

Публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

Для науковців, викладачів, студентів.

The bulletin publishes original articles devoted to topical problems of mathematical analysis, theory of differential equations, mathematical physics, geometry, topology, algebra, probability theory, optimal control, theoretical mechanics, elasticity theory, fluid and gas mechanics. All articles submitted to the Editorial board are reviewed. After publication, each article is provided with an abstract in "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). A table of contents and the summaries of the articles are located on the Web-site <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>.

For scientist, professors, students.

ВІДПОВІДАЛЬНИЙ РЕДАКТОР	М.Ф. Городній, д-р фіз.-мат. наук, проф.
РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ	В.Г. Самойленко, д-р фіз.-мат. наук, проф. (заст. відп. ред.); О.В. Зайцев, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (відп. секр.); Ю.А. Дрозд, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Кириченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Б.М. Кіфоренко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.В. Козаченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Г.Л. Кулініч, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.В. Мелешко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Ю.С. Мішура, д-р фіз.-мат. наук, проф.; Л.В. Мольченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Парасюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.; М.О. Перестюк, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.П. Петравчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.; О.М. Станжицький, д-р фіз.-мат. наук, проф.; В.І. Суцанський, д-р фіз.-мат. наук, проф.; А.Ф. Улітко, чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.; І.О. Шевчук, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Адреса редколегії	03127, Київ-127, просп. акад. Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет; ☎ (38044) 259 05 42; E-mail: alex_z_ua@univ.kiev.ua
Затверджено	Вченою радою механіко-математичного факультету 14.02.11 (протокол № 7)
Атестовано	Вищою атестаційною комісією України. Постанова Президії ВАК України № 1-05/4 від 26.05.2010
Зареєстровано	Міністерством юстиції України. Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 16007-4479Р від 11.12.09
Засновник Та видавець	Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02
Адреса видавця	01601, Київ-601, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43; ☎ (38044) 239 32 22; факс 239 31 28

ЗМІСТ

Губська В. Динаміка резервуара з рідиною з вільною поверхнею при обмеженні руху пружним закріпленням	4
Косткін К. К. Рух рідини в околі вихрової доріжки фон Кармана	7
Гап'як І. Динаміка виділеної частинки в нескінченночастинковій системі	10
Герасименко В. І., Федчун Ю. Ю. Еволюційні рівняння в функціональних похідних багаточастинкових систем	17
Семків М. Локальні розв'язки задач динамічного поширення однорідних та інтерфейсних тріщин	22
Харитонов О. Дослідження ефективності комбінування великої та малої тяги при міжпланетних перельотах.....	27
Козак І., Масол В. Про відхилення розподілу числа конфігурацій заданого типу від розподілу Пуассона	32
Яровой Л. Особливості роботи лазерного доплерівського віброметра з трихвилевим фотозмішуванням в нанометровому діапазоні.....	39
Щербіна А. Порівняння оцінок середніх значень для сумішей зі змінними концентраціями на модельованих даних	43
Баркова О. Поступове навантаження поверхні пружного півпростору різними видами осесиметричних навантажень	48
Шворак М. Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термопружності для двошарового циліндра	51
Богун Р. Власні коливання рідини з пластинкою на її вільній поверхні в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном.....	55
Андросенко М., Кільчинський О., Клецька Т., Крижановська Т. Геометричні ознаки кореляційної функції стаціонарного випадкового процесу з дискретним спектром	59
Анатолій Володимирович Скороход (10.09.1930 – 03.01.2011)	62
Ігор Борисович Романенко (28.04.1975 – 09.02.2011)	64

CONTENTS

Gubska V. Dynamic of conic reservoir with liquid with a free surface for motion restriction by elastic fixing	4
Kostkin K. K. Fluid motion in the vicinity of the von Karman vortex street	7
Gapyak I. Dynamics of tagged particle in infinite-particle system.....	10
Gerasimenko V., Fedchun Yu. Evolution equations of many-particle systems in functional derivatives	17
Semkiv M. Local solution to problem of dynamic distribution of uniform and interface cracks	22
Kharytonov O. The investigation of the efficiency of the combination of high- and low-thrust arcs for interplanetary transfers.....	27
Kozak I., Masol V. On deviation of distribution of configurations' number of given type from Poisson distribution	32
Yarovoi. L. Some features in LDV with three interacting waves in nanometer range.....	39
Shcherbina A. Comparison of mean value estimators for mixtures with varying concentrations on simulated data	43
Barkova O. A gradual loading of an elastic half-space surface by axisymmetric load of different kind.....	48
Shvorak M. Analytical solution of non-stationary thermoelasticity problem which corresponds to a thermal shock of a two-layered cylinder	51
Bogun R. Investigation of free coupling oscillations of a fluid and a plate on its free surface in a cylindrical container with an axisymmetric bottom	55
Androsenko M., Kil'chynskiy O., Klets'ka T., Kryzhnovska T. Geometrical signs of correlation function of stationary stochastic process with the discrete spectrum	59
Anatoliy Volodymyrovych Skorohod (10.09.1930 – 03.01.2011)	62
Igor Borysovych Romanenko (28.04.1975 – 09.02.2011)	64

**ДИНАМІКА РЕЗЕРВУАРА З РІДИНОЮ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ
ПРИ ОБМЕЖЕННІ РУХУ ПРУЖНИМ ЗАКРІПЛЕННЯМ**

Розглянуто задачу про коливання рідини в рухомому резервуарі у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною під дією імпульсної сили при наявності пружного закріплення. Досліджено хвильові рухи рідини і рух резервуару.

We consider the problem of dynamics of combined motion of liquid bounded volume and reservoir of conic shape under action of impulse force and the presence of elastic fixing. Wave motion of liquid and reservoir motion were investigated.

1. Вступ

Розглянемо задачу динаміки рідини з вільною поверхнею при обмеженні руху пружним закріпленням. Припускаємо, що рідина ідеальна однорідна, нестислива і в початковий момент часу вихрові рухи відсутні. У цьому випадку кінематика рідини може бути описана потенціалом швидкостей. Резервуар є абсолютно твердим тілом з абсолютно жорсткими стінками. Обмежуємось випадком поступального руху резервуара.

У відомих працях Г. С. Нариманова, Б. І. Рабиновича, Л. В. Докучаєва, І. О. Луковського, Дж. Майлса, Г. Бауера, О. М. Тимохи, П. С. Ковальчука, О. Фалтінсена, О. С. Лимарченка та інших. розглядалися нелінійні задачі коливань рідини в резервуарах. Так було показано, що варіаційні методи в застосуванні до такого роду задач дають ефективні результати. Дослідження таких задач пов'язані також і з тим, що ці задачі є одним з різновидів неklasичних задач Неймана для рівняння Лапласа. Незважаючи на численні публікації в цій галузі задачі динаміки сумісного руху резервуарів з рідиною досліджувалися в недостатній мірі.

Метою статті є побудова ефективної математичної моделі для дослідження нелінійної задачі динаміки сумісного руху системи, що складається з резервуару у формі усіченого конуса і рідини з вільною поверхнею, а також дослідження характерних режимів розвитку коливань системи, рух якої обмежено пружним закріпленням.

2. Метод дослідження

Розглянемо резервуар у формі усіченого конуса. Рух рідини описується в системі координат, незмінно зв'язаної з резервуаром. Нехай τ – область, яку займає рідина; $\frac{\partial}{\partial n}$ – зовнішня нормаль до поверхні; S_0 і S – вільна поверхня рідини в її збуреному і незбуреному русі; Σ і Σ_0 – границі контакту рідини зі стінками резервуару у збуреному та незбуреному стані ($\Delta\Sigma$ – зміна контакту рідини, зумовлена збуренням руху, $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$), $\xi(x, y, z, t) = 0$ – рівняння вільної поверхні рідини, U – потенціальна енергія зовнішніх сил. Поступальний рух резервуара описується вектором переміщень $\vec{\epsilon}$.

Постановка задачі [1]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \tau; \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \dot{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{n} \text{ на } \Sigma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \text{ на } S; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 - \vec{\nabla}\varphi \cdot \dot{\vec{\epsilon}} - \vec{g} \cdot \vec{r} = 0 \text{ на } S. \tag{4}$$

Тут рівняння (1) відповідає вимозі нерозривності потоку в об'ємі рідини τ , (2) – умова неперетікання на твердій межі контакту тіло – рідина Σ , (3) – умова неперетікання на вільній збуреній поверхні рідини S , (4) – динамічна гранична умова, яка відповідає рівності тисків на вільній поверхні рідини.

З точки зору аналітичної механіки задача складається з кінематичних умов (механічних в'язей) (1) – (3), які необхідно задовольнити до застосування варіаційного принципу, і динамічної умови (4), яка є природною для варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського.

Потенціал швидкостей рідини можна представити у наступному вигляді: $\Phi = \varphi + \dot{\vec{\epsilon}} \cdot \vec{r}$, де \vec{r} – радіус-вектор точок області τ , а $\vec{\epsilon}$ – параметр поступального руху тіла, що несе рідину. Перший член у виразі відповідає хвильовому руху рідини, другий – поступальному руху резервуару.

У випадку порожнини нециліндричної форми область визначення форми збуреної поверхні змінюється у часі і не співпадає з незбуреною вільною поверхнею. Ця додаткова складність (геометрична нелінійність) не дозволяє в декартовій чи циліндричній системі координат сформулювати задовільний алгоритм розв'язання нелінійних задач для порожнини довільної форми. Оскільки розв'язок задачі динаміки рідини в такій області ускладнено, для опису руху рідини вводиться недекартова параметризація області, яку займає рідина τ :

$$\alpha = \frac{r}{f(z)}; \beta = \frac{z}{H}, \tag{5}$$

де через $r = f(z)$ позначимо рівняння твірної порожнини, задане в циліндричній системі координат, H – глибина порожнини, а $z = 0$ співпадає з незбуреною вільною поверхнею рідини S_0 .

Система циліндричних координат (r, θ, z) введеною параметризацією замінюється на нову недекартову (криволінійну) (α, θ, β) ($\alpha \in [0, 1]$, де $\theta \in [0, 2\pi]$, причому в незбуреному стані $\beta \in [-1, 0]$). Головна позитивна якість введення нової

параметризації полягає в тому, що в новій параметризації внаслідок циліндричності області можливе представлення рівняння вільної поверхні в розв'язаному відносно координати β вигляді: $\beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t)$. Надалі це дозволяє ефективно застосувати методи теорії збурень і метод Канторовича для побудови нелінійної скінченновимірної моделі динаміки резервуара з рідиною.

Постановка задачі Неймана для рівняння Лапласа про рух рідини в нових змінних набуває вигляду

$$\Delta \varphi = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - f' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \text{ при } r = f(z); \quad (7)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{1}{\alpha^2 f^2} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\alpha f'}{f} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \text{ при } \beta = \frac{1}{H} \xi(\alpha, \theta, t). \quad (8)$$

Підкреслені члени з'являються внаслідок нециліндричності форми порожнини, яку займає рідина, що відображає недекартовий тип нової параметризації.

Для варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського

$$\delta I = 0, \text{ де } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (9)$$

узагальнена функція Лагранжа може бути записана у вигляді:

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau + \frac{1}{2} M_p (\dot{\epsilon})^2 - \frac{1}{2} \rho g \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_p + M_f) \epsilon_z g, \quad (10)$$

де ρ – густина рідини, M_p – маса резервуара, M_f – маса рідини, g – прискорення вільного падіння.

Наведена постановка задачі про рух обмеженого об'єму рідини в нових змінних по відношенню до варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського являє собою сукупність кінематичних в'язей, які для ефективного застосування варіаційного принципу необхідно виключити до розв'язання варіаційної задачі.

За своїм змістом вихідна задача є задачею Неймана для рівняння Лапласа і вона має бути доповнена умовами розв'язності, які можуть бути записані у вигляді

$$\int_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_{\Delta \Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma + \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0. \quad (11)$$

З точки зору аналітичної механіки варіації в об'ємі і на різних границях області вважаються незалежними, тому кожен з доданків умови (11) має обернутися в нуль. Фізичний зміст умови (11) полягає у збереженні об'єму рідини у її збуреному русі, які мають виконуватися для довільного закону руху. Перший доданок означає виконання в слабкому сенсі умови неперетікання через незмочену в незбуреному стані стінку баку. Другий доданок означає виконання умови неперетікання рідини на деякому продовженні стінки баку над вільною поверхнею, куди можуть досягати гребені хвиль. Третя умова відповідає вимозі збереження об'єму рідини в збуреному русі вільної поверхні. Тобто умови розв'язності задачі Неймана приводять до виникнення додаткових кінематичних обмежень руху системи, причому задовольнити ці умови слід на етапі побудови розкладів змінних до реалізації варіаційного принципу.

Слід відзначити, що в класичну постановку задачі (1) – (4) продовження змоченої поверхні $\Delta \Sigma$, куди можуть досягати гребені хвиль, не входить. Проте в збуреному русі системи рідина має не перетікати через поверхню $\Delta \Sigma$. Тому при застосуванні такої постановки класичного методу, для розв'язання поставленої задачі, виконання цих умов може бути порушене. Для розв'язання нелінійної задачі для подолання такого недоліку був розроблений метод допоміжної області [1]. За методом допоміжної області вводиться додаткове збільшення глибини заповнення резервуару. Далі на основі класичного методу розв'язується задача для області $\tau + \Delta \tau$, де $\Delta \tau$ вибирається на основі вимоги умови неперетікання на продовженні стінки баку $\Delta \Sigma$ з урахуванням очікуваних амплітуд збурення вільної поверхні. У цьому випадку сингулярні властивості одержаних розв'язків будуть проявлятися в околі максимального підйому поверхні хвилі біля стінки резервуара. Проте, в околі точки рівноважного положення вихідної поверхні, яка тепер є внутрішньою точкою поверхні $\Sigma + \Delta \Sigma$ для області $\tau + \Delta \tau$, розв'язок має регулярні властивості. За допомогою такого прийому особлива точка "піднімається" над реальною поверхнею. Розв'язки для такого положення рідини зносяться на вихідну поверхню.

