УДК 372.853

Ситников О.П.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

У статті розглядається методика використання математичного моделювання при розв'язанні задач з фізики для студентів інженерних спеціальностей.

Ключові слова: *моделювання, функціональна математична модель, абстрактна фізична задача.*

Загальна фізика – одна з найважливіших фундаментальних дисциплін, яка є теоретичною основою переважної більшості технічних наук. Вивчення фізики студентами інженерних спеціальностей забезпечує не тільки їх базову підготовку, що є запорукою свідомого засвоєння спеціальних дисциплін, але й формує творче, логічне мислення студента, яке необхідне для розв'язання різноманітних технічних задач.

Моделювання – невід'ємна частина наукового пізнання. Під математичним моделюванням розуміють процес побудови моделі, яка є системою математичних рівнянь, що описують досліджуваний процес або явище. Зміст розв'язання фізичних задач методом математичного моделювання полягає в тому, що для конкретної задачі створюється її математична модель, яка досліджується засобами математичного апарату, а результат розв'язання рівнянь інтерпретується у фізичних термінах.

Теоретичні засади використання математичного моделювання під час вивчення фізики в середній та вищій школі розроблені й розробляються багатьма науковцями, серед яких А. Анісімов, Я. Зельдович, А. Самарський та інші.

У науково-методичній літературі виділяється два випадки використання математичного моделювання для розв'язання задач з фізики: це побудова моделі до певної задачі й використання задачі-моделі [1, 2, 3]. У першому випадку засобами математики будується модель, що ілюструє явище, про яке йдеться в умові задачі. У другому випадку під задачею-моделлю розуміють абстрактну задачу, в умові якої сформульовані основні параметри явища [4]. Порівнюючи розглянуті способи моделювання, можна побачити, що розв'язання абстрактної задачі, крім одержаного результату, дозволяє встановити певну закономірність між відомими та шуканими величинами. Це надає особливу цінність задачі-моделі, тому що під час її розв'язку створюється певний алгоритм, який може бути використаний для розв'язання багатьох конкретних задач такої ж структури, але іншого змісту.

Існують різноманітні класифікації математичних моделей [5]. До розв'язання задач з фізики доцільно застосовувати функціональні математичні моделі. Функціональні математичні моделі – це моделі, що містять в собі функціональні зв'язки між змінними величинами і параметрами, які характеризують, з одного боку, явище або об'єкт, а з іншого – його причини у вигляді системи рівнянь різного типу [1, 3].

Мета статті – опис методики розв'язання двох абстрактних задач з використанням функціональної математичної моделі на практичному занятті з фізики для студентів інженерних спеціальностей Чернігівського державного інституту економіки і управління.

Розглянемо умову першої абстрактної задачі: *знайти формули для визначення повного опору кола змінного струму та зсуву фаз між струмом та напругою, якщо дане коло вміщує послідовно з'єднані генератор, резистор з активним опором R, котушку з індуктивністю L та конденсатор з ємністю C.*

Побудуємо функціональну математичну модель. Нехай напруга на клемах генератора змінюється за законом $u = U_0 \sin \omega t$, де U_0 – амплітудне значення напруги. У колі виникає струм тієї самої частоти $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$, де I_0 і φ – амплітудне значення сили струму та зсув фаз між струмом і напругою. Враховуючи закони зміни напруги на кожному з навантажень, складаємо систему рівнянь, що є функціональною математичною моделлю для цієї задачі:

$$i = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$u_R = U_{0R} \sin(\omega t + \varphi),$$

$$u_L = U_{0L} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$u_C = U_{0L} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

де $U_{0R} = I_0 R,\ U_{0L} = I_0 \omega L,\ U_{0C} = \dfrac{I_0}{\omega C}$ – амплітудні значення напруги на резисторі, котушці та конденсаторі.

Гармонічні коливання можна зображувати у вигляді векторів. Сукупність векторів гармонічних коливань однакової частоти називають векторними діаграмами. Оскільки дана математична модель включає гармонічні коливання електричних величин, що відбуваються з однаковою циклічною частотою, то векторну діаграму можна використати як наочну ілюстрацію математичної моделі.

