

## МЕТОД БАГАТОРАЗОВИХ ВНУТРІШНІХ ВІДБИТТІВ ЯК ЗАСІБ ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗЛИТТЯ В ЗАДАЧАХ ЗАХОПЛЕННЯ АЛЬФА-ЧАСТИНОК ЯДРАМИ

С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков

*Інститут ядерних досліджень, Національна академія наук України,  
просп. Науки, 47, 03680, Київ, Україна*

(Отримано 24 липня 2013 р.; в остаточному вигляді — 08 березня 2014 р.)

Метод багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ) узагальнено до опису захоплення  $\alpha$ -частинок ядрами та на його основі виконано аналіз  $\alpha$ -захоплення ядрами  $^{40}\text{Ca}$  та  $^{44}\text{Ca}$ . Із порівняння з експериментальними даними перерізів захоплення, отриманих методом БВВ із застосуванням методу мінімізації, одержано нову інформацію про ймовірності злиття  $\alpha$ -частинки з цими ядрами. Показано, що наближення ВКБ дає значно занижені значення ймовірностей злиття порівняно з підходом БВВ. Одержані значення ймовірностей злиття вказують на те, що підхід різкого обрізання кутових моментів, який увели Глас і Мосел, є досить грубим наближенням. Зокрема, значення ймовірностей злиття при перших значеннях кутового моменту наближаються до нуля, що суперечить ідеї різкого обрізання кутових моментів. Це вказує на необхідність пошуків більш реалістичних підходів до опису ймовірностей злиття в задачах захоплення.

**Ключові слова:**  $\alpha$ -захоплення, тунелювання, багаторазові внутрішні відбиття, хвильовий пакет, ймовірності злиття, коефіцієнти проникності та відбиття, різке обрізання кутових моментів,  $\alpha$ -розпад.

PACS number(s): 03.65.Xp, 21.10.Jx, 25.40.Lw, 24.10.Ht, 21.60.Gx, 27.40.+z

### I. ВСТУП

Процеси злиття, що виникають у ядерних зіткненнях, давно викликають посилене зацікавлення. Одним із виявів такої реакції є захоплення  $\alpha$ -частинки ядром. Інформація про характер цього процесу формує базис наших уявлень про взаємодію між  $\alpha$ -частинкою та ядром. Це можна бачити в багатьох публікаціях, присвячених побудовам  $\alpha$ -ядерних потенціалів (для  $\alpha$ -розпаду ядер [1–9], розсіяння  $\alpha$ -частинок на ядрах [10–14]). Оцінки швидкостей  $\alpha$ -захоплення застосовують, описуючи ядерні реакції в зірках [3, 13, 15].

Сучасний підхід до визначення перерізів захоплення  $\alpha$ -частинки ядром ґрунтується на розрахунках проникностей бар'єра і включає коефіцієнти, що характеризують ймовірності злиття при різних значеннях орбітального моменту. Тоді як розроблено досить багато підходів до розрахунку проникностей, нема узагальнено прийнятих методів визначення ймовірностей злиття. Із літератури можна довідатися, що ці коефіцієнти являють собою серйозну та давню загадку, незважаючи на довгу історію досліджень реакцій захоплення. Експериментально ці реакції вивчені недостатньо глибоко: ми маємо дані для перерізів захоплення  $\alpha$ -частинок ядрами  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{44}\text{Ca}$  [16],  $^{59}\text{Co}$  [17],  $^{208}\text{Pb}$  [18].

Поширеним є підхід, при якому накладається деякий закон на поведінку ймовірностей злиття. Після розрахунків перерізів і їх порівняння з експериментальними даними при вибраних енергіях зроблено висновки про успішність обраного шляху. Однак було б цікавим з'ясувати, якою дійсно є реальна сила поглинання  $\alpha$ -частинки в ядрі, спираючись на наявні ек-

периментальні дані. Тому в цій праці ми ставимо таке питання: яку саме інформацію про ці коефіцієнти дає нам експеримент? Такий підхід близький до ідеї оберненої задачі в теорії розсіювання і ядерних зіткнень (коли з експериментальних даних поступово одержують відомості про потенціал взаємодії та хвильової функції, наприклад, див. [19]).

Для з'ясування цього питання ми узагальнюємо метод багаторазових внутрішніх відбиттів (метод БВВ, див. [20–26]) для опису реакцій захоплення  $\alpha$ -частинок ядрами. Застосувавши такий формалізм до  $\alpha$ -захоплення ядром  $^{44}\text{Ca}$ , ми з'ясуємо, наскільки адекватним є *підхід різкого обрізання кутових моментів (sharp angular momentum cutoff)*, який увели Глас (Glas) і Мосел (Mosel) у [27, 28] і який тепер є досить поширеним. Деякої уваги приділено також аналізу ВКБ-підходу до отримання перерізів. Ми бачимо, що метод БВВ спроможний найбільш акуратно описати реалістичний потенціальний бар'єр та дає змогу значно поліпшити узгодженість між теорією та експериментом.

### II. МЕТОД

#### A. Переріз захоплення та підхід різкого обрізання кутового моменту

Переріз захоплення з урахуванням процесів злиття у внутрішній області  $\alpha$ -ядерної системи можна визначити так (наприклад, див. [16]):

$$\sigma_{\text{capture}}(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2 m \tilde{E}} \sum_{l=0}^{+\infty} (2l + 1) T_l P_l, \quad (1)$$

де  $E$  — кінетична енергія  $\alpha$ -частинки, що налітає на ядро в лабораторній системі координат,  $\tilde{E}$  — кінетична енергія відносного руху  $\alpha$ -частинки з ядром у системі центра інерції (у цій роботі ми обмежимося наближенням  $E \simeq \tilde{E}$ ),  $m$  — зведена маса  $\alpha$ -частинки та ядра,  $P_l$  — імовірність злиття  $\alpha$ -частинки з ядром, що починається, як тільки  $\alpha$ -частинка проникає зі зовнішньої області через бар'єр у внутрішню яму,  $T_l$  — проникність бар'єра, яку ми будемо визначати в підході БВВ або в підході ВКБ. У ВКБ-підході цей коефіцієнт обчислюємо так:

$$T_{\text{ВКБ}}(\tilde{E}) = \exp \left\{ -2 \int_{R_2}^{R_3} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (\tilde{E} - V(r))} dr \right\}, \quad (2)$$

де  $R_2$  і  $R_3$  — друга і третя точки повороту, що встановлюють межі області тунелювання (перша точка повороту визначається перетином потенціалу з енергією поблизу нуля, де основний внесок дає відцентрова компонента потенціалу).

