

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

ВІСНИК

**КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО
УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2018

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,

випуск №4, 2018,

Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету “Математика і механіка”, “Фізика”, “Моделирование и оптимизация сложных систем” реорганізовано у “Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки”. У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, механіко-математичного факультетів, факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем і факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Журнал “Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки” включено до переліку фахових видань ВАК України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України №1222 від 07.10.2016), та реферується в Реферативному журналі, Zentralblatt MATH.

Редакційна колегія:

Козаченко Юрій Васильович, д.ф.-м.н., проф., **головний редактор;**

Розора Ірина Василівна, к.ф.-м.н., доц., **зам. головного редактора;**

Bartlova Milada, Ph. D., Brno University of Technology, Brno, Czech Republic;

Bavula Vladimir, Prof., University of Sheffield, Great Britain;

Beghin Luisa, Prof., Sapienza Università di Roma, Italy;

Futory Vyacheslav, Prof., Universidade de São Paulo, Brazil;

Giuliano Rita, Prof., Università di Pisa, Italy;

Gorlatch Sergei, Dr. Sci. (habil.), Prof., University of Muenster, Muenster, Germany;

Hudak Stefan, Dr. Sci., Prof., Technical University of Kosice, Kosice, Slovak Republic;

Kukhtarev Nickolai, Prof., Alabama A&M University, Alabama, USA;

Leonenko Nikolay, Prof., Cardiff University, Great Britain;

Medvids Arturs, Dr. Phys. (habil.), Prof., Riga Technical University, Riga, Latvia;

Olenko Andriy, Prof., La Trobe University, Australia;

Orsingher Enzo, Prof., Sapienza University of Rome, Italy;

Ostrovsky Eugene, Prof., Bar-Ilan University, Israel;

Pogany Tibor, Prof., University of Rijeka, Croatia;

Rontó Miklós, Dr. Sci., Prof., University of Miskolc, Miskolc, Hungary;

Silvestrov Dmitrii, Prof., Stockholms universitet, Sweden;

Sottinen Tommi, Prof., University of Vaasa, Finland;

Toru Aoki, Ph. D., Prof., Research Institute of Electronics, Shizuoka University, Shizuoka, Japan;

Trofimchuk Sergey, Prof., Universidad de Talca, Instituto de Matematica y Fisica, Talca, Chile;

Volodin Andrei, Prof., University of Regina, Canada;

Акіменко Віталій Володимирович, д.т.н., проф.;

Анісімов Ігор Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Анісімов Анатолій Васильович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Безущак Оксана Омелянівна, к.ф.-м.н., доцент;

Буй Дмитро Борисович, д.ф.-м.н., проф.;

Булавін Леонід Анатолійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Волошин Олексій Федорович, д.т.н., проф.;

Гарашенко Федір Георгійович, д.т.н., проф.;

Єжов Станіслав Миколайович, д.ф.-м.н., проф.;

Жук Ярослав Олександрович, д.ф.-м.н., проф.;

Заславський Володимир Анатолійович, д.т.н., проф.;

Кириченко Володимир Васильович, д.ф.-м.н., проф.;

Курченко Олександр Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Кудін Володимир Іванович, д.т.н., с.н.с.;

Львов Віктор Анатолійович, д.ф.-м.н., проф.;

Макара Володимир Арсенійович, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Макарець Микола Володимирович, д.ф.-м.н., проф.;

Майборода Ростислав Євгенович, д.ф.-м.н., проф.;

Моклячук Михайло Павлович, д.ф.-м.н., проф.;

Пашко Анатолій Олексійович, д.ф.-м.н., проф.;

Перестюк Микола Олексійович, акад. НАН України, д.ф.-м.н., проф.;

Петравчук Анатолій Петрович, д.ф.-м.н., проф.;

Погорілий Сергій Дем’янович, д.т.н., проф.;

Савенков Сергій Миколайович, д.ф.-м.н., доц.;
Скришевський Валерій Антонович, д.ф.-м.н., проф.;
Сливка-Тилишак Ганна Іванівна, д.ф.-м.н., проф.;
Хусаїнов Денис Ях'євич, д.ф.-м.н., проф.;

Редакційний відділ:

Затула Дмитро Васильович, **відповідальний секретар**;
Безущак Оксана Омелянівна, bezusch@univ.kiev.ua;
Стукаленко Вікторія Віталіївна, stu@univ.kiev.ua;
Родіонова Тетяна Василівна, rodtv@univ.kiev.ua;
П'ятецька Олена Василівна, visnyk.phys-math@ukr.net;
Отто Георгій Костянтинівич, **технічний редактор**, ottogk@gmail.com.

Адреса редакційної колегії:

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49
fm.visnyk@ukr.net
ISBN 978-966-2142
ISSN 1812-5409

Засновник: Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію: КВ №16299-4771Р від 11.12.2009 року

Безкоштовно

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Бондаренко В.М., Стьопочкіна М.В. Посилення однієї теореми про Кокстер-Евклідовий тип головних частково впорядкованих множин	8
Журавльов В.М., Циганівська І.М. Проективні ґратки черепичних порядків	16
Козаченко Ю., Островський Є., Сирота Л. Еквівалентність між розподілами хвостів, нормою в лебегових просторах та орлічевою нормою для випадкових величин, для яких не виконується умова Крамера	20
Лавренюк Я. Про зберігаючі міру гомеоморфізми просторів шляхів простих стаціонарних діаграм Браттелі	30
Розора І.В. Про швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі $L_p(T)$	36
Сливка-Тилищак Г.І. Умови існування з імовірністю одиниця узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною	42

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНІКА

Баранець В.О., Кізілова Н. М. Математичне моделювання агрегації та осідання частинок в похилих трубках	52
Кізілова Н. М., Коробов А. М. Ефективна фрактальна модель системи мікроциркуляції крові в поверхневих тканинах людини	58
Кізілова Н. М., Ткаченко Є.Д. Особливості тепломасообміну в ламінарних течіях мікро і нанорідин по трубках і каналах	62
П'ятецька О. В. Демпфірування неізотермічних осесиметричних згинних коливань в'яко-пружних пластин	68

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

Бевза М. В. Розпізнавання іменованих сутностей в текстах за допомогою розмітки частин мови	74
Бобиль Б.В., Терещенко В.М. Аналіз методів передтренування та ініціалізації нейронних мереж	84
Коваль Ю.В., Крак Ю.В. Аналіз методів передтренування та ініціалізації нейронних мереж	92

РАДІОФІЗИКА

Гайдар В.О. Аналіз методів машинного навчання для раннього детектування та прогнозування епілептичних нападів	98
---	----

СУЧАСНА ФІЗИКА

Британ А. В., Іванов Б. О., Осіс В. Б.З. Автоматизована інформаційно - вимірювальна система моніторингу характеристик атмосферного озону	104
Дацюк В. В., Павлинюк О. Р. Роль поверхневої провідності в електромеханіці та електрогідродинаміці діелектричної кулі	110
Микитюк А.О., Кондратенко С.В. Оптичні властивості PEDOT: PSS - кремнієвих сонячних елементів	118
Ямпольський А. Л., Макаренко О. В., Лендел В. В., Пророк В. В., Шарапа А. І., Поперенко Л. В. Стокс-поляриметрия надтонких острівцевих плівок Au та Sn	122

CONTENTS

ALGEBRA, GEOMETRY AND PROBABILITY THEORY

Bondarenko V.M., Styopochkina M.V. Strengthening of a theorem on Coxeter-Euclidean type of principal partially ordered sets	8
Zhuravlev V.M., Tsyganivska I.M. Projective lattices of tiled orders	16
Kozachenko Yu., Ostrovsky E., Sirota L. Equivalence between tails, Grand Lebesgue Spaces and Orlicz norms for random variables without Cramer's condition	20
Lavrenyuk Y. On measure preserving self-homeomorphisms of path spaces of simple stationary Bratteli diagrams	30
Rozora I.V. On the convergence rate for the estimation of impulse response function in the space $L_p(T)$	36
Slyvka-Tylyshchak G.I. The conditions of existence with probability one of generalized solutions of Cauchy problem for the heat equation with a random right part	42

DIFFERENTIAL EQUATIONS, MATHEMATICAL PHYSICS AND MECHANICS

Baranets V.O., Kizilova N.M. Mathematical modelling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes	52
Kizilova N.M., Korobov A.M. Modeling of blood microcirculation, heat and mass transfer in human tissues	58
Kizilova N.M., Tkachenko Ye.D. Features of heat and mass exchange in laminar flows of micro and nanofluids in tubes and channels	62
Pyatetska O. V. Damping of unisothermal axisymmetric bending vibrations of viscoelastic plates	68

COMPUTER SCIENCES AND INFORMATICS

Bevza M. V. Named entity recognition in texts with the help of part of speech tagging	74
Bobyl B.V. Tereschenko V.M. Analysis of pre-training and initialization methods of neural networks	84
Koval V., Krak V. Sieve sorting algorithm	92

RADIOPHYSICS

Gaidar V.O. Machine learning for epilepsy detection and forecast review: new challenges and perspectives	98
--	----

MODERN PHYSICS

A. V. Brytan, B.A. Ivanov, V.B. Osis Automated information measuring system for monitoring characteristics of atmospheric ozone	104
Datsyuk V.V., Pavlyniuk O.R. The role of surface conductivity in electromechanics and electrohydrodynamics of a dielectric drop	110
Mykytiuk A.O., Kondratenko S.V. Optical properties of PEDOT:PSS – silicon solar cells	118
Yampolskiy A.L., Makarenko O.V., Lendel V.V., Prorok V.V., Sharapa A.I., Poperenko L.V. Stokes-polarimetry of ultrathin Au and Sn island films	122

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

УДК 512.64+512.56

Бондаренко В. М.¹, д. ф.-м. н., проф.,
Стьопочкіна М. В.², к. ф.-м. н., доцент.

Bondarenko V. M.¹, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
Styopochkina M. V.², Ph.D.

**Посилення однієї теореми про
Коксетер-Евклідовий тип головних
частково впорядкованих множин**

**Strengthening of a theorem on
Coxeter–Euclidean type of principal
partially ordered sets**

¹Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3,
e-mail: vitalij.bond@gmail.com

¹Institute of Mathematics of NAS of Ukraine,
01024 Kyiv, Tereshchenkivska str., 3,
vitalij.bond@gmail.com

²Житомирський національний агроекологіч-
ний університет, 10002, м. Житомир, Старий
бульвар, 7,
e-mail: stmar@ukr.net

²Zhytomyr National Agroecological Univ.,
10008, Zhytomyr, Staryi Boulevard, 7,
e-mail: stmar@ukr.net

Квадратичні форми Тітса, які відіграють важливу роль у сучасній математиці, вперше ввів П. Габріель для скінченних сагайдаків. Він довів, що зв'язні сагайдаки з додатною формою Тітса збігаються з сагайдаками Динкіна. Ця квадратична форма природно узагальнюється на ч. в. множини. Ч. в. множини з додатною квадратичною формою Тітса (аналоги діаграм Динкіна) були класифіковані авторами разом з P -критичними ч. в. множинами (найменшими ч. в. множинами з не додатною квадратичною формою Тітса). Квадратична форма Тітса будь-якої P -критичної ч. в. множини є невід'ємною і коранг її симетричної матриці дорівнює 1. У цій роботі вивчаються квадратичні форми всіх ч. в. множин, які задовольняють ці дві властивості; називаються вони головними. Зокрема, для них розв'язана поставлена в 2014 р. проблема про відповідні евклідові діаграми.

Ключові слова: додатна та невід'ємна квадратична форма, квадратична форма Тітса, P -критична ч. в. множина, головна ч. в. множина, діаграма Динкіна, евклідова діаграма

Among the quadratic forms, playing an important role in modern mathematics, the Tits quadratic forms should be distinguished. Such quadratic forms were first introduced by P. Gabriel for any quiver in connection with the study of representations of quivers (also introduced by him). P. Gabriel proved that the connected quivers with positive Tits form coincide with the Dynkin quivers. This quadratic form is naturally generalized to a poset. The posets with positive quadratic Tits form (analogs of the Dynkin diagrams) were classified by the authors together with the P -critical posets (the smallest posets with non-positive quadratic Tits form). The quadratic Tits form of a P -critical poset is non-negative and corank of its symmetric matrix is 1. In this paper we study all posets with such two properties, which are called principal, related to equivalence of their quadratic Tits forms and those of Euclidean diagrams. In particular, one problem posted in 2014 is solved.

Key Words: positive and non-negative quadratic form, quadratic Tits form, P -critical poset, principal poset, Dynkin diagram, Euclidean diagram

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Козаченко Ю. В.

1 Introduction

In 1972 P. Gabriel [1] introduced an integer quadratic form q_Q for any finite quiver (directed graph) Q , called by him the *quadratic Tits form of the quiver Q* . If Q_0 and Q_1 denote the sets

of vertices and arrows of Q , respectively, then the quadratic form q_Q is defined by the following equality:

$$q_Q = q_Q(z) := \sum_{i \in Q_0} z_i^2 - \sum_{i \rightarrow j} z_i z_j,$$

where $i \rightarrow j$ runs through the set Q_1 . Note that, by definition, the quadratic Tits form q_G of an undirected graph (for simplicity, a graph) G is that of a quiver G' , which is obtained with the help of selecting an orientation ε on the edges of G (up to the renumbering of the variables, the quadratic form q_G does not depend on choice of ε).

The above quadratic form was introduced by P. Gabriel in connection with the study of representations of quivers (also introduced by him). He proved that a connected quiver is of finite representation type over a field (i.e. has, up to equivalence, only finitely many indecomposable representations) if and only if it is a Dynkin quiver, i.e. the corresponding graph is a (simply faced) Dynkin diagram (see Section 5).

If we talk directly about quadratic forms, from the results of [1] it follows that the connected quivers with positive quadratic Tits form coincide with the Dynkin quivers (“positive” means “positive definite”).

The above quadratic form q_Q is naturally generalized (in an ideal sense) to a finite partially ordered set (poset) $S \not\cong 0$:

$$q_S = q_S(z) := z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i$$

(for the first time it was written in [2] in connection with the study of posets of finite representation type). The quadratic form q_S is called the *quadratic Tits form of the poset S* . The problem of classifying all the posets with positive quadratic Tits form were solved by the authors in [3]. These posets are analogs of the Dynkin diagrams.

In [3] the authors also introduced the notion of P -critical poset and classified such posets up to isomorphism (see the list of posets in Section 6). Namely, a poset S is said to be P -critical if its quadratic Tits form is not positive, but the Tits form of any proper subposet of S is positive. So the quadratic Tits form $q_S(z)$ is positive if and only if the poset S does not contain (as a subposet) a P -critical one.

Below by “non-negative quadratic form” we meant “non-negative definite quadratic form” (i.e. the form takes only non-negative values).

Theorem 1. *Let S be a P -critical poset. Then*

(1) *the quadratic Tits form $q_S(z)$ is non-negative;*

(2) *$\text{Ker } q_S(z) := \{t \in \mathbb{Z}^{|S|+1} \mid q_S(t) = 0\}$ is an infinite cyclic group, i.e. $\text{Ker } q_S(z) = t'\mathbb{Z}$ for some*

$t' \neq 0$ (equivalently, the symmetric matrix of $q_S(z)$ has corank 1).

Indeed, by Theorem 2 and Proposition 19 [3] the quadratic Tits form $q_S(z)$ is \mathbb{Z} -equivalent to the quadratic Tits form of some critical Kleiner’s poset; and the theorem it follows from the well-known properties of Kleiner’s posets (see, e.g., [4]).

Thus, the P -critical posets coincides with the minimal posets (relative to full inclusion) of the set \mathcal{P}_{12} of all posets, satisfying conditions (1) and (2). The posets from \mathcal{P}_{12} are called *principal* [5].

In this paper we study principal posets related to equivalence of their quadratic Tits forms and those of graphs. In particular, one problem posted in [6] is solved.

2 Main result

By [5, Proposition 9], for any principal poset J there exists a (simply faced) Euclidean diagram (in other words, extended Dynkin diagram; see Section 5) $DJ \in \{\tilde{\mathbb{A}}_s, s \geq 3, \tilde{\mathbb{D}}_n, n \geq 4, \tilde{\mathbb{E}}_6, \tilde{\mathbb{E}}_7, \tilde{\mathbb{E}}_8\}$, uniquely determined by J , such that the symmetric matrices of the quadratic Tits forms of J and DJ (called in [5] the symmetric Gram matrices) are \mathbb{Z} -congruent. DJ is called the *Coxeter–Euclidean type of J* .

In this paper we prove the following theorem, which is formulated in the term of equivalence of quadratic forms.

Theorem 2. *Let S be a principal poset. Then there exists an Euclidean diagram $E(S)$, which is not a cycle (i.e. $E(S) \neq \tilde{\mathbb{A}}_s$), such that the quadratic Tits forms $q_S(z)$ and $q_{E(S)}(z)$ are \mathbb{Z} -equivalent.*

This theorem strengthens the indicated result from [5]. In combination with the uniqueness $E(S) := DS$ with respect to S , we have a solution of Problem 1.6 [6].

Our proof is general (does not contain specific calculations) and is based on the methods of minimax equivalence of posets and stable equivalence of quadratic forms.

3 Preliminary

3.1. Minimax equivalence of posets. The notion of (*min, max*)-equivalence of posets was introduced by the first author in [7]. In details the properties of this equivalence were studied in [3].

Since some time we have been used the term *minimax equivalence*.

In this subsection we remember some definitions and results from [3].

Let S be a (finite) poset. For a minimal (respectively, maximal) element a of S , denote by $T = S_a^\uparrow$ (respectively, $T = S_a^\downarrow$) the following poset: $T = S$ as usual sets, $T \setminus a = S \setminus a$ as posets, the element a is maximal (resp. minimal) in T , and a is comparable with x in T if and only if they are incomparable in S . A poset T is called *minimax equivalent* to a poset S , if there are posets S_1, \dots, S_p ($p \geq 0$) such that, if we put $S = S_0$ and $T = S_{p+1}$, then, for every $i = 0, 1, \dots, p$, either $S_{i+1} = (S_i)_{x_i}^\uparrow$ or $S_{i+1} = (S_i)_{y_i}^\downarrow$.

The notion of minimax equivalence can be naturally continued to the notion of *minimax isomorphism*: posets S and S' are *minimax isomorphic* if there exists a poset T , which is *minimax equivalent* to S and *isomorphic* to S' .

The definition of posets of the form $T = S_a^\uparrow$ (respectively, $T = S_a^\downarrow$) can be extended to posets of the form $T = S_A^\uparrow$ (respectively, $T = S_A^\downarrow$), where A is a lower (respectively, an upper) subposet of S , i.e. $x \in A$ whenever $x < y$ (respectively, $x > y$) and $y \in A$. Namely, $T = S_A^\uparrow$ (respectively, $T = S_A^\downarrow$) is defined as follows: $T = S$ as usual sets, partial orders on A and $S \setminus A$ are the same as before, but comparability and incomparability between elements of $x \in A$ and $y \in S \setminus A$ are interchanged and the new comparability can only be of the form $x > y$ (respectively, $x < y$).

We write $S_{AB}^{\uparrow\uparrow}$ instead of $(S_A^\uparrow)_B^\uparrow$. $S_{AB}^{\uparrow\downarrow}$ instead of $(S_A^\uparrow)_B^\downarrow$, etc. Obviously, $S_{AA}^{\uparrow\downarrow} = S$, $S_{AA}^{\downarrow\uparrow} = S$, $S_A^\uparrow = S_{S \setminus A}^\downarrow$. In the special case, when $A = \{a\}$ and $B = \{b\}$ are one-element posets, we identify A and B with a and b .

A poset T is called *dual* to a poset S and is denoted by S^{op} if $T = S$ as usual sets and $x < y$ in T if and only if $x > y$ in S . From the above definitions it follows the next equality: $(S_A^\downarrow)^{\text{op}} = (S^{\text{op}})_A^\uparrow$.

It is easy to show that S_A^\uparrow (respectively, S_A^\downarrow) and S is *minimax equivalent*. Since $S_B^\downarrow = S_{S \setminus B}^\uparrow$, it is sufficient to consider only the case, when the subspace A is upper. Let A_1 be the set of all minimal elements of A and (inductively) $A_i, i > 1$, the set of all minimal elements of $A \setminus (\cup_{j=1}^{i-1} A_j)$ (obviously, $\cup_{i=1}^r A_i = A$, where r is the largest i such that $A_i \neq \emptyset$); the writing $h(x) = i$ for an element $x \in S$ will be meant that $x \in S_i$. From

this notation it follows that if $|A| = m$, than the elements of A can be numerated in such a way, say a_1, a_2, \dots, a_m , that $h(a_1) \leq h(a_2) \leq \dots \leq h(a_m)$. Consequently, $S_A^\uparrow = S_{a_1 a_2 \dots a_m}^{\uparrow\uparrow \dots \uparrow}$, i.e. S_A^\uparrow is *minimax equivalent* to S , as claimed.

The main motivation for introducing the notion of *minimax equivalence* is the following theorem.

Theorem 3. *The Tits quadratic forms of minimax equivalent posets are \mathbb{Z} -equivalent.*

The theorem follows from the next proposition.

Proposition 1. *Let S be a poset and let $T = S_A^\uparrow$ or $T = S_A^\downarrow$. Then $q_S(z) = q_T(z')$, where $z'_0 = z_0 - \sum_{a \in A} z_a$, $z'_x = -z_x$ for $x \in A$ and $z'_x = z_x$ for $x \notin A$.*

Corollary 1. *Let S and T be the same as in Proposition 1, and let $x \notin A$. Then the quadratic Tits form of $T \setminus x$ is positive if so is the quadratic Tits form of $S \setminus x$.*

3.2. Stable equivalence of quadratic forms. Let $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ be a quadratic form of n variables over the field \mathbb{R} of real numbers with the symmetric matrix

$$F = M(f) :=$$

$$= \begin{pmatrix} f_{11} & \frac{f_{12}}{2} & \dots & \frac{f_{1,n-1}}{2} & \frac{f_{1n}}{2} \\ \frac{f_{12}}{2} & f_{22} & \dots & \frac{f_{2,n-1}}{2} & \frac{f_{2n}}{2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{f_{1,n-1}}{2} & \frac{f_{2,n-1}}{2} & \dots & f_{n-1,n-1} & \frac{f_{n-1,n}}{2} \\ \frac{f_{1n}}{2} & \frac{f_{2n}}{2} & \dots & \frac{f_{n-1,n}}{2} & f_{nn} \end{pmatrix}.$$

Then the quadratic form can be written in the following matrix form:

$$f(z) = \sum_{i=1}^n f_{ii} z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j =$$

$$= (z_1, z_2, \dots, z_n) M(f) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = z M(f) z^T,$$

where the letter T means matrix transposition.

Note that we follow the paper [9], and the equality $f(z) = z M(f) z^T$ is not entirely traditional (as a final one), since a replacement is usually

done, say $Z := (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ (see [8, Ch. 5, §1]), and then $f(z) = Z^T M(f) Z$.

If in the quadratic form $f(z)$ we perform a linear transformation $z = yA$ with $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ and an nonsingular $n \times n$ matrix A , then we get the quadratic form

$$\bar{f}(y) = (yA)F(A^T y^T) = y(AFA^T) y^T.$$

From this it follows, in particular, that $M(\bar{f}) = AM(f)A^T$.

A quadratic form $f(z) = f(z_1, \dots, z_n)$ is said to be *decomposable* if there is a proper subset of $S \subset N := \{1, 2, \dots, n\}$ such that $f_{ij} = 0$ for $i \in S, j \in N \setminus S$ and for $i \in N \setminus S, j \in S$; otherwise, the form is called *indecomposable*.

We now recall some definitions given in [9].

An $n \times n$ matrix A is called *s-stable*, where $s \in \{1, 2, \dots, n\}$, if its s -th column coincides with the s -th column of the identity $n \times n$ matrix E . A linear nonsingular transformation $z = yA$ (see above) is called *s-stable* if so is the matrix A .

Two quadratic forms $f = f(z)$ and $g = g(y)$ are called *s-stable equivalent* if there exists a nonsingular linear transformation $z = yA$ being s -stable that carries $f(z)$ into $g(y)$. If $f = f(z)$ and $g = g(y)$ are integer quadratic forms, then the term “ s -stable \mathbb{Z} -equivalent” means that the s -stable matrix A is integer and invertible (as a matrix over \mathbb{Z}).

We now consider the general case of unit integer positive quadratic forms:

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j,$$

where $n \geq 1$; from positivity it follows that $f_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ for all i, j . The set of all such quadratic forms is denoted by \mathcal{Z}_n^+ .

Theorem 4 ([9], Theorem 3). *For any indecomposable quadratic form $f = f(z) \in \mathcal{Z}_n^+$ and $s \in \{1, \dots, n\}$ there exists an s -stably \mathbb{Z} -equivalent quadratic form which is the Tits quadratic form of a certain Dynkin diagram.*

Note that a similar statement, but without additional restrictions on equivalence, has long been known [10].

4 Proof of Theorem 2

We will call a poset positive (respectively, non-negative) if so is its quadratic Tits form.

Let S be a principal poset of order $n \geq 1$.

Then there is a non-zero integer vector $t = (t_i)_{i \in S \cup 0}$ such that $q_S(t) = 0$. Fix $t_d \neq 0$ with $d \in S$ and consider the subposet $S_0 := S \setminus d$, which is positive by the definition of principal poset. Put $A := \{x \in S \mid x < d\}$ and $B := \{x \in S \mid x > d\}$. Then the poset $S_d := S_{AB}^{\uparrow\downarrow}$ is a poset with “isolated” element d (in the sense that it is incomparable with any other element).

By Theorem 3 the poset S_d is non-negative (and even principal by Proposition 1) and by Corollaries 1 the poset $S_{d0} := S_d \setminus d$ is positive. Therefore, it suffices to prove the theorem for the poset S_d .

We assume that the elements of S are numbered by the numbers $1, 2, \dots, n$ in such a way that $n = d$, and for the partial order relation on S use (to avoid ambiguity) the symbol \prec instead of $<$. Put $M := M[q_{S_d}(z_0, z_1, \dots, z_n)]$ (the symmetric matrix of the quadratic Tits form of S_d) and $N := M[q_{S_{d0}}(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})]$ (the symmetric matrix of the Tits quadratic form of S_{d0}); the rows and columns of the both matrices are numbered by $0, 1, \dots$ in a natural manner (in increasing order). Obviously, $M = \left(\begin{array}{c|c} N & v^T \\ \hline v & 1 \end{array} \right)$, where $v = (-\frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$.

By Theorem 4 for $S = S_{d0}$ and $s = 0$ there is a 0-stable matrix

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{array} \right)$$

with A_{22} to be an $(n-1) \times (n-1)$ matrix (then A_{12} is an $1 \times n-1$ one) such that $ANA^T = M[q_D(z)]$ for some Dynkin diagram D (the vertices of which are numbered by $0, 1, \dots, n-1$). Then, for $\bar{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$, we have (taking into account that $vA^T = v$): $\bar{A}M\bar{A}^T = \left(\begin{array}{c|c} M[q_D(z)] & v^T \\ \hline v & 1 \end{array} \right)$, i.e. $\bar{A}M\bar{A}^T$ is the symmetric matrix of the quadratic Tits form of the graph \bar{D} that is obtained from the Dynkin diagram D by adding the single new vertex n and the single new edge $(0, n)$. Obviously, the (connected) graph \bar{D} is a tree (because so is the diagram D).

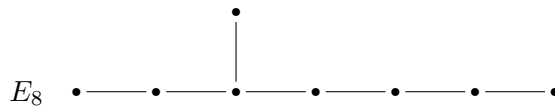
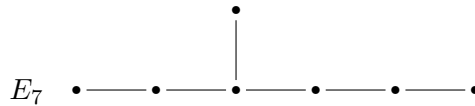
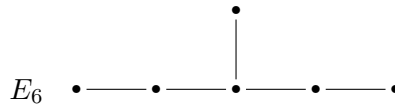
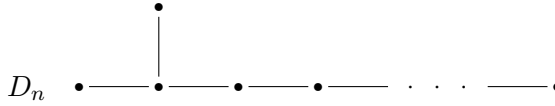
Thus, the quadratic Tits forms $q_S(z)$ of the poset and $q_{\bar{D}}(z)$ of the tree \bar{D} are \mathbb{Z} -equivalent. Since $q_{\bar{D}}(z)$ is non-negative and is not positive (because so is $q_S(z)$ with S to be principal), the graph \bar{D} is an extended Dynkin diagram (see [11]).

5 Dynkin and Euclidean diagrams

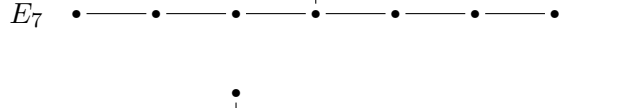
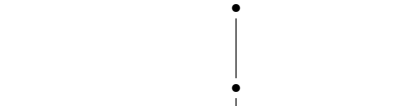
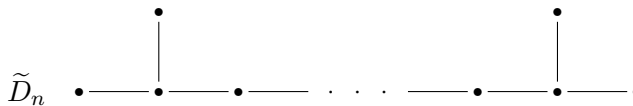
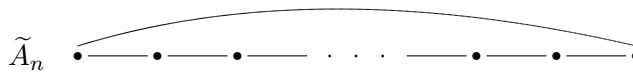
In this section, for reader's convenience, we provide the list of all simply faced Dynkin diagrams — A_n ($n \geq 1$ vertices), D_n ($n \geq 4$ vertices),

E_6, E_7, E_8 (respectively, 6, 7, 8 vertices), and the list of all simply faced Euclidean (extended Dynkin) diagrams — \tilde{A}_n ($n + 1 \geq 3$ vertices), \tilde{D}_n ($n + 1 \geq 5$ vertices), $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ (respectively, 7, 8, 9 vertices).

Simply faced Dynkin diagrams



Simply faced Euclidean diagrams

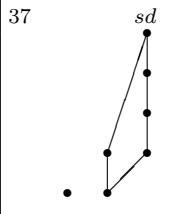
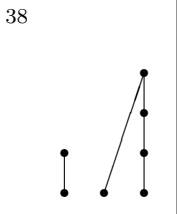
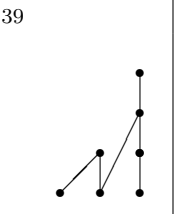
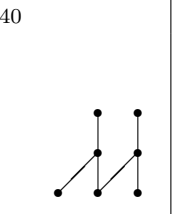
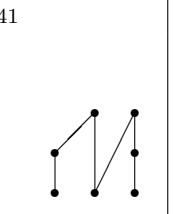
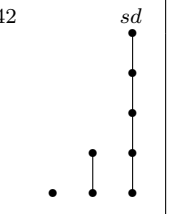
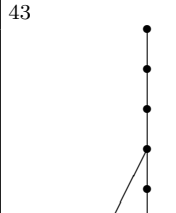
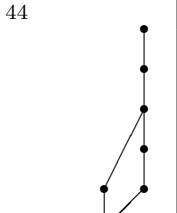
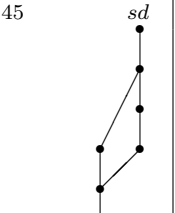
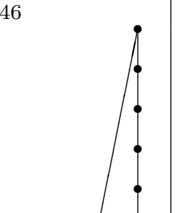
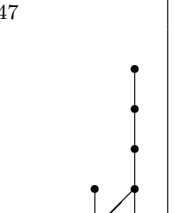
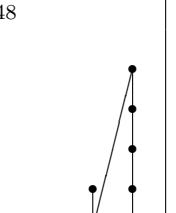
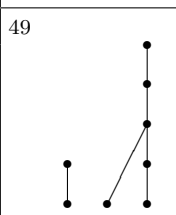
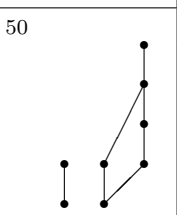
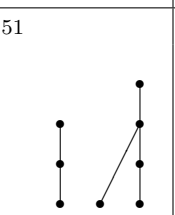
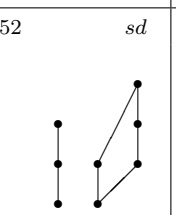
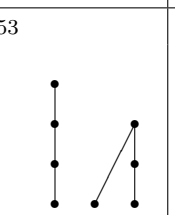
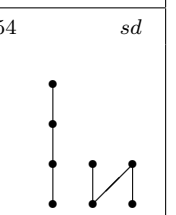
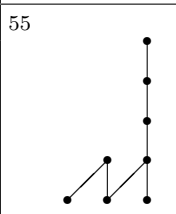
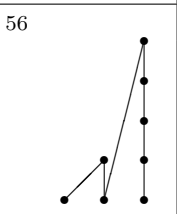
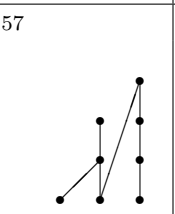
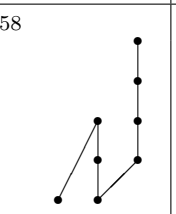
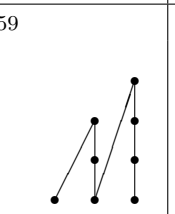
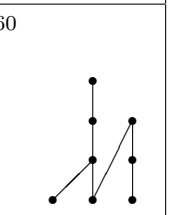
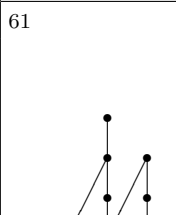
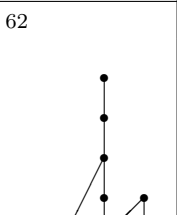
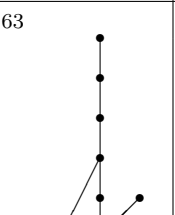
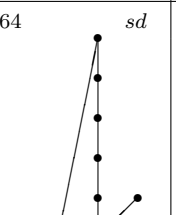
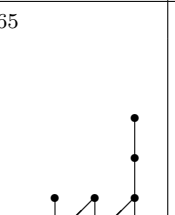
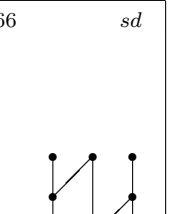
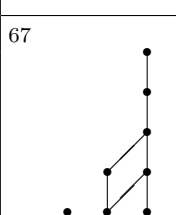
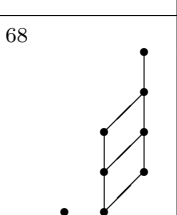
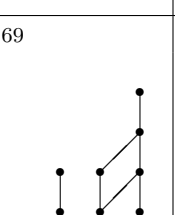
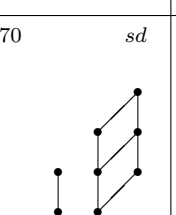
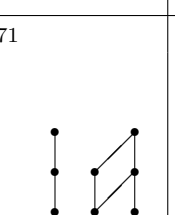

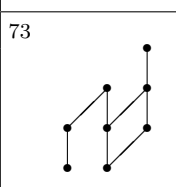
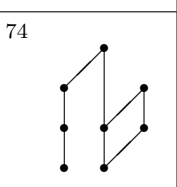
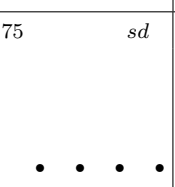


6 The table of the P -critical posets

We follow the paper [3]. The P -critical posets are written up to isomorphism and duality; their number is 75: $PC_1, PC_2, \dots, PC_{75}$. Self-dual posets are marked (in the upper right corners)

by sd . If we add all the posets dual to unmarked ones, we obtain the classification of P -critical posets up to isomorphism; their number is 132: PC_k for $k = 1, 2, \dots, 75$ and PC_s^{op} for $s \neq 1, 2, 4, 14, 23, 29, 31, 34, 35, 37, 42, 45, 52, 54, 64, 66, 70, 75$.

1 sd	2 sd	3	4 sd	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14 sd	15	16	17	18
19	20	21	22	23 sd	24
25	26	27	28	29 sd	30
31 sd	32	33	34 sd	35 sd	36

37 	38 	39 	40 	41 	42 
43 	44 	45 	46 	47 	48 
49 	50 	51 	52 	53 	54 
55 	56 	57 	58 	59 	60 
61 	62 	63 	64 	65 	66 
67 	68 	69 	70 	71 	72 
73 	74 	75 			

Список використаних джерел

1. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen / P. Gabriel // *Manuscripta Math.* – 1972. – 6. – P. 71-103.

References

1. GABRIEL, P. (1972) Unzerlegbare Darstellungen. *Manuscripta Math.*, **6**, p. 71-103.

2. Дрозд Ю. А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств / Ю. А. Дрозд // Функц. анализ и его прил. – 1974. – 8. – №3. – С. 34-42.
2. DROZD YU. A. (1974) Coxeter transformations and representations of partially ordered sets. *Funct. Analysis and Its Appl.*, **8**, №3, p. 34-42 (in Russian).
3. Бондаренко В. М. (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса / В. М. Бондаренко, М. В. Степочкина // Проблемы анализа і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – 2. – №3. – С. 18-58.
3. BONDARENKO V. M., STYOPCHIKINA M. V. (2005) (Min, max)-equivalence of partially ordered sets and the Tits quadratic form. *Problems of Analysis and Algebra: Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, **2**, №3, p. 18-58 (in Russian).
4. Simson D. Linear representations of partially ordered sets and vector space categories / D. Simson // Philadelphia: Gordon and Breach, 1992. – XV+499 pp.
4. SIMSON D. (1992) *Linear representations of partially ordered sets and vector space categories*, Philadelphia: Gordon and Breach, XV+499 p.
5. Simson D. A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots / D. Simson, K. Zajac // Intern. J. Math. Mathematical Sciences. – 2013. – Article ID 743734. – 22 pp.
5. SIMSON D., ZAJAC K. (2013) A framework for Coxeter spectral classification of finite posets and their mesh geometries of roots. *Intern. J. Math. Mathematical Sciences*, Article ID 743734, 22 p.
6. Gąsiorek M. Algorithmic computation of principal posets using Maple and Python / M. Gąsiorek, D. Simson, K. Zajac // Algebra and Discrete Mathematics. – 2014. – 17. – №1. – P. 33-69.
6. GAŚIOREC M., SIMSON D., ZAJAC K. (2014) Algorithmic computation of principal posets using Maple and Python. *Algebra and Discrete Mathematics*, **17**, №1, p. 33-69.
7. Bondarenko V. M. On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms / V. M. Bondarenko // Bull. of Taras Shevchenko University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – № 1. – P. 24-25.
7. BONDARENKO V. M. (2005) On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms. *Bull. of Taras Shevchenko University of Kiev (series: Physics & Mathematics)*, № 1, p. 24-25.
8. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев // Москва: “Наука”, 1984. – 416 с.
8. FADDEEV D. K. (1984) *Lectures on algebra*. Moscow: “Nauka”, 416 p. (In Russian).
9. Бондаренко В. В. Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм / В. В. Бондаренко, В. М. Бондаренко, Ю. Н. Перегуда // Укр. мат. журн. – 2012. – 64. – № 7. – С. 892-907.
9. BONDARENKO V. V., BONDARENKO V. M., PEREGUDA YU. N. (2012) Local deformations of positive-definite quadratic forms. *Ukrainian Math. J.*, **64**, № 7, p. 892-907 (in Russian).
10. Овсиенко С. А. Целые слабо положительные формы / С. А. Овсиенко // В кн.: Шуровские матричные задачи и квадратичные формы: Препринт 78.25. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 3-17.
10. OVSIENKO S. A. (1978) Integer weakly positive forms. In: *Shurov matrix problems and quadratic forms: Preprint 78.25*, Kiev, Inst. of Math. of NAN USSR, p. 3-17 (in Russian).
11. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы 1, 2, 3. / Н. Бурбаки // Москва: “Мир”, 1976. – 495 с.
11. BOURBAKI N. (1976) *Groups and Lie algebras. Chapters 1, 2, 3*. Moscow: “Mir”, 495 p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 14.05.2018

УДК 512.53

В.М. Журавльов¹, к.ф.-м.н., доцент
І.М. Циганівська², к.ф.-м.н., асистент

Проективні ґратки черепичних порядків.

^{1,2}Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 64.
e-mail: vshur@univ.kiev.ua
iratsy80@gmail.com

V.M. Zhuravlev¹, Ph.D., Associate Professor
I.M. Tsyganivska², Ph.D., Associate Professor

Projective lattices of tiled orders.

^{1,2}Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: vshur@univ.kiev.ua
iratsy80@gmail.com

У роботі вивчаються проективні ґратки черепичних порядків. Описано умови, яким задовольняють елементи матриці показників черепичного порядку, за яких перетин проективних ґраток є проективною ґраткою.

Ключові слова: черепичний порядок, матриця показників, проективна ґратка.

Tiled orders over discrete valuation ring have been studied since the 1970s by many mathematicians, in particular, by Yategaonkar V.A., Tarsy R.B., Roggenkamp K.W, Simson D., Drozd Y.A., Zavadsky A.G. and Kirichenko V.V. Yategaonkar V.A. proved that for every $n \geq 2$, there is, up to an isomorphism, a finite number of tiled orders over a discrete valuation ring \mathcal{O} of finite global dimension which lie in $M_n(K)$ where K is a field of fractions of a commutatively discrete valuation ring \mathcal{O} . The articles by R.B. Tarsy, V.A. Yategaonkar, H. Fujita, W. Rump and others are devoted to the study of the global dimension of tiled orders. H. Fujita described the reduced tiled orders in $M_n(D)$ of finite global dimension for $n = 4, 5$. V.M. Zhuravlev and D.V. Zhuravlev described reduced tiled orders in $M_n(D)$ of finite global dimension for $n = 6$. This paper examines the necessary condition for the finiteness of the global dimension of the tile order. Let A be a tiled order. The kernel of the projective resolvent of an irreducible lattice has the form $M_1 f_1 + M_2 f_2 + \dots + M_s f_s$, where M_i is irreducible lattice, f_i is some vector. If the tile order has a finite global dimension, then there is a projective lattice that is the intersection of projective lattices. This condition is the one explored in the paper.

Key words: tiled order, exponent matrix, projective lattice.

Communicated by Prof. Petravchuk A. P.

1 Вступ

Черепичні порядки (tiled orders) над дискретно нормованими кільцями вивчалися, починаючи з 70-х років минулого сторіччя, багатьма математиками, зокрема, Ятегаонкаром В.А., Тарсі Р.Б., Рогенкампом К.В., Сімсоном Д., Дроздом Ю.А., Завадським О.Г. та Кириченком В.В. Скінченні прямі добутки A таких порядків є нетеровими справа напівпервинними напівдосконалими напівдистрибутивними кільцями, у яких для будь-якого локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим (не обов'язково комутативним) [1]. Такі кільця під назвою "напівмаксимальні кільця" були введені у 1974 році Завадським О.Г. та Кириченком В.В.

Згідно термінології Р.Б. Тарсі [4] та В.А. Ятегаонкара [5], кільце $A \subset M_n(K)$, де K є по-

лем часток комутативного дискретно нормованого кільця \mathcal{O} , називається черепичним порядком над \mathcal{O} , якщо $M_n(K)$ — класичне кільце часток A , $e_{ii} \in A$ та $e_{ii} A e_{ii} = \mathcal{O}$ для $i = 1, \dots, n$, де e_{ii} — матричні ідемпотенти $M_n(K)$. Отже, означення черепичного порядку як первинного нетерового напівдосконалого напівдистрибутивного кільця є узагальненням поняття черепичного порядку над дискретно нормованим кільцем в розумінні Р.Б. Тарсі та В.А. Ятегаонкара.

В.А. Ятегаонкар у [5] довів, що для кожного $n \geq 2$ існує, з точністю до ізоморфізму, скінченне число черепичних порядків над дискретно номованим кільцем \mathcal{O} скінченної глобальної розмірності, які лежать у $M_n(K)$, де K є полем часток комутативного дискретно нормованого кільця \mathcal{O} . В якості кільця \mathcal{O} часто розглядає-

ться кільце $k[[x]]$ формальних степеневих рядів над полем k від однієї змінної x .

Вивченню глобальної розмірності черепичних порядків присвячені багаточисельні статті. Р.Б. Тарсі висловив гіпотезу, що максимальною скінченною глобальною розмірністю черепичного порядку, який лежить у $M_n(K)$, є число $n-1$. Це дійсно має місце для але для Х. Фуджита побудував приклад черепичного порядку A , який лежить у $M_6(K)$, та $gl.dim A = 6$.

Фуджита в [6] описав зведені черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності для $n = 4, 5$. В.М. Журавльов та Д.В. Журавльов описали зведені черепичні порядки в $M_n(D)$ скінченної глобальної розмірності для $n = 6$.

У даній роботі розглядається необхідна умова для скінченності глобальної розмірності черепичного порядку. Відмітимо, що в нашій термінології "черепичний порядок" — це нетерове з двох сторін первинне напівдосконале та напівдистрибутивне кільце з ненульовим радикалом Джекобсона. Всі необхідні відомості про черепичні порядки можна знайти в [1], [2].

2 Черепичні порядки над дискретно нормованими кільцями

Означення 2.1. Кільце A називається **напівмаксимальним**, якщо воно є напівдосконалим напівпервинним нетеровим кільцем таким, що для довільного локального ідемпотента $e \in A$ кільце eAe є дискретно нормованим кільцем (не обов'язково комутативним) [3].

Теорема 2.1. (див. [3]) *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного вигляду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix} \quad (1)$$

де $n \geq 1$, \mathcal{O} — дискретно нормоване кільце з простим елементом π , α_{ij} — цілі раціональні числа такі, що $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх i, j, k та $\alpha_{ii} = 0$ для всіх i .

Первинне напівмаксимальне кільце називається черепичним порядком.

Ми будемо використовувати наступне позначення: $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda)\}$, де $\mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})$ — матриця показників кільця Λ , т.б. $\Lambda = \sum_{i,j=1}^n e_{ij}\pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Якщо черепичний порядок є *зведеним*, то $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} > 0$ для $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.

Кільце \mathcal{O} вкладається в класичне тіло часток \mathcal{D} , і (1) означає множину всіх матриць $(a_{ij}) \in M_n(\mathcal{D})$ таких що $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}\mathcal{O} = e_{ii}\Lambda e_{jj}$, де e_{11}, \dots, e_{nn} — матричні одиниці кільця $M_n(\mathcal{D})$. Очевидно, що $Q = M_n(\mathcal{D})$ є класичним кільцем часток кільця Λ .

Означення 2.2. Нехай A — черепичний порядок. Правою (лівою) A -граткою називається правий (лівий) A -модуль, який є скінченнопородженим вільним \mathcal{O} -модулем.

Зокрема, всі скінченнопороджені проєктивні A -модулі є A -гратками.

Серед всіх A -граток виділяються так звані незвідні A -гратки, тобто A -гратки, які містяться у простому правому (лівому) Q -модулі U (відп. V). Ці гратки утворюють частково впорядковану множину $S_r(A)$ (відп. $S_l(A)$) відносно включення. Як було показано в [3] будь-яка права (відп. ліва) незвідна A -гратка M (відп. N), яка лежить в U (відп. в V), є A -модулем з \mathcal{O} -базисом $\pi^{\alpha_1}e_1, \dots, \pi^{\alpha_n}e_n$, причому

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_{ij} \geq \alpha_j, & \text{якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_r(A) \\ \alpha_j + \alpha_{ij} \geq \alpha_i & \text{якщо } (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in S_l(A) \end{cases}$$

де буква T означає операцію транспонування. Ми будемо записувати $[M] = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ або $M = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, якщо $M \in S_r(A)$.

3 Проєктивні гратки

Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — зведений черепичний порядок в $M_n(D)$, $P_k = e_{kk}\Lambda$, $k = 1, \dots, n$. P_1, \dots, P_n — всі попарно неізоморфні нерозкладні проєктивні Λ -модулі. Ядро проєктивної резольвенти незвідної Λ -гратки має вигляд $\sum_{t=1}^s M_t f_t$, де M_t — перетин проєктивних граток, f_t — деякі вектори (див. [7]). Для скінченності проєктивної розмірності цієї гратки потрібно, щоб хоча б один перетин проєктивних граток був проєктивною граткою.

Нехай $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$. Можливі випадки:

- (1) $a + \alpha_{il} > b + \alpha_{jl}$. Тоді $a + \alpha_{il} = c + \alpha_{kl}$ і $a = c + \alpha_{kl} - \alpha_{il}$;
 (2) $b + \alpha_{jp} > a + \alpha_{ip}$. Тоді $b + \alpha_{jp} = c + \alpha_{kp}$ і $b = c + \alpha_{kp} - \alpha_{jp}$;
 (3) $a + \alpha_{iq} = b + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$. Тоді $a = c + \alpha_{kq} - \alpha_{iq}$, $b = c + \alpha_{kq} - \alpha_{jq}$.

Маємо розбиття множини індексів на підмножини $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, де $I_1 = \{l, \text{ для яких виконується випадок (1)}\}$, $I_2 = \{p, \text{ для яких виконується випадок (2)}\}$, $I_3 = \{q, \text{ для яких виконується випадок (3)}\}$. Незвідні проєктивні ґратки $\pi^a P_i$, $\pi^b P_j$ непорівняльні, тому множини I_1 та I_2 непорожні.

Виразимо a і b у кожному випадку через c . Отримаємо $a + \alpha_{il} = c + \alpha_{kl}$, $a = c + \alpha_{kl} - \alpha_{il}$, $b + \alpha_{jp} = c + \alpha_{kp}$, $b = c + \alpha_{kp} - \alpha_{jp}$. З нерівності $a + \alpha_{il} > b + \alpha_{jl}$ отримуємо

$$\alpha_{kl} > \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jl}. \quad (2)$$

З нерівності $b + \alpha_{jp} > a + \alpha_{ip}$ отримуємо

$$\alpha_{kp} > \alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ip}. \quad (3)$$

Рівності $a + \alpha_{iq} = b + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$ дають

$$\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{iq} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jq} = \alpha_{kq}. \quad (4)$$

Якщо $k \in I_1$, то $0 = \alpha_{kk} > \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jk}$. Отримали суперечність. Якщо $k \in I_2$, то $0 = \alpha_{kk} > \alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ik}$. Отримали суперечність. Отже, $k \in I_3$ і $I_3 \neq \emptyset$.

При $q = k$ маємо $\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ik} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jk} = \alpha_{kk} = 0$. Звідси

$$\alpha_{ik} + \alpha_{kl} = \alpha_{il}, \quad \alpha_{jk} + \alpha_{kp} = \alpha_{jp}. \quad (5)$$

З (5) випливає, що $i \notin I_1$ і $j \notin I_2$.

Якщо $i \in I_3$, то $\alpha_{kl} - \alpha_{il} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{ji} = \alpha_{ki}$. Враховуючи (5), маємо $-\alpha_{ik} = -\alpha_{jk} + \alpha_{ji} = \alpha_{ki}$. Звідси $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$. Отримали суперечність. Отже, $i \in I_2$. Якщо $j \in I_3$, то $\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ij} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} = \alpha_{kj}$. Враховуючи (5), маємо $-\alpha_{ik} + \alpha_{ij} = -\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$. Звідси $\alpha_{jk} + \alpha_{kj} = 0$. Отримали суперечність. Отже, $j \in I_1$.

Нерівність (2) з урахуванням (5) набуває вигляду $\alpha_{kl} \geq \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jl} = -\alpha_{jk} + \alpha_{jl}$. Звідси $\alpha_{jk} + \alpha_{kl} > \alpha_{jl}$. Нерівність (3) з урахуванням (5) набуває вигляду $\alpha_{kp} \geq \alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{ip} = -\alpha_{ik} + \alpha_{ip}$. Звідси $\alpha_{ik} + \alpha_{kp} > \alpha_{ip}$. Рівність (3) $\alpha_{kl} - \alpha_{il} + \alpha_{iq} = \alpha_{kp} - \alpha_{jp} + \alpha_{jq} = \alpha_{kq}$ з урахуванням (5) набуває вигляду $-\alpha_{ik} + \alpha_{iq} = -\alpha_{jk} + \alpha_{jq} = \alpha_{kq}$. Звідси отримуємо $\alpha_{ik} + \alpha_{kq} = \alpha_{iq}$,

$\alpha_{jk} + \alpha_{kq} = \alpha_{jq}$. Таким чином $i \in I_2$, $j \in I_1$, $k \in I_3$ і для довільних $l \in I_1$, $p \in I_2$, $q \in I_3$ маємо наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} + \alpha_{kl} &= \alpha_{il}, & \alpha_{jk} + \alpha_{kp} &= \alpha_{jp}, \\ \alpha_{ik} + \alpha_{kq} &= \alpha_{iq}, & \alpha_{jk} + \alpha_{kq} &= \alpha_{jq}, \\ \alpha_{ik} + \alpha_{kp} &> \alpha_{ip}, & \alpha_{jk} + \alpha_{kl} &> \alpha_{jl}. \end{aligned} \quad (6)$$

Навпаки, нехай існує розбиття $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, $i \in I_2$, $j \in I_1$, $k \in I_3$ і для довільних $l \in I_1$, $p \in I_2$, $q \in I_3$ маємо співвідношення (6). Покладемо $a = c - \alpha_{ik}$, $b = c - \alpha_{jk}$. Тоді $a + \alpha_{il} = c - \alpha_{ik} + \alpha_{il} = c + \alpha_{kl} > c - \alpha_{jk} + \alpha_{jl} = b + \alpha_{jl}$ для довільного $l \in I_1$. $b + \alpha_{jp} = c - \alpha_{jk} + \alpha_{jp} = c + \alpha_{kp} > c - \alpha_{ik} + \alpha_{ip} = a + \alpha_{ip}$ для довільного $p \in I_2$.

$a + \alpha_{iq} = c - \alpha_{ik} + \alpha_{iq} = c + \alpha_{kq}$ для довільного $q \in I_3$. $b + \alpha_{jq} = c - \alpha_{jk} + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$ для довільного $q \in I_3$. Тому $a + \alpha_{iq} = b + \alpha_{jq} = c + \alpha_{kq}$. Це означає, що $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$.

Ми довели наступну теорему.

Теорема 3.1. *Нехай M_1, M_2, M_3 — незвідні проєктивні ґратки. Тоді $M_1 \cap M_2 = M_3$ тоді і тільки тоді, коли існує розбиття множини $I = \{1, 2, \dots, n\}$ на непорожні підмножини I_1, I_2, I_3 такі, що виконуються умови (6). Якщо $M_1 \simeq P_i, M_2 \simeq P_j, M_3 \simeq P_k$, де P_i, P_j, P_k $\pi^a P_i \cap \pi^b P_j = \pi^c P_k$ для деяких $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*

У сагайдаку Q немає стрілок з точки i у точки з $I_1 \cup I_3 \setminus k$, та з точки j у точки з $I_2 \cup I_3 \setminus k$.

Теорема 3.2. *Нехай $\Lambda = \{\mathcal{O}, \mathcal{E}(\Lambda) = (\alpha_{ij})\}$ — черепичний порядок над дискретно нормованим кільцем \mathcal{O} , P_1, \dots, P_n — всі попарно неізоморфні проєктивні Λ -ґратки $1 = e_1 + \dots + e_n$, $P_i = e_i \Lambda$. $\prod_{l=1}^s \pi^{a_l} P_{m_l} = \pi^a P_k$, де $\pi^{a_1} P_{m_1}, \dots, \pi^{a_s} P_{m_s}$ — попарно непорівняльні проєктивні незвідні Λ -ґратки, тоді і тільки тоді, коли існують непорожні підмножини I_1, I_2, \dots, I_s множини індексів $I = \{1, 2, \dots, n\}$ такі, що $\bigcup_{l=1}^s I_l = I$ та $\alpha_{m_l k} + \alpha_{kp^{(l)}} = \alpha_{m_l p^{(l)}}$ для всіх l та для всіх $p^{(l)} \in I_l$.*

Доведення. Нехай $\prod_{l=1}^s \pi^{a_l} P_{m_l} = \pi^a P_k$. Позначимо $I_l = \{p^{(l)} \in I : a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} \geq a_j + \alpha_{m_j p^{(l)}} \text{ для всіх } j = 1, \dots, s\}$. Тоді $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} = a + \alpha_{kp^{(l)}}$ для всіх $p \in I_l$. Звідси $a_l = a + \alpha_{kp^{(l)}} - \alpha_{m_l p^{(l)}}$. Маємо $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} = a + \alpha_{kp^{(l)}} \geq a_j + \alpha_{jp^{(l)}} = (a + \alpha_{kp^{(j)}} - \alpha_{m_j p^{(j)}}) + \alpha_{m_j p^{(l)}}$. Отримали

$$\alpha_{kp^{(l)}} \geq \alpha_{kp^{(j)}} - \alpha_{m_j p^{(j)}} + \alpha_{m_j p^{(l)}}. \quad (7)$$

Оскільки $\bigcup_{l=1}^s I_l = I$, то існує t таке, що $k \in I_t$.

Нерівність (7) виконується, зокрема при $p^{(t)} = k$. Маємо $0 = \alpha_{kk} \geq \alpha_{kp^{(j)}} - \alpha_{m_j p^{(j)}} + \alpha_{m_j k}$ для всіх j . За кільцевими нерівностями $\alpha_{m_j k} + \alpha_{kp^{(j)}} \geq \alpha_{m_j p^{(j)}}$ для всіх j .

Отже, $\alpha_{m_j k} + \alpha_{kp^{(j)}} = \alpha_{m_j p^{(j)}}$.

Навпаки, нехай $\bigcup_{l=1}^s I_l = I$, $I_l \neq \emptyset$ для всіх l та $\alpha_{m_l k} + \alpha_{kp^{(l)}} = \alpha_{m_l p^{(l)}}$ для всіх l та $p^{(l)} \in I_l$.

Список використаних джерел

1. *Hazewinkel M.* Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko // Mathematics and Its Applications, **575**, Kluwer Acad. Publish. – 2004. – V.1. – P. 380.
2. *Hazewinkel M.* Algebras, Rings and Modules / M. Hazewinkel, N. Gubareni and V.V. Kirichenko // Mathematics and Its Applications, **586**, Kluwer Acad. Publish.– 2007.– V.2. – P. 400.
3. *Zavadskij A. G.*, Torsion-free modules over prime rings / A. G. Zavadskij, V. V. Kirichenko, *Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov Inst. (LOMI)*, v. 57, 1976, p. 100-116.
4. *Tarsy R.B.* Global dimension of orders / R.B. Tarsy // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1970. – vol. 151. – P. 335-340.
5. *Jategaonkar V.A.* Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring / V.A. Jategaonkar // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1974. – vol. 196. – P. 313-330.
6. *Fujita H.*, Tiled orders of finite global dimension / H.Fujita, *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension" *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**327**, No.2 (1991), pp. 919–920.
7. *Zhuravlev V.*, Projective resolution of irreducible modules over tiled order. / V. Zhuravlev, D. Zhuravlyov. // *Algebra and discrete mathematics.* Volume 14 (2012). **2**. pp. 323 – 336.

Покладемо $a_l = a + \alpha_{kp^{(l)}} - \alpha_{m_l p^{(l)}} = a - \alpha_{m_l k}$. Тоді $(a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}}) - (a_j + \alpha_{m_j p^{(l)}}) = (a - \alpha_{m_l k} + \alpha_{m_l p^{(l)}}) - (a - \alpha_{m_j k} + \alpha_{m_j p^{(l)}}) = \alpha_{m_j k} - \alpha_{m_l k} + \alpha_{m_l p^{(l)}} - \alpha_{m_j p^{(l)}} = \alpha_{m_j k} + \alpha_{kp^{(l)}} - \alpha_{m_j p^{(l)}} \geq 0$. Отже, $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} \geq a_j + \alpha_{m_j p^{(l)}}$ для всіх l, j та $p^{(l)} \in I_l$.

