ISSN 2304-1579.Вiсник Од. нац. ун-ту. Мат. i мех.–2013 .–Т.18, вип. 3(19).–С. 35–41

Mathematical Subject Classification: 34C29, 34A60, 34A12
УДК 517.928.7

И. В. Молчанюк
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

НЕЧЕТКИЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Молчанюк I. В. Нечiтки керованi лiнiйнi диференцiальнi включення з термiнальним крiтерiєм якостi. У данiй статтi розглядається задача оптимального керування нечiткими R-розв'язками з термiнальним критерiєм якостi, коли поведiнка системи описана керованим нечiтким лiнiйним диференцiальним включенням.
Ключовi слова: нечiткi диференцiальнi включення, управлiння, оптимальнiсть.

Молчанюк И. В. Нечеткие управляемые линейные дифференциальные включения с терминальным критерием качества. В данной статье рассматривается задача оптимального управления нечеткими R-решениями с терминальным критерием качества, когда поведение системы описывается управляемым нечетким линейным дифференциальным включением.
Ключевые слова: нечеткие дифференциальные включения, управление, оптимальность.

Molchanyuk I. V. Linear fuzzy control differential inclusions with the terminal quality criterion. In this paper we consider the problem of optimal control fuzzy R-solution with terminal quality criterion, when the behavior of the system is described manageable fuzzy linear differential inclusion.
Key words: fuzzy differential inclusion, control, optimal.

Введение. В XX веке появились работы по дифференциальным уравнениям с многозначной правой частью A. Marchaud [11] — [14] и S. K. Zaremba [15], [16], в которых авторы попытались обобщить существовавшие в то время результаты по теории дифференциальных уравнений. Толчком для их детального исследования послужили работы T. Wazewski и А. Ф. Филиппова 60-х годов, в которых показана связь с задачами оптимального управления. В дальнейшем данная теория не только стала бурно развиваться (В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, J.-P. Aubin, A. Cellina, C. Olech, H. Hermes, N. Kikuchi), но и широко использоваться при исследовании систем управления (В. И. Благодатских, Н. Н. Красовский, Б. Н. Пшеничный, В. А. Плотников, J.-P. Aubin, N. Kikuchi).

В работе [3] представлены R-решения для дифференциального включения как абсолютно-непрерывные многозначные отображения. Различные проблемы для теории R-решений были рассмотрены в [1], [4]. Основная идея для разработки уравнения для R-решений (интегральные трубы) содержится в [5].

В последние годы теория нечетких множеств, представленная Заде [17], стала интересным и увлекательным разделом фундаментальных и прикладных наук. С начала 90-х годов XX века в теории нечетких множеств начали развиваться теория нечетких дифференциальных уравнений (А. А. Мартынюк, А. В. Плотников, В. И. Слынько, O. Kaleva, S. Seikkala, V. Lakshmikantham, H. K. Han,

J. Y. Park), теория дифференциальных включений с нечеткой правой частью (В. А. Байдосов, А. В. Плотников, J.-P. Aubin, V. Lakshmikantham, E. Hullermeier), а также нечетких дифференциальных включений и нечетких систем управления (P. Diamond, P. Kloeden, N. D. Phu, T. T. Tung, А. В. Плотников, Н. В. Скрипник).

В статье введено понятие $0-$максимаксности и $0-$максиминности для нечеткого управляемого линейного дифференциального включения с нечетким критерием качества.

Пусть $conv(R^n)$ — пространство непустых выпуклых компактных подмножеств R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(F,G) = \max\{\sup_{f\in F}\inf_{g\in G}||f-g||, \sup_{g\in G}\inf_{f\in F}||f-g||\},$$

где под $||\cdot||$ понимается евклидова норма в пространстве R^n.

