УДК 62-50

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара

СИНТЕЗ АДЕКВАТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВЫПЛАВКИ СТАЛИ

Рассмотрена задача синтеза адекватной математической модели физического процесса в алгебраической форме. Показано, что такие модели являются локальными и их существует бесконечное множество. Найдены условия, при которых можно получить адекватную модель. В качестве примера реального физического процесса был выбран процесс выплавки стали. Показано, что классический метод наименьших квадратов не позволяет получать адекватную модель.

Ключевые слова: адекватные математические модели, алгебраическая форма, алгоритм определения параметров, алгебраическая модель выплавки стали.

Ю.Л. МЕНЬШИКОВ
Дніпропетровсткий національний університет ім. О. Гончара

СИНТЕЗ АДЕКВАТНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ВИПЛАВКИ СТАЛІ

Розглянута задача синтезу адекватної математичної моделі фізичного процесу у алгебраїчній формі. Показано, що такі моделі є локальними і їх існує нескінченна множина. Знайдені умови, за яких можливо отримати адекватну модель. У якості прикладу реального фізичного процесу було вибрано процес виплавки сталі. Показано, що класичний метод найменших квадратів не дозволяє отримати адекватну модель.

Ключові слова: адекватні математичні моделі, алгебраїчна форма, алгоритм ідентифікації параметрів, алгебраїчна модель виплавки сталі.

Yu.L. MENSHIKOV
Dnepropetrovsk National University

SYNTHESIS OF ADEQUATE MATHEMATICAL MODEL OF STEEL PRODUCTION

The problem of synthesis of adequate mathematical model of the physical process in algebraic form was considered. It is shown that such models are local and there are an infinite set of them. The conditions in which is possible to obtain an adequate model are investigated. As the example of real physical process the steelmaking process was chosen. It is shown that the classical method of least squares does not allow receiving adequate model.

Keywords: adequate mathematical models, algebraic form, parameters identification algorithm, algebraic model of steelmaking.

Постановка проблемы

Во многих случаях математическая модель физического процесса строится в виде линейных алгебраических соотношений между характеристиками этого процесса. Такого типа модели получили значительное распространение в технике, экологии, экономике и т.д. [1, 2]. Для обоснованного применения линейных математических моделей в алгебраической форме необходимо принимать во внимание, что они могут быть построены при определенных условиях.

Сформулируем общие условия, при которых возможно построение математических моделей в алгебраической форме. Во-первых, физический процесс удовлетворяет условию циклической повторяемости, т.е. от одного цикла к любому другому циклу не изменяется характер процесса (порядок следования операций, последовательность и величина внешних воздействий, граничные условия, время протекания процесса и т.д.). Примерами таких процессов могут быть процесс выпечки хлеба, выплавки стали. В такой ситуации возможно построить некоторое условное отображение исходных параметров процесса в конечные характеристики:

$$\sigma = F(\rho)\,, \tag{1}$$

где $\sigma \in \Sigma \subset R^m$ есть m-мерный вектор итоговых характеристик, $\rho \in \Omega \subset R^n$ есть n-мерный вектор исходных характеристик процесса, $F:\Omega \to \Sigma$ есть некоторое отображение.

Естественно, что выбор исходных параметров и конечных результатов (характеристик) зависит от целей изучения процесса. Согласно условию цикличности структура и параметры отображения остаются неизменными в процессе изучения. Отображение $F:\Omega \to \Sigma$ должно удовлетворять как минимум следующим условиям, имеется ввиду возможность построения в дальнейшем алгебраической модели:

- отображение однозначно;
- отображение инъективно;
- область определения односвязная;
- отображение непрерывно, т.е. малые изменения исходных данных приводят к малым изменениям конечных результатов.

Следует отметить, что в силу погрешности исходных данных затруднительно выполнить проверку этих условий.

