A. Insolia, R. J. Liotta, Phys. Rev. C **49**, 3024 (1994).
[91] D. S. Delion, A. Insolia, R. J. Liotta, Phys. Rev. C **67**, 054317 (2003).
[92] D. S. Delion, R. J. Liotta, Phys. Rev. C **87**, 041302(R) (2013).
[93] R. Id Betan, W. Nazarewicz, Phys. Rev. C **86**, 034338 (2012).
[94] I. Silesteanu, W. Scheid, A. Sandulesku, Nucl. Phys. A **679**, 317 (2001).
[95] I. Silesteanu, A. I. Budaca, A. O. Silesteanu, Rom. J. Phys. **55**, 10881110 (2010).
[96] I. Silesteanu, A. I. Budaca, Atom. Data Nucl. Data Tables **98**, 1096 (2012).
[97] В. М. Струтинский, Докл. АН СССР **104**, 524 (1955).
[98] В. М. Струтинский, Журн. эксп. теор. физ. **32**, 1412 (1957).
[99] G. Royer, J. Phys. G **26**, 1149 (2000).
[100] R. Moustabchir, G. Royer, Nucl. Phys. A **683**, 266 (2001).
[101] D. N. Basu, Phys. Lett. B **566**, 90 (2003).
[102] V. Yu. Denisov, H. Ikezoe, Phys. Rev. C **72**, 064613 (2005); arXiv:nucl-th/0510082.
[103] V. Yu. Denisov, A. A. Khudenko, Phys. Rev. C **79**, 054614 (2009).
[104] V. Yu. Denisov, A. A. Khudenko, Phys. Rev. C **80**, 034603 (2009).
[105] V. Yu. Denisov, A. A. Khudenko, Atom. Data Nucl. Data Tables **95**, 815 (2009).
[106] C. Xu, Z. Ren, Phys. Rev. C **73**, 041301(R) (2006).
[107] E. L. Medeiros, M. M. N. Rodrigues, S. B. Duarte, O. A. P. Tavares, J. Phys. G **32**, B23 (2006).
[108] C. Samanta, P. Roy Chowdhury, D. N. Basu, Nucl. Phys. A **789**, 142 (2007).
[109] A. Bhagwat, Y. K. Gambhir, J. Phys. G **35**, 065109 (2008).
[110] H. F. Zhang, G. Royer, Phys. Rev. C **77**, 054318 (2008).
[111] P. Mohr, Phys. Rev. C **61**, 045802 (2000).
[112] D. N. Poenaru, I. H. Plonski, W. Greiner, Phys. Rev. C **74**, 014312 (2006).
[113] A. Sobiczewski, K. Pomorski, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 292 (2007).
[114] J. R. Huizenga, G. Igo, Nucl. Phys. **29**, 462 (1962).
[115] M. Nolte, H. Machner, J. Bojowald, Phys. Rev. C **36**, 1312 (1987).
[116] U. Atzrott, P. Mohr, H. Abele, C. Hillenmayer, G. Staudt, Phys. Rev. C **53**, 1336 (1996).
[117] P. Demetriou, C. Grama, S. Goriely, Nucl. Phys. A **707**, 253 (2002).
[118] M. Avrigeanu, W. won Oertzen, A. J. M. Plompen, V. Avrigeanu, Nucl. Phys. A **723**, 104 (2003).
[119] T. Rauscher, F. K. Thielemann, J. Gorres, M. Wiescher, Nucl. Phys. A **675**, 695 (2000).
[120] D. Glas, U. Mosel, Phys. Rev. C **10**, 2620 (1974).
[121] D. Glas, U. Mosel, Nucl. Phys. A **237**, 429 (1975).
[122] E. F. Aguilera, J. J. Kolata, Phys. Rev. C **85**, 014603 (2012).
[123] R. Kumari, Nucl. Phys. A **917**, 85 (2013).

[124] K. A. Eberhard, Ch. Appel, R. Bangert, L. Cleemann, J. Eberth, V. Zobel, Phys. Rev. Lett. **43**, 107 (1979).
[125] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, J. Phys. Stud. **18**, 1001 (2014).
[126] J. M. D'Auria, M. J. Fluss, L. Kowalski, J. M. Miller, Phys. Rev. **168**, 1224 (1968).
[127] A. R. Barnett, J. S. Lilley, Phys. Rev. C **9**, 2010 (1974).
[128] S. P. Maydanyuk, Eur. Phys. J. Plus **126**, 76 (2011), arXiv:1005.5447.

TUNNELING THROUGH THE ALBRECHT'S BARRIERS WITH DISSIPATIVE TERMS

S. P. Maydanyuk
Institute for Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine
Kyiv, UA–03680, Ukraine

We present a new method for the determination of the wave function for a particle tunneling through one-dimensional Albrecht potential barriers with a dissipative term constructed on the basis of evolving non-stationary wave packets. The intensity of the influence of the dissipative forces of such a type on the tunneling process can be controlled via an arbitrary parameter γ. The properties of the dissipative forces in tunneling are investigated in the task of capture of the α-particle by the nucleus ^{44}Ca with the rectangular barrier (whose parameters were extracted from modern approaches for the description of the interaction between the α-particle and nucleus without any dissipation in this α-capture reaction).

Understanding the influence of dissipation on the tunneling processes can be better obtained on the basis of the characteristics which are not dependent on the arbitrary dissipative parameter γ. A dissipative correction ΔT of the penetrability without dissipation T_0 or its ratio to the penetrability without dissipation $\Delta T/T_0$ provides such information. We performed calculations of this characteristic in dependence on the energy of the α-particle, and we conclude:

- The dissipative correction ΔT is negative, i.e. the inclusion of a dissipative term W_A of Albrecht type into the potential suppresses barrier penetrability. This result is natural, but it was obtained on the basis of the developed method.
- We observe the presence of clear minimum in dependence of the dissipative correction $\Delta T/T_0$ on the energy of the incident α-particle at $E = 5.27$ MeV where the influence of the dissipative forces on the tunneling processes is maximal. At a further increase of the energy the role of the dissipative forces is decreased.
- At decreasing of the energy of the α-particle (from 5.27 MeV) the dissipative correction $\Delta T/T_0$ is decreased. This indicates at the suppression of the influence of the dissipative forces on the tunneling process deeply under the barrier.
- A general dependence of the dissipative correction $\Delta T/T_0$ on energy of the α-particle has an oscillatoric character. We can explain such a behavior by the wave nature of the tunneling processes under the barrier (where most of characteristics have a harmonic energy dependence).