Векторна діаграма будується за допомогою полярної системи координат, яка складається з полярної осі та полярного полюсу. Від полярного полюсу під кутом, що дорівнює початковій фазі гармонічного коливання, відкладається вектор, довжина якого пропорційна амплітуді гармонічного коливання. Якщо уявити, що цей вектор рівномірно обертається проти годинникової стрілки навколо полюсу в площині малюнку з кутовою швидкістю, яка чисельно дорівнює циклічній частоті гармонічного коливання, то його проекція на полярну вісь у будь-який момент часу дорівнює миттєвому значенню величини, що змінюється за гармонічним законом.

Аналіз літератури показує, що поширеним варіантом побудови векторної діаграми для послідовного з’єднання активних та реактивних навантажень є такий, коли за полярну вісь приймають вісь струму й від полярного полюсу відкладають вектори напруг; для паралельного з’єднання цих самих навантажень за полярну вісь приймають вісь напруги й від полярного полюсу відкладають вектори струмів [4, 6]. На думку автора такі векторні діаграми втрачають логічність, тому що за їхньою допомогою неможливо визначити миттєві значення струму та напруги. Щоб розв’язати цю проблему в даній статті пропонується об’єднана векторна діаграма, що одержується накладанням трьох векторних діаграм, окремо побудованих для струму та напруги. Наприклад, при послідовному з’єднанні навантажень для першої векторної діаграми, яка виконує роль "тіла відліку", за полярну вісь приймаємо вісь струму й від полярного полюсу відкладаємо вектор струму для випадку, коли до генератора приєднується лише активне навантаження. Для другої векторної діаграми за полярну вісь приймаємо вісь напруги й від полярного полюсу відкладаємо вектор напруги для випадку, коли до генератора приєднується лише активне навантаження. Для третьої векторної діаграми за полярну вісь приймаємо вісь напруги й від полярного полюсу відкладаємо вектор напруги для випадку, коли до генератора приєднується лише реактивне навантаження.

Якщо співставити полярні осі й полярні полюси побудованих векторних діаграм, то на об’єднаній векторній діаграмі вектори $\vec{U}_0$ і $\vec{I}_0$ синхронно обертатимуться навколо спільного полярного полюсу й для будь-якого моменту часу можна визначити миттєві значення струму та напруги.

Для паралельного з’єднання навантажень ідея побудови об’єднаної векторної діаграмі залишається аналогічною.

З метою визначення повного опору кола змінного струму та зсуву фаз між струмом та напругою згідно умови першої абстрактної задачі побудуємо об’єднану векторну діаграму (рис 1).

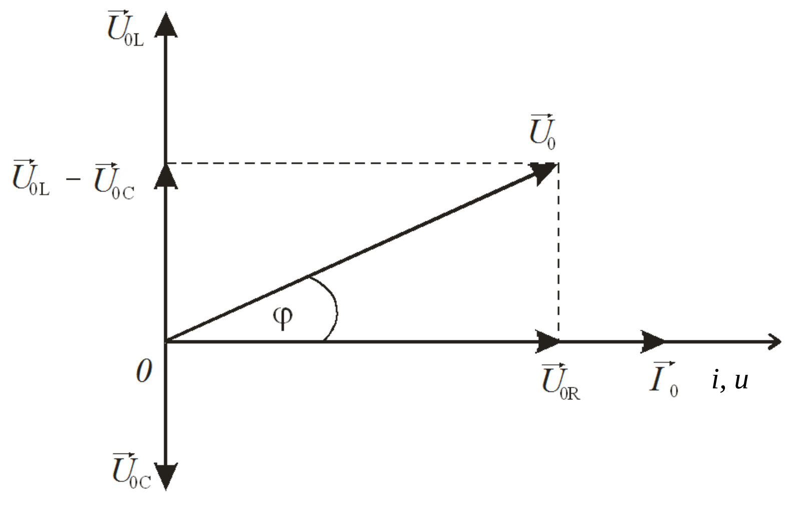

Рис. 1. Об’єднана векторна діаграма для кола з послідовним з’єднанням резистора, котушки і конденсатора