Для розв'язання задачі скористаємось прямими методами математичної фізики, зокрема, методом Канторовича. При цьому розв'язок задачі на вільній поверхні розкладається в ряд по функціях, отриманих з розв'язку відповідної лінійної задачі, а розв'язок для потенціалу швидкостей будується з такими додатковими вимогами, щоб ці функції задовольняли умові неперетікання на $\Delta \Sigma$. Класична задача про визначення частот і форм коливань рідини має вигляд

$$\Delta \varphi = 0 \text{ в } \tau; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma_0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \lambda \varphi \text{ на } S_0, \text{ або } \delta I = 0, \text{ де } I = \int_{\tau_0} (\nabla \varphi)^2 d\tau - \lambda \int_{S_0} \varphi^2 ds. \quad (12)$$

Для знаходження мінімуму функціоналу (12) скористаємось методом Рітца. Будемо шукати функцію φ у вигляді послідовності лінійних комбінацій координатних функцій w_k . Тобто для чисельної реалізації використаємо як координатні функції такі фундаментальні розв'язки рівняння Лапласа $\varphi \sim w_k^{(m)}(r, z) \frac{\sin m\theta}{\cos m\theta}$, де $w_k^{(m)}(r, z)$ є системою гармонічних поліномів [3], які одержуються з фундаментальних розв'язків рівняння Лапласа для сферичної системи

координат, перетворених до циліндричної системи. Функції $w_k^{(m)}$ взагалі не залежать від геометрії області і для їх обчислення, а також визначення їх похідних існують відповідні рекурентні співвідношення. Задача зводиться до розв'язання алгебраїчної задачі на власні значення $Ax - \lambda Bx = 0$, для якої коефіцієнти визначаються у вигляді квадратур від базисних функцій.

Для побудови координатних функцій для розв'язку нелінійної задачі був використаний метод допоміжної області, який на відміну від класичного методу не враховує виконання умови неперетікання вище рівня незбуреної вільної поверхні, враховує залежність розв'язку задачі від характеристик $\Delta\Sigma$. Для оцінки точності отриманого розв'язку приймалася похибка у вигляді $\delta = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma} / \max \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_0}$. Отримані функції з точністю 10^{-5} і вище задовольняють

умові неперетікання на стінці, і з точністю порядку 10^{-3} на продовженні стінки над вільною поверхнею. За умови використання методу допоміжної області, похибки умови неперетікання вище рівня вільної поверхні вдалося покращити в 100-500 разів.

Розклади шуканих змінних збурення вільної поверхні рідини ξ і потенціалу швидкостей φ аналогічно [1, 2] подамо у вигляді:

$$\xi = \bar{\xi}(t) + a\bar{\psi}(\alpha)T(\theta); \quad \varphi = b\psi(\alpha, \beta)T(\theta), \quad (13)$$

де $\bar{\psi}(\alpha) = \frac{\partial\psi}{\partial z}$, $\psi(\alpha, \beta)$ отримуються з розв'язку лінійної задачі на власні значення. Кут θ відділено як співмножник $T_i(\theta)$ для вісесиметричної вихідної області. $\psi_i(\alpha, \beta)$ є гармонічними і згідно вимог умов розв'язності (6)–(8), уточнено задовольняють вимогу неперетікання на змоченій границі $\Sigma = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$.

За незалежні змінні обираються параметри ξ та $\bar{\xi}$, а змінна φ вважається залежною. Сукупність амплітудних параметрів a_i розкладу збуреної вільної поверхні рідини в ряд за формами вільних коливань вважається незалежною, а параметри b_i розкладу в ряд потенціалу швидкостей, вважаються залежними від a_i , тобто $b_i = b_i(a_i, a_k)$.

Згідно принципів аналітичної механіки задача вимагає виключення кінематичної крайової умови на вільній поверхні, що зумовлено наявністю вільної поверхні рідини. Виключення кінематичної граничної умови і вимоги збереження об'єму рідини на вільній поверхні проводиться на основі методу Гальоркіна [5].

$$b_p^{(1)} = \dot{a}_p; \quad b_p^{(2)} = \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \gamma_{ijp}^0; \quad b_p^{(3)} = \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \delta_{ijkp}^0; \quad b_p^{(4)} = \sum_{i,j,k,l} \dot{a}_i a_j a_k a_l h_{ijklp}^0. \quad (14)$$

$$\bar{\xi}_1 = 0; \quad \bar{\xi}_2 = -\frac{e_2}{e_1} \sum_{i,j} a_i a_j \beta_{ij}^v; \quad \bar{\xi}_3 = -\frac{e_3}{e_1} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \gamma_{ijk}^v; \quad \bar{\xi}_4 = -\frac{e_4}{e_1} \sum_{i,j,k,l} a_i a_j a_k a_l \delta_{ijkl}^v.$$

Таким чином, параметри $\bar{\xi}$ і b_i як залежні змінні виключаються з розгляду. Це дозволяє перейти до застосування варіаційного принципу Гамільтона–Остроградського для вільної системи, рух якої визначається незалежними параметрами a_i і $\bar{\xi}$. На основі рівнянь Лагранжа II роду одержимо таку математичну модель сумісного руху системи "резервуар-рідина" в амплітудних параметрах a_i та параметрах руху тіла, яке несе $\bar{\xi}$:

$$\sum_{n=1}^N p_{rn}(a_k, t) \ddot{a}_n + \sum_{n=N+1}^{N+3} p_{rn}(a_k, t) \ddot{\xi}_{n-N} = q_r(a_k, \dot{a}_l, t), \quad r = \overline{1, N+3}. \quad (15)$$

Вирази для p_{rn} , q_r , де p_{rn} – квадратна матриця, q_r – вектор розмірності $N+3$, записуються [1] через алгебраїчні форми від нульового до третього порядків від амплітудних параметрів a_i та узагальнених швидкостей \dot{a}_j .

Розглянемо тестові приклади сумісного руху резервуару з рідиною під дією імпульсної сили при наявності пружного закріплення у вигляді пружини. На рис. 1 – 4 подано графіки зміни амплітуди коливань рідини за першою формою під дією імпульсної сили для двох випадків жорсткості пружини C : а) при наявності поновлюючої сили і відсутності тертя (рис. 1); 2. При наявності і поновлюючої сили і сили тертя (рис. 2). Імпульсна сила, величиною 0,9 Н, діє протягом 0,5 с. Розглянуто випадки для жорсткості пружини 5 і 10. Часовий проміжок розвитку коливань становив 15 с. Тестові приклади розглянуто для усеченого конуса з радіусом нижньої основи 0,2 м і верхньої – 1 м.

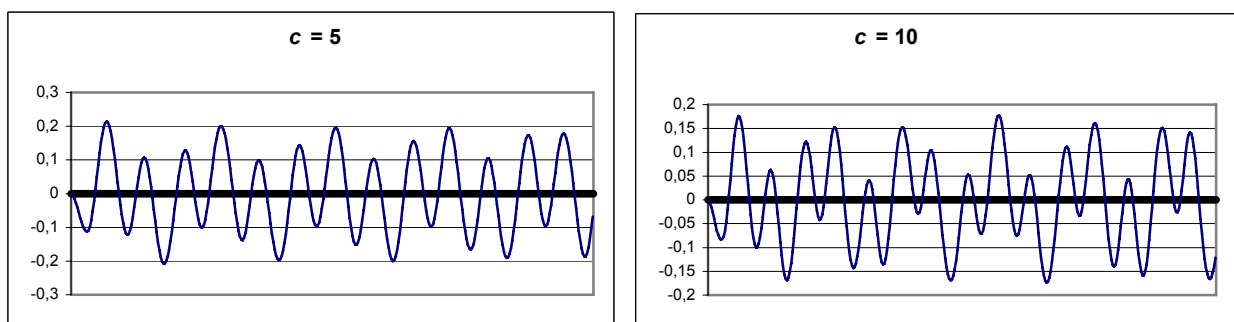


Рис. 1. Зміна амплітуди коливань рідини a_1 з часом при наявності поновлюючої сили

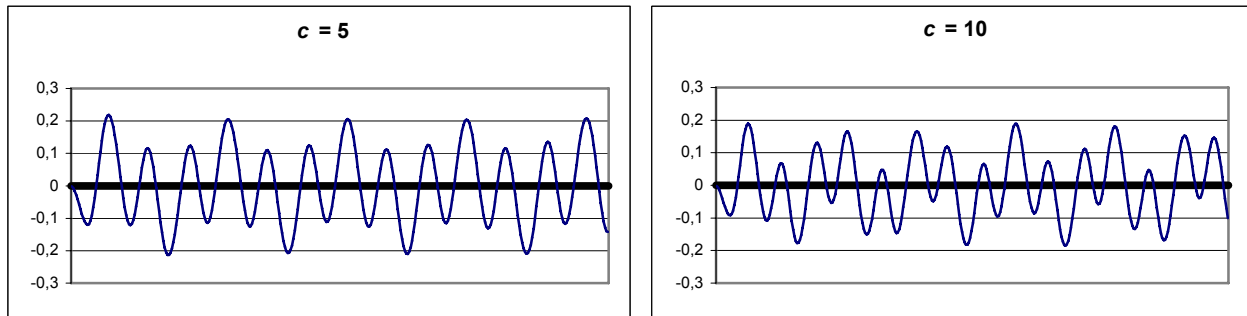


Рис. 2. Зміна амплітуди коливань рідини a_1 з часом при наявності поновлюючої сили і сили тертя

Результати тестових прикладів показали, що в обох випадках при дії імпульсної сили на резервуар амплітуди хвиль на вільній поверхні зменшуються зі збільшенням жорсткості пружини. Відбувається процес енергообміну між формами коливань, в законі зміни амплітуди присутня часова модуляція. Для випадку звичайного конуса з напівкутом 45° отримані розв'язки співпадають з відомими розв'язками [1].

3. Висновки

Дослідження показали, що розроблена модель дає результати з придатною точністю для випадку усіченого конічного резервуару і більш повно враховує нелінійний характер розвитку процесів і енергообміну між формами коливань рідини і рухом рідини і резервуару. Виконано контроль точності отриманих розв'язків. Для задач кінематичного і динамічного збудження руху резервуару з рідиною показано як жорсткість пружини впливає на енергообмін між формами коливань і розвиток динамічних процесів.

1. Лимарченко О. С., Ясинский В. В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ "КПИ", 1997. – 348 с. 2. Лимарченко О. С., Семенова И. Ю. Построение координатных функций для решения нелинейной задачи о колебании жидкости в параболоиде вращения // Комплексный анализ і течії з вільними границями: Збірник праць Інституту математики НАН України. – К.: Інститут математики НАН України, 2006. – Т. 3, № 4. – С. 374–388. 3. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с. 4. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с. 5. Ibrahim R. A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge University Press, 2005. – 950 p.

Надійшла до редколегії 25.02.2011 р.

УДК 532.5

К. К. Косткін, асп.

РУХ РІДИНИ В ОКОЛІ ВИХРОВОЇ ДОРІЖКИ ФОН КАРМАНА

Розглянуто дві нескінченні вихрові структури, кожна з яких складається з точкових вихорів, що розташовані на двох паралельних прямих. Досліджено рух вихрових структур та рідини в їх околі. Отримано рівняння ліній току та побудовано зображення ліній току.

Consider two infinite vortex structure. Each of which consists of point vortices are located on two parallel lines. Studied the movement of vortex structures and movement of fluids in their vicinities. Obtained the equations of the streamlines and built their image.

1. Вступ

В 1906 році Бернаром були проведені перші досліді, спрямовані на вивчення вихрових явищ поза рухомими тілами. Зазвичай рухомим тілом був циліндр, чи криловий профіль. При достатньо великій швидкості руху, поза тілом починають утворюватися вихори, почергово справа та зліва, рідше парами. На початку вони віддаляються від тіла з деякою швидкістю, поступово ця швидкість зменшується, в той час як вихори дещо розходяться. На деякій відстані поза тілом встановлюється певна усталена відстань між вихорами, вихори розташовуються в шаховому, чи в лінійному порядку. Також вихори обох рядів мають протилежний напрямок обертання. Відстань між рядами вихорів не залежить від швидкості, а лише від ширини тіла. Надалі подібні досліді проводились Карманом, Рубахом та рядом інших вчених.

Вихрова доріжка Кармана складається з двох паралельних вихрових ланцюжків, що розташовані на відстані b один від одного, відстань між сусідніми вихорами дорівнює a . Один ланцюжок складається з вихорів інтенсивності χ , інший – з вихорів інтенсивності $-\chi$. Комплексний потенціал руху рідини поза вихором інтенсивності χ , центр якого знаходиться в точці z_0 , можна відшукати за рівнянням:

$$\omega = i\chi \ln(z - z_0) \quad (1)$$

Комплексний потенціал $2n+1$ ($n \rightarrow \infty$) вихорів, що розташовані у один ланцюжок, використовуючи (1) можна обчислювати як:

$$\omega_n = i\chi \ln(z) + i\chi \ln(z \pm a) + \dots + i\chi \ln(z \pm na)$$

Спрощуючи цей вираз, можемо записати:

$$\omega_n = i\chi \ln \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right).$$

Досліджуючи рух, будемо користуватися основною теоремою Томсона. У роботі [2] було показано що, ланцюжок не рухається, так як в силу симетрії всі вихорі знаходяться в стані спокою.

Також у роботі [2] було детально досліджено стійкість вихрового ланцюжка. Показано, що у випадках горизонтального зміщення одного вихору, довільного зміщення одного вихору, та зміщення усіх вихорів ланцюжка за певним законом, закон зміни координат зміщених вихорів можна подати у вигляді:

$$x = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}, y = Ce^{\beta t} + De^{-\beta t}.$$

При збільшенні величини часу t , значення x та y також будуть зростати. При будь-якому відхиленні система не повертається в початкове положення, а все більше віддаляється від нього.

Перейдемо до дослідження конфігурацій вихрових ланцюжків.

2. Шахова конфігурація

Розглянемо конфігурацію, що зображена на рис 1, коли вихори розташовано у шаховому порядку.