Введем в рассмотрение пространство E^n отображений $x : R^n \to [0,1]$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) x полунепрерывно сверху, то есть для любых $y' \in R^n$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta(y',\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\|y-y'\| < \delta$ выполняется условие $x(y) < x(y')+\varepsilon$;

2) x нормально, то есть существует $y_0 \in R^n$ такой, что $x(y_0) = 1$;

3) x нечетко выпукло, то есть для любых $y', y'' \in R^n$ и любого $\lambda \in [0,1]$ справедливо неравенство $x(\lambda y' + (1-\lambda)y'') \geq \min\{x(y'), x(y'')\}$;

4) замыкание множества $\{y \in R^n \; : \; x(y) > 0\}$ компактно.

Нулем в пространстве E^n является отображение

$$\hat{0}(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \in R^n \backslash 0 \end{cases}.$$

Определение 1. *α-срезкой $[x]^\alpha$ отображения $x \in E^n$ при $0 < \alpha \leq 1$ назовем множество $\{y \in R^n : x(y) \geq \alpha\}$. Нулевой срезкой отображения $x \in E^n$ назовем замыкание множества $\{y \in R^n : x(y) > 0\}$.*

Теорема 1. *[2] Если $x \in E^n$, то*

1) $[x]^\alpha \in conv(R^n)$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$;

2) $[x]^{\alpha_2} \subset [x]^{\alpha_1}$ для всех $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$;

3) если $\{\alpha_k\} \subset [0,1] -$ неубывающая последовательность, сходящаяся к $\alpha > 0$, то $[x]^\alpha = \bigcap\limits_{k\geq 1}[x]^{\alpha_k}$.

Наоборот, если $\{A^\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$ — семейство подмножеств R^n, удовлетворяющих условиям 1) - 3), то существует отображение $x \in E^n$ такое, что $[x]^\alpha = A^\alpha$ для $0 < \alpha \leq 1$ и $[x]^0 = \overline{\bigcup\limits_{0<\alpha\leq 1} A^\alpha}$.

Определим в пространстве E^n метрику $D : E^n \times E^n \to [0, +\infty)$, полагая

$$D(x,z) = \sup_{0\leq\alpha\leq 1} h([x]^\alpha, [z]^\alpha).$$

Из [9] имеем, что

1) (E^n, D) является полулинейным полным метрическим пространством;

2) $D(u+w, v+w) = D(u,v), \quad D(ku,kv) = kD(u,v)$ для всех $u,v,w \in E^n$ и $k \geq 0$.

Основные результаты. Пусть движение объекта управления описывается нечеткой системой дифференциальных включений вида:

$$\dot{x} \in A(t)x + f(t,u), \; x(0) \in X_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; $t \in I = [0,T]$ – время; $u(t) \in U \in conv(R^k)$ – вектор управления; $f : I \times R^k \to E^n$ – нечеткие отображения; $X_0 \in E^n$.

Определение 2. *Суммируемую на отрезке I функцию $u(\cdot)$ такую, что $u(t) \in U$ для всех $t \in I$, будем называть допустимым управлением.*

Множество всех допустимых управлений обозначим через $\Theta(I)$.

Предположение 1.
1) $A(\cdot)$ — измерима на $[0,T]$;
2) норма $\|A(t)\|$ матрицы $A(t)$ интегрируема на $[0,T]$;
3) нечеткое отображение $f : [t_0,T] \times R^m \to E^n$ удовлетворяет условиям:
а) измеримо по t; б) непрерывно по u;
4) существует $l(\cdot) \in L_2[0,T]$ такая, что $D(f(t,u),0) \le l(t)$ для почти всех $t \in [t_0,T]$;
5) существует множество $Q(t) = \{f(t,u(t)) : u(\cdot) \in \Theta\}$ компактно в пространстве E^n.