Ми будемо вважати, що захоплення відбувається, коли фрагмент після тунелювання через бар'єр потрапляє у внутрішню яму, де його перебування енергетично дозволено (у ямі енергія вища від самого потенціалу). Після розв'язку системи класичних рівнянь руху можна отримати критичне значення кутового моменту  $l_{\text{cr}}$ , при якому всі траєкторії при  $l < l_{\text{cr}}$  приводять до захоплення. Глас і Мосел у [27, 28] увели підхід різкого обрізання кутового моменту, згідно з яким  $P_l$  визначаємо як

$$P_l = \begin{cases} 1 & \text{при } l \leq l_{\text{cr}}, \\ 0 & \text{при } l > l_{\text{cr}}, \end{cases} \quad (3)$$

де  $l_{\text{cr}}$  — критичне значення орбітального моменту, при якому можливе злиття  $\alpha$ -частинки з ядром у внутрішній області. Також у низці робіт (наприклад, див. [16]) припускають  $T_l = 1$  при  $l < l_{\text{gr}}$  (де  $l_{\text{gr}} > l_{\text{cr}}$ ), що перетворює формулу (2) у таку:

$$\sigma_{\text{capture}}(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2m\tilde{E}} (2l_{\text{cr}} + 1)^2. \quad (4)$$

У такому підході з порівняння перерізів, отриманих за цією формулою, з експериментальними даними визначають значення для  $l_{\text{cr}}$  для вибраної реакції. Так,

автори роботи [16] отримали  $l_{\text{cr}} = 9.9$  для  $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$  і  $l_{\text{cr}} = 10.9$  для  $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ . Ми переглянемо цей процес у квантовому розгляді, вважаючи, що для кожного дозволеного значення  $l$  такий процес повинен бути описаний через тунельний перехід із відповідною проникністю  $T_l$ . На такій основі ми з'ясуємо, які значення ймовірностей злиття дає нам експеримент: *які саме ймовірності злиття дають змогу досягти найкращого збігу між теорією та експериментом.*

### В. Метод багаторазових внутрішніх відбиттів в описі тунелювання пакета через бар'єр, що складається з довільної кількості прямокутних сходинок

Будемо досліджувати захоплення  $\alpha$ -частинки ядром у сферично-симетричному розгляді. Це приводить задачу до радіальної з рухом частинки зі зведеною масою  $m$  у полі радіального потенціалу з бар'єром. Щоб застосувати формалізм методу БВВ до опису складних реалістичних бар'єрів, візьмімо до розгляду бар'єр **довільної** форми, який можна вдало апроксимувати досить великим числом  $N$  прямокутних сходинок:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 & (\text{область } 1), \\ V_2 & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 & (\text{область } 2), \\ \dots & \dots & \dots \\ V_N & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & (\text{область } N), \end{cases} \quad (5)$$

де  $V_j$  — сталі ( $j = 1 \dots N$ )<sup>1</sup>. Визначимо першу область, починаючи від точки  $r_{\min}$  (позначимо її також як  $r_{\text{capture}}$ ), та будемо вважати, що саме в цій області виникає злиття  $\alpha$ -частинки з ядром після її тунелювання через бар'єр. Спершу ми будемо шукати розв'язки задачі для енергій, більших, ніж висота бар'єра. Загальний розв'язок для хвильової функції (з точністю до її нормування) можна записати так:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\chi(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (6)$$

$$\chi(r) = \begin{cases} A_T e^{-ik_1 r}, & \text{при } r_{\min} < r \leq r_1 & (\text{область } 1), \\ \alpha_2 e^{ik_2 r} + \beta_2 e^{-ik_2 r}, & \text{при } r_1 \leq r \leq r_2 & (\text{область } 2), \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{N-1} e^{ik_{N-1} r} + \beta_{N-1} e^{-ik_{N-1} r}, & \text{при } r_{N-2} \leq r \leq r_{N-1} & (\text{область } N-1), \\ e^{-ik_N r} + A_R e^{ik_N r}, & \text{при } r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & (\text{область } N), \end{cases} \quad (7)$$

<sup>1</sup>Практично ми використовували таку апроксимацію для бар'єрів протонного розпаду та  $\alpha$ -розпаду для ряду ядер, де ширина кожної області дорівнювала 0.01 фм і демонстрували стабільність розрахунків усіх амплітуд хвильової функції та проникності бар'єра [25, 26]. Таким чином, ми маємо ефективний метод для детального дослідження квантових процесів тунелювання та проникності.

де  $\alpha_j$  і  $\beta_j$  — невідомі амплітуди,  $A_T$  і  $A_R$  — невідомі амплітуди проходження та відбиття,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  — сферична функція,  $k_j = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\tilde{E} - V_j)}$  — комплексні хвильові числа. Ми фіксували нормування так, щоб модуль амплітуди стартової хвилі  $e^{-ik_N r}$  дорівнював одиниці. Розв'язок задачі шукатимемо в підході багаторазових внутрішніх відбиттів.

Відповідно до методу багаторазових внутрішніх відбиттів, розсіяння частинки на бар'єрі розглядаємо на основі хвильового пакета послідовно за етапами його поступового проникнення щодо кожної границі бар'єра (найбільш ясно ідею такого підходу можна зрозуміти в задачі тунелювання через найпростіший прямокутний бар'єр, див. [21, 23, 24] та Додаток А у [25], де представлено доказ такого повністю квантового, точно розв'язуваного методу, а також проаналізовано його властивості). Як виявляється, кожен етап у такому розгляді поширення пакета є подібним до одного з перших  $2N - 1$  етапів, незалежних між собою. З аналізу цих етапів ми знаходимо рекурентні співвідношення для обчислення невідомих амплітуд  $A_T^{(n)}$ ,  $A_R^{(n)}$ ,  $\alpha_j^{(n)}$  і  $\beta_j^{(n)}$  для довільного етапу з номером  $n$  (тут нижній індекс  $j$  означає номер довільної області  $V_j$ , логіку введення амплітуд за етапами можна знайти в Додатку А у [25]). При складанні цих співвідношень на кожному етапі ми виконуємо умову неперервності повної хвильової функції (складеною зі всіх пакетів) та її похідної щодо відповідної границі.

Відповідно до аналізу хвиль, що поширюються в області з довільним номером  $j$  на довільному етапі, кожну хвилю можна представити як добуток експоненти  $e^{\pm ik_j r}$  на деякий сталий коефіцієнт (амплітуду). При практичних розрахунках всі трудності полягають у визначенні таких невідомих амплітуд. Але, щоб зробити такі розрахунки найбільш легкими (доступними) для довільного етапу, можна виразити амплітуду хвилі, що пройшла через границю з номером  $j$ , як добуток амплітуди відповідної хвилі, що падає на цю границю, на новий коефіцієнт  $T_j^{\pm}$  (амплітуду проходження через границю з номером  $j$ ). Тут нижній індекс означає номер границі, а верхній знак “+” або “-” — напрямом падаючої хвилі вправо або вліво відповідно. Аналогічно ми пов'язуємо амплітуду відбитої хвилі від границі з номером  $j$  з амплітудою хвилі, що падає на цю границю, через новий коефіцієнт  $R_j^{\pm}$ . Самі коефіцієнти  $T_1^{\pm}$ ,  $T_2^{\pm}$ ,  $T_3^{\pm}$ ... та  $R_1^{\pm}$ ,  $R_2^{\pm}$ ,  $R_3^{\pm}$ ... можна знайти з рекурентних співвідношень, указаних вище (див. Додаток А в роботі [25]). Таким чином, ми обчислюємо  $T_1^{\pm}$ ,  $T_2^{\pm}$ ...  $T_{N-1}^{\pm}$  і  $R_1^{\pm}$ ,  $R_2^{\pm}$ ...  $R_{N-1}^{\pm}$ :

$$\begin{aligned} T_j^+ &= \frac{2k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, \\ T_j^- &= \frac{2k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, \\ R_j^+ &= \frac{k_j - k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{2ik_j r_j}, \\ R_j^- &= \frac{k_{j+1} - k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{-2ik_{j+1} r_j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тепер припустимо, що хвиля, яка поширюється в області з номером  $j$ , падає справа на частину потенціального бар'єра з правою границею в точці  $r_{j-1}$  (та лівою границею в точці  $r_1$ ). Знайдемо хвилю, що відбивається від такого бар'єра. Така хвиля повинна об'єднати всі хвилі, що формуються внаслідок багаторазових внутрішніх проходжень і відбиттів щодо границь  $r_1 \dots r_{j-1}$  та покидають такий бар'єр. Ми визначимо амплітуду відбиття  $\tilde{R}_{j-1}^+$  такої сумарної хвилі так:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{j-1}^+ &= R_{j-1}^+ + T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^- \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (\tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-)^m \right) \\ &= R_{j-1}^+ + \frac{T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^-}{1 - \tilde{R}_j^+ R_{j-1}^-}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогічно обчислюємо також:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{j+1}^- &= R_{j+1}^- + T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+ \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) \\ &= R_{j+1}^- + \frac{T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}, \\ \tilde{T}_{j+1}^+ &= \tilde{T}_j^+ T_{j+1}^+ \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) \\ &= \frac{\tilde{T}_j^+ T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}, \\ \tilde{T}_{j-1}^- &= \tilde{T}_j^- T_{j-1}^- \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^m \right) \\ &= \frac{\tilde{T}_j^- T_{j-1}^-}{1 - R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \end{aligned} \quad (10)$$