Згідно рисунку 1 амплітудна напруга визначається векторною сумою: $\vec{U}_0 = \vec{U}_{0R} + \vec{U}_{0L} + \vec{U}_{0C}$, а її значення:

$$U_0 = \sqrt{U_{0R}^2 + U_{0L}^2 + U_{0C}^2} = \sqrt{I_0^2 R^2 + \left(I_0 \omega L - \frac{I_0}{\omega C}\right)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_0 Z .$$

Звідки маємо формулу для визначення повного опору кола змінного струму:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (1).$$

З рисунку 1 одержимо формулу для визначення зсуву фаз між струмом та напругою:

$$tg\,\varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}} = \frac{I_0 \omega L - \frac{I_0}{\omega C}}{I_0 R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Звідки $\varphi = arctg \dfrac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$. (2)

Формули (1) та (2) є результатом проведеного моделювання й розв'язком даної абстрактної задачі. Розглянута математична модель дозволяє розв'язати задачі для різних комбінацій послідовно з'єднаних резистора, котушки й конденсатора. Наприклад, коли навантаженням кола змінного струму є резистор і котушка, то повний опір кола та зсув фаз між струмом і напругою визначаються формулами:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} , \qquad \varphi = arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Коли навантаженням кола змінного струму є резистор і конденсатор, то повний опір кола та зсув фаз між струмом та напругою визначаються формулами:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} , \qquad \varphi = arctg\left(-\frac{1}{R\omega C}\right).$$

Розглянемо умову другої абстрактної задачі: *знайти формули для визначення повного опору кола змінного струму та зсуву фаз між струмом та напругою, якщо до генератора паралельно приєднуються резистор з активним опором R, котушка з індуктивністю L та конденсатор з ємністю C.*

Враховуючи закони зміни сили струму на кожному з навантажень, складаємо систему рівнянь, яка є функціональною математичною моделлю для цієї задачі:

$$\begin{aligned} u &= U_0 \sin(\omega t + \varphi), \\ i_R &= I_{0R} \sin(\omega t + \varphi), \\ i_L &= I_{0L} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \\ i_C &= I_{0L} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

де $I_{0R} = \dfrac{U_0}{R}$, $I_{0L} = \dfrac{U_0}{\omega L}$, $I_{0C} = U_0\, \omega C$ – амплітудні значення сили струму, що проходить резистором, котушкою та конденсатором.

З метою визначення повного опору кола змінного струму та зсуву фаз між струмом та напругою побудуємо об'єднану векторну діаграму (рис. 2).

Згідно рисунку 2 амплітудна сила струму в колі визначається векторною сумою: $\vec{I}_0 = \vec{I}_{0R} + \vec{I}_{0C} + \vec{I}_{0L}$, а її значення:

$$I_0 = \sqrt{I_{0R}^2 + \left(I_{0C} - I_{0L}\right)^2} = \sqrt{\frac{U_0^2}{R^2} + \left(U_0\,\omega C - \frac{U_0}{\omega L}\right)^2} =$$

$$= U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{U_0}{Z}.$$

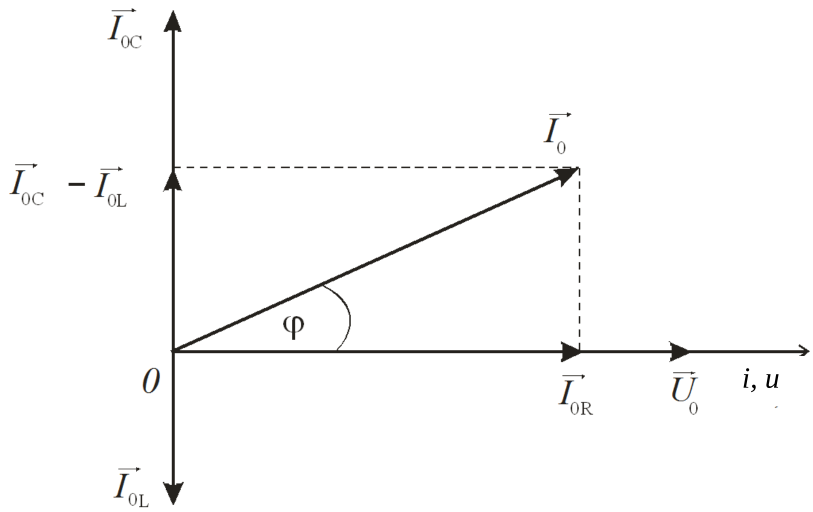

Рис. 2. Об’єднана векторна діаграма для кола з паралельним з’єднанням резистора, котушки і конденсатора

