

PACS: 47.32.C

LARGE-SCALE MAGNETIC AND VORTEX STRUCTURES IN A TURBULENT MEDIUM

V.V. Yanovsky^{1,2}, A.V. Tur³, M.I. Kopp¹

¹*Institute for Single Crystals, Nat. Academy of Science
Ukraine, Lenine Ave.60, Kharkov 31001, Ukraine*

²*V.N. Karazin Kharkiv National University
Sq. Svobody 4, Kharkiv, 61022 Ukraine*

³*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Received December 4, 2015

The survey covers a main achievements in the field of dynamo theory. Applications of the model of turbulent convective dynamo to the problem of generation of a large-scale vortexes and magnetic structures in the solar photosphere are discussed. Investigated are the new models of the vortex dynamo in a rotating fluid with small-scale external force. The main results in these models are obtained by the method of multiscale asymptotic expansions. The results of numerical analysis of nonlinear equations of a magneto-vortex dynamo in a stationary mode are provided. Solutions are found in the form of spiral kinks, periodic nonlinear waves and solitons, which are also considered in the survey.

KEY WORDS: dynamo theory, large-scale convective instability, Coriolis force, multiscale asymptotic expansions, α - effect, solitons, kinks

ВЕЛИКОМАСШТАБНІ МАГНІТНІ І ВИХРОВІ СТРУКТУРИ У ТУРБУЛЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В.В. Яновський^{1,2}, А.В. Тур³, М.І. Копп¹

¹*Інститут монокристалів, Національна Академія Наук України
пр. Леніна 60, 61001 Харків, Україна*

²*Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна*

³*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

В огляді розглянуто останні досягнення в області теорії динамо. Обговорюється застосування моделі турбулентного конвективного динамо до проблеми генерації великомасштабних вихрових і магнітних структур у фотосфері Сонця. Розглянуто нові моделі вихрового динамо у рідині, що обертається, з зовнішньою дрібномасштабною силою. Основні результати в цих моделях отримано за допомогою методу багатомасштабного асимптотичного розкладу. Наведено результати чисельного аналізу нелінійних рівнянь магніто-вихрового динамо в стаціонарних режимах. Знайдено розв'язки у вигляді спіральних кінків, нелінійних періодичних хвиль та солітонів, які також розглянуті в огляді.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теорія динамо, великомасштабна конвективна нестійкість, сила Кориоліса, багатомасштабного асимптотичні розкладання, α - ефект, солітони, кінки

КРУПНОМАСШТАБНЫЕ МАГНИТНЫЕ И ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В ТУРБУЛЕНТНЫХ СРЕДАХ

В.В. Яновский^{1,2}, А.В. Тур³, М.И. Копп¹

¹*Институт монокристаллов, Национальная Академия Наук Украины
пр. Ленина 60, 61001 Харьков, Украина*

²*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина*

³*Universite Toulouse [UPS], CNRS, Institute of Research for Astrophysics and Planetology
9 avenue du Colonel Roche, BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

В обзоре рассмотрены последние достижения в области теории динамо. Обсуждается применение модели турбулентного конвективного динамо к проблеме генерации крупномасштабных вихревых и магнитных структур в фотосфере Солнца. Рассмотрены новые модели вихревого динамо во вращающейся жидкости с внешней мелкомасштабной силой. Основные результаты в этих моделях получены с помощью метода многомасштабного асимптотического разложения. Приведены результаты численного анализа нелинейных уравнений магніто-вихревого динамо в стационарном режиме. Найдены решения в виде спиральных кинков, нелинейных периодических волн и солитонов, которые также рассмотрены в обзоре.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: теория динамо, крупномасштабная конвективная неустойчивость, сила Кориоліса, многомасштабные асимптотические разложения, α - эффект, солитоны, кинки

Обзор посвящен современным проблемам теории динамо, занимающейся вопросами генерации и нелинейной эволюции крупномасштабных магнитных и вихревых структур в турбулентных средах. Исследование проблемы генерации крупномасштабных вихревых структур (КВС) имеет важное значение для целого ряда геофизических и астрофизических задач. В частности, к геофизическим задачам относятся исследования по генерации КВС типа тропических циклонов (тайфунов), торнадо, смерчей и т.д. Эти КВС

играют большую роль в глобальной циркуляции атмосферы, что очень важно для прогноза погоды и климата на нашей планете [1-5]. К астрофизическим задачам относятся проблемы генерации КВС в галактических дисках, в атмосферах планет Солнечной системы и т.п. [6-9]. Центральное место в этом направлении занимает теория вихревого динамо [6]. Первоначально идея вихревого динамо была высказана в работе [10], после того как был открыт α -эффект в магнитной гидродинамике [11-17]. Проблема генерации крупномасштабных магнитных полей в электропроводящих средах с мелкомасштабной спиральной турбулентностью [11] имеет более полувековую историю. В такой турбулентности корреляция $\overline{\vec{v}rot\vec{v}} \neq 0$ отлична от нуля и число вихрей одного знака больше, чем вихрей другого знака. Интеграл $\int \overline{\vec{v}rot\vec{v}} d\vec{r}$ является топологическим инвариантом (в отсутствие вязкости и внешних сил), который определяет число зацепляющихся линий тока в объеме, занятом турбулентной средой. Открытое в работе [11] явление генерации крупномасштабных магнитных полей однородной изотропной, но зеркально-несимметричной (спиральной) турбулентностью получило название альфа-эффекта. На основе этого эффекта были построены различные теории, объясняющие происхождение магнитных полей у различных астрофизических объектов: планет и Солнца [11-15], галактик [16] и т.п.

В последнем обзоре по этой теме [17] широко обсуждаются лабораторные динамо-эксперименты. Развитие вычислительной физики [17] также способствовало применению альфа-теорий к различным прикладным задачам, что в конечном счете привело к определению нового самостоятельного раздела физики-теории динамо. В современном понятии теория динамо включает в себя и так называемое вихревое динамо, которое описывает эффект генерации крупномасштабных вихрей в турбулентных средах [6]. История возникновения вихревого динамо началась с работы [10], где была высказана гипотеза о том, что спиральная турбулентность способна генерировать крупные вихри. Эта гипотеза основывалась на сходстве уравнений индукции магнитного поля \vec{B} и вихря $\vec{\Omega} = rot\vec{v}$ в гидродинамике. В работе [10] была выдвинута гипотеза, что спиральная турбулентность способна генерировать крупные вихри подобно крупномасштабному магнитному полю в магнитной гидродинамике [11]. Физическая сущность этого явления заключается в инверсном каскаде передачи энергии от мелких вихрей к более крупным. Однако в работе [18] было показано отсутствие эффекта генерации крупномасштабных вихрей однородной изотропной спиральной турбулентностью в несжимаемой жидкости. Причина отрицательного эффекта заключается в определенной симметрии тензора напряжений Рейнольдса в осредненном уравнении Навье-Стокса. Несмотря на запрет этой теоремы антидинамо, первый пример вихревого динамо в спиральной турбулентности для сжимаемой жидкости был найден в работе [19]. Там впервые было получено линеаризованное уравнение для вихря $\vec{\Omega}$, которое по виду похоже на уравнение индукции для среднего поля \vec{B} . Эффект генерации крупномасштабных вихрей связан с появлением члена $\alpha rot\vec{\Omega}$, где α выражается через спиральность турбулентности. Этот эффект получил название гидродинамического альфа-эффекта. Дальнейшее направление развития теории вихревого динамо было основано на поиске дополнительных факторов, нарушающих симметрию уравнений. Этими факторами, кроме сжимаемости среды, являются например, неоднородный поток [20], градиент температуры в поле тяжести [21], частицы примеси и пузырьки воздуха в жидкости [20]. Известно также большое количество работ по генерации КВС с учетом эффектов вращения [22-28].

Здесь нужно отметить, что особую роль в процессах генерации КВС в атмосферах планет играет свободная конвекция или тепломассоперенос вещества в поле силы тяжести [29,30]. Возникновение КВС и генерация крупномасштабных магнитных полей в конвективных системах изучалось как в рамках ламинарной теории [4, 31-46], так и в турбулентной [21,23,24,47-50]. Наибольшее развитие получила турбулентная теория (вихревое динамо), в которой показано существование крупномасштабной неустойчивости в конвективных системах с мелкомасштабной спиральной турбулентностью $\overline{\vec{v}rot\vec{v}} \neq 0$. На основе численных [27,51] расчетов, при рассмотрении вращающихся конвективных систем, были предприняты попытки применения полученных результатов к теории возникновения тропических циклонов.

На начальном этапе развития теории динамо, замкнутые уравнения для средних (крупномасштабных) полей были получены в основном при помощи метода электродинамики среднего поля (или теории корреляционного сглаживания второго порядка) [15] и функциональной техники [52,53]. Оба эти метода в применении к задачам теории динамо имеют главный недостаток, заключающийся в трудности определения из всей иерархии возмущений главного порядка при котором возникает неустойчивость. В связи с этим, в работе [54] была рассмотрена крупномасштабная неустойчивость в несжимаемой жидкости методом асимптотических многомасштабных разложений. В качестве малого параметра для асимптотического метода многомасштабных

разложений используется число Рейнольдса $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ для мелкомасштабных пульсаций скорости v_0 ,

вызванных мелкомасштабной силой. Модель внешней мелкомасштабной силы была выбрана с нарушением четности (при нулевой спиральности). Эффект генерации крупномасштабных возмущений такой силой получил название анизотропного кинетического альфа-эффекта или АКА-эффекта [54]. Отметим, что нарушение

четности является наиболее общим понятием, чем спиральность, хотя именно спиральность $\overline{\vec{v}rot\vec{v}} \neq 0$ является самым распространенным механизмом нарушения четности гидродинамических течений. В дальнейшем, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений были разработаны линейные и нелинейные теории вихревого динамо для сжимаемых сред [55,56], конвективных сред со спиральной внешней силой [47,48,50]. Во всех упомянутых выше работах спиральная турбулентность считалась заданной, либо вопрос о ее происхождении (генерации) рассматривался отдельно [57]. Генерацию спиральной турбулентности в природных условиях обычно связывают с влиянием силы Кориолиса (или силы Лоренца) на турбулентное движение среды [11,57], которое изначально было однородным изотропным и зеркально-симметричным (неспиральным). Отсюда естественно возникает вопрос о возможности генерации крупномасштабных полей (вихревых и магнитных) во вращающихся средах под действием мелкомасштабной силы с нулевой спиральностью $\vec{F}_0 rot \vec{F}_0 = 0$. Такой пример генерации КВС во вращающейся несжимаемой жидкости был найден в работе [58]. Там же было показано, что в результате развития крупномасштабной неустойчивости в наклонно вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой.

Цель работы – изложение современных достижений в области теории крупномасштабных магнитных и вихревых структур, которые позволяют продвинуться в понимании многих магнитогидродинамических (МГД) явлений, протекающих в различных астрофизических объектах. Основное внимание уделено новым типам локализованных вихревых структур, открытым относительно недавно.

ТУРБУЛЕНТНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ ДИНАМО В МГД

Рассмотрим безграничный слой электропроводящей жидкости в постоянном гравитационном поле при постоянном градиенте температуры, направленном по оси Z . Пренебрежем также влиянием внешнего магнитного поля и вращения. В такой постановке задача представляет интерес для теории динамо [10-17]. Модель турбулентного конвективного динамо описывается известными уравнениями МГД в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + R(\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\nabla P + \Delta \vec{V} + \tilde{Q}R[\text{rot}\vec{B} \times \vec{B}] + RaT\vec{e} + \vec{F}_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - Pr^{-1} \Delta T = -R(\vec{V}\nabla)T - V_z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - Pm^{-1} \Delta \vec{B} = R\text{rot}[\vec{V} \times \vec{B}] + \vec{F}_B, \quad (3)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \text{div}\vec{V} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1-4) записаны для безразмерных переменных: скорости \vec{V} , индукции магнитного поля \vec{B} и температуры T . В систему уравнений (1-4) входят следующие безразмерные параметры: $\tilde{Ra} = Ra / Pr$, $Ra = g\beta\lambda_0^4 A / \nu\chi$ – число Рэлея, $\tilde{Q} = Q / Pm$, $Q = \sigma B_0^2 \lambda_0^2 / c^2 \rho_{00} \nu$ – число Чандрасекара, $Pm = \nu / \nu_m = 4\pi\sigma / c^2 \nu$ – магнитное число Прандтля. Здесь приняты стандартные обозначения для коэффициентов кинематической вязкости ν , теплопроводности χ и электропроводности σ . Вектор $\vec{e} = (0, 0, 1)$ – единичный вектор в направлении оси Z , β – коэффициент теплового расширения, $A = \frac{dT_{00}}{dz}$ –

постоянный градиент температуры ($A = const$, $A > 0$), $\rho_{00} = const$, T_{00} – равновесные значения плотности и температуры. В уравнение (1), для моделирования мелкомасштабной спиральной турбулентности, включена внешняя сила \vec{F}_0 , обладающая спиральными свойствами:

$$\text{div}\vec{F}_0 = 0, \vec{F}_0 \text{rot}\vec{F}_0 \neq 0, \vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0(\frac{x_0}{\lambda_0}, \frac{t}{t_0}), \quad (5)$$

где λ_0 – характерный масштаб, t_0 – характерное время, f_0 – характерная амплитуда.

Как следует из уравнения (3), мелкомасштабное магнитное поле \vec{B}_0 в линейном приближении не может возбуждаться внешней мелкомасштабной силой \vec{F}_0 . Поэтому ниже мы рассмотрим два возможных сценария развития крупномасштабной неустойчивости. Первый, когда мелкомасштабное магнитное поле \vec{B}_0 существует

изначально, и второй, когда мелкомасштабное поле \vec{B}_0 создается внешним источником \vec{F}_B , имеющим такие же топологические свойства, как и сила \vec{F}_0 , т.е. $\vec{F}_B \text{rot} \vec{F}_B \neq 0$. Естественно, что возбуждаемое таким источником магнитное поле также спирально: $\vec{B}_0 \text{rot} \vec{B}_0 \neq 0$. Характерный масштаб источника λ_0^B и характерное время t_0^B удобно выбрать совпадающими с характерными масштабами λ_0 и t_0 соответственно, но характерные амплитуды этих источников будем предполагать разными:

$$\vec{F}_B = f_B \vec{F}_0 \left(\frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right), \quad f_0 \neq f_B. \quad (6)$$

Необходимость такого источника связана с наличием в реальных системах некоторого стационарного уровня мелкомасштабных осцилляций магнитного поля. Для его поддержания на стационарном уровне в уравнении (3) и нужен такой источник. В реальных системах уровень этих осцилляций магнитного поля поддерживается внешней накачкой или некоторой неустойчивостью. Примером внешней накачки может служить накачка циркулярно-поляризованной электромагнитной волной. Такая возможность широко обсуждалась в связи с проблемой «токового удержания», суть которого состоит в генерации тока при инжекции спиральности циркулярно-поляризованной электромагнитной волной [59]. Как показано в [60] спиральность мелкомасштабного магнитного поля может вызывать генерацию крупномасштабного магнитного поля. Инжекция спиральности магнитного поля может возникать и в космических условиях, например, под влиянием мощного излучения пульсаров. Следует отметить, что в разных физических ситуациях могут существовать различные неуниверсальные механизмы, поддерживающие некоторый уровень мелкомасштабных спиральных осцилляций. Универсальную теорию можно построить, абстрагируясь от механизма их возникновения и постулируя наличие такого мелкомасштабного спирального магнитного поля. Для его поддержания и вводится источник \vec{F}_B . Уравнения (1-4) содержат в качестве малого параметра число Рейнольдса $R = v_0 t_0 / \lambda_0 \ll 1$ мелкомасштабных осцилляций. Остальные параметры предполагаются произвольными, не влияющими на схему асимптотического разложения. Мелкомасштабная сила и внешний источник вызывают мелкомасштабные и высокочастотные флуктуации полей на фоне равновесного состояния. Средние значения таких флуктуаций нулевые. Однако из-за нелинейного взаимодействия между ними, могут возникать члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными, и они будут условием разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. В методе многомасштабных разложений, эти условия совпадают с уравнениями эволюции крупномасштабных возмущений. Нахождение и исследование уравнений разрешимости, т.е. уравнений для крупномасштабных возмущений, и является основной задачей турбулентного конвективного динамо. Для описания мелкомасштабных и высокочастотных флуктуаций удобно ввести «быстрые» переменные $x_0 = (\vec{x}_0, t_0)$, а для крупномасштабных возмущений «медленные» переменные $X = (\vec{X}, T)$. Исходя из этого, пространственные и временные производные в уравнениях (1-4) заменим следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T, \quad (7)$$

где ∂_i и ∂_t – обозначают производные по «быстрым» переменным, а ∇_i и ∂_T – производные по «медленным» переменным. При построении линейной теории величины \vec{V} , \vec{B} , T разлагаются в ряд по малому параметру R :

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}, t) &= \vec{v}_0(x_0) + R(\vec{W}(X) + \vec{v}_1) + R^2 \vec{v}_2 + R^3 \vec{v}_3 + R^4 \vec{v}_4 + R^5 \vec{v}_5 + \dots, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{B}_0(x_0) + R(\vec{H}(X) + \vec{B}_1) + R^2 \vec{B}_2 + R^3 \vec{B}_3 + R^4 \vec{B}_4 + R^5 \vec{B}_5 + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

$$T(\vec{x}, t) = T_0(x_0) + R(\Theta(X) + T_1) + R^2 T_2 + R^3 T_3 + R^4 T_4 + R^5 T_5 + \dots.$$

Здесь $\vec{W}(X)$, $\vec{H}(X)$, $\Theta(X)$ – скорость, вектор магнитной индукции и температура зависят только от крупномасштабных переменных. Давление $P(\vec{x}, t)$ представим в виде следующего разложения

$$P(\bar{x}, t) = \frac{1}{R} P_{-1}(X) + P_0(x_0) + RP_1 + R^2 P_2 + R^3(P_3 + \bar{P}_3) + R^4 P_4 + R^5 P_5 + \dots \quad (9)$$

Подставляя разложения (7-9) в систему уравнений (1-4) и собирая вместе члены с одинаковыми порядками по R до степени R^5 включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура асимптотического разложения уравнений (1-4) в различных порядках по R подробно изложена в работе [50]. Там же показано, что именно в порядке R^5 получаются основные секулярные уравнения, т.е. уравнения для крупномасштабных полей:

$$\partial_T W_i + \nabla_k (W_i W_k - \tilde{Q} H_i H_k) - \Delta W_i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_2^i} + \overline{v_2^k v_0^i} - \tilde{Q} (\overline{B_0^k B_2^i} + \overline{B_2^k B_0^i})) - \overline{v_0^i \nabla_k v_2^k} = -\nabla_i \bar{U}, \quad (10)$$

$$\partial_T H_i - Pm^{-1} \Delta H_i + W_p \nabla_p H_i - H_p \nabla_p W_i = \nabla_p (\overline{v_0^i B_2^p} + \overline{v_2^i B_0^p}) - \nabla_n (\overline{v_0^n B_2^i} + \overline{v_2^n B_0^i}), \quad (11)$$

$$\partial_T \Theta - Pr^{-1} \Delta \Theta = -\nabla_k (W_k \Theta) - \nabla_k (\overline{v_0^k T_2} + \overline{v_2^k T_0}), \quad (12)$$

$$\bar{U} = \bar{P}_3 + \tilde{Q} \frac{H_k^2}{2} + \tilde{Q} (\overline{B_0^k B_2^k}).$$

Эти уравнения нужно дополнить секулярными уравнениями:

$$W_z = 0, \quad \nabla_i W_i = 0, \quad \nabla_i H_i = 0.$$

Двумерность поля скорости \vec{W} позволяет рассматривать уравнения (10-12) в рамках квазидвумерной задачи, когда крупномасштабные производные по Z предпочтительнее, т.е. $\nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}$, а крупномасштабные возмущения W_1, W_2, H_1, H_2 , зависят только от Z - координаты:

$$W_{x,y} = W_{x,y}(Z), \quad H_{x,y} = H_{x,y}(Z). \quad (13)$$

На начальном этапе эволюцию крупномасштабных возмущений можно представить в виде плоской волны с волновым вектором $\vec{K} \parallel OZ$. Тогда из условия соленоидальности крупномасштабного магнитного поля: $\nabla_i H_i = 0$ или $\vec{K} \vec{H} = 0$ ясно, что поле \vec{H} имеет компоненты H_x, H_y . Для исследования устойчивости малых крупномасштабных возмущений в уравнениях (10-12) можно пренебречь нелинейными членами. В итоге упрощенная система уравнений, описывающая эволюцию крупномасштабных возмущений, принимает вид:

$$\partial_T W_x - \nabla_z^2 W_x + \nabla_z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_2^z v_0^x} - \tilde{Q} (\overline{B_0^z B_2^x} + \overline{B_2^z B_0^x})) = 0, \quad (14)$$

$$\partial_T W_y - \nabla_z^2 W_y + \nabla_z (\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_2^z v_0^y} - \tilde{Q} (\overline{B_0^z B_2^y} + \overline{B_2^z B_0^y})) = 0, \quad (15)$$

$$\partial_T H_x - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_x = \nabla_z (\overline{v_0^x B_2^z} + \overline{v_2^x B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_2^x} + \overline{v_2^z B_0^x}), \quad (16)$$

$$\partial_T H_y - Pm^{-1} \nabla_z^2 H_y = \nabla_z (\overline{v_0^y B_2^z} + \overline{v_2^y B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_2^y} + \overline{v_2^z B_0^y}), \quad (17)$$

$$\partial_T \Theta - Pr^{-1} \Delta \Theta = -\nabla_z (\overline{v_0^z T_2} + \overline{v_2^z T_0}). \quad (18)$$