При такому формулюванні ми маємо рекурентні співвідношення, що пов'язують між собою всі сумарні амплітуди. Тепер ми виберемо такі значення

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{N-1}^+ &= R_{N-1}^+, \\ \tilde{R}_1^- &= R_1^-, \\ \tilde{T}_1^+ &= T_1^+, \\ \tilde{T}_{N-1}^- &= T_{N-1}^-, \end{aligned} \quad (11)$$

як стартові та послідовно знаходимо всі амплітуди  $\tilde{R}_{N-2}^+ \dots \tilde{R}_1^+$ ,  $\tilde{R}_2^- \dots \tilde{R}_{N-1}^-$  та  $\tilde{T}_2^+ \dots \tilde{T}_{N-1}^+$ . На завершення ми знаходимо коефіцієнти  $\alpha_j$  та  $\beta_j$ :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_j^{(n)} = \tilde{T}_{j-1}^+ \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-)^m \right) \\ &= \frac{\tilde{T}_{j-1}^+}{1 - R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-} = \frac{\tilde{T}_j^+}{T_j^+}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \beta_j &= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_j^{(n)} = \tilde{T}_{j-1}^+ \left( 1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-)^m \right) R_j^+ \\ &= \frac{\tilde{T}_{j-1}^+ R_j^+}{1 - R_j^+ \tilde{R}_{j-1}^-} = \frac{\tilde{T}_j^+ R_j^+}{T_j^+} = \alpha_j \cdot R_j^+, \end{aligned}$$

амплітуди проходження й відбиття щодо всього бар'єра:

$$A_T = \sum_{n=1}^{+\infty} A_T^{(n)} = \tilde{T}_1^+, \quad A_R = \sum_{n=1}^{+\infty} A_R^{(n)} = \tilde{R}_{N-1}^+ \quad (13)$$

і відповідні коефіцієнти проникності  $T_{\text{MIR}}$  і відбиття  $R_{\text{MIR}}$ :<sup>2</sup>

$$T_{\text{MIR}} \equiv \frac{k_N}{k_1} |A_T|^2, \quad R_{\text{MIR}} \equiv |A_R|^2. \quad (14)$$

Ми перевіряємо умову:

$$\frac{k_N}{k_1} |A_T|^2 + |A_R|^2 = 1 \quad \text{або} \quad T_{\text{MIR}} + R_{\text{MIR}} = 1 \quad (15)$$

у ролі тесту: чи дає метод БВВ достовірні розв'язки для амплітуд хвильової функції. Тепер, якщо енергія частинки нижча, ніж висота однієї сходинки з номером  $m$ , то для опису проникнення цієї частинки через бар'єр з її тунелюванням необхідно виконати таку заміну:

$$k_m \rightarrow i \xi_m, \quad (16)$$

де  $\xi_m = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_m - E)}$ . Для потенціалу, що складається з двох прямокутних сходинок (або ям) різних розмірів, при порівнянні амплітуд хвильової функції, визначеної методом БВВ, з відповідними амплітудами, отриманими у стандартному підході квантової механіки ми досягаємо 15 перших значущих цифр їх повного збігу. Збільшення кількості сходинок до декількох тисяч зберігає таку точність збігу амплітуд у підході БВВ з відповідними амплітудами у стандартному підході квантової механіки, а також виконання умови (15) (див. Додаток Б у роботі [25], де ми коротко представляємо стандартний підхід квантової механіки, який ми застосовуємо до потенціалу (5), та розв'язки амплітуд). Це важливий тест, який підтверджує реальну спроможність методу БВВ. Отже, ми отримали повну відповідність між розв'язками для амплітуд, одержаних методом БВВ та стандартним підходом квантової механіки, і, таким чином, узагальнюємо метод БВВ на опис тунелювання частинки через потенціал, що складається з довільного кінцевого числа прямокутних сходинок і ям довільної форми для задач захоплення.

### С. $\alpha$ -Ядерний потенціал та метод мінімізації

Для опису взаємодії між  $\alpha$ -частинкою і ядром ми будемо використовувати  $\alpha$ -ядерний потенціал

$$V(r, l, Q) = v_C(r) + v_N(r, Q) + v_l(r), \quad (17)$$

де  $v_C(r)$ ,  $v_N(r, Q)$  і  $v_l(r)$  — кулонівська, ядерна і відцентрова компоненти. У цій праці ми обмежимося сферично-симетричним наближенням  $\alpha$ -захоплення, при якому маємо:

$$v_C(r) = \begin{cases} \frac{2Ze^2}{r} & \text{при } r \geq r_m, \\ \frac{Ze^2}{r_m} \left\{ 3 - \frac{r^2}{r_m^2} \right\} & \text{при } r < r_m, \end{cases} \quad (18)$$

$$v_N(r, Q) = \frac{V(A, Z, Q)}{1 + \exp \frac{r - r_m}{d}}, \quad (19)$$

де

$$r_m = 1.5268 + R. \quad (20)$$

Для визначення параметрів ми використаємо підхід [6]:

$$V(A, Z, Q) = -(30.275 - 0.45838 Z/A^{1/3} + 58.270 I - 0.24244 Q), \quad (21)$$

$$R = R_p (1 + 3.0909/R_p^2) + 0.1243 t, \quad (22)$$

$$R_p = 1.24 A^{1/3} (1 + 1.646/A - 0.191 I), \quad (23)$$

$$t = I - 0.4 A/(A + 200), \quad (24)$$

$$d = 0.49290, \quad (25)$$

$$I = (A - 2Z)/A. \quad (26)$$

Тут  $A$  і  $Z$  — числа нуклонів і протонів ядра,  $Q$  —  $Q$ -значення процесу  $\alpha$ -захоплення,  $R$  — радіус ядра,  $V(A, Z, Q)$  — сила ядерної компоненти,  $r_m$  — ефективний радіус ядерної компоненти,  $d$  — дифузність. Визначимо величину:

$$\delta = \sum_k \left| \sigma^{(\text{theor})}(E_k) - \sigma^{(\text{exp})}(E_k) \right|, \quad (27)$$

де  $\sigma^{(\text{theor})}(E_k)$  і  $\sigma^{(\text{exp})}(E_k)$  — теоретичне й експериментальне значення перерізів захоплення для вибраного ядра при енергії  $E_k$ , а сумування виконується за всіма значеннями енергії експериментальних даних. Ми будемо шукати значення ймовірностей злиття  $p_0 \dots p_{\text{max}}$ , при яких похибка (27) приймає мінімальне значення (такий підхід до визначення ймовірностей злиття будемо називати *методом мінімізації*).

<sup>2</sup>Далі ми будемо аналізувати й порівнювати проникності та перерізи захоплення, отримані із застосуванням методу багаторазових внутрішніх відбиттів або ВКБ-методу. Тому, щоб відрізнити такі коефіцієнти, ми будемо додавати абревіатуру "MIR" від назви методу "multiple internal reflections", якщо було використано метод багаторазових внутрішніх відбиттів, або позначення *WKB* при використанні ВКБ-підходу.