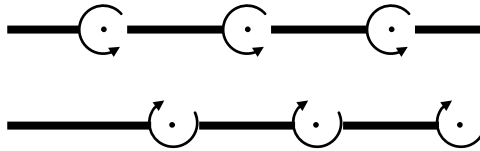


Рис 1. Шахова конфігурація

Систему координат росташуємо таким чином, що вихори верхнього ланцюжка знаходяться у точках $na + \frac{1}{2}ib$, а вихори нижнього ланцюжка – у точках $\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{1}{2}ib$, причому $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Застосовуючи рівняння (1), запишемо вираз для комплексного потенціалу досліджуваної системи:

$$\omega = i\chi \ln \sin\left(z - \frac{ib}{2}\right) - i\chi \ln \sin\left(z - \frac{a}{2} + \frac{ib}{2}\right).$$

Як було відзначено вище, жоден з ланцюжків не індукує швидкість сам на себе. Отже можна сказати, що верхній ланцюжок рухається під дією нижнього, а нижній – під дією верхнього. Таким чином комплексна швидкість вихору в точці $z = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}ib$ нижнього ланцюжка буде визначатися співвідношенням:

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \left[\frac{d}{dz} i\chi \ln \sin \frac{\pi}{a} \left(z - \frac{ib}{2} \right) \right]_{z=\frac{a}{2}-\frac{ib}{2}} = -\frac{i\chi\pi}{a} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi b}{a} \right) = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}$$

Усі вихори нижнього ланцюжка рухатимуться з однаковою швидкістю:

$$V = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{th} \frac{\pi b}{a}. \tag{2}$$

Аналогічно можна показати, що усі вихори верхнього ланцюжка рухаються з такою самою швидкістю. Отже вся система рухається зі швидкістю (2).

Розглянемо стійкість заданої системи. В момент часу t вихори верхнього ланцюжка будуть знаходитись у точках $ma + \frac{ib}{2} + Vt$, а вихори нижнього ланцюжка – у точках $\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{ib}{2} + Vt$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Змістимо вихори верхнього та нижнього ланцюжків на деякі малі величини z_m, z_n відповідно. Тоді вихори верхнього ланцюжка будуть знаходитись у точках $ma + \frac{ib}{2} + Vt + z_m$, а нижнього – у точках $\left(n + \frac{1}{2}\right)a - \frac{ib}{2} + Vt + z_n$. Комплексну швидкість вихору, що відповідає значенню $m = 0$, можна записати як:

$$V + \frac{dz_0}{dx} \tag{3}$$

Складові цієї швидкості від вихорів у точках $\pm m, n, -n - 1$ можна подати у вигляді:

$$i\chi \left(\frac{1}{z_0 - z_m - ma} + \frac{1}{z_0 - z_{-m} + ma} \right) + i\chi \left(\frac{1}{z_0 - z_n - \left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib} + \frac{1}{z_0 - z_{-n-1} + \left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib} \right).$$

Розкладаючи у числовий ряд та нехтуючи членами більше ніж першого порядку малості, можемо переписати:

$$i\chi \left(\frac{z_0 - z_m + z_0 - z_{-m}}{m^2 a^2} - \frac{z_0 - z_{-n-1}}{\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib\right)^2} - \frac{z_0 - z_n}{\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)a - ib\right)^2} \right) - i\chi \left(\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)a - ib} - \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\right)a + ib} \right) \tag{4}$$

Покладемо: $z_m = \gamma \cos m\theta, z_n = \delta \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$, де γ, δ – малі за модулем комплексні величини. Тоді, вираз (4) можна подати у вигляді:

$$\frac{2\chi i \gamma (1 - \cos m\theta)}{a^2 m^2} - \frac{2\chi i \left(\gamma - \delta \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2\right)}{a^2 \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + k^2\right)} + \frac{\chi}{a^2} \frac{2ka}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + k^2}, \quad k = \frac{b}{a}.$$

Аналогічним чином, враховуючи дію усіх інших вихорів та враховуючи співвідношення (3), отримуємо вираз вигляду:

$$\frac{d\bar{\gamma}}{dx} = \frac{2i\chi}{a^2} (A\gamma + C\delta).$$

Для будь-якого вихору з нижнього ряду можемо отримати аналогічне співвідношення. Спростуючи отримані рівняння можемо знайти вирази для A та C , а також отримати задані рівняння відносно γ . Як підсумок усіх перетворень, отримуємо умову стійкості для заданої вихрової структури $ch \frac{b}{a} \pi = \sqrt{2}$, тобто, маємо співвідношення між вихорами у системі: $\frac{b}{a} = 0,281$. У всіх інших випадках матимемо нестійкий рух. Також, аналогічно до випадку з одним вихровим ланцюжком, можна показати, що при будь-якому відхиленні одного, чи кількох вихорів від початкового положення, зі збільшенням часу, відхилення будуть збільшуватись, а вся система розвалюватись.

Розглянемо рух рідини під дією заданої системи. Функцію току можна знайти із формули:

$$2i\psi = \omega(z) - \bar{\omega}(\bar{z}). \tag{5}$$

Звідси отримуємо вираз для лінії току:

$$\psi = -\frac{\chi}{4\pi} \ln \frac{\cosh\left(2\pi y + \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}{\cosh\left(2\pi y - \frac{b}{a}\pi\right) - \sin 2\pi x}.$$

За отриманим співвідношенням побудуємо зображення ліній току. Результати представлено на рис 2.

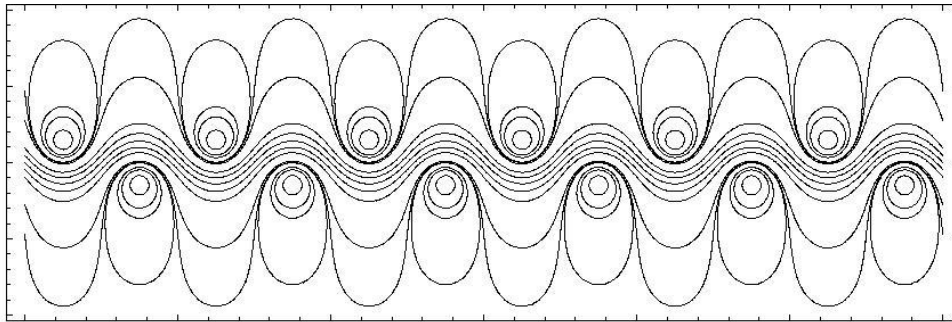


Рис 2. Лінії току для шахової конфігурації

3. Лінійна конфігурація

Розглянемо конфігурацію, що зображена на рис. 3, коли вихори розташовано у лінійному порядку.

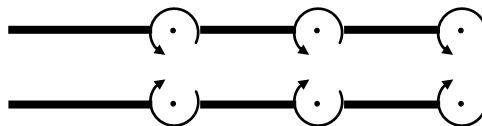


Рис 3. Лінійна конфігурація

Систему координат розташуємо таким чином, що вихорі верхнього ланцюжка знаходяться у точках $na + \frac{1}{2}ib$, а вихори нижнього ланцюжка – у точках $na - \frac{1}{2}ib$, причому $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Застосовуючи рівняння (1), запишемо вираз для комплексного потенціалу досліджуваної системи:

$$\omega = i\chi \ln \sin\left(z - \frac{ib}{2}\right) - i\chi \ln \sin\left(z + \frac{ib}{2}\right).$$

Як і у попередньому випадку, жоден з ланцюжків не індукує швидкість сам на себе. Отже можна сказати, що верхній ланцюжок рухається під дією нижнього, а нижній – під дією верхнього. Таким чином комплексна швидкість вихору в точці $z = -\frac{1}{2}ib$ нижнього ланцюжка буде визначатися співвідношенням:

$$u - iv = \frac{d\omega}{dz} = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}.$$

Аналогічну формулу маємо для будь-якого вихору верхнього ланцюжка. Отже маємо, що уся система рухається зі швидкістю:

$$V = \frac{\chi\pi}{a} \operatorname{cth} \frac{\pi b}{a}.$$

Також, аналогічно попередньому випадку, можна показати, що рух нестійкий, та вся система знаходиться у стані нестійкої рівноваги. При будь-якому зміщенні одного, кількох, чи всіх вихорів, їх відхилення будуть збільшуватися.

При дослідженні руху рідини будемо користуватися виразом (5) для знаходження функцій току. Співвідношення для функцій току можна подати у вигляді:

$$\psi = -\frac{\chi}{4\pi} \ln \frac{\cosh\left(2\pi y + \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}{\cosh\left(2\pi y - \frac{b}{a}\pi\right) + \sin 2\pi x}$$

На рис. 4 за цим співвідношенням побудовано графічне зображення ліній току.

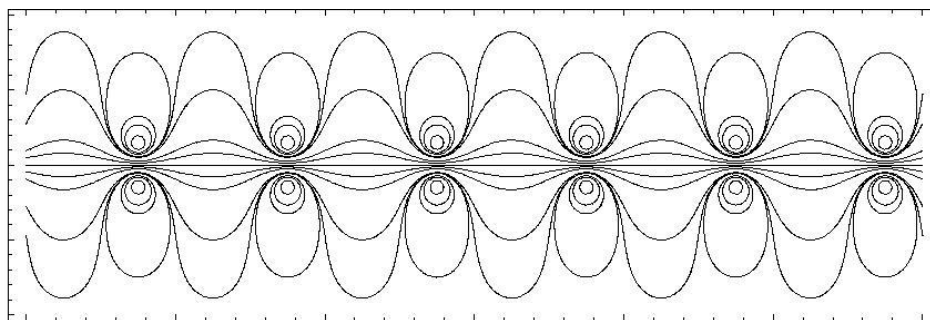


Рис 4. Лінії току для лінійної конфігурації

4. Висновки

Розглянуто дві нескінченні вихрові структури: лінійна та шахова конфігурації вихрових доріжок фон Кармана. Досліджено рух структур, отримано швидкості руху. Також розглянуто стійкість структур, показано, що задані системи вихорів знаходяться у стані нестійкої рівноваги. Розглянуто питання про рух рідини навколо даних структур. Отримано вирази для функцій току, та побудовані їх графічні портрети.

1. Борисов А. В., Мамаев И. С., Рамоданов С. М. Динамическая адвекция // Нелинейная динамика. – 2010. – № 3. – С. 521–530. 2. Косткін К. К. Стійкість вихрового ланцюжка // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – № 2. – С. 57–60. 3. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – К., 1993. 4. Aref H. Vortices and polynomials // Fluid Dynamics Research. – 2007. – Vol. 39. – P. 5–23.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УКД 517.9+531.19

І. Гап'як, асп.

ДИНАМІКА ВИДІЛЕНОЇ ЧАСТИНКИ В НЕСКІНЧЕННОЧАСТИНКОВІЙ СИСТЕМІ

На основі ієрархії рівнянь ББГКІ описано еволюцію станів системи нескінченного числа частинок з виділеною частинкою у випадку сингулярного потенціалу взаємодії пружних куль, колективна поведінка яких описується кінетичним рівнянням Фоккера-Планка. Доведено існування глобального розв'язку задачі Коші для сформульованих еволюційних рівнянь в просторі послідовностей обмежених функцій.

Evolution of states of a system of particles, which collective behavior governed by the Fokker-Plank kinetic equation, namely, an infinite-particle system with a tagged particle interacting as hard spheres, is described on the base of the BBGKY hierarchy. An existence of a global solution of the Cauchy problem for formulated evolution equations is proved in the space of sequences of bounded functions.

1. Вступ

Однією з фундаментальних проблем сучасної математичної фізики є проблема обґрунтування еволюційних рівнянь, якими описуються стохастичні процеси, на основі динаміки системи взаємодіючих частинок [1,4]. Вперше результати про стохастичну поведінку багаточастинкових систем були отримані у працях Боголюбова [1,4] за допомогою теорії збурень. В останні роки отримано низку нових строгих результатів з обґрунтування дифузійної динаміки одновимірної системи пружних куль з виділеною масивною кулею [5,7] і системи квантових частинок з виділеною частинкою для певних класів потенціалу взаємодії [9,10].

Однією з відкритих математичних задач, яка виникає при строгому дослідженні динаміки виділеної частинки в оточенні інших частинок, є побудова динаміки нескінченного числа частинок. У даній статті еволюція станів

одновимірної системи, яка складається з виділеної частинки в оточенні нескінченного числа пружних куль описується задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ. Для початкових станів з простору послідовностей обмежених функцій доведено існування глобального розв'язку сформульованих рівнянь. Розглянуто зв'язок побудованого розв'язку з кінетичним рівнянням Фоккера-Планка одновимірної системи пружних куль.

2. Динаміка виділеної частинки в системі частинок

Розглянемо багаточастинкову систему, яка складається із виділеної частинки та оточення – системи нефіксованого числа частинок. Зокрема, якщо частинки з оточення знаходяться в стані рівноваги, то еволюція такої системи частинок інтерпретується як динаміка частинки в термостаті [1]. Введемо необхідні попередні факти про динаміку одновимірної системи – виділеної частинки, яка взаємодіє з скінченим числом $n_1 + n_2$ частинок як пружні кулі (стержні). Занумеруємо частинки числами із \mathbb{Z}^1 . Будемо вважати, що під номером $i=0$ знаходиться масивна частинка маси m_0 . За допомогою $m_i > 0$ позначимо відповідну масу i -ї частинки, де $i \in (-n_2, \dots, -1, 1, \dots, n_1)$. Також будемо вважати, що кожна із частинок має довжину $\sigma > 0$. Кожна із частинок характеризується координатою центра кулі $q_i \in \mathbb{R}$ і швидкістю $v_i \in \mathbb{R}$; $(q_i, v_i) \equiv x_i$. Для такої системи частинок множина $W_n \equiv \{(q_{-n_2}, \dots, q_{n_1}) \in \mathbb{R} \mid q_{i+1} - q_i < \sigma$ хоча б для однієї пари $(i, i+1) \in [(-n_2, -n_2 + 1), \dots, (n_1 - 1, n_1)]\}$ визначає множину заборонених конфігурацій.