Теорема 2. *[6] При выполнении условий Предположения* **??** *для любого допустимого управления $u(\cdot) \in \Theta$ нечеткое R-решение $X(\cdot,u)$ системы (1) удовлетворяет условиям:*
1) для всех $t > 0$ нечеткое R-решение $X(\cdot,u)$ представимо в виде:

$$X(t,u) = \Phi(t)x_0 + \Phi(t)\int\limits_0^t \Phi^{-1}(s)f(s,u(s))ds \tag{2}$$

где $\Phi(t)$ — матрица Коши дифференциального уравнения $\dot{x} = A(t)x$;
2) $X(t,u) \in E^n$ для всех $t \in [0,T]$;
3) при каждом допустимом управлении $u(\cdot)$ нечеткое отображение $X(\cdot,u)$ является абсолютно непрерывным нечетким отображением на $[0,T]$.

Теорема 3. *[6] При выполнении условий Предположения 1 множество достижимости системы (1) $Y(T)$ является выпуклым и компактным множеством в пространстве E^n.*

Рассмотрим задачу оптимального управления с нечетким критерием качества (нечеткую задачу Майера)

$$J(u) = \Phi(X(T,u)), \tag{3}$$

где $\Phi : E^n \to E^1$ такая, что $[\Phi(X)]^\alpha = [\varphi^\alpha_{min}, \varphi^\alpha_{max}]$ для всех $\alpha \in [0,1]$,
где $\varphi^\alpha_{min} = \min\limits_{\varsigma \in [\Phi]^\alpha} (\varsigma, c)$, $\varphi^\alpha_{max} = \max\limits_{\varsigma \in [\Phi]^\alpha} (\varsigma, c)$, $c \in R^n$ - постоянная,
$X(\cdot,u)$ – нечеткое R-решение нечеткого дифференциального включения (1)[10], соответствующее допустимому управлению $u(\cdot) \in \Theta(I)$,
$(\varsigma, c) = \varsigma_1 c_1 + ... + \varsigma_n c_n$.

Определение 3. *Управление $u_* \in \Theta(I)$ назовем 0-максиминным (0-макси-максным) для задачи (1),(3), если для любого управления $u \in \Theta(I)$ справедливо неравенство:*

$$m[J(u)]^0 \leq m[J(u_*)]^0, \quad (M[J(u)]^0 \leq M[J(u^*)]^0), \tag{4}$$

где $mA = min\{a: \ a \in A, \ A \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^1)\}, \ MA = max\{a: \ a \in A, \ A \in \mathrm{conv}(\mathrm{R}^1)\}$.

Теорема 4. *Пусть система (1), (3) удовлетворяет условиям Предположения 1. Управление $u_* \in \Theta$ являеться 0-максиминным для задачи (1), (3) тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство:*

$$C([f(t,u_*(t))]^0, -\psi(t)) = \min_{u \in U}([f(t,u)]^0, -\psi(t)), \tag{5}$$

где $\psi(t)$ решение системы

$$\dot{\Psi}(t) = -A^T(t)\psi(t), \psi(0) = c. \tag{6}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$s(u) = -C([X(T,u)]^0, -c), S(u) = C(X(T,u)]^0, c),$$

тогда легко видно, что $[J(u)]^0 = [s(u), S(u)]$.

Предположим, что $u_*(\cdot)$ является 0-максиминным управлением, переводящим объект из точки $x_0 \in X_0$ в $X(T,u_*) \in Y(T)$ согласно нечеткому отображению (2), а допустимое управление $\tilde{u}(\cdot) \in \Theta(I)$ такое, что почти для всех $t \in [0,T]$

$$C([f(t,\tilde{u}(t))]^0, -\psi(t)) = \min_{u \in U} C([f(t,u)]^0, -\psi(t)).$$

Тогда для $X(\tilde{u})$ в момент времени T будем иметь:

$$s(u) = -C(\Phi(T)[x_0]^0 + \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(s)[f(T,\tilde{u}(s)]^0 ds, -c).$$

Обозначим через $\overline{\psi} = \Phi(T)\Phi^{-1}(t)e$, которое является решением уравнения (6). Тогда

$$s(u) = -C(\int_0^T ([f(s,\tilde{u}(s))]^0, -\overline{\psi}(s))ds) - C(\Phi(T)[X_0]^0, -c).$$