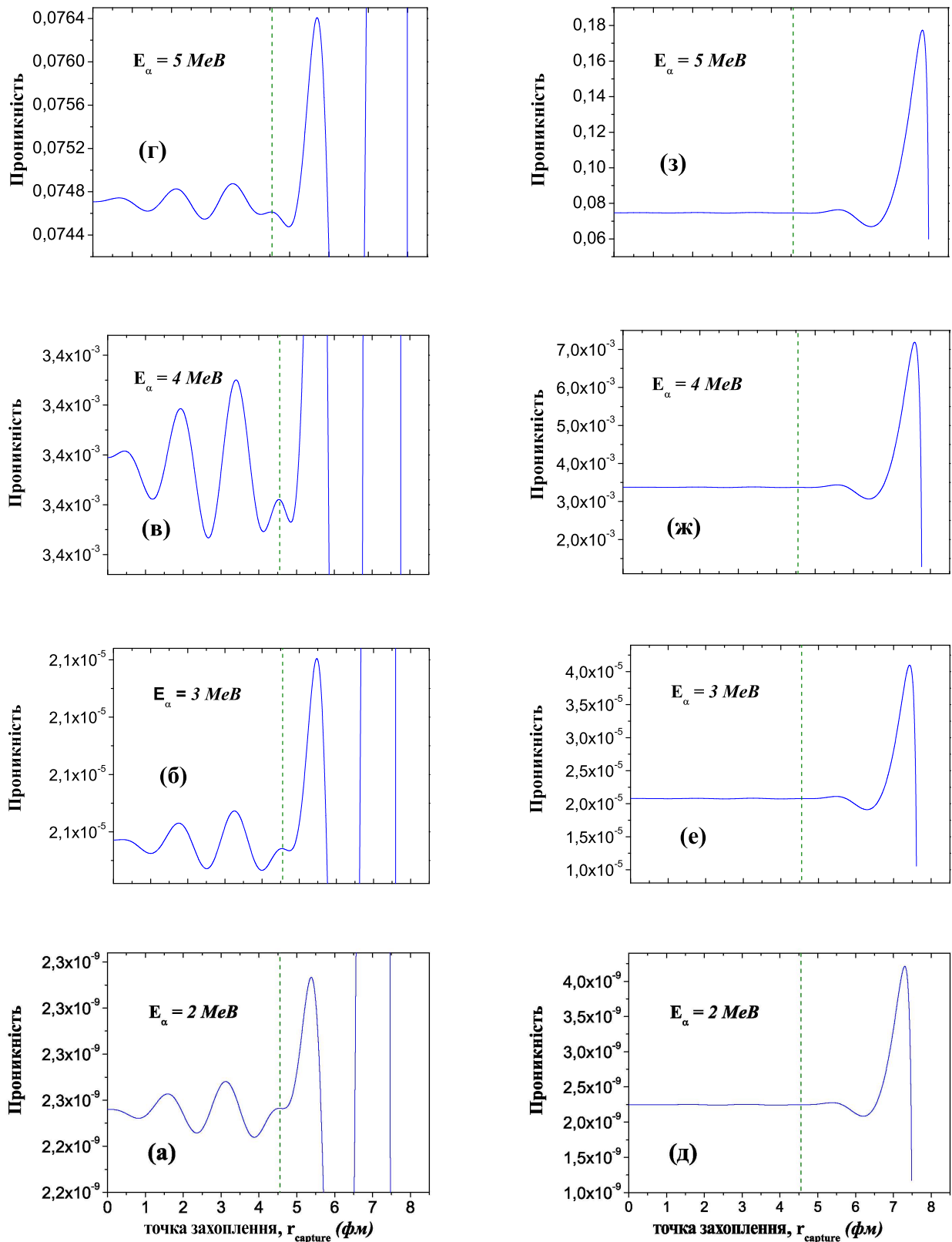


Рис. 1. Проникність бар'єра залежно від положення точки захоплення  $\alpha$ -частинки  $r_{\text{capture}}$  для реакції  $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$  для кутового моменту  $l = 0$  при енергіях  $\alpha$ -частинки  $E_\alpha = 2$  MeV (а, д),  $E_\alpha = 3$  MeV (б, е),  $E_\alpha = 4$  MeV (в, ж) та  $E_\alpha = 5$  MeV (г, з) (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при  $r_{\text{max}} = 70$  фм).

### III. РЕЗУЛЬТАТИ

#### A. Залежність проникності від області захоплення

Для наступних досліджень ми виберемо захоплення  $\alpha$ -частинки ядром  $^{44}\text{Ca}$ . Спочатку розглянемо, як впливає на проникність вибір межі  $r_{\text{capture}}$ , при якій відбувається повне проходження пакета через бар'єр (і як ми вважаємо, в області  $M$  відбувається захоплення  $\alpha$ -частинки). Результати таких розрахунків у залежності від положення точки захоплення  $\alpha$ -частинки при різних енергіях  $\alpha$ -частинки показано на рис. 1.

Звідси видно, що незначна зміна положення  $r_{\text{capture}}$  здатна сильно змінити результат розрахунку проникності (так, вплив  $r_{\text{capture}}$  виявляється суттєво сильнішим, ніж вплив деформації ядра, тому немає особ-

ливого сенсу з'ясовувати роль деформації без попереднього врахування цього параметра). Звідси впливає важливість правильного вибору положення цієї межі при розрахунках перерізів захоплення. Ця залежність має осциляторну поведінку, що є характерним проявом хвильової природи процесу тунелювання та спостерігалось раніше в задачах протонного і  $\alpha$ -розпаду [25, 26].

Як можливе положення  $r_{\text{capture}}$  ми пропонуємо вибрати координату мінімальної зміни амплітуди осциляцій проникності, що відповідає найбільшій стійкості проникності бар'єра до збурень (ми не будемо розглядати схожої тенденції при  $r \rightarrow 0$ ). Така точка якраз відповідає координаті мінімуму ями потенціалу (так, при  $l = 0$  ми отримаємо 0.44 фм для різних енергій  $E_\alpha$ ). Таку умову ми і виберемо для подальших розрахунків. Збіжність розрахунків при виборі зовнішньої межі  $r_{\text{max}}$  показано в Додатку.

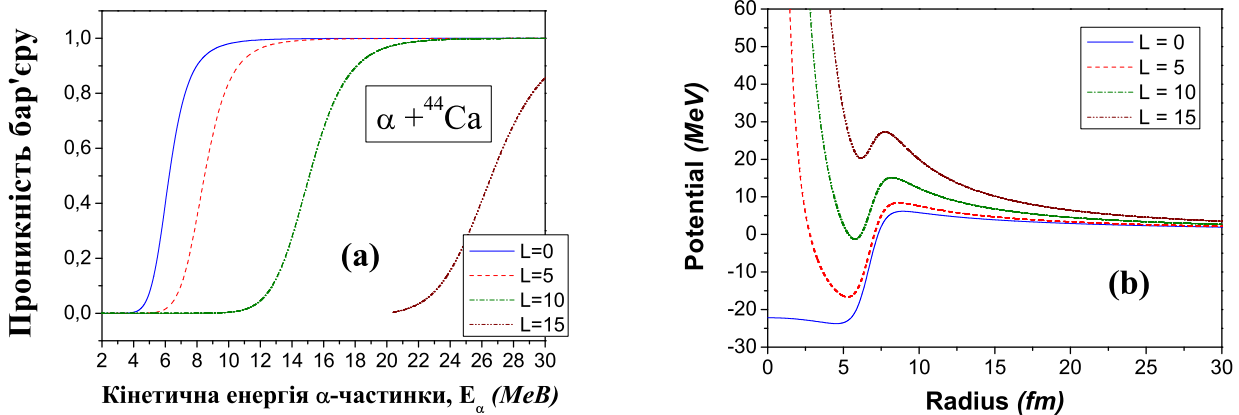


Рис. 2. Проникності бар'єра залежно від енергії  $\alpha$ -частинки  $E_\alpha$  (а) та відповідні потенціальні бар'єри (б) при різних значеннях кутового моменту  $l$  для реакції  $\alpha + ^{44}\text{Ca}$  (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при  $r_{\text{max}} = 70$  фм).