Фазові траєкторії одновимірної системи пружних куль визначені майже скрізь на фазовому просторі $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, крім множини M_n^0 , лебегова міра якої дорівнює нулю [8]. Множині початкових даних M_n^0 належать значення $(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, для яких при $t \in (-\infty, \infty)$ в системі виникають кратні (потрійні і т. д.) зіткнення куль та на скінченному інтервалі часу виникає нескінченне число зіткнень. Фазова траєкторія будується аналогічно багатовимірному випадку [6]. Функція $X(t, x)$ існує і єдина при $t \in (-\infty, \infty)$ для майже всіх початкових даних $x \notin M_n^0$, неперервно диференційована за x і t на будь-якому скінченному проміжку часу і задовольняє групову властивість [6].

Нехай $L_\alpha^1 = \sum_{k=0}^\infty \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = k}} \oplus \alpha^{k+1} L^1(\mathbb{R}^{k_1+k_2+1} \times (\mathbb{R}^{k_1+k_2+1} \setminus W_{k_1+k_2+1}))$ – банахів простір послідовностей вимірних функцій

$f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})$, що дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій W_n з нормою

$$\|f\| = \sum_{k=0}^\infty \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = k}} \alpha^{k+1} \int_{\mathbb{R}^{k_1+1} \times \mathbb{R}^{k_2+1}} dx_{-k_2} \dots dx_{k_1} |f_{k+1}(x_{-k_2}, \dots, x_{k_1})|,$$

де число $\alpha > 1$. Через $L_{\alpha,0}^1$ позначимо множину фінітних послідовностей функцій $f_n \in L^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n))$, зосереджених на компактах в $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n)$, неперервно диференційованих і рівних нулю в ε -околах заборонених конфігурацій W_n . Множина $L_{\alpha,0}^1$ є всюди щільною в L_α^1 .

Для побудови розв'язків ієрархії рівнянь ББГКІ в просторі L_n^1 введемо оператор, який описує динаміку $n = n_1 + n_2 + 1$ частинок:

$$(S_n(t)f_n)(x) := \begin{cases} f_n(X_{-n_2}(t, x), \dots, X_{n_1}(t, x)), & x \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n) \setminus M_n^0, \\ 0, & (q_{-n_2}, \dots, q_{n_1}) \in W_n, \end{cases} \tag{1}$$

де $x \equiv (x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})$, $X_i(t) = X_i(t, x)$ – фазова траєкторія i -ї частинки. Оператор $S_n(t)$ – ізометричний, задовольняє групову властивість і є сильно неперервним за t [6].

Нехай $f_n \in L^1(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n))$, $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus W_n))$, тоді існує функціонал

$$(f_n, \varphi_n) = \int_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1}^{n+1} dx_{-n_2} \dots dx_{n_1} f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) \varphi_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}), \tag{2}$$

і для еволюційного оператора (1) справедливий такий аналог рівняння Дюамеля:

$$\left(\left(S_n(-t, x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) - \prod_{i=-n_2}^{n_1} S_1(-t, x_i) \right) f_n, \varphi_n \right) = \int_{\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}} dx_{-n_2} \dots dx_{n_1} \int_0^t d\tau \prod_{j=-n_2}^{n_1} S_1(-t + \tau, x_j) \sum_{i=-n_2}^{n_1-1} \mathcal{L}_{int}(x_i, x_{i+1}) S_n(-\tau, x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) \varphi_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}), \tag{3}$$

де оператор $\mathcal{L}_{int}(x_i, x_{i+1})$ визначається рівністю

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_i, x_{i+1}) f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) = & \delta(q_i - q_{i+1} + \sigma) \left[(v_{i+1} - v_i) \theta(v_{i+1} - v_i) f_n(x_{-n_2}, \dots, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_{n_1}) - \right. \\ & \left. - (v_i - v_{i+1}) \theta(v_i - v_{i+1}) f_n(x_{-n_2}, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n_1}) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

δ – дельта-функція Дірака, θ – функція Хевісайда, $x_i^* = (q_i, v_i^*)$, швидкості частинок після розсіяння v_i^*, v_{i+1}^* визначаються згідно співвідношень

$$v_i^* = \frac{2m_{i+1}v_{i+1} + (m_i - m_{i+1})v_i}{m_i + m_{i+1}}, \quad v_{i+1}^* = \frac{2m_i v_i + (m_{i+1} - m_i)v_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}.$$

Нехай $(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) \equiv Y$, $(x_{-(n_2+k_2)}, \dots, x_{n_1+k_1}) \equiv X$. Множини X та $Y \in$ частково впорядкованими, оскільки $\sigma + q_i \leq q_{i+1}$. Якщо підмножина Y множини X трактується як один елемент (кластер $n_1 + n_2 + 1$ частинок) подібний до $(x_{-(n_2+k_2)}, \dots, x_{-(n_2+1)}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+k_1})$, то для такої частково впорядкованої множини використовується позначення X_Y . Символ $|Y| = n = n_1 + n_2 + 1$ означає число елементів множини Y і отже $|X_Y| = k_1 + k_2 + 1$. Кумулянт $(k_1 + k_2 + 1)$ -го порядку еволюційних операторів (1) визначається таким розкладом:

$$\mathfrak{A}_{1+k_1+k_2}(t, X_Y) := \sum_{P: X_Y = \bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i \in P} S_{|X_i|}(-t, X_i), \quad k_1 + k_2 \geq 0, \quad (5)$$

де \sum_P – сума по всіх можливих впорядкованих розбиттях частково впорядкованої множини X_Y на $|P|$ не порожніх частково впорядкованих підмножин $X_i \subset X_Y$, що взаємно не перетинаються $X_i \cap X_j = \emptyset$, а множина Y цілком належить одній з підмножин X_i .

Використовуючи рівність (3) отримаємо, що кумулянт n -го порядку для еволюційного оператора (1) можна виразити через кумулянти нижчого порядку таким виразом:

$$\mathfrak{A}_n(t, Y) = \int_0^t d\tau \prod_{j=-n_2}^{n_1} S_1(-t + \tau, x_j) \sum_{i=-n_2}^{n_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_i, x_{i+1}) \mathfrak{A}_{n-1}(\tau, x_{-n_2}, \dots, x_{i-1}, x_i \cup x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n_1}), \quad (6)$$

де позначення $x_i \cup x_{i+1}$ відображає ту обставину, що частинки x_i та $x_{i+1} \in$ кластером (зв'язною частиною) двох частинок.

3. Ієрархія ББГКІ для виділеної частинки в системі нефіксованого числа частинок

Якщо $F(0) = F^0 = \{F_n^0(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})\}_{n=n_1+n_2+1 \geq 1} \in L_\alpha^1$ – подвійна послідовність n -частинкових початкових функцій розподілу $F_n^0(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})$, то розв'язок $F(t) = \{F_n(t, x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})\}_{n \geq 1}$ початкової задачі для ієрархії ББГКІ системи нефіксованого числа частинок визначається такими розкладами по групах (кластерах) зростаючого числа частинок [3, 11]:

$$F_1(t, x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2=k}} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} dx_{-k_2} \dots dx_{-1} dx_1 \dots dx_{k_1} \mathfrak{A}_{1+k}(t, x_{-k_2}, \dots, x_{k_1}) F_{1+k}^0(x_{-k_2}, \dots, x_{k_1}), \quad (7.a)$$

$$\begin{aligned} F_n(t, Y) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1+k_2=k}} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} dx_{-(n_2+k_2)} \dots dx_{-(n_2+1)} dx_{n_1+1} \dots dx_{k_1+n_1} \mathfrak{A}_{1+k}(t, x_{-(n_2+k_2)}, \dots, x_{-(n_2+1)}, \{Y\}, x_{n_1+1}, \dots, x_{k_1+n_1}) \times \\ & \times F_{n+k}^0(x_{-(n_2+k_2)}, \dots, x_{k_1+n_2}), \end{aligned} \quad (7.b)$$

де $\mathfrak{A}_{1+k}(t)$ – кумулянт $(1+k)$ -го порядку (5) груп операторів (1), $Y \equiv (x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})$. Ряди (7.a), (7.b) збігаються за нормою простору L_α^1 , за умови, що $\alpha > 2$ і справедлива оцінка $\|F(t)\|_{L_\alpha^1} \leq \left(1 - \frac{2}{\alpha}\right)^{-1} \|F^0\|_{L_\alpha^1}$.

Сформулюємо в просторі L_α^1 рівняння еволюції станів виділеної частинки в оточенні нефіксованого числа частинок. Функції (7.a), (7.b) в сенсі поточної збіжності при $t > 0$ задовольняють таким співвідношенням:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_1(t, x_0) = & -v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} F_1(t, x_0) + \int_0^\infty dV V \left(F_2(t, q_0, v_0^*(v_0, V), q_0 + \sigma, v_1^*(v_0, V)) - \right. \\ & \left. - F_2(t, q_0, v_0, q_0 + \sigma, v_0 - V) \right) + \int_0^\infty dV V \left(F_2(t, q_0 - \sigma, v_{-1}^*(v_0, V), q_0, v_0^*(v_0, V)) - F_2(t, q_0 - \sigma, V + v_0, q_0, v_0) \right), \end{aligned} \quad (8.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_n(t, x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) &= \left(- \sum_{i=-n_2}^{n_1} v_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=-n_2}^{n_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_i, x_{i+1}) \right) F_n(t, x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}) + \\ &+ \int_0^\infty dVV \left(F_{n+1}(t, q_{-n_2}, v_{-n_2}, \dots, q_{n_1}, v_{n_1}^*(v_{n_1}, V), q_{n_1} + \sigma, v_{n_1+1}^*(v_{n_1}, V)) - F_{n+1}(t, q_{-n_2}, v_{-n_2}, \dots, q_{n_1}, v_{n_1}, q_{n_1} + \sigma, v_{n_1} - V) \right) + \\ &+ \int_0^\infty dVV \left(F_{n+1}(t, q_{-n_2} - \sigma, v_{-(n_2+1)}^*(v_{-n_2}, V), q_{-n_2}, v_{-n_2}^*(v_{-n_2}, V), \dots, q_{n_1}, v_{n_1}) - F_{n+1}(t, q_{-n_2} - \sigma, v_{-n_2} + V, q_{-n_2}, v_{-n_2}, \dots, q_{n_1}, v_{n_1}) \right), \end{aligned} \tag{8.b}$$

$$F(0) = F^0, \tag{9}$$

де оператор $\mathcal{L}_{\text{int}}(x_i, x_{i+1})$ визначається рівністю (4), $x_i \equiv (q_i, v_i)$, $i \in (-n_2, \dots, n_1)$ функції $v_i^*(v_i, V), v_{i+1}^*(v_i, V)$ визначаються виразами:

$$\begin{aligned} v_i^*(v_i, V) &= v_i + \frac{2m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}} V, & v_{i+1}^*(v_i, V) &= v_i + \frac{m_{i+1} - m_i}{m_i + m_{i+1}} V, \\ v_{-i}^*(v_{-i}, V) &= v_{-i} - \frac{2m_{-i-1}}{m_{-i} + m_{-i-1}} V, & v_{-i-1}^*(v_{-i}, V) &= v_{-i} - \frac{m_{-i-1} - m_{-i}}{m_{-i-1} + m_{-i}} V. \end{aligned}$$

Оператор: $-\sum_{i=-n_2}^{n_1} v_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=-n_2}^{n_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_i, x_{i+1})$ в рівнянні (8.b) на $F_n(t) \in L^1_{\alpha,0}$ співпадає з оператором: $-\sum_{i=-n_2}^{n_1} v_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ з гра-

ничними умовами на ∂W_n [2,6]. Співвідношення (8) будемо тлумачити як еволюційні рівняння (ієрархія ББГКІ) системи виділеної частинки в багаточастинковій системі, якими описується еволюція n -частинкових (маргінальних) станів. Рівняння (8.a) описує еволюцію стану виділеної частинки, а (8.b) – еволюцію стану оточення. Відповідним чином визначаються ієрархія рівнянь ББГКІ при $t < 0$.

Для початкових даних $F^0 \in L^1_{\alpha,0}$ розкладами (7.a) та (7.b) зображується сильний розв'язок, а для $F^0 \in L^1_{\alpha}$ – слабкий (узагальнений) розв'язок [6].

Зауважимо, що розв'язки з простору L^1_{α} описують стани системи виділена частинка в оточенні скінченного середнього числа частинок.

4. Існування розв'язку ієрархії ББГКІ для виділеної частинки в нескінченночастинковій системі

Розглянемо задачу Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (8), (9) в просторі послідовностей обмежених функцій, якому, зокрема, належать стани виділеної частинки в термостаті. Введемо банахів простір $L^\infty_{\xi,\beta}$ послідовностей $\{f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})\}_{n=n_1+n_2+1 \geq 1}$ вимірних функцій $f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})$, які дорівнюють нулю на множині заборонених конфігурацій W_n з нормою

$$\|f\| = \sup_{n \geq 1} \xi^{-n} \sup_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 + 1 = n}} \sup_{x_{-n_2}, \dots, x_{n_1}} |f_n(x_{-n_2}, \dots, x_{n_1})| \exp \left\{ \beta \sum_{i=-n_2}^{n_1} \frac{m_i v_i^2}{2} \right\},$$

де числа $\xi, \beta \in \mathbb{R}_+^1$.