Если указанные выше условия выполнены, тогда можно отображение (1) рассматривать как нелинейные алгебраические соотношения

$$\sigma = \Phi(\rho)\,, \tag{2}$$

где $\Phi:\Omega \to \Sigma$ есть некоторая алгебраическая функция. При этом параметры алгебраической математической модели $\Phi:\Omega \to \Sigma$ физического процесса будут постоянными.

Если ограничиться только малыми изменениями характеристик $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)^T, ((.)^T$ – знак транспонирования) в малой окрестности точки $\rho^0 = (\rho_1^0, \rho_2^0, \ldots, \rho_n^0)^T$, тогда любую гладкую функцию $\Phi(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ в уравнении (2) можно приближенно заменить линейной зависимостью:

$$B\rho = \sigma\,, \tag{3}$$

где B есть матрица линейных математических моделей связи вектора ρ с вектором σ размером $n \times m$.

Рассмотрим одну строку в (3):

$$b_{k,1}\,\rho_1 + b_{k,2}\,\rho_2 + \ldots + b_{k,n}\,\rho_n = \sigma_k\,,\quad k = \overline{1,m}\,, \tag{4}$$

где $b_{k,1}, b_{k,2}, \ldots, b_{k,n}$ есть параметры приближенной математической модели связи показателей $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ физического процесса с показателем σ_k.

В работе [3] даны определения адекватности линейных алгебраических математических моделей. Очевидно, что без выполнения условий адекватности любой математической модели дальнейшее ее использование не является обоснованным.

Из особенностей рассматриваемых физических процессов вытекают следующие свойства линейных адекватных алгебраических математических моделей физического процесса [3]:

1. Адекватные линейные алгебраические математические модели при любом выборе параметров модели являются приближенными;
2. Адекватные линейные алгебраические математические модели хорошо описывают реальный физический процесс лишь в некоторой малой окрестности точки ρ^0 изменения переменных (свойство локальности).

При построении адекватных математических моделей желательно, чтобы количество исходных данных для расчетов параметров адекватной алгебраической математической модели было минимальным. Кроме того, для целей дальнейшего использования таких моделей необходимо, чтобы алгоритм синтеза адекватной алгебраической математической модели обеспечивал устойчивые к малым изменениям исходных данных результаты [4].

Изложение основного материала исследования.

Один из возможных алгоритмов синтеза адекватной математической модели предложен в работах [3, 4]. Он базируется на методе идентификации с использованием реальных измерений. При этом предполагается, что количество измерений характеристик процесса минимально и равно количеству этих переменных. В рамках этого алгоритма задача синтеза адекватной линейной математической модели с n переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n$ относительно переменной q_1 с количеством измерений каждой переменной равным n в детерминированной постановке, как задача решения алгебраической системы [3–4] с ограничениями:

$$A_p\,(q_2, q_3, \ldots, q_n)\,z = q_1 = u_1\,, \tag{5}$$

где оператор $A_p\,(q_2, q_3, \ldots, q_n)\,z$ определяется следующим образом

$$A_p\,(q_2, q_3, \ldots, q_n)\,z = z_1\,q_2 + z_2\,q_3 + \ldots + z_{n-1}\,q_n + z_n\,e\,,$$

где e – единичный вектор размерности n, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ – искомый вектор параметров математической модели процесса, $q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in})^T$, $i = \overline{1,n}$.

Измерения переменных $q_1, q_2, \dots, q_n$ получены экспериментальным путем, поэтому предполагается, что каждое измерение $q_{ij}, 1 \le i, j \le n$ имеет погрешность, максимальная величина которой известна априори [5]:

$$\left| q_{ij} - q_{ij}^{ex} \right| \le \delta_i,\ 1 \le j \le n,\ i = 1, 2, \dots, n,\ \delta_i \le \delta_0, \tag{6}$$

где q_{ij}^{ex} – точное измерение переменной q_{ij}.