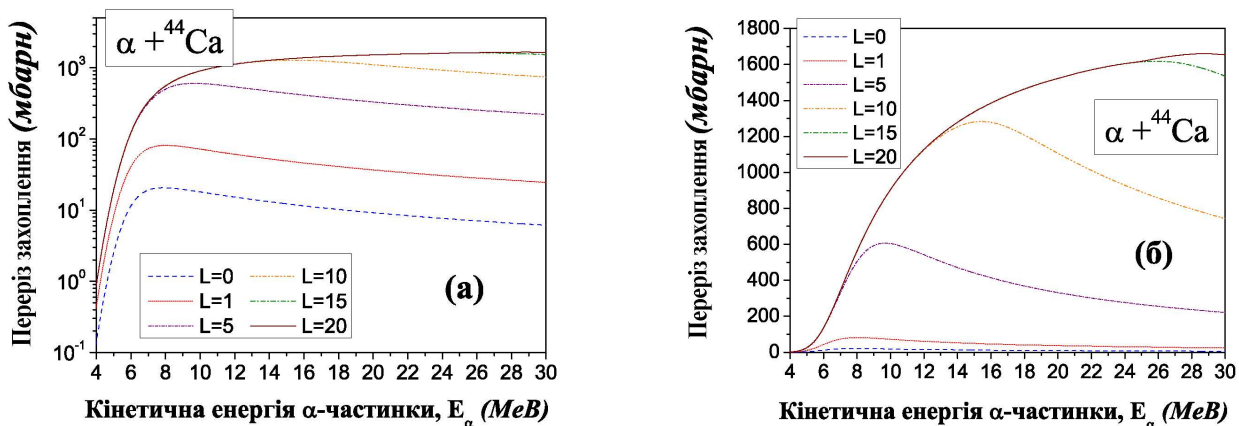
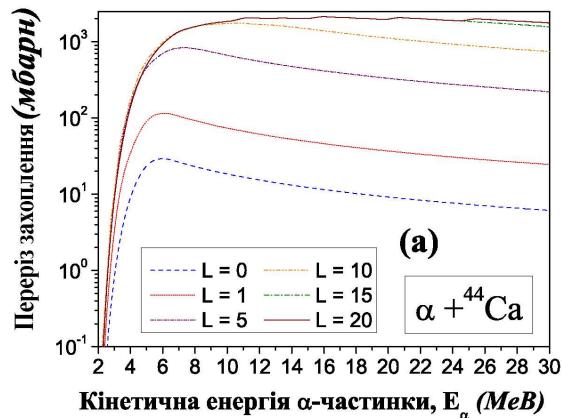


Рис. 3. Переріз захоплення  $\alpha$ -частинки ядром  $^{44}\text{Ca}$ , отриманий у підході БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при  $r_{\text{max}} = 70$  фм,  $r_{\text{capture}}$  фіксовано в координаті мінімуму ями до бар'єра, яка змінюється залежно від вибраного значення кутового моменту  $l$ ). (а) Спектри в логарифмічному масштабі: сильніше проявляється роль внесків при малих  $l$ . (б) Спектри в лінійному масштабі: ясніше видно поведінку перерізів при врахуванні внесків від великих  $l$ . Кожний парціальний переріз має максимум, після якого він спадає. Урахування наступних внесків (при більших  $l$ ) згладжує таке спадання, поступово перетворюючи повний спектр у монотонно зростаючу криву в усьому діапазоні енергій.

**В. Проникність при різних значеннях кутового моменту**

Розгляньмо, як виявляє себе проникність бар'єра залежно від кутового моменту. Результати таких розрахунків показані на рис. 2 (а). Звідси видно, що крива проникності усувається вправо зі зростанням кутового моменту  $l$ . Це пояснюється зростанням внутрішньої ями потенціалу до бар'єра зі зростанням  $l$



за рахунок вищої відцентрової компоненти потенціалу (див. рис. 2 (б)). Тому кожна наступна парціальна компонента перерізу захоплення дає свій внесок у повний спектр, починаючи з деякої вищої енергії  $E_\alpha$ . Зокрема, звідси впливає, що повний переріз захоплення при достатньо малій енергії  $E_\alpha$  описується лише парціальними компонентами при самих малих значеннях  $l$ .

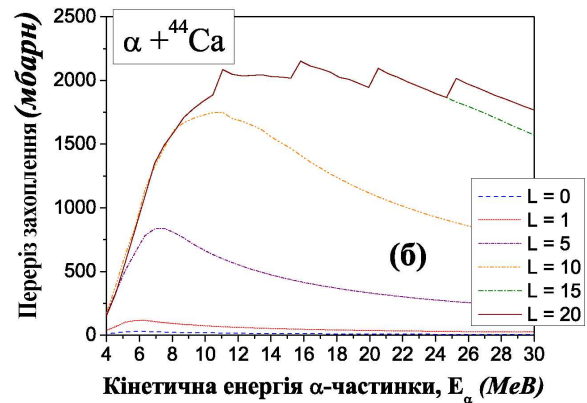


Рис. 4. Перерізи захоплення  $\alpha$ -частинки ядром  $^{44}\text{Ca}$ , отримані у підході ВКБ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при  $r_{\text{max}} = 70$  фм).

**С. Переріз захоплення при розрахунках проникності різними підходами**

Тепер ми розглянемо, як визначають переріз захоплення повністю квантовий та квазікласичний підходи. На рис. 3 показано результати, отримані методом БВВ відповідно до різних значень  $L_{\text{max}}$  (де  $L_{\text{max}}$  — верхня межа сумування у формулі (1), яку ми вибираємо замість безмежності). Із рисунків видно, що представлення перерізів за лінійною шкалою ясніше показує їх плавне зниження після максимумів. Водночас, представлення за логарифмічною шкалою чіткіше показує монотонне зростання перерізів до їх максимумів (особливо, при малих  $l$ ), що дозволяє чіткіше побачити поведінку парціальних перерізів при малих  $l$  на фоні перерізів при великих  $l$ . ВКБ-підхід дає суттєво інший результат, що показано на рис. 4. Тут можна відзначити два фактори (які помітно проявляються при лінійному розгляді та приховані при логарифмічному): (1) при врахуванні внесків від великих  $l$  у сумарні перерізи з'являються різкі піки; (2) сумарні перерізи значно завищені (порівняно з результатами на рис. 3).

**Д. Визначення ймовірностей злиття методом мінімізації**

На наступному рис. 5 винесені розрахунки перерізів для  $\alpha + ^{44}\text{Ca}$ , отримані за допомогою методу БВВ та метода ВКБ, порівняно з експериментальними да-

ними [16]. Сюди ж включена крива, одержана з включенням ймовірностей злиття, отриманих шляхом мінімізації. З цього рисунка видно, що ВКБ-підхід дає значно завищені значення перерізу захоплення порівняно з кривими, отриманими у БВВ-підході при  $L_{\text{max}} = 10 - 15$ . Звідси зробимо такі висновки: наближення ВКБ дає значно занижені значення ймовірностей злиття з метою опису експериментальних даних у порівнянні з підходом БВВ, а переріз захоплення, отриманий у підході ВКБ, має розриви при великих енергіях.