Доведемо, що для початкових даних $F^0 \in L^\infty_{\xi,\beta}$ розв'язок задачі Коші для рівняння (8.a) існує. Нехай $F_{\Lambda,1}(t)$ – розв'язок ієрархії ББГКІ (8) для виділеної частинки, який зосереджений на скінченному відрізку $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$. Будемо вважати, що частинки пружно відбиваються від границі $\partial \Lambda$ області Λ . Для $F_\Lambda^0 \in L^\infty_{\xi,\beta} \cap L^1_{\alpha,0}$ розв'язок ієрархії ББГКІ (8) для виділеної частинки існує, $F_{\Lambda,1}(t) \in L^\infty_{\xi,\beta} \cap L^1_{\alpha,1}$, і зображається збіжним рядом

$$F_{\Lambda,1}(t, x_0) = \left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1(x_0) := \sum_{k=0}^\infty \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = k}} \int_{(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)^k} dx_{-k_2} \dots dx_{-1} dx_1 \dots dx_{k_1} \mathfrak{A}_{1+k}(t, x_{-k_2}, \dots, x_{k_1}) F_{\Lambda,1+k}^0(x_{-k_2}, \dots, x_{k_1}). \tag{10}$$

Нехай $\varphi_n(x_0) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$. Тоді згідно аналогу рівняння Дюамеля (3), (6) справедлива така рівність:

$$\left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right) = \left(\left(\tilde{\mathfrak{A}}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right), \tag{11}$$

де використано позначення (2) для відповідних функціоналів та

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(\tilde{\mathcal{Q}}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1, \Phi_1 \right) := \int_{\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1} dx_0 \Phi_1(x_0) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = k}} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} dx_{-k_2} \cdots dx_{-1} dx_1 \cdots dx_{k_1} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \prod_{j_1=-k_2}^{k_1} S_1(-t+t_1, x_{j_1}) \times \\
 & \times \sum_{i=-k_2}^{k_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_{i_1}, x_{i_1+1}) S_2(-t_1+t_2, x_{i_1}, x_{i_1+1}) \prod_{\substack{j_2=-k_2 \\ j_2 \neq (i_1, i_1+1)}}^{k_1} S_1(-t_1+t_2, x_{j_2}) \sum_{\substack{i_2=-k_2 \\ i_2 \neq i_1}}^{k_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_{i_2}, x_{i_2+1}) \cdots \sum_{\substack{i_l=-k_2 \\ i_l \neq (i_1, \dots, i_{l-1})}}^{k_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_{i_l}, x_{i_l+1}) \times \\
 & \times S_{|Z|}(-t_l+t_{l+1}, Z) \prod_{\substack{j_{l+1}=-k_2 \\ j_{l+1} \neq (i_1, i_1+1), \dots, (i_l, i_l+1)}}^{k_1} S_1(-t_l+t_{l+1}, x_{j_{l+1}}) \cdots \sum_{\substack{i_k=-k_2 \\ i_k \neq (i_1, \dots, i_{k-1})}}^{k_1-1} \mathcal{L}_{\text{int}}(x_{i_k}, x_{i_k+1}) S_{1+k}(-t_k, x_{-k_2}, \dots, x_{k_1}) \times \\
 & \times F_{\Lambda, 1+k}^0(x_{-k_2}, \dots, x_{k_1}),
 \end{aligned} \tag{12}$$

де $Z \equiv \{x_{i_1}, x_{i_1+1}\} \cup \{x_{i_2}, x_{i_2+1}\} \cup \dots \cup \{x_{i_l}, x_{i_l+1}\}$. Якщо $F_{\Lambda, 1+k}^0 \in L_{\xi, \beta}^{\infty} \cap L^1$, а Φ_1 – неперервно диференційована функція з компактним носієм, то функціонал (12) існує, оскільки ряд $\left(\tilde{\mathcal{Q}}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1(x_0)$ є рівномірно збіжним за x_0 на кожному компактні при $t \in (-\infty, \infty)$. Дійсно для $F_{\Lambda, 1+k}^0 \in L_{\xi, \beta}^{\infty} \cap L^1$, згідно наслідку з теореми Ліувілля [8] для функціоналу (12) справедлива рівність

$$\left(\left(\tilde{\mathcal{Q}}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1, \Phi_1 \right) = \left(\left(U(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1, \Phi_1 \right), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
 & \left(U(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1(x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \sum_{m=0}^k \sum_{0 \leq l_1 < \dots < l_m} (-1)^{k-m} \left(\mathcal{L}(t_1-t) \cdots \mathcal{L}(t_{l_1-1}-t_{l_1-2}) \right) \times \\
 & \times \mathcal{L}^*(t_{l_1}-t_{l_1-1}) \mathcal{L}(t_{l_1+1}-t_{l_1}) \cdots \mathcal{L}(t_{l_m-1}-t_{l_m-2}) \mathcal{L}^*(t_{l_m}-t_{l_m-1}) \mathcal{L}(t_{l_m+1}-t_{l_m}) \cdots \mathcal{L}(t_k-t_{k-1}) S_{1+k}(-t_k) F_{\Lambda}^0(x_0)
 \end{aligned} \tag{14}$$

В розкладі (14) використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}^*(t_i-t_{i-1}) := \mathcal{L}_+^*(t_i-t_{i-1}) + \mathcal{L}_-^*(t_i-t_{i-1}), \quad \mathcal{L}(t_i-t_{i-1}) := \mathcal{L}_+(t_i-t_{i-1}) + \mathcal{L}_-(t_i-t_{i-1}), \\
 & \left(\mathcal{L}_+^*(t_i-t_{i-1}) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := S_s(t_i-t_{i-1}, x) \left(\mathcal{L}_+^*(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x), \quad \left(\mathcal{L}_-^*(t_i-t_{i-1}) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := S_s(t_i-t_{i-1}, x) \left(\mathcal{L}_-^*(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x), \\
 & \left(\mathcal{L}_+(t_i-t_{i-1}) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := S_s(t_i-t_{i-1}, x) \left(\mathcal{L}_+(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x), \quad \left(\mathcal{L}_-(t_i-t_{i-1}) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := S_s(t_i-t_{i-1}, x) \left(\mathcal{L}_-(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x),
 \end{aligned}$$

де $i \in (1, \dots, k)$, $x = (x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})$, $s = s_1 + s_2 + 1 \geq 1$. Оператори $\mathcal{L}_{\pm}^*(0)$, $\mathcal{L}_{\pm}(0)$ визначається такими виразами:

$$\begin{aligned}
 & \left(\mathcal{L}_+(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := \int_0^{\infty} dV V F_{\Lambda, s+1}^0(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}; q_{s_1} + \sigma, v_{s_1} - V), \quad \left(\mathcal{L}_-(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := \int_0^{\infty} dV V F_{\Lambda, s+1}^0(q_{-s_2} - \sigma, v_{-s_2} + V; x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}), \\
 & \left(\mathcal{L}_+^*(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := \int_0^{\infty} dV V F_{\Lambda, s+1}^0(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1-1}; q_{s_1}, v_{s_1}^*(v_{s_1}, V), q_{s_1} + \sigma, v_{s_1+1}^*(v_{s_1}, V)), \\
 & \left(\mathcal{L}_-^*(0) F_{\Lambda}^0 \right)_s(x) := \int_0^{\infty} dV V F_{\Lambda, s+1}^0(q_{-s_2} - \sigma, v_{-(s_2+1)}^*(v_{-s_2}, V); q_{-s_2}, v_{-s_2}^*(v_{-s_2}, V); x_{-(s_2-1)}, \dots, x_{s_1}).
 \end{aligned}$$

Якщо $F^0 \in L_{\xi, \beta}^{\infty}$, то ряд (14) з початковою послідовністю функцій розподілу F^0 збігається рівномірно за x_0 на кожному компактні при $t \in (-\infty, \infty)$. Дійсно, розглянемо типовий доданок k -го члена ряду (14), наприклад,

$\left(\prod_{i=1}^k \mathcal{L}_+(t_i) S(-t_k) F^0 \right)_1(x_0)$. В підінтегральному виразі зробимо заміну змінних $V_i = v_{i-1} - v_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, тоді

підінтегральна функція набуде вигляду

$$\prod_{i=1}^k (V_{i-1}(t_i-t_{i-1}, \dots) - v_i) F_{1+k}^0(X_0(-t_k, \dots), \dots, X_k(-t_k, \dots)), \tag{15}$$

де функції $V_{i-1}(t_i-t_{i-1}, \dots)$ та $X_j(-t_k, \dots)$ залежать від відповідних початкових даних. Використовуючи закон збереження енергії, отримаємо

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1}^k (|V_{i-1}(t_i-t_{i-1}, \dots)| + |v_i|) = \prod_{i=1}^k \left(\sqrt{V_{i-1}(t_i-t_{i-1}, \dots)^2} + |v_i| \right) \leq \prod_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} V_j^2(t_i-t_{i-1}, \dots) \right)^{1/2} + |v_i| \right) = \\
 & = \prod_{i=1}^k \left(\left(\sum_{j=0}^{i-1} v_j^2 \right)^{1/2} + |v_i| \right) \leq 2^k \left(\sum_{j=0}^k v_j^2 \right)^{k/2}.
 \end{aligned}$$

Враховуючи для $F^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty$ справедлива оцінка $\left| F_{1+k}^0(X_0(-t_k, \dots), \dots, X_k(-t_k, \dots)) \right| \leq \xi^{1+k} \|F^0\| \exp\left\{-\beta \sum_{i=0}^k \frac{m_i v_i^2}{2}\right\}$, та обчислюючи значення $2^k \sup_{\{v_j\}} \left(\sum_{j=0}^k v_j^2 \right)^{k/2} \exp\left\{-\alpha \sum_{j=0}^k v_j^2\right\}$, приходимо до нерівності

$$\left| \prod_{i=1}^k (V_{i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots) - v_i) F_{1+k}^0(X_0(-t_k, \dots), \dots, X_k(-t_k, \dots)) \right| \leq (2\alpha^{-1})^{k/2} \sqrt{k!} \xi^{1+k} \|F^0\| \exp\left\{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=0}^k \frac{m_i v_i^2}{2}\right\}, \tag{16}$$

де $\alpha = \frac{1}{4} \beta \min_{i \in \mathbb{Z}^1} \{m_i\}$.

Оцінки, подібні (16), справедливі і для доданків k -го члена ряду (14), які визначаються операторами $\mathcal{L}_+^*(t_i - t_{i-1})$. Це випливає з явного вигляду цих доданків, виразів $\{v_j^*(v_j, V)\}$ та закону збереження енергії. Аналогічно оцінюються доданки, які визначаються операторами $\mathcal{L}_-(t_i - t_{i-1}), \mathcal{L}_+(t_i - t_{i-1})$ або $\mathcal{L}^*(t_i - t_{i-1})$ і $\mathcal{L}(t_i - t_{i-1})$.

Для $F^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty$ значення інтегралів по швидкості в ряді (14) оцінюються величиною $\sqrt{\pi \alpha^{-1}}$. В результаті отримуємо оцінку для ряду (14)

$$\left| (U(t)F^0)_1(x_0) \right| \leq \|F^0\| \xi \exp\left\{-\frac{\beta m_0 v_0^2}{4}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k!}} \left(\frac{t}{t_0}\right)^k, \tag{17}$$

де $t_0 = m_{\min} \beta (16\sqrt{2\pi\xi})^{-1}$, $m_{\min} = \min_{i \in \mathbb{Z}^1} \{m_i\}$.

Аналогічно для розв'язку рівняння (8.b) для n -частинкової функції розподілу

$$F_{\Lambda, n}(t, Y) = \left(\mathfrak{A}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_n(Y) := \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{k_1, k_2 \geq 0 \\ k_1 + k_2 = k}} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} dx_{-(n_2+k_2)} \dots dx_{-(n_2+1)} dx_{1+n_1} \dots dx_{k_1+n_1} \mathfrak{A}_{1+k}(t, x_{-(n_2+k_2)}, \dots, x_{-(n_2+1)}, \{Y\}, x_{1+n_1}, \dots, x_{k_1+n_1}) \times \\ \times F_{\Lambda, n+k}^0(x_{-(n_2+k_2)}, \dots, x_{k_1+n_2}), \tag{18}$$

яка зосереджена на скінченному відрізьку $\Lambda \subset \mathbb{R}^1$ справедливі такі рівності:

$$\left(\left(\mathfrak{A}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_n, \varphi_n \right) = \left(\left(\tilde{\mathfrak{A}}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_n, \varphi_n \right) = \left((U(t)F_{\Lambda}^0)_n, \varphi_n \right),$$

де φ_n – неперервно диференційована функція з компактним носієм, яка дорівнює нулю на множині заборонених конфігурацій. Функціонал $\left((U(t)F_{\Lambda}^0)_n, \varphi_n \right)$ існує при $t \in (-\infty, \infty)$ внаслідок того, що для відображення $U(t)$ справедлива оцінка подібна оцінці (17).

Таким чином, справедливе твердження.

Теорема. Якщо послідовність початкових функцій розподілу F_{Λ}^0 , $F_{\Lambda}^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty \cap L_{\alpha, 0}^1$, в границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$, $\langle N \rangle \rightarrow \infty$, $\langle N \rangle / |\Lambda| = 1/\nu < \infty$ збігається рівномірно за x_0 на кожному компакт до послідовності F^0 , $F^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty$, то існує слабкий розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ (8.a), (8.b) при $t \in (-\infty, \infty)$, який є термодинамічною границею розкладу (10) (для виділеної частинки) або термодинамічною границею розкладу (18) (для системи $n_1 + n_2 + 1$ частинок) і зображується функцією $(U(t)F^0)_1(x_0)$ (для виділеної частинки) або функцією $(U(t)F^0)_n(Y)$ (для системи $n_1 + n_2 + 1$ частинок).

