Збірник праць Інституту математики НАН України 2014, т. 11, № 5, 221–230

УДК 531.36;531.011

С.П. Сосницький

Ін-т математики НАН України, Київ
E-mail address: sosn@imath.kiev.ua

Про стійкість руху за Лагранжем в обмеженій задачі трьох тіл *

We explore the Lagrange stability in the circular restricted three-body problem (for mass points). In case of the planar three-body problem we prove a theorem on the Lagrange stability of the infinitesimally small particle.

Досліджується стійкість за Лагранжем у круговій обмеженій задачі трьох тіл (матеріальних точок). У випадку плоскої задачі трьох тіл доводиться теорема про стійкість за Лагранжем нескінченно малої частки.

1. Вступ. Розглянемо обмежену задачу трьох тіл, коли, як відомо [1, 2], маса m_3 третього тіла настільки мала порівняно з масами двох інших тіл ($m_1 \geq m_2 \gg m_3$), що її впливом на рух тіл з масами m_1 і m_2 можна знехтувати. В подальшому зупинимось на круговій обмеженій задачі, коли існує інтеграл Якобі. У цьому випадку Хілл показав, що якщо стала рівня $\tilde{h}$ інтеграла Якобі від'ємна і $|\tilde{h}|$ перевищує деяку критичну величину $h^* > 0$, то область можливих рухів малої частки можна зобразити як об'єднання двох областей: області ω_H обмежених рухів за координатами (області Хілла) і області ω_{nc} рухів без зіткнень, тобто $\omega = \omega_H \bigcup \omega_{nc}$, причому $\omega_H \bigcap \omega_{nc} = \emptyset$. У зв'язку з визначенням областей Хілла див. також [3].

На жаль, рухи, які належать області ω_H і які в подальшому називатимемо стійкими за Хіллом, можуть супроводжуватися зіткненнями (переважно небажаними) матеріальних точок і, таким чином,

* Робота виконана при частковій підтримці НДР № 0112U001015

можуть бути необмеженими за швидкостями. У цьому зв'язку актуальним є питання про обмеженість рухів за координатами в області ω_{nc}, де немає зіткнень і рух відповідає умові дистальності [4]. Це особливо цікаво у зв'язку з роботою автора [5], де досліджується загальний випадок задачі трьох тіл і проглядається зв'язок між дистальністю руху і його обмеженістю. Як ми покажемо нижче, дійсно, при $\tilde{h} < 0$, коли значення $|\tilde{h}|$ достатньо велике і як наслідок $\omega_{nc} \neq \emptyset$, дистальні рухи, що належать області ω_{nc}, при додатковій умові, що кругова задача є плоскою, стійкі за Лагранжем.

Розглядаючи в подальшому лише випадок кругової обмеженої задачі трьох тіл, тобто вважаючи, що вектори $\mathbf{r}_1$ і $\mathbf{r}_2$, як розв'язки задачі двох тіл, відповідають круговим орбітам точок з масами m_1, m_2 і переходячи до відносних довжин векторів [6]:

$$\boldsymbol{\rho}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_{12}|}, \tag{1.1}$$

де $|\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_{12}|_0 = \mathrm{const}$, приходимо до рівнянь руху у формі:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Тут $\boldsymbol{\rho}_{ij} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i$ $(i, j = 1, 2, 3)$, штрих означає диференціювання за безрозмірним часом

$$\tau = \frac{\sqrt{G(m_1 + m_2)}}{{|\mathbf{r}_{12}|_0}^{3/2}} t,$$

де $G > 0$ – гравітаційна стала, а

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad 0 < \mu \leq \frac{1}{2}.$$

Скористаємося далі системою координат, що обертається з одиничною кутовою швидкістю навколо осі, перпендикулярної до площини обертання двох масивних тіл m_1 і m_2. Тоді друге векторне рівняння системи (1.2) набуває вигляду [1]:

$$x'' - 2y' = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$y'' + 2x' = \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{1.3}$$

$$z'' = \frac{\partial U}{\partial z},$$

де

$$U = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \frac{\mu}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|}, \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\rho}_{13}^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2, \quad \boldsymbol{\rho}_{23}^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2, \tag{1.5}$$

$$(x, y, z)^T = \mathbf{r}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}, z)^T = \boldsymbol{\rho}_3 \quad \mathbf{r}^2 = \boldsymbol{\rho}_3^2, \tag{1.6}$$