Обозначим через p вектор из пространства $E^{n(n-1)} = E^n \oplus E^n \oplus .. \oplus E^n$:

$$p^T = (q_{21}, q_{22}, .. q_{2n}, q_{31}, q_{32}, .., q_{n1}, ..., q_{nn})^T,$$

где E^n есть евклидовое векторное пространство размерности n со стандартной нормой.

Каждый вектор q_i может принимать значение в замкнутой области $D_i \subset E^n$, согласно неравенствам (6). Вектор p может принимать значения в замкнутой области $D = D_2 \oplus D_3 \oplus .. \oplus D_n \subset E^{n(n-1)}$. Каждому вектору p из области D соответствует определенный оператор A_p. Множеству $D \subset E^{n(n-1)}$ будет соответствовать класс операторов $\{A_p\} = K_A$.

Представим уравнения (5) как

$$A_p\, z = u_{\delta_1}, \tag{7}$$

где $u_{\delta_1} = q_i \in U = E^n;\ z \in Z = E^n;\ \left\| u_{\delta_1} - u_1^{ex} \right\|_U \le \delta_1,\ u_1^{ex}$ – точная правая часть уравнения (7);

$$\sup_{p_\alpha, p_\beta \in D} \left\| A_{p_\alpha} - A_{p_\beta} \right\|_{Z \to U} \le h_1;$$

$\|\cdot\|_U$, $\|\cdot\|_Z$ – нормы в векторном евклидовом пространстве.

Задачу построения адекватных математических моделей в алгебраической форме можно сформулировать таким образом: определить вектор $z \in Z$, который при подстановке в уравнение (7) дает вектор $A_p\, z$, который отличается по норме от u_{δ_1} на величину меньшую δ_1.

Примером задачи синтеза является задача построения линейной алгебраической математической модели процесса выплавки стали с заданными компонентами [3, 4]. Этот процесс является циклически устойчивым и допускает описание с помощью линейной математической модели в малой окрестности выбранной точки в области переменных. Начальными данными для расчета были выбраны данные из работы [5] о химическом составе, параметрах термообработки и прочности стали, которые представлены в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для расчетов

N/N N	C q_2 x10	Si q_3 x10	Mn q_4 x10	P q_5 x100	S q_6 x100	Cr q_7 x10	Ni q_8 x10	Cu q_9 x100	Ti q_{10} x10	σ q_1
1	6,1	3,2	6,8	0,7	1,3	0,7	0,5	2,8	0,8	990
2	4,6	3,3	7,1	1,0	0,8	2,2	0,6	2,5	0,7	917
3	5,2	3,3	7,0	0,5	0,5	1,8	0,5	2,2	0,9	915
4	6,0	3,0	8,0	0,9	0,9	0,8	0,5	2,3	0,9	1049
5	5,7	3,3	8,4	0,6	0,5	0,7	0,5	2,4	0,8	1039
6	6,6	3,3	7,3	0,8	0,7	1,9	0,5	1,9	0,6	1156
7	6,8	3,2	7,6	1,0	1,0	1,9	1,2	2,7	0,5	1147
8	6,7	2,9	7,6	1,4	1,1	1,8	1,3	2,4	0,6	1166
9	6,6	3,3	7,9	0,9	1,3	1,8	1,2	2,2	0,5	1186
10	6,5	3,5	7,9	0,9	1,2	1,8	1,3	2,5	0,6	1186

В табл. 1 были приняты следующие обозначения (для химического состава стали состав элементов даны в массовых процентах): $C(q_2)$ – количество углерода; Si (q_3) – количество кремния; Mn (q_4) – количество марганца; P (q_5) – количество фосфора; S (q_6) – количество серы; Cr (q_7) – количество хрома; Ni

(q_8) – количество никеля; Cu (q_9) – количество меди; Ti (q_{10}) – количество титана; σ (q_1) – предел прочности стали в МПа.

Для решения системы (7) применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [3, 4].

Выбор параметра регуляризации проводился методом невязки и получена величина α =0.317.