Доведемо, що термодинамічна границя розкладу (10) є слабким розв'язком рівняння (8.a). Нехай φ_1 – неперервно диференційована функція з компактним носієм. З умови теореми випливає, що функціонал $\left(\left(\mathfrak{A}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1, \varphi_1 \right)$, який визначається розкладом (10), в границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ збігається до функціоналу $\left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right)$, який визначається розкладом (14). Дійсно, внаслідок того, що справедливі рівності (11), (13) та функція $(U(t)F_{\Lambda}^0)_1(x_0)$, де $F_{\Lambda}^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty \cap L_{\alpha, 0}^1$, в границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$, $\langle N \rangle \rightarrow \infty$, $\langle N \rangle / |\Lambda| = 1/\nu < \infty$ збігається рівномірно за x_0 на кожному компакт до функції $(U(t)F^0)_1(x_0)$ при $t \in (-\infty, \infty)$, якщо справедлива така збіжність початкових функцій F_{Λ}^0 до F^0 [8], отримуємо, що будуть виконуватись такі рівності:

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1} \left(\left(\mathfrak{A}(t) F_{\Lambda}^0 \right)_1, \varphi_1 \right) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1} \left((U(t)F_{\Lambda}^0)_1, \varphi_1 \right) = \left(\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1} (U(t)F_{\Lambda}^0)_1, \varphi_1 \right) = \left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right).$$

Функціонал $\left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right)$ існує внаслідок оцінки (17). Аналогічно можна показати, що функціонали

$$\left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) \mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right), \left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \left(v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi \right)_1$$

існують і збігаються в границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ до функціоналів

$$\left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) U(t) F^0 \right)_1, \varphi_1 \right), \left((U(t)F^0)_1, \left(v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi \right)_1 \right).$$

Оскільки $F_\Lambda^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty \cap L_{\alpha, 0}^1$, то функція $\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1(x_0)$ диференційована за t в сильному сенсі в просторі L_α^1 і задовольняє рівняння (8.a). Помножимо ліву і праву частини рівняння (8.a) на функцію $\varphi_1(x_0)$ і проінтегруємо за змінною x_0 . Отримаємо

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right) = \left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi_1 + \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) \mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right). \quad (19)$$

Так як функціонали із правої частини рівності (19) мають границю при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$, то і функціонал $\frac{d}{dt} \left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right)$ має границю і справедливе таке співвідношення:

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1} \frac{d}{dt} \left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right) = \left((U(t)F^0)_1, v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi_1 \right) + \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) U(t) F^0 \right)_1, \varphi_1 \right).$$

Внаслідок останньої рівності функціонал $\left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right)$ є диференційованим за t і справедлива рівність

$$\frac{d}{dt} \left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right) = \left((U(t)F^0)_1, v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi_1 \right) + \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) U(t) F^0 \right)_1, \varphi_1 \right). \quad (20)$$

Дійсно, функціонал $\left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right)$ неперервно диференційований за t і тому згідно (19)

$$\left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right) = \int_0^t d\tau \frac{d}{d\tau} \left(\left(\mathfrak{A}(\tau) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right) = \int_0^t d\tau \left(\left(\mathfrak{A}(\tau) F_\Lambda^0 \right)_1, v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi_1 \right) + \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) \mathfrak{A}(\tau) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right). \quad (21)$$

Функція $\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1(x_0)$ сильно неперервна за t [6], отже функціонали

$$\left(\left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right), \left(\mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \left(v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi \right)_1 \text{ і } \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) \mathfrak{A}(t) F_\Lambda^0 \right)_1, \varphi_1 \right)$$

також є неперервними за t . Оскільки в границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^1$ рівномірно за t на компактах вони збігаються до функціоналів

$$\left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right), \left((U(t)F^0)_1, \left(v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi \right)_1 \right) \text{ і } \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) U(t) F^0 \right)_1, \varphi_1 \right),$$

то і ці граничні функціонали неперервні за t і в рівності (21) можна здійснити граничний перехід під знаком інтегралу. Тому

$$\left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right) = \int_0^t d\tau \left((U(\tau)F^0)_1, v_0 \frac{\partial}{\partial q_0} \varphi_1 \right) + \left(\left((\mathcal{L}^*(0) - \mathcal{L}(0)) U(\tau) F^0 \right)_1, \varphi_1 \right).$$

Оскільки підінтегральні функціонали неперервні по t , то функціонал $\left((U(t)F^0)_1, \varphi_1 \right)$ неперервно диференційований за t . Таким чином, для $F^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty$ функція $\left(U(t)F^0 \right)_1(x_0)$ визначає слабкий розв'язок задачі Коші для рівняння (8.a). Твердження, що термодинамічна границя розкладу (18) є слабким розв'язком рівняння (8.b) доводиться аналогічно.

5. Висновки

У статті описано еволюцію станів виділеної частинки в оточенні нескінченного числа частинок на основі ієрархії ББГКІ для випадку одновимірної системи частинок, які взаємодіють як пружні кулі. Побудовано розв'язки (7) задачі Коші для сформульованої ієрархії рівнянь (8), (9), які представляються розкладами по групах частинок, еволюція яких описується кумулянтами груп еволюційних операторів скінченного числа частинок, для початкових даних з про-

сторю послідовностей обмежених функцій. Доведення існування розв'язку задачі Коші таких рівнянь ґрунтується на методі переходу до термодинамічної границі. Зауважимо, що асимптотика побудованого розв'язку для виділеної частинки (7.а) в скейлінговій дифузійній границі [13] описуються кінетичним рівнянням Фоккера-Планка.

1. Боголюбов Н. Н. О стохастических процессах в динамических процессах // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1978. – Т. 9, Вып. 4. – С. 501–579. 2. Герасименко В. И. О решениях уравнений Боголюбова для одномерной системы упругих шаров // ТМФ. – 1992. – Т. 91, № 1. – С. 120–128. 3. Герасименко В. И., Сташенко М. О. Нерівноважні кластерні розклади несиметричних систем частинок // Наук. Вісник ВДУ. – 2002. – № 4. – С. 5. 4. Крилов М. М., Боголюбов М. М. Записки кафедры математичної фізики АН УРСР. – 1939. – Т. 4. – С. 5. 5. Лебовиц Л., Синай Я., Чернов Н. Динамика массивного поршня, погруженного в идеальный газ // УМН. – 2002. – Т. 57, Вып. 6. – С. 3–85. 6. Петрина Д. Я., Герасименко В. И. Математические проблемы статистической механики системы упругих шаров // УМН. – 1990. – Т. 45, Вып.3. – С. 135–182. 7. Синай Я. Г. Динамика массивной частицы, окруженной конечным числом легких частиц // ТМФ. – 1999. – Т. 121, № 1. – С. 110–116. 8. Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – P. 252. 9. de Smedt P., Dürr P., Lebowitz J. L., Liverani C. Quantum system in contact with a thermal environment rigorous treatment of a simple model // Commun. Math. Phys. – 1988. – Vol. 120. – P. 195–231. 10. Erdős L. Classical and quantum Brownian motion // Ann. Inst. H. Poincaré. – 2007. – Vol. 8. – P. 621–685. 11. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O. On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 9861–9872. 12. Petrina D. Ya. Stochastic dynamics and Boltzmann hierarchy. – Kyiv: Inst. Math., 2008. – P. 400. 13. Spohn H. Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits // Review of Modern Physics. – 1980. – Vol. 53. – P. 569–615.

Надійшла до редколегії 21.10.2010 р.

УДК 517.9+531.19+530.145

В. І. Герасименко, проф., Ю. Ю. Федчун, студ.

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ В ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОХІДНИХ БАГАТОЧАСТИНКОВИХ СИСТЕМ

Ієрархія рівнянь ББГКІ та дуальна ієрархія еволюційних рівнянь, якими описується еволюція нескінченночастинкових систем, сформульовані як еволюційні рівняння в функціональних похідних. На основі такого підходу побудовано розв'язку задачі Коші для ієрархій таких рівнянь. Отримані результати узагальнено для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії.

The BBGKY hierarchy and the dual BBGKY hierarchy which describe the evolution of infinite-particle systems are formulated as evolution equations in the functional derivatives. On the base of such approach solutions of the Cauchy problem of these hierarchies are constructed. The obtained results are generalized on systems with many-particle interaction potential.

1. Вступ

Як відомо, підхід до формулювання рівнянь, якими описуються системи з нескінченним числом ступенів вільності, наприклад, в квантовій теорії поля, у формі рівнянь у функціональних похідних та їх розв'язків за допомогою функціональних інтегралів виявився адекватним і продуктивним. Витоки цей підхід бере з [1–4], де рівняння у функціональних похідних використовувались при дослідженні багатокомпонентних систем. В фундаментальних працях М. Боголюбова [1], [2] ієрархію рівнянь ББГКІ сформульовано у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних (s –частинкових) функцій розподілу, що дозволило обґрунтувати рівняння еволюції станів та існування рівноважних станів нескінченночастинкових систем. Пізніше на основі цих праць в [5] вперше було знайдено представлення для розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ побудоване не за теорією збурень [6].

У даній статті дуальна ієрархія рівнянь ББГКІ [7] сформульована у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних спостережуваних і на основі такого підходу побудовано розв'язок задачі Коші для ієрархії таких рівнянь. У статті також за допомогою твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу побудовано загальне представлення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ, яке в інший спосіб було встановлено в [6], [8], [9].

2. Ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних

Розглянемо систему нефіксованого числа однакових частинок в просторі \mathbb{R}^3 , з гамільтоніаном $n \geq 0$ частинкової системи $H_n = \sum_{i=1}^n K(x_i) + \sum_{i<j=1}^n \Phi(q_i - q_j)$, де $K(x_i) = \frac{p_i^2}{2m}$ (великий нерівноважний канонічний ансамбль [6]). Нехай u – гладка дійсна інтегровна функція. Розглянемо функціонал

$$(F(t), u) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int F_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n u(x_i) dx_1 \dots dx_n, \quad (1)$$

який є твірним функціоналом для маргінальних функцій розподілу, тобто s –частинкова функція розподілу $F_s(t, x_1, \dots, x_s)$ визначається як функціональна похідна (похідна Гато) s –го порядку цього функціоналу

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = \frac{\delta^s (F(t), u)}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_s)} \Big|_{u=0}. \quad (2)$$

Ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних функцій розподілу має вигляд [1],[5]

$$\frac{\partial}{\partial t} (F(t), u) = \int \left\{ K(x_1), \frac{\delta (F(t), u)}{\delta u(x_1)} \right\} (u(x_1) + 1) dx_1 + \frac{1}{2!} \int \int \left\{ \Phi(q_1 - q_2), \frac{\delta^2 (F(t), u)}{\delta u(x_1) \delta u(x_2)} \right\} \prod_{i=1}^2 (u(x_i) + 1) dx_1 dx_2 \quad (3)$$

де $\{ \cdot, \cdot \}$ – дужки Пуассона.

Встановимо зв'язок між твірним функціоналом

$$(D(t), \omega) \doteq (D(t), 1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int D_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \omega(x_i) dx_1 \dots dx_n \quad (4)$$

для послідовності густин функцій розподілу $D(t) = (D(t), 1)^{-1} (1, D_1(t, x_1), \dots, D_n(t, x_1, \dots, x_n), \dots)$, які визначаються задачею Коші для рівнянь Ліувілля, і твірним функціоналом для маргінальних функцій розподілу (1), які визначаються задачею Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ. Справедлива рівність

$$(F(t), u) = (D(t), u + 1), \quad (5)$$

де послідовність $F(t) = e^a D(t)$ покомпонентно має вигляд

$$F_s(t, x_1, \dots, x_s) = (e^a D(t))_s(x_1, \dots, x_s) \doteq (D(t), 1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int D_{s+n}(t, x_{s+1}, \dots, x_{s+n}) dx_{s+1} \dots dx_{s+n}.$$

Дійсно, внаслідок симетричності функцій відносно перестановки аргументів справедливі такі рівності:

$$\begin{aligned} (F(t), u) &= (D(t), 1)^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int D_{s+n}(t, x_{s+1}, \dots, x_{s+n}) \prod_{i=1}^s u(x_i) dx_1 \dots dx_{s+n} = \\ &= (D(t), 1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int D_n(t, x_1, \dots, x_n) \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k = 1}^n u(x_{i_1}) \dots u(x_{i_k}) dx_1 \dots dx_n = \\ &= (D(t), 1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int D_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n (u(x_i) + 1) dx_1 \dots dx_n = (D(t), u + 1). \end{aligned}$$

Зауважимо, що ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних (3) може бути побудована з послідовності рівнянь Ліувілля в функціональних похідних на основі рівності (5).

Використовуючи співвідношення (5), побудуємо розв'язок задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ. Розглянемо послідовність

$$S(-t)D(0) = (D(t), 1)^{-1} (1, S_1(-t)D_1(0, x_1), \dots, S_n(-t)D_n(0, x_1, \dots, x_n), \dots),$$

де еволюційним оператором $S_n(-t)$ визначається розв'язок задачі Коші для рівняння Ліувілля для системи n частинок з початковою умовою $D_n(0)$ [6]. Справедлива рівність

$$(F(t), u) = (S(-t)D(0), u + 1) = (e^a g(S(-t)D(0)), u),$$

де функціонал $(e^a g(S(-t)D(0)), u)$ визначається таким розкладом

$$\begin{aligned} (e^a g(S(-t)D(0)), u) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \sum_{P: \{Y\}, X \setminus Y = \cup_j X_j} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \times \\ &\times \prod_{X_j \subset P} S_{|\theta(X_j)|}(-t, \theta(X_j)) D_{|\theta(X_j)|}(0, \theta(X_j)) \prod_{i=1}^s u(x_i) dx_1 \dots dx_{s+n}. \end{aligned} \quad (6)$$

У виразі (6) використано такі позначення: $X \setminus Y \equiv (x_{s+1}, \dots, x_{s+n})$, $\{Y\}$ – множина, що складається з одного елемента, яким є множина $Y = (x_1, \dots, x_s)$, тобто $|\{Y\}| = 1$, та $\sum_{P: \{Y\}, X \setminus Y = \cup_j X_j}$ – сума по всім можливим розбиттям P множини $(\{Y\}, X \setminus Y)$ на $|P| > 1$ непорожніх підмножин $X_i \subset (\{Y\}, X \setminus Y)$, що взаємно не перетинаються. На множині аргументів визначимо відображення декластеризації $\theta: (\{Y\}) \rightarrow Y$ такою формулою: $\theta(\{Y\}) = Y$. Підсумовуючи відповідні члени з функціоналу (6) та, враховуючи рівність [10]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int \dots \int \sum_{P: \{X\}, X_{s+n+1}, \dots, X_{s+n+k} = \cup_j X_j} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_j \subset P} D_{|\theta(X_j)|}(0, \theta(X_j)) dx_{s+n+1} \dots dx_{s+n+k} = F_{s+n}(0, X),$$

остаточно маємо

$$(F(t), u) = (e^a g(S(-t)D(0)), u) = (e^a \mathfrak{A}(-t)F(0), u).$$

Послідовність $e^a \mathfrak{A}(-t)F(0)$ існує [8] і визначається таким розкладом

$$(e^a \mathfrak{A}(-t)F(0))_s(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) F_{s+n}(0, X) dx_{s+1} \dots dx_{s+n},$$

де еволюційний оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(-t)$ – кумулянт $(1+n)$ -го порядку еволюційних операторів $S_n(-t)$

$$\mathfrak{A}_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) = \sum_{P: \{Y\}, X \setminus Y = \cup_j X_i} (-1)^{|P|-1} (|P|-1)! \prod_{X_i \subset P} S_{|\theta(X_i)|}(-t, \theta(X_i)). \quad (7)$$

Використовуючи для нормуючого множника в функціоналі $(S(-t)D(0), u + 1)$ рівність [6]

$$(D(t), 1) = (D(0), 1)$$

в подібний спосіб виводимо відоме представлення розв'язку задачі Коші для ієрархії рівнянь ББГКІ [6]

$$(F(t), u) = (S(-t)D(0), u + 1) = (e^a U(-t)F(0), u), \tag{8}$$

де $U_{1+n}(-t)$ – редукований кумулянт $(1+n)$ -го порядку еволюційних операторів $S_n(-t)$

$$U_{1+n}(-t, \{Y\}, X \setminus Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} S_{s+n-k}(-t, Y, x_{s+1}, \dots, x_{s+n-k}).$$

Розв'язок (8), що побудований не за теорією збурень, вперше отримано в роботі [5]. Застосовуючи аналоги формул Дюамеля до кумулянтів груп еволюційних операторів рівнянь Ліувілля, побудований розклад (7),(7) можна подати як ряд теорії збурень (ряд ітерацій) ієрархії рівнянь ББГКІ [10].