Поскольку нас интересует проблема генерации крупномасштабных вихревых движений и магнитных полей в конвективной электропроводящей среде с мелкомасштабными и высокочастотными флуктуациями, то нам необходимо и достаточно получить уравнения (14-17) в замкнутом виде. Для этой цели нужно вычислить корреляторы:

$$-\nabla_z (\overline{v_0^z v_2^x} + \overline{v_2^z v_0^x}) + \tilde{Q} (\overline{B_0^z B_2^x} + \overline{B_2^z B_0^x}) = -\nabla_z T^{31} + \tilde{Q} \nabla_z S^{31}, \quad (19)$$

$$-\nabla_z (\overline{v_0^z v_2^y} + \overline{v_2^z v_0^y}) + \tilde{Q} (\overline{B_0^z B_2^y} + \overline{B_2^z B_0^y}) = -\nabla_z T^{32} + \tilde{Q} \nabla_z S^{32}, \quad (20)$$

$$G^{13} = \overline{v_0^x B_2^z} + \overline{v_2^x B_0^z}, \quad G^{31} = \overline{v_0^z B_2^x} + \overline{v_2^z B_0^x}, \quad (21)$$

$$G^{23} = \overline{v_0^y B_2^z} + \overline{v_2^y B_0^z}, \quad G^{32} = \overline{v_0^z B_2^y} + \overline{v_2^z B_0^y}, \quad (22)$$

Тензоры $T^{(ij)}$ называют напряжениями Рейнольдса, $QS^{(ij)}$ – напряжениями Максвелла, $G^{(ij)}$ – тензор турбулентной э.д.с. [15]. Вычисление корреляторов (19–22) легко осуществить, используя решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом и во втором порядках по R . В итоге уравнения (14–17) принимают замкнутый вид [50]:

$$\partial_T W_x - \nabla_Z^2 W_x + \alpha \nabla_Z W_y + \beta_q \nabla_Z H_y = 0, \quad (23)$$

$$\partial_T W_y - \nabla_Z^2 W_y - \alpha \nabla_Z W_x - \beta_q \nabla_Z H_x = 0, \quad (24)$$

$$\partial_T H_x - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_x - \alpha_H \nabla_Z H_y - \alpha_W \nabla_Z W_y = 0, \quad (25)$$

$$\partial_T H_y - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_y + \alpha_H \nabla_Z H_x + \alpha_W \nabla_Z W_x = 0. \quad (26)$$

Появление коэффициентов α_W и β_q , определяющих положительную обратную связь в самосогласованной динамике полей \overline{W} и \overline{H} , обусловлено совместным действием спиральной силы и источника МГД-турбулентности соответственно с амплитудами: f_0 и f_B . Коэффициенты α и α_H указывают на наличие гидродинамического и МГД α -эффектов в конвективной электропроводящей жидкости, вызванных действием внешней спиральной силы. В работе [50] получен явный вид этих коэффициентов, представляющий довольно сложную комбинацию из безразмерных параметров: Ra , Pr , Pm и Q . Если предположить отсутствие источника мелкомасштабных магнитных полей ($f_B = 0$), то система уравнений (23–26) расщепляется на две пары не связанных уравнений для крупномасштабной скорости \overline{W} :

$$\partial_T W_x - \nabla_Z^2 W_x + \alpha \nabla_Z W_y = 0, \quad (27)$$

$$\partial_T W_y - \nabla_Z^2 W_y - \alpha \nabla_Z W_x = 0, \quad (28)$$

и крупномасштабных магнитных полей \overline{H} :

$$\partial_T H_x - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_x - \alpha_H \nabla_Z H_y = 0, \quad (29)$$

$$\partial_T H_y - Pm^{-1} \nabla_Z^2 H_y + \alpha_H \nabla_Z H_x = 0. \quad (30)$$

Из системы уравнений (27,28) следует, что крупномасштабные вихревые возмущения могут нарастать с максимальным инкрементом $\gamma_{1\max} = \alpha^2 / 4$ для волновых чисел $K = K_{1\max} = \alpha / 2$. Гидродинамический α -эффект (как и в не электропроводящей среде [47,48]) существует только при наличии температурной стратификации, независимо от значений числа Прандтля Pr . В отличие от работы [47], в работе [50] было указано на возможность развития неустойчивости и при числах Рэлея $Ra = 2$ если $Pr \neq 1$. Вторая система уравнений (29,30) описывает рост крупномасштабных возмущений магнитного поля с максимальным инкрементом $\gamma_{2\max} = \alpha_H^2 Pm / 4$ для волновых чисел $K = K_{2\max} = \alpha_H Pm / 2$. Эффект генерации крупномасштабных магнитных полей мелкомасштабной спиральной турбулентностью в электропроводящих средах хорошо известен [12] и носит название α_H -эффекта. В однородной по температуре ($T_0 = const$, $Ra = 0$) электропроводящей среде генерация магнитного поля происходит лишь за счет внешней спиральной силы \overline{F}_0 , в то время как генерация вихревых возмущений не возникает. Развитие крупномасштабной конвективной неустойчивости в МГД на линейной стадии приводит как к усилению магнитного поля, так и крупномасштабных вихревых движений среды. При этом рост крупномасштабных возмущений оказывает влияние на динамику мелкомасштабных полей. Учет этих эффектов проводится в рамках нелинейной теории, аналогично развитой для крупномасштабной конвективной неустойчивости в непроводящих средах [47,48]. На линейной стадии неустойчивость возникает при наличии мелкомасштабного магнитного поля \overline{B}_0 или известного в литературе [13,61] как «затравочного» магнитного поля. В современной теории динамо выяснено множество механизмов генерации «затравочных» магнитных полей, например, при развитии термомагнитной неустойчивости [62], плазменных неустойчивостей [61,63]. Для ряда астрофизических и геофизических проблем представляет интерес исследовать динамику крупномасштабных полей, описываемых самосогласованной системой уравнений (14–17), в которой видно взаимное влияние крупномасштабного магнитного поля на вихревые движения среды и наоборот. В работе [50] подробно исследуется система уравнений (14–17), где показано, что неустойчивость имеет два режима с нулевыми частотами и частотами колебаний отличных от нуля. Также установлены критерии возникновения крупномасштабной неустойчивости

в терминах параметров $\alpha, \alpha_H, \alpha_W, \beta_q$, которые зависят от безразмерных чисел Ra, Pr, Pm, Q . С ростом амплитуды возмущений эти неустойчивости выходят на нелинейную стадию и формируют стационарные крупномасштабные структуры.

НЕЛИНЕЙНОЕ КОНВЕКТИВНОЕ МАГНИТО-ВИХРЕВОЕ ДИНАМО

В работе [64] исследовалась крупномасштабная конвективная неустойчивость в электропроводящей среде с мелкомасштабной спиральной силой \vec{F}_0 , когда величины крупномасштабных полей (магнитных и вихревых) не малы. В качестве математического формализма использовался метод асимптотических многомасштабных разложений для нелинейной теории, хорошо разработанный в работах [6,48,54]. В нелинейном случае крупномасштабные поля $\vec{W}(X), \vec{H}(X), \Theta(X)$ не малы, и поэтому асимптотическое разложение (8) должно модифицироваться. В этом случае решение уравнений (1–4) ищется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{V}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{W}_{-1}(X) + \vec{v}_0(x_0) + R\vec{v}_1 + R^2\vec{v}_2 + R^3\vec{v}_3 + \dots, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} \vec{B}_{-1}(X) + \vec{B}_0(x_0) + R\vec{B}_1 + R^2\vec{B}_2 + R^3\vec{B}_3 + \dots, \\ T(\vec{x}, t) &= \frac{1}{R} T_{-1}(X) + T_0(x_0) + RT_1 + R^2T_2 + R^3T_3 + \dots, \end{aligned} \quad (31)$$

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{R^3} P_{-3} + \frac{1}{R^2} P_{-2} + \frac{1}{R} P_{-1} + P_0 + R(P_1 + \bar{P}_1(X)) + R^2 P_2 + R^3 P_3 + \dots.$$

Для производных мы используем разложения (7). Подставляя эти выражения в исходную систему уравнений (1–4), мы получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения до порядка R^3 включительно. Именно в этом порядке были получены основные секулярные уравнения, описывающие эволюцию крупномасштабных возмущений [64]:

$$\partial_T W_i - \Delta W_i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_0^i}) = -\nabla_i \bar{P} + \tilde{Q} \left(\nabla_k (\overline{B_0^i B_0^k}) - \frac{\nabla_i}{2} (\overline{B_0^k})^2 \right), \quad (32)$$

$$\partial_T H_i - Pm^{-1} \Delta H_i = \nabla_j (\overline{v_0^i B_0^j}) - \nabla_n (\overline{v_0^n B_0^i}), \quad (33)$$

$$\partial_T \Theta - Pr^{-1} \Delta \Theta + \nabla_k (\overline{v_0^k T_0}) = 0. \quad (34)$$

Здесь введены следующие обозначения: $\vec{W} = \vec{W}_{-1}, \vec{H} = \vec{B}_{-1}, \Theta = T_{-1}$. Уравнения (32-34) дополняются другими секулярными уравнениями, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla_k (W_k W_i) &= -\nabla_i \bar{P}_{-1} + \tilde{Q} (\nabla_k H_i - \nabla_i H_k) H_k, \\ \nabla_k (W_k \Theta) &= 0, \quad W_j \nabla_j H_i = H_j \nabla_j W_i, \\ \nabla_i W_i &= 0, \quad \nabla_i H_i = 0, \quad W_z = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

С учетом геометрии задачи (13), уравнения для крупномасштабных возмущений примут вид:

$$\partial_T W_x - \Delta W_x + \nabla_z (\overline{v_0^z v_0^x}) = \tilde{Q} \nabla_z (\overline{B_0^z B_0^x}), \quad (36)$$

$$\partial_T W_y - \Delta W_y + \nabla_z (\overline{v_0^z v_0^y}) = \tilde{Q} \nabla_z (\overline{B_0^z B_0^y}), \quad (37)$$

$$\partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x = \nabla_z (\overline{v_0^x B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_0^x}), \quad (38)$$

$$\partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y = \nabla_z (\overline{v_0^y B_0^z}) - \nabla_z (\overline{v_0^z B_0^y}), \quad (39)$$

$$\partial_T \Theta - Pr^{-1} \Delta \Theta + \nabla_z (\overline{v_0^z T_0}) = 0, \quad (40)$$

$$\tilde{Ra} \Theta e_z = \nabla_z P_{-3}, \quad \frac{\partial}{\partial Z} \gg \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}. \quad (41)$$

Для получения замкнутой системы уравнений (36–41) потребовалось дойти до третьего порядка теории возмущений. В окончательном виде замыкание уравнений (36–39) достигается после вычисления напряжений Рейнольдса $\nabla_k \left(\overline{v_0^k v_0^i} \right)$, Максвелла $\nabla_k \left(\overline{B_0^i B_0^k} \right)$, смешанных корреляторов $\nabla_j \left(\overline{v_0^j B_0^i} \right)$ и $\nabla_n \left(\overline{v_0^n B_0^i} \right)$. Их вычисление осуществляется, используя решения уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом порядке по R и явный вид внешней спиральной силы \vec{F}_0 :

$$\vec{F}_0 = f_0 \left[\vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \sin \varphi_1 + \vec{k} (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \right], \quad (42)$$