причому (x, y, z) – координати малої частки відносно системи координат, що обертається, а $(\tilde{x}, \tilde{y}, z)$ – її координати відносно інерційної системи координат. Для системи (1.3) існує інтеграл Якобі

$$2T - 2U = 2h, \quad 2T = {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2, \qquad h = \text{const}. \tag{1.7}$$

Поряд з рівняннями руху у формі (1.3) будемо також використовувати отримані в роботі [6] рівняння відстаней:

$$\rho_{13}^2{}'' = 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} +$$

$$+\mu\left[\frac{2}{\rho_{13}} + (\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2 - 1) + \frac{1}{\rho_{23}}\left(\frac{1-\rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1\right)\right],$$

$$\rho_{23}^2{}'' = 2E_{23} + \frac{2}{\rho_{23}} +$$

$$+(1-\mu)\left[\frac{2}{\rho_{23}} + (\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 - 1) + \frac{1}{\rho_{13}}\left(\frac{1-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2} - 1\right)\right],$$

$$
\begin{aligned}
E'_{13} &= -\mu \left[(\rho_{13}^2)' \left(1 - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) - (\rho_{23}^2)' \left(1 - \frac{1}{\rho_{23}^3} \right) + \right. \\
&\left. +2y \left(1 - \frac{1}{\rho_{23}^3} \right) \right], \\
E'_{23} &= (1-\mu) \left[(\rho_{13}^2)' \left(1 - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) - (\rho_{23}^2)' \left(1 - \frac{1}{\rho_{23}^3} \right) + \right. \\
&\left. +2y \left(1 - \frac{1}{\rho_{13}^3} \right) \right],
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

$$
2y' = E_{23} - E_{13} + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2 + \frac{2}{\rho_{23}} - \frac{2}{\rho_{13}},
$$

де

$$
E_{13} = v_{13}^2 - \frac{2}{\rho_{13}}, \ \ E_{23} = v_{23}^2 - \frac{2}{\rho_{23}}, \ v_{13} = \boldsymbol{\rho}'_{13}, \ v_{23} = \boldsymbol{\rho}'_{23}. \tag{1.9}
$$

Тут, як і в рівняннях (1.2), (1.3), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом τ. Система рівнянь (1.8) є системою з надлишковими координатами [6]. Хоч далі використовуватимемо не всі її рівняння, однак вважаємо за потрібне подати цю систему у повному вигляді.

Характерною ознакою системи рівнянь (1.8) є те, що вона, на відміну від системи (1.3), віднесена до інерційної системи відліку з початком в центрі мас двох масивних тіл.

2. Про властивості руху в обмеженій круговій задачі трьох тіл. Встановимо деякі корисні співвідношення, які будуть нам потрібні при дослідженні руху в області ω_{nc}. Ці співвідношення характеризують зв'язок між векторами, пов'язаними з малою часткою в інерційній системі відліку, і координатами малої частки відносно системи координат, яка обертається.

Твердження 1. *У випадку обмеженої кругової задачі трьох тіл справедлива рівність*

$$
\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} - \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = -x' - 2\boldsymbol{\rho}'_3\boldsymbol{\rho}_{12}. \tag{2.1}
$$

Доведення. Розглянемо спочатку кожен з виразів $\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13}$ і $\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23}$ окремо. Зауважуючи, що

$$\boldsymbol{\rho}_{12} + \boldsymbol{\rho}_{23} - \boldsymbol{\rho}_{13} = \mathbf{0}, \tag{2.2}$$

для першого з них маємо

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = (\boldsymbol{\rho}_{13} - \boldsymbol{\rho}_{12})\boldsymbol{\rho}'_{13} == \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{13} - \boldsymbol{\rho}_{12}(\boldsymbol{\rho}'_3 - \boldsymbol{\rho}'_1). \tag{2.3}$$

Оскільки

$$\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_1 = -\mu\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_{12} = -\frac{\mu}{2}(\boldsymbol{\rho}^2_{12})' = 0,$$