Узагальнимо рівняння (3) для багаточастинкового потенціалу взаємодії, тобто для систем частинок з гамільтоніаном

$$H_n(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^n K(x_i) + \sum_{k=2}^n \sum_{1=i_1 < \dots < i_k} \Phi^{(k)}(q_{i_1}, \dots, q_{i_k}). \tag{9}$$

Для таких систем частинок ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} (F(t), u) = \int \left\{ K(x_1), \frac{\delta(F(t), u)}{\delta u(x_1)} \right\} (u(x_1) + 1) dx_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \left\{ \Phi^{(n)}(q_1, \dots, q_n), \frac{\delta^n (F(t), u)}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_n)} \right\} \prod_{i=1}^n (u(x_i) + 1) dx_1 \dots dx_n. \tag{10}$$

Дійсно, в термінах маргінальних функцій розподілу (2) еволюційне рівняння в функціональних похідних (10) представляється у формі ієрархії рівнянь ББГКІ [12]

$$\frac{\partial}{\partial t} F_s(t, Y) = \{H_s, F_s(t, Y)\} + \sum_{k=1}^s \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \neq \dots \neq i_k=1}^s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_{s+1} \dots dx_{s+n} \{ \Phi^{(n)}(q_{i_1}, \dots, q_{i_k}, X \setminus Y), F_{s+n}(t, X) \}, \tag{11}$$

де використано такі позначення: $Y \equiv (x_1, \dots, x_s)$, $X \equiv (x_1, \dots, x_{s+n})$.

3. Дуальна ієрархія ББГКІ в функціональних похідних

Розглянемо функціонал, який є твірним функціоналом для послідовності маргінальних спостережуваних $B(t) = (B_0, B_1(t, x_1), \dots, B_n(t, x_1, \dots, x_n), \dots)$

$$(B(t), v) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int B_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n v(x_i) dx_1 \dots dx_n, \tag{12}$$

де v – гладка дійсна інтегровна функція. Функціонал (12) існує для обмежених функцій $B_n(t)$. Маргінальна s -частинкова спостережувана $B_s(t, x_1, \dots, x_s)$ визначається як функціональна похідна (похідна Гато) s -го порядку функціоналу (12)

$$B_s(t, x_1, \dots, x_s) = \frac{\delta^s (B(t), v)}{\delta v(x_1) \dots \delta v(x_s)} \Big|_{v=0}. \tag{13}$$

Встановимо зв'язок твірного функціоналу

$$(A(t), \mu) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int A_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \mu(x_i) dx_1 \dots dx_n \tag{14}$$

послідовності спостережуваних $A(t) = (A_0, A_1(t, x_1), \dots, A_n(t, x_1, \dots, x_n), \dots)$, які визначаються задачею Коші для рівнянь Ліувілля, та твірного функціоналу (12) маргінальних спостережуваних $B(t)$, які визначаються задачею Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ [7].

Справедлива рівність

$$(B(t), v) = e^{-\int v(x) dx} (A(t), v), \tag{15}$$

де послідовність $B(t) = e^{-a^+} A(t)$ покомпонентно має вигляд

$$(e^{-a^+} A(t))_s(Y) := \sum_{n=0}^s \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n=1}^s A_{s-n}(t, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})), \quad s \geq 1. \tag{16}$$

Дійсно, внаслідок симетричності функцій відносно перестановки аргументів справедливі такі рівності:

$$\begin{aligned} (B(t), v) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \dots \int \sum_{n=0}^s \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n=1}^s A_{s-n}(t, (x_1, \dots, x_s) \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})) \prod_{i=1}^s v(x_i) dx_1 \dots dx_s = \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int \dots \int \prod_{i=1}^s v(x_i) dx_1 \dots dx_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int A_n(t, x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n v(x_j) dx_1 \dots dx_n = e^{-\int v(x) dx} (A(t), v). \end{aligned}$$

Побудуємо еволюційне рівняння в функціональних похідних для функціоналу (12) на основі рівняння Ліувілля в функціональних похідних для твірного функціоналу $(A(t), v)$ спостережуваних. Оскільки внаслідок співвідношення (15) справедливі рівності

$$\frac{\delta(A(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)} = e^{\int \nu(x) dx} \left(\frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)} + (B(t), \nu) \right), \quad \frac{\delta^2(A(t), \nu)}{\delta \nu(x_1) \delta \nu(x_2)} = e^{\int \nu(x) dx} \left(\frac{\delta^2(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1) \delta \nu(x_2)} + \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_2)} + \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)} + (B(t), \nu) \right),$$

та враховуючи рівності

$$\int \{ (B(t), \nu), K(x_1) \} \nu(x_1) dx_1 = 0, \quad \int \int \{ (B(t), \nu), \Phi(q_1 - q_2) \} \nu(x_1) \nu(x_2) dx_1 dx_2 = 0,$$

для твірного функціоналу (12) маємо:

$$\begin{aligned} e^{\int \nu(x) dx} \frac{\partial}{\partial t} (B(t), \nu) &= \frac{\partial}{\partial t} (A(t), \nu) = \\ &= \int \left\{ \frac{\delta(A(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)}, K(x_1) \right\} \nu(x_1) dx_1 + \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{\delta^2(A(t), \nu)}{\delta \nu(x_1) \delta \nu(x_2)}, \Phi(q_1 - q_2) \right\} \nu(x_1) \nu(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int \left\{ e^{\int \nu(x) dx} \left(\frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)} \right), K(x_1) \right\} \nu(x_1) dx_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \iint \left\{ e^{\int \nu(x) dx} \left(\frac{\delta^2(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1) \delta \nu(x_2)} + \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_2)} + \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)} \right), \Phi(q_1 - q_2) \right\} \nu(x_1) \nu(x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Таким чином, дуальна ієрархія рівнянь ББГКІ в функціональних похідних для твірного функціоналу маргінальних спостережуваних у випадку систем частинок з парним потенціалом взаємодії має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} (B(t), \nu) = \int \left\{ \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)}, K(x_1) \right\} \nu(x_1) dx_1 + \frac{1}{2} \iint \left\{ \frac{\delta^2(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1) \delta \nu(x_2)} + \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_2)} + \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)} \right\} \nu(x_1) \nu(x_2) dx_1 dx_2. \quad (17)$$

Рівняння (17) можна також безпосередньо отримати з означення функціоналу (12) та дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ.

Побудуємо еволюційне рівняння в функціональних похідних для твірного функціоналу $(B(t), \nu)$, враховуючи зв'язок функціоналів (14) і (12) для потенціалу взаємодії загального виду (9). Аналогічно випадку парного потенціалу взаємодії маємо:

$$\begin{aligned} e^{\int \nu(x) dx} \frac{\partial}{\partial t} (B(t), \nu) &= \frac{\partial}{\partial t} (A(t), \nu) = \int \left\{ \frac{\delta(A(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)}, K(x_1) \right\} \nu(x_1) dx_1 + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \left\{ \frac{\delta^n(A(t), \nu)}{\delta \nu(x_1) \dots \delta \nu(x_n)}, \Phi^{(n)}(q_1, \dots, q_n) \right\} \prod_{i=1}^n \nu(x_i) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int \left\{ e^{\int \nu(x) dx} \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)}, K(x_1) \right\} \nu(x_1) dx_1 + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \left\{ e^{\int \nu(x) dx} \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k=1}^n \frac{\delta^k(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_{i_1}) \dots \delta \nu(x_{i_k})}, \Phi^{(n)}(q_1, \dots, q_n) \right\} \prod_{i=1}^n \nu(x_i) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Отже рівняння в функціональних похідних для твірного функціоналу (12) у випадку багаточастинкового потенціалу взаємодії має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (B(t), \nu) &= \int \left\{ \frac{\delta(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_1)}, K(x_1) \right\} \nu(x_1) dx_1 + \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \dots \int \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k=1}^n \frac{\delta^k(B(t), \nu)}{\delta \nu(x_{i_1}) \dots \delta \nu(x_{i_k})}, \Phi^{(n)}(q_1, \dots, q_n) \right\} \prod_{i=1}^n \nu(x_i) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Еволюційне рівняння (18) в термінах маргінальних спостережуваних (13) є ієрархією рекурентних еволюційних рівнянь, а саме дуальною ієрархією рівнянь ББГКІ для систем частинок з багаточастинковим потенціалом взаємодії [11], [12]

$$\frac{\partial}{\partial t} B_s(t, Y) = \{ B_s(t, Y), H_s \} + \sum_{n=1}^s \frac{1}{n!} \sum_{k=n+1}^s \frac{1}{(k-n)!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_k=1}^s \{ B_{s-n}(t, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})), \Phi^{(k)}(x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \}. \quad (19)$$

Побудуємо розв'язок задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ (19), використовуючи співвідношення (15). Введемо послідовність

$$S(t)A(0) = (A_0, S_1(t)A_1(0, x_1), \dots, S_n(t)A_n(0, x_1, \dots, x_n), \dots),$$

де еволюційним оператором $S_n(t)$ визначається розв'язок задачі Коші для рівняння Ліувілля для спостережуваних системи n частинок з початковою умовою $A_n(0)$ [6]. Справедливі такі рівності

$$(B(t), \nu) = e^{-\int \nu(x) dx} (S(t)A(0), \nu) = (e^{-a^+} S(t)A(0), \nu),$$

де функціонал $(e^{-a^+} S(t)A(0), \nu)$ визначається таким розкладом

$$(e^{-a^+} S(t)A(0), v) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \dots \int \sum_{n=0}^s \frac{(-1)^{s-n}}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n=1}^s (S_{s-n}(t)A_{s-n}(0))(Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})) \prod_{i=1}^s v(x_i) dx_1 \dots dx_s.$$

Згідно означення (16) послідовності початкових даних $A(0) = e^{a^+} B(0)$, тобто

$$A_{s-n}(0, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})) = \sum_{k=0}^s \frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_1 \neq \dots \neq l_k=1, \\ l_1, \dots, l_k \neq j_1, \dots, j_n}} B_{s-n-k}(0, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \setminus (x_{l_1}, \dots, x_{l_k})),$$

справедлива така рівність

$$(e^{-a^+} S(t)A(0), v) = (e^{a^+} U(t)B(0), v). \tag{20}$$

Послідовність $e^{a^+} U(t)B(0)$ в функціоналі (20) покомпонентно визначається таким виразом

$$\begin{aligned} (e^{a^+} U(t)B(0))_s(Y) &= \\ &= \sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n=1}^s U_{1+n}(t, \{Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})\}, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) B_{s-n}(0, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})), \end{aligned}$$

де $U_{1+n}(t)$ – редукований кумулянт $(1+n)$ -го порядку еволюційних операторів $S_n(t)$:

$$U_{1+n}(t, \{Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})\}, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} S_{s-n+k}(t, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n}))$$

та використано позначення з попереднього розділу. Оскільки для функціоналу (20) справедливе еквівалентне представлення

$$(e^{a^+} U(t)B(0), v) = (e^{a^+} \mathfrak{A}(t)B(0), v),$$

де послідовність $e^{a^+} \mathfrak{A}(t)B(0)$ покомпонентно визначається таким виразом

$$(e^{a^+} \mathfrak{A}(t)B(0))_s(t, Y) = \sum_{n=0}^s \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_n=1}^s \mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})\}, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) B_{s-n}(0, Y \setminus (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})), \tag{21}$$

де оператор $\mathfrak{A}_{1+n}(t)$ – кумулянт $(1+n)$ -го порядку (7) еволюційних операторів $S_n(t)$, то остаточно маємо

$$(B(t), v) = (e^{a^+} \mathfrak{A}(t)B(0), v).$$

Дійсно, для кумулянта $(1+n)$ -го порядку (7) еволюційних операторів $S_n(t)$ справедливе таке представлення через кумулянти 1-го порядку, які не залежать від змінних $Y \setminus X \equiv (x_{j_1}, \dots, x_{j_{s-n}})$,

$$\mathfrak{A}_{1+n}(t, \{Y \setminus X\}, X) = \sum_{Z \subset X} \mathfrak{A}_1(t, \{Y \setminus X \cup Z\}) \sum_{P: X \setminus Z = \cup_i X_i} (-1)^{|P|} |P|! \prod_{i=1}^{|P|} \mathfrak{A}_1(t, \{X_i\}),$$

де $\sum_{Z \subset X}$ – сума по всіх можливих підмножинах $Z \subset X$ множини X . Тоді враховуючи тотожність

$$\sum_{P: X \setminus Z = \cup_i X_i} (-1)^{|P|} |P|! \prod_{i=1}^{|P|} \mathfrak{A}_1(t, \{X_i\}) f_{s-n}(Y \setminus X) = \sum_{P: X \setminus Z = \cup_i X_i} (-1)^{|P|} |P|! f_{s-n}(Y \setminus X)$$

та рівність

$$\sum_{P: X \setminus Z = \cup_i X_i} (-1)^{|P|} |P|! = (-1)^{|X \setminus Z|},$$

для розкладу (21) отримуємо представлення (20).