Поскольку для всех $s \in [0,T]$

$$C([f(s,\tilde{u}(s))]^0, -\overline{\psi}(s)) < C([f(t,u_*(s))]^0, -\overline{\psi}(s)),$$

то $s(\tilde{u}) > s(u_*)$, т.е. получаем противоречие. Следовательно, u_* удовлетворяет условию (5). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть управление $u_*(\cdot) \in \Theta(I)$ удовлетворяет условию (5) почти для всех $t \in [0,T]$. Требуется доказать, что $u_*(\cdot)$ 0-максиминное.

Предположим, что существует такое управление, что $s(\tilde{u}) > s(u_*)$. Согласно предположению

$$C(f(t,\tilde{u}(t)),-\psi(t)) \geq C(f(t,u_*(t)),-\psi(t)) = \min_{u\in U} C(f(t,u),-\psi(t))$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Так как

$$s(u_*) = -C(\Phi(T)[x_0]^0,-c) - C(\int\limits_0^T \Phi(s)\Phi^{-1}(s)[f(s,u_*(s))]^0 ds,-c),$$

$$s(\tilde{u}) = C(\Phi(T)[x_0]^0,-c) - C(\int\limits_0^T \Phi(s)\Phi^{-1}(s)[f(s,\tilde{u}(s))]^0 ds,-c),$$

то $s(u_*) \leq s(\tilde{u})$, приходим к противоречию с $s(\tilde{u}) > s(u_*)$.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть система (1), (3) удовлетворяет условиям Предположения 1. Управление $u_* \in \Theta(I)$ является 0-максимаксным для задачи (1), (3) тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in [0,T]$ имеет место равенство:*

$$C([f(t,u_*(t))]^0,-\psi(t)) = \max_{u\in U}([f(t,u)]^0,-\psi(t)), \tag{7}$$

где $\psi(t)$ решение системы (6).

Доказательство. Так как 0-максимаксное управление для задачи (1), (3) очевидно эквивалентно оптимальному управлению для задачи (1) со следующим критерием качества

$$J(u) = C([X(T,u)]^0, C).$$

Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в предыдущей теореме 4.

Определение 4. *Управление $u_*(\cdot) \in \Theta(I)$ назовем ρ-оптимальным в задаче (1), (3), если управление $u_*(\cdot)$ является 0-максимаксным и 0-максиминным одновременно.*

Теорема 6. *Пусть система (1), где $f(t,u)$ имеет вид $B(t)u + f(t)$, удовлетворяет условиям:*
1) $A(\cdot)$ — измерима на $[0,T]$;
2) норма $\|A(t)\|$ матрицы $A(t)$ интегрируема на $[0,T]$;
3) $B(\cdot)$ — измерима на $[0,T]$;
4) норма $\|B(t)\|$ матрицы $B(t)$ интегрируема на $[0,T]$;
5) нечеткое отображение $f : [t_0,T] \times R^m \to E^n$ измеримо по t;
6) существует $l(\cdot) \in L_2[0,T]$ такая, что $D(f(t,u),0) \leq l(t)$ для почти всех $t \in [t_0,T]$.

Управление $u_*(\cdot) \in \Theta$ является оптимальным для задачи тогда и только тогда, когда для почти всех t имеет место равенство:

$$(B(t)u_*(t), \psi(t)) = \max_{u \in U}(B(t)u), \psi(t)),$$

где $\psi(\cdot)$ решение системы (6).