где $\varphi_1 = \vec{\kappa}_1 \vec{x} - \omega_0 t$, $\varphi_2 = \vec{\kappa}_2 \vec{x} - \omega_0 t$, $\kappa_1 = \kappa_0 (1, 0, 0)$, $\kappa_2 = \kappa_0 (0, 1, 0)$. После выполнения громоздких, но несложных вычислений мы получили уравнения нелинейного конвективного магнито-вихревого динамо [64]:

$$\partial_T W_x - \Delta W_x + \nabla_Z \left[\alpha^{NL} (1 - W_y) \left(1 - \frac{H_y^2 Pm Q}{(1 + Pm^2 (1 - W_y)^2)} \right) \right] = 0, \quad (43)$$

$$\partial_T W_y - \Delta W_y + \nabla_Z \left[\alpha^{NL} (1 - W_x) \left(1 - \frac{H_x^2 Pm Q}{(1 + Pm^2 (1 - W_x)^2)} \right) \right] = 0, \quad (44)$$

$$\partial_T H_x - Pm^{-1} \Delta H_x - \nabla_Z (\alpha_{H_y}^{NL} H_y) = 0, \quad (45)$$

$$\partial_T H_y - Pm^{-1} \Delta H_y - \nabla_Z (\alpha_{H_x}^{NL} H_x) = 0. \quad (46)$$

Коэффициент $\alpha^{NL} = \alpha^{NL}(W_{x,y}, H_{x,y})$ нелинейного гидродинамического α -эффекта в электропроводящей среде с температурной стратификацией, $\alpha_{H_{x,y}}^{NL}$ - коэффициенты нелинейного МГД α -эффекта, ответственного за генерацию крупномасштабного магнитного поля, состоящие из двух частей:

$$\alpha_{H_{x,y}}^{NL} = \alpha_{x,y}^{NL(1)} (1 - Raf(W_{x,y}, H_{x,y}))$$

Первая часть, $\alpha_{H_{x,y}}^{NL(1)}$, обусловлена только действием внешней спиральной силы f_0 , вторая часть коэффициента

$\alpha_{H_{x,y}}^{NL}$ связана с наличием температурной стратификации $Ra \neq 0$, если $\frac{dT_{00}}{dz} \neq 0$. Коэффициенты α^{NL} и $\alpha_{H_{x,y}}^{NL}$

были вычислены в работе [64] для спиральной силы вида (42). Уравнения (43–46) описывают нелинейную динамику крупномасштабных полей в электропроводящей среде с неоднородностью по температуре. В пределе неэлектропроводной среды $\sigma = 0$, уравнения (43–46) полностью совпадают с результатами работы [47,48].

Рассмотрим вначале устойчивость малых возмущений полей (линейная теория), а затем исследуем вопрос о возможности существования стационарных структур. Рассмотрим начальную стадию развития возмущений (W_x, W_y) и (H_1, H_2) . Тогда при малых значениях величин $W_{x,y}$ и $H_{x,y}$ уравнения (43–46) сводятся к линейным уравнениям (27–30), т.е. фактически получается результат линейной теории, полученный в работе [50]. Приведем количественные оценки характерных масштабов и времен крупномасштабной неустойчивости для солнечной плазмы. Очевидно, что характерный масштаб неустойчивой моды $L_{\max} \approx 1/\alpha$ и характерный временной масштаб нарастания $T \approx 1/\gamma_{\max}$. Для их оценки, прежде всего, оценим величину источника, поддерживающего стационарный уровень мелкомасштабной скорости. Предполагая баланс между источником и диссипацией, из уравнения (1) получим: $F_0 \approx \nu v_0 / \lambda_0^2$. Учитывая, что источник должен обладать

спиральностью, оценим его амплитуду через гидродинамическую спиральность $\alpha_v = \frac{t_0}{3} \overline{v_0 \text{rot} v_0}$ [13]:

$\alpha_v \approx \frac{t_0 v_0^2}{3 \lambda_0} f_0^2$. Отсюда амплитуду силы удобно оценить через число Рейнольдса $R = v_0 \lambda_0 / \nu$:

$f_0^2 \approx 3 \alpha_v / R v_0$. Коэффициент усиления α при малых числах Прандтля оценивается как [50]: $\alpha \approx f_0^2 / Ra^2$

или: $\alpha \approx 3 \alpha_v / R Ra^2 v_0$. Тогда характерный масштаб крупномасштабной неустойчивости определяется как:

$$L \approx \lambda_0 \frac{\nu_0 R R a^2}{3\alpha_\nu} = \frac{\nu(R R a)^2}{3\alpha_\nu}. \quad (47)$$

Аналогично получается оценка для характерных времен: $T \approx \frac{1}{\nu} \left(\frac{R^2 R a^2}{3\alpha_\nu} \right)^2$. Из соотношения (47) можно

увидеть насколько крупный масштаб превосходит масштаб мелкомасштабных движений, т.е. в $R R a^2$ раз, если принять оценку $\alpha_\nu \approx \nu_0$ [65]. Для численных оценок полученных формул рассмотрим конвективную зону Солнца. Как известно, она состоит из конвективных ячеек с вертикальным размером порядка 100 км и горизонтальным размером порядка 500 км (см. например [65]). Кроме того имеется супергрануляция с горизонтальным масштабом порядка 20 тысяч километров. Сами ячейки являются квазистационарными с характерным временем жизни порядка 10 минут. Будем рассматривать движение газа внутри конвективной ячейки как мелкомасштабное, вплоть до 1/3 высоты ячейки, иначе говоря вплоть до масштабов порядка $\lambda_0 \approx 30$ км. Масштабы, превышающие эти, будем рассматривать как крупномасштабные. Турбулентная вязкость и теплопроводность практически одинаковы и равны примерно $10^{11} \div 10^{12}$ см²/сек. Поэтому число Прандтля порядка единицы. Сами конвективные ячейки можно считать примерно находящимися на границе устойчивости, поэтому их число Рэлея можно оценить из решения задачи о конвекции со свободными границами, что дает $R a \approx (27/4)\pi^4$. Поскольку градиент температуры внутри ячейки считается примерно постоянным, то нетрудно найти оценку числа Рэлея на масштабе $\lambda_0 \approx 30$ км: $R a_0 \approx 5,5$. Скорость движения газа в ячейке примерно $\nu_0 \approx 1$ км/сек (см. [65]). Отсюда можно оценить турбулентное число Рейнольдса с учетом значения турбулентной вязкости: $R \approx 0,3 \div 3 \sim 1$. В результате мы можем оценить численное значение L : $L \approx 61\lambda_0 = 1830$ км. Учитывая характерный размер ячеек, видно, что неустойчивость закручивает примерно три, четыре ячейки. Характерное время развития неустойчивости составляет порядка 37,2 часа. В результате развития неустойчивости в конвективной зоне Солнца генерируется вихревая структура типа циклона, которая захватывает несколько ячеек. При $R \sim 1$ его горизонтальные и вертикальные масштабы примерно равны. Качественные оценки линейной стадии для солнечных условий [65] позволяют установить хорошее совпадение характерных масштабов и времен, возникающих гидродинамических структур, с ранее обнаруженными экспериментально [66].

С ростом амплитуды возмущений $W_{x,y}$ и $H_{x,y}$ нелинейные коэффициенты α^{NL} и $\alpha_{H_{x,y}}^{NL}$ уменьшаются и неустойчивость стабилизируется. В результате образуются нелинейные вихревые спиральные структуры. Для изучения таких стационарных структур рассмотрим стационарные решения нелинейной системы уравнений (43–46). Полагая $\partial_T W_x = \partial_T W_y = \partial_T H_x = \partial_T H_y = 0$ и интегрируя эти уравнения по Z , получим:

$$\frac{d\tilde{W}_x}{dZ} = -\alpha^{NL} \tilde{W}_y \left(1 - \frac{QH_y^2 Pm}{1 + Pm^2 \tilde{W}_y^2} \right) + C_1, \quad (48)$$

$$\frac{d\tilde{W}_y}{dZ} = \alpha^{NL} \tilde{W}_x \left(1 - \frac{QH_x^2 Pm}{1 + Pm^2 \tilde{W}_x^2} \right) + C_2, \quad (49)$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_x}{dZ} = -\alpha_H^{NL} H_y + C'_1, \quad (50)$$

$$\frac{1}{Pm} \frac{dH_y}{dZ} = \alpha_H^{NL} H_x + C'_2. \quad (51)$$

Здесь C_1, C_2, C'_1, C'_2 – произвольные постоянные интегрирования. Нелинейные коэффициенты генерации α^{NL} и $\alpha_{H_{x,y}}^{NL}$ являются функциями возмущений скорости $\tilde{W}(X)$ и поля $\tilde{H}(X)$, явный вид которых определен в работе [64]. Анализ системы уравнений (48–51) представляет собой довольно сложную задачу. Поэтому примем ряд упрощений, т.е. будем считать числа Прандтля $Pm = 1$ равными единице, а крупномасштабное поле скорости $W_{x,y}$ совпадает с альфвеновской скоростью возмущений поля $H_{x,y}$: $\tilde{W}_{x,y} = \pm H_{x,y} \sqrt{Q}$. В этом случае происходит расщепление системы уравнений (48–51) на две пары

нелинейных уравнений для возмущений скорости $W_{x,y}$ и магнитного поля $H_{x,y}$, которые можно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{dX_W}{dZ} = \frac{d\mathcal{H}_W}{dP_W}, \quad \frac{dP_W}{dZ} = -\frac{d\mathcal{H}_W}{dX_W}, \tag{52}$$

$$\frac{dX_H}{dZ} = \frac{d\mathcal{H}_H}{dP_H}, \quad \frac{dP_H}{dZ} = -\frac{d\mathcal{H}_H}{dX_H}, \tag{53}$$

где введены новые переменные $X_W = 1 - W_x, P_W = 1 - W_y, X_H = H_y, P_H = H_x$. В уравнениях (52–3) переменная Z играет роль времени. Гамильтониан поля скорости \mathcal{H}_W имеет вид:

$$\mathcal{H}_W = U_w(P_W) + U_w(X_W) + C_1 P_W + C_2 X_W + C_3,$$

где, входящая в гамильтониан, функция $U_w(y)$ имеет вид:

$$U_w(y) = \frac{1}{8(Ra + 2)} \ln \frac{1 + 4y}{1 + 4y + Ra(Ra + 2)}.$$

Гамильтониан магнитного поля \mathcal{H}_H принимает вид:

$$\mathcal{H}_H = U_H(P_H) + U_H(X_H) + C_1' P_H + C_2' X_H + C_3^1,$$

где функция $U_h(x)$ имеет вид:

$$U_h(x) = \frac{(1 - Ra)}{8Q(Ra + 2)} \ln \frac{1 + x}{x + (1 + Ra)^2} - \frac{1}{8Q} \ln(1 + x).$$

Проведем анализ гамильтоновых уравнений для вихревой подсистемы, т.е. уравнений (52). Из уравнений (52), в фазовом пространстве следует появление неподвижных точек двух типов: эллиптического и гиперболического. При нулевых значениях постоянных $C_1 = C_2 = 0$ в фазовом пространстве присутствует только одна эллиптическая точка и в этом случае присутствуют только нелинейные волны. Стационарное решение, соответствующее нелинейной волне построено численно и приведено на рис. 1.