У [16] обговорено ефект аномального розсіювання при великих кутах (ALAS, anomalous large angle scattering) з метою опису якого використано підхід різкого обрізання кутового моменту при деякому критичному значенні  $L_{\text{max}}$  (див. (1)–(2) у цій роботі). Такому випадку відповідають наші розрахунки у БВВ-підході при різних фіксованих значеннях  $L_{\text{max}}$  (де всі ймовірності злиття при  $l \leq L_{\text{max}}$  дорівнюють одиниці). Із рисунка видно, що крива 5 при  $L_{\text{max}} = 10$  (і крива 6 при  $L_{\text{max}} = 12$ ) дійсно ближче розташована до експериментальних даних порівняно з кривою 7 при  $L_{\text{max}} = 15$  (з якою практично збігаються інші криві, отримані при вищих значеннях  $L_{\text{max}}$ ). Однак усі ці криві значно далі розташовані від експериментальних даних порівняно з кривою 10 з включеними ймовірностями злиття, отриманими методом мінімізації. Отже, підхід різкого обрізання кутового моменту не зовсім вдало описує експеримент, тоді як успішним виявляється опис кривою 10. Це вказує на те, що залежність ймовірностей злиття від значення ку-



тового моменту є складнішою і вимагає глибшого дослідження. Значення ймовірностей злиття, на основі яких отримана крива 10 на рис. 5, винесені в табл. 1. Ми бачимо, що ймовірності злиття  $p_0 \dots p_4$  вкрай малі (на відміну від підходу різкого обрізання кутового моменту [16]). Також ймовірності злиття  $p_{15}$  і  $p_{16}$  наближаються до одиниці (при малих значеннях  $p_{13}$ ),

що дає змогу описати малі осциляції спектра при великих енергіях ( $E = 23 - 28$  MeV). Інакше кажучи, виявлення в експериментальних спектрах осциляторної поведінки вказує на великі значення ймовірностей злиття при максимально допустимих значеннях кутового моменту (на відміну від підходу різкого обрізання кутового моменту [16]).

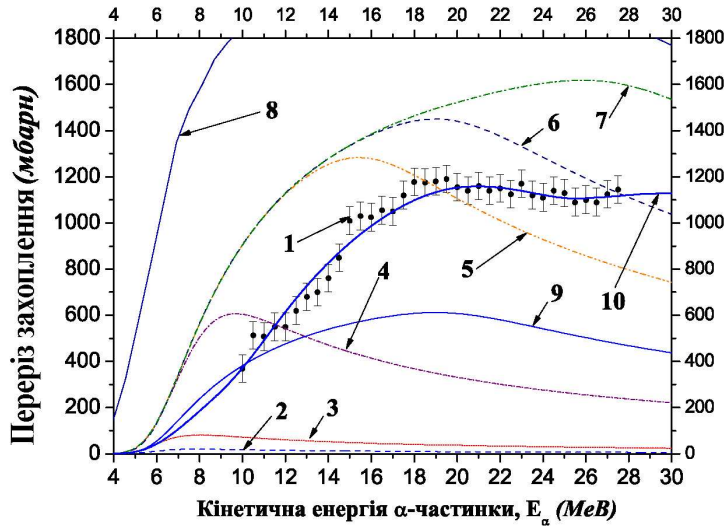


Рис. 5. (Кольоровий онлайн) Перерізи захоплення  $\alpha$ -частинки ядром  $^{44}\text{Ca}$ , розраховані за методом БВВ та методу ВКБ з урахуванням ймовірностей злиття, які отримані методом мінімізації (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при  $r_{\text{max}} = 70$  фм,  $r_{\text{capture}}$  обирається в координаті мінімуму якої змінюється при різних значеннях  $l$ ). Тут експериментальні дані 1 взято з роботи [16], штрихова синя крива 2 позначає переріз при  $l_{\text{max}} = 0$ , коротка крапкова червона крива 3 — переріз при  $l_{\text{max}} = 1$ , коротка штрих-крапкова пурпурова крива 4 — переріз при  $l_{\text{max}} = 5$ , штрихова двічі крапкова оранжева крива 5 — переріз при  $l_{\text{max}} = 10$ , штрихова темно-синя крива 6 — переріз при  $l_{\text{max}} = 12$ , штрих-крапкова зелена крива 7 — переріз при  $l_{\text{max}} = 15$ , неперервна коричнева крива 8 — нормований переріз при  $l_{\text{max}} = 20$  (нормування зроблено відносно першого значення експериментальних даних), штрихова темно-жовта крива 9 — переріз при  $l_{\text{max}} = 17$ , неперервна синя крива 10 — переріз при  $l_{\text{max}} = 17$  (перерізи визначаються за формулою (1), де як верхня межа в сумуванні використано значення  $l_{\text{max}}$ ). Коефіцієнти проникностей при розрахунках спектрів 2–7 та 9–10 обчислюємо за допомогою методу БВВ, а спектра 8 — за допомогою методу ВКБ. Крива 10 отримана з урахуванням ймовірностей злиття, криві 2–9 — без ймовірностей злиття.

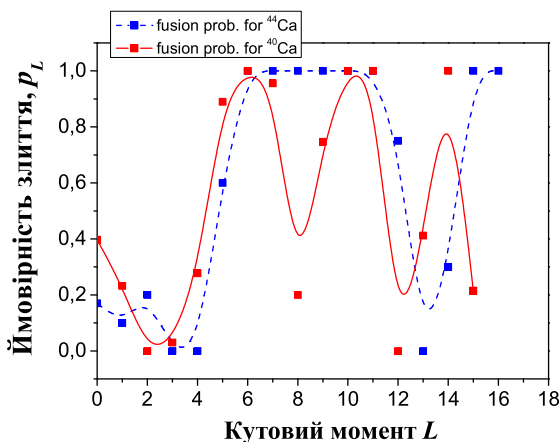


Рис. 6. Ймовірність злиття для реакцій захоплення  $\alpha$ -частинки ядрами  $^{40}\text{Ca}$  та  $^{44}\text{Ca}$ , отримана в підході БВВ (параметри розрахунків: 10000 інтервалів при  $r_{\text{max}} = 70$  фм).

Автори роботи [16] для опису суттєво різного злиття (поглинання)  $\alpha$ -частинки ядрами  $^{40}\text{Ca}$  та  $^{44}\text{Ca}$  запропонували порівняння залежностей перерізів захоплення цими ядрами від значення кутового моменту  $l$ . Але ми зазначимо, що ці залежності отримані лише при одній вибраній енергії (на рис. 2 в цій роботі дані представлені для  $E = 25$  MeV). Для виконання такого аналізу ми пропонуємо порівняння ймовірностей злиття для цих двох ядер залежно від кутового моменту. На рис. 6 наведено дані наших розрахунків. Ці дані отримані на основі врахування наявних експериментальних даних на всьому діапазоні енергій, що вказує на повніший аналіз у нашому підході. Із рис. 6 видно, що обидві криві мають приблизно схожу поведінку при малих  $l$ , але суттєво відрізняються при максимально великих можливих  $l$ . Також ймовірність злиття для  $^{40}\text{Ca}$  менша, ніж для  $^{44}\text{Ca}$  при великих  $l$  — це відповідає меншим значенням перерізів захоплення для  $^{40}\text{Ca}$ , ніж для  $^{44}\text{Ca}$  в експериментальних



даних [16]. Із цього порівняння ми доходимо висновку, що зменшення перерізу захоплення для  $^{40}\text{Ca}$  при великих енергіях може бути пояснено меншими значеннями ймовірностей злиття при великих  $l$  (а також тому, що ці два ядра мають різні бар'єри, які дають  $l_{\text{max}} = 15$  для  $^{40}\text{Ca}$  та  $l_{\text{max}} = 16$  для  $^{44}\text{Ca}$ , що робить свій додатковий внесок для  $^{44}\text{Ca}$  в повний спектр).