Враховуючи, що $a_l + \alpha_{m_l p^{(l)}} = a + \alpha_{kp^{(l)}}$, отримаємо $\prod_{l=1}^s \pi^{a_l} P_{m_l} = \pi^a P_k$. Теорему доведено. \square

References

1. HAZEWINKEL, M., GUBARENI, N. AND KIRICHENKO, V.V. (2004) Algebras, Rings and Modules. *Series: Mathematics and Its Applications*, **575**, Kluwer Acad. Publish. 1. pp.380.
2. HAZEWINKEL, M, GUBARENI, N. AND KIRICHENKO, V.V. (2007) Algebras, Rings and Modules. *Series: Mathematics and Its Applications*, **586**, Kluwer Acad. Publish. 2. pp.400.
3. ZAVADSKIJ, A.G., KIRICHENKO, V.V. (1976) Torsion-free modules over prime rings. *Zap. Nauch. Seminar. Leningrad. Otdel. Mat. Steklov Inst. (LOMI)*. v. 57, p. 100-116.
4. TARSY, R.B. (1970) Global dimension of orders. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 151. P. 335-340.
5. JATEGAONKAR, V.A. (1974) Global dimension of tiled orders over a discrete valuation ring. *Trans. Amer. Math. Soc.* vol. 196. P. 313-330.
6. FUJITA, H. (1990), (1991) Tiled orders of finite global dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**322**, 1990, pp. 329–342; Erratum to "Tiled orders of finite global dimension". *Trans. Amer. Math. Soc.*, v.**327**, No.2 pp. 919–920.
7. ZHURAVLEV, V.N., ZHURAVLYOV, D.V. (2012) Projective resolution of irreducible modules over tiled order. *Algebra and discrete mathematics.* Volume 14. **2**. pp. 323 – 336.

Received: 10.02.2018

УДК 519.21

Козаченко Ю.¹, д.ф.-м.н., проф.
Островський Є.², проф.
Сирота Л.³, проф.

**Еквівалентність між розподілами
хвостів, нормою в лебегових просторах
та орлічевою нормою для випадкових
величин, для яких не виконується
умова Крамера**

¹Кафедра теорії ймовірностей, статистики
та актуарної математики, Київський націо-
нальний університет імені Тараса Шевченка,
м. Київ, Україна,

e - mails: yvk@univ.kiev.ua, ykoz@ukr.net

² Кафедра математики, Бар-Іланський універ-
ситет, 59200, Рамат Ган, Ізраїль,
e-mail: eugostrovsky@list.ru

³ Кафедра математики, Бар-Іланський універ-
ситет, 59200, Рамат Ган, Ізраїль,
e - mail: sirota3@bezeqint.net

Kozachenko Yu.¹, Dr.Sci., Prof.,
Ostrovsky E.², Prof.,
Sirota L.³, Prof.

**Equivalence between tails, Grand
Lebesgue Spaces and Orlicz norms for
random variables without Kramer's
condition**

¹Department of Probability Theory, Statisti-
cs and Actuarial Mathematics, Taras Shevchenko
National University of Kyiv, Kiev, Ukraine,

e - mails: yvk@univ.kiev.ua, ykoz@ukr.net

² Department of Mathematics, Bar-Ilan Universi-
ty, 59200, Ramat Gan, Israel.

e-mail: eugostrovsky@list.ru

³ Department of Mathematics, Bar-Ilan Universi-
ty, 59200, Ramat Gan, Israel.

e - mail: sirota3@bezeqint.net

*В роботі розглядаються неасимптотичні попарні з точністю до мультиплікативної кон-
станти взаємозв'язки між поведінкою хвостів, моментами (норми в просторі Лебега) та нор-
мою Орліча для випадкових величин, для яких, в загальному випадку, не виконується умова
Крамера.*

*Ключові слова: Випадкова величина та випадковий вектор (r.v.), метод сідлової точки,
хвіст розподілу, моменти, простори Лебега-Ріца, Орліча і простори Лебега (GLS); повільно
змінюючі функції, перетворення Юнга-Фенчеля, теорема і нерівність Фенхеля-Моро, функція
Юнга-Орліча, оцінка Маркова - Чернова, неасимптотичні оцінки, умова Крамера.*

*Ключові слова: імпульсна перехідна функція, лінійна однорідна система, гауссовий процес,
сумісна корелограма.*

*We offer in this paper the non-asymptotical pairwise bilateral exact up to multiplicative constants
interrelations between the tail behavior, moments (Grand Lebesgue Spaces) norm and Orlicz's norm for
random variables (r.v.), which does not satisfy in general case the Kramer's condition.*

*Key Words: Random variable and random vector (r.v.), saddle - point method, tail of distributi-
on, moments, Lebesgue - Riesz, Orlicz and Grand Lebesgue Spaces (GLS); slowly varying functions,
Young-Fenchel transform, theorem and inequality of Fenchel-Moreau, Young-Orlicz function, Markov -
Chernov's estimate, non-asymptotical estimates, Kramer's condition.*

Mathematics Subject Classification (2000): primary 60G17; secondary 60E07; 60G70.

Communicated by Assoc. Prof. Rozora I.V.

1 Definitions. Notations. Previous results. Statement of problem.

Let (Ω, B, \mathbf{P}) be certain probability space with non - trivial probability measure \mathbf{P} and correspondent expectation \mathbf{E} , and let $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ be numerical valued random variable. We denote as usually by $|\xi|_p$, $p \in [1, \infty]$

its classical Lebesgue - Riesz $L_p = L(p) = L_p(\Omega)$ norm

$$|\xi|_p := [\mathbf{E}|\xi|^p]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$|\xi|_\infty := \text{vraisup}_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)|.$$

The so - called *tail - function* $T_\xi(u)$, $u \geq 0$ for

this random variable ξ is defined by a formula

$$T_{\xi}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ \mathbf{P}(\xi > u), \mathbf{P}(\xi < -u) \}, \quad u \geq 0. \quad (1.1)$$

An equivalent version:

$$\bar{T}_{\xi}(u) := \mathbf{P}(|\xi| > u), \quad u \geq 0. \quad (1.1a)$$

Obviously,

$$\bar{T}_{\xi}(u) \leq T_{\xi}(u) \leq 2 \bar{T}_{\xi}(u), \quad u \geq 0,$$

the equivalence.

The aim of this report is to establish the reciprocal non - asymptotic interrelations separately mutually possibly exact up to multiplicative constant between tail functions, suitable Orlicz and Grand Lebesgue Spaces norms for random variables.

We do not suppose that the considered in this article r.v. satisfy the famous Kramer's condition:

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall \lambda : |\lambda| < \epsilon_0 \Rightarrow \mathbf{E} \exp(\lambda \xi) < \infty,$$

in contradiction with previous works, see, for example, works [2], [6], [7], [8], [19].

Throughout this paper, the letters $C, C_j(\cdot)$ etc. will denote a various positive finite constants which may differ from one formula to the next even within a single string of estimates and which does not depend on the essentially variables p, x, λ, y, u etc.

We make no attempt to obtain the best values for these constants.

The immediate predecessor of offered report is the article [7], in which was considered the case when the considered r.v. satisfy the famous Kramer's condition. See also [6], [8], chapters 1,2 etc.

We will use in this report in general at the same techniques as in [7].

Recall that the so - called Young-Fenchel transform $g \rightarrow g^*$ of arbitrary real valued function $g = g(x)$ is defined as follows

$$g^*(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \text{Dom}(g)} (xy - g(x)). \quad (1.2)$$

The symbol $\text{Dom}(g)$ denotes as ordinary the domain of definition (in particular, finiteness) of the function $g(\cdot)$.

Let us bring some used further examples. Define the function

$$\begin{aligned} \phi_{m,L} &= \phi_{m,L}(\lambda) := m^{-1} \lambda^m L(\lambda), \\ \lambda &> 0, \quad m = \text{const} > 1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

where $L = L(\lambda)$ is positive *slowly varying* at infinity, i.e. as $\lambda \rightarrow \infty$ function. Then as $x \rightarrow \infty$

$$\phi_{m,L}^*(x) \sim (m')^{-1} x^{m'} L^{-1/(m-1)} \left(x^{1/(m-1)} \right), \quad (1.4)$$

and as ordinary for arbitrary value $m > 1$

$$m' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{m-1}.$$

If for instance $L(\lambda) = [\ln(\lambda + e)]^r$, $r = \text{const} \in \mathbf{R}$, i.e.

$$\phi(\lambda) := \phi_{m,r}(\lambda) = m^{-1} \lambda^m [\ln(\lambda + e)]^r,$$

$$\lambda \geq 0, \quad m = \text{const} > 1, \quad r \in \mathbf{R},$$

then as $x \rightarrow \infty$

$$\phi_{m,r}^*(x) \sim (m')^{-1} x^{m'} [\ln(x + e)]^{-r/(m-1)}, \quad (1.5)$$

see, e.g. [18], p. 40 - 42.

Analogously if

$$\phi(\lambda) := \phi_{m,r,q}(\lambda) = m^{-1} \lambda^m [\ln(\lambda + e)]^r [\ln \ln(\lambda + e^e)]^q,$$

$$\lambda > 0, \quad m = \text{const} > 1, \quad r, q \in \mathbf{R},$$

then similarly as $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \phi_{m,r,q}^*(x) &\sim (m')^{-1} x^{m'} [\ln(x + e)]^{-r/(m-1)} \times \\ &\times [\ln \ln(x + e^e)]^{-q/(m-1)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

More generally, if

$$L(\lambda) = [\ln \lambda]^r M(\ln \lambda),$$

where $M = M(\lambda)$ is positive slowly varying function as $\lambda \rightarrow \infty$, then as $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \phi_{m,L}^*(x) &\sim (m')^{-1} x^{m'} [\ln x]^{-r/(m-1)} \times \\ &\times M^{-1/(m-1)}(\ln x). \end{aligned} \quad (1.7)$$

The case $m = 1$ is more complicated. Define the Ψ function $\psi^{(L)} = \psi^{(L)}(p)$ as follows

$$\psi^{(L)}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{L(p)}, \quad (1.8)$$

where as before $L = L(\lambda)$ is positive continuous slowly varying function as $\lambda \rightarrow \infty$ tending to infinity as $\lambda \rightarrow \infty$. Let also the r.v. ξ be from the Grand Lebesgue Space $G\psi^{(L)}$ with unit norm:

$$\|\xi\|_{G\psi^{(L)}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{p \geq 1} \left\{ \frac{|\xi|_p}{\psi^{(L)}(p)} \right\} = 1,$$

then by the direct definition of these norms

$$|\xi|_p \leq \frac{p}{L(p)}, \quad p \geq 1. \quad (1.9)$$

We deduce by means of Chebyshev - Markov inequality

$$T_\xi(x) \leq \exp(-C(L) x \ln L(x)). \quad (1.10)$$

Conversely, let the estimate (1.10) be a given for some r.v. ξ and some such a positive function $L = L(\cdot)$ for which $L(x) \uparrow \infty$, then

$$|\xi|_p \leq C(L) \frac{p}{L(p)}, \quad p \geq 1. \quad (1.11)$$

2 Grand Lebesgue Spaces (GLS).

Let (Ω, B, \mathbf{P}) be again at the same probability space. Let also $\psi = \psi(p)$, $p \in [1, b)$, $b = \text{const} \in (1, \infty]$ (or $p \in [1, b]$) be certain bounded from below: $\inf \psi(p) > 0$ continuous inside the *semi-open* interval $p \in [1, b)$ numerical function such that the function

$$h(p) = h[\psi](p) \stackrel{\text{def}}{=} p \ln \psi(p) \quad (2.0)$$

is convex.

An important example. Let η be a random variable such that there exists $b = \text{const} > 1$ so that $|\xi|_b < \infty$. The *natural* $G\Psi$ function $\psi_\eta = \psi_\eta(p)$ for the r.v. η is defined by a formula

$$\psi_\eta(p) \stackrel{\text{def}}{=} |\eta|_p.$$

We can and will suppose $b = \sup\{p, \psi(p) < \infty\}$, so that $\text{supp } \psi = [1, b)$ or $\text{supp } \psi = [1, b]$. The set of all such a functions will be denoted by $\Psi(b) = \{\psi(\cdot)\}$; $\Psi := \Psi(\infty)$.

We will consider in this article only the case when $b = \infty$; i.e. $\Psi := \Psi(\infty)$.

By definition, the (Banach) Grand Lebesgue Space (GLS) space $G\psi = G\psi(b)$ consists on all the numerical valued random variables (measurable functions) ζ defined on our measurable space and having a finite norm

$$\|\zeta\| = \|\zeta\|_{G\psi} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{p \in [1, b)} \left\{ \frac{|\zeta|_p}{\psi(p)} \right\}. \quad (2.1)$$

The function $\psi = \psi(p)$ is named *generating function* for the Grand Lebesgue Spaces.

These spaces are Banach functional space, are complete, and rearrangement invariant in the classical sense, see [1], chapters 1, 2; and were investigated in particular in many works, see e.g. [3], [4], [5], [6], [7], [8], [15], [16], [17]. We refer here some used in the sequel facts about these spaces and supplement more.

It is known that if $\zeta \neq 0$, and $\zeta \in G\psi(b)$, then

$$T_\zeta(y) \leq \exp(-h_\psi^*(\ln(y/\|\zeta\|))), \quad y \geq \|\zeta\|, \quad (2.2)$$

where

$$h(p) = h[\psi](p) \stackrel{\text{def}}{=} p \ln \psi(p), \quad 1 \leq p < b.$$

Namely, let $\|\zeta\|_{G\psi(b)} = 1$; therefore by means of Chebyshev - Markov inequality

$$T_\zeta(y) \leq \frac{\psi^p(p)}{y^p} = \exp(-p \ln y + p \psi(p)),$$

following

$$T_\zeta(y) \leq \inf_{p \in [1, b)} \exp(-p \ln y + p \psi(p)) =$$

$$= \exp(-h[\psi]^*(\ln(y/\|\zeta\|))), \quad y \geq e \cdot \|\zeta\|.$$

Conversely, the last inequality may be reversed in the following version: if the r.v. ζ satisfies the *Kramer's condition* and

$$\mathbf{P}(|\zeta| > y) \leq \exp(-h_\psi^*(\ln(y/K))). \quad y \geq e \cdot K,$$

$$K = \text{const} \in (0, \infty),$$

and if the function $h_\psi(p)$, $1 \leq p < \infty$ is positive, continuous, convex and such that

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \psi(p)/p = 0,$$

then $\zeta \in G\psi$, herewith $\|\zeta\| \leq C(\psi) \cdot K$ and conversely

$$\|\zeta\|G\psi \leq C(\psi)K \leq C_2(\psi)\|\zeta\|G\psi,$$

$$0 < C_1(\psi) < C_2(\psi) < \infty. \quad (2.3)$$

Introduce the following *exponential* Young - Orlicz function

$$N_\psi(u) = \exp(h_\psi^*(\ln |u|)), \quad |u| \geq 1;$$

$$N_\psi(u) = Cu^2, \quad |u| < 1,$$

and the correspondent Orlicz norm will be denoted by $\|\cdot\|L(N_\psi) = \|\cdot\|L(N)$. It was done

$$\begin{aligned} \|\zeta\|G\psi &\leq C_1\|\zeta\|L(N) \leq \\ &\leq C_2\|\zeta\|G\psi, \quad 0 < C_1 < C_2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

If for instance

$$\psi(p) = \psi_m(p) \stackrel{def}{=} p^{1/m}, \quad p \in [1, \infty),$$

where $m = \text{const} > 1$, then

$$0 \neq \xi \in G\psi_m \Leftrightarrow T_\xi(u) \leq \exp(-C(m)u^m).$$

Define also the correspondent Young - Orlicz function

$$N_m(u) := \exp(|u|^m), \quad |u| \geq 1;$$

$$N_m(u) = Cu^2, \quad |u| \leq 1.$$

The relation (2.3) means in addition in this case

$$\begin{aligned} \|\zeta\|G\psi_m &\leq C_1(m)\|\zeta\|L(N_m) \leq C_2\|\zeta\|G\psi_m, \\ & \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$0 < C_1(m) < C_2(m) < \infty.$$

Notice that in the case when $m \in (0, 1)$ the correspondent random variable ξ does not satisfy the Kramer's condition. We intend to generalize the last propositions further on the case just in particular $m \in (0, 1]$.

Define as an example the following *degenerate* $G\Psi$ function

$$\psi_{(r)}(p) = 1, \quad 1 \leq p \leq r;$$

$$\psi_{(r)}(p) = \infty, \quad p > r; \quad r = \text{const} > 1.$$

The $G\psi_{(r)}$ norm of an arbitrary r.v. η is quite equivalent to the classical Lebesgue - Riesz L_r norm

$$\|\eta\|G\psi_{(r)} = |\eta|_r. \quad (2.6)$$

Thus, the Grand Lebesgue Spaces are direct generalizations of the Lebesgue - Riesz spaces.

3 Auxiliary estimates from the saddle - point method.

We must investigate in advance one interest and needed further integrals. Namely, let (X, M, μ) , $X \subset R$ be non-trivial measurable space with non-trivial sigma finite measure μ .

We assume at once $\mu(X) = \infty$, as long as the opposite case is trivial for us. We intend to estimate for Ψ greatest Ψ values of real parameter λ , say $\lambda > e$, the following integral

$$I(\lambda) := \int_X e^{\lambda x - \zeta(x)} \mu(dx). \quad (3.1)$$

assuming of course its convergence for all the sufficiently great values of the parameter λ . The offered below estimates may be considered as a some generalizations of the saddle - point method.

Here $\zeta = \zeta(x)$ is non-negative measurable function, not necessary to be convex.

We represent now two methods for *upper* estimate $I(\lambda)$ for sufficiently greatest values of the real parameter λ .

Note first of all that if in contradiction the measure μ is finite: $\mu(X) = M \in (0, \infty)$; then the integral $I(\lambda)$ allows a very simple estimate

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\leq M \cdot \sup_{x \in X} \exp(\lambda x - \zeta(x)) = \\ &= M \cdot \exp(\zeta^*(\lambda)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Let now $\mu(X) = \infty$ and let $\epsilon = \text{const} \in (0, 1)$; let us introduce the following auxiliary integral

$$K(\epsilon) := \int_X e^{-\epsilon \zeta(x)} \mu(dx). \quad (3.3)$$

It will be presumed its finiteness at last for some positive value $\epsilon_0 \in (0, 1)$; then $\forall \epsilon \geq \epsilon_0 \Rightarrow K(\epsilon) < \infty$.

Then the following measures are probabilistic:

$$\nu_\epsilon(A) := \frac{\int_A \exp(-\epsilon \zeta(x)) \mu(dx)}{K(\epsilon)}, \quad \epsilon \geq \epsilon_0. \quad (3.4)$$

We have

$$\frac{I(\lambda)}{K(\epsilon)} = \int_X \exp(\lambda x - (1 - \epsilon)\zeta(x)) \nu_\epsilon(dx) \leq$$

$$\begin{aligned} & \exp\left\{\sup_{x \in X} [\lambda x - (1 - \epsilon)\zeta(x)]\right\} = \\ & = \exp\left\{(1 - \epsilon)\zeta^*\left(\frac{\lambda}{1 - \epsilon}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Following,

$$I(\lambda) \leq K(\epsilon) \cdot \exp\left\{(1 - \epsilon)\zeta^*\left(\frac{\lambda}{1 - \epsilon}\right)\right\} \quad (3.5)$$

and hence:

Theorem 3.1 We assert actually under formulated here conditions, in particular, the condition of the finiteness of $K(\epsilon)$ for some value $\epsilon_0 \in (0, 1)$:

$$I(\lambda) \leq \inf_{\epsilon \in (0, 1)} \left[K(\epsilon) \cdot \exp\left\{(1 - \epsilon)\zeta^*\left(\frac{\lambda}{1 - \epsilon}\right)\right\} \right]. \quad (3.6)$$

We can detailed the choice of the value ϵ in the estimates (3.5) - (3.6). Namely, denote

$$\theta = \theta(\lambda) := \frac{c_1}{\lambda \zeta^{*'}(2\lambda)}, \quad \lambda \geq \lambda_0 = \text{const} > 0. \quad (3.7)$$

The value λ_0 is selected such that $\theta(\lambda) \leq 1/2$, $\lambda \geq \lambda_0$. Then

$$\frac{\lambda}{1 - \epsilon} \leq \lambda(1 + 2\epsilon),$$

and we have taking into account the convexity of the function $\zeta^*(\cdot)$ and denoting $\phi(\lambda) = \zeta^*(\lambda)$:

$$\phi\left(\frac{\lambda}{1 - \theta}\right) \leq \phi(\lambda + 2\lambda\theta) \leq$$

$$\phi(\lambda) + 2\theta\lambda \phi'(2\lambda) \leq c_2 + \phi(\lambda).$$

To summarize:

$$I(\lambda) \leq c_2 K(\theta(\lambda)) \exp(\zeta^*(\lambda)). \quad (3.8)$$

As regards the function $K = K(\theta(\lambda))$, note that if $X = R^+$, $\mu(dx) = dx$, and if

$$\zeta(x) \geq c_4 x, \quad x \geq 0, \quad (3.9)$$

then

$$K(\theta(\lambda)) \leq c_5 \lambda \zeta^{*'}(2\lambda),$$

hence

$$I(\lambda) \leq c_6 \lambda \zeta^{*'}(2\lambda) \cdot \exp(\zeta^*(\lambda)), \quad \lambda > \lambda_0. \quad (3.10)$$

If in turn instead (3.9) there holds

$$\zeta(x) \geq c_7 x^\alpha, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$X = R_+, \quad \mu(dx) = dx,$$

then

$$I(\lambda) \leq c_8 \left[\lambda \zeta^{*'}(2\lambda) \right]^{1/\alpha} \cdot \exp(\zeta^*(\lambda)), \quad \lambda > \lambda_0. \quad (3.11)$$

Theorem 3.2. Suppose in addition $X = (a, \infty)$, $a = \text{const} \in R$, or $X = R$, and that

$$\exists C = \text{const} \in (0, \infty), \exists \alpha = \text{const} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta(x) \geq Cx^\alpha, \quad x \geq 1. \quad (3.12)$$

Then there exists a finite positive constant $C = C(\zeta, a)$ such that for sufficiently values λ , say for $\lambda \geq 1$

$$I(\lambda) \leq \exp(\zeta^*(C\lambda)). \quad (3.13)$$

Proof, in particular, the finiteness of $K(\epsilon)$, $\epsilon \in (0, 1)$ contains in fact in [9], chapter 2.1.

We represent now an opposite method, which was introduced in particular case in [7], [8], sections 1.2. Indeed, let $\gamma = \text{const} \in (0, 1)$. We apply the Young's inequality

$$\lambda x \leq \zeta(\gamma x) + \zeta^*(\lambda/\gamma),$$

therefore

$$I(\lambda) \leq e^{\zeta^*(\lambda/\gamma)} \cdot \int_X e^{\zeta(\gamma x) - \zeta(x)} \mu(dx) =$$

$$= R(\gamma) e^{\zeta^*(\lambda/\gamma)}, \quad (3.14)$$

where

$$R(\gamma) := \int_X e^{\zeta(\gamma x) - \zeta(x)} \mu(dx). \quad (3.15)$$

We obtained really the following second estimate.

Lemma 3.2.

$$I(\lambda) \leq \inf_{\gamma \in (0,1)} \left[R(\gamma) e^{\zeta^*(\lambda/\gamma)} \right]. \quad (3.16)$$

4 Main results: connection between tail behavior and Grand Lebesgue Space norm.

Statement of problem: given a tail function $T_\xi(y)$ for the certain (non - zero) random variable ξ of the form

$$T_\xi(y) \leq \exp(-h^*[\psi](\ln y)), \quad y \geq 1, \quad (4.1)$$

where $\psi(\cdot) \in G\Psi$. It is required to prove $\xi \in G\psi$, or on the other words to obtain an estimate of the form $\|\xi\|G\psi < \infty$.

Recall that the inverse conclusion: $\|\xi\|G\psi = 1 \Rightarrow (4.1)$ is known, see (2.2).

So, let the estimate (4.1) be a given. We have for the values $p \geq e$

$$p^{-1} |\xi|_p^p \leq \int_0^\infty x^{p-1} \exp(-h^*[\psi](\ln x)) dx = \int_{-\infty}^\infty \exp(p y - h^*(y)) dy. \quad (4.2)$$

It remains to use the proposition of theorem 3.1.

Theorem 4.1. Suppose

$$C(h) := \sup_{p \in [1, \infty)} \left[h^{*'}[\psi](p) \right]^{1/p} < \infty. \quad (4.3)$$

If the r.v. ξ satisfies the inequalities (4.1) and (4.3), then $\xi \in G\psi$:

$$\|\xi\|G\psi \leq 2 C[h] e^{1/e} < \infty. \quad (4.4)$$

Proof. It is sufficient to note that the function $p \rightarrow h[\psi(p)]$ is continuous and convex and that

$$(h^*)^* = h^{**} = h$$

by virtue of theorem of Fenchel - Moreau.

Let us bring some examples.

Example 4.1. Put as before

$$\psi_m(p) = p^{1/m},$$

but here $m = \text{const} \in (0, \infty)$. Let $\xi \in G\psi_m$ and $\|\xi\|G\psi_m = 1$.

Note that in the case $m \in (0, 1)$ the r.v. ξ does not satisfy in general case the Kramer's condition. But we conclude on the basis of theorem 3.1 $\|\xi\|G\psi_m \in (0, \infty) \iff$

$$\exists C(m) \in (0, \infty), T_\xi(u) \leq \exp(-C(m) u^m), \quad u \geq 0. \quad (4.5)$$

More precisely, if $\|\xi\|G\psi_m = 1$, then

$$T_\xi(u) \leq \exp(-(me)^{-1} y^m), \quad y > 0.$$

Inversely, assume

$$T_\xi(u) \leq \exp(-y^m), \quad y > 0.$$

Then it follows from theorem 3.1

$$\|\xi\|G\psi_m \leq e^{m+1/e}$$

or equally

$$|\xi|_p \leq e^{m+1/e} p^{1/m}, \quad p \geq 1.$$

Let us consider a more general case, indeed, introduce as above the following Ψ function

$$\psi_{m,L}(p) \stackrel{\text{def}}{=} p^{1/m} L(p), \quad m = \text{const} > 0, \quad (4.6)$$

where $L = L(p)$, $p \geq 1$ is some positive continuous slowly varying as $p \rightarrow \infty$ function. We impose for simplicity the following condition on this function:

$$\forall \theta > 0 \Rightarrow \sup_{p \geq 1} \left[\frac{L(p^\theta)}{L(p)} \right] =: C(\theta) < \infty. \quad (4.7)$$

This condition is satisfied, if for example $L(p) = [\ln(p+1)]^r$, $r = \text{const}$.

It follows again from theorem 3.1 that the r.v. ξ belongs to the space $G\psi_{m,L}$:

$$\|\xi\|G\psi_{m,L} = \sup_{p \geq 1} \left[\frac{|\xi|_p}{\psi_{m,L}(p)} \right] = 1 \quad (4.8)$$

if and only if

$$T_{\xi}(y) \leq \exp(-C(m, L) y^m / L(y)), \quad y \geq e. \quad (4.9)$$

As a particular case: define the Ψ - function

$$\psi_{(m,r)}(p) := p^{1/m} \ln^r(p+1), \quad (4.10)$$

$$p \geq 1; \quad m = \text{const} > 0, \quad r = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

The random variable ξ belongs to the space $G\psi_{(m,r)}$:

$$\begin{aligned} & \|\xi\|_{G\psi_{(m,r)}} = \\ & = \sup_{p \geq 1} \left[\frac{|\xi|_p}{\psi_{(m,r)}(p)} \right] = l \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (4.11a)$$

if and only if

$$\begin{aligned} T_{\xi}(u) & \leq \exp(-C(m, r) (u/l)^m \ln^{-r}(u/l)), \\ & \quad u \geq e l. \end{aligned} \quad (4.11b)$$

Example 4.2. A boundary case.

We introduce the following $G\Psi$ function

$$\begin{aligned} \psi^{(s)}(p) & = p (\ln(p+1))^s, \\ s & = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad p \in [1, \infty). \end{aligned} \quad (4.12a)$$

Then the non - zero r.v. ν belongs to the $G\psi^{(s)}$ space if and only if for $y \geq 0$

$$T_{\nu}(y) \leq \exp(-C(s) y \ln^{-s}(y+1)). \quad (4.12b)$$

Note that the r.v. ν satisfies the Kramer's condition if and only if $s \leq 0$. The case $s = 0$ correspondent to the exponential distribution for the r.v. ν ; the case $s = -1$ take place in particular when the r.v. ν has a Poisson distribution, which obey's but the exponential moments.

Example 4.3.

Let us consider the following $\psi_{\beta}(p)$ function

$$\psi_{\beta,C}(p) := \exp(Cp^{\beta}), \quad (4.13)$$

$C, \beta = \text{const} > 0$. Obviously, the r.v. τ for which

$$\forall p \geq 1 \Rightarrow |\tau|_p \geq \psi_{\beta,C}(p)$$

does not satisfy the Kramer's condition.

Let ξ be a r.v. belongs to the $G\psi_{\beta,C}(\cdot)$ space:

$$\|\xi\|_{G\psi_{\beta,C}} = 1, \quad (4.14a)$$

or equally

$$|\xi|_p \leq \exp\{Cp^{\beta}\}, \quad p \in [1, \infty). \quad (4.14b)$$

The last restriction is quite equivalent to the following tail estimate

$$T_{\xi}(y) \leq \exp\left(-C_1(C, \beta) [\ln(1+y)]^{1+1/\beta}\right), \quad (4.15)$$

as $y > 0$.

5 Main results: connection between tail behavior and Orlicz's space norm.

We retain the notations and definitions of the previous sections, in particular,

$$G(u) = G[\psi](u) = h^*[\psi](\ln u), \quad \psi \in G\Psi \quad (5.0)$$

etc. Define also the following Young - Orlicz function $N[\psi](u) :=$

$$\exp[G(u)] = \exp[h^*[\psi](\ln |u|)], \quad u \geq e;$$

$$N[\psi](u) = C u^2, \quad |u| < e. \quad (5.1)$$

We will prove in this section that the tail estimate (2.2) of the r.v. ξ is completely equivalent under some simple conditions to the finiteness of its Orlicz's norm $\|\xi\|_{LN[\psi]}$.

Recall that we do not suppose that the r.v. ξ satisfies the Kramer's condition.

Proposition 5.1. If for some r.v. ξ there holds $\|\xi\|_{LN[\psi]} = K \in (0, \infty)$, then for $y \geq e \cdot \|\xi\|$

$$T_{\xi}(y) \leq \exp(-h_{\psi}^*(\ln(y/(C K))). \quad (5.2)$$

Proof basing only on the Chebyshev - Markov inequality is at the same as before in the inequality (2.2), see [2], chapters 2,3; [6], [7], [19]. Namely, we deduce that for some positive finite constant C_1

$$\mathbf{E} \exp(G(|\xi|/C_1)) < \infty.$$

It remains to use the Chebyshev - Markov inequality.

Proposition 5.2. Assume in addition to the foregoing conditions on the function $\psi(\cdot)$ that the function $G[\psi](u)$ satisfies the following restriction:

$$\begin{aligned} \exists \alpha = \text{const} \in (0, 1), \exists K = \text{const} > 1, \\ \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow G(x/K) \leq \alpha G(x). \end{aligned} \quad (5.3)$$

If for some r.v. ξ

$$T_\xi(y) \leq \exp(-h_\psi^*(\ln(y))), \quad y \geq e, \quad (5.4)$$

then the r.v. ξ belongs to the Orlicz space $LN[\psi]$:

$$\|\xi\|_{LN[\psi]} \leq C(\psi, \alpha, K) < \infty. \quad (5.5)$$

Proof is more complicated than one for proposition 5.1. It used the following auxiliary fact.

Lemma 5.1. Let a function $g: R_+ \rightarrow R_+$ be monotonically increasing, $T = T_\xi(x)$, $S = S_\eta(x)$, $x \geq 0$ be two tail functions correspondingly for non-negative r.v. ξ , η and such that

$$T_\xi(x) \leq S_\eta(x), \quad x \geq 0.$$

We assert:

$$\int_0^\infty g(x) |dT_\xi(x)| \leq \int_0^\infty g(x) |dS_\eta(x)|.$$

Proof of lemma 5.1. One can suppose without loss of generality that both the tail functions T and S are continuous and strictly decreasing. Further, one can realize both the r.v. ξ , η on the classical probability space $\Omega = \{\omega\} = [0, 1]$ equipped with ordinary Lebesgue measure:

$\xi = \xi(\omega) = (1-T)^{-1}(\omega)$, $\eta = \eta(\omega) = (1-S)^{-1}(\omega)$, where f^{-1} denotes the inverse function.

We have $\xi(\omega) \leq \eta(\omega)$ a.e., therefore $g(\xi) \leq g(\eta)$ a.e., and all the more so

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(\xi) &= - \int_0^\infty g(x) dT_\xi(x) \leq \\ &\leq - \int_0^\infty g(x) dS_\eta(x) = \mathbf{E}g(\eta), \end{aligned}$$

Q.E.D.

Proof of proposition 5.2. Let the pair of numbers (α, K) be from the condition (5.3). We have relating the proposition of Lemma 5.1 $\mathbf{E} \exp(G(\xi/K)) =$

$$\int_0^\infty \exp G(x/K) |dT_\xi(x)| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \exp G(x/K) |d \exp(-G(x))| \leq \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp[\alpha G(x)] |d \exp(-G(x))| = \\ &= \int_0^1 z^{-\alpha} dz = \frac{1}{1-\alpha} < \infty. \end{aligned} \quad (5.7)$$

We used by passing (5.6) \rightarrow (5.7) the fact quite thin from an article [14]. It follows immediately from this estimates that $\xi \in L(N[\psi])$, see for example [19], p. 31 - 33.

Examples. The condition (5.3) is satisfied for example for the functions of the form

$$\psi(p) = p^{1/m} L(p), \quad \psi(p) = cp [\ln(p+1)]^r L(\ln p),$$

where $m, c = \text{const} \in (0, \infty)$, $r = \text{const} \in \mathbb{R}$ and $L(\cdot)$ is positive continuous slowly varying at infinity function.

Counterexample. The function

$$\psi_{(r)}(p) = 1, \quad 1 \leq p \leq r;$$

$$\psi_{(r)}(p) = \infty, \quad p > r; \quad r = \text{const} > 1,$$

for which the correspondent function has a form

$$h^*(\ln u) = r \ln u$$

does not satisfy the condition (5.3). Actually, for the r.v. η from the space $L_r = L_r(\Omega)$ the correspondent tail estimate has a form

$$T_\eta(u) \leq cu^{-r},$$

but the inverse conclusion is not true.

6 Concluding remarks.

It is interest by our opinion to obtain the generalization of results of this report into multidimensional case, i.e. into random vectors, alike in the article [7].

We mention even briefly an important possible application of obtained results: a Central Limit Theorem in Banach spaces, in the spirit of [8], section 4.1. The case of finite support $\psi: b < \infty$.

In this case approvals 4.1, 5.1, and 5.2 are in general case incorrect. The correspondent counterexamples may be found in the article [7]. Thus, the problem of description of correspondense between tail behavior and Grand Lebesgue Space norm is in this case an open problem.

Список використаних джерел

1. Булдыгин В.В. Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем / В.В. Булдыгин, І.П. Блажієвська // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2010.– № 4.– С. 16–27.
2. Bennet C. Interpolation of operators / C. Bennet, R. Sharpley // Orlando, Academic Press Inc.–1988.
3. Булдыгин В. Метрические характеристики случайных величин и процессов, / В.Булдыгин, Ю.Козаченко.– Киев, ТВиМС.– 1998.
4. Fiorenza A. Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces / A. Fiorenza // Collect. Math.– 2000.– № 51.– P. 131 – 148.
5. Fiorenza A. Grand and small Lebesgue spaces and their analogs / A. Fiorenza and G.E. Karadzhov // Consiglio Nazionale Delle Ricerche, Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone, Sezione di Napoli, Rapporto tecnico, 272/03.–2005.
6. Iwaniec T. On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses / T. Iwaniec and C. Sbordone // Arch. Rat.Mech. Anal., 119.– 1992.– P.129-143.
7. Козаченко Ю.В. Банаховые пространства случайных величин субгауссовского типа / Ю.В. Козаченко, Е.И. Островский // Теор. вер. и Матем. Статист.–1985.– № 32.–С.43–57.
8. Kozachenko Yu.V., Ostrovsky E., Sirota L. Relations between exponential tails, moments and moment generating functions for random variables and vectors / Yu.V.Kozachenko, E.Ostrovsky, L. Sirota // arXiv:1701.01901v1 [math.FA].– 8 Jan 2017.
9. Островский Е.И. Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения / Островский Е.И, // Москва-Обнинск, ОИИПЕ.– 1999.
10. Ostrovsky E. Vector rearrangement invariant Banach spaces of random variables with exponential decreasing tails of distributions / E. Ostrovsky, L. Sirota // arXiv:1510.04182v1 [math.PR].– 14 Oct 2015.
11. Ostrovsky E. Non-asymptotical sharp exponential estimates for maximum distribution of discontinuous random fields /E. Ostrovsky and L. Sirota // arXiv:1510.08945v1 [math.PR].– 30 Oct 2015.
12. Островский Е.И. О вероятностных мерах в сепарабельных пространствах / Островский Е.И.// Совет. Матем. Доклады.– 1980.–№ 255 (6).–С. 836–838.
13. Ostrovsky E. Criterion for convergence almost everywhere, with applications /E. Ostrovsky and L. Sirota // arXiv:1507.04020v1 [math.FA].– 14 Jul 2015.
14. Ostrovsky E. Schlömilch and Bell series for Bessels functions, with probabilistic applications / E. Ostrovsky and L. Sirota // arXiv:0804.0089v1 [math.CV].– 1 Apr 2008.
15. Ostrovsky E. Sharp moment estimates for polynomial martingales /E. Ostrovsky and L. Sirota // arXiv:1410.0739v1 [math.PR].– 3 Oct 2014.
16. Ostrovsky E. Exact exponential bounds for the random field maximum distribution via the majorizing measures (generic chaining) / E. Ostrovsky, E. Rogover // arXiv:0802.0349v1 [math.PR].– 4 Feb 2008.
17. Ostrovsky E. Entropy and Grand Lebesgue Spaces approach for the problem of Prokhorov - Skorokhod continuity of discontinuous random fields. / E. Ostrovsky and L. Sirota // arXiv:1512.01909v1 [math.Pr].– 7 Dec 2015.
18. Ostrovsky E. Fundamental function for Grand Lebesgue Spaces / E. Ostrovsky and L. Sirota // arXiv:1509.03644v1 [math.FA].–11 Sep 2015.
19. Seneta E. Regularly Varying Functions / Seneta E. // Lectures Notes in Mathematics.– 508.–1976.
20. Василик О.І. ϕ – субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є.Ямненко// Монографія, Київ, "Київський університет".–2008.

References

1. BENNET C. (1988) *Interpolation of operators*, Orlando, Academic Press Inc.
2. BULDYGIN, V., KOZACHENKO, YU. (2000) *Metric characterization of random variables and random processes*, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
3. FIORENZA A. (2000) *Duality and reflexivity in grand Lebesgue spaces*. Collect. Math. **51**, 131 - 148.
4. FIORENZA A AND KARADZHOV G.E. (2005) *Grand and small Lebesgue spaces and their analogs*. Consiglio Nazionale Delle Ricerche, Istituto per le Applicazioni del Calcolo Mauro Picone вЂќТќ, Sezione di Napoli, Rapporto tecnico 272/03.
5. IWANIEC T. AND SBORDONE C. (1992) *On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses*. Arch. Rat.Mech. Anal., 119, 129-143.
6. KOZACHENKO YU. V., OSTROVSKY E.I. (1985) *The Banach Spaces of random Variables of subgaussian Type*. Theory of Probab. and Math. Stat. (in Russian). Kiev, 32, 43-57.
7. KOZACHENKO YU.V., OSTROVSKY E., SIROTA L. (2017) *Relations between exponential tails, moments and moment generating functions for random variables and vectors*. arXiv:1701.01901v1 [math.FA], 8 Jan 2017.
8. OSTROVSKY E.I. (1999). *Exponential estimations for Random Fields and its applications*, (in Russian), Moscow-Obninsk, OINPE.
9. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2015) *Vector rearrangement invariant Banach spaces of random variables with exponential decreasing tails of distributions*. arXiv:1510.04182v1 [math.PR], 14 Oct 2015.
10. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2015) *Non-asymptotical sharp exponential estimates for maximum distribution of discontinuous random fields*. arXiv:1510.08945v1 [math.PR], 30 Oct 2015.
11. OSTROVSKY E.I. (1980) *About supports of probability measures in separable Banach spaces*. Soviet Math., Doklady, V. 255, NO 6, p. 836-838, (in Russian).
12. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2015) *Criterion for convergence almost everywhere, with applications*. arXiv:1507.04020v1 [math.FA], 14 Jul 2015.
13. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2008) *Schl milch and Bell series for Bessels functions, with probabilistic applications*. arXiv:0804.0089v1 [math.CV], 1 Apr 2008.
14. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2014) *Sharp moment estimates for polynomial martingales*. arXiv:1410.0739v1 [math.PR], 3 Oct 2014.
15. OSTROVSKY E., ROGOVER E. (2008) *Exact exponential bounds for the random field maximum distribution via the majorizing measures (generic chaining)*. arXiv:0802.0349v1 [math.PR], 4 Feb 2008.
16. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2015) *Entropy and Grand Lebesgue Spaces approach for the problem of Prokhorov - Skorokhod continuity of discontinuous random fields*. arXiv:1512.01909v1 [math.Pr], 7 Dec 2015.
17. OSTROVSKY E. AND SIROTA L. (2015) *Fundamental function for Grand Lebesgue Spaces*. arXiv:1509.03644v1 [math.FA], 11 Sep 2015.
18. SENETA E. (1976) *Regularly Varying Functions*. Lectures Notes in Mathematics, **508**.
19. VASYLYK O.I., KOZACHENKO YU.V., YAMNENKOR.E. (2008) *ϕ - subgaussian random processes*. Monograph, Kyiv, (in Ukrainian).

Надійшла до редколегії: 11.02.2018

УДК 512.4

Ярослав Лавренюк, доцент

Про зберігаючі міру гомеоморфізми просторів шляхів простих стаціонарних діаграм Браттелі.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64,
e-mail: ylavrenyuk@gmail.com

Yaroslav Lavrenyuk, associate professor

On measure preserving self-homeomorphisms of path spaces of simple stationary Bratteli diagrams

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska str.,
e-mail: ylavrenyuk@gmail.com

Розглядаються Борелеві міри, які є інваріантними щодо спеціального відношення еквівалентності на просторах шляхів діаграм Браттелі. У роботі вивчається така проблема: Нехай діаграма Браттелі фіксована. Чи кожен гомеоморфізм, який зберігає відповідну міру може бути апроксимований гомеоморфізмами “близькими до фінитарних”? Знайдено певні умови на діаграмі для яких відповідь на поставлене питання позитивна.

Ключові слова: Борелева міра, простір шляхів, діаграма Браттелі, група гомеоморфізмів.

Borel measures which are invariant under the tail equivalence relation on path spaces of Bratteli diagrams are considered. We study the following problem: Let Bratteli diagram is fixed. Do every self-homeomorphisms that preserve such a measure can be approximated by homeomorphisms which are “close to finitary” homeomorphisms? We found some conditions on diagrams for which it is true.

Key Words: Borel measure, path space, Bratteli diagram, homeomorphism group.

Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор А.П.Петравчук

1 Introduction

Bratteli diagrams are important objects not only in theory of operator algebras but also in dynamics on Cantor set.

We consider Borel measures μ which are invariant under the tail (cofinal) equivalence relation on path spaces of Bratteli diagrams. It is known the measure μ is unique in the case of a unital simple stationary Bratteli diagram (see [3]). We will consider unital simple stationary Bratteli diagrams only in this work. It is clear that all self-homeomorphisms preserving measure μ form a group. We will denote this group by $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$. Also it is easy to check that the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is closed in the topology induced by the metrics of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$. In this group we distinguish naturally the subgroup $S(\mathbf{B})$ of “finitary” homeomorphisms which consists of all self-homeomorphisms of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ that fix all but finitely many coordinates of paths. The group $S(\mathbf{B})$ has the following properties:

- Elements of $S(\mathbf{B})$ preserve the tail relation.
- $S(\mathbf{B})$ acts transitively on every tail equivalence class.
- $S(\mathbf{B})$ is a direct limit of direct products of

finite symmetric groups.

Therefore the measure is invariant under the tail relation if and only if it is invariant under $S(\mathbf{B})$. Note that $S(\mathbf{B})$ is not closed in the topology induced by the metrics of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$. Therefore the measure μ is invariant under the closure $\overline{S(\mathbf{B})}$ of the group $S(\mathbf{B})$.

The following question arises naturally: whether all self-homeomorphisms preserving measure μ can be approximated by “finitary homeomorphisms”?

In the case when $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ is the boundary of a spherically homogeneous rooted tree and \mathbf{B} is of rank 1 (that is diagram contains only one vertex per level) the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is the closure of the subgroup $S(\mathbf{B})$ (see [6]). On the other hand there are isometric balls in path-spaces of certain (even) stationary diagram such that they are not permutable by homeomorphisms of $\overline{S(\mathbf{B})}$. But isometric balls have equal measures (Statement 1). Therefore, in this case, it is easily seen that the group $\overline{S(\mathbf{B})}$ is a proper subgroup of the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$. It seems naturally to define a subgroup $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ of the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$, slightly bigger than $S(\mathbf{B})$, such that the following requirements hold:

- all isometric balls are permutable (in special

sense) by elements of $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$;

- if all isometric balls are permutable by elements of $S(\mathbf{B})$, then $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ coincides with $S(\mathbf{B})$.

We study the problem whether the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is the closure of its subgroup $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$. A unital simple stationary Bratteli diagram is completely defined by its incidence matrix. It is turned out that the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is the closure of the subgroup $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ in the case when the Perron eigenvalue of the incidence matrix is algebraic of maximal possible degree (in fact the degree is equal to the order of the matrix) (Theorem 1).

Some of the results of this paper were announced without proofs in [4].

2 Preliminaries

For definitions of Bratteli diagrams and their path-spaces in general case we refer the reader to [5]. Stationary Bratteli diagrams can be defined in a following way:

A *stationary Bratteli diagram* $\mathbf{B} = (\{V_i\}_{i \geq 0}, \{E_i\}_{i \geq 1}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ is defined by the following data

- the set of *vertices* $V = V(\mathbf{B})$ partitioned into a disjoint union $V = \bigsqcup_{i \geq 0} V_i$ of *levels*, where V_i is a sequence of copies of the same set $V_* = \{v_*^1, \dots, v_*^n\}$ for $i \geq 1$; $V_0 = \{v_0\}$;
- the set of *edges* $E = E(\mathbf{B})$ also partitioned into a disjoint union $E = \bigsqcup_{i \geq 1} E_i$, where E_i is a sequence of copies of the same set $E_* = \{e_*^1, \dots, e_*^k\}$ for $i \geq 2$; E_1 is a copy of the set V_* ;
- *Source* and *range* maps

$$\mathbf{s} : E_i \longrightarrow V_{i-1} \quad ? \quad \mathbf{r} : E_i \longrightarrow V_i$$

act in the same way on each level ($i > 1$), i.e. they are defined by

$$\mathbf{s} : E_* \rightarrow V_* \quad \text{and} \quad \mathbf{r} : E_* \rightarrow V_*.$$

It is also required two additional conditions for the first level:

- the mapping $\mathbf{r} : E_1 \longrightarrow V_1$ is induced by the identity mapping $id : V_* \rightarrow V_*$,
- $\mathbf{s}(e) = v_0$ for each $e \in E_1$.

Note that we allow more than one edge e starting and ending at the same pair of vertices $\mathbf{s}(e), \mathbf{r}(e)$.

A stationary diagram is called *unital* if for every $v \in V_i$, $i \geq 1$ there exists $e \in E_i$ satisfying $\mathbf{r}(e) = v$.

A stationary diagram \mathbf{B} is called *simple* if for every $v_1, v_2 \in V_*$ there exists a path (e_1, \dots, e_k) in \mathbf{B} such that $\mathbf{s}(e_1) = v_1$ and $\mathbf{r}(e_k) = v_2$.

The matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ with elements $a_{ij} = |\{e \mid e \in E_*, \mathbf{s}(e) = j, \mathbf{r}(e) = i\}|$ is called the *incidence matrix* of a stationary diagram \mathbf{B} .

The *space of paths* $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ of a stationary Bratteli diagram is the set of sequences $\{(e_1, e_2, e_3, \dots) \mid e_i \in E_i, \mathbf{r}(e_i) = \mathbf{s}(e_{i+1}), i \geq 1\}$. Thus, it is equal to the set of all sequences $(e_1, e_2, e_3, \dots) \in V_* \times E_*^{\mathbb{N}}$ such that $\mathbf{r}(e_i) = \mathbf{s}(e_{i+1})$ for all i , $i \geq 1$.

We define spherically homogeneous rooted tree T which levels $V_m(T)$, $m \geq 1$ consist of $V_* \times E_*^{m-1}$, $V_0(T) = \{\emptyset\}$. Two vertices are adjacent in the tree T if they are contained in the consecutive levels and if they are beginnings of the same sequence of $V_* \times E_*^{\mathbb{N}}$. In this tree we distinguish the subtree $T(\mathbf{B})$ which contains vertex $v \in V_m(T)$ if and only if v is a beginning of a sequence of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$. The path space $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ can be identified with the boundary $\partial T(\mathbf{B})$ of the tree $T(\mathbf{B})$.

A set of paths of $\partial T(\mathbf{B})$ going through a vertex v is called *ball* or *cylinder set corresponding to v*. We will say that a ball U_v ($v \in V_m$) is a ball of the level V_m . Note that the cylinder set corresponding to a finite path $\bar{e} = (e_1, \dots, e_m)$ in \mathbf{B} is the set $[\bar{e}] = \{x = (x_i) \in \mathcal{P}(\mathbf{B}) \mid x_i = e_i, 1 \leq i \leq m\}$. All cylinder sets of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ form a basis of open sets of the topological space $\mathcal{P}(\mathbf{B})$. This topology is induced by the ultrametrics ρ given by $\rho(\bar{e}, \bar{e}') = 2^{-m}$ if $\bar{e} \neq \bar{e}'$, where m is the length of common beginning of the sequences \bar{e} and \bar{e}' , and $\rho(\bar{e}, \bar{e}') = 0$ if $\bar{e} = \bar{e}'$. The set of the cylinder sets of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ are exactly the set of all balls of the metric space $(\mathcal{P}(\mathbf{B}), \rho)$. Note that if $\mathbf{r}(e_m) = \mathbf{r}(e'_m)$, then the balls $[\bar{e}]$ and $[\bar{e}']$ are isometric.

Two paths \bar{e} and \bar{e}' of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ are *cofinal* if $e_m = e'_m$ for all m sufficiently large. It is easily seen that the cofinal relation is an equivalence relation.

A finite Borel measure μ on $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ is *invariant* if it is invariant with respect to the cofinal equivalence. We assume that μ takes finite values on some clopen sets.

A unital simple stationary diagram B admits a unique invariant probability measure μ (see [3]). Due to [1] the following equality holds $\mu([\bar{e}]) = \mu([\bar{e}'])$ for arbitrary paths $\bar{e} = (e_1, \dots, e_m)$ and $\bar{e}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ satisfying $r(e_m) = r(e'_m)$.

The group $S_m(\mathbf{B})$ is, by definition, the group of all self-homeomorphisms of $\partial T(\mathbf{B})$, that just permute the balls corresponding to vertices of the level V_m , that is, $S_m(\mathbf{B})$ is the group of all self-homeomorphisms of $\partial T(\mathbf{B})$ that fix coordinates of paths starting with $(m+1)$ th coordinate.

Clearly, $S_m(\mathbf{B}) < S_{m+1}(\mathbf{B})$. The group $S(\mathbf{B})$ of “finitary” homeomorphisms is a union of the ascending chain of subgroups $S_m(\mathbf{B})$ of the group of all self-homeomorphisms of $\partial T(\mathbf{B})$ (also this subgroup is called the full AF-group of \mathbf{B} [2]).

On the group $\text{Homeo}(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ of all self-homeomorphisms of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ we will consider the metrics $\bar{\rho}$, which is induced by the metrics ρ of the space $\mathcal{P}(\mathbf{B})$: $\bar{\rho}(g, h) = \max_{x \in \partial T} \rho_{\bar{\lambda}}(x^g, x^h)$ for all $g, h \in \text{Homeo}(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$.

3 Results

Let us fix and recall our notations. An unital simple stationary Bratteli diagram is denoted by \mathbf{B} . The path space of \mathbf{B} is denoted by $\mathcal{P}(\mathbf{B})$. The rooted tree corresponding to \mathbf{B} is denoted by $T(\mathbf{B})$, $\partial T(\mathbf{B}) = \mathcal{P}(\mathbf{B})$. The ball corresponding to the vertex $v \in V(T(\mathbf{B}))$ is denoted by U_v . Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ is the incidence matrix of \mathbf{B} . Let M^T denote the transpose of a matrix M . The Perron eigenvalue of A will be denoted by λ_A , that is, λ_A is the largest real eigenvalue of the matrices A and A^T . The vector $v_\lambda = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ with positive coordinates is the eigenvector of A^T corresponding to λ_A . Additionally we assume that $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 1$. The probabilistic Borel measure on $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ which is invariant under the tail relation is denoted by μ .

It is known how to compute the measure of a cylinder set $[(\bar{e})]$ ($(\bar{e}) = (e_1, \dots, e_m)$) of the path space $\mathcal{P}(\mathbf{B})$: $\mu([(e)]) = \lambda^{-m} v_i$ where i is determined by the equality $r(e_m) = v_i^*$.

Now we want to define the subgroup $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ of the group $\text{Homeo} \mathcal{P}(\mathbf{B})$.

At first we define the notion of permutation of isometric balls. We can certainly assume that the set E_1 coincides with V_* . Let $\bar{v}_*^i = (v_*^i)$ where $1 \leq i \leq n$. We will denote by $e \sim e'$ a pair of paths $\bar{e} = (e_1, \dots, e_m)$ and $\bar{e}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ such

that corresponding cylinder sets $[\bar{e}]$ and $[\bar{e}']$ are isometric. For v_*^i, v_*^j satisfying $v_*^i \sim v_*^j$, $i < j$ and $v_*^i = r(v_*^i) \neq r(v_*^j) = v_*^j$ there exists a bijection

$$\psi_{ij} : \{b \mid b \in E_*, s(b) = v_*^i\} \rightarrow \{c \mid c \in E_*, s(c) = v_*^j\},$$

such that $\psi_{ij}(b) = c$ implies $b \sim c$. Let us fix this bijection. Let us fix $\psi_{ji} = \psi_{ij}^{-1}$ too.

Let paths $\bar{e} = (e_1, \dots, e_m)$ and $\bar{e}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ be such that $e \sim e'$. We will define a mapping $\phi_{ee'} : [\bar{e}] \rightarrow [\bar{e}']$. If $r(e_m) = r(e'_m)$ then we put $\phi_{ee'}(e_1, \dots, e_m, x_1, x_2, \dots) = (e'_1, \dots, e'_m, x_1, x_2, \dots)$, for all possible paths of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ of the form $(e_1, \dots, e_m, x_1, x_2, \dots)$. If $r(e_m) \neq r(e'_m)$, then $\phi_{ee'}(e_1, \dots, e_m, x_1, x_2, \dots)$ is determined by induction. Let $r(e_m) = v_*^i$ and $r(e'_m) = v_*^j$. Let $y_1 = \psi_{ij}(x_1)$. If $r(x_1) = r(y_1)$, then $\phi_{ee'} : [\bar{x}_1] \rightarrow [\bar{y}_1]$ was already defined, and $\phi_{ee'}(e_1, \dots, e_m, x_1, x_2, x_3, \dots) = (e'_1, \dots, e'_m, y_1, x_2, x_3, \dots)$. Otherwise, we go to the consequent element of the sequence. Set $y_2 = \psi_{kl}(x_2)$, where k and l are determined from the following equalities $r(x_1) = v_*^k$ and $r(y_1) = v_*^l$. If $r(x_2) = r(y_2)$, then $\phi_{ij}(e_*^i, x_1, x_2, x_3, \dots) = (e_*^j, y_1, y_2, x_3, \dots)$. Otherwise, we go to the consequent element of the sequence, and so on.

We call the mapping $\phi_{ee'}$ the permutation of isometric balls $[\bar{e}]$ and $[\bar{e}']$. It is easily seen that $\phi_{ee'}$ induces an isometry of rooted trees $T_{\bar{e}}(\mathbf{B}) \rightarrow T_{\bar{e}'}(\mathbf{B})$. Since every isometry of rooted trees induce an isometry of corresponding boundaries $\phi_{ee'}$ is an isometry.

Thus we can define the group $S_m(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$, which consists of all self-homeomorphisms of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ that just permute balls of the level V_m . By the construction the groups $S_m(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ ($m \in \mathbb{N}$) form an ascending chain of subgroups of $\text{Homeo} \mathcal{P}(\mathbf{B})$. Therefore, it is natural to define in the group $\text{Homeo} \mathcal{P}(\mathbf{B})$ the subgroup $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$, which is the union of ascending chain of subgroups $S_m(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ ($m \in \mathbb{N}$).

Note that if for a diagram \mathbf{B} from the fact that balls $[\bar{e}]$ and $[\bar{e}']$ are isomorphic it follows that $r(e_m) = r(e'_m)$, then $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ coincides with $S(\mathbf{B})$.

Proposition 1. The group $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ is a subgroup of $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$.

Proof. In fact, we only need to prove that isometric balls of the first level have equal measures. Namely, we need to prove that the equality $v_l = v_m$ follows from the equality $v_*^l \sim$

v_*^m . Since the relation \sim is induced by the relation of isometry of balls then \sim is an equivalence relation.

The set V_* is partitioned into classes of the equivalence \sim : $V_*/\sim = \{K_1, K_2, \dots, K_s\}$ for some $s \geq 1$. Without loss of generality we can assume that this partition satisfies equalities $K_i = \bigsqcup_{j=k_i}^{k_{i+1}-1} v_*^j$ for $i = 1, \dots, s$ and for some k_1, \dots, k_{s+1} where $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_{s+1} = n$.

For any pair of isometric balls U_1 and U_2 an isometry $U_1 \rightarrow U_2$ induces bijections between certain balls of the first level of U_1 and U_2 . In terms of elements of the incidence matrix it may be written as

$$\sum_{p=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{pq} = \sum_{p=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{pt}, \quad (1)$$

for $k_j \leq q, t \leq k_{j+1} - 1$ and for all $i = 1, \dots, s + 1$ and $j = 1, \dots, s$.