Решение системы (7) при этом имеет вид:

$$z = (1086;\ 1731;\ -166; 8.67; -1448; -25.3; 10.98; -82.43; -31.1;\ 12.0)^T .$$

В результате получена следующая линейная математическая модель процесса выплавки стали:

$$q_1 = 1086q_2 + 1731q_3 - 166q_4 + 8,7q_5 - 1448q_6 - 25,3q_7 + 11q_8 - 82,4q_9 - 31,1q_{10} + 12,0 .$$

Для дополнительной проверки адекватности полученной математической модели в алгебраической форме был выполнен расчет показателя q_1^M согласно модели с каждым из 10 экспериментов и выполнено сравнение с реальным показателем q_1 (см. табл. 1).

$$q_1^M = (1024.7,\ 978.2,\ 1000.9,\ 1065.8,\ 1067.2,\ 1090.9,\ 1122.3,\ 1113.8, 1123.9,\ 1120.9)^T .$$

$$q_1^{табл} = (990;\ 916;\ 915;\ 1049;\ 1039;\ 1156;\ 1147;\ 1166; 1186;\ 1186)^T .$$

На основе данных (см. табл. 1) построена математическая модель (множественная регрессия) методом наименьших квадратов. Модель имеет следующий вид:

$$q_1 = -396125q_2 - 28293,85q_3 - 624110q_4 + 309267q_5 + 11102177,5q_6 - 5688042q_7 -$$
$$-948137q_8 - 1636719q_9 + 21092993q_{10} - 4402668.$$

Аналогичным образом найдены значения последнего столбца согласно модели:

$$q_1^{МНК} = (90588.4,\ -5742,\ 146018.4,\ 1484.7,\ 97474.2,\ -59451,\ 46360,\ -47551.,$$
$$-61704.8,\ -40366.5)^T .$$

Проведенные расчеты показывают, что предлагаемый алгоритм идентификации параметров математической модели в алгебраической форме дает адекватную модель с коэффициентами, которые устойчивы к малым изменениям исходных данных. Такие математические модели могут быть использованы для прогнозирования поведения процесса. С этой целью для нескольких малых окрестностей области изменения параметров физического процесса синтезируются свои адекватные модели, далее их параметры экстраполируются (интерполируются) на новые окрестности области изменения параметров физического процесса и проводится математическое моделирование в новых условиях без использования экспериментальных данных в этих условиях. Классический метод наименьших квадратов не позволяет гарантировано синтезировать адекватные математические модели.

Выводы

В работе предложен один из возможных алгоритмов идентификации параметров адекватной локальной линейной математической модели описания на примере динамической системы, движение которой описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Список использованной литературы

1. Kuchuk F. J. Pressure Transient Formation and Well Testing. Dev. in Petr. Science / F.J. Kuchuk, M. Onur, F. Hollaender.— Elsevier Science, USA, 2010. — Vol. 57. — 414 p.
2. Алексанян И.Ю. Математическое моделирование тепло-массо-переноса при распылительной сушке растительных экстрактов / И.Ю. Алексанян, Ю.А. Максименко, Ю.С. Феклунова // Вестник Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ. — 2013. — № 1. — С. 9–13.
3. Menshikov Yu.L. Identification of Mathematical Model Parameters of Stationary Process / Yu.L. Menshikov // Journal of Applied Mathematics and Physics. — 2014. — Vol.2. — № 5. — PP. 189–193.
4. Menshikov Yu.L. Features of Parameters Identification of Algebraic Mathematical Models / Yu.L. Menshikov // International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT). — 2014. — Vol. 4. — № 5. — 5 p.
5. Тогобицкая Д.Н. Информационно-математическое оеспечение оценки влияния химического состава на свойства колесной стали / Д.Н. Тогобицкая, А.И. Бабаченко, А.С. Козачек и др. // Наукові вісті. Сучасні проблеми металургії. — Дніпропетровськ: НМетау, 2013. — №16. — С. 51–56.