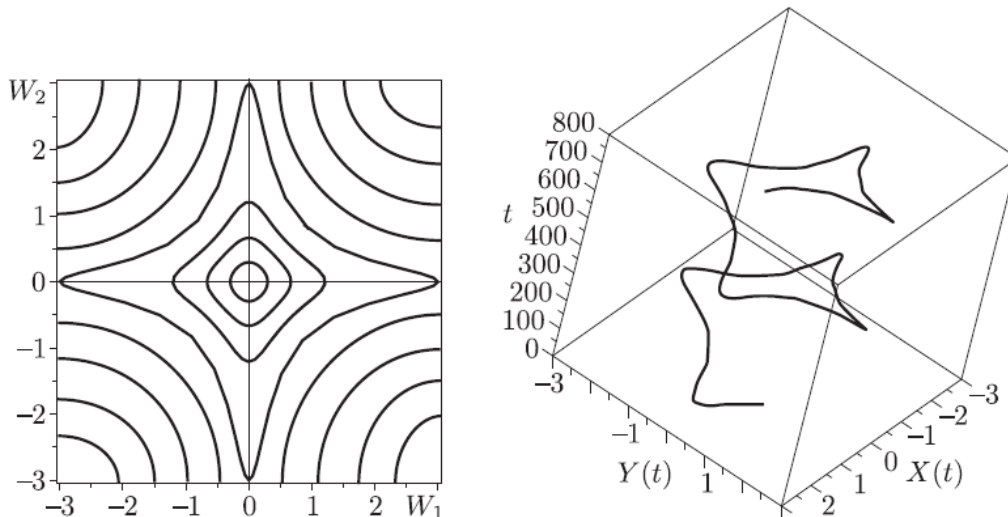


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений (52) и решение, соответствующее нелинейной волне при $C_1 = C_2 = 0$.

В области параметров $C_1 = 0$ нуль правой части первого уравнения (52) достигается только в одной точке $\tilde{W}_y = 0$. В области $C_1 \neq 0$ и $-c < C_1 < c$ существует два корня. Здесь величина c зависит от числа Рэлея Ra и аналитически определена в работе [64]. Вне полосы нули правой части первого уравнения (52) отсутствуют. Аналогично для второго уравнения (52) в полосе $-c < C_2 < c$ и $C_2 \neq 0$ два корня и вне ее корни отсутствуют. В итоге имеем: при $C_2 \neq 0$ ($-c < C_2 < c$) – четыре неподвижные точки (рис. 2). Кроме нелинейных волн возникает и кинк, соответствующий участку сепаратрисы, соединяющей две гиперболические

точки (рис. 3). Аналогично устроен фазовый портрет для магнитных полей, описываемых нелинейными уравнениями (53). Сохраняются условия существования двух и четырех неподвижных точек. Изменяется только значение постоянной c .

Развитая в работе [64] нелинейная теория конвективного магнито-вихревого динамо может применяться для описания генерации крупномасштабных магнитных полей в недрах планет, солитоноподобных структур в фотосфере Солнца.

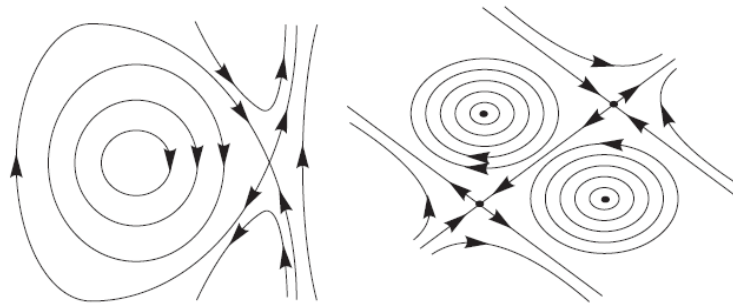


Рис. 2. Фазовые портреты

Слева – фазовый портрет с двумя неподвижными точками при $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ и $-c < C_2 < c$. Сепаратриса, выходящая и входящая в гиперболическую точку, соответствует солитону. Справа показан фазовый портрет в области параметров $C_1 \neq 0$ ($-c < C_1 < c$) и $C_2 \neq 0$ ($-c < C_2 < c$) при которых существуют четыре неподвижные точки

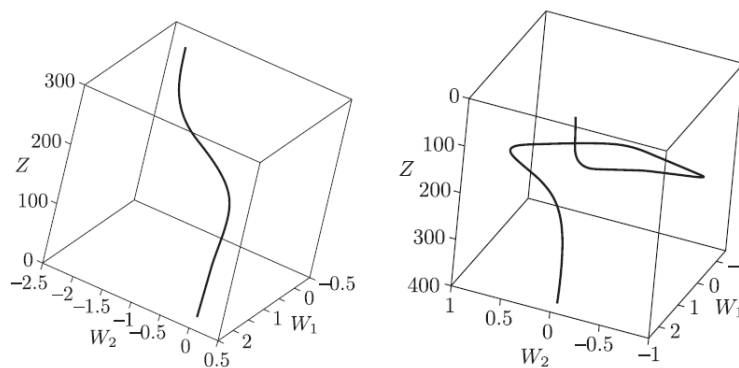


Рис. 3. Стационарные решения

Слева – кинк при значениях $C_1 = 0,01$ и $C_2 = 0,01$ в случае четырех неподвижных точек в фазовом пространстве. Справа – солитон в случае двух неподвижных точек при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0,01$. Они соответствуют фазовым портретам, показанным на рис. 2.

ВИХРЕВОЕ ДИНАМО ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СРЕДАХ

Эффекты вращения играют важную роль во многих практических и теоретических применениях механики жидкости [67], и особенно важны в геофизике и астрофизике [68-70], где приходится иметь дело с такими вращающимися объектами, как Земля, Юпитер, Солнце и т.д. Во вращающихся жидкостях могут возбуждаться разнообразные волновые и вихревые движения. Например, гироскопические волны, волны Россби, внутренние волны, локализованные вихри и когерентные вихревые структуры [71]. Среди вихревых структур наибольший интерес вызывают крупномасштабные, поскольку они осуществляют эффективный перенос энергии и импульса. Под крупномасштабными понимаются структуры, характерный масштаб которых много больше масштаба турбулентности или масштаба внешней силы, которая эту турбулентность возбуждает. В настоящее время известно довольно много неустойчивостей, которые генерируют крупномасштабные вихревые структуры во вращающейся жидкости с неоднородной турбулентностью [22-28]. В работе [72] получена новая крупномасштабная неустойчивость во вращающейся жидкости, подверженной действию мелкомасштабной внешней силы \vec{F}_0 , которая поддерживает турбулентные флуктуации. Уравнения движения для несжимаемой вращающейся жидкости с внешней силой \vec{F}_0 во вращающейся системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + R(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \vec{D} \times \vec{V} = -\nabla P + \Delta \vec{V} + \vec{F}_0, \quad (54)$$

$$\text{div} \vec{V} = 0. \quad (55)$$

Здесь \vec{V} - скорость движения жидкости в безразмерных единицах, внешняя сила \vec{F}_0 является бездивергентной и находится в плоскости (X, Y) , которая перпендикулярна оси вращения, т.е. ось Z направлена вдоль вектора угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$:

$$\begin{aligned} F_0^z = 0, \vec{F}_{0\perp} = f_0 (\vec{i}\cos\varphi_2 + \vec{j}\cos\varphi_1); \varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x} - \omega_0 t, \varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_0 t, \\ \vec{k}_1 = k_0 (1, 0, 1), \vec{k}_2 = k_0 (0, 1, 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Безразмерные параметры $R = \frac{\lambda_0 v_0}{\nu}$, $|D| = \sqrt{Ta}$ и $Ta = \frac{4\Omega^2 \lambda_0^4}{\nu^2}$ соответственно числа Рейнольдса и Тейлора на масштабе λ_0 . Как и ранее число Рейнольдса будем считать малым $R \ll 1$, и по этому малому параметру будем строить асимптотическое разложение. Относительно параметра D можно сказать, что в данный момент мы не фиксируем его порядок, считая его вне схемным параметром. Рассмотрим следующую формулировку проблемы. Будем считать внешнюю силу мелкомасштабной и высокочастотной. Эта сила приводит к мелкомасштабным флуктуациям скорости. После усреднения быстро осциллирующие флуктуации исчезают. Тем не менее из-за малых нелинейных взаимодействий в некоторых порядках теории возмущений после усреднения могут возникать ненулевые члены. Это означает, что эти члены не являются колебательными, т.е. являются крупномасштабными. В третьем порядке по R многомасштабного асимптотического разложения мы находим уравнения эволюции для «квазидвумерного» поля скорости \vec{W} :

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \frac{\partial}{\partial Z} \overline{w_0 u_0} = 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \frac{\partial}{\partial Z} \overline{w_0 v_0} = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Отсюда видно, что для вычислений напряжений Рейнольдса $\overline{w_0 u_0}$ и $\overline{w_0 v_0}$ необходимо знание поля скорости в нулевом порядке по R . Согласно работе [72] замкнутая система уравнений (57) имеет вид:

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \\ + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{f_0^2}{2} \frac{D}{4(W_y - 1)^2 + \left[4 + \frac{1}{2}D^2 - (W_y - 1)^2\right]^2} - \frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{4(W_x - 1)^2 + \left[4 + \frac{1}{2}D^2 - (W_x - 1)^2\right]^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \partial_T W_y - \Delta W_y + \\ + \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{f_0^2}{8} \frac{D^2}{4(W_y - 1)^2 + \left[4 + \frac{1}{2}D^2 - (W_y - 1)^2\right]^2} + \frac{f_0^2}{2} \frac{D}{4(W_x - 1)^2 + \left[4 + \frac{1}{2}D^2 - (W_x - 1)^2\right]^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

При малых амплитудах W_x, W_y напряжения Рейнольдса можно разложить в ряд по W_x, W_y , в результате чего система уравнений (58) линеаризуется:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} W_x - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} W_x - \frac{\alpha f_0^2 D}{2} \frac{\partial}{\partial Z} W_y + \frac{\alpha f_0^2 D^2}{8} \frac{\partial}{\partial Z} W_x = 0, \\ \frac{\partial}{\partial T} W_y - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} W_y + \frac{\alpha f_0^2 D^2}{8} \frac{\partial}{\partial Z} W_y + \frac{\alpha f_0^2 D}{2} \frac{\partial}{\partial Z} W_x = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

где коэффициент α равен:

$$\alpha = \frac{32(10 - D^2)}{\left[(D^2 + 6)^2 + 64\right]^2}.$$

Уравнения (59) принадлежат к типу гидродинамического α -эффекта, в котором компоненты скорости W_x, W_y связаны положительной обратной связью. Вследствие чего возможно возникновение крупномасштабной вихревой неустойчивости. Действительно, представляя малые амплитуды W_x, W_y в виде плоских монохроматических волн нетрудно найти дисперсионное уравнение:

$$\gamma = -ik \frac{\alpha f_0^2 D^2}{8} \pm k \frac{\alpha f_0^2 D}{2} - k^2. \quad (60)$$

Дисперсионное уравнение (60) показывает существование у системы уравнений (59) неустойчивых колебательных решений с частотой колебаний $\omega = k \frac{\alpha f_0^2 D^2}{8}$ и инкрементом неустойчивости

$$\gamma = k \frac{\alpha f_0^2 D}{2} - k^2. \text{ Неустойчивость является крупномасштабной, поскольку неустойчивый член доминирует}$$

над затуханием на больших масштабах: $\frac{\alpha f_0^2 D}{2} > k$. Максимальный инкремент неустойчивости равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\alpha^2 f_0^4 D^2}{16}, \text{ и достигается на волновом векторе } k_{\max} = \frac{\alpha f_0^2 D}{4}. \text{ Эта неустойчивость ответственна за}$$

формирование во вращающейся жидкости с мелкомасштабной внешней силой крупномасштабных вихрей Бельтрамиевского типа.