We will consider the matrix $A' = (a'_{ij})_{i,j=1}^s$ obtained from A as follows: $a'_{ij} = \sum_{p=k_i}^{k_{i+1}-1} a_{pq}$, where q satisfies the inequality $k_j \leq q \leq k_{j+1} - 1$. Due to the equality (1) the matrix A' is well defined. Let $v' = (v'_1, \dots, v'_s)$ be the Perron eigenvector of the matrix $(A')^T$. Then the vector

$$v'' = (\underbrace{v'_1, \dots, v'_1}_{k_2-k_1}, \underbrace{v'_2, \dots, v'_2}_{k_3-k_2}, \dots, \underbrace{v'_s, \dots, v'_s}_{k_{s+1}-k_s})$$

is an eigenvector of the matrix A^T . It has positive coordinates by construction. Since positive eigenvector of positive irreducible matrix is unique, it follows that v'' is the Perron eigenvector of the matrix $(A')^T$. Thus v'' is collinear to v . Therefore, $v_*^l \sim v_*^m$ implies $v_l = v_m$, which completes the proof. \square

The procedure of constructing the matrix A' from A described in the proof of Proposition 1 we shall call *the reduction*. First we note that all coordinates of the Perron eigenvector of A'^T are pairwise different.

Note also that the closure of the group $S(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$ contains the group of all bijective local self-isometries of the path space $\mathcal{P}(\mathbf{B})$. Namely, we have proved that the group of all bijective local self-isometries of the path space $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ is a subgroup of $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$.

Lemma 1. The group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is closed in the topology induced by the metrics $\bar{\rho}$.

Proof. We will prove that for a ball B and for a sequence of measure-preserving homeomorphisms $\{f_n\}$ converging to f the following equality holds $\mu(f(B)) = \mu(B)$. Since $\{f_n\}$ converges to f , for any positive ϵ there exists N such that for every $n > N$ the ϵ -neighborhood of $f(B)$ contains $f_n(B)$. The image $f(B)$ is a finite union of balls. Therefore $\mu(f(B)) + \delta \geq \mu(B)$ for any $\delta > 0$. Thus $\mu(f(B)) \geq \mu(B)$. We can decompose $\mathcal{P}(\mathbf{B})$ into finite disjoint union of balls provide this union contains given ball. We also have $\mu(f(\mathcal{P}(\mathbf{B}))) = \mu(\mathcal{P}(\mathbf{B}))$. It follows that $\mu(f(B)) = \mu(B)$ for any ball B of $\mathcal{P}(\mathbf{B})$.

Since the set of all balls forms the base of the topology induced by the metrics $\bar{\rho}$, the homeomorphism f preserves the measure μ . \square

Proposition 2. Let \mathbf{B} be a simple stationary unital Bratteli diagram, A be the incidence matrix of \mathbf{B} , A' be the matrix obtained by reduction from the matrix A , \mathbf{B}' be the Bratteli diagram defined by A' . Then $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is the closure of $\text{LIsom}(\mathbf{B})$ if and only if $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}$ is the closure of $S(\mathbf{B}')$.

Proof. It is easily seen that reduction (ambiguously) defines an embedding of the space $\mathcal{P}(\mathbf{B}')$ into $\mathcal{P}(\mathbf{B})$, and this embedding induces an embedding of $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}$ into $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$. By the other hand for any large enough level number m in $\mathcal{P}(\mathbf{B}')$ there exists a union U of certain balls of the level number m with the following property: the largest subgroup of $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}$ that consists of all elements acting trivially on the complement to U is isomorphic to $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$. Therefore, there exists an element of $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ which is approximated by elements of $\text{LIsom}(\mathbf{B})$ if and only if there exists an element of $\mathcal{M}_{\mathbf{B}'}$ which is approximated by elements of $S(\mathbf{B}')$. \square

Due to Proposition 2 we will consider Bratteli diagrams with only

Lemma 2. Let \mathbf{B} be such that all coordinates of v_λ are pairwise different. Assume that for any finite unions of balls $U, W \subset \mathcal{P}(\mathbf{B})$ the equality $\mu(U) = \mu(W)$ implies that there is $h \in S(\mathbf{B})$ satisfying $h(U) = W$. Then there is a convergent to g sequence $\{h_n \in S(\mathbf{B}), n \in \mathbb{N}\}$ for any $g \in \mathcal{M}_{\mathbf{B}}$. Thus in this case the group $\mathcal{M}_{\mathbf{B}}$ is the closure of its subgroup $S(\mathbf{B})$.

Proof. Assume that the equality $\mu(U) = \mu(W)$ implies that there exists $h \in S(\mathbf{B})$ such that $h(U) = W$ for a finite unions of balls $U, W \subset$

$\mathcal{P}(\mathbf{B})$. Fix $g \in \mathcal{M}_B$. We will construct a required sequence $\{h_n \in S(\mathcal{P}(\mathbf{B})), n \in \mathbb{N}\}$ by induction. At first we will choose h_1 . Let V_{k_1} be some level of the tree $T(\mathbf{B})$. For every ball U_{v_i} ($v_i \in V_{k_1}$) there is $m_1(v_i) \in \mathbb{N}$ such that the image $g^{-1}(U_{v_i})$ is the disjoint union of balls $g^{-1}(U_{v_i}) = \bigsqcup_{w_j \in W} U_{w_j}$ for some $W \subset V_{m_1(v_i)}$. Since g preserves the measure μ , by assumption, there exists $h_* \in S(\mathbf{B})$ such that $h_*(U_{v_i}) = g^{-1}(U_{v_i})$. Let $l_1(v_i) \in \mathbb{N}$ such that $h_* \in S_{l_1(v_i)}(\mathbf{B})$. Set $n_1 = 1 + \max\{m_1(v_i), l_1(v_i), k_1 \mid v_i \in V_{k_1}\}$. Note that $n_1 > k_1$. Hence there is $h_1 \in S_{n_1}(\mathbf{B})$ such that $g^{-1}(U_{v_i}) = h_1^{-1}(U_{v_i})$ for any $v_i \in V_{k_1}$. Therefore for every $x \in \mathcal{P}(\mathbf{B})$ there is $v \in V_{k_1}$ such that $g(x) \in U_v$ and $h_1(x) \in U_v$. Thus $\bar{\rho}(g, h_1) < 2^{-k_1}$.

Choose h_{i+1} by induction. Assume that h_i , k_i , and n_i are already defined. Putting $k_{i+1} = n_i$ for $i \geq 1$ we define h_{i+1} in a similar way. Thus $\bar{\rho}(g, h_{i+1}) < 2^{-k_{i+1}}$. By construction, the obtained sequence $\{k_1, k_2, \dots\}$ is strictly increasing. Hence the sequence $\{h_n \in S(\mathcal{P}(\mathbf{B})), n \in \mathbb{N}\}$ converges to g as required. \square

Let us consider a diagram \mathbf{B} with the incidence matrix A . Assume that all coordinates of the Perron eigenvector of the matrix A^T are pairwise different. Since coordinates of v_λ are pairwise different there are exactly n values

$$\{p_{i,m} = \lambda^{-m} v_i \mid i = 1, \dots, n\}$$

of the measure μ for balls of the level m . We call balls of the measure $p_{i,m}$ the balls of type i ($1 \leq i \leq n$). Note that $S_m(\mathbf{B})$ acts naturally on the set V_m and is a direct product of symmetrical groups each of which acts naturally on the vertices of fixed type.

Proposition 3. Let \mathbf{B} be a simple stationary unital Bratteli diagram of rank n and A be the incidence matrix of \mathbf{B} . Assume that all coordinates of the Perron eigenvector $v_\lambda = (v_1, \dots, v_n)$ of the matrix A^T are linearly independent. Then the group \mathcal{M}_B is the closure of its subgroup $\text{LIso}(\mathbf{B})$.

Proof. Since all coordinates of v_λ are different we have $\overline{\text{LIso}(\mathbf{B})} = \overline{S(\mathbf{B})}$. Therefore by Lemma 2 it is sufficient to show that for any finite unions of balls $U, W \subset \mathcal{P}(\mathbf{B})$ the equality $\mu(U) = \mu(W)$ implies that there exists $h \in S(\mathbf{B})$ satisfying $h(U) = W$.

Let $U, W \subset \mathcal{P}(\mathbf{B})$ and $\mu(U) = \mu(W)$. We can assume that U and W are unions of balls of the

level V_m . Let k_i denote the number of balls contained in U of the measure $p_{i,m}$ ($1 \leq i \leq n$). Let l_i denote the number of balls contained in W of the measure $p_{i,m}$ ($1 \leq i \leq n$). Since $\mu(U) = \mu(W)$, we have $\sum_{i=1}^n k_i v_i = \sum_{i=1}^n l_i v_i$. Hence

$$\sum_{i=1}^n (k_i - l_i) v_i = 0. \quad (2)$$

Since v_1, \dots, v_n are linearly independent we have $k_i = l_i$ for $i = 1, \dots, n$. \square

Theorem 1. Let \mathbf{B} be a simple stationary unital Bratteli diagram of rank n and A be the incidence matrix of \mathbf{B} . Assume that one of the following conditions holds

- 1) The characteristic polynomial of the matrix A is irreducible.
- 2) The determinant of A is equal to 0 and $n = 2$.

Then the group \mathcal{M}_B is the closure of its subgroup $\text{LIso}(\mathbf{B})$.

Proof. Due to Proposition 2 there is no loss of generality in assuming that all coordinates of the Perron eigenvector of the matrix A^T are pairwise different. In this case $\overline{\text{LIso}(\mathbf{B})} = \overline{S(\mathbf{B})}$. Therefore by Lemma 2 it is sufficient to show that for any finite unions of balls $U, W \subset \mathcal{P}(\mathbf{B})$ the equality $\mu(U) = \mu(W)$ implies that there exists $h \in S(\mathbf{B})$ satisfying $h(U) = W$.

Let $U, W \subset \mathcal{P}(\mathbf{B})$ and $\mu(U) = \mu(W)$. We can assume that U and W are unions of balls of the level V_m . Let k_i denote the number of balls contained in U of the measure $p_{i,m}$ ($1 \leq i \leq n$). Let l_i denote the number of balls contained in W of the measure $p_{i,m}$ ($1 \leq i \leq n$). Since $\mu(U) = \mu(W)$, we have $\sum_{i=1}^n k_i v_i = \sum_{i=1}^n l_i v_i$. Hence

$$\sum_{i=1}^n (k_i - l_i) v_i = 0. \quad (3)$$

Consider the theorem conditions.

1. The first condition implies that λ_A is an algebraic number of degree n . If $n = 1$, then $T(\mathbf{B})$ is a spherically homogeneous tree. In this case all balls of any level V_m are pairwise isometric which implies the assertion (see also [6]). Fix $n > 1$. Let us consider the matrix $A - \lambda_A I$ where I is the identity matrix. Suppose that $k_i - l_i \neq 0$ for some i . We substitute i th row of the matrix $A - \lambda_A I$ by the vector $w = (k_1 - l_1, \dots, k_n - l_n)$. The determinant of the obtained matrix is equal

to 0 due to (3). The coordinates of the vector w are integers. Therefore λ_A is a root of polynomial with integer coefficients of degree $n - 1$. Hence the characteristic polynomial of the matrix A is reducible. This contradicts with our assumption. Thus, $k_i = l_i$ for $1 \leq i \leq n$. Therefore, there exists $h \in S_m(\mathbb{B})$ such that $h(U) = W$.

2. Now let the determinant of A be equal to 0 and $n = 2$. We will show that the required h can be taken from $S_{m+1}(\mathbb{B})$. For this purpose it is sufficient to prove that the sets U and V contain the same number of balls of type i on the level V_{m+1} for $i = 1, 2$.

Since the determinant of A is equal to 0, we have $\lambda_A = a_{11} + a_{22}$ and there exists a non-zero vector with integer coordinates $w = (w_1, w_2)$ sat-

isfying $Aw^T = 0$. Therefore, $w_1v_1 + w_2v_2 = 0$. We can assume that w_1 and w_2 are coprime. Applying (3) we obtain $(k_1 - l_1, k_2 - l_2) = aw$ where a is an integer. Thus we only need to show that $w_1(a_{11} + a_{21}) = -w_2(a_{12} + a_{22})$ (i.e. the sets U and V contain the same number of balls of type i on the level V_{m+1} for $i = 1, 2$). But the last equality is a consequence of the equality $Aw^T = 0$. Therefore, h can be taken from $S_{m+1}(\mathbb{B})$, which completes the proof. \square

It is easy to check that an equivalent formulation of the first condition of the last theorem is: the coordinates of the Perron eigenvector of the matrix A^T are linearly independent over \mathbb{Z} .

Список використаних джерел

1. *S. Bezuglyi* Invariant measures on stationary Bratteli diagrams / S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, and B. Solomyak // Ergodic Theory Dyn. Syst. **30** (2010), no. 4, 973–1007.
2. *Heidi Dahl* AF equivalence relations associated to locally finite groups / Heidi Dahl // J. Ramanujan Math. Soc. **23** (2008), no. 1, 77–95.
3. *F. Durand* Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups / F. Durand, B. Host, and C. Skau // Ergodic Theory Dyn. Syst. **19** (1999), no. 4, 953–993.
4. *Yaroslav Lavrenyuk* On groups of measure-preserving self-homeomorphisms of Cantor spaces / Yaroslav Lavrenyuk // Dopovidi NAN Ukrainy (2012), no. 4, 10–13 (Ukrainian).
5. *Yaroslav Lavrenyuk* On classification of inductive limits of direct products of alternating groups / Yaroslav Lavrenyuk and Volodymyr Nekrashevych // Journal of the London Mathematical Society **75** (2007), no. 1, 146–162.
6. *Yaroslav Lavrenyuk* On the group of measure preserving homeomorphisms of Cantor set / Yaroslav Lavrenyuk and Volodymyr Nekrashevych. // Dopovidi NAN Ukrainy (2008), no. 6, 28–31 (Ukrainian).

References

1. S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, K. Medynets, and B. Solomyak, *Invariant measures on stationary Bratteli diagrams.*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **30** (2010), no. 4, 973–1007.
2. Heidi Dahl, *AF equivalence relations associated to locally finite groups.*, J. Ramanujan Math. Soc. **23** (2008), no. 1, 77–95.
3. F. Durand, B. Host, and C. Skau, *Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups.*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **19** (1999), no. 4, 953–993.
4. Yaroslav Lavrenyuk, *On groups of measure-preserving self-homeomorphisms of Cantor spaces*, Dopovidi NAN Ukrainy (2012), no. 4, 10–13 (Ukrainian).
5. Yaroslav Lavrenyuk and Volodymyr Nekrashevych, *On classification of inductive limits of direct products of alternating groups*, Journal of the London Mathematical Society **75** (2007), no. 1, 146–162.
6. Yaroslav Lavrenyuk and Volodymyr Nekrashevych, *On the group of measure preserving homeomorphisms of Cantor set*, Dopovidi NAN Ukrainy (2008), no. 6, 28–31 (Ukrainian).

Received: 23.02.2018

УДК 519.21

I.V. Розора, к.ф.-м.н., доц.

**Про швидкість збіжності для оцінки
імпульсної перехідної функції у
просторі $L_p(\mathbb{T})$**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64.
e-mail: irozora@bigmir.net

I.V. Rozora, Ph.D., Associate Prof.

**On the convergence rate for the
estimation of impulse response function
in the space $L_p(\mathbb{T})$**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.
e-mail: irozora@bigmir.net

В роботі досліджується фізично здійснима однорідна лінійна система з імпульсною перехідною функцією. В якості оцінки імпульсної функції розглядається сумісна корелограма між процесами на вході та виході системи. Знаходиться розподіл похибки оцінювання імпульсної функції в просторі $L_p(\mathbb{T})$.

Ключові слова: імпульсна перехідна функція, лінійна однорідна система, гауссовий процес, сумісна корелограма.

The problem of estimation of a stochastic linear system has been a matter of active research for the last years. One of the simplest models considers a 'black box' with some input and a certain output. The input may be single or multiple and there is the same choice for the output. This generates a great amount of models that can be considered. The sphere of applications of these models is very extensive, ranging from signal processing and automatic control to econometrics (errors-in-variables models). In this paper a time-invariant continuous linear system is considered with a real-valued impulse response function. We assume that impulse function is square-integrable. Input signal is supposed to be Gaussian stationary stochastic process with known spectral density. A sample input-output cross-correlogram is taken as an estimator of the response function. An upper bound for the tail of the distribution of the estimation error is found that gives a convergence rate of estimator to impulse response function in the space $L_p(\mathbb{T})$.

Key Words: impulse response function, linear time-invariant system (LTI), Gaussian process, cross-correlogram.

Communicated by Prof. Kozachenko Yu.V.

1 Вступ

Задача оцінювання характеристик лінійних систем різної фізичної природи виникає у багатьох галузях, наприклад, у радіофізиці, сейсмології, метеорології, теорії сигналів та автоматичного контролю, теорії фільтрації, фінансовій математиці тощо. Останнім часом цей напрям досить активно розвивається.

Деякі методи оцінювання невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем та вивчення властивостей відповідних оцінок розглядалися у роботах В.Булдігіна та його учнів. У класі лінійних систем важливий підклас складають неперервні однорідні системи. В якості оцінок беруться сумісні періодограми або сумісні корелограми між процесами на вході та виході системи.

Для корелограмної дискретної за ча-

сом оцінки у роботах В.Булдігіна, В.Зайця, В.Курочки та Ф.Уцета [2], [4] вивчалися умови асимптотичної незміщеності та консистентності у середньому квадратичному, а також умови асимптотичної нормальності як у сенсі збіжності скінченновимірних розподілів, так у сенсі збіжності відповідних розподілів у просторі неперервних функцій.

В працях В.Булдігіна та І.Блажівської [1] встановлюється асимптотична незміщеність та консистентність у середньому квадратичному корелограмної інтегральної оцінки; з менш обмежувальними умовами, ніж в статтях В.Булдігіна і Фу Лі, вивчалися питання асимптотичної нормальності оцінки та похибки оцінювання у просторі неперервних функцій.

Потрібно зауважити, що у вищезгаданих роботах вивчаються асимптотичні властивості

оцінок перехідної імпульсної функції і не приділяється увага знаходженню точних оцінок розподілів для супремуму похибки оцінювання. Вперше такі оцінки були знайдені в роботі Ю. Козаченка та І. Розори [7].

В даній роботі розглядається корелограма інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції та знаходиться оцінка розподілу норми похибки оцінювання в просторі $L_p([0, T])$.

2 Корелограми та їх властивості

Розглянемо фізично здійсниму однорідну систему з імпульсною перехідною функцією $H(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Це означає, що дійснозначна функція $H(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, а реакція системи на допустимий вхідний сигнал $X(t)$, $t \in \mathbf{R}$, має вигляд

$$Y(t) = \int_0^{\infty} H(\tau)X(t - \tau)d\tau. \quad (1)$$

При вивченні таких систем виникає задача оцінювання функції H за спостереженнями за реакцією системи на вхідний сигнал. У даній статті розглядається корелограмний метод оцінювання імпульсної перехідної функції H за умови $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Розглянемо дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський випадковий процес $X = (X(t), t \in \mathbf{R})$, що збурює систему (1). Нехай $f = (f(\lambda), \lambda \in \mathbf{R})$ — спектральна щільність процесу X . Припускаємо, що дана функція неперервна і задовольняє умовам

$$\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty; \\ K_X \in L_1(\mathbf{R}),$$

де $K_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)d\lambda$, $t \in \mathbf{R}$, — кореляційна функція випадкового процесу X .

Оцінку для H в точці τ , $\tau > 0$, визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми між вхідним та вихідним процесами (див., наприклад, [1])

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t + \tau)X(t)dt, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

де T — довжина інтервалу усереднення, при цьому підході до оцінювання H припускається

також, що $X(t) = X_{\Delta}(t)$, тобто на вхід системи подається сім'я процесів, залежних від параметра $\Delta > 0$ та із певним виглядом спектральної щільності. В подальшому параметр Δ будемо опукати.

Припустимо, що $H \in L_2(\mathbf{R})$.

Через

$$H^*(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} H(t)dt, \quad \lambda \in \mathbf{R},$$

позначимо перетворення Фур'є-Планшереля функції H .

Зауваження 1. Інтеграли в (1) та (2) розглядаються як середньоквадратичні інтеграли Рімана.

Інтеграл в (1) існує тоді і тільки тоді, коли існує інтеграл Рімана (див. [5], ст. 278)

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau)K_X(s - \tau)H(s)dsd\tau. \quad (3)$$

Якщо в даному інтегралі використати зображення кореляційної функції через спектральну щільність та перетворення Фур'є-Планшереля для функції $H(\tau)$, отримаємо

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} H(\tau)K(s - \tau)H(s)dsd\tau = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} H^*(-\lambda) \cdot H^*(\lambda)f(\lambda)d\lambda.$$

Оскільки $\sup_{\lambda \in \mathbf{R}} |f(\lambda)| < \infty$ і $H \in L_2(\mathbf{R})$, то інтеграл (3) існує, а отже, і існує інтеграл в (1).

Будемо вважати, що інтеграл (3) існує також як інтеграл Лебега.

Легко підрахувати, що математичне сподівання $\hat{H}_T(\tau)$ дорівнює

$$E\hat{H}_T(\tau) = \int_0^{\infty} H(s)K_X(\tau - s)ds. \quad (4)$$

Отже, з (4) маємо, що в загальному випадку

$$E\hat{H}_T(\tau) \neq H(\tau), \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Це означає, що оцінка $\hat{H}_T(\tau)$ є зміщеною.

В роботах [1] та [3] розглядаються послідовності коваріаційних функцій, які залежать від параметру Δ , і знаходяться умови, коли оцінка $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau)$ є асимптотично незміщеною для $H(\tau)$ при $\Delta \rightarrow \infty$. Також в [3] показано, що за певних умов $\hat{H}_{T,\Delta}(\tau) \rightarrow H(\tau)$ з ймовірністю 1 при $\Delta \rightarrow \infty$ і $T \rightarrow \infty$.

Зауваження 2. З роботи [1] випливає, що всі потрібні умови для асимптотичної незміщеності та для збіжності з ймовірністю 1 виконуються для послідовності таких спектральних щільностей

$$f_{\Delta}(\lambda) = \frac{c}{2\pi} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{\Delta}\right\}, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \Delta > 0. \quad (5)$$

Нехай

$$\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau).$$

В [1] показано, що кореляційна функція $\hat{Z}_T(\tau)$ має вигляд

$$\begin{aligned} E\hat{Z}_T(\tau_1)\hat{Z}_T(\tau_2) &= \\ &= \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda_2} |H^*(\lambda_2)|^2 + \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2)} H^*(\lambda_1)H^*(\lambda_2) \right) \times \\ &\quad \times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\Phi_T(\lambda)$ — ядро Фейєра

$$\Phi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{\sin(T\lambda/2)}{\lambda/2} \right).$$

3 Квадратично-Гауссові випадкові процеси

В даному розділі розглядаються означення та деякі властивості квадратично-гауссових випадкових величин і процесів.

Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір та (T, ρ) — компактний метричний простір з метрикою ρ .

Наведемо означення із книги [6].

Означення 3.1. [6] Нехай $\Xi = \{\xi_t, t \in T\}$ — сім'я сумісно гауссівських випадкових величин, $E\xi_t = 0$ (наприклад, $\xi_t, t \in T$, є гауссівським випадковим процесом).

Простір $SG_{\Xi}(\Omega)$ називається простором квадратично-гауссових випадкових величин, якщо кожен елемент $\eta \in SG_{\Xi}(\Omega)$ можна представити у вигляді

$$\eta = \bar{\xi}^T A \bar{\xi} - E\bar{\xi}^T A \bar{\xi}, \quad (7)$$

де $\bar{\xi}^T = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \dots, n$, A — дійснозначна матриця,

або $\eta \in SG_{\Xi}(\Omega)$ представляється як середньоквадратична границя послідовності випадкових величин з (7)

$$\eta = l.i.m._{n \rightarrow \infty} (\bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n - E\bar{\xi}_n^T A \bar{\xi}_n).$$

Означення 3.2. [6] Випадковий процес $\xi(t) = \{\xi(t), t \in T\}$ називається квадратично-гауссовим, якщо для кожного $t \in T$ випадкова величина $\xi(t)$ належить простору $SG_{\Xi}(\Omega)$.

Відомо також, що

- $SG_{\Xi}(\Omega)$ є банаховим простором з нормою $\|\zeta\| = \sqrt{E\zeta^2}$;
- $SG_{\Xi}(\Omega)$ є підпростором простору Орліча, що породжується функцією

$$U(x) = \exp|x| - 1;$$

- норма $\|\zeta\|_{L_U(\Omega)}$ на $SG_{\Xi}(\Omega)$ еквівалентна нормі $\sqrt{E\zeta^2}$.

Приклад 1. Розглянемо сім'ю гауссівських центрованих випадкових процесів

$\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$, $t \in T$. Нехай матриця $A(t)$ є симетричною. Тоді

$$X(t) = \bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t) - E\bar{\xi}^T(t) A(t) \bar{\xi}(t),$$

де $\bar{\xi}^T(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$, є квадратично-гауссовим випадковим процесом.

Загальні властивості квадратично-гауссових випадкових процесів можна знайти в роботах [6], [9].

Наступна теорема дає оцінку розподілу L_p -норми квадратично-гауссового випадкового процесу. Доведення її можна знайти в [8].

Теорема 3.1. [8] Нехай $\{T, \mathfrak{A}, \mu\}$ — вимірний простір, де T — параметрична множина, та нехай $X = \{X(t), t \in T\}$ — квадратично-гауссовий випадковий процес. Припустимо, що інтеграл Лебега $\int_T (EX^2(t))^{\frac{p}{2}} d\mu(t)$ коректно визначений для $p \geq 1$. Тоді існує майже напевно інтеграл $\int_T (X^2(t))^p d\mu(t)$ та

$$P \left\{ \int_T |X(t)|^p d\mu(t) > x \right\} \leq$$

$$\leq 2 \sqrt{1 + \frac{x^{1/p} \sqrt{2}}{\gamma_p^{1/p}} \exp \left\{ -\frac{x^{1/p}}{\sqrt{2} \gamma_p^{1/p}} \right\}}, \quad (8)$$

для всіх $x \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1\right)p}\right) \gamma_p$, де $\gamma_p = \int_{\mathbb{T}} (EX^2(t))^{\frac{p}{2}} d\mu(t)$.

4 Про швидкість збіжності корелограм в просторі $L_p(\mathbb{T})$

Даний розділ присвячений знаходженню швидкості збіжності корелограмних інтегральних оцінок невідомих імпульсних перехідних функцій лінійних систем в просторі $L_p(\mathbb{T})$. А саме, знаходиться оцінка розподілу норми похибки оцінювання в $L_p([a, b])$.

Припустимо, що $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ вимірний дійснозначний стаціонарний центрований гауссівський процес, що збудує систему (1).

Розглянемо корелограму

$$\hat{H}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t + \tau) X(t) dt, \quad \tau > 0,$$

що є оцінкою імпульсної перехідної функції H . Випадковий процес $Y(t)$ визначається в (1).

Доведемо допоміжну лему.

Лема 1. Випадковий процес $\hat{Z}_T(\tau) = \hat{H}_T(\tau) - E\hat{H}_T(\tau)$, $\tau > 0$, є квадратично-гауссовим.

Доведення. Процес $\hat{Z}_T(\tau)$, $\tau > 0$, можна подати у вигляді

$$\hat{Z}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T (Y(t + \tau) X(t) - EY(t + \tau) X(t)) dt. \quad (9)$$

Оскільки кожна інтегральна сума (9)

$$\sum_k (Y(t_k + \tau) X(t_k) - EY(t_k + \tau) X(t_k)) \triangleq t_k$$

належить простору $SG_{\Xi}(\Omega)$, а сам процес $\hat{Z}_T(\tau)$ є середньо-квадратичною границею цих сум, то $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом. Отже, лема повністю доведена. \square

Розглянемо точність оцінювання як різницю оцінки $\hat{H}_T(\tau)$ та імпульсної перехідної функції $H(\tau)$

$$\hat{H}_T(\tau) - H(\tau), \quad \tau > 0.$$

Оцінимо інтеграл від похибки оцінювання в степені p на відрізку $[a, b]$, де $a < b$ — фіксовані числа

$$P\left\{ \int_a^b |\hat{H}_T(\tau) - H(\tau)|^p d\tau \geq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Позначимо

$$h(\tau) = E\hat{H}_T(\tau) - H(\tau), \quad \tau \in [a, b].$$

Із співвідношення (6) випливає, що

$$\gamma_0 = \gamma_0(T) = \sup_{\tau \in [0, A]} (\mathbf{Var} \hat{Z}_T(\tau))^{1/2} =$$

$$= \sup_{\tau \in [0, A]} \left(\frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (|H^*(\lambda_2)|^2 +$$

$$+ e^{i\tau(\lambda_1 + \lambda_2)} H^*(\lambda_1) H^*(\lambda_2)) \times$$

$$\times \Phi_T(\lambda_2 - \lambda_1) f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Теорема 4.1. Нехай $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ — сепарабельний дійснозначний стаціонарний гауссовий процес, що збудує систему (1), $H \in L_2(\mathbb{R})$. Припустимо також, що функція $h(\tau) = H(\tau) - E\hat{H}_T(\tau) \in L_p([a, b])$. Тоді для

$$\varepsilon \geq \left(\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1\right)p} \right) (b - a)^{\frac{1}{p}} \gamma_0 + \|h\|_p \right)^p$$

та для будь-якого $[a, b] \subset \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$P\left\{ \int_a^b |H(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\tau > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p) \sqrt{2}}{(b - a)^{\frac{1}{p}} \gamma_0} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p}{\sqrt{2} (b - a)^{\frac{1}{p}} \gamma_0} \right\}}, \quad (11)$$

де γ_0 з (10), а

$$\|h\|_p = \left(\int_a^b |h(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. Оскільки за лемою 1 $\hat{Z}_T(\tau)$ є квадратично-гауссовим процесом, то для нього можна застосувати результат теореми 3.1 у випадку, коли $T = [a, b]$ та $\{[a, b], \mathfrak{A}, \mu\}$ – метричний простір з евклідовою метрикою μ .

Покажемо, що інтеграл

$$\int_a^b (\mathbf{E} \hat{Z}_T^2(\tau))^{\frac{p}{2}} d\mu(\tau)$$

є скінченним. Дійсно, з (10) випливає, що

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\mathbf{E} \hat{Z}_T^2(\tau))^{\frac{p}{2}} d\mu(\tau) = \\ & = \int_a^b (\mathbf{Var} \hat{Z}_T(\tau))^{\frac{p}{2}} d\tau < (b-a) (\gamma_0)^p < \infty. \end{aligned}$$

Тому для

$$x \geq \left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1\right)p} \right) \gamma_p$$

нерівність (8) для випадкового процесу $\hat{Z}_{N,n}(\tau)$ переписеться як

$$\begin{aligned} & P \left\{ \int_a^b |\hat{Z}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) > x \right\} \leq \\ & \leq 2 \sqrt{1 + \frac{x^{1/p} \sqrt{2}}{\gamma_p^{\frac{1}{p}}}} \exp \left\{ -\frac{x^{1/p}}{\sqrt{2} \gamma_p^{\frac{1}{p}}} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\gamma_p = \int_a^b (\mathbf{E} \hat{Z}_T^2(\tau))^{\frac{p}{2}} d\tau$.

З нерівності Мінковського випливає, що

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b |H(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = \left(\int_a^b |H(\tau) \pm \mathbf{E} \hat{H}_T(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_a^b |H(\tau) - \mathbf{E} \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & + \left(\int_a^b |\mathbf{E} \hat{H}_T(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|h\|_p + \left(\int_a^b |\hat{Z}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

З останньої нерівності маємо

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_a^b |H(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) > \varepsilon \right\} = \\ & = \left\{ \left(\int_a^b |H(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right\} \\ & \subset \left\{ \|h\|_p + \left(\int_a^b |\hat{Z}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) \right)^{\frac{1}{p}} > \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right\} \\ & = \left\{ \int_a^b |\hat{Z}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) > \left(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p \right)^p \right\}, \end{aligned}$$

тоді якщо підставити $x = \left(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p \right)^p$ в (12), отримаємо

$$\begin{aligned} & P \left\{ \int_a^b |H(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p) \sqrt{2}}{\gamma_p^{\frac{1}{p}}}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p}{\sqrt{2} \gamma_p^{\frac{1}{p}}} \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

З (10) випливає, що

$$\gamma_p = \int_a^b (\mathbf{E} \hat{Z}_T^2(\tau))^{\frac{p}{2}} d\tau \leq (b-a) \gamma_0^p.$$

Для повного доведення теореми досить підставити значення γ_p в (13). Отже,

$$\begin{aligned} & P \left\{ \int_a^b |H(\tau) - \hat{H}_T(\tau)|^p d\mu(\tau) > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p) \sqrt{2}}{(b-a)^{\frac{1}{p}} \gamma_0}} \exp \left\{ -\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \|h\|_p}{\sqrt{2} (b-a)^{\frac{1}{p}} \gamma_0} \right\}. \end{aligned} \quad \square$$

5 Висновки

В роботі розглядалась корелограма інтегральна оцінка імпульсної перехідної функції лінійної однорідної системи. Знайдено оцінку швидкості збіжності даної корелограми в просторі неперервних функцій. Тобто отримано оцінку розподілу супрумуму похибки оцінювання.

Список використаних джерел

1. Булдігін В.В. Асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій лінійних систем / В.В. Булдігін, І.П. Блажієвська // Наукові вісті НТУУ "КПІ".– 2010.– № 4.– С. 16–27.
2. Buldygin V.V. On cross-coorrelogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations / V.V.Buldygin, V.G. Kurotschka // Random Oper. and Stoch. Equ.–1999.– №7(1).–Р. 71–90.
3. Buldygin V. On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II / V. Buldygin, Fu Li // Theor. Probability and Math. Statist.–1997.– № 54, № 55.– Р. 3–17, P.30-37.
4. Buldygin V. Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function/ V. Buldygin, F. Utzet, V. Zaiats // Statistical Inference for Stochastic Processes. – 2004.–№7.–Р.1–34.
5. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход.– Москва, Наука.– 1977.
6. Козаченко Ю. Моделювання випадкових процесів та полів/ Ю.Козаченко, А.Пашко, І.Розора.– Київ, Задруга.– 2007.
7. Козаченко Ю. Про корелограмні оцінки імпульсних перехідних функцій / Ю.Козаченко, І.Розора // Теор. ймовір. та матем. статист.– 2015.– № 93.–С. 75-86.
8. Козаченко Ю. Критерій перевірки гіпотези про коваріаційну функцію стаціонарного Гауссового випадкового процесу / Ю.Козаченко, В.Трошки // Modern Stochastics: Theory and Applications.– 2014.– 1.– С.139–149.
9. Kozachenko Yu. Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions / Yu. Kozachenko, O. Stus O. // Math. Communications.–1998.– 3, №1.– Р.83–94.

References

1. BULDYGIN V., BLAZHIEVSKA I. (2010) Asymptotic properties of cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear system *Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "KPI*, 4, 16–27.
2. BULDYGIN V., KUROTSCHKA V. (1999) On cross-coorrelogram estimators of the response function in continuous linear systems from discrete observations *Random Oper. and Stoch. Equ.*, 7, №1, 71–90.
3. BULDYGIN V., FU LI (1997) On asymptotic normality of an estimation of unit impulse responses of linear system I, II *Theor. Probability and Math. Statist.*, 54, 55, 3–17, 30–37.
4. BULDYGIN V., UTZET F., ZAIATS V. (2004) Asymptotic normality of cross-coorrelogram estimators of the response function *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 7, 1–34.
5. GIKHMAN I, SKOROKHOD, A. (1996) *Introduction to the Theory of Random Processes*, Dover Publication, 544 p.
6. KOZACHENKO YU., PASHKO A., ROZORA I. (2007) *Simulation of Stochastic Processes and fields*, Zadruga, Kyi. (in Ukrainian)
7. KOZACHENKO YU., ROZORA I. (2015) On cross-correlogram estimators of impulse response functions *Theor. Probability and Math. Statist.*, 93, 75–86.
8. KOZACHENKO YU., TROSHKI V. (2014) A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process, *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 1, 139–149.
9. KOZACHENKO YU., STUS O. (1998) Square-Gaussian random processes and estimators of covariance functions, *Math. Communications*, 3, №1, 83–94.

Надійшла до редколегії: 12.03.2018

УДК 519.21

Г.І. Сливка-Тилищак, д. ф.-м. н.

**Умови існування з імовірністю одиниця
узагальненого розв'язку задачі Коші
для рівняння теплопровідності з
випадковою правою частиною**

Пряшівський університет в Пряшеві,
м.Пряшів (Словаччина), вул. 17 Новембра, 15,
ДВНЗ «Ужгородський національний універси-
тет», 88000, м.Ужгород, пл. Народна, 3,
e-mail: aslyvka@ukr.net

A.I. Slyvka-Tylyshchak, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

**The conditions of existence with
probability one of generalized solutions of
Cauchy problem for the heat equation
with a random right part**

Prešovska univerzita v Prešove, Prešov
(Slovakia), 17. Novembra Square, 15,
Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod,
Narodna Square, 3
e-mail: aslyvka@ukr.net

В роботі досліджуються властивості узагальненого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій, коли права частина є випадковим полем з простору $Sub_\varphi(\Omega)$.

Ключові слова: $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові процеси, рівняння теплопровідності, узагальнений розв'язок.

The subject of this work is at the intersection of two branches of mathematics: mathematical physics and stochastic processes. The influence of random factors should often be taken into account in solving problems of mathematical physics. The heat equation with random conditions is a classical problem of mathematical physics. In this paper we consider a Cauchy problem for the heat equations with a random right part. We study the inhomogeneous heat equation on a line with a random right part. We consider the right part as a random function of the space $Sub_\varphi(\Omega)$. The conditions of existence with probability one generalized solution of the problem are investigated.

Using this results one can construct modeless, which approximate solutions of such equations with given accuracy and reliability in the uniform metric

Key words: $Sub_\varphi(\Omega)$ stochastic processes, heat equation, generalized solution.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Козаченко Ю.В.

1 Introduction

The heat equation with random conditions is a classical problem of mathematical physics. Recently, a number of have works appeared, which in many ways have investigated this equation according to the type of random initial conditions [1, 2, 3, 4].

The properties of classical solutions of Cauchy problems for the heat equations with a random right part which is random field from the space $Sub_\varphi(\Omega)$, space $L_p(\Omega)$ and from the Orlicz space have been studied in the papers in [5, 6, 7]. Estimations for the distribution of the supremum of solution of such equations have been investigated.

We consider the properties of generalized solutions of Cauchy problem for the heat equations with a random right part. In particular, we give conditions for existence with probability one of the generalized solutions in the case when the right part is a random field, sample continuous with

probability one from the $Sub_\varphi(\Omega)$ space.

The paper consists of the introduction and two parts. Section 1 contains necessary definitions and results of the theory of the $Sub_\varphi(\Omega)$ space. In section 2 we consider heat equations with random right part. For such problem conditions of existence with probability one of generalized solution with random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$ are found.

2 Random processes from $Sub_\varphi(\Omega)$ spaces

Definition 2.1. [8] An even continuous convex function $u(x)$, $x \in R^1$ such that $u(0) = 0$ and $u(x) > 0$ for $x \neq 0$ and

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{x} = \infty.$$

is called an N -function.

Definition 2.2. [9] We say an N -function u satisfies the q -condition if there exist constants $z_0 >$

0, $k > 0$, $A > 0$ such that $u(x)u(y) \leq Au(kxy)$ for all $x > z_0$, $y > z_0$.

Let $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ be a standard probability space.

Definition 2.3. [9] Let $\varphi(x)$ be an N -function for which there exist constants $x_0 > 0$ and $c > 0$ such that $\varphi(x) = cx^2$ for $|x| < x_0$. The set of random variables $\xi(\varpi)$, $\varpi \in \Omega$, is called the space $Sub_\varphi(\Omega)$ generated by the N -function $\varphi(x)$ if $E\xi = 0$ and there exists a constant a_ξ such that

$$E \exp \{ \lambda \xi \} \leq \exp \{ \varphi(\lambda a_\xi) \}$$

for all $\lambda \in R^1$.

Definition 2.4. [8] The stochastic process $X = \{X(t), t \in T\}$ belongs to space $Sub_\varphi(\Omega)$, ($X \in Sub_\varphi(\Omega)$) if $X(t) \in Sub_\varphi(\Omega)$ for all $t \in T$.

Definition 2.5. [9] The random variable $\xi \in Sub_\varphi(\Omega)$ is called strongly $Sub_\varphi(\Omega)$, ($SSub_\varphi(\Omega)$) random variable if $\tau_\varphi(\xi) = (E\xi^2)^{1/2}$.

Properties and applications of $Sub_\varphi(\Omega)$ random variables and stochastic processes from $Sub_\varphi(\Omega)$ can be found in [9].

Definition 2.6. [10] A family Δ of random variables ξ of the space $Sub_\varphi(\Omega)$ is called $SSub_\varphi(\Omega)$ family if

$$\tau_\varphi \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right) = \left(E \left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i \right)^2 \right)^{1/2}$$

for all $\lambda_i \in R^1$, where I is at most countable and $\xi_i \in \Delta_i$, $i \in I$.

Theorem 1. [10] Let Δ be a strongly $Sub_\varphi(\Omega)$ family of random variables. Then the linear closure $\overline{\Delta}$ of the family Δ in the space $L_2(\Omega)$ and in the mean square sense is a strongly $Sub_\varphi(\Omega)$ family.

Definition 2.7. [9] The stochastic process $X_i = \{X_i(t), t \in T, i \in I\}$ is called an $SSub_\varphi(\Omega)$ process if the family of random variables $X_i = \{X_i(t), t \in T, i \in I\}$ is an $SSub_\varphi(\Omega)$.

Theorem 2. [10] Let $X_i = \{X_i(t), t \in T, i \in I\}$ be a family of jointly strongly $Sub_\varphi(\Omega)$ stochastic processes. Then (T, O, μ) is a measurable space. If $\{\varphi_{k_i}(t), i \in I, k = \overline{1, \infty}\}$ is a family of measurable functions in (T, O, μ) and the integral

$$\xi_{k_i} = \int_T \varphi_k(t) X_j(t) d\mu(t)$$

is well defined in the mean square sense, than the family of random variables

$$\Delta_\xi = \{ \xi_{k_i}, i \in I, k = \overline{1, \infty} \}$$

is an $SSub_\varphi(\Omega)$ family.

Theorem 3. [11] Let R^k be the k -dimensional space, $d(t, s) = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - s_i|$, $T = \{0 \leq t_i \leq T_i, i = 1, 2, \dots, k\}$, $T_i > 0$. $X_n = \{X_n(t), t \in T\} \in Sub_\varphi(\Omega)$. Assume that the process $X_n(t)$ is separable and

$$\sup_{d(t,s) \leq h} \tau_\varphi(X_n(t) - X_n(s)) \leq \sigma(h),$$

where $\sigma(h)$ is a monotone increasing continuous function such that $\sigma(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$. We also assume that

$$\int_{0+} \Psi \left(\ln \frac{1}{\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} \right) d\varepsilon < \infty,$$

where $\Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$ and $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ is the inverse function to $\sigma(\varepsilon)$. If the processes $X_n(t)$ converge in probability to the process $X(t)$ for all $t \in T$, then $X_n(t)$ converge in probability in the space $C(T)$.

3 The heat equations with random right part

We consider the Cauchy problem for the heat equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \xi(x, t), \quad (1)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

subject to the initial condition

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2)$$

Let the function $\xi(x, t) = \{\xi(x, t), x \in R, t > 0\}$ is a random field sample continuity with probability one from the space $Sub_{\varphi(x)}(\Omega)$, such that $E\xi(x, t) = 0$, $E(\xi(x, t))^2 < +\infty$. Let us denote

$$B(x, t, z, s) = E\xi(x, t)\xi(y, s).$$

Let $B(x, t, z, s)$ be a continuous function.

Problem when the function $\xi(x, t)$ nonrandom has been seen in [12]. Consider

$$G(y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x, \tau) dx,$$

and

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y, t) dy. \quad (3)$$

Let $D = \{(x, t) : x \in [-A, A], t \in [0, T]\}$ and

$$u_n(x, t) = \int_{-a_n}^{+a_n} \cos yx G(y, t) dy, \quad (4)$$

where $a_n \rightarrow \infty$ for $n \rightarrow \infty$.

Definition 3.1. The solution $u(x, t)$ which is represented in the form (3) is called a generalized solution of problem (1)–(2) in the domain D if sequence (4) converges uniformly in probability and satisfies the condition (2).

Lemma 1. [5] Let $\xi(x, t)$ be a random field, sample continuity for each $t > 0$ with probability one, there is a continuous derivative $\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}$ for $x \in R$ and satisfy condition

$$\int_R \sqrt{E(\xi^2(x, t))} dx < \infty. \quad (5)$$

Then for the function $\xi(x, t)$ for each $t > 0$ the integral Fourier transform

$$\tilde{\xi}(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x, \tau) dx$$

exist and

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \tilde{\xi}(y, t) dy.$$

Lemma 2. Let $\xi(x, t)$ be a random field, sample continuity from the space $Sub_\varphi(\Omega)$. Let $B(x, t, v, s)$ be the correlation function of the field $\xi(x, t)$. For all $t > 0, s > 0$ assume that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(x, t, v, s)| dx dv \leq B < \infty.$$

Then Lebesgue integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y, t) dy$$

exist with probability one.

Proof. We shall prove the existence of the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y, t) dy.$$

For existence of this integral with probability one it is enough to prove that there exists following integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E|G(y, t)| dy.$$

There is an inequality

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E|G(y, t)| dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{E(G(y, t))^2} dy.$$

Consider

$$E(G(y, t))^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} e^{-a^2 y^2 (t-s)} \times$$

$$E(\tilde{\xi}(y, \tau) \tilde{\xi}(y, s)) d\tau ds.$$

$$E(\tilde{\xi}(y, \tau) \tilde{\xi}(y, s)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \cos yv \times$$

$$E(\xi(x, \tau) \xi(v, s)) dx dv =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \cos yv B(x, \tau, v, s) dx dv.$$

We obtain

$$|E(\tilde{\xi}(y, \tau) \tilde{\xi}(y, s))| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |B(x, t, v, s)| dx dv \leq \frac{1}{2\pi} \cdot B.$$

Then

$$E(G(y, t))^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot B \times$$

$$\int_0^t \int_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} e^{-a^2 y^2 (t-s)} d\tau ds =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot B \cdot (1 - e^{a^2 y^2 t})^2.$$

Therefore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{E(G(y, t))^2} dy \leq \frac{\sqrt{B}}{2\pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - e^{-a^2 y^2 t})}{y^2} dy$$

for $y \neq 0$. \square

Твердження 1. [5]

$$\left| e^{-a^2 y^2 (t-t_1)} - 1 \right| \leq \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{\left(\ln\left(\frac{1}{|t-t_1|} + e^\delta\right)\right)^\delta}, \quad (6)$$

$$|\cos yx - \cos yx_1| \leq \frac{(\ln(|y| + e^\delta))^\delta}{\left(\ln\left(\frac{1}{|x-x_1|} + e^\delta\right)\right)^\delta} \quad (7)$$

for some $\delta > 0$.

Let

$$u_n(x, t) = \int_{-a_n}^{a_n} \cos yx G(y, t) dy.$$

Theorem 4. Let $\xi(x, t)$ be a random field, sample continuous with probability one from the $Sub_\varphi(\Omega)$ and the conditions of lemma 1 and lemma 2 hold,

$$\sup_{\substack{|x-x_i| \leq h \\ |t-t_1| \leq h}} \tau_\varphi(u_n(x, t) - u_n(x_1, t_1)) \leq \sigma(h),$$

where $\sigma(h)$ is a monotone increasing continuous function such that $\sigma(h) \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, moreover,

$$\int_{0+} \Psi\left(\ln \frac{1}{\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}\right) d\varepsilon < \infty, \quad (8)$$

where $\Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, and $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ is the inverse function to $\sigma(\varepsilon)$.

Then the function $u(x, t)$ which is represented in the form (3) is a generalized solution to the problem (1)–(2).

Proof. This theorem follows from Theorem 3. \square

Example 1. Let $\varphi(x)$ be a function such that $\varphi(x) = |x|^p$, for some $p > 1$ and all $|x| > 1$. Then $\Psi(x) = x^{1-\frac{1}{p}}$ for $x > 1$ and condition (8) holds for all $\varepsilon > 0$

$$\int_{0+} \left(\ln \frac{1}{\sigma^{(-1)}(u)}\right)^{1-\frac{1}{p}} du < \infty. \quad (9)$$

Condition (9) holds if $\sigma(h) = \frac{C}{|\ln|h||^\delta}$, for $\delta > 1 - \frac{1}{p}$, $C > 0$. In this case the condition of Theorem (4) is satisfied if there exist constant C such that

$$\left(E|u_n(x, t) - u_n(x_1, t_1)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C}{|\ln|h||^\delta}, \quad (10)$$

for $\delta > 1 - \frac{1}{p}$, all $n = 1, 2, \dots$, and sufficiently small $|h|$.

Theorem 5. Let $\xi(x, t)$ be a random field, sample continuous with probability one from the space $SSub_\varphi(\Omega)$, where $\varphi(x)$ is a function such that $\varphi(x) = |x|^p$ for some $p > 1$ and all $|x| > 1$ and the conditions of Lemma 1 and lemma 2 hold and

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(E|\xi(x, \tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx < \Theta$$

for some $\Theta > 0$. Then the function $u(x, t)$ which is represented in the form (3) is generalized solution to the problem (1)–(2).

Proof. It follows from Lemma 2 that there exist integral with probability one

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y \cos yx G(y, t) dy.$$

To make the function $u(x, t)$ which is represented in the form (3) to be the generalized solution of problem (1)–(2) it is sufficient to prove that integral (4) converge uniformly in probability in $|x| \leq A$, $0 \leq t \leq T$ to the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx G(y, t) dy.$$

for any $A > 0$, $T > 0$.

According to Theorem 4, using the example 1, to make integral (4) converge in probability in $C(\tilde{T})$ the following conditions must hold

$$\left(E|u_n(x, t) - u_n(x_1, t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{|\ln|h||^\delta}.$$

Using generalized Minkovskoho inequality we obtain

$$\left(E|u_n(x, t) - u_n(x_1, t_1)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned} & \left(E \left| \int_{-a_n}^{a_n} \cos yx G(y, t) dy - \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{-a_n}^{a_n} \cos yx_1 G(y, t_1) dy \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \left(E \left| \int_{-a_n}^{a_n} [\cos yx G(y, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. \cos yx_1 G(y, t_1)] dy \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \left(E \left| \int_{-a_n}^{a_n} [(\cos yx - \cos yx_1) G(y, t_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. (G(y, t) - G(y, t_1)) \cos yx] dy \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \int_{-\infty}^{\infty} [|\cos yx - \cos yx_1| (|G(y, t_1)|^2)^{\frac{1}{2}} + \\ & (E|G(y, t) - G(y, t_1)|^2)^{\frac{1}{2}}] dy. \quad (11) \end{aligned}$$

Let $|x - x_1| \leq h$ and for sufficiently small $|h|$, using the inequality (7), we have

$$\begin{aligned} |\cos yx - \cos yx_1| & \leq 2 \left| \sin \frac{y(x - x_1)}{2} \right| \leq \\ & \frac{(\ln(|y| + e^\delta))^\delta}{(|\ln |h||)^\delta}. \quad (12) \end{aligned}$$

Consider

$$\begin{aligned} & (E|G(y, t_1)|^2)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(E \left| \int_0^{t_1} e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)} \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)} (E|\tilde{\xi}(y, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}} d\tau. \end{aligned}$$

It follows from Lemma 1 that

$$\begin{aligned} & (E|\tilde{\xi}(y, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(E \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos yx \xi(x, \tau) dx \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (E|\xi(x, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}} dx < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Theta.$$

Therefore

$$\begin{aligned} & (E|G(y, t_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_1} \Theta e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)} d\tau \leq \\ & \frac{1}{2\pi} \Theta \frac{1}{a^2 y^2} |1 - e^{-a^2 y^2 t_1}|. \quad (13) \end{aligned}$$

Let $t_1 < t$ then

$$\begin{aligned} & (E|G(y, t) - G(y, t_1)|^2)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(E \left| \int_0^t e^{-a^2 y^2 (t - \tau)} \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau - \right. \right. \\ & \left. \left. \int_0^{t_1} e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)} \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(E \left| \int_0^{t_1} [e^{-a^2 y^2 (t - \tau)} - e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)}] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t - \tau)} \tilde{\xi}(y, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{t_1} [|e^{-a^2 y^2 (t - \tau)} - e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)}| \times \right. \\ & \left. (E|\tilde{\xi}(y, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}}] d\tau + \right. \\ & \left. \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t - \tau)} (E|\tilde{\xi}(y, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}} d\tau \right). \end{aligned}$$

Let $|t - t_1| \leq h$ and for sufficiently small $|h|$, using the inequality (6), we have

$$\begin{aligned} & |e^{-a^2 y^2 (t - \tau)} - e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)}| = \\ & |e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)}| |e^{-a^2 y^2 (t - t_1)} - 1| \leq \\ & e^{-a^2 y^2 (t_1 - \tau)} \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln |h||)^\delta}. \end{aligned}$$

Therefore

$$(E|G(y, t) - G(y, t_1)|^2)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \max(1, a^2) \times \right. \\ \left. \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \Theta d\tau + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \Theta d\tau \right) = \\ \frac{\Theta}{2\pi} \left(\max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \times \right. \\ \left. \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right). \quad (14)$$

Thus we obtain from (11), (12), (13) and (14) that

$$\left\| u_{a_n}^{(0)}(x, t) - u_{a_n}^{(0)}(x_1, t_1) \right\|_p \leq \\ \frac{\Theta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\ln(|y| + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \\ \left. \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \\ \left. \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy = \\ \frac{\Theta}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \\ \left. \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \\ \left. \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy = \\ \frac{\Theta}{\pi} \left\{ \int_0^1 \left[\frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy + \right. \\ \left. \int_1^{+\infty} \left[\frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy \right\}$$

$$\left. \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy \Bigg\} = \frac{\Theta}{\pi} (I_1 + I_2).$$

Consider

$$I_1 = \int_0^1 \left[\frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \\ \left. \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| \right. \\ \left. + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy = \\ \frac{1}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} \int_0^1 \frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy + \\ \frac{\max(1, a^2)}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} \int_0^1 \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy + \\ \int_0^1 \left(\int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right) dy = \\ \frac{1}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} I_{11} + \frac{\max(1, a^2)}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} I_{12} + I_{13}.$$

Since $\left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| \leq a^2 y^2 t_1 \leq a^2 y^2 T$, we have

$$I_{11} = \int_0^1 \frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy \leq \\ a^2 T \int_0^1 (\ln(y + e^\delta))^\delta dy = a^2 T C_{11}. \\ I_{12} = \int_0^1 \frac{\ln(y^2 + e^\delta)}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy \leq \\ a^2 T \int_0^1 (\ln(y^2 + e^\delta))^\delta dy = a^2 T C_{12}.$$

Using that $e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} \leq 1$ i $t - t_1 \leq h$, then the $\delta > 0$ and for sufficiently small h , we have

$$I_{13} = \int_0^1 \left(\int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right) dy \leq \\ \int_0^1 (t - t_1) dy \leq |h| \leq \frac{1}{|\ln|h||^\delta}.$$

So we have

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \frac{1}{|\ln|h||^\delta} (TC_{11} + \max(1, a^2)TC_{22} + 1). \\
 I_2 &= \int_1^\infty \left[\frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| + \right. \\
 &\quad \left. \max(1, a^2) \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{(|\ln|h||)^\delta} \frac{1}{a^2 y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right] dy = \\
 &\frac{1}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} \times \int_1^\infty \frac{\ln(y + e^\delta)^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy + \\
 &\quad \frac{\max(1, a^2)}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} \times \\
 &\quad \int_1^\infty \frac{\ln(y^2 + e^\delta)^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy + \\
 &\quad \int_1^\infty \left(\int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right) dy = \\
 &\frac{1}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} I_{21} + \frac{\max(1, a^2)}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} I_{22} + I_{23}. \\
 I_{21} &= \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy \leq \\
 &\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(y + e^\delta))^\delta}{y^2} dy = C_{21}.
 \end{aligned}$$

Список використаних джерел

1. *Angulo J. M.* Fractional diffusion and fractional heat equation / J. M. Angulo, M. D. Ruiz-Medina, V. V. Ang, W. Grecksch // *Adv. Appl. Probab.* – 2000. – 32. – P. 1077–1099.
2. *Kozachenko Yu. V.* Extremal behavior of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // *Extremes.* – 2006. – 8. – P. 191–205.
3. *Kozachenko Yu. V.* The heat equation with random initial conditions from Orlicz space

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{y^2} \left| 1 - e^{-a^2 y^2 t_1} \right| dy \leq \\
 &\int_1^{+\infty} \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{y^2} dy = C_{22}. \\
 I_{23} &= \int_1^{+\infty} \left(\int_{t_1}^t e^{-a^2 y^2 (t-\tau)} d\tau \right) dy = \\
 &\frac{1}{a^2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2} \left(1 - e^{-a^2 y^2 (t-t_1)} \right) dy \leq \\
 &\frac{\max(1, a^2)}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(y^2 + e^\delta))^\delta}{y^2} dy = \\
 &\frac{\max(1, a^2)}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} C_{23}.
 \end{aligned}$$

Therefore

$$I_2 \leq \frac{1}{a^2 (|\ln|h||)^\delta} (C_{21} + \max(1, a^2)(C_{22} + C_{23})).$$

Then for $\delta > 1 - \frac{1}{p}$, we have

$$\left(E |u_n(x, t) - u_n(x_1, t_1)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{C}{|\ln|h||^\delta},$$

where

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\Theta}{\pi} (TC_{11} + \max(1, a^2)TC_{22} + 1 + \\
 &\frac{1}{a^2} (C_{21} + \max(1, a^2)(C_{22} + C_{23}))),
 \end{aligned}$$

$C_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ are some constants. \square

/ Yu. V. Kozachenko, K. J. Veresh // *Teor. Imovirnost. Matem. Statist.* – 2009. – 80. – P. 63–75;

4. *Ratanov N. E.* Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation / N. E. Ratanov, A. G. Shuhov, Yu. M. Suhov // *Acta Appl. Math.* – 1991. – 22. – P. 103–115.
5. *Kozachenko Yu. V.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$ / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak

- // Applied Mathematics. – 2014. – 5. – P. 2318–2333.
6. Kozachenko Yu. V. The Cauchy problem for the heat equation with a random right side / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Random Oper. and Stoch. Equ. – 2014. – 22(1). – P. 53–64.
 7. Slyvka-Tylyshchak A. I. The heat equation on line with random right part from Orlicz space / A. I. Slyvka-Tylyshchak // Carpatian Mathematical Publications. – 2014. – Vol. 6, №1. – P. 134-148.
 8. Красносельский М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. В. Рутіцкий. – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
 9. Buldygin V. V. Metric Characterization of Random Variables and Random processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, Rhode. – 2000.
 10. Козаченко Ю. В. Краевые задачи со случайными начальными условиями и функциональные ряды из $sub_{\varphi}(\Omega)$. I / Ю. В. Козаченко, Ю. А. Ковальчук // Укр. мат. журнал. – 1998. – т. 50, №4. – С. 504–515.
 11. Козаченко Ю. В. Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами / Ю. В. Козаченко, Г. І. Сливка // Теорія ймов. та матем. статист. Вип. 69, – 2003. – С. 48–63.
 12. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Б. М. Маркович. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010. – 384 с.
 3. KOZACHENKO Yu. V., VERESH K. J. (2009) “The heat equation with random initial conditions from Orlicz space”, *Teor. Imovirnost. Matem. Statist.*, **8**, pp. 63–75;
 4. RATANOV N. E., SHUHOV A. G., SHUHOV Yu. M. (1991) “Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation” , *Acta Appl. Math.*, **22**, pp. 103–115.
 5. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I.(2014) “The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_{\varphi}(\Omega)$ ”, *Applied Mathematics*,**5**, pp. 2318–2333.
 6. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I. (2014) “The Cauchy problem for the heat equation with a random right side”, *Random Oper. and Stoch. Equ.*,**22(1)**, pp. 53–64.
 7. SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I. (2014) “The heat equation on line with random right part from Orlicz space”, *Carpatian Mathematical Publications*, **6** no. 1., pp. 134-148.
 8. KRASNOSELSKY M. A., RUTITCKY Y. B. (1958) “Convex functions and Orlicz spaces ”, Noordhof,Gröningen, 271 p.
 9. BULDYGIN V. V., KOZACHENKO Yu. V. (2000) “ Metric Characterization of Random Variables and Random processes”, American Mathematical Society, Providence, Rhode, 285 p.
 10. KOZACHENKO Yu. V., KOVALCHUK Ya. A. (1998) “Boundary value problems with random initial conditions and series of functions of $Sub_{\varphi}(\Omega)$ ”, *Ukr. Matem. Zh.*, **50(4)**, pp. 504–515.
 11. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA G. I. (2003) “Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions”, *Theory Probab. and Mathem. Statist.*, **69**, pp. 67–83.
 12. MARKOVICH B. M. (2010) “Equations of Mathematical Physics”, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2 384p.