то рівність (2.3) можемо переписати у вигляді

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}^2_{13})' - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_3. \tag{2.4}$$

Аналогічно отримуємо

$$\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}^2_{23})' + \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_3. \tag{2.5}$$

Віднімаючи тепер від рівності (2.4) рівність (2.5), маємо

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}'_{13} - \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}'_{23} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}^2_{13} - \boldsymbol{\rho}^2_{23})' - 2\boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_3, \tag{2.6}$$

а оскільки згідно з [6] виконується рівність

$$x = \frac{\boldsymbol{\rho}^2_{23} - \boldsymbol{\rho}^2_{13} - 1 + 2\mu}{2}, \tag{2.7}$$

то на підставі (2.6) і (2.7) робимо висновок про справедливість твердження 1. □

Твердження 2. *У випадку обмеженої кругової задачі трьох тіл справедливі рівності*

$$x' = y - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_3, \tag{2.8}$$

$$y' = -x - \boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3. \tag{2.9}$$

Доведення. Згідно з лемою 1 з работи [6] маємо

$$2\boldsymbol{\rho}_{23}{\boldsymbol{\rho}_{13}}' = (\boldsymbol{\rho}^2_{23})' - 2y. \tag{2.10}$$

Також відповідно до [6] справедлива рівність

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}{}' + \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23}{}' = (\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23})' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \boldsymbol{\rho}_{23}^2)'. \tag{2.11}$$

Віднімемо від рівності (2.10) рівність (2.11). В підсумку, враховуючи (2.7), приходимо до рівності

$$\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}' - \boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23}' = x' - 2y. \tag{2.12}$$

Якщо відняти тепер від рівності (2.12) рівність (2.1), то отримаємо (2.8).

Перепишемо останнє рівняння системи (1.8) у вигляді

$$y' = \frac{1}{2}(v_{23}^2 - v_{13}^2) + \frac{1}{2}(\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2). \tag{2.13}$$

Беручи до уваги, що

$$v_{23}^2 - v_{13}^2 = (\boldsymbol{\rho}_3' - \boldsymbol{\rho}_2')^2 - (\boldsymbol{\rho}_3' - \boldsymbol{\rho}_1')^2 = -2\boldsymbol{\rho}_{12}'\boldsymbol{\rho}_3' + \boldsymbol{\rho}_2'^2 - \boldsymbol{\rho}_1'^2, \tag{2.14}$$

а

$$\boldsymbol{\rho}_2'^2 - \boldsymbol{\rho}_1'^2 = 1 - 2\mu,$$

з врахуванням (2.7) на підставі (2.13) робимо висновок про справедливість рівності (2.9). Твердження 2 доведено. □

Твердження 3. *У випадку обмеженої кругової задачі трьох тіл зразу обидві координати x і y є обмеженими або необмеженими.*

Доведення. Припустимо супротивне, що, наприклад, координата x обмежена, а координата y – ні. Тоді, оскільки y – необмежена, існує така послідовність $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty \tag{2.15}$$

і виконується принаймні одна з рівностей:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, y(\tau_k) = +\infty, \tag{2.16}$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, y(\tau_k) = -\infty. \tag{2.17}$$

Без обмеження загальності розгляду надалі вважатимемо, що виконується рівність (2.16). Поставимо у відповідність кожній точці τ_k

послідовності $\{\tau_k\}$ сегмент $\tau_k^{1,2} = [\tau_{k1}, \tau_{k2}]$, який задовольняє такі вимоги: 1)$\tau_{k2} - \tau_{k1} = \delta$, де δ - достатньо мале фіксоване число; 2)сегмент $\tau_k^{1,2}$ містить точку τ_k.