Таким чином, можна припустити існування відповідності (аналогії) між формою спектра (залежно

від енергії) і формою функції ймовірностей злиття  $p_l$  залежно від значення кутового моменту  $l$ . Використання нормування розрахункової кривої за експериментальними даними (без включення ймовірностей злиття) гірше описує експеримент (див. криву 9 на рис. 5), ніж крива 10 з урахуванням ймовірностей злиття, отриманих шляхом мінімізації. Тому використання нормування на експеримент не має сенсу в цій задачі.

	$L_{\text{max}}$																	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$p_0$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.01	0.01	0	0	0.01	0.01	0.005	0.17	
$p_1$	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.16	0	0	0	0.01	0	0.001	0.1	
$p_2$	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0.02	0	0.001	0.2	
$p_3$	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	0	0.02	0.02	0.222	0	
$p_4$	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.58	0	0	0.26	0.19	0.415	0
$p_5$	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.73	0.45	0.86	0.81	0.492	0.6
$p_6$	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.22	0.36	0.332	1.0
$p_7$	—	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$p_8$	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$p_9$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$p_{10}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$p_{11}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$p_{12}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	0.75	1.0	1.0	0.75	0
$p_{13}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	0.06	0.32	0	0
$p_{14}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.86	0	0.3	0
$p_{15}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0	1.0	1.0
$p_{16}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.0
$\delta$	967	935	881	807	715	619	541	473	400	326	244.6	151.1	67.6	41.620	35.934	34.488	23.1236	
$E_{\text{min}}$	-23.7	-23.1	-22.1	-20.6	-18.8	-16.6	-14.1	-11.3	-8.26	-4.90	-1.29	2.56	6.50	10.9	15.5	20.24	25.15	
$E_{\text{max}}$	6.16	6.31	6.61	7.06	7.67	8.45	9.41	10.5	11.8	13.4	15.5	17.1	19.3	21.7	24.3	27.32	30.52	

Таблиця 1. Результати знаходження ймовірностей злиття для реакції  $\alpha + ^{44}\text{Ca}$  методом мінімізації при розрахунку проникностей методом БВВ.  $p_0 \dots p_{16}$  — ймовірності злиття,  $\delta$  — похибка, визначена згідно з формулою (27),  $E_{\text{min}}$  — глибина потенціальної ями у внутрішньої області до бар'єра (MeV),  $E_{\text{max}}$  — висота потенціального бар'єра (MeV),  $L_{\text{max}}$  — максимальне значення кутового моменту, що використовується при сумуванні у формулі (1).

#### IV. ВИСНОВКИ

У цій роботі метод БВВ узагальнено до визначення проникностей у реакціях захоплення  $\alpha$ -частинок ядрами і на його основі проаналізовано  $\alpha$ -захоплення ядрами  $^{40}\text{Ca}$  та  $^{44}\text{Ca}$ . Подамо основні висновки:

1. Порівнянням перерізів захоплення, отриманих методом БВВ зі застосуванням методу мінімізації, з експериментальними даними [16] одержано нову інформацію про ймовірності злиття  $\alpha$ -частинки з ядрами  $^{40}\text{Ca}$  та  $^{44}\text{Ca}$ . Такий підхід може бути використаний як універсальний засіб для визначення невідомих ймовірностей злиття в реакціях захоплення, та також бути рекомендований для застосування при вивченні процесів злиття в реакціях синтезу.
2. Отримані значення ймовірностей злиття вказують на те, що підхід різкого обрізання кутових моментів, який увели Глас і Мосел у роботах [27, 28], є досить грубим наближенням (його відображає крива 6 на рис. 5), тоді як реальніша картина показана в табл. (що відповідає кривій 10 на рис. 5). Зокрема, значення ймовірностей злиття при перших значеннях кутового моменту близькі до нуля, що суперечить

ідеї різкого обрізання кутових моментів. Це вказує на необхідність пошуку реалістичніших підходів до опису ймовірностей злиття в задачах захоплення.

3. Показано, що наближення ВКБ дає значно занижені значення ймовірностей злиття для ядра з метою опису експериментальних даних порівняно з підходом БВВ. Переріз захоплення, отриманий у підході ВКБ, має розриви при великих енергіях.
4. Показано, що розвиток теорій із використанням нормування розрахункових перерізів на експериментальні дані не має сенсу в цій задачі, оскільки це не дає змоги підвищити точність опису експерименту.
5. Ми висловлюємо припущення (гіпотезу) про існування відповідності (аналогії) між формою спектра перерізу захоплення залежно від кінетичної енергії  $\alpha$ -частинки і формою функції ймовірностей злиття  $p_l$  залежно від значення кутового моменту  $l$ .

У цій роботі ми обмежилися аналізом без включення підходу, за якого проникність потенціального бар'єра оцінюється при його заміні на перевернуту параболу. Однак такий підхід є значно грубшим (перевернута параболу використовує для апроксимації лише три точки на всій прос-

торовій області), ніж апроксимація, що застосовується в методі БВВ (у наших розрахунках потенціальний бар'єр апроксимується функцією на основі 1000 точок з шириною інтервалу 0.07 фм).

### ДОДАТОК. ЗАЛЕЖНІСТЬ ПРОНИКНОСТІ БАР'ЄРА ВІД ПАРАМЕТРІВ ЗАХОПЛЕННЯ

Перше істотне питання, що може з'явитися при аналізі результатів методу БВВ, — це наскільки вони є достовірними. А саме, чи зміняться отримані значення проникності, якщо ми переміщуємо положення зовнішньої межі  $r_{\max}$ ? Так, у підході ВКБ при визначенні проникності бар'єра використовують форму потенціалу на області тунелювання, тоді як зовнішня та внутрішня частини його ніяк не впливають на результат. Тому з'ясуємо, чи існує збіжність у розрахунках проникності за методом БВВ при варіаціях положення зовнішньої межі? Зберігаючи ширину кожного інтервалу незмінною, ми будемо поступово збільшувати значення  $r_{\max}$  (через зростання кількості інтервалів у зовнішній області), починаючи від зовнішньої точки повороту, та розраховувати відповідне значення проникності. Результати таких розрахунків проникності для реакцій  $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$  та  $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$  показані на рис. 7 (для кожної реакції ми зафіксували положення точки старту в мінімумі ями у внутрішній області). Із наведених результатів видно, що всі розрахунки збігаються до деяких значень зі зростанням  $r_{\max}$ , що доводить збіжність алгоритмів у методі БВВ та отриманих результатів.