Надійшла до редколегії 12.03.2018

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ
РІВНЯННЯ,
МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА
ТА МЕХАНІКА**

УДК 532.529+577

Баранець В.О.¹, інженер,
Кізілова Н.М.², д.ф.-м.н., проф.

V. O. Baranets¹, engineer,
N. M. Kizilova², Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Математичне моделювання агрегації та осідання частинок в похилих трубках

Mathematical modelling of particle aggregation and sedimentation in the inclined tubes

¹Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: cherevko.vita@gmail.com
²Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: cherevko.vita@gmail.com
²V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

Осідання частинок, які агрегують у гравітаційному полі, широко використовується як простий і дешевий тест на стабільність суспензії різних технічних сумішей, крові та нанорідин. Встановлено, що нахил трубки робить тест набагато швидшим, що відомо як ефект Бойкотта. Залежність швидкості осідання від кута нахилу є складною і мало вивченою задачею. У цій роботі узагальнено двофазну модель суспензії частинок, які агрегують у похилих трубках. Задача розглядається у двовимірному випадку, що відповідає вузьким прямокутним ємностям або зазорам віскозиметрів конусоподібного типу. У припущенні малих кутів нахилу рівняння усереднюються по поперечній координаті, а отримана гіперболічна система рівнянь розв'язується методом характеристик. Чисельні розрахунки виявили, що збільшення початкової концентрації частинок, їх швидкості агрегації, зовнішньої рівномірної сили і кута нахилу прискорюють осідання, а будь-яке зростання в'язкості рідини сповільнює його, що є фізично доречним. Так чи інакше, поведінка прискорення різна. На основі отриманих результатів запропоновано новий метод оцінки стійкості суспензії.

Ключові слова: ефект Бойкотта, суспензія, агрегація, седиментація, медична діагностика.

Sedimentation of the aggregating particles in the gravity field is widely used as an easy and cheap test of the suspension stability of different technical suspensions, blood and nanofluids. It was established the tube inclination makes the test much faster that is known as the Boycott effect. The dependence of the sedimentation rate on the angle of inclination is complex and poorly understood yet. In this paper the two phase model of the aggregating particles is generalized to the inclined tubes. The problem is formulated in the two-dimensional case that corresponds to the narrow rectangle vessels or gaps of the viscosimeters of the cone-cone type. In the suggestion of small angles of inclination the equations are averaged over the transverse coordinate and the obtained hyperbolic system of equations is solved by the method of characteristics. Numerical computations revealed the increase in the initial concentration of the particles, their aggregation rate, external uniform force and inclination angle accelerate the sedimentation while any increase in the fluid viscosity decelerates it that is physically relevant. Anyway, the behaviors of the acceleration are different. Based on the results, a novel method of estimation of the suspension stability is proposed.

Key words: Boycott effect, suspension, aggregation, sedimentation, medical diagnostics.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Introduction

Influence of inclination of the vessel in which a suspension of particles sediments in the gravity field was first discovered by Arthur Boycotte in 1920 on the red blood cell (RBC) sedimentation in thin long vertical tubes [1], and now it is known as the Boycotte effect. On that time the RBC sedimentation test was recognized as the most powerful medical diagnostic means on general pathology, and many researchers were seeking for more benefit test conditions, including the usage of the inclined tubes. This sedimentation technique is also widely used for the waste water cleaning, drinking water purification, treatment of mixtures in industry and manufacture, and the high reservoirs or deep wells are needed for the successful processing. The settling of particles in the high containers is limited by its width, and tilting of the reservoir or well increases the efficient area of sedimentation, decreases the distance that each particle must travel before impacting a wall, and, therefore, enhances the sedimentation rate in orders of magnitude [2].

The Boycotte effect is used in the oil industry because at certain inclination angles (40-50°) of the tube the clearest separation of the suspension for oil-well cementation is observed [3]. The effect is also used for mixing of the granular matters [4]. It may be responsible for specific sediment distribution along inclined ocean bottom at the water stratification conditions [5], and for the pattern formation at the inclined surfaces of the sand-dunes [2]. All suspensions settle faster in the inclined vessels and exhibit clear separation of the layers of different optical density, but the problem on determination of the optimal angles remains still unsolved.

Problem formulation

The steady sedimentation of particles in the narrow channel of the width R and the length L ($R/L \ll 1$), inclined at the angle θ is considered (Fig.1a,b). The channel corresponds to the gap between the walls of the rotation viscosimeter of the cone-cone type or a rectangle vessel with the depth $D \gg R$.

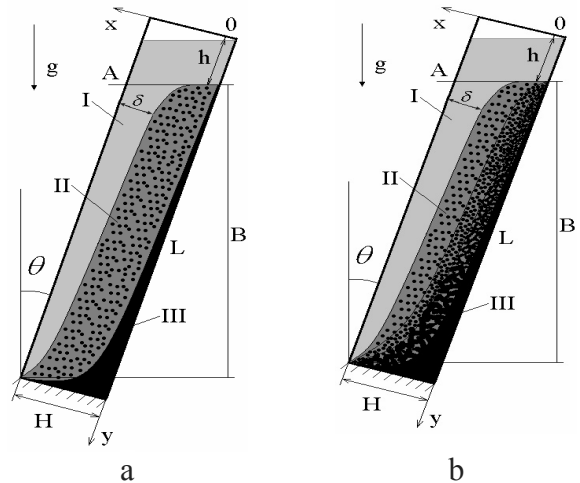


Fig.1. A sketch of the particle sedimentation in the inclined tube for the non-aggregating (a) and aggregating (b) particles.

The two phase approach to the suspension of the aggregating particles [6,7] is used. Neglecting the inertia forces as compared with the viscous forces, the equations of the quasi-steady motion can be written in the form

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Nu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Nu_y^1 = \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Hu_x^1 + \frac{\partial}{\partial y} Hu_y^1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [Hu_x^1 + (1-H)u_x^2] + \frac{\partial}{\partial y} [Hu_y^1 + (1-H)u_y^2] = 0, \quad (3)$$

$$H \frac{\partial p}{\partial y} = -F(u_y^1 - u_y^2) + H\rho_s G \cos(\theta), \quad (4)$$

$$(1-H) \frac{\partial p}{\partial y} = F(u_y^1 - u_y^2) + (1-H)\rho_f G \cos(\theta), \quad (5)$$

$$H \frac{\partial p}{\partial x} = -F(u_x^1 - u_x^2) + H\rho_s G \sin(\theta), \quad (6)$$

$$(1-H) \frac{\partial p}{\partial x} = F(u_x^1 - u_x^2) + (1-H)\rho_f G \sin(\theta), \quad (7)$$

where (u_x^1, u_y^1) and (u_x^2, u_y^2) are components of the velocity vectors for the particles (phase 1) and fluid (phase 2), $(0xy)$ is the Cartesian coordinate system connected with the ρ_s, ρ_f are densities of the solid and fluid materials, p is the hydrostatic pressure, H and N are the mass and numerical concentrations of the particles, F is the phenomenological coefficient

for the viscous drag forces acting on the particle from the viscous fluid, φ the aggregation rate, G is the mass force that can be chosen as $G = ng$, n is the magnification factor when the sedimentation is carried out in a centrifuge [7].

The equation (1) describes the kinetics of the particle aggregation due to the collisions, decompositions or exchange interactions [6]. The mass continuity conditions for the phases (2), (3) and the projections of the momentum equations for the phases on the axis coordinate (4)-(7) give the system of PDE for the velocities, pressures and numerical concentration of the aggregates. The same model in one-dimensional formulation has been used for the RBC sedimentation modeling in the vertical tubes, in thin gaps between the walls of the rotational viscosimeter of the cylinder-cylinder type [8] and in the centrifugal force field [9]. In the two-dimensional formulation it has been applied to the RBC sedimentation in the circular tubes in the external magnetic field [10]. The system (1)-(7) can be solved by numerical methods, but in order to derive more convenient half-analytical estimations, in this paper a simplified one-dimensional model will be obtained by averaging of the equations (1)-(7) over the transverse coordinate x .

One-dimensional approximation for small inclination angles

Based on the dimension theory, the expressions for F and φ have been found in the form [6,8-10]:

$$F = \mu_f H(1-H)^{-2.5} w^{-2/3}, \quad \varphi = -kH^2 w^{-2}, \quad (8)$$

where $w = H/N$ is the average volume of the aggregates, k is the empirical constant that determines the aggregate formation.

By excluding pressure in (4)-(7) and using the impermeability condition at the walls of the tube [10], one can obtain

$$\begin{aligned} u_x^1 &= -\Theta(H) \sin(\theta), \quad u_y^1 = \Theta(H) \cos(\theta), \\ u_x^2 &= \frac{H\Theta(H)ng\delta\rho \sin(\theta)}{(1-H)F}, \\ u_y^2 &= -\frac{H\Theta(H)ng\delta\rho \cos(\theta)}{(1-H)F}, \end{aligned} \quad (9)$$

where $\Theta(H) = H(1-H)^2 \delta\rho G / F(H)$,
 $\delta\rho = \rho_s - \rho_f$.

Let us assume, the aggregation at the expense of the lateral motion of the particles is essential if during the time T of the particle sedimentation along the distance L their radial displacement δ will be of the order of magnitude of R . Since $\delta \approx |u_x^1|T$, $T \approx L/|u_y^1|$, this condition accounting for (9) can be written as

$$\frac{\delta}{R} \approx \frac{L|u_x^1|}{R|u_y^1|} = \frac{L}{R} \tan(\theta). \quad (10)$$

For the averaging purposes let us introduce the following designations:

$x \in [0; x_s]$, where x_s is the coordinate of the interface between the layers I and IIa (Fig.1b)

$$\begin{aligned} N(t, x, y) &= \begin{cases} N(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases} \\ H(t, x, y) &= \begin{cases} H(t, y), & x \leq x_s \\ 0, & x_s < x \leq s \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

where s is the width or the area occupied by the particles and aggregates (Fig.1b).

According to (9) the interface $x = x_s$ between the zones I and IIa moves with the speed

$$U_x = u_x^1|_{x=x_s} = H(1-H)^2 g\delta\rho \sin \alpha F^{-1}. \quad (12)$$

The averaged values will be introduced in the form

$$\langle f \rangle = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} f dx. \quad (13)$$

Then after some estimations of terms at the conditions $R/L \ll 1$, $H_0 < 1$ the system (1)-(7) can be written in the form (the averaging signs are omitted):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} Nu_y^1 &= -kN^2 \Delta + \\ &\frac{NH(1-H)^2 \delta\rho ng \sin(\theta)}{Fx_s}, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} Hu_y^1 &= \frac{H^2(1-H)^2 \delta\rho ng \sin(\theta)}{Fx_s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [Hu_y^1 + (1-H)u_y^2] &= 0, \\ H \frac{\partial p}{\partial y} + F(u_y^1 - u_y^2) + \rho_s ng H \cos(\theta) &= 0, \\ (1-H) \frac{\partial p}{\partial y} - F(u_y^1 - u_y^2) + \\ \rho_f ng(1-H) \cos(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

where $\Delta(x_s, y) = \frac{1}{x_s} \int_0^{x_s} \left(1 + O\left(\frac{\delta}{R}\right)\right) x dx$.

With the non-dimensional variables

$$\begin{aligned} Y = \frac{y}{L}, \quad T = \frac{t}{T^*}, \quad T^* = \frac{L}{u_0}, \quad u_0 = \frac{ng\delta\rho w_0^{2/3}}{\mu_f}, \\ W = \frac{w}{w_0}, \quad U_y^1 = \frac{u_y^1}{u_0}, \quad K = \frac{kL}{u_0 w_0} \end{aligned}$$

where T^* is the characteristic time, w_0 is the volume of a single particle, the equations for the concentration and volume of the aggregates are the following

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial T} + U_y^1 \frac{\partial W}{\partial Y} &= KH\Delta, \\ \frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial Y} HU_y^1 &= -\frac{H(1-H)^{4.5} W^{2/3} \sin(\theta)}{L}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$U_y^1(H, W, Y) = -(1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta).$$

The boundary conditions for the variables are

$$C(0, Y) = C_0, \quad W(0, Y) = 1, \quad U^1(T, L) = 0. \quad (16)$$

The system (15) is hyperbolic [6,7].

The characteristic equations are

$$(I) \quad \frac{dY}{dT} = (1-H)^{4.5} W^{2/3} \cos(\theta), \quad (17)$$

$$(II) \quad \frac{dY}{dT} = -A(5.5H - 1) \cos(\theta). \quad (18)$$

where $A = (1-H)^{3.5} W^{2/3}$.

The conditions at the characteristics are

$$(I) \quad \frac{dW}{dT} = -KH\Delta, \quad (19)$$

$$(II) \quad \frac{2}{W} \left(\frac{dW}{dT} - KC\Delta \right) = \frac{13.5}{1-H} \left(\frac{dH}{dT} + H(1-H)^{4.5} \cos(\theta) \right) + \frac{H(1-H) A \sin(\theta)}{L} \quad (20)$$

The characteristics of the family (I) have a positive slope, while the family (II) in the physiological range have negative slope. Solution of the one-dimensional problem (15)-(16) can be obtained on (17)-(20) by the method of characteristics.

Numerical results and discussion

Like in the case of the vertical tube [6,7], the families of characteristics (I) and (II) have positive and negative slopes accordingly. The family (I) corresponds to the interface between the zones II and III, while the family (II) describes the movement of the interface between the zones I and II moving with the corresponding velocity (12). Numerical computations on (17)-(20) have been carried out using the typical parameters for human blood [6,7]

$$H_0 = 0.35 \div 0.5 \quad \mu_f = (1.1 \div 1.7) \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s},$$

$$G = g, \quad \rho_f = 1030 \div 1080 \text{ kg/m}^3,$$

$$\rho_s = 1050 \div 1150 \text{ kg/m}^3, \quad L = 5 \text{ cm}, \quad R = 2 \text{ mm},$$

$$k = 10^{-5} \div 10^{-2} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

The numerical procedure is described in details in [6,7]. The example of the snapshot of the software elaborated is given in Fig.2. The results of numerical computations are presented in Fig.3-4.

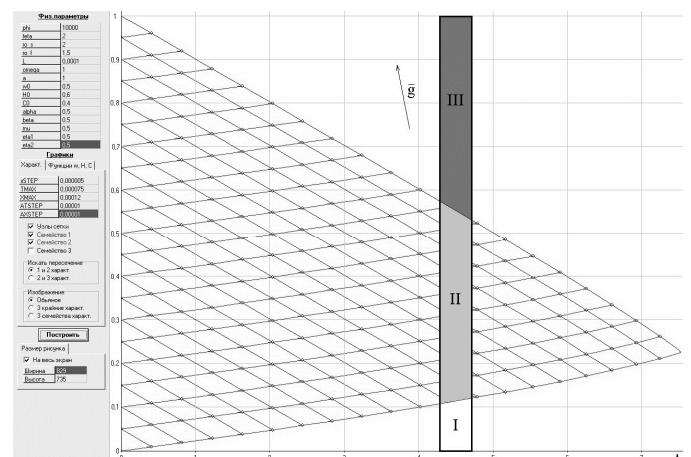


Fig.2. An example of the interface of the software and the zone distribution in the inclined tube: I is the clear fluid zone, II is the zone of sedimenting aggregates, III is the compact zone.

The increased external force uniformly accelerates particle sedimentation along the tube (Fig.3a). When the initial concentration

increases, the changes are more noticeable for the I-II interface (Fig.3b). When particle aggregation rate increases, the changes are more noticeable at the II-III interface (Fig.3c). Small increase in the inclination angle significantly accelerates the zone I formation (Fig.3d) because of the decrease of the length the particles move before reaching the lower wall of the inclined tube. When the inclination angle becomes bigger than some critical angle θ^* , the sedimentation decelerates. In the case of the material parameters used in the computations presented in Fig.3d, the optimal angle is $\theta^* \sim 8^\circ$.

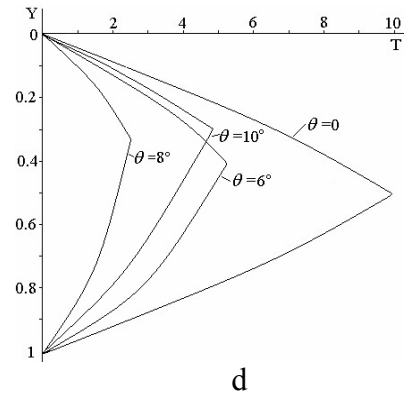
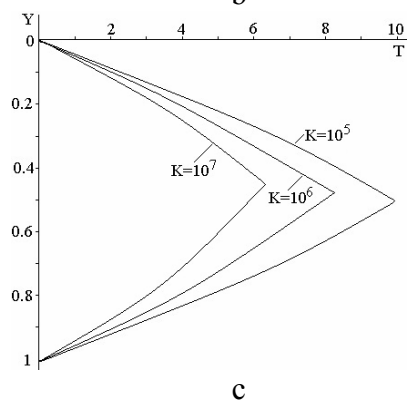
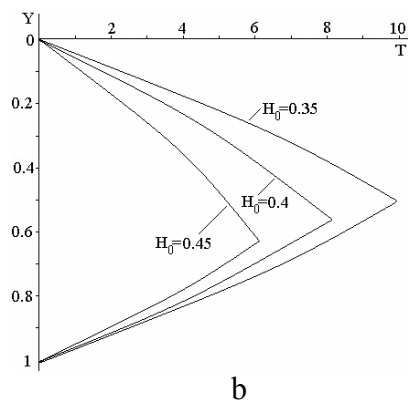
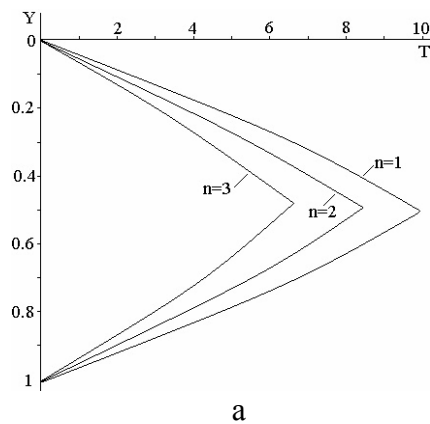


Fig.3. Locations of the characteristics at different external force (a), initial concentrations of the particles (b), aggregation rate (c), and inclination angle (d).



Before decision making upon the nanofluid ageing or blood aggregatability the test must be conducted for the same nanofluid in its basic state before being used for a long time or for the healthy native blood samples. The proposed approach will be tested experimentally in future works.

Conclusions

The Boycotte effect which is used in testing of some industrial suspensions is very attractive for usage in the medical diagnostics instead of conventional blood sedimentation test, for investigation of ageing of micro and nanofluids. The developed theory allows easy determination of the sedimentation curves as the moving interfaces I-II and II-III by the method of characteristics. It was shown, the sedimentation rate increased with increasing the particle concentration, their aggregation rate and external force, but with distinct regularities for the I-II and II-III interfaces. The corresponding dependence on the angle is more complex. Sedimentation is accelerated by small angles but at the angles exceeded some critical value the settling is decelerated and hampered. Based on the obtained results, a novel method of determination not only the aggregation ability of the particles but also the particle-specific and angle-dependent shear stress factor is proposed. The experimental validation of the proposed approach will be tested in our future experimental studies on blood and different types of nanofluids used in the microfluidic flow systems.

Список використаних джерел

1. *Boycott A.E.* Sedimentation of blood corpuscles // *Nature*, V. 104. -1920. - P.532.
2. *Moys S.A.P.* Sedimentation of polydisperse particles at low Reynolds numbers in inclined geometries // PhD Thesis. Santiago de Chile. - 2016. – P.78.
3. *Hanson P., Trigg T., Rachal G., Zamora M.* Investigation of Barite Sag in Weighted Drilling Fluids in High Deviated Wells // SPE paper 20423 presented at the SPE Annual Conference and Exhibition. New Orleans. – 1990. - Sept. - PP. 23-26.
4. *Duran J., Mazozi T.* Granular boycott effect: how to mix granulates // *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*. – Nov. – 60(5 Pt B):6. – 1999. - PP. 199-201.
5. *Peacock T., Blanchette F., Bush J.W.M.* The stratified Boycott effect. // *J. Fluid Mech.* - V. 529. - 2005. - PP.33-49.
6. *Kizilova N., Batyuk L., Cherevko V.* Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study // *Biomechanics in Medicine and Biology: Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics, Zielona Gora, Poland, September 5-7, 2018.* / K. Arkusz, R. Bedzinski, T. Klekiel, S. Piszczatowski, eds. Springer Series “Advances in Intelligent Systems and Computing.” - Vol.831. - 2019. - PP. 3-22.
7. *Кизилова Н.Н., Черевко В.А.* Гравитационная седиментация эритроцитов: эксперименты и теоретическая модель // *Вестник ХНУ. Сер. Математика, прикладная математика, механика.* – №875. - 2009. – С.80-94.
8. *Losev Y.S.* Some problems of hydromechanics of suspensions with varying densities: application to the blood // PhD Thesis. Moscow University. - 1984. - P. 135.
9. *Datsok O.M., Zholonsky Ye.,N., Kizilova N.N.* Two-phase model of the erythrocytes sedimentation in a non-uniform force field // *Visnyk Kharkov Polytechnic University.* - N135. - 2002. - PP.61-66.
10. *Kizilova N.N.* Effect of radial motion of erythrocytes on their sedimentation in a tube in an external magnetic field // *Fluid Dynamics.* - V.26, N5. - 1991. - PP.737-744.

References

1. BOYCOTT, A.E. (1920) Sedimentation of blood corpuscles // *Nature*, V. 104. - P.532.
2. MOYS, S.A.P. (2016) Sedimentation of polydisperse particles at low Reynolds numbers in inclined geometries // *PhD Thesis. Santiago de Chile.* – P.78.
3. HANSON, P., TRIGG, T., RACHAL, G., ZAMORA, M. (1990) Investigation of Barite Sag in Weighted Drilling Fluids in High Deviated Wells // *SPE paper 20423 presented at the SPE Annual Conference and Exhibition. New Orleans.* – P. 23-26.
4. DURAN, J., MAZOZI, T. (1999) Granular boycott effect: how to mix granulates // *Phys Rev E Stat Phys Plasmas Fluids Relat Interdiscip Topics*. – Nov. – 60(5 Pt B):6 – PP. 199-201.
5. PEACOCK, T., BLANCHETTE, F., BUSH, J.M.M. (2005) The stratified Boycott effect. // *J. Fluid Mech.* – V. 529. – PP.33-49.
6. KIZILOVA, N., BATYUK, L., CHEREVKO, V. (2019) Human Red Blood Cell Properties and Sedimentation Rate: a Biomechanical Study // *Biomechanics in Medicine and Biology: Proceedings of the International Conference of the Polish Society of Biomechanics, Zielona Gora, Poland, September 5-7, 2018.* / K. Arkusz, R. Bedzinski, T. Klekiel, S. Piszczatowski, eds.
7. KIZILOVA, N.N., CHEREVKO, V.A. (2009) Gravitational sedimentation of erythrocytes: experiments and theoretical model // *Vestnik of KhNU, ser. “Mathematics, applied mathematics, mechanics”.* - №875. - PP.80-94.
8. LOSEV, Y.S. (1984) Some problems of hydromechanics of suspensions with varying densities: application to the blood // *PhD Thesis. Moscow University.* - P. 135.
9. DATSOK, O.M., ZHOLONSKY, YE.N., KIZILOVA, N.N. (2002) Two-phase model of the erythrocytes sedimentation in a non-uniform force field // *Visnyk Kharkov Polytechnic University.* - N135. - PP.61-66.
10. KIZILOVA, N.N. (1991) Effect of radial motion of erythrocytes on their sedimentation in a tube in an external magnetic field // *Fluid Dynamics.* - V.26, N5. - PP.737-744.

Надійшла до редколегії 20.11.18

УДК 536.2+612.1

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Коробов А. М., к. ф.-м. н., доц.

Ефективна фрактальна модель системи мікроциркуляції крові в поверхневих тканинах людини

Харківський національний університет
ім. В.Н. Каразіна, 61022, м. Харків,
пл. Свободи, 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com,
amkorobov@i.ua

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
A. M. Korobov, PhD (Phys.-Math.), Doc.

Modeling of blood microcirculation, heat and mass transfer in human tissues

V.N. Karazin Kharkov National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com,
amkorobov@i.ua

Запропонована математична модель будови системи кровоносних судин, яка забезпечує мікроциркуляцію крові в поверхневих тканинах людини, а саме шкіри, для забезпечення постачання крові як рідини, що нагріває/охолоджує та визначає терморегуляцію при змінах температури зовнішнього середовища та перегріві/переохолодженні тіла. Модель базується на даних сучасних досліджень будови мікроциркуляторних русел на основі технологій microCT. Система мікросудин моделюється як фрактальне бінарне дерево що оптимізовано для рівномірного постачання живлючої рідини (крові для біологічних тканин) за рахунок однорідного розподілу капілярів, оптимальних значень для діаметрів, довжин та кутів розгалуження в біфуркаціях трубок, які забезпечують розподіл рідини з мінімальними загальними витратами енергії. Розроблена модель запропонована для використання в комп'ютерних системах моніторингу планування фізіотерапевтичних процедур ряду захворювань.

Ключові слова: оптимальні системи транспорту рідини, мікроциркуляція, математичне моделювання.

A mathematical model of the structure of the blood vessels system which provides blood microcirculation in the superficial tissues of human, namely the skin, to provide blood supply as a fluid, which heats / cools, and determines thermoregulation in changes of ambient temperature and overheating / supercooling is proposed. The model is based on data from current studies of the structure of microcirculatory beds based on microCT technologies. The microvascular system is modeled as a fractal binary tree optimized for uniform supply of a nutrient fluid (blood for biological tissues) due to the homogeneous distribution of capillaries, optimal values for diameters, lengths and branching angles in bifurcations of tubes that provide flow distribution with minimal energy costs. The model has been developed to use in computer-based monitoring systems for the planning of physiotherapy procedures for different diseases.

Keywords: optimal fluid transport systems, microcirculation, mathematical modeling.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ.

Сучасні біоінженерні технології дозволяють вирощувати тканини зі ствольних клітин пацієнта з убудованою в тканину системою малих судин для мікроциркуляції крові, що дозволяє таким тканинам швидше приживатись виконувати свої функції [1]. Ушкодження шкіри людини можуть досягати 50-70% од поверхні тіла (при опіках, обмороженнях та ін.), що робить задачу розробки замінників шкіри дуже актуальною. Будова та закономірності функціонування системи мікроциркуляції крові в

поверхневих тканинах людини важливі також для планування терапевтичних та фізіотерапевтичних впливів крізь поверхневі тканини, наприклад, при фототерапії [2,3]. Відповідні моделі однорідних шаруватих матеріалів для оцінки розповсюдження, поглинання та відповідних фотоіндукованих реакцій були запропоновані у вигляді шаруватих однорідних тканин [3,4], однак більш детальне урахування може бути більш цікавим з точки зору біоінженерних застосувань. Так, в серії публікацій [5-8] було запропоновано модель

системи мікроциркуляції шкіри людини у вигляді просторових фрактальних структур. Відомо, що шкіра скомпонована з шарів із різними термомеханічними властивостями: епідермісом (I+II на Рис.1), який складається з шарів мертвих клітин, які не потребують постачання (I) та живих клітин (II), які відокремлені хвилястою базальною мембраною від верхнього шару дерми (III), який заповнений розташованими ортогонально до поверхні малими кровоносними судинами (капілярами), а ще нижче розташований гіподермі (IV), багатий на жирову тканину, відповідно до складу тіла випробуваного. Розташування артерій, що живлять (а), їх розгалужень впритул до капілярів (к) має характерні риси в різних шарах I-IV (Рис.1). Грунтуючись на цих закономірностях, модель розгалуженої структури мікросудин шкіри була запропонована у вигляді фрактальних бінарних дерев [4] з кутами розгалуження в послідовних генераціях 180° та 90° . Запропонована модель була досліджена у зв'язку з відводом тепла системою мікроциркуляції крові від тканин, які знаходяться під впливом зовнішнього низькоінтенсивного опромінювання електромагнітним полем оптичного діапазону частот лазером або світловодом [3]. Були отримані розв'язки модифікованих моделей Pennes [2] для кожного шару та обговорені оптимальні властивості системи мікроциркуляції у вигляді залежностей між діаметрами і довжинами артеріальних судин різних генерацій [5-8]. Відомо, що транспортні системи тканин рослин та тварин є еволюційно пристосованими до постачання та розподілу живлячих рідин (крові, рослинного соку, трофічних рідин у простіших та ін.) з мінімальними витратами енергії [9,10]. При цьому транспортні системи є пристосованими до мінімізації не тільки термічних, але й в'язких дисипацій при постійних температурах тіла (теплових).

В даній роботі досліджується математична модель фрактальної структури системи мікроциркуляції, запропонована в [5-8], для оцінки додаткового джерела дисипації енергії та виробництва ентропії за рахунок в'язкої дисипації.

2. Математична модель.

Схема будови шкіри як 3-шарового матеріалу наведена на Рис.1а. Шари I, II, III, IV відповідають кератину (роговий шар), сосочковому епідермісу, дермісу та гіподермісу відповідно, які мають різні термомеханічні властивості. Будова розгалужених кровоносних судин як бінарних дерев відповідає фракталу,

який, відповідно до [5-8], можна моделювати у вигляді системи трубок, яка забезпечує кровопостачання із живлячої артерії, до шарів II і III, причому рівномірно заповнює поверхню розділу між шарами II і III (Рис.1б).

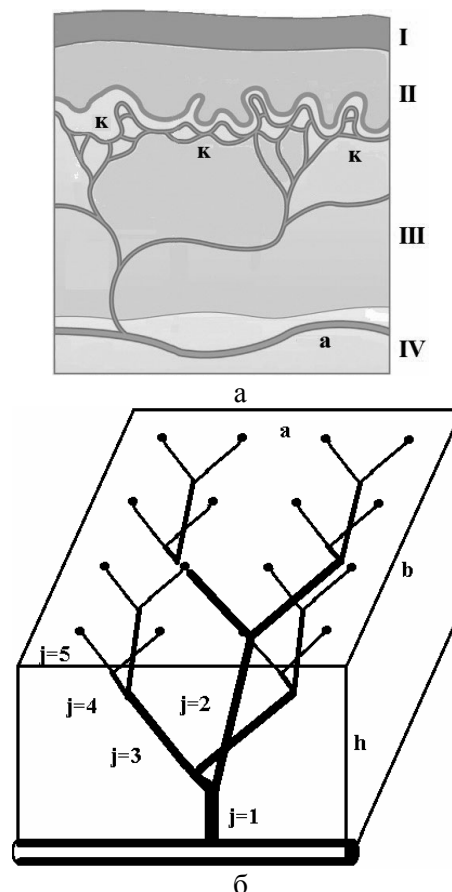


Рис.1. Схема будови шкіри (а) та відповідна фрактальна модель системи мікроциркуляції (б). I - роговий шар, II - сосочковий епідерміс, III - дерміс, IV - гіподерміс; а – артерія, що живить, к – капіляри.

Розглянемо стаціонарну ламінарну течію в'язкої нестисливої рідини по фрактальному дереву. Будемо вважати, що d_j, L_j - діаметри і довжини трубок j -го порядку, ϕ_j - кути розгалуження між кожними двома симетричними трубками j -го порядку. Завдяки такій будові, кожна біфуркація (материнська трубка та дві дочірні) лежать в одній площині, що відповідає даним вимірювань [10].

На вході до трубки 1-го порядку задана об'ємна витрата $Q_1 = \text{const}$. Тоді, в силу симетрії дерева, на вході в кожну трубку j -го порядку об'ємна витрата $Q_j = Q_1 2^{1-j}$. Якщо вихідні кінці трубок останнього порядку, які відповідають капілярам, розташовані рівномірно по поверхні дерми су, то, в силу симетрії будови дерева, маємо наступні геометричні співвідношення:

$$\begin{aligned} L_1 + (L_2 + L_3) \cos \varphi_2 + (L_4 + L_5) \cos \varphi_3 &= h, \\ L_1 + L_2 \cos \varphi_2 + (L_3 + L_4) \cos \varphi_3 + L_5 \cos \varphi_5 &= h, \\ (L_2 + L_3) \sin \varphi_2 + (L_4 + L_5) \sin \varphi_4 &= 3a/8, \\ (L_3 + L_4) \sin \varphi_3 + L_5 \sin \varphi_5 &= 3b/8, \\ (L_2 + L_3) \sin \varphi_2 &= a/4, \\ (L_4 + L_5) \sin \varphi_4 &= a/8, \\ (L_3 + L_4) \sin \varphi_3 &= b/4, \\ L_5 \sin \varphi_5 &= b/8, \end{aligned} \quad (1)$$

Розв'язок системи (1) має вигляд

$$\begin{aligned} L_1 &= h - \frac{a}{8} (2 \operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_3), \\ L_2 &= \frac{a}{8} \left(\frac{2}{\sin \varphi_2} + \frac{1}{\sin \varphi_4} \right) - \frac{b}{8} \left(\frac{2}{\sin \varphi_3} + \frac{1}{\sin \varphi_5} \right), \\ L_3 &= \frac{b}{8} \left(\frac{2}{\sin \varphi_3} + \frac{1}{\sin \varphi_5} \right) - \frac{a}{8 \sin \varphi_4}, \\ L_4 &= \frac{a}{8 \sin \varphi_4} - \frac{b}{8 \sin \varphi_5}, \\ L_5 &= \frac{b}{8 \sin \varphi_5}, \end{aligned} \quad (2)$$

Як відомо [10], в оптимальних фрактальних трубопроводах, які забезпечують постачання рідини від джерела до розподіленої системи споживачів з мінімальними витратами енергії при заданому постійному об'ємі трубопровода, існують співвідношення між діаметрами трубок в біфуркаціях та між кутами розгалуження та діаметрами, які для симетричних біфуркацій мають вигляд [9,10]

$$d_j^3 = 2d_{j-1}^3, \quad (3)$$

$$\varphi_{1,2} = \arccos(2^{-1/3}) = 37.4672236^\circ. \quad (4)$$

Грунтуючись на (2)-(4), оптимальна фрактальна система для рівномірного постачання крові із живлячої артерії до тканини може бути побудована за умови заданого діаметру живлячої артерії шкіри, яка відома з анатомічних даних, отриманих для пацієнта методами мікроскопічної комп'ютерної томографії (мікroCT).

3. Чисельні розрахунки та їх обговорення.

Чисельні розрахунки геометричних параметрів фрактальної моделі системи мікроциркуляції в шаруватих поверхневих тканинах тіла людини були проведені на основі системи рівнянь (2)-(4) для різних значень h , які відповідають індивідуальним значенням товщини шару гіподермісу, або жирової

клітчатки, які вимірювалися на шкірі здорових молодих волонтерів на базі стандартного тесту. Для порівняння ефективності різних типів фрактальних моделей систем мікроциркуляції були проведені розрахунки витрат енергії на постачання рідини у вигляді

$$D = \sum_{j=1}^N 2^j \Pi_j : \nabla v_j, \quad (5)$$

де ∇v_j та Π_j - тензори швидкості деформацій та в'язких напружень в кожній трубці у фрактальній системі.

Результати розрахунків за (5) по діаметрам, довжинам та кутам розгалужень, обчислених по (2)-(4), а також малих коливань обчислених величин відносно їх оптимальних значень наведені на Рис.2. Отримані результати дозволяють стверджувати, що запропонований підхід визначає геометричні параметри фрактальної транспортної системи, яка забезпечує постачання в'язкої рідини від джерела до розподіленої за площиною axb системи споживачів із загальними мінімальними витратами енергії. Будь-які відхилення в діаметрах трубок в біфуркаціях приводять до зростання в'язкої дисипації D та, відповідно, до додаткових витрат енергії.

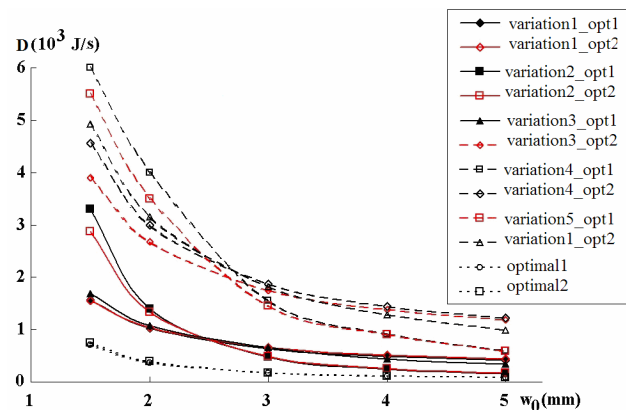


Рис.2. Залежності витрат енергії на рух рідини по фрактальним системам для різних наборів параметрів моделі.

4. Висновки

Запропонована фрактальна модель розгалуженої системи судин, яка раніше була запропонована для моделювання теплопереносу в поверхневих тканинах людини. Показано, що ця модель забезпечує не тільки найшвидше постачання тепла за умовами нагріву тканин зовнішнім оптичним випромінюванням, але й найменші значення в'язкої дисипації, що відповідає оптимальним транспортним руслам.

Розроблена модель може використовуватись для оцінки оптимальної дози оптичного випромінювання протягом фізіотерапевтичного

лікування різних хвороб шкіри, зокрема язв при синдромі діабетичної стопи.

Список використаних джерел

1. Blitterswijk C.V., Boer J.B. Tissue Engineering. Academic Press. 2014. - 896p.
2. Kizilova N., Korobov A. On biomedical engineering techniques for efficient phototherapy. // Int. J. Biosen. Bioelectron. 2018. - v.4. - P.289-295.
3. Kizilova N., Korobov A. Mechanisms of influence of low-level optical radiation on the microcirculatory system. A review. // Photobiol. Photomed. - 2016. - v.1. - P.79-93.
4. Кізілова Н. М., Коробов А. М. Моделювання мікроциркуляції крові та тепломасопереносу в тканинах людини. // Вісник КНУ ім. Т.Г.Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки». - 2017. - №4. - С.37-42.
5. Dai W., Bejan A., Tang X., Le Zhang, Nassar R. Optimal temperature distribution in a three dimensional triple-layered skin structure with embedded vasculature. // J. Appl. Phys. - 2006. - v.99. - P.104702.
6. Huang Zh., Hwang Y., Aute V. Radermacher R. Review of Fractal Heat Exchangers. // Intern. Refrigeration and Air Conditioning Conf. Purdue Univ. - 2016. - P.1725.
7. Zeng X., Dai W., Bejan A. Vascular Countercurrent Network for 3-D Triple-Layered Skin Structure with Radiation Heating. // Numer. Heat Transfer, Part A. - 2010. - v.57. - P.369-391.
8. Orndorff C., Ponomarev S., Dai W., Bejan A. Thermal analysis in a triple-layered skin structure with embedded vasculature, tumor, and gold nanoshells. // Intern. J. Heat Mass Transfer. - 2017. - v.111. - P.677-695.
9. La Barbera M. Principles of design of fluid transport systems in zoology. // Science. - 1990. - v.249. - P. 992-1000.
10. Kizilova N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. // Lecture Notes in Computer Sci. - 2004. - v.3044. - P.476-485.

References

1. BLITTERSWIJK, C.V., BOER, J.B. (2014) *Tissue Engineering*. Academic Press. 896p.
2. KIZILOVA, N., KOROBOV, A. (2018) On biomedical engineering techniques for efficient phototherapy. *Int. J. Biosen. Bioelectron.* 4. 289-295.
3. KIZILOVA, N., KOROBOV, A. (2016) Mechanisms of influence of low-level optical radiation on the microcirculatory system. A review. *Photobiol. Photomed.* 1. 79-93.
4. KIZILOVA, N., KOROBOV, A. (2017) Modeling of blood microcirculation and heat and mass transfer in human tissues. (2017) *Bulletin Kiev National University, Series "Physical and Mathematical Sciences"*. 4. 37-42. [in Ukrainian]
5. DAI, W., BEJAN, A., TANG, X., LE ZHANG,, NASSAR, R. (2006) Optimal temperature distribution in a three dimensional triple-layered skin structure with embedded vasculature. *J. Appl. Phys.* 99. 104702.
6. HUANG, ZH., HWANG, Y., AUTE, V. RADERMACHER, R. (2016) Review of Fractal Heat Exchangers. *Intern. Refrigeration and Air Conditioning Conf.* Purdue Univ. 1725.
7. ZENG, X., DAI, W., BEJAN, A. (2010) Vascular Countercurrent Network for 3-D Triple-Layered Skin Structure with Radiation Heating. *Numer. Heat Transfer, Part A.* 57. 369-391.
8. ORNDORFF, C., PONOMAREV, S., DAI, W., BEJAN, A. (2017) Thermal analysis in a triple-layered skin structure with embedded vasculature, tumor, and gold nanoshells. *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 111. 677-695.
9. LA BARBERA, M. (1990) Principles of design of fluid transport systems in zoology. // *Science.* 249. 992-1000.
10. KIZILOVA, N. (2004) Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. *Lecture Notes in Computer Sci.* 3044. 476-485.

Надійшла до редколегії 20.11.18

УДК 532.5

Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.
Ткаченко Є. Д., студент

Особливості тепломасообміну в ламінарних течіях мікро і нанорідин по трубках і каналах

¹Харківський національний університет ім.
В.Н. Каразіна, Харків, Україна, пл. Свободи 4,
e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

²Харківський національний університет ім.
В.Н. Каразіна, Харків, Україна, пл. Свободи 4,
e-mail: evgeniytkachenko3@gmail.com

N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.
Ye.D. Tkachenko, student

Features of heat and mass exchange in laminar flows of micro and nanofluids in tubes and channels

¹V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022,
Kharkov, Svobody sq., 4,

e-mail: kizilova@univer.kharkov.ua

²V.N. Karazin Kharkiv National University,
61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: evgeniytkachenko3@gmail.com

В останні роки була показана висока ефективність використання суспензій наночастинок для охолодження працюючих систем в порівнянні з однорідною рідиною і експериментально підібрані параметри суспензій, ефективних для різних конкретних пристроїв. В роботі наведено короткий огляд відповідних експериментальних даних, а також математичних моделей течії мікро- і нанорідин, заснованих на рівняннях Нав'є-Стокса для нестискуваних рідин з граничними умовами, що включають тангенціальний перенос імпульсу частинок і стрибок температури за рахунок дифузного віддзеркалення на шорсткуватих стінах. Для випадку ламінарної течії між нескінченними паралельними пластинами з постійними потоками тепла через пластини виписані аналітичні розв'язки для поля швидкостей і температур. Чисельні розрахунки показали, що зі збільшенням коефіцієнтів переносу імпульсу на пластинах течія істотно прискорюється, що сприяє збільшенню об'ємної витрати при тому ж перепаді тисків на кінцях каналу за рахунок зниження в'язкого тертя на стінці. Відповідно, збільшується теплопереніс через пластини і відведення тепла з потоком рідини. Грунтуючись на отриманих аналітичних співвідношеннях, можна підбирати параметри поверхонь пластин так, щоб оптимізувати роботу системи, наприклад, знижувати витрати енергії на в'язку і теплову дисипації або отримувати однорідні розподіли температури в рідині при несиметричних притоках тепла крізь пластини.

Ключові слова: мікрофлюїдика, нанофлюїдика, тепломасообмін, ламінарні течії.

In recent years, high efficiency of using suspensions of nanoparticles for cooling of the operating systems compared to a homogeneous liquid has been shown, and the parameters of suspensions effective for various specific devices have been selected in experiments. A brief review of the relevant experimental data, as well as mathematical models of the flow of micro- and nanofluids, based on the incompressible Navier-Stokes equations with boundary conditions accounting for tangential momentum transfer of the particles and temperature jump due to diffuse reflection at rough walls, are presented. For the case of a laminar flow between infinite parallel plates with constant heat fluxes through the plates, an analytical solution is obtained for the velocity and temperature fields. Numerical calculations showed that with an increase in the momentum transfer coefficients at the plates, the flow accelerates significantly, which contributes to an increase in volumetric flow with the same pressure drop across the channel due to a decrease in the shear stress at the wall. Correspondingly, the heat transfer through the plates and the heat removal with the fluid flow increase. Based on the obtained analytical relationships, it is possible to select the parameters of the plate surfaces in such a way as to optimize the system, for example, to reduce the energy loss due to viscous and thermal dissipation or to obtain uniform temperature distributions in the liquid with asymmetric heat flows through the plates.

Key Words: microfluidic, nanofluidics, heat and mass transfer, laminar flows.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

© Н. М. Кізілова, Є. Д. Ткаченко, 2018

1. Вступ

Для охолодження діючих механізмів, таких як генератори, рефрижератори, кондиціонери, хімічні реактори, двигуни та ін., використовуються системи циркуляції рідин, які відводять тепло. При цьому досить важливим є задача збільшення теплопровідних і теплоємнісних властивостей таких рідин. В останні роки в зв'язку з розвитком ринку мікро- і нанопристроїв (мініатюрні паливні елементи, двигуни, генератори, кулери, мікро електронно-механічні системи (MEMS) та інші) виникла необхідність розробки ефективних систем охолодження, що використовують циркуляцію рідин по трубках з діаметрами $d < 500$ мкм. У зв'язку з великими значеннями в таких системах співвідношення поверхня/об'єм, а значить, і витрат на тертя, задача забезпечення відповідних термомеханічних властивостей рідин стає дуже актуальною.

Починаючи з публікацій [1,2], в великому числі експериментальних робіт було показано, що додавання до несучої рідини невеликого числа наночастинок (НЧ), таких як оксиди металів, нанотрубки або фулерени, навіть в малих концентраціях $C \leq 5\%$, призводить до збільшення теплопровідності рідини на 10-50%, при цьому не змінюючи істотно її в'язкість і не повідуючи з'явлення неньютонівських властивостей нанорідини [3-6].

Вуглецеві нанотрубки (ВНТ) мають діаметри $d = 1-100$ нм і довжини прядка мікрометра. При цьому теплопровідності одношарових (ОШ ВНТ) і багатшарових (БШ ВНТ) складають $k=6600$ Вт/м·К і $k=3000$ Вт/м·К відповідно [7,8], що на порядок вище, ніж у металів. Збільшення швидкості відводу тепла при використанні суспензій ВНТ замість чистого розчинника залежить від концентрації ВНТ і числа Рейнольдса [9]. Зі зростанням концентрації НЧ коефіцієнт теплопровідності k зростає, але також зростає і в'язкість μ суспензії. Як було показано в експериментах на водних суспензіях БШ ВНТ, k і μ є функціями числа Re , і при великих концентраціях ВНТ в'язкість зростає в 4 рази швидше, ніж коефіцієнт теплопровідності [10], що знижує ефективність роботи системи охолодження.

При додаванні до звичайної охолоджуючої рідини, що циркулює по трубках вторинного охолодження трубчастого нагрівального елемента, всього 0.45% об'єму БШ ВНТ ефективність тепловідведення збільшувалася на 160% [11]. При додаванні до

слабоконцентрованих суспензій ВНТ невеликої кількості наночастинок магнетиту Fe_2O_3 можна отримати істотне зростання теплопровідності при використанні зовнішнього магнітного поля [12].

Таким чином, дослідження особливостей теплопереносу в ламінарних течіях несучих рідин з додаванням мікро / наночастинок представляє великий інтерес для сучасних технологій.

2. Математичні моделі тепломасопереносу при течіях мікро / нанорідин

При течіях по трубках і каналах слабоконцентрованих суспензій мікро/ наночастинок залежності об'ємної витрати від рушійної сили досить добре описуються рівняннями Нав'є-Стокса і класичної теорії теплопровідності для нестисливої однорідної мікрорідини з урахуванням граничних умов прослизання першого порядку для швидкості і стрибка для температури на твердих стінках у вигляді [13]

$$\left(u - u_w - \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} Kn \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{3(\gamma - 1) Kn^2 Re}{2\pi\gamma} \frac{Ec}{Ec} \frac{\partial T}{\partial s} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$
$$\left(T - T_w - \frac{2\gamma(2 - \sigma_T) Kn}{(\gamma + 1)\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

де $\partial\Omega$ - тверда стінка, u і u_w , T і T_w - швидкості руху і температури рідини та стінки відповідно, s і n - дотичний і нормальний напрямки відносно стінки, σ_v - коефіцієнт тангенціального переносу імпульсу (moment accumulation coefficient), σ_T - коефіцієнт акумуляції тепла (thermal accommodation coefficient), $\gamma = C_p / C_v$ - відношення питомих теплоємностей при постійному тиску і об'ємі, $Re = \rho u D / \mu$ - число Рейнольдса, $Pr = C_p \mu / k$ - число Прандтля, $Ec = u^2 / C_p \Delta T$ - число Екерта, k - коефіцієнт теплопровідності рідини, ΔT - характерна різниця температур рідини і стінки.

У разі нанорідин має місце прослизання з граничною умовою другого порядку [13]

$$\left(u - u_w - aKn \frac{\partial u}{\partial n} - bKn^2 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де $a = (2 - \sigma) / \sigma$, $b = const$, причому за даними [13] $a \in [1; 1.1466]$, $b \in [0.5; 1.309]$. Умови (1)-(2)

були отримані шляхом розкладання виразів для швидкості і температури в ряди Тейлора з точністю до похідних 1-го і 2-го порядку відповідно.

У випадку ламінарних течій аналітичні рішення з граничними умовами (1) - (2) були отримані для течій Куетта між нескінченними паралельними пластинами і циліндрами, що обертаються, для течій Пуазейля по трубах з круговим, прямокутним, трикутним перетинами, між коаксіальними циліндрами та по похилому лотку [14], а також теплопереносу в течіях Куетта між нескінченними паралельними пластинами і для течій Пуазейля по трубах з круговим [13] перетином. Було показано, що за рахунок наявності прослизання можна істотно збільшити об'ємну витрату при тому ж перепаді тисків за рахунок зниження в'язкого тертя на стінці і дисипації енергії [13,14], що пояснює багато феноменів, наприклад, в 200 разів менший гідравлічний опір фільтрів, які складаються з паралельних пучків нанотрубок, в порівнянні з опорами, розрахованими для них по формулі Пуазейля [15], а також багатьом іншим експериментально відомим явищам (див. огляд літератури в [14]).

3. Постановка и розв'язок задачі

Розглядається ламінарна течія $\vec{u} = u\vec{e}_x$ нестискуваної нанорідини між нескінченними паралельними пластинами з урахуванням теплопереносу на поверхнях пластин. Рівняння імпульсу і енергії мають вигляд

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3)$$

де $\vec{u} = u(y)\vec{e}_x$, ρ , μ , c_p , k - щільність, в'язкість, питома теплоємність і теплопровідність рідини.

На поверхнях пластин мають місце граничні умови вигляду (2), в загальному випадку різні за величиною на верхній і нижній пластинах:

$$y = h: \quad u = -\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \xi \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q_1 / k, \quad (5)$$

$$y = -h: \quad u = \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y} - \beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \xi \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} + \zeta_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -q_2 / k, \quad (7)$$

$$\text{де} \quad \xi = \frac{3(\gamma-1) Kn^2 Re}{2\pi\gamma Ec}, \quad \zeta_j = \frac{2\gamma(2-\sigma_{Tj}) Kn}{(\gamma+1)\sigma_{Tj} Pr},$$

$\alpha_j = C_{1j} Kn_j$, $\beta_j = C_{2j} Kn_j^2$, q_j - задані постійні потоки тепла на пластинах.

Розв'язок першого рівняння (3) з граничними умовами (2) має вигляд [14]

$$u(y) = \frac{\delta p}{2\mu L} (h^2 + A + By - y^2) + \xi \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (8)$$

де

$$A = 2 \frac{h^2(\alpha_2 + \alpha_1) + h(\beta_1 + \beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2) + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2}{2h + \alpha_1 + \alpha_2},$$

$$B = 2 \frac{\beta_1 - \beta_2 + h(\alpha_1 - \alpha_2)}{2h + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \text{причому}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \equiv C = const, \quad \text{оскільки } u = u(y).$$

Як випливає з (8), при позитивних значеннях параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ завжди є перенесення імпульсу вздовж пластин в напрямку течії, так що $A > 0$. Якщо пластини однакові і $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, то профіль швидкості симетричний. При $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$ профіль швидкості стає несиметричним і $\max(u)$ досягається при $y = B/2$. При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, (7) переходить у відому формулу для течії Пуазейля ньютонівської рідини між пластинами.

Поле температур в каналі має вигляд

$$T(x, y) = Cx + \theta(y) \quad (9)$$

Підставляючи (8) і (9) в друге рівняння (3), отримаємо ЗДУ для $\theta(y)$

$$\theta''(y) = \chi C \frac{\delta p}{2\mu L} (h^2 + A + By - y^2) + \chi \xi C^2 - \psi, \quad (10)$$

$$+ \chi \xi C^2 - \psi,$$

де $\chi = \rho c_p / k$ - коефіцієнт температуропровід-

$$\text{ності, } \psi = \frac{(\delta p)^2}{4\mu L^2 k}.$$

Інтегруючи (10), отримаємо для температури:

$$T(x, y) = Cx + \frac{\chi \delta p}{2\mu L} \left((h^2 + A) \frac{y^2}{2} + B \frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{24} \right) + \chi \xi C^2 \frac{y^2}{2} + K_1 y + K_2, \quad (11)$$

де $K_{1,2}$ - постійні інтегрування, які можна знайти із граничних умов (5), (7). В силу громіздкості вирази для $K_{1,2}$ і C тут не наведені.

4. Чисельні розрахунки та обговорення результатів

Чисельні розрахунки профілів швидкості (8) і поля температур (11) проводились при різних наборах значень параметрів моделі, для яких є результати вимірювань на різних технічних мікрорідинах [13]. Залежності $u^\circ(y^\circ)$, $Y^\circ(n)$ і $T^\circ(x^\circ, y^\circ)$, де позначення $^\circ$ відповідають безрозмірній величині, $Y = Q/\delta\rho$ – гідравлічна провідність каналу, наведені на Рис.1а-в для різних наборів параметрів поверхонь пластин. Відповідні характерні значення є $u^* = h^2\delta\rho/(2\mu L)$, $Y^* = u^*h/\delta\rho$, $T^* = u^*\chi$.

Позначки 1 на Рис.1а-в відповідають течії Пуазейля без прослизання. За рахунок дифузного віддзеркалення на шорсткуватих стінках в напрямку течії вдається істотно збільшити швидкість течії (криві 2-7 в порівнянні з 1, Рис.1а), причому коефіцієнти, що визначають кривизну профілю швидкості біля стінки, так само істотно прискорюють потік (криві 4 і 5), як і значення власне тангенціального переносу імпульсу $\alpha_{1,2}$ (криві 2 і 3). Схожі результати були отримані в [13] для випадку симетричних пластин $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_{1,2} = 0$.

Відповідно, зі зростанням $\alpha_{1,2}$ і $\beta_{1,2}$ зростає провідність каналу (Рис.1б), причому при деяких різних наборах профілі швидкості асиметричні (3 і 4, Рис.1а), а провідності однакові (3 і 4, Рис.1б). За рахунок невеликих змін шорсткості стінок можна збільшити провідність каналу якнайменш в два рази в порівнянні з Пуазейлівською течією (1 і 5, Рис.1б) навіть при невеликих концентраціях НЧ ($C < 5\%$), що підтверджується результатами експериментів при тих же наборах параметрів [13].

За рахунок тангенціального переносу на стінці і стрибка температури, що визначається величиною параметра ξ в (4), (6), перенесення тепла від нагрітих пластин значно інтенсивніше (розподіли 2-7, Рис.1в), ніж в течії Пуазейля (1, Рис.1в). На Рис.1в наведені результати розрахунків для випадку $|q_{y=h}|/|q_{y=-h}| = 2$; при цьому температура рідини залишається вище з боку більш нагрітої стінки. Відведення тепла тим

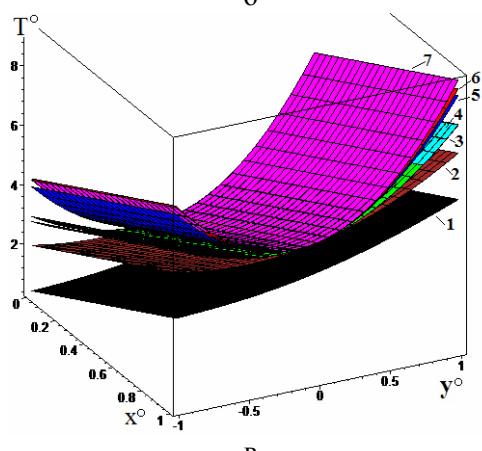
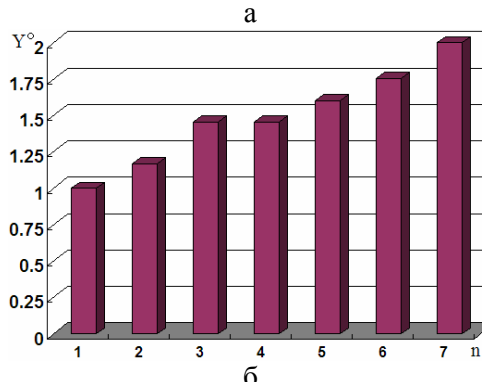
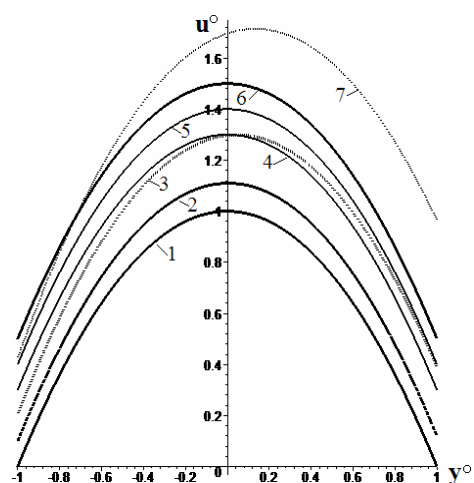


Рис.1. Залежності $u^\circ(y^\circ)$ (а), $Y^\circ(n)$ (б), $T^\circ(x^\circ, y^\circ)$ (в) для $n=7$ значень наборів параметрів

- $\{\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ, \beta_1^\circ, \beta_2^\circ\} = \{0, 0, 0, 0\}$ -1, $\{0.05, 0.02, 0.1, 0.05\}$ -
- 2, $\{0.1, 0.05, 0.1, 0.05\}$ -3, $\{0.1, 0.1, 0.05, 0.05\}$ -4,
- $\{0.1, 0.1, 0.1, 0.1\}$ -5, $\{0.15, 0.15, 0.1, 0.1\}$ -6,
- $\{0.5, 0.1, 0.05, 0.1\}$ -7.