Згідно зі структурою системи (1.3) її розв'язки є неперервними на $\tau_k^{1,2}$ і диференційованими на (τ_{k1}, τ_{k2}), отже до них можна застосувати теорему про середнє [7]. У відповідності з останньою маємо рівність

$$x(\tau_{k2}) - x(\tau_{k1}) = (\tau_{k2} - \tau_{k1})x'(\tau_k^*) = \delta x'(\tau_k^*), \quad \tau_k^* \in (\tau_{k1}, \tau_{k2}), \tag{2.18}$$

яку, враховуючи рівність (2.8), можемо переписати у вигляді

$$x(\tau_{k2}) - x(\tau_{k1}) = \delta \left[y(\tau_k^*) - \boldsymbol{\rho}_{12}(\tau_k^*)\boldsymbol{\rho}_3'(\tau_k^*) \right]. \tag{2.19}$$

Другий доданок у квадратних дужках правої частини рівності (2.19) є обмеженим, а перший доданок згідно з рівністю (2.16) і тим фактом, що сегмент $\tau_k^{1,2}$ є достатньо малим околом точки τ_k, прямує до нескінченності при $k \to \infty$. Оскільки ліва частина рівності (2.19) є обмеженою незалежно від значення τ, то приходимо до суперечності, звідки випливає справедливість твердження 3. □

3. Теорема про стійкість руху за Лагранжем. Як вже зазначалося у вступі, далі нас цікавитиме характер руху малої частки в області ω_{nc}. Для безпосереднього дослідження цього руху скористаємось першими двома рівняннями системи (1.8). Для цього, беручи до уваги рівність (2.7), перепишемо їх у вигляді

$$\begin{aligned} {\rho_{13}^2}'' &= 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu \left[\frac{2}{\rho_{13}} + 2x - \mu + \frac{1}{\rho_{23}} \left(\frac{1-\rho_{13}^2}{\rho_{23}^2} - 1 \right) \right], \\ {\rho_{23}^2}'' &= 2E_{23} + \frac{2}{\rho_{23}} + \\ &+ (1-\mu) \left[\frac{2}{\rho_{23}} - 2x - 2 + \mu + \frac{1}{\rho_{13}} \left(\frac{1-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Зауважимо, що система (3.1), як складова частина системи (1.8), пов'язана з інерційною системою відліку, у якій швидкість малої частки в області ω_{nc} є обмеженою.

Теорема. *У випадку плоскої кругової задачі трьох тіл рух $\boldsymbol{\rho}_3(\tau)$ малої частки, що належить області ω_{nc}, є стійким за Лагранжем.*

Доведення. Припустимо, що при виконанні умов теореми досліджуваний рух $\boldsymbol{\rho}_3(\tau)$ є нестійким за Лагранжем. Тоді існує така послідовність $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_3(\tau_k) = \infty, \quad \rho_3(\tau_k) = |\boldsymbol{\rho}_3(\tau_k)| \tag{3.2}$$

і як наслідок

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{13}(\tau_k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_{23}(\tau_k) = \infty. \tag{3.3}$$

Оскільки виконується рівність (3.2), а обмежена кругова задача є плоскою, то з врахуванням твердження 3 має місце принаймні одна з рівностей

$$\lim_{k\to\infty} x(\tau_k) = +\infty, \tag{3.4}$$

$$\lim_{k\to\infty} x(\tau_k) = -\infty. \tag{3.5}$$

Без обмеження загальності розгляду вважатимемо, що виконується рівність (3.4).

Згідно з умовою теореми, оскільки розглядуваний рух в області ω_{nc} є дистальним, швидкість малої частки в ω_{nc} є обмеженою. Тоді на підставі рівності (3.4) можемо стверджувати, що існує такий достатньо великий номер s, що при $k \geq s$ виконується нерівність

$$\rho_{23}^{2}{}'' \,|_{\tau\in\{\tau_k\}} \leq -\delta, \quad \forall k \geq s, \quad 0 < \delta = \text{const}. \tag{3.6}$$

В свою чергу обмеженість швидкості малої частки тягне за собою існування послідовності проміжків часу τ зростаючої довжини

$$\{T_j\} = [\tau_{s+j} - \tau_{n_j}], \ \tau_{s+j} \in \{\tau_k\}, \ j = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\tau_{n_j} < \tau_{s+j}, \quad n_1 < n_2 < n_3 \dots, \tag{3.7}$$

на яких виконується нерівність

$$\rho_{23}^{2}{}'' \leq -\delta, \quad \forall \tau \in \{T_j\}. \tag{3.8}$$

Зауважимо, що в основі існування послідовності проміжків часу $\{T_j\}$ лежить дуже проста ідея: чим більшою є відстань, тим і більшим є час, необхідний, щоб пройти цю відстань малою часткою, оскільки її швидкість обмежена.