С ростом амплитуды нелинейные члены уменьшаются и неустойчивость насыщается. В результате образуются стационарные нелинейные вихревые структуры. Для их нахождения положим в уравнениях (58)

$\frac{\partial}{\partial T} = 0$ и проинтегрируем уравнения один раз по Z . Получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dZ} W_x &= \overline{w_0 u_0} + C_1, \\ \frac{d}{dZ} W_y &= \overline{w_0 v_0} + C_2. \end{aligned} \quad (61)$$

Из уравнений (61) следует:

$$\frac{dw_x}{dw_y} = \frac{\overline{w_0 u_0} + C_1}{\overline{w_0 v_0} + C_2}.$$

Интегрируя систему уравнений (61) получаем:

$$\int \overline{w_0 v_0} dw_x + C_2 w_x = \int \overline{w_0 u_0} dw_y + C_1 w_y. \quad (62)$$

Интегралы в выражении (62) вычисляются в элементарных функциях [73], что даёт выражение для первого интеграла движения J уравнений (61):

$$\begin{aligned} J &= \frac{D^2}{8} \frac{W_x}{\left[4 + \frac{1}{2}D^2 - (W_y - 1)^2\right]^2 + 16(W_y - 1)^2} + \frac{D}{2^{5/2}(8 + D^2)} \ln \frac{(W_x - 1)^2 + (W_x - 1)D\sqrt{2} + 4 + \frac{1}{2}D^2}{(W_x - 1)^2 - (W_x - 1)D\sqrt{2} + 4 + \frac{1}{2}D^2} + \\ &+ \frac{D}{8(8 + D^2)} \operatorname{arctg} \frac{(W_x - 1)^2 - 4 - \frac{1}{2}D^2}{4(W_x - 1)} - \frac{D^2}{8} \frac{W_y}{\left[4 + \frac{1}{2}D^2 - (W_x - 1)^2\right]^2 + 16(W_x - 1)^2} + \\ &+ \frac{D}{2^{5/2}(8 + D^2)} \ln \frac{(W_y - 1)^2 + (W_y - 1)D\sqrt{2} + 4 + \frac{1}{2}D^2}{(W_y - 1)^2 - (W_y - 1)D\sqrt{2} + 4 + \frac{1}{2}D^2} + \frac{D}{8(8 + D^2)} \operatorname{arctg} \frac{(W_y - 1)^2 - 4 - \frac{1}{2}D^2}{4(W_y - 1)} + C_1 W_y + C_2 W_x. \end{aligned}$$

Уравнения (61) легко решаются численно с помощью стандартных программ. В частности, это позволяет построить фазовый портрет динамической системы (61) (рис. 4), и построить наиболее интересные решения, связывающие на фазовой плоскости особые точки. К наиболее интересным структурам принадлежат

разнообразные вихревые кинки. Эти кинки связывают стационарные точки динамической системы (61). Кинк, связывающий гиперболическую точку с устойчивым узлом, содержит вращения вокруг устойчивого узла, как показано на рис. 5. В кинке, который связывает неустойчивый и устойчивый фокусы, векторное поле вращается вокруг обеих особых точек, как видно из рис. 6.

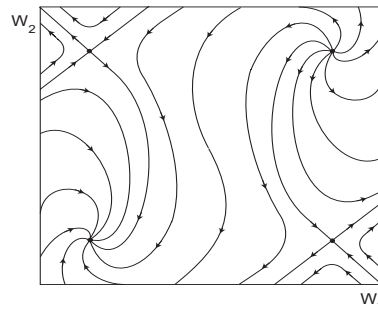


Рис. 4. Фазовый портрет динамической системы (61), при $D=1$, $C_1 = -0,03$, $C_2 = 0,03$. Видно присутствие двух гиперболических особых точек и устойчивого и неустойчивого узлов.

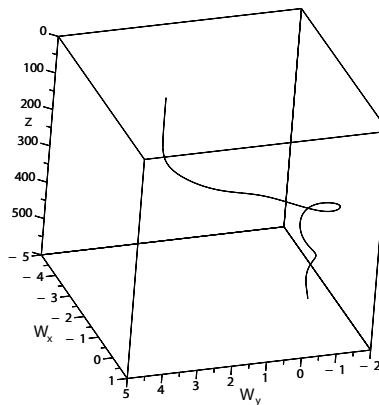


Рис. 5. Кинк, связывающий гиперболическую точку с устойчивым узлом. При $D = 1$, $C_1 = 0,04$, $C_2 = 0,04$. При подходе к устойчивому узлу видны вращения поля скорости.

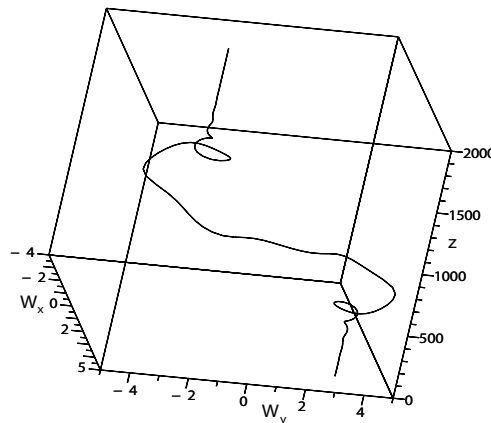


Рис. 6. Кинк, связывающий неустойчивый и устойчивый фокус. При $D = 1$, $C_1 = 0,04$, $C_2 = 0,04$. Видна внутренняя спиральная структура кинка.

В работе [58] описана новая модель вихревого динамо, в результате развития крупномасштабной неустойчивости в наклонно вращающейся жидкости, ось вращения которой не совпадает с осью Z и которая подвержена действию мелкомасштабной внешней силы с нулевой спиральностью $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F} = 0$:

$$F_0^z = 0, \vec{F}_{0\perp} = f_0 (\vec{i} \cos \varphi_2 + \vec{j} \cos \varphi_1); \varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{x} - \omega_0 t, \varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{x} - \omega_0 t, \tag{63}$$

$$\vec{k}_1 = k_0 (1, 0, 0), \vec{k}_2 = k_0 (0, 1, 0).$$

Эта сила поддерживает турбулентные мелкомасштабные флуктуации в жидкости с малым числом Рейнольдса. Можно считать, что внешняя мелкомасштабная сила моделирует действие мелкомасштабной турбулентности. В результате развития этой неустойчивости во вращающейся жидкости возникают нелинейные

крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа дорожек Бельтрами или локализованных кинков [58]. Предполагается, что внешняя сила находится в плоскости (X, Y) . В отличие от работы [72], здесь неустойчивость возникает только в том случае, когда вектор угловой скорости вращения $\vec{\Omega}$ наклонён по отношению к плоскости (X, Y) , как показано на рис. 7.

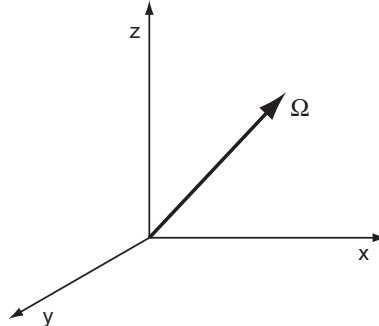


Рис. 7. В общем случае угловая скорость Ω наклонена по отношению к плоскости (X, Y) , в которой расположена внешняя сила $\vec{F}_{0\perp}$.

Если жидкость вращается строго вокруг оси Z , то неустойчивость отсутствует. Спиральное двумерное поле скорости W_x, W_y вращается вокруг оси Z , по мере изменения Z в периодической волне (рис. 8) и совершает один оборот в кинке (рис. 9).

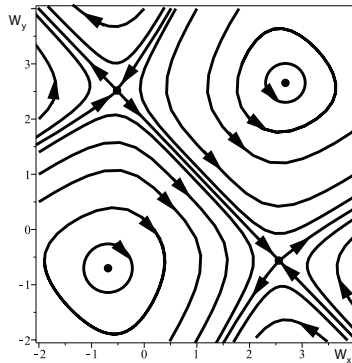


Рис. 8. Фазовая плоскость для гамильтониана (63) ($C_1 = 0,1, C_2 = 0,1$).

Видно наличие замкнутых траекторий вокруг эллиптических точек и сепаратрис, которые соединяют гиперболические точки. Фазовый портрет является типичным для гамильтоновых систем.

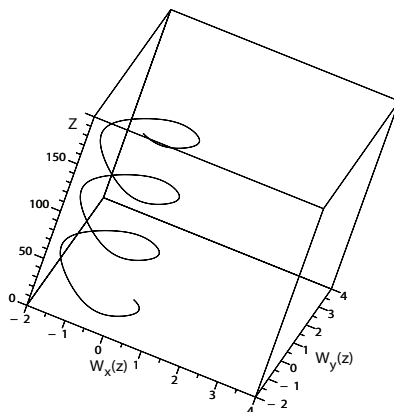


Рис.9. Нелинейная спиральная волна Бельтрами, которая соответствует замкнутой траектории на фазовой плоскости ($C_1=0,1, C_2=0,1$).

Спираль ориентирована вдоль оси Z и наклонена по отношению к оси вращения.