інтенсивніше, чим вище швидкість рідини за рахунок підбору комбінацій коефіцієнтів $\alpha_{1,2}$ і $\beta_{1,2}$, проте на осі симетрії каналу температура слабо залежить від цих параметрів, хоча

залишається вище, ніж при відсутності прослизання. Мабуть, для більш інтенсивного відводу тепла потрібно використовувати турбулентні течії нанорідин, що забезпечить кращий конвективний переніс за рахунок турбулентного перемішування. Якщо в технічному пристрої проточна система, яка охолоджує, знаходиться в умовах $|q_{y=h}| \neq |q_{y=-h}|$, то робота такої системи може бути оптимізована для отримання більш однорідних температур в поперечному перерізі за рахунок підбору коефіцієнтів α_1, β_1 і α_2, β_2 на протилежних стінках, щоб швидкість виробництва ентропії

$$\sigma_s = \int_{-h}^h \left(\frac{\lambda}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{\Pi : \nabla \bar{v}}{T} \right) dy \quad (12)$$

була постійною уздовж каналу, що відповідає оптимальним проточним системам в природі і техніці [16].

5. Висновки

Таким чином, для випадку ламінарних течій нанорідин в каналах різної форми можна отримати аналітичні розв'язки як для течій з постійною температурою [14], так і для випадку нерівномірно нагрітих стінок каналів. Відповідні розв'язки дуже важливі для валідації результатів чисельних розрахунків у випадках тривимірної

геометрії, неньютоновських властивостей рідини, неламінарних течій та ін.

За рахунок підбору набору параметрів, що характеризують величину тангенціального переносу імпульсу і кривизни профілю швидкості у шорсткуватих стінок каналу можна значно прискорити течію за рахунок збільшення гідравлічної провідності каналу та збільшити швидкість відводу тепла як за рахунок стрибка температур на стінці, так і прискорення конвективного теплопереносу.

При рідинному охолодженні компонент неоднорідно нагрітих елементів (тобто при різних теплопродукціях на стінках каналу) можна контролювати розподіл температур в поперечному перерізі за рахунок параметрів стінок. Наприклад, у багатьох прикладеннях (хімічні, мікробіологічні реактори і ін.) потрібна підтримка однорідної температури за перетином каналу.

Наведені результати відносяться також і до випадку відводу тепла від стінок каналу та охолодження нагрітих рідин, наприклад, в електричних паливних елементах [17]. За допомогою отриманого аналітичного рішення можна розв'язувати задачі оптимізації, наприклад, на основі принципу мінімуму виробництва ентропії [16], розрахованої за (13).

Список використаних джерел

1. Choi S., Eastman J. Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. In: Proc. of ASME Intern. Mechanical Engineering Congress. San Francisco. – 1995. – P. 99–105.
2. Choi S., Zhang Z.G., Yu W., Lockwood F.E., Grulke E.A. Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions. // Appl. Phys. Lett. – 2001. – 79. – P. 2252–2254.
3. Eastman J., Phillpot S., Choi S., Keblinski P. Thermal transport in nanofluids. // Ann. Rev. Mater. Res. – 2004. – 34. – P. 219–246
4. Wang X.-Q., Mujumdar A.S. Heat transfer characteristics of nanofluids: a review. // Intern. J. Therm. Sci. – 2007. – 46. – P. 1–19.
5. Trisaksri V., Wongwises S. Critical review of heat transfer characteristics of nanofluids. // Renew. Sustain. Energy Rev. – 2007. – 11. – P. 512–523.
6. Kakac S., Pramuanjaroenkij A. Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids. // Int. J. Heat Mass. Transfer. – 2009. – 52. – P. 3187–3196.
7. Hone J. Carbon nanotube thermal

References

1. CHOI, S., EASTMAN, J. (1995) Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles. In: Proc. ASME Intern. Mechanical Engineering Congress. San Francisco. P. 99–105.
2. CHOI, S., ZHANG, Z.G., YU, W., LOCKWOOD, F.E., GRULKE, E.A. (2001) Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions. Appl. Phys. Lett. V. 79. p. 2252–2254.
3. EASTMAN, J., PHILLPOT, S., CHOI, S., KEBLINSKI, P. (2004) Thermal transport in nanofluids. Ann. Rev. Mater. Res. V.34. p. 219–246.
4. WANG, X.-Q., MUJUMDAR, A.S. (2007) Heat transfer characteristics of nanofluids: a review. Intern. J. Therm. Sci. V. 46. p. 1–19.
5. TRISAKSRI, V., WONGWISES, S. (2007) Critical review of heat transfer characteristics of nanofluids. Renew. Sustain. Energy Rev. V. 11. p. 512–523.
6. KAKAC, S., PRAMUANJAROENKIJ, A. (2009) Review of convective heat transfer enhancement with nanofluids. Int. J. Heat Mass

- properties. In: Dekker Encycl. Nanosci. Nanotechnol. – 2004. – P. 603–610.
8. *Antar Z., Noel H., Feller J.F., Glouannec P., Elleuch K.* Thermophysical and radiative properties of conductive biopolymer composite. // *Mater. Sci. Forum.* – 2012. – 714. – P. 115–122.
9. *Ding Y., Alias H., Wen D., Williams R.A.* Heat transfer of aqueous suspensions of carbon nanotubes. // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2006. – 49. – P. 240–250.
10. *Meyer J., McKrell T., Grote K.* The influence of multi-walled carbon nanotubes on single-phase heat transfer and pressure drop characteristics in the transitional flow regime of smooth tubes. // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2013. – 58. – P. 597–609.
11. *Kumaresan V., Velraj R., Das S.K.* Convective heat transfer characteristics of secondary refrigerant based CNT nanofluids in a tubular heat exchanger. // *Int. J. Refrig.* – 2012. – 35. P. 2287–2296.
12. *Hong H., Wright B., Wensel J., Jin S., Ye X.R., Roy W.* Enhanced thermal conductivity by the magnetic field in heat transfer nanofluids containing carbon nanotube. // *Synth. Metals.* – 2007. – 157. – P. 437–440.
13. *Karniadakis G.E., Beskok A., Aluru N.* Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation. // *Interdisc. Appl. Math. Series.* – 2005. – 29. - P. 51-77.
14. *Cherevko V., Kizilova N.* Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. In: *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications.* – 2017. – P. 207–230.
15. *Noya A., Parka H.G., Fornasiero F., Holt J.K., Grigoropoulos S.P., Bakajin O.* Nanofluidics in carbon nanotubes. // *Nanotoday.* – 2007. – 2. – P. 22-29.
16. *Bejan A.* Entropy Generation Minimization: The Method of Thermodynamic Optimization of Finite-Size Systems and Finite-Time Processes. CRC Press, NY. – 2013. – 400p.
17. *Sauermoser M., Fossati G., Kizilova N., Kjelstrup S.* Modelling Electrochemical Cells with Porous Electrodes. The Proton Exchange Membrane Fuel Cell. // *ECS Trans.* – 2018. – 92. – P. 279-292.
- Transfer.* V. 52. p. 3187–3196.
7. *HONE, J.* (2004) Carbon nanotube thermal properties. In: *Dekker Encycl. Nanosci. Nanotechnol.* p. 603–610.
8. *ANTAR, Z., NOEL, H., FELLER, J.F., GLOUANNEC, P., ELLEUCH, K.* (2012) Thermophysical and radiative properties of conductive biopolymer composite. *Mater. Sci. Forum.* V. 714. p. 115–122.
9. *DING, Y., ALIAS, H., WEN, D., WILLIAMS, R.A.* (2006) Heat transfer of aqueous suspensions of carbon nanotubes. *Int. J. Heat Mass Transf.* V. 49. p. 240–250.
10. *MEYER, J., MCKRELL, T., GROTE, K.* (2013) The influence of multi-walled carbon nanotubes on single-phase heat transfer and pressure drop characteristics in the transitional flow regime of smooth tubes. *Int. J. Heat Mass Transf.* V. 58. p. 597–609.
11. *KUMARESAN, V., VELRAJ, R., DAS, S.K.* (2012) Convective heat transfer characteristics of secondary refrigerant based CNT nanofluids in a tubular heat exchanger. *Int. J. Refrig.* V. 35. p. 2287–2296
12. *HONG, H., WRIGHT, B., WENSEL, J., JIN, S., YE, X.R., ROY, W.* (2007) Enhanced thermal conductivity by the magnetic field in heat transfer nanofluids containing carbon nanotube. *Synth. Metals.* V. 157. p. 437–440.
13. *KARNIADAKIS, G.E., BESKOK, A., ALURU, N.* (2005) Microflows and nanoflows: Fundamentals and simulation. *Interdisc. Appl. Math. Series.* V.29, p. 51-77.
14. *CHEREVKO, V., KIZILOVA, N.* (2017) Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. In: *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications.* p. 207–230.
15. *NOYA, A., PARKA, H.G., FORNASIERO, F., HOLT, J.K., GRIGOROPOULOS, S.P., BAKAJIN, O.* (2007) Nanofluidics in carbon nanotubes. *Nanotoday.* V. 2. p. 22-29.
16. *BEJAN A.* (2013) *Entropy Generation Minimization: The Method of Thermodynamic Optimization of Finite-Size Systems and Finite-Time Processes.* CRC Press, NY. 400p.
17. *SAUERMOSE M., FOSSATI G., KIZILOVA N., KJELSTRUP S.* (2018) Modelling Electrochemical Cells with Porous Electrodes. The Proton Exchange Membrane Fuel Cell. *ECS Trans.* 92. - P. 279-292.

УДК 539.3

П'ятецька О. В., к. ф.-м. н., с. н. с.

O. V. Pyatetska, Ph. D. (Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher

Демпфірування неізотермічних осесиметричних згинних коливань в'язкопружних пластин

Damping of isothermal axisymmetric bending vibrations of viscoelastic plates

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад.
Глушкова 4-е
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

Розглядається задача про вимушені моногармонічні осесиметричні згинні коливання та дисипативний розігрів круглої в'язкопружної пластини з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами. В'язкопружна поведінка пасивного (без п'єзоефекту) і п'єзоактивного матеріалів описується за допомогою концепції комплексних модулів, що залежать від температури.

Ключові слова: активне демпфірування, сенсори, актуатори.

A problem on the forced monoharmonic axisymmetric bending vibrations and dissipative heating of circular viscoelastic plate with the piezoelectric sensors and actuators is considered. Viscoelastic behavior of passive (without piezoeffect) and piezoactive materials is described using the concept of complex moduli which depend on temperature. The nonlinear coupled problem of electrothermoviscoelasticity is solved by numerical methods. The influence of the boundary conditions and temperature of dissipative heating on active damping of harmonic vibrations of thin viscoelastic plates with the simultaneous use of sensors and actuators is investigated. For modeling viscoelastic properties of passive and piezoelectric materials, linear models of integral type viscoelasticity are used, which are most effective for simulating the dissipative properties of materials in the linear region. If the material characteristics depend on temperature, investigation of the influence of temperature of dissipative heating is reduced to solution of complicated nonlinear systems of differential equations.

Key Words: active damping, sensors, actuators.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Компонентами різних конструкцій є тонкі пластини із різних матеріалів, у тому числі із полімерів та композитів на їх основі, що знаходять широке застосування в різних галузях сучасної техніки. Температурні ефекти особливо важливі для пластин з полімерних матеріалів і композитів на їх основі, які дуже чутливі до зміни температури. У даній статті розглядаються вимушені моногармонічні згинні коливання круглої тришарової пластини несиметричної будови, в якій один із зовнішніх п'єзоелектричних шарів виконує роль сенсора, а другий - актуатора. При резонансних коливаннях та високих рівнях механічних навантажень виникає необхідність врахування впливу фізичної нелінійності, дисипативних властивостей матеріалів і температури дисипативного розігріву на ефек-

тивність роботи сенсорів та актуаторів, а також на ефективність активного демпфірування коливань тонких пластин за їх допомогою.

Постановка задачі

Розглянемо тришарову круглу пластину радіуса r , внутрішній шар товщини h_3 якої виготовлений із пасивного (без п'єзоефекту) матеріалу, а її зовнішні поверхні $z = \pm h_3/2$ жорстко скріплені з поляризованими по товщині п'єзокерамічними шарами, радіуса $r_0 \leq r$ і товщинами h_2 і h_1 відповідно. Матеріали пасивного і п'єзоактивного шарів вважаються в'язкопружними. На зовнішні поверхні п'єзошарів, а також на поверхні, які контактують з пасивним шаром, нанесено суцільні дуже тонкі електроди. Внутрішні електроди підтримуються при нульо-

вому потенціалі. Вважаємо, що п'єзоактивний шар товщини h_1 є актуатором, а п'єзошар товщини h_2 виконує роль сенсора. Пластина навантажена поверхневим тиском $\tilde{P} = P(r)\cos\omega t$, що гармонічно змінюється за часом t з круговою частотою ω , близькою до резонансної.

До електродів актуатора підводиться різниця електричних потенціалів $\Phi_1(-h_3/2) - \Phi_1(-h_3/2 - h_1) = \text{Re}(V_A e^{i\omega t})$ з тією ж частотою, що й механічне навантаження. У випадку розімкнутих електродів сенсора, внаслідок дії на пластину гармонічного навантаження, на електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів комплексної амплітуди $V_S = V'_S + iV''_S$, яку необхідно визначати за допомогою чисельних розрахунків або заміряти приладом. В'язкопружна поведінка пасивного і п'єзоактивного матеріалів при моногармонічному деформуванні описується згідно концепції комплексних модулів [2], дійсна та уявна частини яких залежать від температури дисипативного розігріву. При моделюванні електромеханічних коливань пластини відносно механічних змінних приймаємо гіпотези Кірхгофа-Лява, які виконуються уздовж товщини пакету шарів. Припускаємо, що складовими векторів індукції D_r, D_θ і напруженості E_r, E_θ електричного поля у площині кожного п'єзошару можна знехтувати. Із рівнянь електростатики випливає, що нормальна складова вектора індукції є постійною величиною по товщині п'єзошару, так що $D_{z,m} = C_m(r)$, $m=1,2$. На поверхнях розімкнутих електродів сенсора ($m=2$) електростатичну індукцію наближено вважаємо рівною нулеві. Так як п'єзошари мають відносно малу товщину і велику теплопровідність їх матеріалу порівняно з матеріалом пасивного шару, то температуру дисипативного розігріву приймаємо постійною по всій товщині. Рівняння стану поляризованої уздовж координати z п'єзокераміки, які описують моногармонічну осесиметричну деформацію в п'єзоелектричних шарах відносно комплексних амплітудних величин, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= S_{11}^E \varepsilon_r + S_{12}^E \varepsilon_\theta - b_{31} E_z, \\ \sigma_\theta &= S_{12}^E \varepsilon_r + S_{11}^E \varepsilon_\theta - b_{31} E_z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$D_z = b_{31}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + b_{33} E_z, \quad E_z = -\frac{\partial \phi_m}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S_{11}^E &= \frac{1}{C_{11}^E(1-\nu_E^2)}, \quad \nu_E = -\frac{C_{12}^E}{C_{11}^E}, \\ b_{31} &= \frac{d_{31}}{C_{11}^E(1-\nu_E)}, \quad k_p^2 = \frac{2d_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^T(1-\nu_E)}, \\ b_{33} &= \varepsilon_{33}^T(1-k_p^2), \end{aligned} \quad (3)$$

де $C_{kl}^E, d_{kl}, \varepsilon_{kl}^T$ – відповідно комплексні податності, п'єзомодулі та діелектричні проникності в п'єзоелектричних шарах; $\sigma_r = \sigma'_r + i\sigma''_r$, $\sigma_\theta = \sigma'_\theta + i\sigma''_\theta$, $\varepsilon_r = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + i\varepsilon''_\theta$ – комплексні амплітуди радіальних і колових напружень та аналогічних деформацій в шарах. Тут використовуємо стандартні позначення комплексних величин: $a = a' + ia''$, $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$. Для ізотропного пасивного матеріалу внутрішнього шару пластини справджуються співвідношення (1), у яких коефіцієнти S_{11}^E, S_{12}^E і b_{31} необхідно замінити відповідно на:

$$S_{11} = E/(1-\nu^2), \quad S_{12} = \nu S_{11}, \quad b_{31} = 0, \quad (4)$$

де $E = E' + iE''$ – залежний від температури модуль в'язкопружності; $\nu = \text{const}$ – коефіцієнт Пуассона, який вважаємо постійною і дійсною величиною.

Амплітудні параметри деформацій у співвідношеннях (1), (2) через комплексні амплітуди радіальних переміщень u і прогинів w серединної площини пластини виражаються такими залежностями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= e_r + z\kappa_r, \quad \varepsilon_\theta = e_\theta + z\kappa_\theta, \\ e_r &= \frac{du}{dr}, \quad e_\theta = \frac{u}{r}, \quad \kappa_r = \frac{d\theta}{dr}, \quad \kappa_\theta = \frac{\theta}{r}, \quad \theta = -\frac{dw}{dr}. \end{aligned} \quad (5)$$

Враховуючи електричні граничні умови для актуатора та сенсора, електростатичні співвідношення (2) мають вигляд:

$$D_{z1} = -b_{33}^1 \frac{V_A}{h_1} + b_{31}^1 \left(e + \frac{h_1 + h_3}{2} \kappa \right), \quad e = e_r + e_\theta,$$

$$E_{z1} = -\frac{V_A}{h_1} - \frac{b_{31}^1}{b_{33}^1} \left(z + \frac{h_1 + h_3}{2} \right) \kappa, \quad (6)$$

$$-\frac{h_3}{2} - h_1 \leq z \leq -\frac{h_3}{2}, \quad \kappa = \kappa_r + \kappa_\theta,$$

$$E_{z2} = -\frac{b_{31}}{b_{33}}(e + z\kappa), \quad \frac{h_3}{2} + h_2 \leq z \leq \frac{h_3}{2}.$$

Рівняння осесиметричних гармонічних згинних коливань круглої пластини мають вигляд:

$$\frac{dN_r}{dr} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) + \tilde{\rho}\omega^2 u = 0,$$

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) - Q_r = 0, \quad (7)$$

$$\frac{dQ_r}{dr} + \frac{1}{r}Q_r + \tilde{\rho}\omega^2 w + P(r) = 0,$$

де N_r, N_θ і M_r, M_θ - комплексні амплітуди радіальних та колових зусиль і моментів відповідно, $\tilde{\rho} = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3$, $\rho_{1,2,3}$ - питомі густини матеріалів п'єзошарів та пасивного шару, $P(r)$ - зовнішнє навантаження. Через гістерезисні втрати у матеріалі вимушені коливання тонкостінних елементів із в'язкопружних матеріалів супроводжуються дисипативним розігрівом. Тому співвідношення електромеханіки (5) - (7) необхідно доповнити усередненим за цикл коливань і уздовж товщини пластини рівнянням енергії, яке описує осесиметричний розподіл температури вібророзігріву:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\alpha_s}{\lambda h} (T - T_s) + \frac{1}{\lambda h} \tilde{W}, \quad (8)$$

$$\text{де } h = h_1 + h_2 + h_3; \quad \alpha_s = (\alpha_1 + \alpha_2)/2;$$

α_1, α_2 - коефіцієнти теплообміну на поверхнях $z = -(h_3/2 + h_1)$ і $z = (h_3/2 + h_2)$ відповідно; λ - усереднений коефіцієнт теплопровідності; a - коефіцієнт температуропровідності; T_s - температура зовнішнього середовища; \tilde{W} - дисипативна функція [1] для в'язкопружної пластини із зовнішніми п'єзоелектричними сенсором та актуатором, формула для якої не наводиться через громіздкість. Дану задачу електротермомеханіки про резонансні згинні коливання і вібророзігрів круглої пластини необхідно доповнити граничними і початковими

умовами. Так як для круглої суцільної пластини центральна точка є особливою, то при чисельному розв'язанні задачі розглядаємо пластину з достатньо малим отвором радіуса δ , на контурі якого приймаємо умови регулярності та симетрії для рівнянь електромеханіки і теплопровідності, так що:

$$N_r = 0, \quad Q_r = 0, \quad \theta = 0, \quad r = \delta, \\ \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = \delta. \quad (9)$$

На зовнішньому радіальному торці пластини виконуються умови шарнірного закріплення:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_r = 0, \quad r = R. \quad (10)$$

Гранична умова на радіальному торці та початкова умова для рівняння теплопровідності мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\alpha_r}{\lambda} (T - T_s), \quad r = R, \quad T = T_0, \quad t = 0. \quad (11)$$

Алгоритм розв'язання задачі

Якщо в'язкопружні властивості матеріалів залежать від температури, то для розв'язання нелінійної системи рівнянь (5) - (11) можна застосувати метод покрокового інтегрування [2] за часом. Для цього рівняння електромеханіки (5) - (7) після деяких перетворень записуємо у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального виду:

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{1}{r}(B_{13} - 1)N_r + \frac{B_{14}}{r}M_r + \left(\frac{B_{11}}{r^2} - \tilde{\rho}\omega^2\right)u + \\ + \frac{B_{12}}{r^2}\theta + \frac{1}{r}N_E, \quad \frac{dQ_r}{dr} = -\frac{1}{r}Q_r - \tilde{\rho}\omega^2 w - P(r),$$

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{B_{23}}{r}N_r + \frac{1}{r}(B_{24} - 1)M_r + \frac{B_{21}}{r^2}u + \frac{B_{22}}{r^2}\theta + \frac{1}{r}M_E$$

$$\frac{du}{dr} = A_{13}N_r + A_{14}M_r + \frac{A_{11}}{r}u + \frac{A_{12}}{r}\theta + F_1, \quad (12)$$

$$\frac{dw}{dr} = -\theta, \quad \frac{d\theta}{dr} = A_{23}N_r + A_{24}M_r + \frac{A_{21}}{r}u + \frac{A_{22}}{r}\theta + F_2.$$

Рівняння електромеханіки (12) є комплекснозначними з граничними умовами (9), (10). З використанням програми для розв'язування звичайних

диференціальних рівнянь [1], (12) на кожному часовому кроці інтегруються чисельним методом дискретної ортогоналізації. Після обчислення дисипативної функції \tilde{W} задача теплопровідності (8), (9), (10) розв'язується методом скінченних різниць із застосуванням явної схеми. Для демпфірування вимушених коливань пластини за допомогою сенсорів та актуаторів необхідно за величиною амплітуди різниці електричних потенціалів V_S на електродах сенсора, зумовленої зовнішнім тиском P , визначити величину потенціалу V_A , яку необхідно підвести до электродів актуатора, щоб компенсувати навантаження:

$$V_A = G_S V_S, \quad (13)$$

тут G_S - коефіцієнт оберненого зв'язку. Враховуючи те, що у пластині реалізуються переважно згинні коливання, а максимальні прогини досягаються на резонансній частоті найбільш енергоємної першої моди, то всі розрахунки в залежності від величини радіуса r_0 п'єзошарів проводились на частотах першого резонансу.

На Рис.1 наведено залежності від безрозмірного радіуса $x_0 = (r_0 - \delta)/L$ п'єзошарів, які виконують роль сенсора і актуатора, розподілів першої резонансної частоти згинних коливань пластини $\tilde{\omega} = \omega \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ (штрих-пунктирні криві), розрахованих на цих частотах максимальних амплітуд прогинів $w_E = |w_E^1(x=0)| \cdot 10^5 \text{ м}$ при підведенні до актуатора електричного потенціалу $V_A' = 1 \text{ В}$, $V_A'' = 0$, $P = 0$ і $w_p = |w_p^1(x=0)| \cdot 10^6 \text{ м}$ при механічному навантаженні з амплітудою $P = 1 \text{ Па}$ $V_A' = V_A'' = 0$ (штрихові лінії). Суцільна крива \tilde{G}_{as} характеризує залежність від параметра x_0 коефіцієнта керування $\tilde{G}_{as} = G_S \cdot 10^{-1}$ у співвідношенні оберненого зв'язку. Аналіз кривих w_p показує, що максимальні амплітуди прогинів пластини при

механічному навантаженні слабо залежать від параметра x_0 , що характеризує площу п'єзошарів.

За винятком достатньо малого околу точки $x_0 = 0$, показники сенсора V_S^1 мало змінюються зі збільшенням параметра x_0 . При цьому w_E досягає максимального, а V_A^1 - мінімального значень при повному покритті п'єзошарами зовнішніх площин пластини ($x_0 = 1$). Розміри актуатора і сенсора є найбільш оптимальними з параметром $0.7 \leq x_0 \leq 1$.

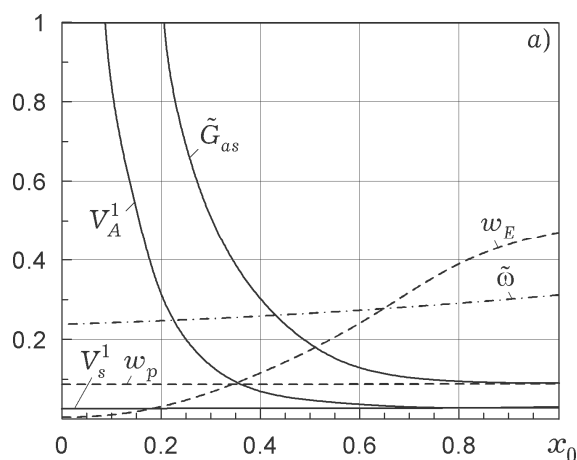


Рис. 1

При таких розмірах п'єзоактивних складових підведена до актуатора різниця електричних потенціалів V_A викликає максимальні прогини w_E пластини, а коефіцієнт оберненого зв'язку буде мінімальним (крива \tilde{G}_{as}). Бачимо, що у випадку шарнірного закріплення пластини коефіцієнт $\tilde{G}_{as} \approx 1$.

Список використаних джерел

1. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: ЖТТУ, 2005. - 428 с.
2. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. - Киев: Наукова думка, 1986. - 222 с.

References

1. KARNAUKHOV, V. G., MIKHAILENKO, V. V. (2005). *Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskikh neuprugikh tel pri monogarmnicheskom nagruzhennii*. Zhitomir: ZHTTU.
2. KARNAUKHOV, V. G., KIRICHOK, I.F. (1986). *Svyazannye zadachi teorii vyazkouprugih plastin i obolochek*. Kiev: Naukova dumka.

Надійшла до редколегії 23.12.18

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ІНФОРМАТИКА

УДК 519.6

Бевза М. В.¹, асп.,

M. V. Bevza¹, PhD stud.,

Розпізнавання іменованих сутностей в текстах за допомогою розмітки частин мови

Named entity recognition in texts with the help of part of speech tagging

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13,
e-mail: ¹ maksym.univ@gmail.com,

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: ¹ maksym.univ@gmail.com,

У цій роботі ми аналізуємо архітектури нейронних мереж, що отримують найкращі результати у розв'язку задачі розпізнавання іменованих сутностей, та пропонуємо нову архітектуру для покращення цих результатів. Ми проаналізували літературу по новим підходам до створення нейронних мереж. В цій роботі ми презентуємо декілька архітектур які ми вважаємо найбільш перспективними для покращення результатів роботи алгоритму розмітки іменованих сутностей і частин мови. Ці архітектури базуються на останніх розробках в сфері нейронних мереж що навчаються одночасно розв'язувати декілька задач одночасно.

У цій роботі ми перевіряємо гіпотези, що задачі розмітки частин мови і іменованих сутностей є пов'язані один з одним, тобто додавання інформації про частини мови може допомогти розв'язати задачу визначення іменованих сутностей і навпаки.

Ця робота також містить реалізацію нейронної мережі і результати експериментів разом з висновками які були отримані внаслідок цих експериментів.

Ключові слова: нейронні мережі, розпізнавання іменованих сутностей, регуляризація, узагальненість, мульти-задачне тренування

We analyze neural network architectures that yield state of the art results on named entity recognition task and propose a number of new architectures for improving results even further. We have analyzed a number of ideas and approaches that researchers have used to achieve state of the art results in a variety of NLP tasks. In this work, we present a few architectures which we consider to be most likely to improve the existing state of the art solutions for named entity recognition task and part of speech tasks. The architectures are inspired by recent developments in multi-task learning.

This work tests the hypothesis that NER and POS are related tasks and adding information about POS tags as input to the network can help achieve better NER results. And vice versa, information about NER tags can help solve the task of POS tagging.

This work also contains the implementation of the network and results of the experiments together with the conclusions and future work.

Keywords: neural networks, named entity recognition, regularization, generalizability, part of speech tagging, multi-task learning.

Статтю представив д.ф-м.н., проф., Анісімов А. В.

Вступ

Стрімкий ріст кількості інформації у всесвітній мережі “Інтернет” призводить до необхідності розробки автоматичних методів роботи з нею. Більшість інформації в публічному доступі є неструктурованою і потребує інтелектуальних систем, які матимуть змогу обробляти її і отримувати корисні структуровані дані для подальшої обробки.

Однією з таких інтелектуальних систем є NER-система (Named Entity Recognition). Вона розв’язує задачу визначення іменованих сутностей. В літературі найчастіше розглядають наступні чотири їх типи: LOC, PER, ORG, MISC - місцевість, персона, організація, інше.

У цій роботі ми аналізуємо існуючі на даний момент роботи, що розв’язують задачу NER, архітектури їх нейронних мереж, а також пропонуємо альтернативну нейронну мережу, яка використовує теги частин мови (POS-tags) як додатковий вхід для покращення узагальненості мережі, а як результат - підвищення точності на тестовому наборі даних.

Сучасні методи розв’язку задачі розпізнавання іменованих сутностей використовують рекурентні (RNN) та згорткові (CNN) нейронні мережі, а також умовні випадкові поля (Conditional Random Fields).

Рекурентна нейронна мережа (RNN) може отримувати на вхід наперед невизначену кількість вхідних даних в послідовності і опрацьовувати їх послідовно. Щоправда, є практичні обмеження щодо кількості вхідних даних у одній послідовності, які зумовлені обмеженим розміром прихованого шару мережі. Рекурентні нейронні мережі мають велику популярність в сучасних методах обробки текстів, за рахунок їх можливості “пам’ятати” контекст речення, при подачі їм на вхід послідовності слів. Найбільш поширені реалізації рекурентних нейронних мереж - це LSTM [2] та GRU.

Згорткова нейронна мережа, вперше описана в роботі LeCun & Bengio [3], отримує на вхід послідовність фіксованого розміру і

працює в вузькому контексті (декілька елементів послідовності на вхід і один вихід). Згорткові нейронні мережі набули більшого поширення для задач обробки зображень, тому що інформація про конкретний піксель важлива не сама по собі, а в контексті сусідніх пікселів. Згодом згорткові нейронні мережі були використані і для задач, які пов’язані з текстом і послідовностями змінної довжини.

Умовні випадкові поля використовуються для розв’язку задач, що вимагають певної структури у вихідних даних. Для розв’язку задачі NER часто використовують BIO нотацію, що вимагає певну структуру у вихідних даних. У розділі “Система міток” буде детальніше описано необхідність використання умовних випадкових полів.

Наша робота має наступну структуру. У розділі “Система міток” ми опишемо систему класів, розпізнавання яких ми поставимо як задачу нашій нейронній мережі. У розділі “Огляд літератури” ми коротко узагальнимо існуючі підходи, що отримують найкращу якість визначення іменованих сутностей. У розділі “План експериментів” ми опишемо дані, що будуть використовувати для експериментів і самі гіпотези, що ми будемо перевіряти. У розділі “Деталі реалізації” ми опишемо структуру нейронної мережі на основі якої будуть проводити експерименти. У розділі “Результати” ми опишемо отримані емпіричні дані з експериментів. У розділі “Висновки” ми визначимо які з гіпотез підтвердилися.

2. Система міток

2.1 BIO-нотація

Задача розпізнавання іменованих сутностей - це задача маркування послідовності, тобто класифікації кожного її елемента на один з N класів. Для того, щоб мати можливість розмітити якусь сутність, яка складається з декількох слів часто використовують BIO нотацію. BIO - це

Beginning (початок), Inside (внутрішність), Outside (зовнішність). Правила маркування наступні:

- кожне слово, яке не є частиною жодної сутності помічається "O"
- кожне слово, яке є початком сутності помічається "B-<TYPE>", де <TYPE> - це тип сутності (LOC, PER, ORG, MISC).
- решта слів помічають "I-<TYPE>"

Для прикладу речення "Barak Obama is a president of United States" буде розмічено наступним чином: "Barak[B-PER] Obama[I-PER] is[O] a[O] president[O] of[O] United[B-LOC] States[I-LOC]". Таким чином наявні дві сутності: персона Barak Obama і місцевість United States.

В нашому випадку задача кожне слово послідовності буде прокласифіковане на одне з наступних класів:

1. O
2. B-PER
3. I-PER
4. B-LOC
5. I-LOC
6. B-ORG
7. I-ORG
8. B-MISC
9. I-MISC

2.2 Умовні випадкові поля

Умовні випадкові поля (CRF) [11] використовуються для розрахунку ймовірності всієї послідовності $P(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$. Найчастіше їх використовують для структурного передбачення, тобто коли на вихід системи накладаються якісь обмеження. У нашому випадку обмеження є тільки одне. Мітка I-<TYPE> може слідувати тільки за міткою B-<TYPE> того ж типу <TYPE>.

Опис принципу роботи CRF виходить за межі цієї роботи і ми пропонуємо читачу звернутися до роботи Lafferty et al. [11] за детальним описом цього методу.

3. Огляд літератури

Найкращі результати у розв'язанні задачі NER отримують системи побудовані на основі нейронних мереж. У цьому розділі ми проаналізуємо існуючі архітектури і підходи до розв'язку цих задач.

У роботі Ma & Novy [1] автори пропонують використати двосторонню рекурентну мережу, що отримує на вхід вбудовування слів, які вони самі і навчають в процесі тренування. Нагадаємо, що двостороння рекурентна мережа відрізняється від звичайної односторонньої тим, що це - дві рекурентні мережі, одна з яких отримує послідовність на вхід в прямому порядку, а інша - в зворотному, а отримані виходи з цих мереж об'єднуються конкатенацією їх векторів, створюючи вектор вдвічі більшої розмірності.

Вбудовування слів отримують за допомогою матриці emb розміром $D \times E$, де D - розмір словника слів, а E - розмір вбудовувань. $e = emb(w_i)$, $i = 1..n$, де n - довжина вхідної послідовності слів речення $W = (w_1 w_2 .. w_n)$.

Двостороння рекурентна мережа $rnn = [rnn_{fw}, rnn_{bw}]$ отримує на вхід послідовність і результатом її роботи є послідовність довжини n векторів прихованих станів.

$$h_{fw} = rnn_{fw}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad h_{fw} = (h_{fw,1}, h_{fw,2}, \dots, h_{fw,n})$$
$$h_{bw} = rnn_{bw}(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1), \quad h_{bw} = (h_{bw,n}, h_{bw,n-1}, \dots, h_{bw,1})$$
$$h = [h_{fw}, h_{bw}]$$

Робота Ma & Novy [1] використовує LSTM як базову рекурентну одиницю. Їхня мережа навчається вбудовувань слів emb самостійно, а також додатково вбудовування отримуються на основі символічних репрезентацій. Для отримання символічної репрезентації згортова мережа опрацьовує кожне слово на рівні символів і будує багатовимірний вектор який об'єднується зі стандартним вбудовуванням на рівні слів. Для

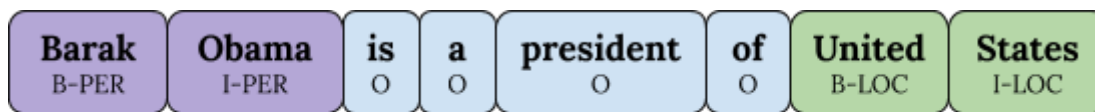


Рис. 1. Приклад маркування BIO-нотацією

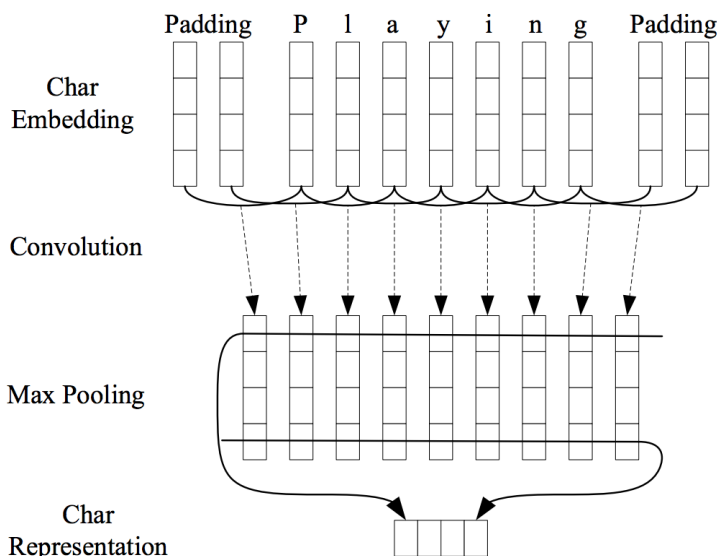


Рис. 2. Застосування згорткової мережі для побудови символних репрезентацій слова. Джерело: Ma & Novy [1]

отримання коректної послідовності результуючих міток, в роботі використано CRF [8] (див. секцію “Система міток”).

У роботі Lample et al. [5] архітектура мережі ідентична до тієї, що запропонована Ma & Novy [1] за виключенням способу отримання вбудовувань слів. Вони пропонують робити це наступним способом: обробити послідовність символів за допомогою двосторонньої LSTM мережі.

Ця мережа отримує на вхід послідовність вбудовувань символів і вихід з останнього прихованого шару слугує вбудовуванням на основі символів. Ця мережа також використовує CRF для забезпечення коректної послідовності результуючих міток.

4. План експериментів

4.1. Дані

Як джерело даних для задачі розмітки іменованих сутностей і тегів часнин мови ми використаємо широко поширений в літературі набір даних CoNLL 2003. Корпус CoNLL 2003 NER був створена на основі новинних текстів з корпусу Reuters RCV1, розмічений чотирма різними типами іменованих сутностей (PER, LOC, ORG, MISC). Кожне слово в наборі також має мітку частини мови до якої воно належить.

4.2. Гіпотези

В межах цієї роботи ми перевіряємо наступні гіпотези.

Гіпотеза 1. Додавання POS як входу додатково до слів дає можливість покращити результати для задачі NER.

Гіпотеза 2. Додавання NER як входу додатково до слів дає можливість покращити результати для задачі POS.

Гіпотеза 3. Додавання POS як виходу і включення його в функцію втрат дає можливість покращити результати для задачі NER.

Гіпотеза 4. Додавання NER як виходу і включення його в функцію втрат дає можливість покращити результати для задачі POS.

5. Деталі реалізації

5.1. Архітектура нейронної мережі

У цій роботі ми пропонуємо архітектуру нейронної мережі, що складається з шару вбудовувань, двох шарів рекурентної нейронної мережі (LSTM), а також двох повнозв'язних шарів. Перший повнозв'язний шар буде видавати розподіл ймовірностей по словнику NER міток (O, B-LOC, I-LOC, B-PER, I-PER, B-ORG, I-ORG, B-MISC, I-MISC), а другий повнозв'язний шар буде видавати розподіл ймовірностей по словнику POS-міток.

У архітектурі, що ми пропонуємо, кожне слово буде супроводжено також тегом частини мови. Ми побудуємо два словники: словник слів V_w , та словник тегів частин мови V_{pos} . Матриця вбудовувань для V_w позначимо E_w , для V_{pos} - E_{pos} .

$$e_i = E_w(w_i)$$

$$e_{pos,i} = E_{pos}(pos_i)$$

Далі ми використаємо дві двосторонні рекурентні мережі. Одна буде отримувати на вхід послідовність вбудовувань слів, а друга - вбудовувань частин мови.

$$h_w = rnn_w(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

$$h_{pos} = rnn_{pos}(e_{pos,1}, e_{pos,2}, \dots, e_{pos,n})$$

Отримані приховані стани використаємо для передбачення міток NER та тегів частин мови. Для цього використаємо повнозв'язні шари нейронної мережі, що перетворять приховані стан в розподіл ймовірностей по словнику міток. out_{ner} та out_{pos} для міток NER та POS відповідно.

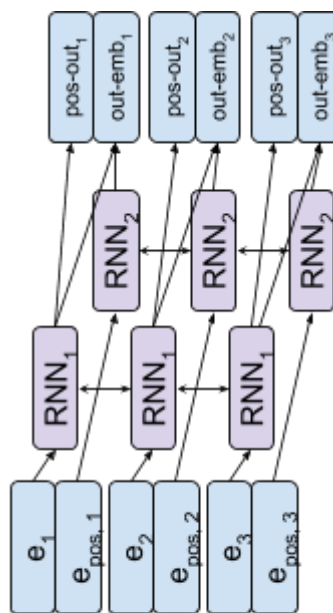


Рис. 3. Схематичне зображення запропонованої архітектури нейронної мережі

$$p_{ner} = softmax(out_{ner}(h_w))$$

$$p_w = softmax(out_{pos}([h_{pos}, h_w]))$$

$$softmax(x) = \frac{\exp(x_i)}{\sum_{i=1}^k \exp(x_i)}$$

Звернемо увагу, що матриця E_{pos} та матриця out_{pos} мають однакові розмірності з точністю до операції транспонування: $E_{pos} = out_{pos}^T$. Ми пропонуємо ототожнити ці матриці і навчати їх одночасно. Ми вважаємо, що аналогічно до роботи Melis et. al. [6] ми отримаємо кращі результати, за рахунок того, що мережа буде мати меншу кількість степеней свободи і це буде запобігати перенавчанню на тренувальній вибірці.

5.2. Навчання мережі на двох розмітках

Нейронні мережі тренуються за допомогою оптимізації функції втрат (loss functions). У випадку тренування для однієї задачі розмітки слів на класи використовують функцію категоріальної крос-ентропії.

$$Loss = - \sum_i^C label_i \log(predicted_i)$$

Де $label_i$ - це мітка з корпусу, $predicted_i$ - це мітка передбачена моделлю, а C - кількість існуючих міток.

У випадку коли ми тренуємо мережу робити декілька розмотіок на виході одночасно, ми маємо дві функції втрат $Loss_1$ і $Loss_2$. Загальну функція втрат задамо за допомогою балансууючого параметру $alpha$.

$$Loss = alpha * Loss_1 + (1 - alpha) * Loss_2$$

Таким чином чим ближче параметр $alpha$ до 1 тим більше фокусу нейронна мережа буде давати першій задачі, і менше - другій.

У випадку коли ми будемо тренувати мережу для задачі POS і NER - ми будемо мати наступну функцію втрат.

$$Loss = alpha * Loss_{pos} + (1 - alpha) * Loss,$$

6. Результати

Для перевірки Гіпотез 1 і 3 ми використаємо нейронну мережу, схема якої описана у частині 2 цієї статті. Для перевірки Гіпотез 2 і 4 ми використаємо ту ж нейронну

мережу, але замінимо всі входи і виходи POS і NER місцями. Іншими словами там де на вхід ми раніше подавали дані про частину мови слова (POS) ми тепер подамо дані про іменовану сутність цього слова (NER) і навпаки. Таким чином для перевірки всіх гіпотез ми зможемо використати ту ж саму архітектуру нейронної мережі.

6.1 Перевірка Гіпотези 1.

Гіпотеза 1. Додавання POS як входу додатково до слів дає можливість покращити результати для задачі NER.

Для перевірки цієї гіпотези ми оцінимо роботу нашої нейронної мережі без додавання POS як входу і з.

Set-up	Точність NER-DEV	Точність NER-TEST
Без POS-input	94.63	94.40
3 POS-input	95.80	96.23

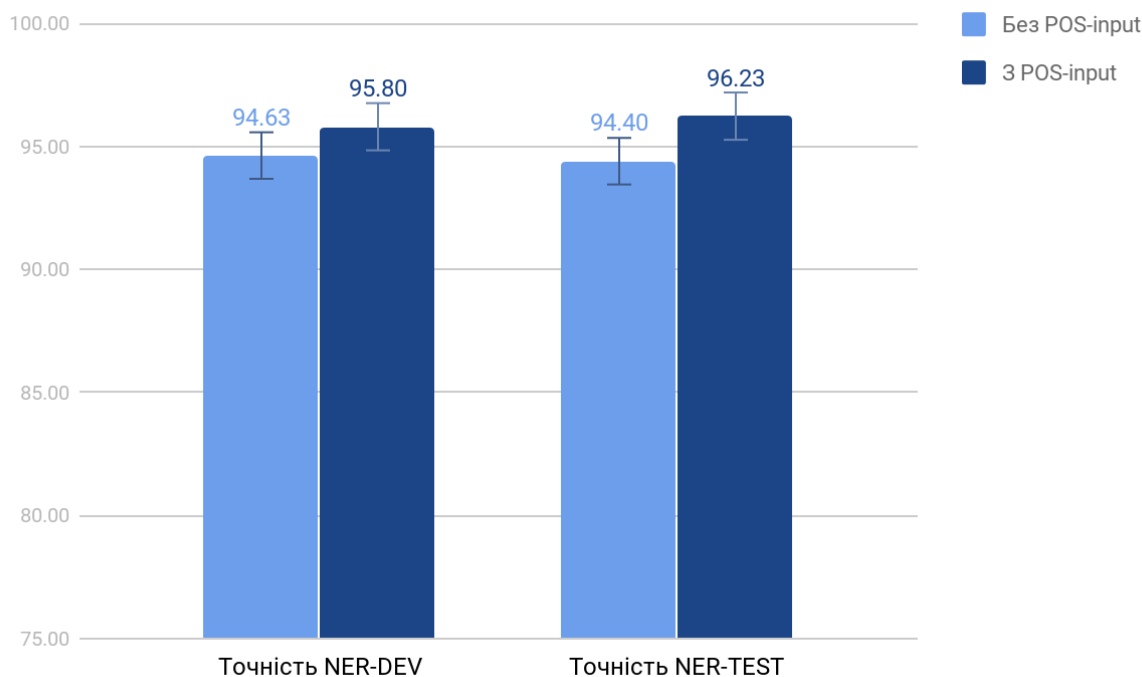


Рис. 4. Результати перевірки гіпотези 1

6.2 Перевірка Гіпотези 2.

Гіпотеза 2. Додавання NER як входу додатково до слів дає можливість покращити результати для задачі POS.

Для перевірки цієї гіпотези ми оцінимо роботу нашої нейронної мережі без додавання NER як входу і з.

Set-up	Точність POS-DEV	Точність POS-TEST
Без NER-input	94.63	94.40
З NER-input	94.80	95.23

6.3 Перевірка Гіпотези 3.

Гіпотеза 3. Додавання POS як виходу і включення його в функцію втрат дає можливість покращити результати для задачі NER.

Для перевірки цієї гіпотези ми оцінимо роботу нашої нейронної мережі для різних параметрів α комбінованої функції втрат (див. секцію 5.2).

alpha	Точність NER-DEV	Точність NER-TEST
0.50	90.23	88.76
0.60	90.15	90.53
0.70	92.85	88.53
0.80	94.27	94.15
0.90	95.13	95.18
1.00	94.63	94.4

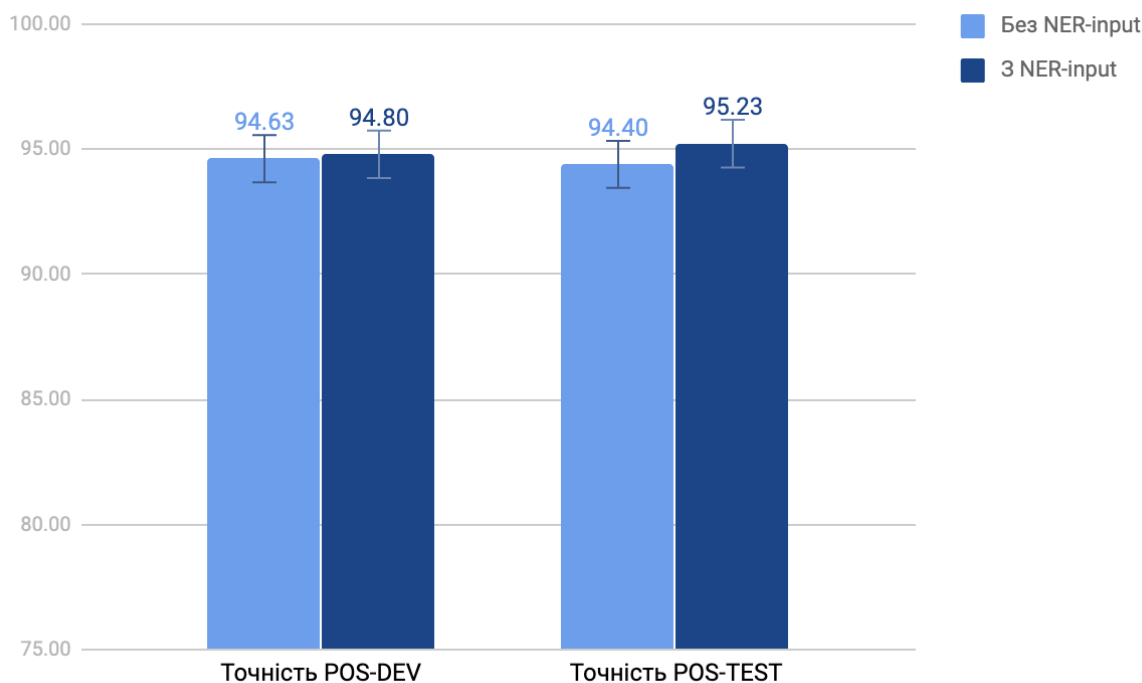


Рис. 5. Результати перевірки гіпотези 2

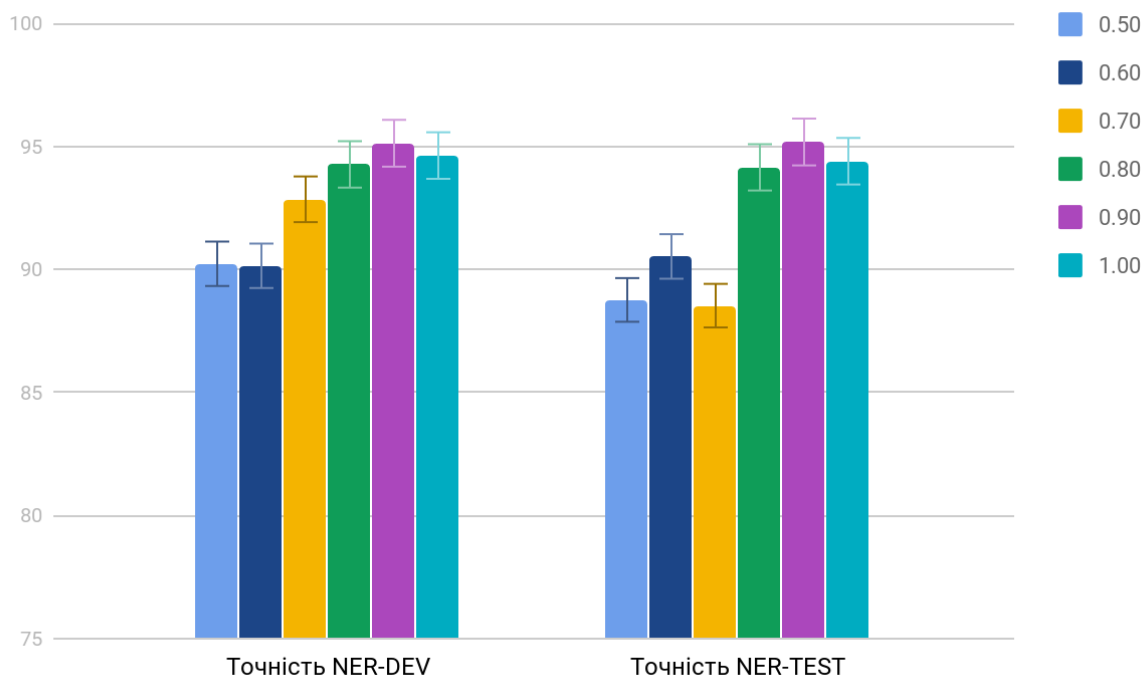


Рис. 6. Результати перевірки гіпотези 3

6.4 Перевірка Гіпотези 4.

Гіпотеза 3. Додавання NER як виходу і включення його в функцію втрат дає можливість покращити результати для задачі POS.

Для перевірки цієї гіпотези ми оцінимо роботу нашої нейронної мережі для різних параметрів α комбінованої функції втрат (див. секцію 5.2).

alpha	Точність POS-DEV	Точність POS-TEST
0.50	88.06	88.76
0.60	89.85	88.25
0.70	91.13	90.53
0.80	92.72	92.89
0.90	96.05	96.15
1.00	95.33	94.4

7. Висновки

Результати отримані в секції 6 цієї роботи показують, що задачі розмітки іменованих сутностей та визначення тегів частини мови є взаємозалежними і нейронна мережа може навчитися експлуатувати цю інформацію.

В результаті досліджень ми змогли підтвердити наступні гіпотези:

Гіпотеза 1. Додавання POS як входу додатково до слів дає можливість покращити результати для задачі NER.

Гіпотеза 3. Додавання POS як виходу і включення його в функцію втрат дає можливість покращити результати для задачі NER.

Гіпотеза 4. Додавання NER як виходу і включення його в функцію втрат дає можливість покращити результати для задачі POS.

Наступні гіпотези не показали значного покращення в результатах, що не

дає можливість нам впевнено сказати про їх правдивість.

Гіпотеза 2. Додавання NER як входу додатково до слів дає можливість покращити результати для задачі POS.

Варто також звернути увагу що для обох задач оптимальним значенням α є значення 0.9, що означає, що функція втрат має фокусувати

майже всю “увагу” нейронної мережі на тій задачі, яку ми розв’язуємо в першу чергу. З цього можна зробити висновок що навчити одну і ту ж мережу розв’язувати обидві задачі одночасно на високому рівні є складним завданням.

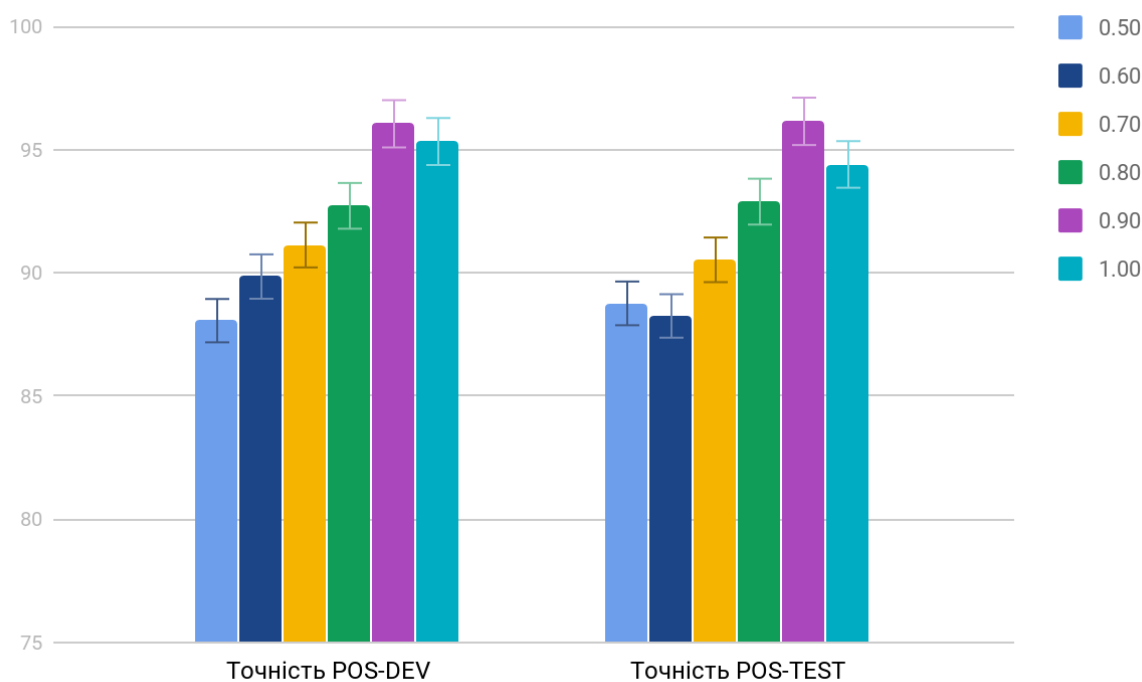


Рис. 7. Результати перевірки гіпотези 4

Список використаних джерел

1. Ма К., Хові І., Розмічення послідовностей за допомогою двосторонньої LSTM-CNN-CRF мережі. // *Proceedings of the 54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)*. 2016. – 1064-1074 с.
2. Хошрейтер С., Шмідхубер Ю., Довга корострокова пам'ять // *Neural Computation*. 9 – 1997. – 1735-1780 с.
3. Лекун Й., Бенжіо Й., Згорткові мережі для обробки зображень та звуку. // *The handbook of brain theory and neural networks*. – 1995. – 255-258 с.
4. Валлаш Х. Умовні випадкові поля: вступ. // *Foundations and Trends in Machine Learning archive*. Volume 4 Issue 4. – 2004. 267-273 с.
5. Лампл Г., Баллестерос М., Субраманіан С., Кавакамі К., Даєр К. Нейронні архітектури для розпізнавання іменованих сутностей. // *Proceedings of the 2016 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. – 2016. – 260-270 с.
6. Меліс Г., Даєр К., Блунсом П. Про найкращі результати в оцінках нейронних мереж. // *International Conference on Learning Representations*. – 2007 – 214-216 с.
8. Лэфферті Й., Мак-Каллум А., Перейра Ф. Умовні випадкові поля: моделі для сегментування і розмітки послідовностей. // *Proc. 18th International Conf. on Machine Learning*. Morgan Kaufmann. – 2001 – 282-289 с.