Таким чином, обмеженість швидкості малої частки в області ω_{nc} дозволяє нам від нерівності (3.6), справедливої для послідовності точок, перейти до нерівності (3.8), що має місце для послідовності відрізків, довжина яких зростає.

Інтегруючи (3.8), отримуємо нерівність

$$\rho_{23}^{2}{}' \,|_{\tau_1}^{\tau} \leq -\delta(\tau-\tau_1), \quad \tau > \tau_1, \quad [\tau_1, \tau] \subseteq \{T_j\}, \tag{3.9}$$

яку в подальшому переписуємо у вигляді

$$\rho_{23}^{2}{}' \,|^{\tau} \leq \rho_{23}^{2}{}' \,|_{\tau_1} - \delta(\tau-\tau_1). \tag{3.10}$$

Інтегруючи нерівність (3.10), одержуємо

$$\rho_{23}^{2} \,|_{\tau_1}^{\tau} \leq \rho_{23}^{2}{}' \,|_{\tau_1} (\tau-\tau_1) - \frac{\delta}{2}(\tau-\tau_1)^2. \tag{3.11}$$

Покладемо в нерівності (3.11) $\tau_1 = \tau_{n_j}$, $\tau = \tau_{s+j}$ і перепишемо її у вигляді

$$\rho_{23}^{2} \,|_{\tau=\tau_{s+j}} - \rho_{23}^{2} \,|_{\tau=\tau_{n_j}} \leq$$
$$\leq (\tau_{s+j} - \tau_{n_j}) \left\{ \rho_{23}^{2}{}' \,|_{\tau=\tau_{n_j}} - \frac{\delta}{2}(\tau_{s+j} - \tau_{n_j}) \right\}. \tag{3.12}$$

Доданки

$$\rho_{23}^{2} \,|_{\tau=\tau_{n_j}}, \quad \rho_{23}^{2}{}' \,|_{\tau=\tau_{n_j}} \tag{3.13}$$

в нерівності (3.12) відповідають таким обмеженим моментам часу $\tau = \tau_{n_j}$, що величини $\rho_{13}(\tau_{n_j})$ і $\rho_{23}(\tau_{n_j})$ досягають в них критичного значення, при якому

$$\rho_{23}^{2}{}'' \,|_{\tau=\tau_{n_j}} \leq -\delta.$$

Отже вибір величин (3.13) у нерівності (3.12) завжди можна здійснити таким чином, щоб вони були обмеженими.

Довжина проміжка $[\tau_{s+j} - \tau_{n_j}]$ при $j \to \infty$ відповідно до (3.2) і визначенням моментів часу τ_{n_j} прямує до нескінченності. Таким чином, права частина нерівності (3.12) прямує до мінус нескінченності. Навпаки, згідно з рівністю (3.3) ліва частина нерівності (3.12) при $j \to \infty$ прямує до плюс нескінченності. Приходимо до суперечності, яка дозволяє зробити висновок про справедливість теореми. □

Зауважимо, що запропонований вище підхід можна застосувати і для просторової обмеженої задачі трьох тіл, однак у цьому випадку на його підставі можемо лише говорити про обмеженість руху малої частки в області ω_{nc} тільки відносно координат x і y.

Література

[1] *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1982. – 656 с.

[2] *Рой А.Е.* Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.

[3] *Сосницький С. П.* Про стійкість руху за Хіллом у задачі трьох тіл // *Укр. мат. журн.* – 2008. – **60**, № 10. – С. 1434–1440.

[4] *Сосницький С. П.* Про стійкість руху за Лагранжем у задачі трьох тіл // *Укр. мат. журн.* – 2005. – **57**, № 8. – С. 1137–1143.

[5] *Sosnitskii S. P.* On the Lagrange stability of motion and final evolutions in the three-body problem//*Applied Mathematics.* – 2013, 4, doi:10.4236/am.2013.42057, P. 369-377.

[6] *Sosnitskii S. P.* On the stability of triangular Lagrangian points in the restricted three-body problem// *Astron. J.* – 2008. – **135**, N. 1. – P. 187-195.

[7] *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 319 с.