Звідки маємо формулу для визначення повного опору кола змінного струму:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad (3).$$

З рисунку 2 одержимо формулу для визначення зсуву фаз між струмом та напругою:

$$tg\,\varphi = \frac{I_{0C} - I_{0L}}{I_{0R}} = \frac{U_0\,\omega C - \frac{U_0}{\omega L}}{\frac{U_0}{R}} = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R.$$

Звідки

$$\varphi = arctg\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) R \qquad (4).$$

Формули (3) та (4) є результатом проведеного моделювання й розв’язком даної абстрактної задачі. Розглянута математична модель дозволяє також розв’язати задачі для різних комбінацій паралельно з’єднаних резистора, котушки й конденсатора. Наприклад, коли навантаженням кола змінного струму є резистор і котушка, то повний опір кола та зсув фаз між струмом та напругою визначаються формулами:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}}\,, \qquad \varphi = arctg\left(-\frac{R}{\omega L}\right).$$

Коли навантаженням кола змінного струму є резистор і конденсатор, то повний опір кола та зсув фаз між струмом та напругою визначаються формулами:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}\,, \qquad \varphi = arctg\ R\omega C$$

Аналізуючи розв’язок даних задач, можна виділити наступні етапи:

– *фізичний*, коли усвідомлюється фізичний зміст умови задачі;

– *математичний*, коли будується функціональна математична модель;

– *аналітичний*, коли одержуються формули для розрахунку шуканих величин і значення цих величин, а також досліджуються можливі наслідки, що передбачаються даною моделлю.

Висновки

Математичне моделювання можна розглядати як ефективний спосіб розв'язання фізичних задач. Якщо рівняння математичної моделі є гармонічними функціями, то для одержання шуканих величин доцільно застосовувати об'єднані векторні діаграми. З іншого боку, математичне моделювання підносить розв'язання різноманітних задач технічного напрямку на більш сучасний рівень.

Використані джерела

1. Анісімов А. Розвиток методики складання і розв'язування задач в умовах стандартизації і диференціації навчання фізики / А. Анісімов, Г. Редько // Фізика та астрономія в шк. – 1998. – №2. – С. 40-43.
2. Самарский А.А. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 375 с.
3. Рикова Л.Л. Структурні і функціональні моделі, що використовуються у викладанні природничих і математичних наук / Л.Л. Рикова. – http//www. intellect-invest.org.ua / е-журнал "Педагогічна наука: історія, теорія, практика, тенденції розвитку. – №3. – 2009.
4. Кавурко Л.В. Деякі аспекти застосування елементів математичного моделювання при розв'язуванні фізичних задач / Л.В. Кавурко // Вісник Чернігівського державного педагогічного університету імені Т.Г. Шевченка. Випуск 65. Серія: Педагогічні науки: Збірник. – Чернігів: ЧДПУ, 2009. – №65. – С.193-196.
5. Вікіпедія. – http://w.w.w. ru/wikipedia.org./wiki
6. Щерба А.А. Розрахунок лінійних кіл змінного струму: Навчально-методичний посібник з курсу "Електротехніка та електроніка" / Уклад. А.А. Щерба, В.П. Грудська, Л.Ю. Спінул. – К. : НТУУ "КПІ", 2004. – 85 с.

Sytnykov A.

PHYSICAL PROBLEMS SOLUTION THE FUNCTION OF MATHEMATICAL MODELS FOR STUDENTS OF ENGINEERING SPECIALTIES

The article deals with methods of mathematical modeling in solving problems in physics for students of engineering graduates.

Key words: *modeling, functional mathematical model, an abstract physical problems.*

Стаття надійшла до редакції 16.04.13