References

1. MA, X. & HOVY, E. (2016) End-to-end sequence labeling via bi-directional LSTM-CNNs-CRF. In *Proceedings of the 54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (Volume 1: Long Papers)*. pp. 1064-1074.
2. HOCHREITER, S. & SCHMIDHUBER, J. (1997). Long short-term memory. *Neural Computation*. 9: pp. 1735–1780.
3. LECUNN, Y., BENGIO, Y. (1995). Convolutional Networks for Image, Speech, and Time-Series. In *The handbook of brain theory and neural networks*. pp. 255-258.
4. WALLACH, H. (2004). Conditional Random Fields: An Introduction. In *Foundations and Trends in Machine Learning archive*. Volume 4 Issue 4, pp. 267-273
5. LAMPLE, G. & BALLESTEROS, M. & SUBRAMANIAN, S. & KAWAKAMI, K. & DYER, C. (2016). Neural Architectures for Named Entity Recognition. In *Proceedings of the 2016 Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies*. pp. 260–270.
6. MELIS, G. & DYER, C. & BLUNSOM, P. (2017). On the state of the art of evaluation in neural language models. In *International Conference on Learning Representations*. pp. 214-216.
8. LAFFERTY, J., MCCALLUM, A., PEREIRA, F. (2001). Conditional random fields: Probabilistic models for segmenting and labeling sequence data. *Proc. 18th International Conf. on Machine Learning*. Morgan Kaufmann. pp. 282–289.

Надійшла до редколегії 04.09.2018

УДК 519.21

Бобиль Б.В., аспірант
Терещенко В.М., д.ф.-м.н., професор

B.V. Bobyl, postgraduate
V.M. Tereschenko, Dr.Sci.(Phis.-Math.), Assoc.
Prof.

Аналіз методів передтренування та ініціалізації нейронних мереж.

Analysis of pre-training and initialization methods of neural networks.

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.
Академіка Глушкова 4д,
e-mail: bobyldbhdan@gmail.com, v_ter@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: bobyldbhdan@gmail.com, v_ter@ukr.net

У даній роботі розглянуті основні методи передтренування та ініціалізації значень параметрів нейронних мереж - передтренування мережі з використанням обмежених машин Больцмана, глибокі автокодувальники, ініціалізація параметрів методами Хе та Глоро, перенесення знань та доменна адаптація. Дані методи застосовуються для знаходження початкових значень параметрів нейронної мережі та їх попередньої ініціалізації, що є необхідною умовою для подальшого ефективного навчання глибоких моделей та дозволяє зменшити вплив негативних ефектів, які виникають під час навчання - затухання або вибуху градієнта, перенавчання, застрягання в одному з локальних мінімумів функції втрат, тощо. Дані алгоритми відносяться до групи алгоритмів навчання без учителя і не потребують розмітки для даних, на яких буде навчатися модель після ініціалізації. У статті був проведений аналіз цих методів, описані переваги та недоліки кожного алгоритму. Описано результати експериментів з використанням цих методів для вирішення задачі класифікації бази даних MNIST та запропоновані ідеї покращення алгоритмів передтренування нейронної мережі.

Ключові слова: нейронна мережа, передтренування, обмежена машина Больцмана, алгоритм порівняльної розбіжності, автокодувальник, ініціалізація Глоро, ініціалізація Хе, доменна адаптація, коефіцієнт Жаккара.

In this paper we investigate main pre-training and initialization methods of parameter values of neural networks such as pre-training using restricted Boltzmann machines, deep autoencoders, Glorot and He initialization of parameters, transfer learning and domain adaptation. Given methods are useful for finding of appropriate parameter values and initial initialization of neural network, what is necessary condition for further efficient training of deep models, because it give a possibility during training to reduce negative effects such as vanishing or explosion of gradient, overfitting, sticking in one of local minimums of loss function, etc. These methods belong to group of unsupervised training algorithms and do not need any labeling for data which will be used later for model's training after parameters initialization. Firstly, in this paper, we analyze all these methods and describe advantages and disadvantages of each of them. Secondly, we describe results of our experiments applying these methods for solving of classification task of MNIST dataset and introduce ideas for further development and improvement of these algorithms.

Key Words: neural network, pre-training, restricted Boltzmann machines, contrastive divergence algorithm, autoencoder, Glorot initialization, He initialization, domain adaptation, Jaccard index.

Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Анісімов А.В.

1. Вступ

Машинне навчання та нейронні мережі зокрема стали потужним інструментом для вирішення низки прикладних задач сучасності - розпізнавання образів [6, 12], машинний переклад [2, 3], прогнозування поведінки покупців, тощо. Причиною цього став ріст обчислювальних потужностей, доступних на даний момент та накопичення величезних об'ємів даних (як структурованих і неструктурованих), які потрібно обробляти і діставати з них нові знання.

Коли ми чуємо про успіхи у вирішенні "інтелектуальних" задач (під інтелектуальними будемо мати на увазі задачі, які не піддаються повному математичному опису і не мають детермінованих точних алгоритмів рішення, таких як класифікація, локалізація об'єктів на зображенні, переклад текстів з однієї природної мови на іншу, тощо), то саме нейронні мережі на даний момент показують найкращі результати в більшості випадків. Проте, на відміну від сьогоднішнього, коли глибоке навчання впроваджується майже всюди, до 2005-2006 року, в цій області науки працювало відносно невелика кількість вчених і визначних результатів майже не було. Одна із причин цього - складність навчання глибоких нейронних мереж. Для навчання мережі необхідно: 1) достатньо великі об'єми даних (чим більш складна задача вирішується, тим більш складною має бути архітектура мережі і тим більше потрібно даних); 2) обчислювальні потужності (достатньо потужні нейронні мережі вимагають багато ресурсів, особливо під час фази навчання). Ці проблеми стали менш суттєвими саме на початку XXI століття - поява мережі Інтернет та багатоядерних процесорів, а потім - обчислень на графічних процесорах сприяло цьому. Це повернуло інтерес до вивчення нейронних мереж вченою спільнотою. Проте виявилось, що є одна невирішена проблема: так як тренування моделі завжди зводиться до мінімізації функції втрат, ми далеко не завжди маємо можливість

використовувати складні алгоритми оптимізації для глибоких мереж по причині їх обчислювальної витратності.

Додатково, у мережі, в силу своїх архітектурних особливостей, можуть виникати небажані ефекти під час навчання: затухання градієнта, "градієнтний вибух", "перенавчання" (overfitting в англійській літературі - процес адаптації моделі до навчальних даних, під час якого мережа добре працює на початкових даних, але дає неправильні прогнози на валідаційних даних; характерно для ситуацій коли немає можливості отримати достатню кількість даних для навчання/валідації).

У даній статті будуть розглянуті методи і алгоритми, які в тій чи іншій мірі допомагають боротися з цими проблемами і дають змогу навчати глибокі моделі - передтренування без учителя [8, 9], спеціальні методи випадкової ініціалізації параметрів моделі [6, 7], перенесення знань та доменна адаптація [11], а також описані ідеї покращення існуючих алгоритмів.

2. Передтренування без учителя

Передтренування без учителя (unsupervised pre-training в англійській літературі) - сімейство алгоритмів, які працюють на нерозмічених даних. У даний момент практично дані алгоритми практично не використовуються для передтренування, проте вони мають значну історичну цінність і є джерелом ідей для побудови алгоритмів для вирішення інших задач.

Першим суттєвим проривом в передтренуванні нейронних мереж стала поява алгоритму без учителя, базованого на *обмежених машинах Больцмана* (restricted Boltzmann machines), розробленого групою Джефрі Хінтона [9]. Основна ідея методу - будемо вважати, що існують видимі ознаки, які представляють наші дані та невидимі (латентні) ознаки, які нам невідомі і між ними існує зв'язок, таким чином необхідно знайти такі параметри моделі, які дадуть змогу перейти із простору видимих ознак

в простір невидимих, при цьому невидимі ознаки мають давати змогу достатньо якісно відновити оригінальні дані зворотнім перетворенням.

Навчання моделі проводиться алгоритмом порівняльної розбіжності (contrastive divergence в англійській літературі), розробленого також групою Хінтона [10]. Для кожного шару мережі (вихід попереднього шару є входом для поточного, виключенням є перший шар - для нього входом є оригінальні дані), алгоритмом порівняльної розбіжності проводиться максимізація функції правдоподібності вхідних даних по параметрах шару:

$$W^* = \operatorname{argmax}_W \prod_{x \in X} P(x; W)$$

Основний недолік цього методу - складність налаштування алгоритму і необхідність вирішення додаткової задачі, яка по складності може не поступатися основній. Порівняння навчання нейронної мережі з передтренуванням обмеженою машиною Больцмана зображено на Рис.1.

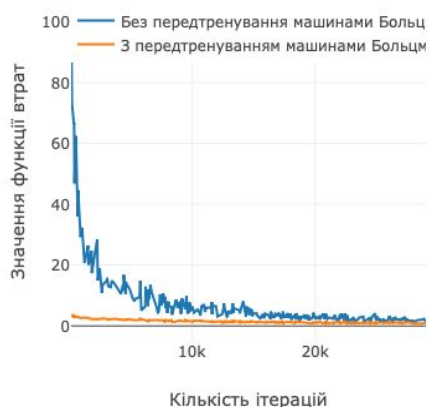


Рис.1 - Порівняння навчання нейронної мережі на базі цифр MNIST з використанням обмежених машин Больцмана

Інший спосіб передтренування мережі - використовувати автокодувальники, які можна вважати розвитком методів, базованих на обмежених машинах Больцмана.

Автокодувальник [12] - архітектура нейронної мережі, яка може використовуватися для багатьох задач - породження нових даних,

зменшення зашумленості даних, стиснення даних і передтренування. Ідея полягає в наступному: аналогічно, як і в обмежених машинах Больцмана, будемо вважати, що існують видимі ознаки, які представляють наші дані, та приховані ознаки, які теж представляють наші дані та аналогічно як і в машинах Больцмана, ми повинні мати змогу по прихованих ознаках відновити оригінальні дані. Для цього використовується підхід "кодувальник-декодувальник" - мережа складатиметься із 2-х частин: 1) кодувальника, який перетворюватиме дані в точки латентного простору ознак; 2) декодувальника, який перетворюватиме точки, отримані від кодувальника в оригінальні дані. Автокодувальник із одним прихованим шаром зображено на Рис.2

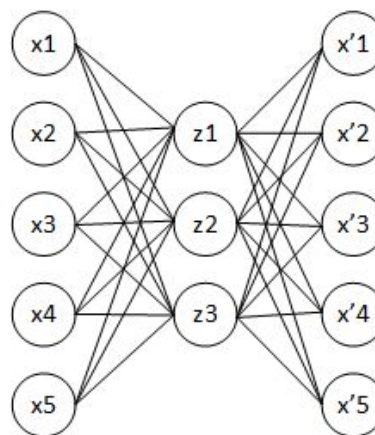


Рис.2 - Архітектура автокодувальника: $x1-x5$ - вхід мережі, $z1-z3$ - приховані(латентні) ознаки, $x'1-x'5$ - відновлений вхід

Таким чином, натренувавши таку мережу, можна взяти ваги кодувальника та проініціалізувати ними частину параметрів іншої мережі, яка вирішуватиме основну задачу. Цей підхід належить до класу алгоритмів без учителя і є розвитком підходу із застосуванням обмежених машин Больцмана. Основна відмінність - машини Больцмана тренують за один крок один шар, який фактично виконує роль кодувальника та декодувальника одночасно. Автокодувальник же складається з 2-х підмереж,

кожна може складатися з багатьох шарів і стандартно подібна архітектура тренується в end-to-end стилі. При цьому методом градієнтного спуску зазвичай мінімізується функція середньоквадратичної похибки між входом і виходом мережі:

$$W^* = \operatorname{argmin}_W \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (h(x_i) - x_i)^2,$$

де $h(\cdot)$ - вихід автокодувальника.

Основна перевага цього методу - він дещо простіший, ніж обмежені машини Больцмана, тренується стандартним градієнтним спуском і розповсюдженням помилки, дає можливість проініціалізувати мережу не випадковими параметрами, а отриманими на основі апріорної інформації, закладеної в дані. Основний недолік - після навчання та ініціалізації, декодувальник не потрібен, при цьому нам потрібно у 2 рази більше даних для навчання всієї мережі (при умові, що кількість параметрів у кодувальнику та декодувальнику приблизно однакова).

3. Випадкова ініціалізація методами Глоро і Хе

Великий вклад у розвиток методів ініціалізації зробила спільна робота Ксав'є Глоро та Йошуа Бенджи [6], що вийшла у 2010 році. Ці дослідники поставили перед собою питання існування можливості навчання нейронної мережі повністю як одне ціле (в англійській літературі - end-to-end learning). Достовірно відомо, що нейронна мережа чутлива до початкової ініціалізації параметрів. Основним результатом їх роботи став простий алгоритм ініціалізації, який покращив як швидкість, так і якість навчання та отримав назву *ініціалізація Глоро* (в англійській літературі зустрічається назва Xavier/Glorot initialization).

Розглянемо значення одного нейрону (до застосування функції активації):

$$y = w^\top x + b = \sum_i w_i x_i + b,$$

де x - вектор вхідних значень, w - вектор параметрів. Таким чином, дисперсія $\operatorname{Var}(y)$ не

залежить від вільного члена b , а залежить тільки від вектора вхідних значень і вектора параметрів. Позначимо i -й член суми як $y_i = w_i x_i$. Припустимо, що x_i та w_i - незалежні, маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(y_i) &= \operatorname{Var}(w_i x_i) = E[w_i x_i] - (M[w_i x_i])^2 = \\ &= M[x_i]^2 \operatorname{Var}(w_i) + M[w_i]^2 \operatorname{Var}(x_i) + \operatorname{Var}(x_i) \operatorname{Var}(w_i), \end{aligned}$$

де $M[\cdot]$ - оператор взяття математичного сподівання.

Припустимо, що ми використовуємо симетричну функцію активації та випадково ініціалізуємо параметри значеннями, середнє значення яких дорівнює нулю. Тоді дисперсія матиме наступний вигляд:

$$\operatorname{Var}(y_i) = \operatorname{Var}(x_i) \operatorname{Var}(w_i)$$

Тепер, якщо припустити, що x_i та w_i ініціалізуються з одного розподілу, при цьому незалежно, маємо:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(y) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n_{out}} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n_{out}} \operatorname{Var}(w_i x_i) = \\ &= n_{out} \operatorname{Var}(x_i) \operatorname{Var}(w_i), \end{aligned}$$

де n_{out} - кількість нейронів останнього шару.

Бачимо, що дисперсія виходу пропорційна дисперсії входу із коефіцієнтом $n_{out} \operatorname{Var}(w_i)$. Якщо використовується симетрична функція активації для якої для k -го шару з одиничною похідною в околі нуля, то $f'(y_i^{(l)}) \approx 1$, то отримаємо коефіцієнт пропорційності $n_{in} \operatorname{Var}(w_i)$, де n_{in} - кількість входів. Ідея Бенджи і Глоро полягає в тому, що для безперешкодного проходження значень активації та градієнтів по мережі, дисперсії в обох випадках мають бути близькими до одиниці. Оскільки для шарів різних розмірів не можна задовольнити обидві умови одночасно, було запропоновано ініціалізувати ваги симетричним розподілом з наступною дисперсією:

$$\operatorname{Var}(w_i) = \frac{2}{n_{in} + n_{out}},$$

що для рівномірної ініціалізації приводить до розподілу:

$$w_i \sim U\left(-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n_{in} + n_{out}}}, \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n_{in} + n_{out}}}\right)$$

Для несиметричних функцій активацій (таких як ReLU), використовується *ініціалізація Хе* [7], розроблена і опублікована Кайміном Хе у

2015 році. Використовуючи аналогічні міркування, можна отримати:

$$\text{Var}(w_i) = \frac{2}{n_{in}^{(l)}}, w_i \sim N(0, \sqrt{\frac{2}{n_{in}^{(l)}}})$$

Перевагою цих методів є простота реалізації і відносно висока якість ініціалізації, проте ми не можемо закласти апріорні знання в модель, так як при ініціалізації ці знання не враховуються.

Результати роботи обох методів зображено на Рис.3 та Рис.4.

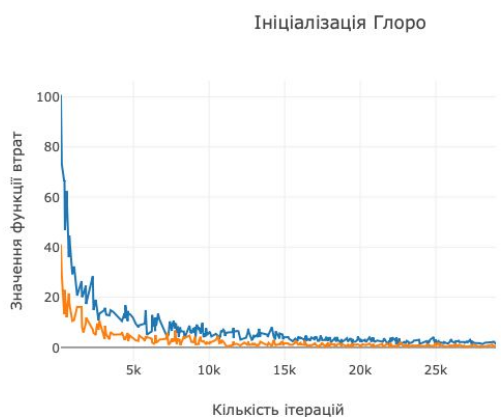


Рис.3 - Порівняння навчання нейронної мережі на базі цифр MNIST з використанням ініціалізації Глоро

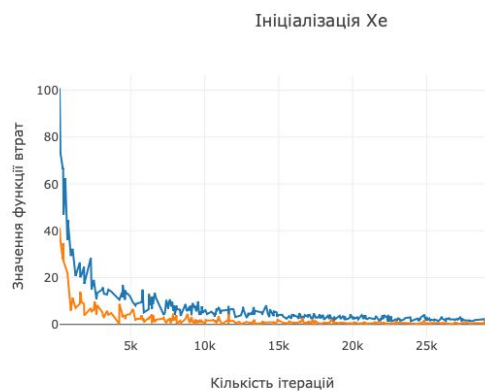


Рис.4 - Порівняння навчання нейронної мережі на базі цифр MNIST з використанням ініціалізації Хе

4. Перенесення знань та доменна адаптація

Перенесення знань (transfer learning) та *доменна адаптація моделі* [11] - потужні

методи, які застосовуються в передтренуванні мережі.

На даний момент існує велика кількість якісно натренованих моделей для вирішення багатьох задач - моделі натреновані для вирішення задачі класифікації [6, 12], локалізації та детекції з багатьма класами об'єктів [5, 6] в області комп'ютерного зору, тощо. Зазвичай, дуже складно знайти модель, яка тренувалася на даних, розподіл яких подібний до розподілу даних конкретної задачі. Відповідно, моделі натреновані на одних даних можуть погано працювати на входах, які мають інший розподіл, ніж тренувальний набір даних. Наприклад класифікатор, який навчався на зображеннях, зроблених вдень, добре працюватиме на зображеннях знятих вдень, але буде помилятися на зображеннях знятих вночі. Виникає питання - чи можливо, незважаючи на це обмеження, перевикористати існуючу модель для рішення конкретної задачі? Головна ідея методу доменної адаптації або дотренування полягає в наступному: замість тренування мережі повністю з нуля, можна використати уже натреновану мережу, яка натренована для вирішення задачі дуже близької до нашої і дотренувати її на наших специфічних даних. Як результат, мережа адаптується до нового розподілу даних і дає вірні передбачення на подібних даних. Цей метод має багато переваг і добре себе зарекомендував в області комп'ютерного зору: існує багато готових моделей, наприклад для задач класифікації та детекції, які вирішують достатньо велике коло задач і їх можна використати. Ще одна перевага - для дотренування мережі зазвичай потрібно на порядок менше навчальних даних. Проте, якщо вирішувана задача достатньо специфічна або існуючі натреновані моделі через свої архітектурні особливості не дають змоги їх використовувати (приклад - мережа має занадто мало параметрів і не може виявити необхідні закономірності в даних або навпаки - має занадто

багато параметрів і є обчислювально витратною), то даний метод не застосовний в повній мірі.

Ще одна можлива проблема - необхідність змінити архітектуру моделі, наприклад, додавши додаткові виходи у модель, або додавши приховані шари. Навіть у цьому випадку ми можемо використати частину параметрів мережі. Для того, щоб зрозуміти принцип роботи методу перенесення знань, потрібно згадати принцип роботи нейронної мережі. Розглянемо мережу глибини n (де під глибиною мається на увазі кількість шарів), де під глибиною мається кількість шарів і розглянемо процес обчислень, який виконує мережа під час навчання і прогнозування. Кожен шар мережі під час навчання вивчає певні шаблони в даних. При цьому, чим глибший шар, тим більш складні шаблони він вивчає. Наприклад, припустимо, що ми навчаємо мережу для класифікації зображень - модель має давати відповідь чи є на зображенні людина, чи ні. У цьому випадку, ранні шари мережі вивчають примітивні ознаки - наявність ліній різного нахилу та товщини, наявність певних кольорів, тощо. Більш глибокі шари вивчають більш складні ознаки, комбінуючи виходи попередніх - шукаючи дуги, овали та інші більш складні шаблони. Останні шари мережі на основі виходу попередніх здатні вивчити частини тіла - голову, очі, руки, тощо. Останній же шар на основі цієї інформації приймає рішення про наявність людини на зображенні. Схематично процес зображено на Рис. 5

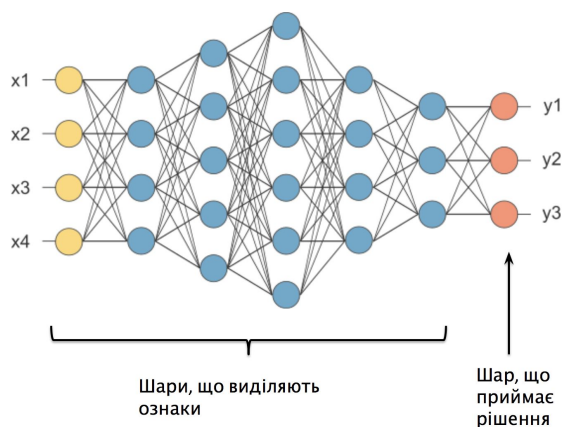


Рис. 5 - Роль шарів в нейронній мережі прямого поширення

Таким чином, ми можемо перевикористати частину параметрів перших k шарів однієї мережі. Ця техніка досить корисна, особливо у випадках коли потрібно розширити функціональні можливості нашої моделі: очевидно, маючи модель, яка класифікує зображення для виявлення присутності людини на фото, можна створити нову модель, яка додатково прогнозуватиме положення людини, при цьому достатньо взяти ваги першої моделі і перенести їх в другу та дотренувати її. Недоліки даного підходу - через специфічність задачі, можлива відсутність натренованих моделей, які вирішують подібні задачі.

Результати використання даного методу зображено на Рис.6

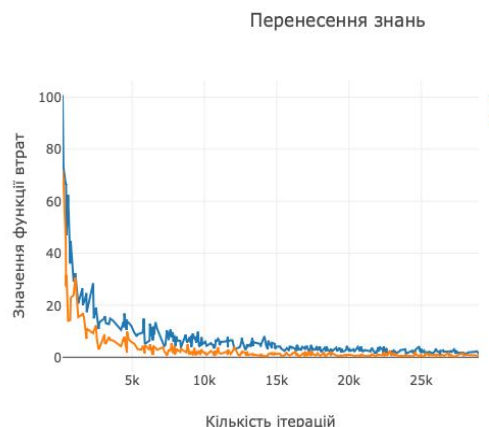


Рис.6 - Приклад навчання нейронної мережі на підмножині бази MNIST з перенесенням значень параметрів іншої моделі, навченої на іншій підмножині цифр цієї ж бази

5. Ідеї покращення алгоритмів передтренування

Одним з найперспективніших напрямків є модифікація методів передтренування, що базуються на обмежених машинах Больцмана. Основна перевага цього методу - можливість закласти певні апіорні знання і розподіли, які є в даних та виконувати навчання пошарово. Але складність налаштування та навчання мережі алгоритмом порівняльної розбіжності робить даний підхід менш практичним відносно інших

підходів. Основні ідеї для покращення роботи даного підходу: 1) замінити алгоритм порівняльної розбіжності на алгоритм градієнтного спуску із зворотнім розповсюдженням помилки; 2) замінити стандартні функції втрат такі, як, наприклад, середньоквадратична помилка або бінарна кросентропія на функцію, яка буде штрафувати модель (наприклад, для задачі класифікації) за вивчення ознак, які не розділяють або слабо розділяють задані класи. Такою функцією може бути коефіцієнт Жаккара:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|},$$

який використовується в області комп'ютерного зору для оцінки якості роботи детекторів об'єктів на зображенні та відомий під назвою "intersection over union"-метрикою. Таким чином, наприклад, при класифікації об'єктів, чим менше перетинаються ознаки об'єктів різних класів, тим менше будуть штрафуватися параметри шару і менше буде помилка класифікації, що і є основною метою алгоритму.

6. Висновки

Список використаних джерел

1. van der Maaten L. J. P. Visualizing High-Dimensional Data Using t-SNE [Електронний ресурс] / L. J. P. van der Maaten, G. E. Hinton // Journal of Machine Learning Research. – 2008. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.jmlr.org/papers/v9/vandermaaten08a.html>.
2. Goodfellow I. Deep Learning / I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville. – Cambridge, MA: The MIT Press, 2016. – 800 с. – (Adaptive Computation and Machine Learning series).
3. Bishop C. M. Neural networks and machine learning / C. M. Bishop. – Berlin: Springer, 1998. – 353 с. – (Nato ASI Subseries F).
4. Bishop C. M. Pattern recognition and machine learning / C. M. Bishop. – New York: Springer-Verlag, 2006. – 738 с. – (Information Science and Statistics).
5. Glorot X. Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks

Область досліджень, що розглядається, є джерелом ідей для покращення роботи існуючих алгоритмів та методів. У цій статті були проаналізовані основні та найпоширеніші методи передтренування та ініціалізації мереж, були зазначені їхні переваги та недоліки, області їх застосовності. Дані методи в тій чи іншій мірі можуть бути застосовані для широкого кола задач та архітектур мережі, проте в цьому є певний недолік - наклавши певні обмеження або використовуючи більш специфічні методи, можна отримати кращі результати в обмеженому колі задач. Наприклад, сконцентрувавшись на задачі класифікації, можна отримати значно кращі методи ініціалізації, так як для даної задачі важливо, щоб модель вивчила дискримінативні ознаки. При цьому і машини Больцмана, і автокодувальники шукають генеративні ознаки, так як вони в тій чи іншій мірі мають вміння відновлювати дані, що може корисно для семплінга нових даних, але не потрібно для класифікації.

References

1. VAN DER MAATEN, L. J. P. (2008) Visualizing High-Dimensional Data Using t-SNE. [Electronic resource] Journal of Machine Learning Research. Access: <http://www.jmlr.org/papers/v9/vandermaaten08a.html>.
2. GOODFELLOW, I., BENGIO, Y., COURVILLE, A., (2016) Deep Learning. Cambridge, MA: The MIT Press. – 800 p. – (Adaptive Computation and Machine Learning series).
3. BISHOP, C. M. (1998) Neural networks and machine learning. Berlin: Springer. – 353 p. – (Nato ASI Subseries F).
4. BISHOP, C. M. (2006) Pattern recognition and machine learning. New York: Springer-Verlag. – 738 p. – (Information Science and Statistics).
5. GLOTOT, X., BENGIO, Y. (2010) Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks. [Electronic

- [Електронний ресурс] / X. Glorot, Y. Bengio // *Journal of Machine Learning Research*. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: <http://proceedings.mlr.press/v9/glorot10a/glorot10a.pdf>.
6. Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification / K. He, X. Zhang, S. Ren, S. Sun // 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV) / K. He, X. Zhang, S. Ren, S. Sun., 2015. – С. 1026–1034.
 7. *Hinton G. E.* Reducing the Dimensionality of Data with Neural Networks / G. E. Hinton, R. R. Salakhutdinov // *Science*, 313 / G. E. Hinton, R. R. Salakhutdinov. – New York, 2006. – С. 504–507.
 8. *Salakhutdinov R. R.* Restricted Boltzmann machines for collaborative filtering / R. R. Salakhutdinov, A. Mnih, G. E. Hinton // *ACM International Conference Proceeding Series*, 227 / R. R. Salakhutdinov, A. Mnih, G. E. Hinton., 2007. – С. 791–798.
 9. *Carreira-Perpinan M. A.* On Contrastive Divergence Learning / M. A. Carreira-Perpinan, G. E. Hinton // *AISTATS 10th Int. Workshop on Artificial Intelligence and Statistics* / M. A. Carreira-Perpiñan, G. E. Hinton., 2005. – С. 59–66.
 10. Discriminability-Based Transfer between Neural Networks / L. Y. Pratt, S. J. Hanson, C. L. Giles, J. D. Cowan // *Advances in Neural Information Processing Systems*, 5 / L. Y. Pratt, S. J. Hanson, C. L. Giles, J. D. Cowan., 1993. – С. 204–211.
 11. Stacked Denoising Autoencoders: Learning Useful Representations in a Deep Network with a Local Denoising Criterion [Електронний ресурс] / P. Vincent, H. Larochelle, I. Lajoie, Y. Bengio // *Journal of Machine Learning Research*. – 2010. – Режим доступу до ресурсу: <http://www.jmlr.org/papers/volume11/vincent10a/vincent10a.pdf>.
 12. Deep Residual Learning for Image Recognition / K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) / K. He, X. Zhang, S. Ren, J. Sun. – Las Vegas, NV: IEEE, 2016. – С. 770–778.
- resource] Journal of Machine Learning Research*. Access:
– Режим доступу до ресурсу: <http://proceedings.mlr.press/v9/glorot10a/glorot10a.pdf>.
6. HE, K., ZHANG, X., REN, S., SUN, S. (2015) Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human-Level Performance on ImageNet Classification. *2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. – p. 1026–1034.
 7. HINTON, G. E., SALAKHUTDINOV, R. R. (2016) Reducing the Dimensionality of Data with Neural Networks. *New York: Science*. – 313. – p. 504–507.
 8. SALAKHUTDINOV, R. R., MNIH, A., HINTON, G. E. (2007) Restricted Boltzmann machines for collaborative filtering. *ACM International Conference Proceeding Series*. – 227. – p. 791–798.
 9. CARREIRA-PERPINAN, M. A., HINTON, G. E. (2005) On Contrastive Divergence Learning. *AISTATS 10th Int. Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*. – p. 59–66.
 10. PRATT, L. Y., HANSON, S. J., GILES, C. L., COWAN, J. D., (1993) Discriminability-Based Transfer between Neural Networks. *Advances in Neural Information Processing Systems*. – 5. – p. 204–211.
 11. VINCENT, P., LAROCHELE, H., LAJOIE, I., BENGIO, Y. (2010) Stacked Denoising Autoencoders: Learning Useful Representations in a Deep Network with a Local Denoising Criterion. [*Electronic resource] Journal of Machine Learning Research*. Access: <http://www.jmlr.org/papers/volume11/vincent10a/vincent10a.pdf>.
 12. HE, K., ZHANG, X., REN, S., SUN, S. (2016) Deep Residual Learning for Image Recognition. *2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. Las Vegas, NV: IEEE, 2016. – p. 770–778.

Received: 17.06.2018

УДК 004.25

Коваль Ю.В., асистент,
Крак Ю.В., д.ф.-м.н., проф.

Iu. V. Koval, Assistant,
Iu. V. Krak, Prof.

Алгоритм сортування решетами

Sieve sorting algorithm

Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: kafedraTK@unicyb.kiev.ua

Taras Shevchenko National University of
Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkov ave., 4d,

e-mail: kafedraTK@unicyb.kiev.ua

Метою даної роботи є представити алгоритм сортування, який дозволяє паралельно виконувати операції порівняння, проаналізувати складність та час виконання алгоритму, обговорювати віртуальний процес для цього алгоритму та реалізацію програми мовою C++, яка імітує такий віртуальний процес. У цій роботі були вирішені такі проблеми: запропоновано алгоритм сортування решетами, доведено правильність його виконання, досліджено складність та терміни роботи цього алгоритму, запропонована структура віртуального процесу, що реалізує цей алгоритм, обговорювалася програма мовою C++, що імітує такий віртуальний процес. Код програми може бути взятий у авторів. Також було вдосконалено алгоритм та доведено правильність такого вдосконалення. У процесі вирішення проблем було виявлено незручність класичної UNIX-подібної реалізації для роботи з механізмами пайпів та створення процесами.

Ключові слова: сортування решетами, віртуальний процес.

The purpose of this paper is to present a sorting algorithm that allows parallel execution of comparison operations, analysing complexity and runtime of the algorithm, discussing about a virtual process for this algorithm, and the implementation of the C++ program that simulates such a virtual process. The following problems were solved in this paper: the algorithm of sieve sorting was proposed, the correctness of its execution were proved, the complexity and timing of this algorithm were investigated, the structure of the virtual process implementing this algorithm was proposed, the C++ program that simulates such a virtual process was discussed. Program code may be taken from the authors. The improvement for the algorithm also provided and correctness of such improvement proved. In the process of problem solving the inconvenience of classical UNIX-like implementation for working with the mechanisms of piping and the processes creating was found out.

Key Words: sieve sorting, virtual process.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Анісімов А.В.

1. Introduction and formulation of the problem

A traditional computer has one processor. The consequence of this was the technology of sequential programming. Increasing the number of processors from one to two can not solve the problem of running a parallel program. The number of simultaneously evaluated commands limited to number of processors. The maximum achievement is the parallel execution of two programs. Such an approach to parallel computing was in operating systems similar to UNIX [1]. The command line operator pipe [2] allows you to build chain of processes, each of which is desirable to be performed in parallel. In a classic UNIX-like system with one

processor, parallel execution was impossible and was imitated using time-sharing technology. The parallelism was in that that it was impossible to predict which process would be executed at a given time point. This approach has allowed to extend such parallelism to multiprocessor systems where the number of processors is not significantly more than one. Simultaneous use of the pipe with two processes executed by two different processors practically does not differ from the one-processor case.

Let's consider the problem of sorting the values of some type with the missing property of the neighborhood [3]. For a single-processor system, it is proved that the complexity of the algorithm with comparison for solving such a problem can not be

less than $n \cdot \log(n)$, where n is the number of values for processing [4].

The purpose of this paper is to present a sorting algorithm that allows parallel execution of comparison operations, analysing complexity of the algorithm, discussing about a virtual process for this algorithm, and the implementation of the C++ program that simulates such a virtual process.

2. Algorithm for Sieve Sorting

Sieve sorting of the sequence of values is performed by the system of sequential adaptive sieves each of which selects the value from the sequence according to the specified criterion. The number of sieves is determined by the number of elements to be sorted. The algorithm of the first element of the system of sieves is the algorithm for the generation the sequence of values to be sorted. Also this element gather sorted sequence. The algorithm of each next sieve is the same and looks as follows:

- Step 1. Get the first value. Make it as a value that has been found.
- Step 2. Get the first next value.
- Step 3. If there is no such a value, then process of sieves constructing is finished. Return the value that has been found to the previous element (sieve). Stop.
- Step 4. Compare the first next value and the value that has been founded. In the case of the criteria violation for sorting, swap them.
- Step 5. Create the next sieve and pass the first next value to it.
- Step 6. Get the next value.
- Step 7. If there is no next value, then process of sieves constructing is finished. Return the value that has been found to the previous element (sieve). Go to Step B.
- Step 8. Compare the next value and the value that has been founded. In the case of the criteria violation of sorting, swap them.
- Step 9. Transfer the next value to the next sieve.
- Step A. Go to step 6.
- Step B. Get one by one all ordered values from next sieve and send them to previous element (sieve). Stop.

The specified sorting system works correctly in accordance to the following theorem.

Theorem 1. The sieve that performed specified algorithm correctly sorts a given sequence of values.

Let prove this theorem by induction on the length of sequence to be sorted.

Induction base. Let the length of sequence is 1. This sequence is always sorted by any criterion. The first value that is received by sieve is returned as sorted by Step 3. So for such sequences system perform sorting correctly.

Induction step. Assume that sieve correctly sort the sequence of length n . Show now that the sequence of length $n+1$ will be sorted correctly. Each next sieve sorts the sequence which length is one shorter. The value that founded by the sieve is satisfying the sort criterion in comparison to values passed to next sieve according to Steps 4 and 8. The resulting (sorted) sequence of the sieve is composed from the founded value and the resulting sequence from the next sieve (Steps 7 and B). This sequence is correctly sorted according to the sorting criterion. So the induction step is proved.

A schema of evaluation of such an algorithm is presented in Figure 1.

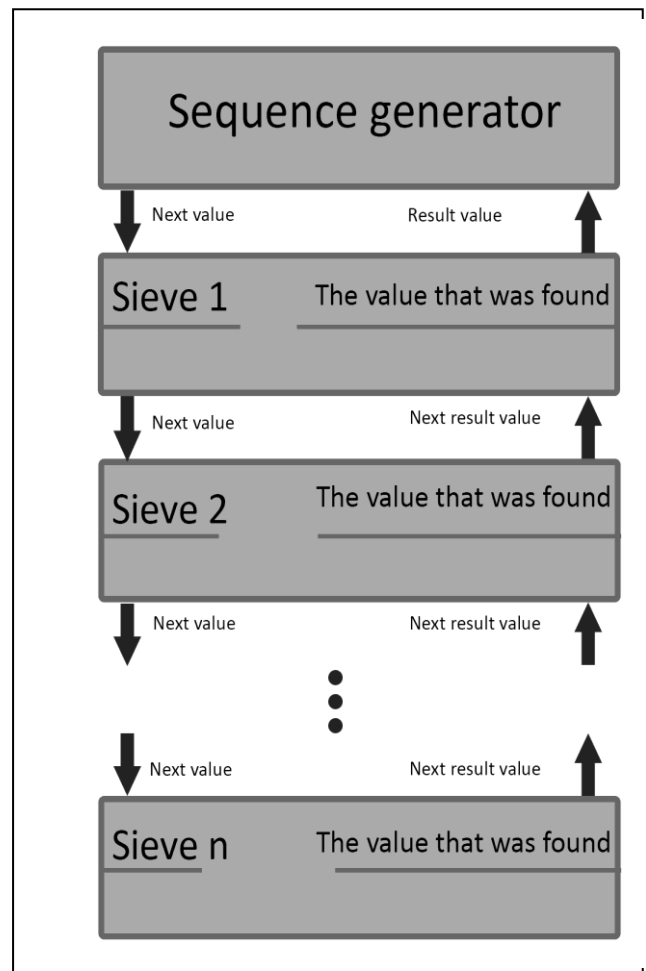


Fig. 1. Sieve sorting schema

3. Complexity and runtime of the Algorithm

The complexity of sorting algorithms is determined by the number of comparison performed

on sorted values. Let's have n elements to be sorted. Then the first sieve will perform $n-1$ comparisons. Each next sieve performs one comparison less. In general, the total number of comparisons is estimated as n^2 . This coincides with the complexity of bubble sorting [5]. Thus, the following theorem is valid.

Theorem 2. The complexity of the sieve sorting algorithm is n^2 where n is the number of values to be sorted.

The execution time of the algorithm as well as its complexity is estimated in the number of executed single actions. For sequential algorithms, these two values coincide, since only one action is performed at a time. For parallel algorithms, the execution time and the complexity of the algorithms do not coincide because of the ability to perform some actions simultaneously.

The next figure shows dependence of the number of simultaneous actions from the algorithm execution step number.

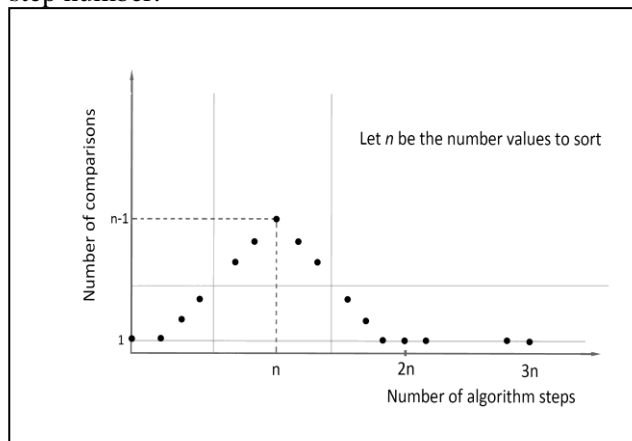


Fig. 2. The amount of actions from the step number dependence

All sieve and generator (the first element) of the proposed algorithm work in parallel. In the first step of the execution of the algorithm, the following actions will be performed: the generator creates the first sieve and transmits the value to it. In the second step, the generator transmits the next value to the first sieve. In the third step, the generator again sends the next value (new one) to the first sieve. At the same time, the first sieve compares two values, performs sorting, creates the next sieve and passes the corresponding value to it. In the fourth step, the generator again passes the next value to the first sieve. At the same time, the first sieve compares two values, performs sorting actions, and passes the corresponding value to the second one. At the same time, the second sieve compares two values, performs sorting, creates the next sieve and passes the corresponding value to it. Thus, at each subsequent step, the number of comparative

operations performed simultaneously increases by one. After the n steps are completed, the generator stops generating new values. Starting from this moment, the number of comparisons performed simultaneously, with each step, is decreased by one. As the returning of the result values requires n additional actions, the time of performance increased by n action equivalent to the comparison of values. Thus, the total execution time of the algorithm provided the simultaneous execution of the action, is $3n$.

This allows us to formulate the following theorem and consider it as proven.

Theorem 3. The execution time of the sieve sorting is linear to the number of specified values.

4. Improvement of sieve sorting

In the Step 3 and 7 resulting values returned to previous element of the sorting system. As a result this process takes n time unit. It is possible to change this by changing the previous element to the first element. The correctness of improved algorithm based on the fact, that each sieve returns the founded (resulted) value after the last value passed this sieve. So the next theorems considered as proven.

Theorem 4. The improved sieve algorithm perform correct sorting of given sequence of values.

Theorem 5. The execution time of the improved sieve sorting is linear to the number of specified values.

5. Virtual Process for the Sieve Sorting discussion

The complexity in the practical implementation of the above algorithm and practical achievement of the declared time-of-execution evaluation is the lack of computer systems with a sufficient number of processors. The virtual process [6] that implements the algorithm can be performed on many computers at the same time. The generator and each of the sieves are implemented by a separate atomic process. When the ratio of the number of processors to the number of values to be sorted reach the values one to one, the execution time of the virtual process will correspond to the theoretically estimated.

6. Realization of the Virtual Sorting Process in Linux discussion

Linux Mint 18.3 32-bit was chosen as Linux version. This choice is motivated by the greatest popularity of this distribution among all others today. The distribution has been installed on a virtual computer with 2GB of RAM and four processors. The host computer has 8GB of RAM and an Intel i5 processor.

In the program, one atomic virtual process is implemented by a separate Linux process. Creating

new processes is done by calling the `fork()` function. Pipes are used to transfer the values between the processes. The value `-1` is used as a sign of completion of the value sequence. The processing of false situations is carried out in the final actions of the `main()` function after executing the cutting `goto`. The program does not try to be a `good_style_program`, but a program that solves the problem. The use of cutting `goto` is due to the lack of "good" implementations of work with `pipe(s)` and `fork(s)`.

7. Conclusion

In this paper the following problems were solved: the algorithm of sieve sorting was proposed, the

correctness of its execution were proved, the complexity and timing of this algorithm were investigated, the structure of the virtual process implementing this algorithm was proposed, the C++ program that simulates such a virtual process was proposed. In the process of problem solving the inconvenience of classical UNIX-like implementation for working with the mechanisms of piping and the processes creating was found out. This will be the direction of further research for the development of virtual processes.

Список використаних джерел

1. *Thompson K., Ritchie D. M., Unix programmer's manual // Bell Labs, USA. November 1971. - p. 194.*
2. *Kernighan B. W., Pike R., The unix programming environment // Bell Labs, USA. 1984.*
3. *Knuth D., The art of computer programming Volume 3: Sorting and Searching, Second Edition. // Addison-Wesley. 1998.*
4. *Cormen T.H., Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C., Introduction to algorithm // MIT Press. 2001.- p. 1180.*
5. *Demuth H., Electronic data sorting // PhD thesis. Stanford University. 1956.*
6. *Крак Ю.В., Коваль Ю.В., Ставровський А.Б. Віртуальний процес: означення та застосування в створенні системи жестового інтерфейсу // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2015. – №1. - 141-144 с.*

References

1. THOMPSON, K. & RITCHIE, D. M. (November 1971) Unix programmer's manual. *Bell Labs, USA*. p. 194.
2. KERNIGHAN, B. W. & PIKE, R. (1984) The unix programming environment. *Bell Labs, USA*.
3. KNUTH, D. (1998) The art of computer programming. Volume 3: Sorting and Searching, Second Edition. *Addison-Wesley*.
4. CORMEN, T.H. & CORMEN, T.H. & LEISERSON, C.E. & RIVEST, R.L. & STEIN, C. (2001) Introduction to algorithms. *MIT Press*. p. 1180.
5. DEMUTH, H. (1956) Electronic data sorting. *PhD thesis. Stanford University*.
6. KRAK, I.U.V. & KOVAL, I.U.V. & STAVROVSKYI, A.B. (2015) Virtual process: definition and application for gestures interface system creation. In *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. Vol. 1. p.141-144.

Надійшла до редколегії 15.10.2018

РАДІОФІЗИКА

УДК 519.85

Гайдар В.О. ¹, аспірант

**Аналіз методів машинного навчання для
раннього детектування та прогнозування
епілептичних нападів.**

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4г,
e-mail: gaidar.viktoria@gmail.com

Gaidar V.O. ¹, Postgraduate student

**Machine learning for epilepsy detection and
forecast review: new challenges and
perspectives.**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4g,
e-mail: gaidar.viktoria@gmail.com

Проведено порівняльний аналіз методів машинного навчання для вирішення задачі раннього прогнозування та діагностики епілептичних нападів за допомогою електроенцефалографічних сигналів. Побудована математична модель досліджуваних алгоритмів та наведено кількісні дані для оцінки ефективності методів.

Ключові слова: машинне навчання, епілепсія, електроенцефалографія, передіктальні стани.

The comparative analysis of machine learning methods has performed to solve the problem of early detection and prediction of epileptic seizures using electroencephalographic signals. Recent studies has shown that it is possible to predict seizures in prior of its physical appearance. Our goal is to present and analyse different approaches of seizure prediction techniques, particularly in machine learning and deep learning. Seizure prediction has made important advances over the last decade, nevertheless it is still a problem to provide steady algorithm of seizure early detection. Also, within individual patients exhibit distinctive dynamics, is it crucial to find algorithms providing greater clinical utility. This article focuses of the problem of features development from electroencephalography signals in order to provide the accurate pattern recognition techniques for detection and classification of epilepsy seizures in advance. The mathematical model of the algorithms is constructed and quantitative data presented for estimating the methods efficiency.

Key Words: machine learning, epilepsy, electroencephalogram, preictal seizures.

Статтю представив д.ф.- м.н., проф. Анісімов І.О.

Вступ

Епілепсія – це стан, що характеризується функціональним порушенням роботи головного мозку. Непередбачуваний характер нападів, що є характерним проявом захворювання, становить серйозну загрозу для життя та здоров'я людини. Для більшості випадків причина хвороби невідома, тому задача ранньої діагностики та прогнозування нападів наразі активно вивчається. Ефективним методом графічної реєстрації біоелектричної активності головного мозку, що використовують при дослідженні епілепсії є електроенцефалографія (ЕЕГ). У клінічних дослідженнях використовують багатоканальні (від ста двадцяти шести електродів) відведення та середній час одного

дослідження триває від декількох годин до трьох діб. Відповідно, виникає необхідність в аналізі великих масивів даних у режимі реального часу. З розвитком методів машинного навчання, необхідність оптимізації виділення основних статистичних характеристик ЕЕГ сигналу відіграє вирішальну роль при створенні алгоритмів прогнозування на їх основі. Метою даної роботи є визначення основних підходів та методів, що використовуються для вирішення проблеми класифікації та виділення комплексів пік-хвилі та спайкової активності у передіктальний період. Проаналізувати основні статистичні характеристики ЕЕГ сигналів, що слугують вхідними параметрами до

запропонованих методів машинного навчання та провести оцінку їх ефективності.

Передумови раннього детектування епілептичних нападів

Електроенцефалографія є однією з простих та мобільних методів для виявлення аномалій, які спостерігаються при епілепсії. Цей метод діагностики безпечний і багатофункціональний для вирішення задач розпізнавання, локалізації і виявлення синдрому епілепсії [1]

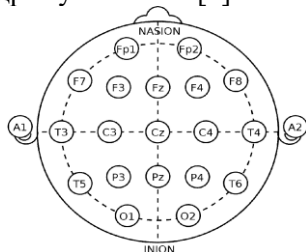


Рис. 1 Стандартна схема підключення електроенцефалографу «10-20 %»

У даній роботі порівнюються підходи машинного навчання до побудови специфічних до пацієнта класифікаторів, які дозволяють передбачити епілептичний напад за допомогою таких методів як згорткові нейронні мережі (ЗНН), байєсівський класифікатор (БК), метод k -найближчих сусідів (k -НС) і метод опорних векторів (МОВ). Розглядаються статистичні особливості, які найкраще вирішують проблему виділення патернів і дають достовірні результати. Поставлено деякі питання, можливості вирішення проблеми прогнозування епілепсії в термінах простої класифікаційної задачі.

На сьогоднішній день було доведено існування перед епілептичних станів, що з'являються напередодні фізичного нападу. Ці стани залежать не тільки від типу епілепсії, а також і від особливостей окремого пацієнта. На даний момент не вирішеною залишається проблема виділення тих компонентів, які могли б описати зміни у передіктальний період як для окремого так і для групи пацієнтів.

Виділення статистичних характеристик

Прогнозування нападів є основною сферою досліджень, які базуються на аналізі особливостей ЕЕГ записів. Проте в даний час не існує надійних алгоритмів прогнозування нападів для клінічних застосувань. Незважаючи на відсутність розуміння механізму іктогенезу епілепсії, дослідження показали існування

патернів, що виникають напередодні судом. Ці клінічні спостереження дають обґрунтування до пошуку специфічних ознак на електроенцефалограмах.

Ранні дослідження [2] намагалися знайти рішення, використовуючи перші кілька періодів ЕЕГ, що передували фізичному нападу. Оскільки, така процедура передбачає, що просторово-часова динаміка не змінюється від захоплення до захоплення, такі алгоритми виявилися ненадійними. Подальші дослідження розробили новий алгоритм, який ітераційно змінює параметри після кожного захоплення.

Одне з перших комплексних досліджень [3] показує, як визначити патерни ЕЕГ для виявлення епілептичних нападів. У цьому дослідженні було побудовано 30 характеристик, включаючи біваріантні і багатоваріантні особливості, а також лінійні та нелінійні параметри. Тут розглянемо лише основні характеристики, що застосовуються при передбаченні. Протягом усього обговорення дотримуються таких позначень: F_k^i – статистична характеристика i -го каналу для пацієнту k .

ЕЕГ дані були записані як стохастична змінна $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, середнє значення як x_c та дисперсію як $Var(x_1, x_2, \dots, x_N)$ відповідно. Середньоквадратичне відхилення визначено як:

$$\sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x_i - x]^2 \quad (1)$$

Асиметрія – це кількісна міра порушення симетрії нормального розподілу. Якщо асиметрія позитивна, дані позитивно відхилені або відхилені вправо. Це означає, що правий хвіст розподілу довший за лівий. Асиметрія обчислюється як

$$skewness = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - x}{\sigma} \right]^3 \quad (2)$$

Висоту і гостроту центрального піку відносно решти даних вимірюють за допомогою коефіцієнту ексцесу:

$$kurtosis = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{x_i - x}{\sigma} \right]^4 - 3, \quad (3)$$

Це означає, що форма графіку розподілу ймовірностей більш гостра за нормальний розподіл, якщо вона має позитивне значення і пологіша, якщо вона має від'ємне значення. Використовують енергію сигналу за заданий період [4]:

$$Energy(t, w) = \frac{1}{w} \sum_{i=t-w}^{t-1} s(i)^2, \quad (4)$$

де $s(i)$ – це амплітуда сигналу у момент часу i , значення сигналу відбираються послідовно, починаючи з початкового моменту часу 1 і закінчуючи в момент часу w . Якщо енергія сигналу усереднена по різному часовому вікні, вона розділена на дві характеристики: короточасну енергію (STE) і довгострокову енергію (LTE). Накопичена енергія (AE) є іншим потужним засобом знаходження аномальної поведінки мозку і визначається як сума послідовних значень енергії сигналу у рухомому вікні [5]. AE виражається як:

$$AE(q) = \sum_{i=1}^{t-q} Energy(t-w). \quad (5)$$

Методи дослідження

Для класифікації записів ЕЕГ в один з чотирьох класів – іктальний, перед-іктальний, міжіктальний, пост-іктальний, було досліджено різні методи. Іктальний період відповідає епілептичній активності. Передіктальний – це період, що настає за декілька хвилин до нападу. Постіктальна активність відповідає за період відразу після судом. Міжіктальним називають період між постіктальними і передіктальними патернами. Існує два загальних підходи в дослідженнях: статистичні та алгоритмічні. Статистичний підхід виділяє різні характеристики сигналу ретроспективно, в той час як алгоритмічний підхід позначає кожен момент часу в наборі даних, тому може бути використаний для систем реального часу. Серед методів машинного навчання для вирішення даної задачі використовують наступні алгоритми: згорткові нейронні мережі (ЗНН), байєсівський класифікатор (БК), метод k -найближчих сусідів (k -НС) і метод опорних векторів (МОВ). Розглядаються лише два з вищезгаданих методів – згорткові нейронні мережі та метод опорних векторів. Їх використовують у мобільних електроенцефалографах.

Для виявлення та прогнозування епілепсії використовуються як методи з учителем, так і без учителя. У випадку навчання з учителем найбільш поширеними техніками, є штучні нейронні мережі (ANN). Вони використовуються для виконання певних конкретних завдань, таких як кластеризація, класифікація, розпізнавання образів [6]. Нейронна мережа складається з декількох шарів, метою яких є вилучення різних

рівнів представлення даних, які є актуальними для конкретної проблеми. Фундаментальним елементом обробки нейронної мережі є нейрон. Існує багато варіацій основного типу нейрона, що ускладнює спроби людини електрично відтворювати процес мислення. Проте всі природні нейрони мають чотири основні компоненти – дендрит, сома, аксон і синапс. Дендрити діють як вхідні канали. Соматим обробляє ці вхідні сигнали протягом деякого часу. Далі сома перетворює отриману величину на вихідний сигнал, який посилюється іншим нейронам через аксон і синапси. Нейрон отримує вхідний сигнал різних джерел, об'єднує їх певним чином, виконує нелінійну операцію, а потім виводить кінцевий результат. На рис.2 показано взаємозв'язок цих чотирьох частин [7].

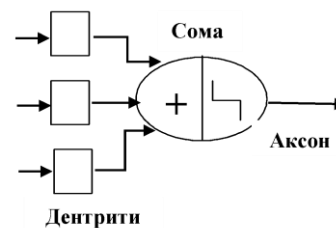


Рис. 2 Схематичне зображення штучного нейрона

Метод опорних векторів – це метод регресійного аналізу даних з керованим навчанням. Основною задачею є створення алгоритму класифікації даних за допомогою навчальної вибірки, яка вже має поділ на класи. Він використовується для класифікації нових значень. Алгоритм має два основні етапи: відображення даних у простір ознак, за допомогою ядра методу та побудова розділової гіперплощини.

Добірка даних за допомогою нелінійного відображення «переноситься» у простір з більшою розмірністю, що називається простором ознак. Ядро це функція $K(x,y)$, що відображає вибірку даних у множину дійсних чисел R . Існує багато видів ядер, які застосовуються на практиці: поліноміальне [8], гауссове, експотенціальне. Для побудови розділової гіперплощини необхідно враховувати лінійну роздільність набору даних. Для обох випадків є стандартний алгоритм визначення розділової гіперплощини. $Y [-1;1]$ вказує на клас до якого належить точка x_i , що є r -вимірним вектором у просторі ознак. Необхідно знайти таку гіперплощину, яка чітко розмежує x_i для яких $y_i=1$ та x_i для яких $y_i=-1$.

Ця гіперплощина максимально рівновіддалена від обох груп даних. Необхідно обрати дві паралельні гіперплощини, які розділяють два класи даних таким чином, щоб відстань між ними була максимальною. Те саме справедливо і для задачі з декількома класами.

Висновки

Аналіз існуючих алгоритмів ранньої діагностики та прогнозування епілептичних нападів показав нові перспективи у створенні експертних систем. Методи головних компонент та опорних векторів є ефективними для визначення статистичних властивостей сигналу, що відповідають передіктальним станам. До таких властивостей належать середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії та параметри вейвлет-перетворення п'ятого порядку. Побудова

штучних нейронних мереж для моделювання динаміки інтракраніальних ЕЕГ сигналів показала можливість виділення патернів епілептичних нападів напередодні їх фізичного прояву. Однак створення мобільних систем передбачає аналіз даних у режимі реального часу. Тому, побудова таких систем потребує вивчення не лише специфічних статистичних характеристик, але і їхньої фізичної природи. Базуючись на проведених дослідженнях, необхідно враховувати фізичні особливості та залучати додаткові фізіологічні параметри, які можуть впливати на розвиток та прояв епілептичних станів та нападів.

Список використаних джерел

1. Alomari M. H. Wavelet-based feature extraction/ Awada, E. A., Samaha, A. - *Electroencephalography and clinical neurophysiology*. – 1975. – P. 435-436
2. Moghim N. Predicting epileptic seizures in advance/ Negin W., PloS one. – 2014.
3. Aschenbrenner-Scheibe R. How well can epileptic seizures be predicted?/ Maiwald, T., Winterhalder, M – *Brain*. – 2003. – 3. 2616-2626
4. Harrison M. A. Accumulated energy revisited/ Mark G. Frei, Ivan Osorio - *Clinical Neurophysiology*. – 2005. – P. 527-531
5. Iasemidis L. D. Long-term prospective on-line real-time seizure prediction/ Shiau, D. S., Pardalos, P. M. – *Clinical Neurophysiology*. – 2015.
6. Viglione S.S. Epileptic seizure prediction/Walsh G.O. – *Electroencephalography and clinical neurophysiology*. – 1975
7. Rogowski Z. On the prediction of epileptic seizures/ Gath I., Bental E. – *Biological cybernetics*. – 1981 – P. 9-15
8. Frestone D.R. A forward-looking review of seizure prediction/ Karoly P.J., Cook M.J – *Current opinion in neurology*. – 2017 – P. 167-173

References

1. ALOMARI, M.H., AWADA E.A., SAMAHA A. (1975) Wavelet-based feature extraction. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*. pp. 435-436
2. MOGHIM N., NEGIN W. (2014) Predicting epileptic seizures in advance. *PloS one*.
3. ASCHENBRENNER-SCHEIBE R., MAIWALD T., WINTERHALDER M. (2003) How well can epileptic seizures be predicted. *Brain*. pp. 2616-2626
4. HARRISON M. A., MARK G. FREI, OSORIO I. (2005) Accumulated energy revisited. *Clinical Neurophysiology*. pp. 527-531
5. IASEMIDIS L.D., SHIAU D.S, ARDALOS P.M. (2015) Long-term prospective on-line real-time seizure prediction. *Clinical Neurophysiology*.. pp. 527-531
6. VIGLIONE S.S., WALSH G.O. (1975) Epileptic seizure prediction. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*.
7. ROGOWSKI Z., GATH I., BENTAL E. (1981) On the prediction of epileptic seizures. *Biological cybernetics*. pp. 9-15
8. FRESTON D.R., KAROLY P.J. (2017) A forward-looking review of seizure prediction. *Current opinion in neurology*. pp. 167-173

Надійшла до редколегії 20.11.2018

СУЧАСНА ФІЗИКА

УДК 551.571

Британ А. В.¹, к.ф.-м.н.,
Іванов Б. О.², к.т.н.,
Осіс В. Б.³, н.с.