Доказательство. В начале докажем справедливость следующего свойства - критерия качества: для любых двух управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ из Θ справедливо следующее равенство:

$$|S(u_1) - s(u_1)| = |S(u_2) - s(u_2)|. \tag{8}$$

Из теоремы 2 получим, что для любых двух управлений $u_1(\cdot), u_2(\cdot)$ из Θ существует такой вектор $z(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$ из R^n, что

$$[X(T, u_1)]^0 = [X(T, u_2)]^0 + z(u_1(\cdot), u_2(\cdot)). \tag{9}$$

Из полученного равенства (9) и вида функционала (3) получим (8). Воспользовавшись теоремой 4, равенством (8), получим справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Заключение. В статье рассматривалась задача оптимального управления нечеткими R-решениями с терминальным критерием качества. Введено понятие 0-максимаксности и 0-максиминности. Аналогично можно ввести понятие α-максимаксности и α-максиминности и получить аналогичные результаты для $\alpha \in (0, 1]$.

1. **Плотников В. А.** Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк. – Одесса: Астропринт, 1999. – 354 с.

2. **Negoita C. V.** Application of fuzzy sets to systems analysis. / C. V. Negoita, D. A. Ralescu – New York, Wiley, 1975.

3. **Панасюк А. И.** Квазидифференциальные уравнения в метрических пространствах / А. И. Панасюк // Дифференциальные уравнения. – 1985. – Ч. 21, № 8. – С. 1344–1353.

4. **Панасюк А. И.** Асимптотическая магистральная оптимизация / А. И. Панасюк, В. И. Панасюк // Наука и техника. – Минск. – 1982. – 295 с.

5. **Толстоногов А. А.** Об уравнении интегральной воронки дифференциального включения / А. А. Толстоногов // Математические заметки. – 1982. – Ч.32, №6. – С. 841–910.

6. **Plotnikov A. V.** Linear control problems of the fuzzy maps / A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk // J. Software Engineering & Applications (Scientific Research Publishing, Inc., USA), 2010. – V.3, №3. – P. 191–197.

7. **Plotnikov A. V.** Linear control differential inclusions with fuzzy right–hand side and some optimal problems / A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk // Journal Advanced Research in Dynamical and Control Systems (Institute of Advanced Scientific Research, USA), 2011. – V.3, №2. – P. 34–46.
8. **Plotnikov A. V.** The Time–Optimal Problems for Controlled Fuzzy R–Solutions / A. V. Plotnikov, T. A. Komleva, I. V. Molchanyuk // Intelligent Control and Automation (Scientific Research Publishing, Inc., USA), 2011. – V.2, №2. – P. 152–159.
9. **Puri M. L.** Fuzzy random variables / M. L. Puri, D. A. Ralescu // J. Math. Anal. Appl., 1986. – №114. – P. 409 – 422.
10. **Hüllermeier E.** An approach to modelling and simulation of uncertain dynamical system / E. Hüllermeier // Int. J. Uncertain. Fuzziness Knowl.–Based Syst., 1997. – №7. – P. 117–137.
11. **Marchaud A.** Sur les champs de demi–cones et equations differentielles du premier order / A. Marchaud // Bull. Soc. Math. France. – 1934. – № 62. – P. 1–38.
12. **Marchaud A.** Sur les champs continus de demi–cones convexes et leurs integrales / A. Marchaud // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1934. – № 199. – P. 1278–1280.
13. **Marchaud A.** Sur les champs continus de demi–cones convexes et leurs integrales / A. Marchaud // Comput. Math. Ser. – 1936. – № 8. – P. 89–127.
14. **Marchaud A.** Sur les champs de demi–cones convexes / A. Marchaud // Bull. Sci. Math. – 1938. – V.62, № 2. – P. 229–240.
15. **Zaremba S. K.** Sur une extension de la notion d'equation differentielle / S. K. Zaremba // C. P. Acad. Sci. Paris. – 1934. – № 199. – P. 545–548.
16. **Zaremba S. K.** Sur les equations au paratingent / S. K. Zaremba // Bull.Sci. Math. – 1936. – V. 60, № 2. – P. 139–160.
17. **Zadeh L. A.** Fuzzy set / L. A. Zadeh // Inf.Control – 1965. – № 8. – P. 338–353.