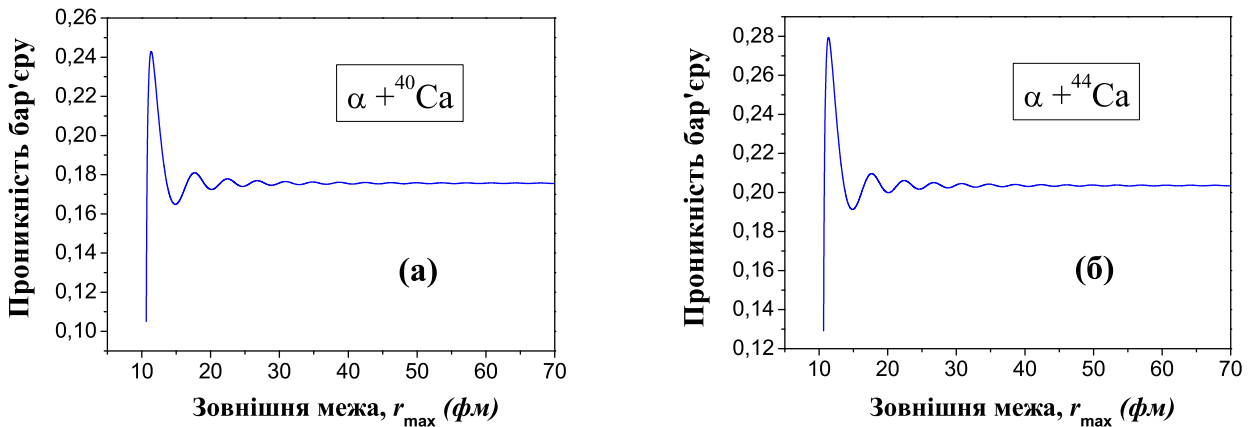


Рис. 7. Проникність бар'єра, отримана методом БВВ, залежно від положення зовнішньої межі  $r_{\max}$  для реакцій захоплення  $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$  (а) та  $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$  (б) для кутового моменту  $l = 0$  при енергії  $\alpha$ -частинки  $E_\alpha = 5.5$  MeV (параметри розрахунків: 5000 інтервалів при максимальному значенні  $r_{\max} = 70$  фм). Маємо висоту бар'єра  $V_{\max} = 6.28$  MeV та зовнішню точку повороту  $r_z = 10.66$  фм для  $\alpha + {}^{40}\text{Ca}$ , висоту бар'єра  $V_{\max} = 6.16$  MeV та зовнішню точку повороту  $r_z = 10.65$  фм для  $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ . Зовнішня межа змінюється від зовнішньої точки повороту  $r_z$  до максимального значення  $r_{\max}$ . Для кожного значення зовнішньої межі виконується умова  $|T_{\text{MIR}} + R_{\text{MIR}} - 1| \leq 10^{-15}$ .

З отриманих результатів можна знайти вплив частини потенціалу на зовнішній області на отриману проникність: із порівняння максимальної проникності та її значення при максимальному  $r_{\max}$  ми одержуємо зміну в 1.4 рази. Звідси похибка підходу ВКБ (зумовлена врахуванням впливу зовнішньої області бар'єра) — 140 відсотків. Зазначимо, що на відміну від підходу ВКБ та ін-

ших відомих підходів, у нашому методі ми використовуємо тест квантової механіки при оцінці отриманих амплітуд і коефіцієнтів проникності та відбиття, який дає  $|T_{\text{MIR}} + R_{\text{MIR}} - 1| \leq 10^{-15}$ . На цій підставі достатньо для подальших розрахунків у задачах  $\alpha$ -захоплення вибрати значення  $r_{\max} = 70$  фм.

[1] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, Phys. Rev. C **45**, 2247 (1992).  
 [2] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, At. Dat. Nucl. Dat. Tabl. **54**, 53 (1993).  
 [3] P. Mohr, Phys. Rev. C **61**, 045802 (2000).  
 [4] R. Moustabchir, G. Royer, Nucl. Phys. A **683**, 266 (2001).  
 [5] D. N. Basu, Phys. Lett. B **566**, 90 (2003).  
 [6] V. Yu. Denisov, H. Ikezoe, Phys. Rev. C **72**, 064613 (2005); preprint nucl-th/0510082.

[7] V. Yu. Denisov, A. A. Khudenko, Phys. Rev. C **79**, 054614 (2009).  
 [8] V. Yu. Denisov, A. A. Khudenko, Phys. Rev. C **80**, 034603 (2009).  
 [9] V. Yu. Denisov, A. A. Khudenko, At. Data Nucl. Dat. Tabl. **95**, 815 (2009).  
 [10] J. R. Huizenga, G. Igo, Nucl. Phys. **29**, 462 (1962).  
 [11] M. Nolte, H. Machner, J. Bojowald, Phys. Rev. C **36**, 1312 (1987).  
 [12] U. Atzrott, P. Mohr, H. Abele, C. Hillenmayer,

- G. Staudt, Phys. Rev. C **53**, 1336 (1996).
- [13] P. Demetriou, C. Grama, S. Goriely, Nucl. Phys. A **707**, 253 (2002).
- [14] M. Avrigeanu, W. von Oertzen, A. J. M. Plompen, V. Avrigeanu, Nucl. Phys. A **723**, 104 (2003).
- [15] T. Rauscher, F. K. Thielemann, J. Gorres, M. Wiescher, Nucl. Phys. A **675**, 695 (2000).
- [16] K. A. Eberhard *et al.*, Phys. Rev. Lett. **43**, 107 (1979).
- [17] J. M. D'Auria, M. J. Fluss, L. Kowalski, J. M. Miller, Phys. Rev. **168**, 1224 (1968).
- [18] A. R. Barnett, J. S. Lilley, Phys. Rev. C **C9**, 2010 (1974).
- [19] Б. Н. Захарьев, А. А. Сузько, *Потенциалы и квантовое рассеяние: Прямая и обратная задачи* (Энергоатомиздат, Москва, 1985).
- [20] V. S. Olkhovsky, S. P. Maydanyuk, Ukr. Phys. J. **45**, 1262 (2000), preprint nucl-th/0406035.
- [21] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, A. K. Zaichenko, Journ. Phys. Stud. **6**, 1 (2002), preprint nucl-th/0407108.
- [22] С. П. Майданюк, В. С. Ольховский, С. В. Бельчиков, *Вопр. атом. науки и техники (Саров, Россия)* **1**, 16 (2002); preprint nucl-th/0409037.
- [23] С. П. Майданюк, дис. канд. фіз.-мат. наук (Київ, 2003), 149 с.
- [24] F. Cardone, S. P. Maydanyuk, R. Mignani, V. S. Olkhovsky, Found. Phys. Lett. **19**, 441 (2006).
- [25] С. П. Майданюк, С. В. Бельчиков, *Журн. фіз. досл.* **14**, 4002 (2011).
- [26] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, J. Mod. Phys. **2**, 572 (2011).
- [27] D. Glas, U. Mosel, Nucl. Phys. A **237**, 429 (1975).
- [28] D. Glas, U. Mosel, Phys. Rev. C **10**, 2620 (1974).

**METHOD OF MULTIPLE INTERNAL REFLECTIONS AS A TOOL FOR THE STUDY OF PROBABILITIES OF FUSION IN THE TASKS OF THE CAPTURE OF ALPHA-PARTICLES BY NUCLEI**

S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov  
*Institute for Nuclear Research, Kyiv, UA-03680, Ukraine*

The method of multiple internal reflections (MIR) is developed to describe the capture of the  $\alpha$ -particles by nuclei. On its basis the analysis of the  $\alpha$ -capture by nuclei  $^{40}\text{Ca}$  and  $^{44}\text{Ca}$  is performed. Some new information about the probabilities of fusion of the  $\alpha$ -particle with such nuclei is obtained from a comparison of the capture cross-sections calculated by the MIR-approach with using of the method of minimization, with the experimental data. It is shown that the WKB approach gives overestimated values for the fusion probabilities in comparison with the MIR-approach. The found probabilities of fusion indicate that a sharp angular momentum cutoff proposed by Glas and Mosel is a rather rough approximation. In particular, the probabilities of fusion at the first angular momentum values are close to zero, which contradicts the idea of sharp angular momentum cut-off. This testifies to a need to find more realistic approaches for the description of fusion probabilities in capture tasks.