**Автоматизована інформаційно-
вимірвальна система моніторингу
характеристик атмосферного озону**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка,
01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13,
^{2,3}УкрГМІ ДСНС та НАН України,
03028, м. Київ, просп. Науки, 37
e-mail: ¹a_britan@ukr.net
²ivanov@uhmi.org.ua
³boriva@ukr.net

A. V. Brytan¹, PhD of Physics,
B. A. Ivanov², PhD of Technical Sciences,
V. B. Osis³, Sc. Researcher.

**Automated information measuring system for
monitoring characteristics of atmospheric ozone**

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
64/13, Volodymyrska Street, Kyiv, 01601
^{2,3}UkrHMI DSNS and NAS of Ukraine,
37, ave. Science, Kyiv, 03028
e-mail: ¹a_britan@ukr.net
²ivanov@uhmi.org.ua
³boriva@ukr.net

Наведено структурну схему автоматизованої інформаційно – вимірвальної системи моніторингу характеристик атмосферного озону, призначення та взаємодія основних вузлів системи. Розглянуто програмне забезпечення керування системою. Надано результати визначення загального вмісту озону (ЗВО), які отримані порівнянням одночасних даних, що визначені оператором вручну та за допомогою макету інформаційно–вимірвальної системи, при цьому відносна похибка розбіжності вимірів не перевищувала 4,3 %. Результати вимірювань із автоматичним осередненням значень, які отримані протягом доби, показали, що немає необхідності вибирати вікна безхмарного або однорідного неба. Розробку можна рекомендувати для використання за основу для створення сучасної автоматизованої інформаційно – вимірвальної системи моніторингу характеристик атмосферного озону.

Ключові слова: структурна схема, загальний вміст озону, програмне забезпечення, порівняння даних, макет інформаційно–вимірвальної системи.

The structural diagram of an automated information and measurement system for monitoring the characteristics of atmospheric ozone, the purpose and interaction of the main components of the system are presented. System management software is considered. The results of determination of the total ozone content (TOC), which were obtained by comparing simultaneous data, determined manually by the operator and using the layout of the information-measuring system, with a relative error of measurement difference did not exceed 4.3%. The results of measurements with automatic averaging of the values obtained during the day showed that there was no need to choose windows of cloudless or homogeneous sky. The development can be recommended for use as a basis for the creation of a modern automated information and measurement system for monitoring the characteristics of atmospheric ozone.

Key Words: block diagram, the total ozone content, software, comparison of the data, layout information measuring system.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Автоматизована інформаційно –
вимірвальна система (ІМС) моніторингу
характеристик атмосферного озону повинна
забезпечувати можливість автоматизованого
вимірювання характеристик атмосферного озону,
обробку та архівацію даних.

ІМС (рис. 1) містить основні вузли, принципи
роботи яких наведено нижче.

- Блок термодатчика виконує функцію визначення температури в термостаті. Аналоговий сигнал від блоку термодатчика, пропорційний температурі в термостаті, надходить на аналого–цифровий перетворювач (АЦП) блоку керування, який перетворює аналоговий сигнал у цифровий код.

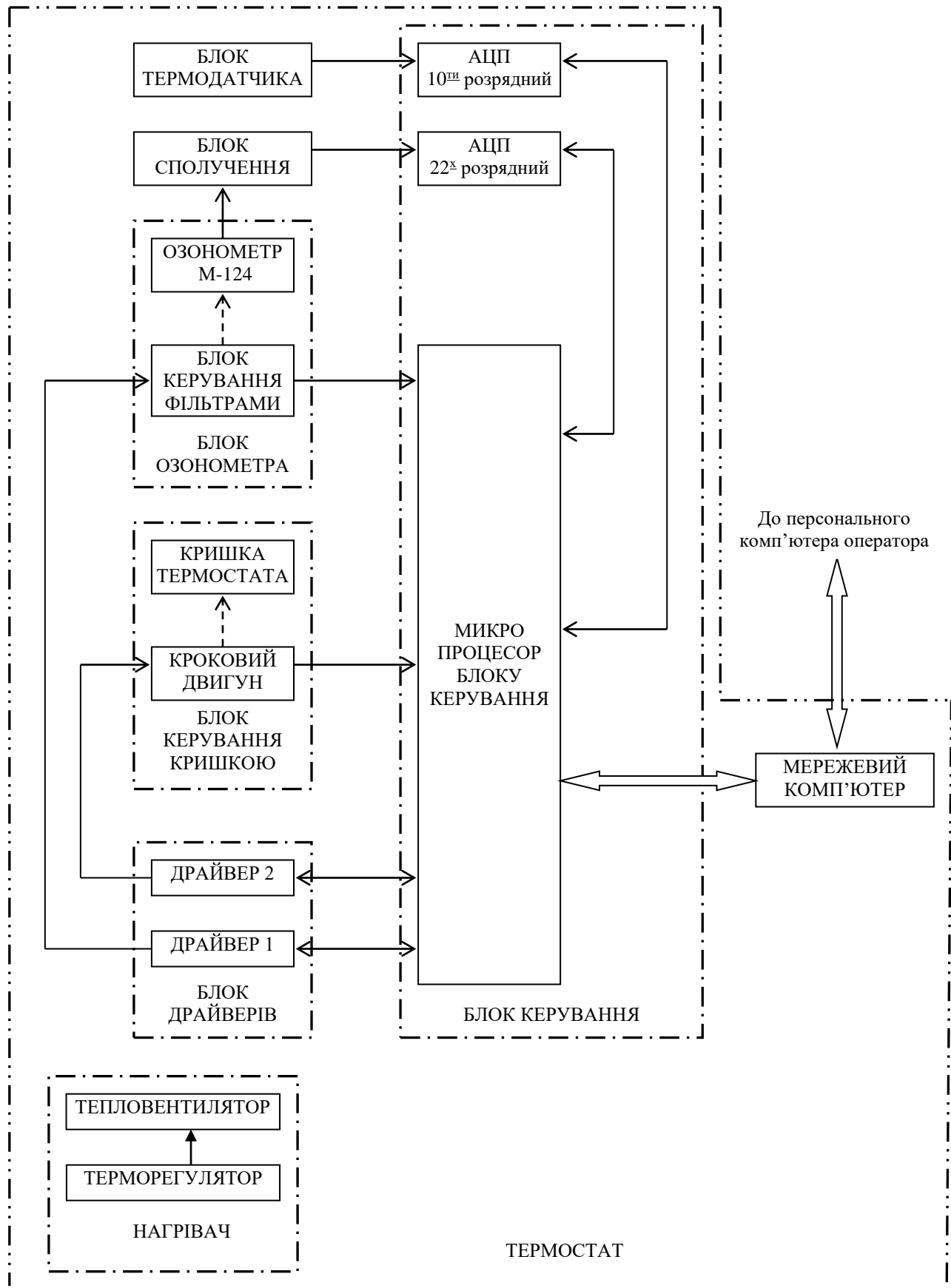


Рис. 1. Структурна схема системи

Роботою АЦП управляє мікропроцесор блоку керування по заданій програмі. Мікропроцесор запускає АЦП, знімає код сигналу температури та передає його до комп'ютеру (ПК). ПК обробляє отриману інформацію й формує файл температури, що надалі використовується для розрахунків змісту озону в атмосфері.

- Блок сполучення виконує функцію сполучення озонметра М-124 з інформаційно-вимірювальною системою.

Потік випромінювання світла, що надходить на фотоелемент озонметра М-124 з фільтруючої системи, перетворюється ним в електричні сигнали, які являють собою:

- сигнал темного струму (немає потоку випромінювання світла);

- сигнал 300 нм (потік випромінювання світла, що пройшов крізь фільтр із довжиною хвилі 300 нм);

- сигнал 326 нм (потік випромінювання світла, що пройшов крізь фільтр із довжиною хвилі 326 нм).

Сигнал з фотоелемента одночасно подається на підсилювач озонметра та підсилювач сигналу 1 блока сполучення. Підсилювач озонметра виконує підсилювання сигналу до рівня, необхідного для роботи реєструючого пристрою озонметра, а також подає цей сигнал на підсилювач сигналу 2 блока сполучення.

Блок сполучення має можливість роботи у двох режимах:

- у режимі підсилювання сигналів із фотоелемента (використовується підсилювач сигналу 1);

- у режимі підсилювання сигналів із виходу підсилювача озонметра (використовується підсилювач сигналу 2).

Підсилювач сигналу 1 та підсилювач сигналу 2 виконують функції сполучення з озонметром М-124 і підсилення сигналів, які надходять від озонметра. Комутатор блока сполучення використовується для вибору режиму роботи (підсилювач сигналу 1 або підсилювач сигналу 2). Сигнал з комутатора надходить на останній підсилювач блоку сполучення, який виконує функцію підсилення сигналу до рівня, необхідного для нормальної роботи АЦП.

АЦП перетворює аналоговий сигнал з блока сполучення у цифровий вигляд і передає отримані дані до комп'ютеру. Керування роботою АЦП здійснює блок керування. Блок керування виконує також управління роботою АЦП, забезпечує обмін інформації з

комп'ютером, який, у свою чергу, виконує функцію отримання даних від АЦП, їхню обробку, зберігання та архівацію.

- Блок озонметра містить наступні основні вузли: озонметр М-124 та систему автоматичного перемикавання фільтрів, до якої входять кроковий двигун, редуктор, диск і оптопара.

Цикл вимірювання (близько 3 хвилин) виконується заданою програмою в автоматичному режимі від ПК. Після запуску програми блок керування формує необхідне число імпульсів, які надходять на блок драйверів.

Блок керування кришкою (БКК) містить систему автоматичного управління кришкою термостата, в яку входять кроковий двигун, редуктор, диск та оптопара.

- Блок драйверів складається із двох ідентичних драйверів, які виконують функцію управління кроковими двигунами блоку озонметра (драйвер 1) і блоку керування кришкою (драйвер 2).

- Блок керування повинен виконувати такі основні функції:

- 1) вимірювання 3 сигналів, що надходять з виходу блоку сполучення:

- сигнал темного струму (немає потоку випромінювання світла);

- сигнал 300 нм (потік випромінювання світла, що пройшов крізь фільтр із довжиною хвилі 300 нм);

- сигнал 326 нм (потік випромінювання світла, що пройшов крізь фільтр із довжиною хвилі 326 нм);

- 2) управління блоком керування фільтрами (перемикавання фільтрів) блоку озонметра;

- 3) управління кроковим двигуном блоку керування кришкою (відкривання та закривання прийомного вікна озонметра на час вимірювання характеристик атмосферного озону);

- 4) вимірювання сигналу з виходу блоку термодатчика (температура в термостаті);

- 5) попередня обробка отриманої інформації та передача її до комп'ютеру;

- 6) забезпечення взаємодії програмного забезпечення мікропроцесора БК із програмним забезпеченням мережевого комп'ютера.

На структурній схемі наведені всі зв'язки взаємодії БК із елементами автоматизованої інформаційно-вимірювальної системи, які забезпечують виконання вказаних вище функцій блоку керування.

БК містить такі основні елементи:

– 22^х розрядний аналого-цифровий перетворювач (вимірювання величини сигналів, що надходять з виходу блоку сполучення);

– 10^м розрядний аналого-цифровий перетворювач (вимірювання сигналу з виходу блоку термодатчика);

– мікропроцесор блоку керування (забезпечує керування роботою БК та всієї системи в цілому).

- Мережевий комп'ютер виконує функцію керування роботою системи та забезпечує передачу інформації споживачам.

- Термостат із нагрівачем слугує для підтримки температури у певному діапазоні при зміні температури зовнішнього повітря. Терморегулятор виконує функцію керування тепловентилятором (включає тепловентилятор на нижній границі діапазону температури та виключає нагрівання при досягненні верхньої межі діапазону).

Розроблено програмне забезпечення. Для гнучкого налаштування та керування системою було розроблено внутрішню мову команд. Послідовність команд вводиться одним рядком у вікно інтерфейсу.

Керування роботою системи здійснюється з інтерфейсу “ВИМІРЮВАЧ ЗАГАЛЬНОГО ВМІСТУ ОЗОНУ”, приклад якого наведено на рис. 2.



Рис. 2. Вигляд інтерфейсу керування системою.

Виконується вибір порту для керування через USB зв'язок “COMx” залежно від того, як блок керування визначений у WINDOWS системі ПК (у цьому випадку “COM4”). Відкривається порт кнопкою “Open Port”. Здійснюється введення коефіцієнтів корекції вимірювальних каналів кнопкою “Запис” (при першому натисканні кнопки коефіцієнти з'являються у рядку керування, при другому - заносяться у блок керування вимірювачем озону. Обирається режим уведення команд натискаючи кнопку “Ком232”. Кнопкою “Автомат” вибирається режим керування “Одиночний”. Для керування

комутацією натискається кнопка “Управл. ком” і переходимо в режим “On com”. Кнопкою “Азимут” видаляється вміст рядка керування. Вводяться необхідні команди з файлу “Ozon com.txt”, для чого копіюється обрана команда з файлу в рядок керування. Для виконання команди натискається кнопка “Send”, при цьому рядок керування автоматично зчитується в БК і команда циклічно виконується.

Наприклад, за командою “Хмарність інтенсивність” у програмне забезпечення вводиться коефіцієнт інтенсивності хмарності від 1 до 4 (у цьому випадку 1), що використовується при розрахунках загального вмісту озону. Введення коефіцієнта виконується натисканням кнопки “Коef=”. За командою “d0150eFXbd0333ур В” фільтри періодично переводяться у три положення (фільтр 1, фільтр 2, корекція нуля).

Набір можливих команд керування кроковими двигунами, їхніми режимами та комутацією каналів вимірювання розроблено для двох видів зв'язку USB та RS232.

За розробленою робочою конструкторською документацією автоматизованої інформаційно-вимірювальної системи моніторингу характеристик атмосферного озону М39.00.00.00 виготовлено діючий макет системи.

Для перевірки роботи діючого макету інформаційно-вимірювальної системи він був встановлений на даху УкрГМІ. Перевірку виконано порівнянням одночасних даних ЗВО, які визначені оператором за допомогою озонметра М-124 (вимірювання вручну – ЗВО₂), за даними, які визначені за допомогою макету інформаційно-вимірювальної системи (автоматизовані вимірювання – ЗВО₁).

Результати, які отримані за допомогою макету системи, наведені у таблиці 1.

Розрахунок ЗВО автоматично у реальному часі виконується на ПК за моделлю [1], що враховує висоту Сонця, температуру і хмарність.

На рис. 3 для прикладу наведено графік ходу ЗВО протягом доби за даними табл. 1, які було отримано 23.02.2017 р. На основі даних табл. 1 розраховано середнє арифметичне за формулою [2]:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad (1)$$

де: \bar{X} – середнє арифметичне значення вимірюваної величини; X_i – отримані значення вимірювань.

Таблиця 1

Результати автоматизованих
вимірювань ЗВО

Час, год:хв	Загальний вміст озону по даних вимірювання, відн.од.														
	01.02.2017	02.02.2017	10.02.2017	12.02.2017	14.02.2017	19.02.2017	20.02.2017	22.01.2017	23.02.2017	28.02.2017	01.03.2017	29.03.2017	04.04.2017	19.04.2017	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
10:00	192	237	218	222	294	134	241	295	236	212	363	286	346	360	
10:04	230	238	192	239	287	333	234	287	244	202	355	306	373	353	
10:08	224	251	205	291	293	326	227	280	244	203	279	362	344	340	
10:12	265	226	247	260	263	340	228	132	252	212	316	358	331	345	
10:16	228	278	262	300	233	342	235	323	252	169	311	276	352	333	
10:20	257	258	242	298	272	332	221	140	252	204	285	309	341	316	
10:24	264	275	254	246	275	359	241	293	260	220	298	324	321	334	
10:28	206	292	309	288	315	331	232	302	260	188	273	320	336	303	
10:32	252	308	286	316	269	317	218	334	260	210	277	304	316	320	
10:36	289	301	291	326	324	309	235	275	267	174	272	296	308	303	
10:40	289	285	316	330	275	328	234	221	267	246	222	280	325	288	
10:44	252	268	311	288	244	322	228	183	267	257	230	289	305	306	
10:48	293	300	324	340	281	321	227	298	267	242	232	287	291	281	
10:52	200	315	302	315	274	299	233	221	274	253	223	265	304	288	
10:56	299	278	341	328	255	313	220	390	274	245	243	271	284	271	
11:00	285	291	320	316	226	314	229	268	274	202	221	265	306	287	
11:04	293	281	312	327	256	328	213	218	274	218	231	269	285	278	
11:08	299	259	288	301	347	317	216	363	282	219	230	245	279	262	
11:12	305	274	322	338	275	301	217	340	282	184	219	261	287	277	
11:16	197	279	344	252	276	299	216	363	282	237	234	296	269	251	
11:20	211	271	317	301	302	304	209	141	282	235	211	232	281	267	
11:24	311	263	331	332	280	314	213	303	282	211	200	262	268	243	
11:28	258	258	333	286	208	317	203	336	282	194	212	243	261	254	
11:32	239	295	310	310	244	311	207	173	288	192	194	256	269	232	
11:36	229	280	300	293	269	307	204	101	288	175	181	220	256	249	
11:40	240	279	293	316	283	286	209	379	288	186	209	243	264	229	
11:44	281	301	278	333	326	295	204	399	288	186	190	231	264	245	
11:48	293	266	307	317	268	292	204	354	288	177	194	225	259	232	
11:52	217	276	334	313	231	295	202	236	288	139	176	347	246	240	
11:56	235	266	288	331	292	297	203	255	288	193	216	216	246	232	
12:00	252	286	307	309	292	309	201	111	288	207	203	197	252	234	
12:04	223	238	329	277	336	294	207	262	289	227	206	210	237	215	
12:08	267	273	352	346	259	291	193	259	288	116	196	250	248	230	
12:12	264	284	352	276	302	328	194	357	288	110	200	237	235	224	
12:16	297	302	287	277	206	293	194	315	288	113	184	226	244	220	
12:20	301	258	272	270	324	261	193	79	288	124	205	210	240	221	
12:24	296	264	277	296	293	272	193	243	288	229	196	245	234	225	
12:28	259	285	286	348	293	274	194	434	288	209	193	245	240	214	
12:32	299	284	307	303	271	275	198	381	288	188	193	215	228	222	
12:36	274	265	298	291	275	249	199	118	288	162	201	212	236	220	
12:40	285	289	296	293	275	264	197	109	288	162	192	229	225	211	
12:44	319	323	295	305	260	264	202	212	288	164	209	236	231	207	
12:48	218	323	294	271	182	257	199	204	288	230	205	218	233	208	
12:52	218	290	295	298	146	261	204	248	288	134	203	216	227	213	
12:56	229	288	354	322	254	250	193	178	282	168	193	206	235	204	
13:00	245	266	340	239	253	277	193	159	282	164	198	202	229	204	
13:04	250	275	333	270	269	278	204	100	282	163	188	205	235	208	
13:08	319	252	296	274	271	287	195	153	282	171	205	211	234	204	
13:12	308	266	294	276	246	238	207	153	282	174	193	210	196	209	
13:16	304	287	319	305	307	238	208	122	282	174	203	207	196	224	
13:20	276	258	333	307	298	216	196	237	274	156	195	203	290	205	
13:24	278	254	341	321	341	246	208	237	274	154	205	203	209	211	
13:28	228	303	330	282	250	216	198	237	274	176	201	225	209	210	
13:32	217	278	331	353	250	208	216	360	274	178	215	219	218	203	
13:36	214	278	331	283	319	270	215	363	274	189	215	206	391	221	
13:40	222	320	322	301	263	295	198	363	267	189	229	223	406	209	
13:44	292	303	329	292	301	228	198	368	267	203	209	212	270	209	
13:48	266	272	300	289	296	249	205	240	267	203	181	214	258	217	
13:52	226	301	319	314	270	215	205	261	260	276	213	233	198	218	
13:56	270	305	272	332	253	238	216	220	260	163	227	270	321	218	
14:00	212	266	272	332	183	221	204	260	260	193	196	254	389	234	
14:04	221	291	300	332	176	236	228	232	252	193	233	201	389	234	
14:08	221	269	307	335	298	224	220	174	252	225	202	286	208	235	
14:12	253	255	267	309	312	243	206	177	252	222	202	226	199	235	
14:16	172	255	256	309	312	227	222	221	244	157	217	130	135	225	
14:20	207	274	265	302	279	227	208	292	244	315	209	229	134	241	
14:24	231	250	264	302	192	246	208	282	244	334	239	242	239	243	
14:28	232	250	247	302	189	228	229	206	236	324	218	296	247	235	
14:32	163	235	247	303	248	256	211	151	256	223	243	333	247	254	
14:36	202	229	194	237	202	242	211	130	236	259	215	288	246	251	
14:40	145	173	230	237	134	277	217	154	227	174	235	304	277	244	
14:44	153	203	230	204	177	239	208	145	227	174	239	344	292	288	
14:48	152	158	190	204	115	226	232	292	218	200	232	363	287	288	
14:52	152	165	194	232	130	231	235	68	218	210	225	399	280	254	
14:56	152	157	111	181	130	273	210	279	209	202	238	400	328	300	
15:00	152	157	104	181	106	274	201	279	209	301	238	267	328	300	

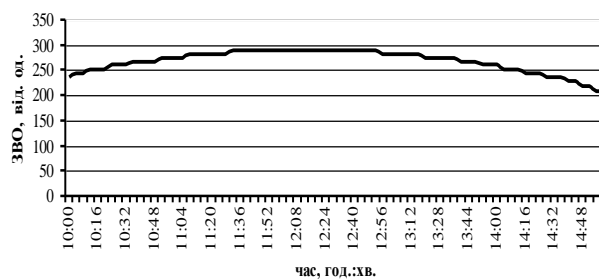


Рис. 3. Добовий хід ЗВО, що визначено автоматизованою системою.

Результати розрахунку (середньодобовий загальний вміст озону ЗВО_{сi}) занесені у перший стовпчик таблиці 2. Дані вимірювання середньодобового ЗВО, що визначені оператором вручну (ЗВО_{вi}) та за допомогою макету інформаційно-вимірювальної системи (ЗВО_{сi}), для порівняння занесено у таблицю 2.

Таблиця 2

Результати одночасних вимірювань ЗВО

Розрахунок відхилення ЗВО, що визначено автоматично (ЗВО _{сi}) та вручну (ЗВО _{вi})				Розрахунок відхилення ЗВО _{сi}				Розрахунок відхилення ЗВО _{вi}		
Середньодобовий ЗВО				Δ^2	ЗВО _{сi} , відн. од.	Δ -ЗВО _{сi} , ЗВО _{сi} ер	Δ^2	ЗВО _{вi} , Доб	Δ -ЗВО _{вi} , ЗВО _{вi} ер	Δ^2
ЗВО _{сi} , відн. од.	ЗВО _{вi} , Доб.	ЗВО _{сi} , Доб	Δ -ЗВО _{сi} , ЗВО _{сi}							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
245	339	324	14,6	213,9	245	-8,6	74,27	324	-26	676
267	369	331	37,7	1422	267	13,2	173,8	331	-19	361
287	397	365	31,7	1003	287	33,4	1118	365	15	225
293	404	368	36,5	1330	293	39,1	1528	368	18	324
257	355	347	8,48	71,86	258	3,59	12,90	347	-3	9
279	385	351	34,4	1182	279	25,3	638,2	351	1	1
211	292	301	-9,4	88,75	211	-43	1824	301	-49	2401
245	338	375	-37	1351	245	-8,9	79,11	375	25	625
267	369	381	-12	148,7	267	13,3	175,5	381	31	961
199	275	308	-33	1075	199	-55	2977	308	-42	1764
223	307	324	-17	273,9	223	-31	974,1	324	-2	

Визначено значення перевідного множника $K=350/254=1,38$ та розраховано приведені значення середньодобового ЗВО, що визначені автоматизованою системою (ZVO_{1i}). Результати розрахунків занесені у табл. 2.

На рис. 4 наведено графіки зміни середньодобового ЗВО за датами вимірювань, які визначені діючим макетом автоматизованої інформаційно-вимірювальної системи (крива 1 – ZVO_{1i}) та оператором вручну (крива 2 – ZVO_{2i}).

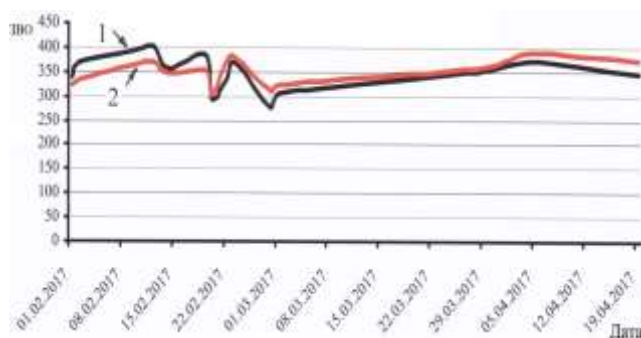


Рис. 4. Середньодобове ЗВО, що визначено автоматизованою системою (1) та оператором вручну (2).

За даними табл. 2 розраховано середнє квадратичне відхилення та відносна похибка вимірювань за формулами [2] (результати розрахунку занесено у табл. 2):

$$\delta = \frac{1}{\bar{X}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{n(n-1)}}, \quad (2)$$

$$\gamma = \frac{t}{\bar{X}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - X_i)^2}{n(n-1)}} \cdot 100,$$

де: \bar{X} – середнє арифметичне значення вимірюваної величини; X_i – отримані значення вимірювань; $n = 14$ – кількість вимірювань; $t = 2,1$ - коефіцієнт Стюдента при $P = 0,95$ і $n = 14$; δ – середнє квадратичне відхилення; γ – відносна похибка вимірювань.

За розрахунками встановлено, що відносна похибка розбіжності вимірів середньодобового ЗВО не перевищує: автоматизованою системою – 6,1 %, оператором вручну – 4,6 % та двома методами (вручну та автоматизований) – 4,3 %.

Висновки

За розробленою робочою конструкторською документацією автоматизованої інформаційно-вимірювальної системи моніторингу характеристик атмосферного озону МЗ9.00.00.00.00 виготовлено діючий макет системи.

Проведено перевірку роботи діючого макету інформаційно-вимірювальної системи порівнянням одночасних даних середньодобового ЗВО, які визначені оператором (вимірювання вручну – ZVO_2), із даними, які отримано за допомогою макету інформаційно-вимірювальної системи (автоматизовані вимірювання – ZVO_1), при цьому відносна похибка розбіжності вимірів не перевищує 4,3 %.

Результати вимірювань із автоматичним осередненням значень, які отримані протягом доби, показали, що немає необхідності вибирати вікна безхмарного або однорідного неба.

Розробку можна рекомендувати як основу для створення сучасної автоматизованої інформаційно – вимірювальної системи моніторингу характеристик атмосферного озону.

Список використаних джерел

1. Савенець М.В. Перехід від номограми до аналітичного розрахунку загального вмісту озону, вимірюного приладом М-124 // Наукові праці УкрНДГМІ. – 2014. – Вип. 266. – С. 94-98.
2. Бурдун Г.Д Основы метрологии / Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков. – М.: Изд-во стандартов, 1975. – С. 336

References

1. SAVENETS, M.V. (2014) *Crossing of nomograms to an analitic rosette of the igneous ozone, vimiry appendix M-124* Scientific works of UkrNDGMI. Vol. 266., p. 94-98.
2. BURDUN, G.D., MARKOV., B.N. (1975) *Fundamentals of Metrology*. М., Standart Publishing, p. 336.

Надійшла до редколегії 04.10.18

УДК 532.5.

Дацюк В. В.¹, д.ф.-м.н., проф.,
Павлинюк О. Р.¹, асп.

**Роль поверхневої провідності в
електромеханіці та електрогідродинаміці
діелектричної кулі**

¹Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13
e-mail: o.pavlyniuk@gmail.com

V. V. Datsyuk¹, Dr. Sci., Prof.,
O. R. Pavlyniuk¹, PhD stud.

**The role of surface conductivity in
electromechanics and electrohydrodynamics
of a dielectric drop**

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13
e-mail: o.pavlyniuk@gmail.com

Для моделювання руху мікрочастинок у слабопровідній діелектричній краплині узагальнено діелектричну модель Тейлора, враховуючи поверхневий електричний струм. Визначено розподіл електричного потенціалу всередині та ззовні слабопровідної діелектричної кулі зануреної в слабопровідний діелектрик в електричному полі. У загальноприйнятому визначенні сумарної об'ємної та поверхневої провідності кулі враховано залежність від кутового розподілу зовнішнього електричного поля. Зроблено висновок, що міграція мікрочастинок на поверхні краплини за рахунок електрогідродинамічних (ЕГД) та діелектрофоретичних (ДЕФ) сил суттєво залежить від поверхневих провідностей краплини та окремих мікрочастинок.

Ключові слова: діелектрофорез, електрогідродинаміка, поверхнева провідність.

A new technology of the electric-field manipulation by dielectric particles in dielectric liquids and drops has been developed in the last decades. To simulate electromechanics of microparticles in a weakly-conducting dielectric drop the Taylor's leaky-dielectric model is extended. To achieve this electric-potential distribution inside and outside a weakly-conducting dielectric sphere embedded in a weakly-conducting dielectric in an electric field is determined taking into account the interfacial current. The conventional definition of the total, bulk plus surface, conductance of the sphere is detailed allowing for its dependence on the angular distribution of the external electric field. Technology of microparticles moving over the interface of the drop is based on the application of electrohydrodynamic (EHD) drag and dielectrophoretic (DEP) forces. The surface conductivities of the drop and individual microparticles can have a significant influence on the surface charge and thereby on the DEP and EHD drag forces. Thus, we show that recent explanation of manipulation by microparticles trapped at the interface of a silicone-oil drop immersed in castor oil is misleading. Taking into account the surface conductivity of the microparticles, we find that EHD drag and DEP forces are of the same direction but not opposite at zero or low frequencies as stated previously. Due to the reversal of the DEP force with the field frequency the motion of microparticles turns back. Surface conductivity of the drop can also explain experiments in which the prolate deformation persists after liquids of the drop and ambient medium are interchanged.

Key Words: dielectrophoresis, electrohydrodynamics, surface conductivity.

Статтю представив академік НАН України, д.ф.-м.н., проф. Булавін Л.А.

Вступ

Численні дослідження електромеханіки мікрочастинок у живих клітинах чи схожих штучних об'єктах формують один із основних напрямів сучасних біологічних наук і технологій [1-3]. Частина цих досліджень зосереджена на маніпулюванні мікрочастинками розподіленими у діелектричній краплині [4-9]. Зокрема, в [6, 7,

9] вивчалось утворення структур з мікрочастинок на поверхні міліметрових краплин. У роботах [4-9] електричне поле використовували як інструмент для переміщення мікрочастинок або рідини у мікролітрових об'ємах.

Існує кілька способів переміщення частинок в рідині. Прикладене електричне поле може зумовити виникнення потоків рідини разом із зануреними частинками. Такі циркуляції рідини є

предметом вивчення електрогідродинаміки, яку заснував Джеффри Тейлор [10], представивши свою діелектричну модель для опису деформації краплин в стаціонарному електричному полі [11]. Важливе узагальнення теорії Тейлора на випадок змінного електричного поля проведено в роботі [12]. За допомогою даної теорії можна визначити ЕГД силу тяги. Існує й інший спосіб переміщення частинок завдяки ефекту діелектрофорезу – переміщенню діелектричної частинки в неоднорідному електричному полі [1-3].

У роботах, присвячених даній тематиці, часто нехтують поверхневою провідністю краплини чи мікрочастинок. Лише близько в 10% робіт згадують чи розглядають її, хоча поверхневу провідність κ легко врахувати при визначенні ЕГД і ДЕФ сил. Потрібно лише замінити об'ємну провідність σ кулі радіусу a на [1-3]

$$\zeta = \sigma + \frac{2\kappa}{a}. \quad (1)$$

Дану формулу буде виведено нижче, з особливою увагою на походження сталого множника 2, який у більш загальній теорії повинен бути змінною величиною чи, навіть, оператором.

У даній роботі модель провідної кулі в змінному електричному полі [12] узагальнено, враховуючи струм через поверхню краплини, і у частковому випадку отримано формулу (1). Новизна роботи полягає в ретельному врахуванні поверхневої провідності. Результати експериментів з маніпуляції мікрочастинками на поверхні краплини із силіконової олії [8] знаходять дещо нове пояснення через врахування поверхневої провідності як частинок, так і краплини. Поверхнева провідність також дозволяє пояснити спостереження [13] неочікуваних деформацій краплин, коли зовнішня рідина замінюється рідиною краплини, а рідина краплини змінюється на зовнішню рідину.

Властивості слабо провідної діелектричної кулі

Методи дослідження. В даній роботі ми розв'язуємо задачу електростатики для простої сферичної геометрії, для якої відомий загальний розв'язок рівняння Лапласа. Таким чином, задача зводиться до встановлення і розв'язку системи межових умов. Ми скористаємося звичайними межовими умовами для потенціалу та нормальної складової вектора напруженості електричного поля. Додатково введемо рівняння балансу для

визначення поверхневого заряду. Після визначення розподілу потенціалу електричного поля можна застосувати відомі підходи [8, 10, 12] для обчислення деформації краплини і циркуляції рідини в ній, а також для аналізу руху мікрочастинок на поверхні.

Для обчислення поверхневої сили на поверхні діелектричної кулі [12] використовується тензор напруг Гельмгольца [14]. Зокрема, тангенційна напруга, що зумовлює течію рідини, визначається наступним чином:

$$S_{\theta} = s_p E_2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2)$$

де θ – полярний кут, s_p – поверхневий заряд на полюсі кулі за $\theta = 0$, E_2 – абсолютне значення вектора напруженості електричного поля на внутрішній поверхні.

Розподіл потенціалу електричного поля. Розглянемо провідну сферичну краплину (середовище 2) занурену в провідне середовище 1 в однорідному електричному полі, вектор напруженості якого спрямований вздовж осі z . Суперпозиція зовнішнього поля і поля поляризованої кулі задається потенціалом $V_1 = -Ez + (C_1/r^2) \cos \theta$ за $r \geq a$ та $V_2 = C_2 r \cos \theta$ за $r \leq a$. Для визначення коефіцієнтів C_1 та C_2 використаємо такі межові умови:

$$V_1 = V_2, \text{ за } r = a; \quad (3)$$

$$-K_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} + K_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{s}{\epsilon_0}, \text{ за } r = a; \quad (4)$$

де K_1, K_2 – діелектричні проникності середовища та кулі, відповідно, s – поверхневий заряд.

Використовуючи (3) і (4), знайдемо потенціал зовні та всередині кулі та поверхневий заряд

$$V_1 = -zE + \frac{z}{2K_1 + K_2} \left[(K_2 - K_1)E + \frac{s_p}{\epsilon_0} \right] \left(\frac{a}{r} \right)^3, \quad (5)$$

$$V_2 = \frac{z}{2K_1 + K_2} \left[-3K_1 E + \frac{s_p}{\epsilon_0} \right], \quad s = s_p \cos \theta. \quad (6)$$

Для того визначення s_p додатково до межових умов (3) і (4) розглянемо рівняння балансу заряду на поверхні кулі.

Зміна поверхневого заряду в деякому елементі площі поверхні ($\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0 + d\theta$, $\phi = \phi_0$, $\phi = \phi_0 + d\phi$, де ϕ – азимутальний кут, префікс d позначає нескінченно малий приріст) відбувається завдяки протіканню об'ємного струму вздовж радіус-вектора \mathbf{r} через нього та поверхневим струмам через його межі. Врахування цих струмів дозволяє отримати рівняння балансу поверхневого заряду

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} - \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{\kappa}{a^2} \Delta_{\theta, \phi} V_1, \quad (7)$$

де $\Delta_{\theta,\phi}$ позначає $\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$.

Якщо потенціал зовнішнього поля виразити через сферичні гармоніки $Y_l^m(\theta, \phi)$ порядку l , тоді $\Delta_{\theta,\phi} Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)Y_l^m(\theta, \phi)$, і формула (7) дещо спрощується

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} - \varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial r}. \quad (8)$$

Тут ε_2 – повна провідність кулі

$$\varepsilon_2 = \sigma_2 + (l+1) \frac{\kappa}{a}. \quad (9)$$

Зокрема, формула (1) є частковим випадком (9) для кулі, що перебуває в однорідному електричному полі.

Рівняння (8) разом із умовою $\partial s / \partial t = -i \omega s$ та визначеними у формулах (5), (6) величинами V_1 , V_2 дають наступні вирази для параметрів формули (2):

$$s_p = \frac{3\varepsilon_0(K_1\varepsilon_2 - K_2\sigma_1)E}{\varepsilon_2 + 2\sigma_1 - i\omega\varepsilon_0(K_2 + 2K_1)}; \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{3E\sigma_1[1 - i\omega\tau_1]}{\varepsilon_2 + 2\sigma_1 - i\omega\varepsilon_0(K_2 + 2K_1)}, \quad (11)$$

де $\tau_1 = \sigma_1 / (\varepsilon_0 K_1)$ – час релаксації об'ємного заряду.

В електрокінетиці та електромеханіці частинок [2, 15] ключову роль відіграє фактор Клаузіуса-Моссотті. Цей фактор використовують для визначення напрямку та абсолютної величини ДЕФ сили, що діє на частинку, яка знаходиться на поверхні кулі. Величина і напрямок цієї сили залежать від добутку $\beta(2 + \beta)\beta'$ [8, 9], де β і β' – дійсні частини фактора Клаузіуса-Моссотті краплини і частинки в оточуючій рідині, відповідно.

Запропонована вище модель провідної кулі дає таку формулу для фактора Клаузіуса-Моссотті:

$$f_{CM} = \Theta \tilde{\beta}_{id} + (1 - \Theta) \beta_{pd}, \quad (12)$$

де $\Theta = [1 - i\omega \tilde{\tau}_{MW}]^{-1}$, $\tilde{\tau}_{MW} = \varepsilon_0(K_2 + 2K_1) / (\varepsilon_2 + 2\sigma_1)$ – модифікований час релаксації Максвелла-Вагнера, в означенні якого замість σ_2 підставлено ε_2 , $\tilde{\beta}_{id} = (\varepsilon_2 - \sigma_1) / (\varepsilon_2 + 2\sigma_1)$ – фактор Клаузіуса-Моссотті провідної кулі з ε_2 , використаним замість σ_2 , і $\beta_{pd} = (K_2 - K_1) / (K_2 + 2K_1)$ – фактор Клаузіуса-Моссотті ідеальної діелектричної кулі. Отримана формула (12) показує, що фактор Клаузіуса-Моссотті провідної діелектричної кулі змінюється в межах між двома граничними значеннями, $\tilde{\beta}_{id}$ та β_{pd} . Параметр $\tilde{\tau}_{MW}^{-1}$ називається частотою перегину і визначає частоту переходу від одного граничного випадку до іншого. З рівнянь (10)-(12) можна отримати результати

наведені в [12], якщо не врахувати поверхневу провідність, тобто $\kappa = 0$. Якщо, окрім цього, покласти $\omega = 0$, то отримаємо початкову діелектричну модель Тейлора [10].

Варто відзначити що у більшості попередніх досліджень, за винятком декількох робіт [16-19], параметр κ формули (1) взагалі не згадується. Проте цим параметром не можна знехтувати, якщо а) радіус a кулі малий у порівнянні з характеристичною довжиною $a_1 = 2\kappa / \sigma_1$, б) куля має високо провідний шар чи в) зроблена із гарного ізолятора з $\sigma_2 \approx 0$, г) куля знаходиться в неоднорідному полі з $l^2 \gg a / a_1$. Використовуючи опубліковані в роботі [20] дані, величину a_1 можна визначити для деяких твердих речовин (боросилікатного скла та чистого кварцу) у різних рідинах (дистильованій воді, водних розчинах HCl та NaCl, метанолі та ацетонітрилі). Більшість значень потрапляють в діапазон від 26 до 52 мкм. Згідно із проведеними у роботі [16] чотирма вимірюваннями, a_1 приблизно дорівнює 6 і 9 мкм для двох полістиролових куль з діаметрами приблизно 6 і 9 мкм занурених у воду. Наведені дані означають, що діелектрична модель Тейлора незастосовна для мікрогідродинаміки, оскільки ніяк не враховує поверхневу провідність, яка на макрорівні стає дуже важливою. Значення поверхневої провідності розглянуто нижче.

Граничне наближення поверхневого провідника. Якщо припустити, що виконуються наступні нерівності $2\kappa / a \gg \sigma_2$ і $2\kappa / a \gg \sigma_1$, то величинами σ_1 і σ_2 можна знехтувати в (10) і (12). Таким чином, отримаємо

$$s_p = \frac{3\varepsilon_0 K_1 E}{1 + \mathcal{G}}, \quad f_{CM} = \frac{1 + \mathcal{G} \beta_{pd}}{1 + \mathcal{G}}. \quad (13)$$

Де $\mathcal{G} = -i\omega \varepsilon_0 (K_2 + 2K_1) a / 2\kappa$. Властивості поверхнево-провідної кулі змінюються в широкому діапазоні. За $|\mathcal{G}| \gg 1$ отримаємо

$$s_p \approx 0 \quad \text{та} \quad f_{CM} = \beta_{pd}, \quad (14)$$

що характерно для кулі з властивостями ідеального ізолятора. У випадку ж $|\mathcal{G}| \ll 1$ отримаємо потенціал та інші характеристики ідеально провідної кулі:

$$s_p = 3\varepsilon_0 K_1 E \quad \text{та} \quad f_{CM} = \beta_{pc} = 1. \quad (15)$$

Обидві моделі, як ідеального діелектрика, так і ідеального провідника, передбачають відсутність ЕГД течії, тобто тангенційна напруга S_θ пропорційна добутку $s_p E_2$ стає рівна нулю. У

наближенні ідеального діелектрика $S_\theta = 0$ тому, що $s_p = 0$ при $E_2 \neq 0$. У випадку наближення ідеального провідника навпаки $s_p \neq 0$, але $S_\theta = 0$, оскільки $E_2 = 0$. Наведені теоретичні висновки добре узгоджуються з експериментами [6] і [9], відповідно.

Експериментальні докази поверхневої провідності

ЕГД сила. У роботі [12] було проведено теоретичне і експериментальне дослідження впливу змінного однорідного електричного поля на виникнення деформацій і циркуляції рідини в діелектричній краплині, що була занурена в іншу діелектричну рідину. Отриманий результат показав залежність даних ефектів від коефіцієнтів $q = K_2 / K_1$ і $Z = \sigma_2 / \sigma_1$. Після розрахунку безрозмірної дискримінаційної функції, що визначає тип деформацій краплин, було введено класифікацію систем [12]. У системах класу А, де $q \leq Z$, електрично-індукований потік по обидві сторони межі розділу спрямований від екватора до полюсів. У системах класів В та С, навпаки, потік спрямований від полюсів до екватора. У системах класів А і В краплина стає витягнутим сфероїдом. У системах класу С краплина стає сплющеною при низьких частотах і витягнутою при високих частотах.

Згідно з [12], а також іншими дослідженнями [11], типи деформацій і напрями потоків змінюються на протилежний, якщо рідни поміняти між собою місцями. Наприклад, система з краплиною чистої силіконової олії, зануреної в касторову олію, належить до класу С, при цьому краплина сплющувалася в сталому електричному полі. Система ж, в якій краплина касторової олії занурена в силіконову олію, належить до класу А і розтягується в електричному полі. Однак, в одному з експериментів, як краплина з поліметилфенилсілоксану (ПМФС) у веретенній олії, так і краплина веретенної олії в ПМФС витягуються вздовж напрямку вектора напруженості електричного поля [13].

Переходи систем класу С до класу А спостерігались у низці експериментів [6, 9]. В даній роботі, ми пропонуємо кількісний опис для цих результатів, що ґрунтується на врахуванні поверхневої провідності. Якщо ніякі інші процеси не враховуються, то узагальнення моделі роботи [12] зводиться до перевизначення параметра Z :

$$Z = \frac{a_1}{a} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (16)$$

Значення параметра Z зростає при зростанні κ чи зменшенні a . Як результат, система класу С може перейти до класу В і, потім, до класу А. Це передбачення теорії підтверджується експериментальними спостереженнями морфологічних переходів, коли сплющування змінюється на витягування [6, 9].

У роботі [6] глиняні частинки розчиняли у краплині силіконової олії міліметрового розміру з масовою часткою 1% і ця краплина занурювалася в касторову олію. Стале та низькочастотне електричне поле формували на поверхні краплини ланцюжки з високо провідних глиняних частинок вздовж напрямку вектора E . За достатньо високих напруженості електричного поля і концентрації глиняних частинок спостерігалася зміна деформації краплини від сплюснутої до витягнутої. Водночас, ЕГД потік рідини зупинявся. Як було зауважено в коментарях до рівняння (13), існує два способи пояснити таку поведінку системи. Перший спосіб полягає у використанні моделі ідеального діелектрика, як це і було, фактично, зроблено авторами у роботі [6], які дійшли висновку, що значно підвищена поверхнева провідність повинна зменшити накопичення заряду на краплині і тим самим зупинити ЕГД потік. Проте, такий підхід не дозволяє пояснити спостережувані в іншій роботі [9] витягування і подальший розпад краплини силіконової олії, також покритої високо провідними мікрочастинками.

У роботі [9] також було проведено експерименти з одиничними міліметровими краплинами силіконової олії зануреними в касторову олію в однорідних сталому та змінному електричному полях. Краплини покривалися різними сферичними частинками: покритими сріблом порожнистими скляними мікрокульками із середнім діаметром від 15 до 55 мкм, частинками чистого полістиролу, а також двома видами сульфонованих частинок полістиролу із середнім діаметром 40 мкм. Електропровідності мікрокульок коливалися від 10^{-11} См м⁻¹ для полістиролу до 10^7 См м⁻¹ для срібла. Краплина чистої силіконової олії з $\varepsilon_2 = 2.8$, $\sigma_2 = 5 - 10$ пСм м⁻¹ та $\mu_2 = 50$ мПа с в касторовій олії з $\varepsilon_1 = 4.7$, $\sigma_1 = 50 - 100$ пСм м⁻¹ та $\mu_1 = 700$ мПа с належить до класу С, згідно класифікації [12]. Це означає, що краплина має бути сплюснута в сталому електричному полі та

витагнута в змінному електричному полі при частоті, що перевищує критичне значення. Теорія передбачає, що потік рідини повинен бути спрямований від полюсів до екватора, що узгоджується з експериментом. Дослідниками вказувалось на наявність різних процесів, включаючи деформації краплин, потік рідини, міграцію мікрочастинок на поверхні та формування поверхневих структур. Різкі зміни властивостей краплини спостерігалися у сталому полі, якщо частинки на її поверхні утворювали поздовжні ланцюжки від полюса до полюса. Спостерігалися морфологічний перехід краплини від сплющеного стану до витягнутого та інверсія напрямку руху потоків рідини, що вказує на перехід системи з класу С до класу А. При збільшенні напруженості електричного поля чи концентрації частинок краплина, покрита високо провідними частинками, витягувалася і розривалася, тоді як ЕГД потік рідини зникав. Автори дослідження заключають, що у сталому полі „ланцюжки частинок перерозподіляють вільні заряди на поверхні краплини, доки компонента електричного поля паралельна до поверхні не стане нульовою”. Дане твердження абсолютно узгоджується з нашим наближенням ідеального провідника.

Поверхнева провідність також може змінити знак β чи β' . В такому разі, відповідно змінюється і напрям ДЕФ сили.

ДЕФ сила. Амах разом із співавторами [8] досліджували маніпулювання мікрочастинками на поверхні краплини силіконової олії міліметрового розміру в електричному полі. Вони продемонстрували, що частинки можна сконцентрувати на полюсах чи на екваторі і переміщувати їх від екватора до полюсів або навпаки. В експериментах використовувалися силіконова олія I з $K_2 = 6.85$ і $\sigma_2 = 56$ пСм м⁻¹ та силіконова олія II з $K_2 = 2.75$ і $\sigma_2 = 3.6$ пСм м⁻¹. У якості оточуючої рідини для краплини використовувалася касторова олія з $K_1 = 4.7$ і $\sigma_1 = 32$ пСм м⁻¹. Частинки на поверхні краплини наближено мали сферичну форму. Використовувалось три типи частинок. Частинки вапняно-натрієвого скла з $K_2 = 6.9$ були діаметром від 1 до 3 мкм. Порожністі частинки скла з $K_2 = 1.2$ мали діаметр від 6 до 32 мкм та частинки з полістиролу з $K_2 = 2.0$ діаметром 4 мкм.

В моделі, яка застосовувалась у роботі [8], ДЕФ сила вважалась незалежною від частоти і виражалась через параметр β_{pd} краплини і параметр β'_{pd} мікрочастинок. Для визначення тангенційної напруги, яка зумовлює виникнення течії рідини, яка в свою чергу переміщує частинки, застосовувався підхід описаний в роботі [12]. Зміна напряму швидкості (руху) мікрочастинок, яка спостерігалась під час експериментів, на думку авторів, обумовлена співвідношенням між ЕГД та ДЕФ силами. А саме, передбачалось, що ці сили, які прикладені до порожнистих мікрочастинок скла та полістиролу в сталому електричному полі, були протилежних напрямків, але із сильнішою ЕГД силою. Із збільшенням частоти, тангенційна напруга, швидкість течії, і ЕГД сила зменшуються. Тому при високих частотах електричного поля переважає ДЕФ сила. Згідно [8], швидкість частинок змінює свій напрям на протилежний при критичній частоті, коли ЕГД і ДЕФ сили мають однакові амплітуди, але різні напрямки.

На рис. 1 нормовані ЕГД сили $F_{EHD}(\omega) / F_{EHD}(0) = S_{\theta}(\omega) / S_{\theta}(0)$ порівнюються із нормованими ДЕФ силами [9]

$$\frac{F_{DEP}(\omega)}{|F_{DEP}(0)|} = \frac{\beta(2 + \beta)\beta'}{|\beta_{id}(2 + \beta_{id})\beta'_{id}|}. \quad (17)$$

Даний рисунок виявляє помилку у вище описаній теоретичній моделі [8]. На відміну від припущення зробленого авторами, частотна залежність ДЕФ сил може бути набагато гостріша, ніж частотна залежність ЕГД сили у діапазоні $0 < \omega < 10$ с⁻¹ і $F_{DEP}(\omega)$ може, навіть, змінити знак. Якщо взяти до уваги дану помилку і застосувати діелектричну модель Тейлора, то теоретичний результат не буде узгоджуватися із експериментом. А саме, Амах із співавторами [8] зазначили, що ДЕФ сила і ЕГД сила, що діють на частинки скла у краплині із силіконової олії I та силіконової олії II були завжди напрямлені однаково. Ці експериментальні результати якісно відрізняються від обчислень, представлених на рис. 1(а) і рис. 1(в). Дане протиріччя можна сунути, якщо врахувати поверхневу провідність частинок, радіус яких $a_1 = 20$ мкм. Проте, така поправка обумовлює значні зміни у трактуванні експериментальних результатів. Насправді, згідно з рис. 1(б) і рис. 1(г) ЕГД і ДЕФ сили завжди мають однакові, а не протилежні, напрямки.

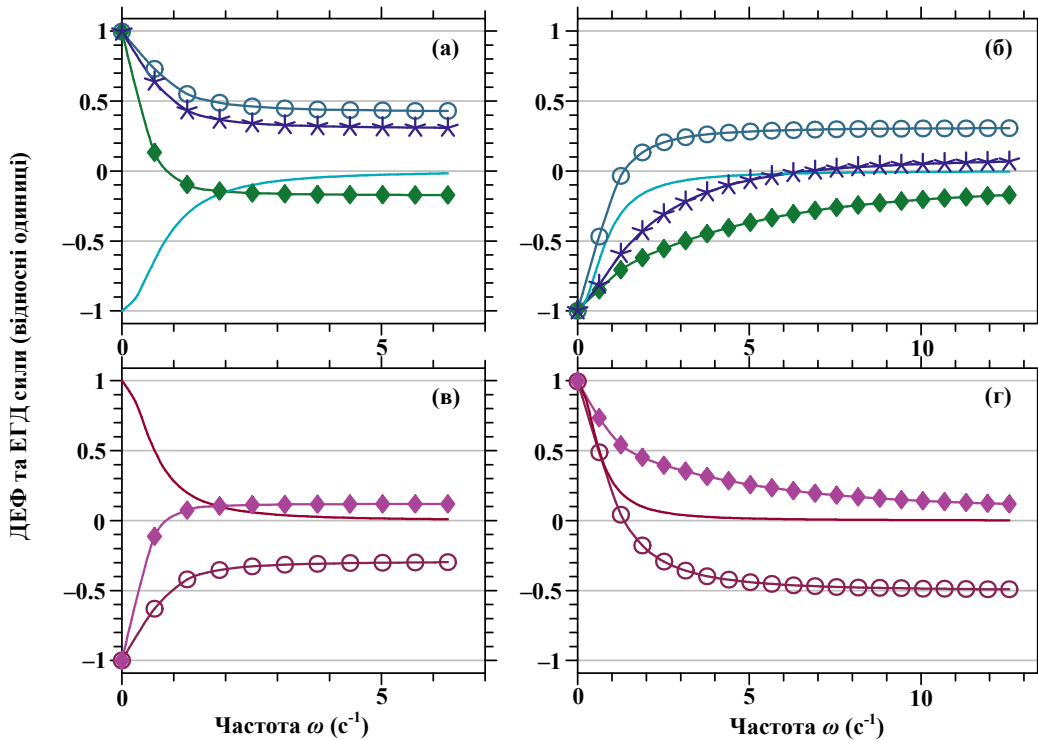


Рис.1. Теоретичні частотні залежності нормованої ЕГД сили (суцільні лінії) і ДЕФ сили, які діють на мікрочастинки вапняно-натрієвого скла (лінії з ромбовидними мітками), порожнисті мікрочастинки скла (лінії із круглими мітками) та мікрочастинки полістиролу (лінії із зірочками) на поверхні краплини із силіконової олії I [рисунок (а) і (б)] чи силіконової олії II [рисунок (в) і (г)] занурених в касторову олію, обчислених нехтуючи [лівій стовпчик: рисунки (а) і (в)] та враховуючи [правий стовпчик: рисунки (б) і (г)] поверхневу провідність мікрочастинок.

Згідно із нашими обчисленнями наведеними на рис. 1(б), ДЕФ сила, яка діє на сферичні частинки полістиролу діаметром 4 мкм змінює знак на кутовій частоті $\omega_c = 6.8 \text{ c}^{-1}$, визначеній із формули:

$$\omega_c = \tilde{\tau}_{MW}^{-1} \sqrt{-\frac{\beta_{fd}}{\beta_{pd}}} \quad (18)$$

Дане значення повинно бути меншим за критичну кутову частоту ω_0 , за якої мікрочастинки змінюють напрям руху. В статті [8] значення ω_0 було порядку 10 c^{-1} , тобто теоретична ω_c наближається до експериментальної ω_0 . Тому можна знехтувати ЕГД силою. В експерименті з порожнистими частинками скла різних розмірів від 6 до 32 мкм зміна напрямку руху спостерігалась при частотах, які знижувалися зі збільшенням розміру [8]. Більш детально, ω_0 приблизно становило 5 c^{-1} для найменших частинок, а теоретично розраховане

значення ω_0 для середнього розміру частинок 18 мкм становить 2.1 c^{-1} . Розраховані нами значення $\omega_c = 4.2 \text{ c}^{-1}$ майже співпадають із експериментальним ω_0 для найменших порожнистих частинок скла і $\omega_c = 1.3 \text{ c}^{-1}$ для частинок середнього розміру.

Додаткову перевірку для теорії можна провести, якщо порівняти її результати з експериментом, в якому використовується суміш частинок полістиролу і порожнистих частинок скла. У роботі [8] представлено розподіл таких частинок на краплині силіконової олії I зануреної в касторову олію для частот ω 0.1, 6 і 20 c^{-1} . При частоті $\omega = 0.1 \text{ c}^{-1}$, коли ЕГД і ДЕФ сили на рис. 1(б) спрямовані від екватора до полюсів, всі частинки концентруються на полюсах. Частота $\omega = 6 \text{ c}^{-1}$ є вищою, ніж $\omega_c = 4.2 \text{ c}^{-1}$ найменших порожнистих мікрочастинок скла, але нижча, ніж $\omega_c = 6.8 \text{ c}^{-1}$ мікрочастинок полістиролу. За даної частоти частинки порожнистого скла починають

переміщуватися до екватора, але частинки полістиролу залишаються на полюсах [8]. За частоти $\omega = 20 \text{ c}^{-1}$, коли можна знехтувати ЕГД силою і теоретично передбачена нами ДЕФ сила спрямована від полюсів до екватора, обидва типи частинок концентруються на екваторі.

Напрямки ЕГД сили і ДЕФ сил також порівнювалися в експерименті з більшими частинками [9]. При низьких покриттях поверхні частинками порядку 0.1 і сильному статичному електричному полі 170 В мм^{-1} всі різні типи частинок, які використовувалися в експериментах [9], переміщувалися до екватора краплини в напрямку конвекційних ЕГД течій. Визначені ДЕФ сили мали один і той же напрям для всіх типів частинок за винятком низькопровідних чистих сферичних мікрочастинок полістиролу.

Список використаних джерел

1. Hughes M. Nanoelectromechanics in engineering and biology. / M. P. Hughes. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 344 p. – (1th Ed).
2. Ramos A. Electrokinetics and electrohydrodynamics in microsystems. / A. Ramos. – Wien: Springer, 2011. – 300 p. – (1th Ed).
3. Pethig R. Dielectrophoresis: Theory, Methodology and Biological Applications. / R. Pethig. – Hoboken: John Wiley & Sons, 2017. – 448 p. – (1th Ed).
4. Concentrating particles on drop surfaces using external electric fields. / S. Nudurupati, M. Janjua, N. Aubry, P. Singh. // Electrophoresis. – 2008. – №29. – P. 1164–1172.
5. Salipante P. Electrohydrodynamics of drops in strong uniform dc electric fields. / P. Salipante, P. M. Vlahovska. // Physics of Fluids. – 2010. – №22. – P. 112110.
6. Active structuring of colloidal armour on liquid drops. / [P. Dommersnes, Z. Rozynek, A. Mikkelsen та ін.]. // Nature Communications. – 2013. – №4. – P. 2066.
7. Electrohydrodynamic controlled assembly and fracturing of thin colloidal particle films confined at drop interfaces. / [Z. Rozynek, P. Dommersnes, A. Mikkelsen та ін.]. // The European Physical Journal Special Topics. – 2014. – №223. – P. 1859–1867.
8. Electrohydrodynamic manipulation of particles adsorbed on the surface of a drop. / E. Amah, K. Shah, I. Fischer, P. Singh. // Soft Matter. – 2016. – №12. – P. 1663–1673.
9. Particle-covered drops in electric fields: drop

Висновки

Нехтування поверхневою провідністю в електрогідродинаміці діелектричної кулі може зумовити виникнення якісних помилок, на зразок таких, які ми виявили в роботі [8]. Врахування ж поверхневої провідності у діелектричній моделі Тейлора для випадку змінного електричного поля забезпечує відмінне узгодження теорії з експериментами. Разом із тим, існують експериментальні результати, які не піддаються поясненню. Наприклад, досі незрозуміло, чому краплина силіконової олії покрита ланцюжками високо провідних мікрочастинок перетворюється на ідеальний діелектрик в одному випадку, але на ідеальний провідник в іншому. Для виявлення цього потрібне подальше узагальнення використаної теоретичної моделі.