Найденная в работе неустойчивость принадлежит к классу неустойчивостей, которые называют гидродинамическим α -эффектом. Для таких неустойчивостей характерной является положительная обратная связь между компонентами скорости W_x, W_y , которая и приводит к неустойчивости. Нелинейные уравнения

для вихревого динамо во вращающейся жидкости получены в третьем порядке теории многомасштабного асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z} \frac{D_y}{4(1-W_y)^2 + [D_y^2 + W_y(2-W_y)]^2} &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial Z} \frac{D_x}{4(1-W_x)^2 + [D_x^2 + W_x(2-W_x)]^2} &= 0. \end{aligned} \quad (64)$$

При малых W_x, W_y уравнения (64) можно линеаризовать, что даёт:

$$\begin{aligned} \partial_T W_x - \Delta W_x - \alpha_y \frac{\partial}{\partial Z} W_y &= 0, \\ \partial_T W_y - \Delta W_y + \alpha_x \frac{\partial}{\partial Z} W_x &= 0. \end{aligned} \quad (65)$$

$$\alpha_y = 2 \frac{D_y(D_y^2 - 2)}{(4 + D_y^4)^2}, \alpha_x = 2 \frac{D_x(D_x^2 - 2)}{(4 + D_x^4)^2}.$$

Система (65) описывает неустойчивость типа гидродинамического α -эффекта с инкрементом следующего вида $\gamma = \pm \sqrt{\alpha_x \alpha_y} k - k^2$. При $\alpha_x \alpha_y > 0$ крупномасштабная неустойчивость существует с максимальным инкрементом $\gamma_{\max} = \frac{\alpha_x \alpha_y}{4}$, для волнового вектора $k_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_x \alpha_y}$. В результате развития неустойчивости в системе генерируются крупномасштабные спиральные вихри Бельтрамиевского типа. При $\alpha_x \alpha_y < 0$ в вместо неустойчивости возникают затухающие колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{\alpha_x \alpha_y} k$. В действительности поведение γ зависит от того, как расположены внешние силы F_0^x, F_0^y по отношению к перпендикулярной проекции угловой скорости вращения и от значений D_x, D_y . Если одна из компонент D_x, D_y обращается в ноль или равна $\sqrt{2}$, то неустойчивость отсутствует. Неустойчивость существует в следующих случаях:

- 1) $D_x > \sqrt{2}, D_y > \sqrt{2}$;
- 2) $D_x, D_y > 0, D_x < \sqrt{2}, D_y < \sqrt{2}$;
- 3) $D_x < 0, D_y < 0, D_x^2 > 2, D_y^2 > 2$;
- 4) $D_x < 0, D_y < 0, D_x^2 < 2, D_y^2 < 2$;
- 5) $D_x < 0, D_y > 0, D_y^2 > 2, D_x^2 < 2; D_y^2 < 2, D_x^2 > 2$;
- 6) $D_x > 0, D_y < 0, D_y^2 > 2, D_x^2 < 2; D_y^2 < 2, D_x^2 > 2$;

Во всех остальных случаях возникают затухающие колебания. Стационарные нелинейные вихревые структуры описываются системой уравнений, записанных гамильтоновой форме:

$$\frac{du_x}{dZ} = -\frac{\partial H}{\partial u_y}, \quad \frac{du_y}{dZ} = \frac{\partial H}{\partial u_x}, \quad (66)$$

где введены новые переменные: $1 - W_x = u_x, 1 - W_y = u_y$. Гамильтониан H имеет вид:

$$H = h(D_x, u_x) + h(D_y, u_y), \quad (67)$$

а функция $h(D, u)$ в свою очередь равна:

$$h(D, u) = \frac{D}{2} \int \frac{du}{(D^2 + 1)^2 + 2(1 - D^2)u^2 + u^4} + Cu. \quad (68)$$

Интеграл в формуле (68) вычисляется в элементарных функциях [73]. Положим для простоты

$D_x = D_y = D = 1$. Тогда функция (68) равна:

$$h(u) = \frac{1}{16} \left\{ \ln \frac{u^2 + 2u + 2}{u^2 - 2u + 2} + \operatorname{arctg} \frac{2u}{2 - u^2} \right\} + Cu. \quad (69)$$

Сумму $h(u_x) + h(u_y)$ можно объединить в одну формулу. Тогда гамильтониан равен:

$$H = \frac{1}{16} \ln \frac{(u_x^2 + 2u_x + 2)(u_y^2 + 2u_y + 2)}{(u_x^2 - 2u_x + 2)(u_y^2 - 2u_y + 2)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{2u_y(u_x^2 - 2) + 2u_x(u_y^2 - 2)}{2(u_x + u_y)^2 - u_x^2 u_y^2 - 4} + C_1 u_x + C_2 u_y. \quad (70)$$

Для гамильтониана (70) нетрудно построить фазовый портрет (рис.8), где для конкретности положено $C_1 = 0,1$, $C_2 = 0,1$. На фазовом портрете видно наличие замкнутых траекторий на фазовой плоскости вокруг эллиптических точек и сепаратрис, которые соединяют гиперболические точки. Очевидно, что замкнутым траекториям соответствуют нелинейные периодические решения (рис. 9), а сепаратрисам соответствуют локализованные решения, типа кинков (рис.10).

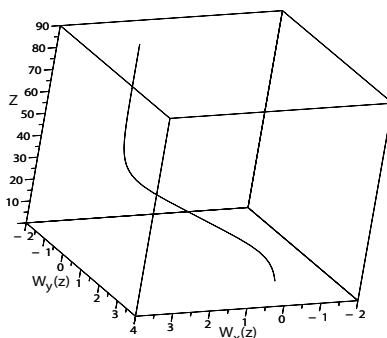


Рис.10. Локализованное решение (кинк), которое соответствует сепаратрисе на фазовой плоскости ($C_1 = 0,1$, $C_2 = 0,1$).

Отметим, что, в отличие от предыдущих работ [22-28] по гидродинамическому α -эффекту во вращающейся жидкости, метод асимптотического разложения позволяет построить естественным образом нелинейную теорию и изучить стационарные нелинейные вихревые кинки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре представлены основные результаты авторов [50,58,64,72] по теории турбулентного динамо, полученные в последнее время. В частности, обсуждается полученная замкнутая система нелинейных уравнений, описывающая как линейную, так и нелинейную стадии роста гидродинамических течений и магнитных полей в конвективных электропроводящих средах. Это позволяет применить её для объяснения возникновения и стабилизации крупномасштабного магнитного поля ряда космических объектов, например, звёзд. Также представляет интерес применение ее к описанию генерации крупномасштабных магнитных полей конвекцией в электропроводящей среде в недрах планет, это позволит решить некоторые проблемы земного магнетизма. Следует отметить что, несмотря на использование асимптотической техники, основанной на наличии мелкомасштабных флуктуаций, полученные результаты можно применять и к турбулентным средам. В турбулентном случае присутствует целый спектр таких мелкомасштабных флуктуаций. Полученные нами качественные оценки линейной стадии крупномасштабной конвективной неустойчивости для солнечных условий, позволяют ожидать экспериментального обнаружения вихревых солитоноподобных структур в фотосфере Солнца. Перспективным направлением в развитии нелинейной теории динамо является обобщение, полученных в работах [58,72], результатов для вращающихся электропроводящих сред (жидкие металлы, плазма). Для этих сред также можно развить теорию крупномасштабной неустойчивости с помощью асимптотического метода многомасштабных разложений. Следует ожидать обнаружения новых крупномасштабных стационарных магнитных структур в таких средах. Исследование этих структур имеет не только астрофизическое приложение, но и представляет интерес для задач, связанных с проблемой управляемого термоядерного синтеза.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРЫ

1. Petviashvili V.I., Pohotelov O.A. Uedinenye vihri v plazme i atmosfere. -M.:Energoatomisdat, 1989. - 200s.
2. Aburdjanija G.D. Samoorganizatsia nelinejnyh vihrevykh struktur i vihrevoj turbulentnosti v dispergirujusjich sredah. - M.:KomKniga, 2006. - 328s.
3. Onishenko O.G., Pohotelov O.A., Astafjeva N.M. Generatsija krupnomasshtabnyh vihrej i sonalnykh vetrov v atmosferakh planet // Usp. Fis. Nauk. - 2008. - T.178. - No. 6 - S. 605 - 618.
4. Shmerlin B.Ja., Kalashnik M.V. Konvektivnaja neustojtsivost' Releja v prisutstvie fasovih perehodov vlagi. Formirovanie krupnomasshtabnyh vihrej i oblatshnyh struktur //Usp. Fis. Nauk. - 2013. - T.183. - No. 5. - S.497 - 510.
5. Monin A.S. Vvedenie v teoriji klimata. - L.: Gidrometeoizdat, 1982. - 296s.
6. Tur A.V., Yanovsky V.V. Gidrodinamicheskie vihrevye struktury. - Har'kov: Institut monokristallov, 2012. - 290s.
7. Rolfs K. Lektsii po teoriji voln plotnosti. - M.: Mir, 1980. - 208s.
8. Morozov A.G., Hoperskov A.V. Fizika diskov. - Volgograd: Izd.-vo VolgGU, 2005. - 423s.
9. Nezhlin M.V., Sneshkin E.N. Vikhri Rossby i spiral'nye struktury. - M.: Nauka, 1990. - 240s.
10. Moffat G. Nekotorye napravlenija razvitiija turbulentnosti. Sovrem. Gidrodinamika. Uspehi i problemi. - M.: Mir,1984. - S.48 - 76.
11. Steenbek M., Krause F. Voznikovenie magnitnyh polej zvezd i planet v resul'tate turbulentnogo dvizhenija ih veshestv // Magnitnaja gidrodinamika. - 1967. - No.3. - S.19-44.
12. Moffat G. Vozbuzdenie magnitnogo polja v provodjashej srede. - M.: Mir, 1980.- 343s.
13. Zeldovitch Ja.B., Ruzmajkin A.A., Sokolov D.D. Magnitnye polja v astrofizike. - Izhevsk: Inst. Kopm.issl. RHD, 2006.- 384s.
14. Parker Ju. Besedy ob elektritjeskih i magnitnyh poljah v kosmose. - Izhevsk: Inst. Kopm.issl. RHD, 2010.- 208s.
15. Krauze F., Pedler K.H. Magnitnaja gidrodinamika srednih polej i teorija dinamo. - M.: Mir,1984. - 314s.
16. Ruzmajkin A.A., Sokolov D.D., Shukurov A.M. Magnitnye polja galaktik. - M.: Nauka, 1988. - 279s.
17. Sokolov D.D., Stepanov R.A., Frik P.G. Dinamo na puti ot astrofizitjeskih modelej k labolatornomu eksperimentu// Usp. Fiz.Nauk. - 2014. - T. 184. - S.318-335.
18. Krause F., Rudiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence // Astron. Nachr. - 1974. - Vol.295. - P.93-99.
19. Moiseev S.S., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Homenko G.A., Yanovsky V.V. Teorija voznikovenija krupnomasshtabnyh struktur v gidrodiamitsheskoj turbulentnosti // ZhETF. - 1983. - T.85. - Vyp.6(12). - S.1979-1987.
20. Petrosjan A.S. Dopolnitelnye glavy teorii turbulentnosti. Spiral'naja turbulentnost'. - M.: IKI RAN, 2013. - 60s.
21. Moiseev S.S., Rutkevich P.B., Tur A.V., Homenko G.A., Yanovsky V.V. Vikhrevoe dinamo v konvektivnoj srede so spiral'noj turbulentnostju // ZhETF. - 1988. - T.94. - Vyp.2. - S.144-153.
22. Smith L.M., Waleffe F. Transfer of Energy to Two-Dimensional Large Scales in Forced, Rotating Three-Dimensional Turbulence // Physics of Fluids.- 1999.- Vol. 11.- No. 6.- P.1608.
23. Smith L. M. and Waleffe F. Generation of Slow Large Scales in Forced Rotating Stratified Turbulence // Journal of Fluid Mechanics. - 2002. - Vol.451. - P.145-168.
24. Berezin Y. A. and Zhukov V. P. An Influence of Rotation on Convective Stability of Large Scale Distorbances in Turbulent Fluid// Izv. AN SSSR. Mech. Zhidk. Gaza. - 1989. - No. 4. - P.3
25. Kitchatinov L.L., Rudiger G., and G.Khomenko. Large -scale vortices in rotating stratified disks // Astron. Astrophys. - 1994. - Vol.287. - P.320-334.
26. Rudiger G. On the α - Effect for Slow and Fast Rotation // Astron. Nachr. - 1978. - Vol.299. - No.4. - P.217-222.
27. Zimin V.D., Levina G.V., Moiseev S.S., Tur A.V. Voznikovenie krupnomasshtabnykh struktur pri turbulentnoj konveksii v podogrevaemom snizu vraschajuschemsja sloe // Dokl. AN SSSR.- 1989.-T. 309.- S. 88-92.
28. Rutkevich P. B. Equation for vortex Instability Caused by Convective Turbulence and Coriolis Force // JETF.- 1993.- Vol. 77.- P. 933-938.
29. Gershuni G.Z., Zhuhovickij E.M., Nepomnjashnij A.A. Ustojchivost' konvektivnyh techenij. - M.: Nauka, 1989. - 320s.
30. Getling A.V. Konvekcija Releja-Benara. Struktury i dinamika. - M.: Editorial URSS, 1999. - 248s.
31. Kuklin V.M. Rol' poglotchenija i dissipatsii energii i formirovanie prostranstvennykh nelinejnykh struktur v neravnovesnyh sredah // UFZh. - 2004. - T.4. - No. 1. - S.49-81.
32. Busse F.H. Generation of planetary by convection // Phys. Earth. Planet. Inter.- 1976.-Vol. 12.-P. 350-358.
33. Zang K.K., Busse F.H. Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical fluid shell of infinite Prandtl number // Phys.Earth.Planet.Inter. - 1990. - Vol. 59. - P.202-222.
34. Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil.Trans.Roy.Sos.Lond. - 2000. - Vol.A358. - P.873-897.
35. Glantzmaier G.A., Roberts P.H. Simulation the geodynamo // Contemp.Phys. - 1999. - Vol. 38. - P.269-288.
36. Braginskij S.I. O samovozbuzhdenii magnitnogo polja pri dvizhenii khorosho provodjaschej zhidkosti // ZhETF. - 1964. - T. 47. - Vyp. 3. - S.1084-1098.
37. Matthews P.C. Dynamo action in simple convective flows // Proc. Roy. Soc. London. Ser.A. - 1999. - Vol. 455. - P.1829-1840.
38. Demircan A., Seehafer N.Dynamo in asymmetric square convection // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. - 2002 - Vol. 96. - P.461-479.
39. Podvigina O.M. Magnetic field generation by convective flows in plane layer // Eur. Phys J.B. - 2006 - Vol. 50. - P.639-652.
40. Podvigina O.M. Zavisimost' generatsii magnitnogo polija ot kineticheskogo chisla Prandtlija // Mater. Mezhdunar. konf. "Nelineinije zadachi teorii gidrodinamicheskoj ystoichivosti i turbulentnost'". - M.: Mosk. yniv-teta. - 86s.
41. Arnol'd V.I., Zel'dvich Ja.B., Ruzmajkin A.A., Sokolov D.D. Magnitnoe pole v dvizhushejsija provodaschej zhidkosti // Uspehi matem. Nauk. - 1981. - No.5. - S.220-221.
42. Arnol'd V.I. Evolutsija magnitnogo polija pod dejstviem perenosa I diffuzii // Uspehi matem. Nauk. - 1983. - No. 2. - S.225-227.
43. Reshetnyak M.Yu. Thermal Convection and the Dynamo during Rapid Rotation // Izvestija. Physics of the solid Earth.-2007.- Vol.43.-No.8.-P.642-652.

44. Gertsenshtejn S.Ya., Chertovskikh R.A. Generatsija magnitnogo polja konvektivnymi techenijami vo vraschajuschemsja gorizonta'nom sloe // *Mekhanika zhidkosti i gasa*.-2008.-No. 2.- S.92- 101.
45. Chertovskikh R.A., Zheligovskikh V.A. Evoljutsija dlinnomasshtabnykh vozmuschenij stacionarnykh konvektivnykh MGD sostojanij // *Proceedings of MSS-14. II. Large-scale instabilities in hydrodynamics and plasmas*.- M.: IKI RAN, 2015.
46. Calkins M.A., Julien K., Tobias S.M., Aurnou J.M. A Multiscale Dynamo Model Driven by Quasi-geostrophic Convection // *arXiv: 1502.03856v1(physics.geo-ph)* 12 Feb 2015.
47. Tur A.V., Yanovsky V.V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force//*arXiv:1204.5024 v.1 (physics.flu-dyn.)*(2012)
48. Tur A.V., Yanovsky V.V. Non Linear Vortex Structure in Stratified Driven by Small- scale Helical Force // *Open Journal of Fluid Dynamics*. - 2013. - Vol. 3 - P. 64 - 74.
49. Moiseev S.S., Oganjan K.R., Rutkevith P.B., Tur A.V., Homenko G.A., Yanovsky V.V. Vikhrevoe dinamo v spiral'noj turbulentnostju.- Kiev: Naukova dumka. Sb.: Integrirovost i kineticheskie uravnenija dlja solitonov, 1990. - S.280-382.
50. Kopp M.I., Tur A. V., Yanovsky V. V. Krupnomasshtabnaja konvektivnaja neustojtchivost' v elektroprovodjashej srede s melkomasshtabnoj spiral'noj turbulentnostju // *ZhETF*. - 2015. - T. 147. - Vyp. 4. - S.846-866.
51. Levina G.V. Parametrizatsija spiral'noj turbulentnosti v chislennykh modeljakh intensivnykh atmosferynykh vikhrej // *Dokl. RAN*. -2006. - T. 411. - S.400-404.
52. Novikov E.A. Funktsionaly i metod sluchajnyh sil v teorii turbulentnosti // *ZhETF*. - 1964.-T.47. - Vyp.5(11). - S. 1919 - 1926.
53. Kljatskin V.I. Stohasticheskie uravnenija i volny v sluchajno-neodnorodnyh sredakh. - M.: Nauka, 1980. - 377s.
54. Frishe U., She Z.S., Sulem P.L. Large Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect // *Physica 28D*. - 1987. - P. 283 - 291.
55. Druzhinin O.A., Homenko G.A. Nelinejnaja teorija gidrodinamitsheskogo alfa-effekta v szhimaemoj srede i obratny kaskad energii.-Kiev: Naukova dumka. Tr. Mezhdunarodnoj konf.: Nelinejnye i turbulentnye protsessy v fizike, 1989. - T.2. - S.83 -86.
56. Rutkevitch P.B., Sagdeev R.Z., Tur A.V., Yanovsky V.V. Nonlinear dynamic theory of the α -effect in compressible fluid. - Kiev: Naukova dumka. Proceeding of the IV Intern.Workshop on Nonlinear and Turb. Pros.in Physics, 1989.
57. Tshetiani O.G. Samoorganizatsija i turbulentnost v otrazhatelno-nesimmetritsnyh plazmenno-gidrodinamitsheskikh sredah. Diss. na soisk. utch. stepeni dokt. fiz.-mat. nauk. - Moskva, 1999. - 262 s.
58. Kopp M. I., Tur A. V., Yanovsky V. V. The Large Scale Instability and Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid with Small Scale Non Spiral Force// *BAHT*. - 2015. - No. 98. - S.264-269.
59. Shalit M.A. and Bellan P.M. Plasma current drive by injection of photons with helicity // *Phys. of Fluids B*.-1989. - Vol.1(12). - P. 2533-2534.
60. Sokolov I.V. Moment impul'sa elektromagnitnoj volny i generatsija magnitnykh polej v plazme // *Usp. Fiz. Nauk*.- 1991. - T. 161. - No. 10. - S.175-190.
61. Vajnshtejn S.I. Magnitnye polja v kosmose. - M.:Nauka, 1983. - 237s.
62. Dolginov A.Z., Urpin V.A. Termomagnitnaja neustojtchivost' neodnorodnoj plazmy // *ZhETF*. - 1978. - T.77. - S.1921-1932.
63. Montgomery D., Chen H. Turbulent amplification of large-scale magnetic fields // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. - 1984. - Vol. 26. - No. 10. - P. 1199 -1210.
64. Kopp M.I., Tur A.V., Yanovsky V.V. Nelinejnaja teorija dinamo // *Nelinejnaja dinamika*. – 2015. - T.11. - No.2. - S.241-266.
65. Kaplan S.A., Pikelner S.B., Tsytoich V.N. Fizika plazmy solnečnoj atmosfery.-M.: Nauka, 1977.- 256s.
66. Brandt P.N., Sharmet G.B., Ferguson S., Shine R.A., Tarbell T.D., Title A.M. Vortex flow in the solar photosphere // *Nature*. - 1988. - Vol. 335. - P. 238-240.
67. Grinspen H. Teorija vraschajushijsja zhidkosteju. Per. s angl. - Leningrad: Gidrometeoizdat, 1975. - 304s.
68. Kolesnichenko A.V., Marov M.Ja. Turbulentnost' i samoorganizatsija. Problemy modelirovanija kosmicheskikh I prirodnykh sred. - M.: BINOM, 2009. - 632s.
69. Lahin V.P. Neustojchivosti i volny vo vraschajuschesja plazme i turbulentnaja generatsija reguljarnykh struktur. Diss. na soisk. utch. stepeni dokt. fiz.-mat. nauk. - Moskva, 2013. - 257 s.
70. Pedloski Dj. Geofizicheskaja gidrodinamika v 2-h t. Per. s angl. - M.: Mir, 1984.
71. Sommeria J., Meyers S.P., Swinney H.L. Laboratory simulation of Jupiters Great Red Spot // *Nature (London)*. - 1988. - Vol.331. - P.689-693.
72. Kopp M., Tur A., Yanovsky V. The Large Scale Instability in Rotating Fluid with Small Scale Force // *Open Journal of Fluid Dynamics*.- 2015.- Vol. 5.- P. 128-138.
73. Bronsteyn I.N., Semendjaev K.A. Spravotchnik po matematike dlja inzhenerov i utchatshijsja vtuzov. - M.: Nauka, 1981. - 718s.