References

1. HUGHES, M. P. (2003) *Nanoelectromechanics in engineering and biology*. 1th Ed. Boca Raton: CRC Press.
2. RAMOS, A. (2011) *Electrokinetics and electrohydrodynamics in microsystems*. Springer.
3. PETHIG, R. (2017) *Dielectrophoresis: Theory, Methodology and Biological Applications*. Hoboken: John Wiley & Sons.
4. NUDURUPATI, S., JANJUA, M., AUBRY, N. AND SINGH, P. (2008) Concentrating particles on drop surfaces using external electric fields. *ELECTROPHORESIS*. 29(5). p.1164-1172.
5. SALIPANTE, P. and VLAHOVSKA, P. (2010) Electrohydrodynamics of drops in strong uniform dc electric fields. *Physics of Fluids*. 22(11). p.112110.
6. DOMMERSNES, P., ROZYNEK, Z., MIKKELSEN, A., CASTBERG, R., KJERSTAD, K., HERSVIK, K. and OTTO FOSSUM, J. (2013) Active structuring of colloidal armour on liquid drops. *Nature Communications*. 4(1). p.2066.
7. ROZYNEK, Z., DOMMERSNES, P., MIKKELSEN, A., MICHELS, L. and FOSSUM, J. (2014) Electrohydrodynamic controlled assembly and fracturing of thin colloidal particle films confined at drop interfaces. *The European Physical Journal Special Topics*. 223(9). p.1859-1867.
8. AMAH, E., SHAH, K., FISCHER, I. and SINGH, P. (2016) Electrohydrodynamic manipulation of particles adsorbed on the surface of a drop. *Soft Matter*. 12(6). p.1663-1673.
9. MIKKELSEN, A., KHOBAIB, K., ERIKSEN, F., MÅLØY, K. and ROZYNEK, Z. (2018) Particle-covered drops in electric fields: drop

- deformation and surface particle organization. / [A. Mikkelsen, K. Khobaib, F. Eriksen та ін.]. // *Soft Matter*. – 2018. – №14. – P. 5442–5451.
10. Taylor G. Studies in electrohydrodynamics. I. The circulation produced in a drop by an electric field. / G. Taylor. // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. – 1966. – №291. – P. 159–166.
 11. Saville D. Electrohydrodynamics: The Taylor-Melcher Leaky Dielectric Model. / D. Saville. // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 1997. – №29. – P. 27–64.
 12. Torza S. Electrohydrodynamic Deformation and Burst of Liquid Drops/ S. Torza, R. Cox, S. Mason. // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1971. – №269. – P. 295–319.
 13. Zhakin A. Electrohydrodynamics of charged surfaces. / A. Zhakin. // *Physics-Uspekhi*. – 2013. – №56. – P. 141–163.
 14. Jeans J. H. The mathematical theory of electricity and magnetism. / J. H. Jeans. – Cambridge: Cambridge University Press, 1960. – 598 p.
 15. Jones T. Electromechanics of particles. / T. Jones. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 265 p.
 16. Arnold W. Surface conductance and other properties of latex particles measured by electrorotation. / W. Arnold, H. Schwan, U. Zimmermann. // *The Journal of Physical Chemistry*. – 1987. – №91. – P. 5093–5098.
 17. Green N. Separation of submicrometre particles using a combination of dielectrophoretic and electrohydrodynamic forces. / N. Green, H. Morgan. // *Journal of Physics D: Applied Physics*. – 1998. – №31. – P. L25–L30.
 18. Hughes M. The Dielectrophoretic Behavior of Submicron Latex Spheres: Influence of Surface Conductance. / M. Hughes, H. Morgan, M. Flynn. // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1999. – №220. – P. 454–457.
 19. Ermolina, I. The electrokinetic properties of latex particles: comparison of electrophoresis and dielectrophoresis. / I. Ermolina, H. Morgan. // *Journal of colloid and interface science*. – 2005. – №285. – P.419-428.
 20. Surface conductivity of glass at the solid/liquid interface. / J. Jednačák-Biščan, V. Mikac-Dadić, V. Pravdić, W. Haller. // *Journal of Colloid and Interface Science*. – 1979. – №70. – P. 18–28.
 - deformation and surface particle organization. *Soft Matter*. 14(26). p.5442-5451.
 10. TAYLOR, G. (1966) Studies in electrohydrodynamics. I. The circulation produced in a drop by an electric field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 291(1425). p.159-166.
 11. SAVILLE, D. (1997) ELECTROHYDRODYNAMICS: The Taylor-Melcher Leaky Dielectric Model. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 29(1). p.27-64.
 12. TORZA, S., COX, R. and MASON, S. (1971) Electrohydrodynamic Deformation and Burst of Liquid Drops. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 269(1198). p.295-319.
 13. Zhakin, A. (2013) Electrohydrodynamics of charged surfaces. *Physics-Uspekhi*. 56(2). pp.141-163.
 14. JEANS, J. (1960) *The mathematical theory of electricity and magnetism*. Cambridge: Cambridge University Press.
 15. JONES, T. (1995) *Electromechanics of particles*. Cambridge: Cambridge University Press.
 16. ARNOLD, W., SCHWAN, H. and ZIMMERMANN, U. (1987) Surface conductance and other properties of latex particles measured by electrorotation. *The Journal of Physical Chemistry*. 91(19). p.5093-5098.
 17. GREEN, N. and MORGAN, H. (1998) Separation of submicrometre particles using a combination of dielectrophoretic and electrohydrodynamic forces. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 31(7). p.L25-L30.
 18. HUGHES, M., MORGAN, H. and FLYNN, M. (1999) The Dielectrophoretic Behavior of Submicron Latex Spheres: Influence of Surface Conductance. *Journal of Colloid and Interface Science*. 220(2). p.454-457.
 19. ERMOLINA, I. and MORGAN, H. (2005) The electrokinetic properties of latex particles: comparison of electrophoresis and dielectrophoresis. *Journal of colloid and interface science*. 285(1). p.419-428.
 20. JEDNAČÁK-BIŠČAN, J., MIKAC-DADIĆ, V., PRAVDIĆ, V. and HALLER, W. (1979) Surface conductivity of glass at the solid/liquid interface. *Journal of Colloid and Interface Science*. 70(1). p.18-28.

Надійшла до редколегії 16.11.18

УДК 535.215

Микитюк А. О.¹, асп.
Кондратенко С.В.², д.ф.-м.н., проф.

Оптичні властивості PEDOT:PSS-кремнієвих сонячних елементів

^{1,2}Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13,

¹Казенне підприємство спеціального машинобудування «Арсенал», 01010, м. Київ, вул. Московська, 8

e-mail: ¹mykytiuk_nastya@ukr.net

²kondr@univ.kiev.ua

A.O. Mykytiuk¹, PhD Stud.
S.V. Kondratenko², Dr. Sci., Prof.

Optical properties of PEDOT:PSS-silicon solar cells

^{1,2}Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st., 64/13,

¹State enterprise of a special instrumentation “Arsenal”, 01010 Kyiv, Moskovska st., 8

e-mail: ¹mykytiuk_nastya@ukr.net

²kondr@univ.kiev.ua

У роботі досліджуються оптичні та електричні втрати в сонячних елементах PEDOT:PSS/n-Si за допомогою спектроскопічної еліпсометрії та вимірювання вольт-амперних характеристик. Основна мета статті – з'ясувати роль міжфазного шару в процесах оптичного відбиття та рекомбінації носіїв заряду.

Ключові слова: PEDOT:PSS/n-Si сонячні елементи, спектроскопічна еліпсометрія, міжфазний шар.

We study the optical and electrical losses in PEDOT:PSS/n-Si solar cells using spectroscopic ellipsometry and current-voltage measurements. The optical constants and thickness of the PEDOT:PSS films were studied using spectroscopic ellipsometry performed by a SE-2000 SEMILAB ellipsometer spanning the NIR–VIS–UV range with a resolution of 5 nm. The results were analyzed using a four-layer model involving the n-type silicon (001) substrate, interfacial layer between Si and polymer films, PEDOT:PSS thin film, and a surface roughness layer. The key to understand the origin of the losses is that the studied junctions have an interfacial layer between organic (PEDOT:PSS) and inorganic substrates. The dielectric functions of the PEDOT:PSS were fitted with the known thickness and the assumption of a negligible roughness (i.e. that the roughness is much smaller than the wavelength). Using the complex dielectric function, the optical constants (refractive index n and extinction coefficient k) were calculated. In addition to real and imaginary part of the refractive index, the absorption coefficient was calculated. The produced hybrid solar cells show efficiencies around 7%.

Key Words: PEDOT:PSS/n-Si solar cells, spectroscopic ellipsometry, interfacial layer, optical constants.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Вступ

Полімери полі(3,4-етилендіокситіо-фену) (PEDOT) та полі(стиренсульфонату) (PSS) утворюють провідні шари, прозорі для видимого світла [1,2]. Вони являють собою сильно леговані органічні напівпровідники з провідністю р-типу з шириною забороненої зони ~ 1,6 eV [3].

Високопровідний полімер PEDOT:PSS може використовуватись в електроніці як альтернатива звичайним прозорим провідним оксидам, таким як оксид індію-олова (ІТО), легований оксид цинку тощо [4]. Хоча оптична прозорість PEDOT:PSS досить близька до плівок на основі ІТО, їх відносно високий опір залишається

перешкодою для застосування в оптоелектроніці. Попередні дослідження показали, що хімічна обробка PEDOT:PSS відіграє головну роль у зміні його морфології та провідності [5]. Змішуючи PEDOT:PSS з різними розчинниками, такими як диметилсульфоксид (DMSO), а також шляхом відпалу при високих температурах провідність може бути збільшена на кілька порядків [6]. PEDOT:PSS є досить складною речовиною, що здатна утворювати гелеві кульки розмірами від мікро- до нанометрів, при цьому збагачені PEDOT частини ланцюгів дифундують до серцевини кульки, а частини, збагачені PSS, утворюють структуру, подібну до оболонки [7]. У звичайному водному розчині PEDOT:PSS

ланцюги мають тенденцію утворювати компактні спіралі, які випадковим чином упаковуються у твердотільні плівки в процесі висихання. У цьому випадку морфологія плівок завжди відіграє значну роль у переносі об'ємного заряду, тому величина поверхневої провідності може змінюватись в широких межах [8]. Однак дослідження розсіювання рентгенівських променів на малі кути, а також експерименти з переносу заряду показують, що за наявності домішок компактні спіралі перетворюються на більш витягнуті, так що локалізовані електронні стани частково делокалізуються, що призводить до збільшення рухливості носіїв заряду [9]. У витягнутій конформації бар'єри дещо знижені, що призводить до полегшення транспорту заряду. Ефект цих морфологічних модифікацій особливо проявляється у властивостях переносу заряду при низьких температурах, а також на частотно-залежній провідності.

Внаслідок прозорості PEDOT:PSS для видимого світла його оптичні константи відіграють дуже важливу роль, допомагаючи описати поведінку цієї тонкої плівкової системи. Для їх визначення можна використовувати спектральну еліпсометрію, яка є ефективною методикою дослідження оптичних констант тонких органічних шарів, нанесених на провідні або ізолюючі підкладки [10-12].

У цій роботі ми досліджуємо оптичні властивості гетеропереходів PEDOT:PSS/n-Si методом вимірювання вольт-амперних характеристик (J-V), а також методом спектроскопічної еліпсометрії. Було проаналізовано спектральні залежності оптичних констант тонких плівок PEDOT:PSS, нанесених на кремнієву основу, та визначаємо роль міжфазного шару між органічними та неорганічними матеріалами.

Методика експерименту

Для виготовлення сонячних елементів було використано як підкладку пластину Si(100) з провідністю n-типу, які відполіровані з обох сторін, леговані фосфором, мають питомий опір 4,5 Ом·см та товщину 500 мкм. Спочатку зразки Si були очищені ультразвуком в ацетоні, етанолі та деіонізованій воді протягом 20 хв у кожній з рідин при температурі 30 °C. Далі вони були занурені у 30%-ий розчин фторидної кислоти (HF) для того, щоб видалити шар оксиду кремнію. Для збільшення електропровідності полімерної плівки та створення інтерфейсу до гідрофобного Н-пасивованого кремнію, до розчину PEDOT:PSS

було додано 5% (об.) диметилсульфоксиду як вторинного допantu та поверхнево-активну речовину (0,025% (об.) додецилсульфату натрію). Потім плівка була осаджена на центрифугі при 3000 об/хв протягом 20 с і термічно відпалена при 140 °C протягом 30 хв за стандартних атмосферних умов. Нарешті, для утворення верхнього контакту на поверхні полімеру було термічно випарувано золоту сітку через маску, з шириною полоси 180 мкм. Для створення другого контакту в кремнієву підкладку було нанесено алюмінієвий електрод методом термічного випарування в вакуумі.

Електричні властивості сонячних елементів, отриманих за описаною вище методикою, досліджувались шляхом вимірювання вольт-амперних характеристик (залежностей густини струму від прикладеної напруги, J-V) при опроміненні світлом стандартного спектру (AM1.5G) з використанням аналізаторів Agilent 4156C Semiconductor. Оптичні константи та товщина плівок PEDOT:PSS досліджувались за допомогою спектроскопічної еліпсометрії, яку виконували еліпсометром SE-2000 SEMILAB, що охоплює діапазон від близького інфрачервоного до ультрафіолетового світла (190 – 2000 нм) з роздільною здатністю 5 нм.

Результати та обговорення

Для визначення товщини шарів, що утворюють гетероструктуру, було використано спектральну еліпсометрію. Було виміряно комплексне відношення коефіцієнта відбиття $\rho = r_p/r_s = \text{tg}\psi \cdot e^{i\Delta}$, де ρ – відношення комплексних коефіцієнтів відбиття Френеля для p -поляризованого (r_p) і s -поляризованого (r_s) світла. $\text{tg}\psi$ являє собою абсолютне значення цього відношення, а Δ описує різницю фаз між p - і s -поляризованим світлом. Далі, з використанням моделей Друде та Коші було побудовано спектральні апроксимації експериментальних значень еліпсометричних кутів ($\text{tg}\psi$ та $\cos\Delta$) шляхом мінімізації середньоквадратичного відхилення між вимірюваними та обчисленими еліпсометричними кутами. Результати було проаналізовано за допомогою чотиришарової моделі, що бере до уваги наявність підкладки кремнію (001) n-типу, міжфазного шару між Si та полімерними плівками, тонкої плівки PEDOT:PSS та шорсткого поверхневого шару. Було виявлено, що товщина полімерного шару на кремнієвій підкладці становила близько (50 ± 1) нм, а на поверхні Si виявлено плівку SiO_x товщиною 1,4 нм. Її оптичні константи, n і k , були близькими

до оптичних констант оксиду кремнію. Тому, незважаючи на покриття підкладки розчином PEDOT:PSS відразу після її обробки HF, у процесі виробництва утворився інтерфейсний шар.

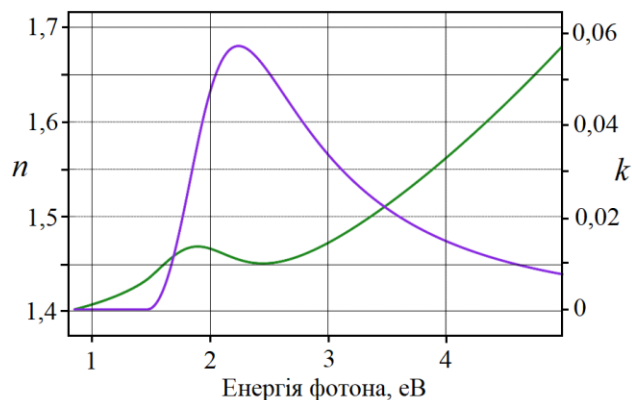


Рис. 1. Спектральні залежності оптичних констант тонкої плівки PEDOT:PSS на поверхні кремнію.

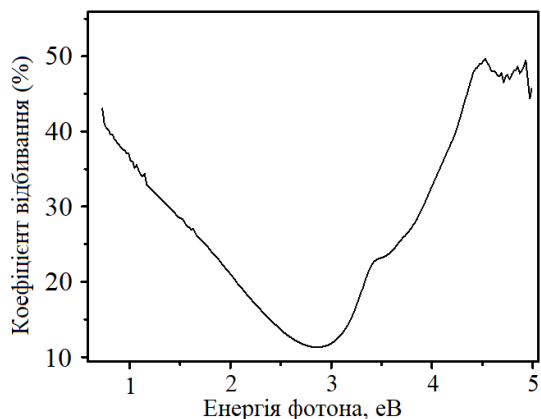


Рис. 2. Спектр коефіцієнта відбивання світла (R) від гібридного сонячного елемента PEDOT:PSS/n-Si.

Наявність прошарку окислу може значно погіршити експлуатаційні властивості сонячних елементів через збільшення рекомбінаційних та оптичних втрат. На рис. 1 показані спектральні залежності оптичних констант PEDOT:PSS, а на рис. 2 – відповідний спектр відбивання, виміряний при нормальному падінні випромінювання.

Напруга холостого ходу (близько $\sim 0,56$ В) вимірювалася за опромінення світлом загального стандартного спектру (AM1.5G) інтенсивністю 100 мВт/см^2 , див. рис. 3. Виготовлені гібридні

сонячні батареї мають ефективність близько 7% через низьке значення коефіцієнта заповнення (56,5%) і струму короткого замикання ($20,5 \text{ мА/см}^2$). Основна причина полягає в тому, що Au електрод призвів до втрати 35% інтенсивності падаючого світла внаслідок затінення та неоптимізованого збору фотозбуджених носіїв заряду.

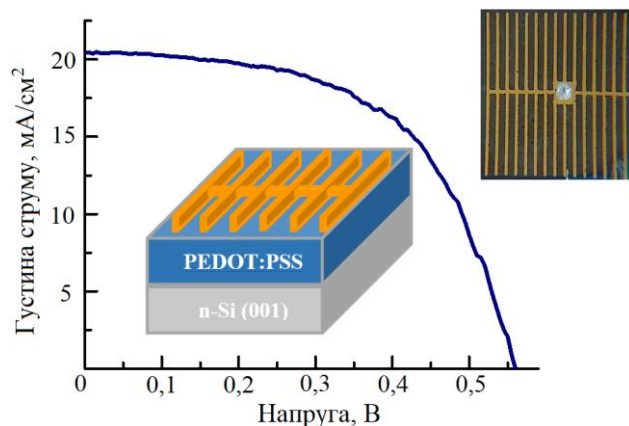


Рис. 3. Вольт-амперна характеристика гібридного сонячного елемента PEDOT:PSS/n-Si при опроміненні світлом загального стандартного спектру AM1.5G.

Висновки

Основним для розуміння природи оптичних та електричних втрат у сонячних елементах PEDOT:PSS/n-Si є те, що досліджувані гетероструктури містять міжфазний шар між органічними (PEDOT:PSS) та неорганічними (кремній) складовими. Діелектричні функції PEDOT:PSS були визначені за відомою товщиною за припущення про незначну шорсткість (тобто, товщина шорсткого поверхневого шару набагато менша за довжину хвилі падаючого світла). За допомогою комплексної діелектричної функції були розраховані оптичні константи: показник заломлення n та коефіцієнт загасання k . Окрім дійсної та уявної частини показника заломлення, було розраховано також коефіцієнт поглинання α ($\alpha = 4\pi k/\lambda$).

Список використаних джерел

1. Kirchmeyer V. Scientific importance, properties and growing applications of poly(3,4-ethylenedioxythiophene) / V. Kirchmeyer, K. Reuter. // Journal of Materials Chemistry. – 2005. – 15 (21). – С. 2077–2088.

References

1. KIRCHMEYER, V. & REUTER, K. (2005) Scientific importance, properties and growing applications of poly(3,4-ethylenedioxythiophene). *J. Mater. Chem.* 15. p. 2077–2088.

2. Hwang J. Spectroscopic study on sputtered PEDOT PSS: Role of surface PSS layer / J. Hwang, F. Amy, A. Kahn. // *Organic Electronics*. – 2006. – 7. – C. 387–396.
3. Schmidt J. Organic-silicon heterojunction solar cells: Open-circuit voltage potential and stability / J. Schmidt, V. Titova, D. Zielke. // *Applied Physics Letters*. – 2013. – 103 (18). – C. 183901.
4. Polymer light-emitting diodes with polyethylene dioxythiophene–polystyrene sulfonate as the transparent anode / [Y. Cao, G. Yu, C. Zhang та ін.]. // *Synthetic Metals*. – 1997. – 87. – C. 171–174.
5. Sangeeth C. S. S. Correlation of morphology and charge transport in poly(3,4-ethylene-dioxythiophene)-polystyrenesulfonic acid (PEDOT–PSS) films / C. S. S. Sangeeth, M. Jaiswal, R. Menon. // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2009. – 21. – C. 072101.
6. On the mechanism of conductivity enhancement in poly(3,4-ethylenedioxythiophene): poly(styrenesulfonate) film through solvent treatment / [J. Ouyang, Q. Xu, C. Chu та ін.]. // *Polymer*. – 2004. – 45. – C. 8443–8450.
7. Microscopical investigations of PEDOT: PSS thin films / U. Lang, E. Müller, N. Naujoks, J. Dual. // *Advanced Functional Materials*. – 2009. – 19 (8). – C. 1215–1220.
8. Sangeeth C. S. S. Charge transport in transparent conductors: A comparison / C. S. S. Sangeeth, M. Jaiswal, R. Menon. // *Journal of Applied Physics*. – 2009. – 105 (6). – C. 063713.
9. Bagchi D. Conformational modification of conducting polymer chains by solvents: Small-angle X-ray scattering study / D. Bagchi, R. Menon. // *Chemical Physics Letters*. – 2006. – 425 (1). – C. 114–117.
10. Hoppe H. Optical constants of conjugated polymer/fullerene based bulk-heterojunction organic solar cells / H. Hoppe, N. S. Sariciftci, D. Meissner. // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. – 2002. – 385 (1). – C. 113–119.
11. Infrared ellipsometry characterization of conducting thin organic films / [M. Schubert, C. Bundesmann, G. Jacopic та ін.]. // *Thin Solid Films*. – 2004. – 455. – C. 295–300.
12. Surface morphology, optical properties, and conductivity changes of poly(3,4-ethylenedioxythiophene): poly(styrenesulphonate) by using additives / [J. Gasiowski, R. Menon, K. Hingerl та ін.]. // *Thin Solid Films*. – 2013. – 536. – C. 211–215.
2. HWANG, J., AMY, F. & KAHN, A. (2006) Spectroscopic study on sputtered PEDOT PSS: Role of surface PSS layer. *Org. Electron.* 7. p. 387–396.
3. SCHMIDT, J., TITOVA, V. & ZIELKE, D. (2013) Organic-silicon heterojunction solar cells: Open-circuit voltage potential and stability. *Appl. Phys. Lett.* 103 (18). p. 183901.
4. CAO, Y., YU, G., ZHANG, C., MENON, R. & HEEGER, A.J. (1997) Polymer light-emitting diodes with polyethylene dioxythiophene–polystyrene sulfonate as the transparent anode. *Synth. Met.* 87. p. 171–174.
5. SANGEETH, C.S.S., JAISWAL, M. & MENON, R. (2009) Correlation of morphology and charge transport in poly(3,4-ethylene-dioxythiophene)-polystyrenesulfonic acid (PEDOT–PSS) films. *J. Phys. Condens. Matter.* 21. p. 072101.
6. OUYANG, J., XU, Q., CHU, CH-W., YANG, Y., LI, G. & SHINAR, J. (2004) On the mechanism of conductivity enhancement in poly(3,4-ethylenedioxythiophene): poly(styrenesulfonate) film through solvent treatment. *Polymer.* 45. p.8443–8450.
7. LANG, U., MÜLLER, E., NAUJOKS, N. & DUAL, J. (2009) Microscopical investigations of PEDOT: PSS thin films. *Adv. Funct. Mater.* 19 (8). p. 1215–1220.
8. SANGEETH, C.S.S., JAISWAL, M. & MENON, R. (2009) Charge transport in transparent conductors: A comparison. *J. Appl. Phys.* 105 (6). p. 063713.
9. BAGCHI, D. & MENON, R. (2006) Conformational modification of conducting polymer chains by solvents: Small-angle X-ray scattering study. *Chem. Phys. Lett.* 425 (1). p. 114–117.
10. HOPPE, H., SARICIFTCI, N.S. & MEISSNER, D. (2002) Optical constants of conjugated polymer/fullerene based bulk-heterojunction organic solar cells. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 385 (1). p. 113–119.
11. SCHUBERT, M., BUNDESMANN, C., JACOPIC, G., MARESCH, H., ARWIN, H., PERSSON, N.-C., ZHANG, F. & INGANÄS, O. (2004) Infrared ellipsometry characterization of conducting thin organic films. *Thin Solid Films.* 455. p. 295–300.
12. GASIOROWSKI, J., MENON, R., HINGERL, K., DACHEV, M. & SARICIFTCI, N.S. (2013) Surface morphology, optical properties, and conductivity changes of poly(3,4-ethylenedioxythiophene): poly(styrenesulphonate) by using additives. *Thin Solid Films.* 536. p. 211–215.

Надійшла до редколегії 13.09.18

УДК 535.137, 535.518.8, 535-92, 539.219.1, 539.25

Ямпольський А. Л.¹, асп.,
Макаренко О. В.², к.ф.-м.н., доц.,
Лендел В. В.³, с.н.с.,
Пророк В. В.⁴, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Шарапа А. І.⁵, інж.,
Поперенко Л. В.⁶, д.ф.-м.н., проф.

Стокс-поляриметрия надтонких острівцевих плівок Au та Sn

¹⁻⁶Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул.
Володимирська 64/13
e-mail:² almarkar@univ.kiev.ua

A. L. Yampolskiy¹, PhD stud.,
O. V. Makarenko², PhD.,
V. V. Lendel³, Sen. Sci. Res.,
V. V. Prorok⁴, PhD., Sen. Sci. Res.,
A. I. Sharapa⁵, Eng.,
L. V. Poperenko⁶, Dr. Sci., Prof.

Stokes-polarimetry of ultrathin Au and Sn island films

¹⁻⁶Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13
e-mail:² almarkar@univ.kiev.ua

У роботі розглядаються оптичні властивості надтонких острівцевих плівок Au та Sn, отриманих методами магнетронного розпорошення та термічного випаровування відповідно. Шляхом вимірювання вектора Стокса відбитого від зразків променя були розділені поляризована та деполаризована його складові. Проаналізовано умови залежності ступеня поляризації від структури поверхні для серії острівцевих плівок з різною морфологією. Для визначення морфологічної будови металевго шару були також застосовані методи атомно-силової мікроскопії та вимірювання питомого опору. Встановлено, що при збільшенні кута падіння випромінювання на зразок ступінь поляризації відбитого променя зменшується. Деполаризуюча дія зразків також залежить від кількості нерівностей на їх поверхні. Застосований метод Стокс-поляриметрії, таким чином, дозволяє одержати додаткову інформацію про структуру поверхні, що є його перевагою.

Ключові слова: поляриметрия, вектор Стокса, острівцева плівка, деполаризація, золото, олово.

The optical properties of ultrathin Au and Sn islet films, obtained by the methods of magnetron sputtering and thermal evaporation, respectively, are considered in this paper. By measuring the Stokes vector of the beam reflected from the samples, polarized and depolarized radiation components were separated. The conditions of the polarization degree dependence on the surface structure for a series of islet films with different morphologies are analyzed. To determine the morphological structure of the metal layer, methods of atomic force microscopy and resistivity measurement were also employed. The parameters of discontinuous film, obtained by optical and non-optical methods, are compared. It is established that with an increase in the angle of radiation incidence onto the samples, the polarization degree of the reflected beam decreases. Such behavior can be explained by the Mie theory of light scattering by particles. The magnitude of depolarizing action of the samples also depends on the morphology of their surface, correlating with the number of inequalities on it. The applied method of Stokes polarimetry, thus, allows one to obtain additional information on the structure of the surface, which is its advantage.

Key words: polarimetry, Stokes vector, island film, depolarization, gold, tin.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М. В.

Вступ

Широке застосування тонких плівок металів, наприклад, у плазмонних сенсорах [1], зумовлює постійний інтерес до розвитку та вдосконалення методів контролю їх структури.

Еліпсометричний метод діагностики тонких металевих (або інших) плівок є одним із найбільш відомих і вживаних, оскільки він

безконтактний і відзначається високою чутливістю. Разом з тим, класична еліпсометрія працює в припущенні, що зондове випромінювання є повністю поляризованим як до, так і після взаємодії з об'єктом, не враховуючи можливе його розсіяння та деполаризацію. В цьому методі не можна відділити деполаризовану складову випромінювання на виході системи, а отже, для

деяких досліджуваних об'єктів не можна одержати коректного результату.

Натомість існує більш загальний підхід, при якому стан поляризації вихідного променя описують із залученням формалізму Стокса [2]. Поляризація задається чотиривимірним вектором $\vec{S} = \{I, Q, U, V\}^T$, у якого незалежними є лише три компоненти. Вимірявши такий вектор, можна легко відділити від результуючої інтенсивності деполаризовану складову.

В якості досліджуваних об'єктів було обрано Au та Sn. Будучи нанесеними на підкладку в малій кількості, вони утворюють острівцеві структури, здатні розсіювати та деполаризувати світло. В такому вигляді через обмеженість електронної плазми починають проявлятися розмірні ефекти і метали набувають особливих властивостей, що становлять науковий та практичний інтерес [3]. Так, нанострівцеве золото може застосовуватися у відбивачах світла з заданим спектральним розподілом [4], сенсорах на основі спектроскопії поверхневого плазмонного резонансу [5] чи Раманівського розсіяння [6]. Острівцеве олово, будучи після осадження окисленим, може використовуватися як чутливий елемент у газових сенсорах [7].

Метою даною роботи було встановлення зв'язку між величиною деполаризації відбитого від острівцевих металевих плівок світла та структурною будовою відповідних зразків.

Об'єкти дослідження

У даній роботі досліджували метали Au та Sn, напилені на скляні підкладки у вигляді надтонких плівок. Відповідно, було виготовлено два набори по 5 зразків, котрі відрізняються за кількістю напиленого металу. При цьому прагнули, щоб кожен такий набір демонстрував перехід через поріг перколяції – від окремих острівців до суцільного металевого шару.

Напилення плівок золота проводилося на модернізованій установці вакуумного напорошення ВУП-5 методом магнетронного розпорощення на постійному струмі 20 мА металічної мішені в атмосферному розряді при тиску 5×10^{-1} мм рт. ст. Товщина утворюваних золотих плівок не контролювалася. Зразкам були присвоєні назви з порядковими номерами: Au_1, Au_2, Au_3, Au_4, Au_5.

У якості підкладок були використані стандартні предметні стекла. Перед напорошенням вони протирались етиловим спиртом та проходили обробку в ультразвуковій

ванні з дистильованою водою протягом 20 хвилин.

Плівки олова напорошувалися на скляні підкладки з предметного скла в цій же установці методом термічного напилення з молібденового човника у високому вакуумі. Для цього камера установки попередньо відкачувалась до вакууму $(2 \dots 3) \times 10^{-5}$ мм рт. ст. Відстань R від човника до підкладки складала 20 см. Для оцінки «номінальної» товщини плівки використовувалось співвідношення $d = m / (4\pi R^2 \rho)$, де d – товщина плівки в см, m – маса в грамах, R – відстань від човника до підкладки в см, ρ – густина матеріалу, що напорошується, в г/см^3 (для олова $\rho = 7,31 \text{ г/см}^3$). Ці товщини вказані у табл. 1. Зразкам були присвоєні назви, що містять масу витраченого при напиленні матеріалу: Sn_10_mg, Sn_20_mg, Sn_45_mg, Sn_60_mg, Sn_155_mg.

Методика вимірювань

Основним методом дослідження острівцевих плівок у даній роботі була Стокс-поляриметрия. Для цього було використано багатофункціональний автоматизований вимірювальний комплекс [8], зібраний в конфігурації поляриметра (рис. 1).

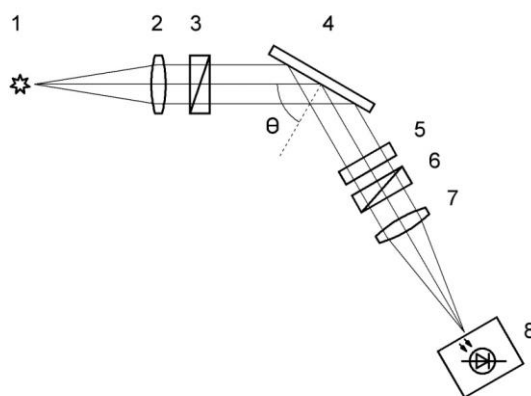


Рис. 1. Схема поляриметра. 1 – джерело випромінювання $\lambda = 0,625 \text{ мкм}$; 2, 7 – колімаційний та камерний об'єктиви; 3 – поляризатор, 4 – зразок, 5 – чвертьхвильова пластинка; 6 – аналізатор; 8 – фотоприймач.

Основою його служить гоніометр Г5, на колімаційній трубці якого встановлено поляризатор 2, а на камерній – фазову пластинку 5 і аналізатор 6. Обертання двох останніх оптичних елементів (5 та 6) дозволяє виміряти чотири компоненти вектора Стокса при даному куті падіння, а позиціонування столика із зразком 4 та камерної

труби з фотоприймачем 8 дає змогу одержати кутові залежності цих компонент. Вимірювання проводились на довжині хвилі $\lambda = 0,625$ мкм.

Також на цій же довжині хвилі на цьому ж устаткуванні було проведено фотометричні вимірювання коефіцієнта пропускання зразків T . Діаметр світлового пучка при вимірюваннях становив 4 мм. Коефіцієнти пропускання наведено у табл. 1.

Питомий опір напилених металевих плівок визначали чотирьохзондовим методом за допомогою вимірювальної головки приладу ИУС-3. При його вимірюванні скористалися калібрувальним зразком із комплекту приладу. Одержані значення питомого опору наведено в табл. 1. Слід зазначити, що для зразків Au_1, Au_2 та Sn_10_mg скільки-небудь помітної провідності не було виявлено.

Крім того, морфологію поверхні зразків було досліджено методом атомно-силової мікроскопії (АСМ) за допомогою лабораторного комплексу «INTEGRA» від NT-MDT. Вимірювання відбувалося в напівконтактному режимі (tapping mode). Сканували область розмірами 15×15 мкм, роздільна здатність зонда при цьому становила 40 нм. Вигляд одержаних мікрограм для усіх зразків показаний на рис. 2.

Як можна бачити з даного рисунку, по мірі наростання шару золота чи олова шорсткість поверхні зразка спочатку мала, а далі збільшується і переходить через максимум. Це може позначитись на характері взаємодії з поляризованим випромінюванням та оптичних властивостях таких зразків, що й стало предметом дослідження даної роботи.

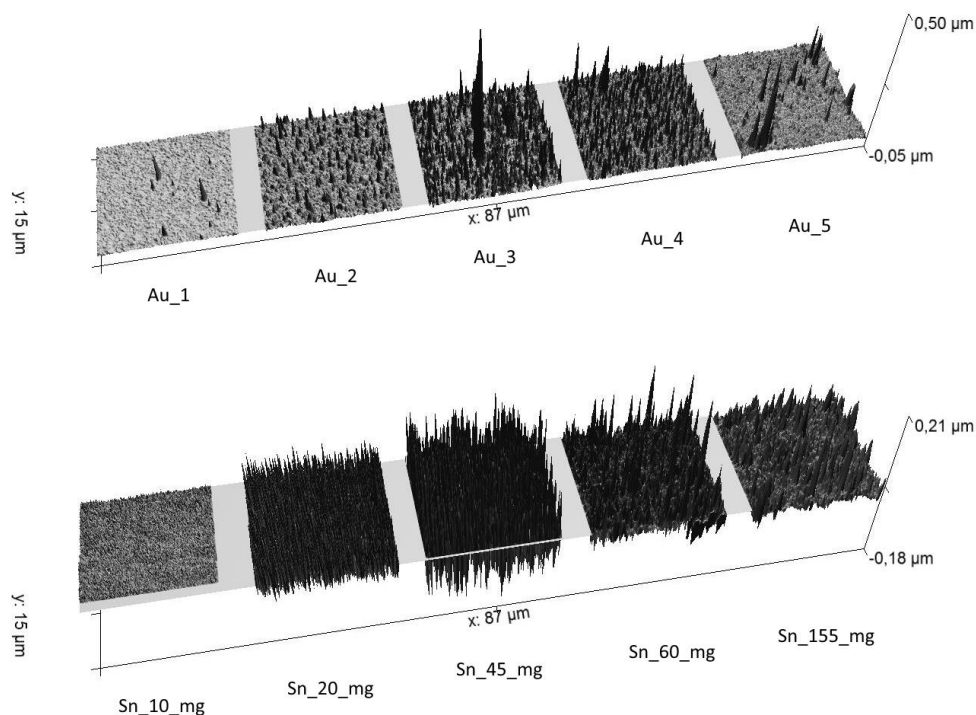


Рис. 2. Мікрограми поверхонь двох наборів зразків на основі Au та Sn

Результати та їх обговорення

Аналіз зображень атомно-силової мікроскопії проводився наступним чином. Спочатку виконуються базові перетворення зображення, характерні для скануючої мікроскопії взагалі, такі як компенсація кривизни траєкторії зонда шляхом віднімання поверхні 2-го порядку або вище, компенсація дефектів розгортки шляхом вирівнювання сусідніх рядків

зображення. В результаті цих дій одержуємо рельєф із спрямованою основою (площиною). Нуль відліку по висоті встановлювався за найнижчою точкою кожного зображення.

Далі набір зразків розглядали з певними припущеннями. Припущення перше: на поверхні зразків, що містять найменше металу (Au_1, Au_2), увесь метал зібрався у вигляді поодиноких зерен, які чітко можна виділити на фоні підкладки. Так, відомо [9], що золото, напилене в надмалих кількостях на скло без термічного

відпалу (шар < 10 нм) схильне самочинно збиратися в наноострівці. Тоді відносно дрібний рельєф на переважній частині поверхні цих зразків можна співвіднести з нерівностями скла, а окремі найвищі піки – з металевими острівцями. Проводячи січну площину на заданій висоті, змінюючи цю висоту і спостерігаючи за перерізом поверхні, можна одержати величину шорсткості скляної підкладки. Для наших зразків вона склала 20 нм, що цілком узгоджується з літературними типовими значеннями [10].

Зображення зразків із більшою кількістю напиленого металу не дозволяють так легко розрізнити металеві та неметалеві області. Тому було висунуте припущення друге: на всіх зразках металева плівка не є суцільною, в силу вищезгаданої особливості поведінки тонких плівок існують непокріті ділянки скла. Це означає, що найглибші впадини рельєфу з достатньо високою ймовірністю можуть відповідати нижній границі профілю нерівностей скла. Вважаючи, що шорсткість усіх підкладок з набору однакова, задаємо січну площину на рівні верхньої границі нерівностей, визначеному раніше (20 нм). Одержаний переріз поверхні, таким чином, показує металеві ділянки.

Як виявилось, для зразків золота Au_3, Au_5 та усіх зразків олова, крім Sn_10_mg, цей переріз є майже суцільним, так що не можна виділити у ньому окремих острівців. Тому далі розглядали нерівності поверхні взагалі, проводячи січну площину на рівні приблизно 20...30% від максимального значення. Кількість зафіксованих при цьому нерівностей на сканованій ділянці та їх середній розмір наведено в табл. 1.

Коефіцієнти пропускання T зразків острівцевих плівок були використані для того, аби визначити ефективну товщину металевого шару d_{eff} . Оптичні параметри цього шару вважалися такими, як для чистого масивного відповідного металу, а саме: $n = 0,1746$, $k = 0,1746$ для золота [11] та $n = 3,88$, $k = 6,05$ для білого олова (β -Sn) [3]. Оскільки зондує випромінювання було некогерентним, товщина скляних підкладок набагато більша за довжину хвилі, а металева плівка шорстка, результати вимірювань не зазнають впливу інтерференції. Для перерахунку скористалися спрощеною наближеною формулою з поправкою лише на відбивання від вільної поверхні підкладки:

$$T = (1 - r) \cdot \exp\left(-\frac{4\pi k d_{eff}}{\lambda}\right),$$

де $r = \left|\frac{n-1}{n+1}\right|^2$ – коефіцієнт відбивання на межі повітря-скло при нормальному падінні, k – показник поглинання металу.

Показник заломлення скла n визначали за пропусканням чистої підкладки, користуючись співвідношенням, що враховує багатократне відбивання:

$$T = \frac{(1 - r)^2}{1 - r^2}$$

Одержано $n = 1,69 \pm 0,05$.

Коефіцієнти пропускання T та ефективні товщини d_{eff} також наведені в табл. 1. Як і слід очікувати, зі зростанням кількості напиленого металу пропускання зменшується.

За вимірними компонентами вектора Стокса $\vec{S} = \{I, Q, U, V\}^T$ було знайдено кутові залежності еліпсометричних параметрів $\psi(\theta)$, $\Delta(\theta)$ та ступеня поляризації відбитого променя p :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{\sqrt{U^2+V^2}}{-Q}\right), \\ \Delta &= \arctg\left(\frac{-V}{U}\right), \\ p &= \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}. \end{aligned}$$

Далі, користуючись матричним методом розрахунку відбивання випромінювання від багатосарових систем, одержували відповідні теоретичні залежності $\psi(\theta)$ та $\Delta(\theta)$ аналогічно до того, як це було у роботі [12]. Розбіжність між теоретичними та експериментальними кривими характеризувалась середнім квадратичним відхиленням (Mean Squared Error, MSE):

$$\begin{aligned} MSE &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \left(\cos \Delta_j^{theor} - \cos \Delta_j^{exp} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{m} \sum_{j=0}^m \left(\operatorname{tg} \psi_j^{theor} - \operatorname{tg} \psi_j^{exp} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Розрахунок проводився в рамках моделі однорідного ефективного шару на напівнескінченній підкладці. Варіюючи його параметри (комплексний показник заломлення $n + ik$, товщина d), досягали мінімального значення MSE і розв'язували таким чином обернену задачу еліпсометрії. Одержані параметри n , k , d представлені у табл. 1. Показники заломлення та поглинання значно відрізняються між зразками та порівняно з зазначеними вище літературними даними для обраних металів, але пам'ятаємо, що одержані результати відносяться до ефективного шару. А от товщини d для серії зразків Au корелюють з їх пропусканням. Зазначимо, що MSE для

одержаних розв'язків складало порядку 10^{-4} (Au) та 10^{-5} (Sn).

Графіки кутових залежностей ступеня поляризації $p(\theta)$ наведені на рис. 3. Видно, що зі збільшенням кута падіння спостерігається тенденція до зменшення ступеня поляризації. Максимальну величину деполіризації $1 - p$ при $\theta = 80^\circ$ можна оцінити як 10% для Au та 2% для

Sn. Окремо виокремлюється з-поміж інших графік для зразка Sn_10_mg. Як свідчать результати АСМ, еліпсометрії та питомого опору, олова на поверхні цього зразка вкрай мало. Значна деполіризація даного зразка, можливо, зумовлена незаповненими нерівностями рельєфу скляної підкладки. Усереднені значення кожного графіка $\langle p \rangle$ також представлені у табл. 1.

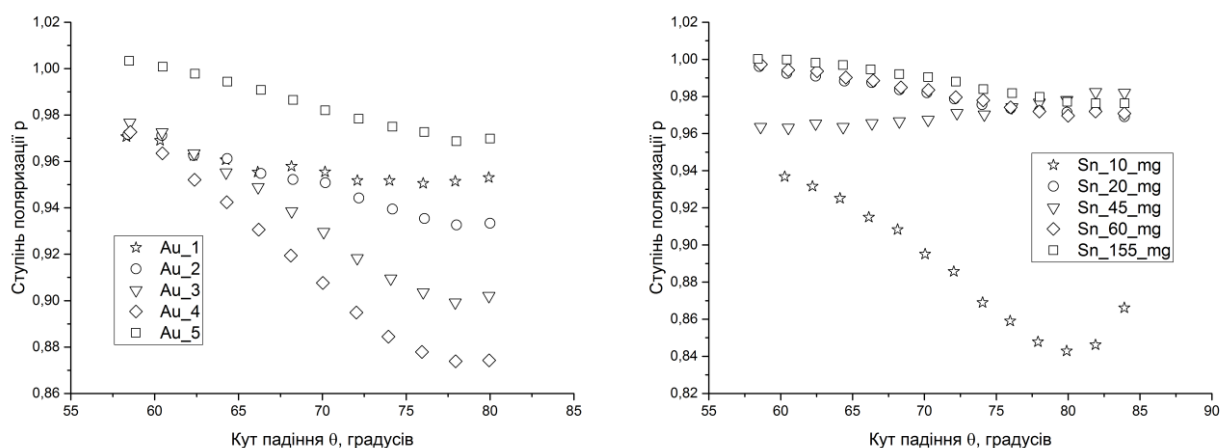


Рис. 3. Кутові залежності ступеня поляризації відбитого променя $p(\theta)$ для двох серій зразків на основі Au та Sn

Таблиця 1.

Порівняння будови та властивостей острівцевих плівок Au та Sn, одержаних різними методами дослідження

Зразок	Номінальна товщина, нм	АСМ-мікроскопія			Еліпсометрія ефективного шару			Пропускання		Ступінь поляризації $\langle p \rangle$
		Кількість зерен	Середній розмір зерна, нм	Питомий опір, $10^{-6} \cdot \text{Ом} \cdot \text{м}$	n	k	d_eff, нм	T	d_eff, нм	
Au_1	---	15	215	---	0,43	0,391	4	0,76	3,1	0,957
Au_2	---	228	194	---	2,03	0,880	9	0,62	6,1	0,951
Au_3	---	613	146	20	1,35	1,732	52	0,48	9,7	0,935
Au_4	---	701	158	30	1,37	1,443	49	0,52	8,6	0,916
Au_5	---	64	173	8,2	0,89	1,931	79	0,26	18	0,985
Sn_10_mg	2,7	---	---	---	2,00	0,806	36	0,56	4,2	0,887
Sn_20_mg	5,4	2012	148	8,3	1,11	2,314	79	0,010	37	0,980
Sn_45_mg	12,2	741	226	2,9	1,23	1,414	56	0,000 72	59	0,971
Sn_60_mg	16,3	228	211	4,5	1,15	2,610	55	0,000 45	63	0,981
Sn_155_mg	42,2	159	266	0,89	1,21	3,521	58	0,000 41	64	0,987

Очевидно, що ступінь поляризації залежить від співвідношення між когерентною та дифузною компонентами розсіяного світла.

Одразу необхідно відзначити, що кутові залежності ступеня поляризації $p(\theta)$ не описуються класичними законами розсіяння світла шорсткою поверхнею. Так, згідно [13] при збільшенні кута падіння інтенсивність дзеркальної компоненти зростає, а, отже, зростає і відношення між когерентною та дифузною компонентами. За таких умов має зростати і ступінь поляризації. Результати експерименту демонструють протилежне.

Пояснення полягає в особливостях екстинкції частинок з розмірами, меншими за довжину хвилі падаючого випромінювання. Розсіяння та поглинання однією такою частинкою може бути цілком точно описано за допомогою теорії Мі. Збільшення центрів розсіяння веде до зростання екстинкції всієї плівки, збільшення дифузної компоненти розсіяного світла та зниження ступеня поляризації відбитого випромінювання. Відповідні дані по кількості частинок на одиниці площі, пропускання плівок та ступеню поляризації містяться в табл. 1. Так, для зразків Au_1-Au_4 спостерігається зменшення ступеню поляризації p при зростанні кількості центрів розсіяння, а для зразка Au_5 утворення на поверхні суцільної плівки металу з окремими частинками золота, які виступають над поверхнею, веде до зростання цього параметра.

Однак, отримані залежності не можуть бути пояснені лише адитивністю екстинкцій окремих частинок. Повна модель повинна враховувати взаємодію як окремої частинки з частинками, які її оточують, так і взаємодію частинки з підкладкою на якій вона знаходиться. Відповідним питанням присвячена значна кількість робіт, наприклад, [14, 15].

З рис. 3 видно, що при збільшенні кута падіння θ ступінь поляризації p зменшується. На думку авторів, така поведінка може бути пояснена особливостями розсіяння за наявності підкладки. При цьому в опроміненні окремої частинки, окрім падаючої хвилі, бере участь хвиля, яка відбивається від підкладки. Допустивши наближення щодо незалежності розсіяння окремими частинками та відсутності інтерференції між розсіяними компонентами, породженими прямою та відбитою хвилями, некогерентну складову в напрямку дзеркального відбивання можна представити сумою цих двох компонент. У той час, як для обраної частинки

інтенсивність розсіяної компоненти, що відповідає прямій хвилі, визначається інтенсивністю цієї хвилі та значенням індикатриси розсіяння частинки в напрямку подвійного кута падіння відносно напрямку освітлення, для розсіяної компоненти, породженої відбитою хвилею, значення інтенсивності визначається інтенсивністю падаючої хвилі, коефіцієнтом відбивання поверхні підкладки та значенням індикатриси розсіяння частинки вздовж напрямку освітлення. Для ілюстрації на рис. 4 наведено типовий вигляд індикатриси розсіяння для золотої сферичної частинки. Діаметр частинки 0,18 мкм, розрахунок виконано за допомогою програми ScatLab. Для частинки олова вигляд індикатрис принципально не відрізняється.

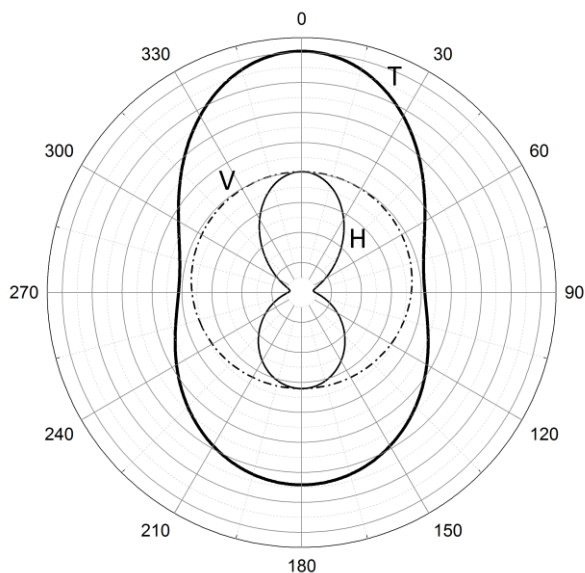


Рис. 4. Індикатриси розсіяння світла $\lambda = 0,625$ мкм сферичними частинками Au діаметром 0,18 мкм. Н – горизонтальна поляризація (p), V – вертикальна поляризація (s), T – їх сума (площина діаграми вважається горизонтальною). Азимутальна шкала в градусах, радіальна – в умовних одиницях.

Видно, що про збільшенні кута падіння θ від 55° до 80° інтенсивність розсіяної компоненти, яка породжена падаючою хвилею, буде рости завдяки збільшенню значення індикатриси для р-поляризації при зменшенні кута розсіяння від 70° до 20° . Ефект підсилюється також внаслідок збільшення френелівського коефіцієнта відбивання. Обидва ці чинники збільшують інтенсивність некогерентної складової при

великих кутах падіння, а отже, зменшують ступінь поляризації світла p , яке розповсюджується в напрямку дзеркального відбивання. При великих кутах падіння внаслідок багатократних відбивань та затінення на окремих частинках, інтенсивність розсіяної компоненти дещо зменшується, що веде до зростання ступеню поляризації, яке спостерігається на графіках.

Висновки

Тонкі острівцеві плівки металів Au та Sn на скляній підкладці здатні частково деполаризувати оптичне випромінювання при відбиванні. Величина деполаризації складає

порядку 10% для золотих і 2% для олов'яних досліджених зразків. Вона зростає зі збільшенням кута падіння θ і досягає максимального значення поблизу $\theta = 80^\circ$.

Така неklasична поведінка може бути пояснена тим, що при збільшенні кута падіння зростає частка розсіяного острівцями випромінювання в напрямку відбитого променя, що знижує сумарний ступінь поляризації p .

Суттєвою перевагою Стокс-поляриметрії при дослідженні острівцевих плівок є те, що цей метод дозволяє одержати певну інформацію про морфологічну будову поверхні, тоді як звичайна еліпсометрія надає лише ефективні параметри шару.

Список використаної літератури

1. McPeak K. M. Plasmonic Films Can Easily Be Better: Rules and Recipes. / K. M. McPeak, S. V. Jayanti, S. J. P. Kress, S. Meyer, S. Iotti, A. Rossinelli, and D. J. Norris // *ACS Photonics*. – 2015. – vol. 2, pp. 326–333.
2. Jellison G. E. Ellipsometry / G. E. Jellison // *Encyclopedia of Spectroscopy and Spectrometry*. Elsevier. – 1999. – pp 402-411.
3. Takeuchi K. Optical properties of β -Sn films. / K. Takeuchi and S. Adachi // *Journal of Applied Physics*. – 2009. – 105(7), 73520.
4. Zorc H. Use of gold island films in design of reflectors with high luminosity. / H. Zorc, M. Lončarić, and J. Sancho-Parramon // *Applied Optics*. – 2011. – 50(9), C364.
5. Lahav M. Biological Sensing Using Transmission Surface Plasmon Resonance Spectroscopy. / M. Lahav, A. Vaskevich, and I. Rubinstein // *Langmuir*. – 2004. – 20(18), 7365–7367.
6. Mosier-Boss P. A. Comparison of Three Methods to Improve Adherence of Thin Gold Films to Glass Substrates and Their Effect on the SERS Response. / P. A. Mosier-Boss, and S. H. Lieberman // *Applied Spectroscopy*. – 1999. – 53(7), 862-873.
7. Partridge J. G. Nanostructured SnO₂ films prepared from evaporated Sn and their application as gas sensors. / J. G. Partridge, M. R. Field, J. L. Peng, A. Z. Sadek, K. Kalantar-Zadeh, J. Du Plessis, and D. G. McCulloch // *Nanotechnology*. – 2008. – 19(12), 125504.

References

1. MCPEAK, K. M. et al. (2015) Plasmonic Films Can Easily Be Better: Rules and Recipes. *ACS Photonics*. 2, P. 326–333.
2. JELLISON, G. E. (1999) Ellipsometry. In: *Encyclopedia of Spectroscopy and Spectrometry*. San Diego: Academic Press. P. 402-411.
3. TAKEUCHI, K., and ADACHI, S. (2009) Optical properties of β -Sn films. *Journal of Applied Physics*, 105(7), 73520.
4. ZORC, H., LONČARIĆ, M., & SANCHO-PARRAMON, J. (2011) Use of gold island films in design of reflectors with high luminosity. *Applied Optics*, 50(9), C364.
5. LAHAV, M., VASKEVICH, A., and RUBINSTEIN, I. (2004) Biological Sensing Using Transmission Surface Plasmon Resonance Spectroscopy. *Langmuir*, 20(18), 7365–7367.
6. MOSIER-BOSS, P. A., and LIEBERMAN, S. H. (1999). Comparison of Three Methods to Improve Adherence of Thin Gold Films to Glass Substrates and Their Effect on the SERS Response. *Applied Spectroscopy*, 53(7), 862-873.
7. PARTRIDGE, J. G. et al. (2008) Nanostructured SnO₂ films prepared from evaporated Sn and their application as gas sensors. *Nanotechnology*, 19(12), 125504.

8. *Yampolskiy A. L.* Ellipsometry of hybrid noble metal-dielectric nanostructures. / A. L. Yampolskiy, O. V. Makarenko, L. V. Poperenko, and V. O. Lysiuk // *Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics*. – 2018. – 21, №4, p. 412.
9. *Валах М. Я.* Эффективные наноструктурированные SERS подложки для диагностики ультрамалых количеств вещества. / М. Я. Валах, В. А. Юхимчук, А. М. Грещук, С. А. Костюкевич, Н. А. Матвеевская // *Наноразмерные системы и наноматериалы: исследования в Украине / Редкол.: А.Г. Наумовец (глав.ред.); НАН Украины. – К.: Академперіодика, 2014. – с. 283.*
10. *Аюпова А. Х.* Влияние химической обработки на топографию поверхности стекла при его подготовке к иммобилизации биомолекул. / А. Х. Аюпова, Р. Р. Гарафутдинов, А. В. Чемерис, Р. Ф. Талипов // *Вестник Башкирского университета. – 2012. – т. 17, №4. – с. 1677.*
11. *Olmon R. L.* Optical dielectric function of gold. / R. L. Olmon, B. Slovick, T. W. Johnson, D. Shelton, S. H. Oh, G. D. Boreman, and M. B. Raschke // *Physical Review B*. – 2012. – 86(23), 235147.
12. *Makarenko O. V.* Ellipsometric diagnostics of a transient surface layer in optical glass. / O. V. Makarenko, L. V. Poperenko, O. I. Zavalisty, and A. L. Yampolskiy // *Ukrainian Journal of Physics*. – 2019. – 64(5), 442.
13. *Топорец А. С.* Оптика шероховатой поверхности. / А. С. Топорец - Ленинград: Машиностроение: Ленингр. отд-ние, 1988. – 190 с.
14. *Maksimenko V. V.* Effective dielectric permeability of island metal films: Light scattering and absorption. / V. V. Maksimenko, V. A. Zagaynov, A. S. Smoliyanskiy, and I. E. Agranovski // *Thin Solid Films*. – 2017. – 621, 84–90.
15. *Germer T. A.* Polarized optical scattering by inhomogeneities and surface roughness in an anisotropic thin film. / T. A. Germer, K. A. Sharma, T. G. Brown, and J. B. Oliver // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2017. – 34(11), 1974.
8. *YAMPOLSKIY, A. L., MAKARENKO, O. V., POPERENKO, L. V., and LYSIUK, V. O.* (2018) Ellipsometry of hybrid noble metal-dielectric nanostructures. *Semiconductor Physics, Quantum Electronics and Optoelectronics*. 21, №4, p. 412.
9. *VALAKH, M. YA.* et al. (2014) Effective nanostructured SERS substrates for the diagnosis of ultra-small amounts of a substance. In: *Nano-size systems and nanomaterials: researches in Ukraine*. Ed. A. G. Naumovets., NAS of Ukraine, Kyiv: Academperiodyka. p. 283.
10. *AYUPOVA, A. H., GARAFUTDINOV R. R., CHERMERIS A. V., and TALIPOV R. F.* (2012) The influence of chemical treatment on the glass surface topography during its preparation for the immobilization of biomolecules. *Bulletin of the Bashkir University*. 17, №4, p. 1677. (in Russian)
11. *OLMON, R. L.* et al. (2012). Optical dielectric function of gold. *Physical Review B*, 86(23), 235147.
12. *MAKARENKO, O. V., POPERENKO, L. V., ZAVALISTYI, O. I., & YAMPOLSKIY, A. L.* (2019) Ellipsometric diagnostics of a transient surface layer in optical glass. *Ukrainian Journal of Physics*, 64(5), 442.
13. *TOPORETS, A. S.* (1988) *Optics of rough surface*. USSR, Leningrad: Engineering, 190 p.
14. *MAKSIMENKO, V. V., ZAGAYNOV, V. A., SMOLIYANSKIY, A. S., and AGRANOVSKI, I. E.* (2017) Effective dielectric permeability of island metal films: Light scattering and absorption. *Thin Solid Films*, 621, 84–90.
15. *GERMER, T. A., et al.* (2017) Polarized optical scattering by inhomogeneities and surface roughness in an anisotropic thin film. *Journal of the Optical Society of America A*, 34(11), 1974.

Надійшла до редколегії 30.11.2018

Підписано до друку _____ . Формат _____ . Друк. офс.
Папір офс. № __ . Друк. арк. ____ . Тираж _____ . Зам. ____ .
Друкарня _____ .