Таким чином, маргінальні s – частинкові спостережувані (13), які є розв'язком задачі Коші для дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ (19), визначаються з функціоналу $(e^{a^+} \mathfrak{A}(t)B(0), v)$ розкладами (21).

4. Висновки

Ієрархії еволюційних рівнянь систем взаємодіючих частинок, сформульовано у вигляді одного рівняння у функціональних похідних для відповідних твірних функціоналів послідовностей функцій, якими описується еволюція станів або спостережуваних.

На основі встановленого зв'язку між твірними функціоналами для послідовностей густин функцій розподілу і маргінальних функцій розподілу, а також зв'язку між твірними функціоналами для послідовностей спостережуваних та маргінальних спостережуваних, побудовано розв'язки не за теорією збурень задачі Коші відповідно для ієрархії рівнянь ББГКІ та дуальної ієрархії рівнянь ББГКІ. Побудовані розв'язки представляються розкладами по групах частинок.

нок, еволюція яких описується відповідного порядку кумулянтном груп еволюційних операторів систем скінченного числа частинок.

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946. – 119 с. 2. Боголюбов М. М. Метод функциональных похідних в статистичній механіці // 36. праць ІМ АН УРСР. – 1947. – Т. 8. – С. 177–189. 3. Gronwall T. H. A functional equation in the kinetic theory of gases // Annals of Mathematics. – 1915. – Vol. 17. – P. 1–4. 4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегро и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с. 5. Lewis R. L. Solution of the equations of statistical mechanics // J. Math. Phys. – 1960. – Vol. 2. – P. 222–231. 6. Cercignani C., Gerasimenko V. I., Petrina D. Ya. Many-particle dynamics and kinetic equations. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – 252 p. 7. Borgioli G., Gerasimenko V. I. The dual BBGKY hierarchy for the evolution of observables // Riv. Mat. Univ. Parma. – 2001. – Vol. 4. – P. 251–267. 8. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V. Cumulant representation of solutions of the BBGKY hierarchy of equations // Ukrainian Math. J. – 2002. – Vol. 54, № 10. – P. 1583–1601. 9. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M. O. On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – Vol. 37. – P. 9861–9872. 10. Gerasimenko V. I., Polishchuk D. O. Dynamics of correlations of Bose and Fermi particles // Math. Meth. Appl. Sci. – 2010. – Vol. 33, № 18. – P. 76–93. 11. Borgioli G., Gerasimenko V. I. Initial-value problem of the quantum dual BBGKY hierarchy. – Nuovo Cimento. – 2010. – Vol. 33 C, №1. – P. 71–78. 12. Gerasimenko V. I. Groups of operators for evolution equations of quantum many-particle systems // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – Vol. 191. – P. 341–355.

Надійшло до редколегії 25.11.2010 р.

УДК 532.5

М. Семків, асп.

ЛОКАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОГО ПОШИРЕННЯ ОДНОРІДНИХ ТА ІНТЕРФЕЙСНИХ ТРІЩИН

Проведено аналітичні дослідження динамічного поширення однорідних тріщин, а також поширення тріщин вздовж меж розділу двох середовищ з різними механічними характеристиками. Отримано показник сингулярності напружень і вирази для кутового розподілу сингулярних членів напружень для різних швидкостей поширення тріщин. Визначені також критичні швидкості поширення тріщини.

An analytical investigation of dynamic uniform crack and of dynamic crack propagation along an interface between two media with different mechanical properties is performed. We assume that cracks faces do not contact. Power singularity and angular distributions of the stress singular terms near the crack tip for various combinations of materials and propagation velocities are obtained. Critical propagation velocities are found.

1. Вступ

При поширенні крихкої тріщини нормального відриву і поперечного зсуву по гладкій траєкторії в однорідному матеріалі, розтягуючі і зсувні напруження мають порядок $r^{-1/2}$. В [5] отримано точні розв'язки для випадку руху тріщини з довільною швидкістю. Показано, що характер особливостей не змінюється, а коефіцієнт інтенсивності напружень залежить від швидкості поширення тріщини [4].

У даній статті роботі аналізуються особливості, які виникають при поширенні тріщини в однорідному матеріалі, а також по межі розділу двох середовищ з різними механічними характеристиками. Характер особливостей залишається таким же для випадку поширення тріщини по достатньо гладкій траєкторії.

Встановлено характер особливості і кутовий розподіл коефіцієнта інтенсивності напружень для однорідного матеріалу і для матеріалу, що "зшитий" з двох інших з різними механічними характеристиками.

2. Аналіз напруженого стану пружного тіла з тріщиною, яка колінеарно поширюється.

Рух однорідної тріщини

Припустимо, що тріщина поширюється із сталою швидкістю в однорідному матеріалі. Розглянемо декартову систему координат Ox_1x_2 . Нехай вздовж осі x_1 рухається тріщина з постійною швидкістю v . Розглянемо відносну систему координат (r, θ) , зв'язану з вершиною рухомої тріщини (дивись рис. 1).

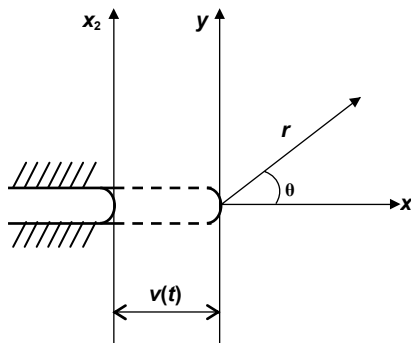


Рис. 1. Колінеарне поширення однорідної тріщини

Хвильові потенціали, що задовольняють хвильові рівняння, подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, t) &= (r/d)^q f(t) \Phi(\alpha_1, \theta) d^2, \\ \tilde{\psi}(r, \theta, t) &= (r/d)^q f(t) \tilde{\Psi}(\alpha_2, \theta) d^2, \\ \tilde{\psi}(r, \theta, t) &= (0, 0, \Psi(\alpha_2, \theta)), \end{aligned} \tag{1}$$

де d – характерний лінійний розмір; $\alpha_i = v(t)/c_i$; $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$ – швидкості поздовжньої і поперечної пружних хвиль. Потенціали, що задаються у вигляді (1), у відповідності з теоремою Ламе, визначають розв'язок задачі еластодинаміки у переміщеннях

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi} . \tag{2}$$

В [5, §2] показано, що загальний вигляд головних членів розв'язку наступний

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_1, \theta) &= (1 - \alpha_1^2 \sin^2 \theta)^{q/2} (A_1 \sin(q\omega_1) + B_1 \cos(q\omega_1)), \\ \Psi(\alpha_2, \theta) &= (1 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta)^{q/2} (A_2 \sin(q\omega_2) + B_2 \cos(q\omega_2)), \end{aligned} \tag{3}$$

де $\tan \omega_i = \gamma_i \tan \theta$, $\gamma_i = (1 - \alpha_i^2)^{1/2}$, $i = 1, 2$. Вирази (3) містять чотири невідомі константи $A_i, B_i, i = 1, 2$. Використовуючи (1) і (2), можна визначити переміщення, а після того і напруження. Приймаючи до уваги, що береги тріщини $\theta = \pm\pi$ вільні від напружень, отримуємо систему чотирьох однорідних лінійних рівнянь.

Вирази (3) разом з (1) визначають головні члени напружень і переміщень:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \\ u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Тоді, відповідно до вибраної методики позначень, запишемо:

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} &= (r/d)^{q-2} f(t) \Sigma_{r\theta}(\theta, \alpha_1, \alpha_2) d^2, \quad \sigma_{\theta\theta} = (r/d)^{q-2} f(t) \Sigma_{\theta\theta}(\theta, \alpha_1, \alpha_2) d^2, \\ u_r &= (r/d)^{q-1} f(t) U_r(\theta, \alpha_1, \alpha_2) d, \quad u_\theta = (r/d)^{q-1} f(t) U_\theta(\theta, \alpha_1, \alpha_2) d \end{aligned}$$

де $\Sigma_{r\theta}, \Sigma_{\theta\theta}, U_r, U_\theta$ залежать від кута θ і швидкості v , але не залежать від r і t . Використовуючи (3), отримуємо значення для переміщень і напружень при $\theta = 0, \pi$:

$$\begin{cases} \frac{U_r(0)}{q} = (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_1 + (1 - \alpha_2^2)^{1/2-q/2} B_2, \\ \frac{U_r(0)}{q} = (1 - \alpha_1^2)^{1/2-q/2} A_2 + (1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_1, \\ \frac{\Sigma_{r\theta}(0)}{\mu q(q-1)} = -2\gamma_1 (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_2 + (2 - \alpha_2^2)(1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_1, \\ \frac{\Sigma_{\theta\theta}(0)}{\mu q(q-1)} = \left(2 - \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \alpha_1^2 \right) (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_1 + 2\gamma_2 (1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_2 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \frac{\Sigma_{r\theta}(\pi)}{\mu q(q-1)} = \left\{ 2\gamma_1 (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_1 + (2 - \alpha_2^2)(1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_2 \right\} \sin(\pi q) - \\ - \left\{ 2\gamma_1 (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_2 - (2 - \alpha_2^2)(1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_1 \right\} \cos(\pi q), \\ \frac{\Sigma_{\theta\theta}(\pi)}{\mu q(q-1)} = \left\{ \left(2 - \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \alpha_1^2 \right) (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_2 + 2\gamma_2 (1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_1 \right\} \sin(\pi q) - \\ - \left\{ \left(2 - \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \alpha_1^2 \right) (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} A_1 + 2\gamma_2 (1 - \alpha_2^2)^{-q/2} B_2 \right\} \cos(\pi q) \end{cases} \tag{5}$$

Вирази (4) і (5) є базовими для задоволення різного типу граничних умов.

2.1. Перша форма руйнування – нормальний відрив

Для даного типу руйнування виконуються наступні граничні умови:

$$\Sigma_{r\theta}(\pi) = 0, \quad \Sigma_{\theta\theta}(\pi) = 0. \tag{6}$$

$$U_\theta(0) = 0, \quad \Sigma_{r\theta}(0) = 0. \tag{7}$$

Використовуючи умову (9), приходимо до однорідної системи рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, нетривіальний розв'язок якої буде при рівності детермінанта Δ нулю

$$\Delta = -\frac{1}{2} (1 - \alpha_1^2)^{-q/2} (1 - \alpha_2^2)^{-q/2} (1 - q)^2 q^2 \left\{ (2 - \alpha_2^2)^2 - 4\sqrt{1 - \alpha_1^2} \sqrt{1 - \alpha_2^2} \right\} \sin(2\pi q)$$

Звідки, беручи до уваги те, щоб потік енергії у вершину тріщини має бути скінченим і відмінним від 0, знаходимо $q = 3/2$

Граничні умови (6) і (7) дозволяють знайти всі невідомі коефіцієнти $A_i, B_i, (i = 1, 2)$.

2.2. Залежність напружень від кута при різних швидкостях

Побудуємо для нормальної форми руйнування діаграми $\sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta}(0), \sigma_{\theta\theta}/\sigma_{\theta\theta}(0)$ для різних значень швидкості кінця тріщини, при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 1/3$.

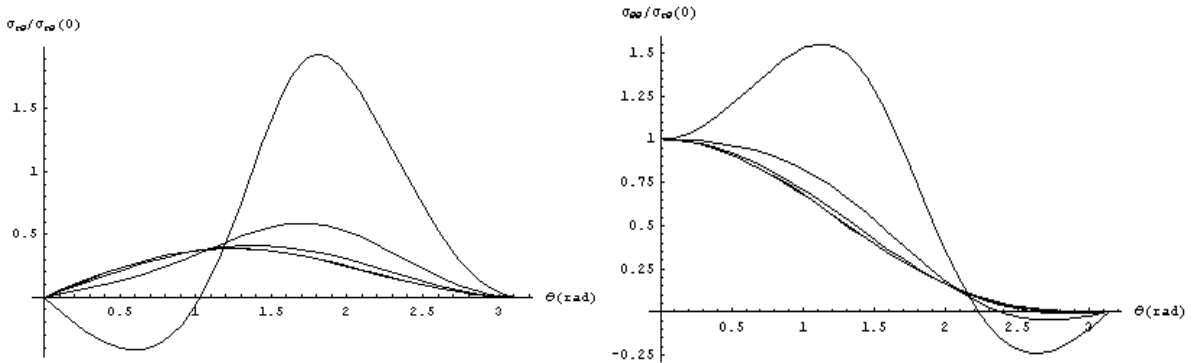


Рис. 2 Залежність функцій $\sigma_{r\theta}$ і $\sigma_{\theta\theta}$ від θ при різних швидкостях кінця тріщини

2.3. Друга форма руйнування

Для даного типу руйнування виконуються наступні граничні умови:

$$\Sigma_{r\theta}(\pi) = 0, \quad \Sigma_{\theta\theta}(\pi) = 0. \tag{8}$$

$$U_{\theta}(0) = 0, \quad \Sigma_{\theta\theta}(0) = 0. \tag{9}$$

Використовуючи умову (13), а також слідкуючи за тим, щоб потік енергії у вершину тріщини мав скінченні значення, відмінні від 0, отримуємо $q = 3/2$.

Граничні умови (8) і (9) дозволяють знайти всі невідомі коефіцієнти $A_i, B_i, (i = 1, 2)$.

2.4. Залежність напружень від кута при різних швидкостях поширення кінця тріщини

Побудуємо для другої форми руйнування діаграми $\sigma_{r\theta}/\sigma_{r\theta}(0), \sigma_{\theta\theta}/\sigma_{r\theta}(0)$ при $r = 1$ а також діаграму для потоку енергії у вершину рухомої тріщини через контур $r = 1$, при різних значеннях швидкості кінця тріщини ($\nu = 1/3$).

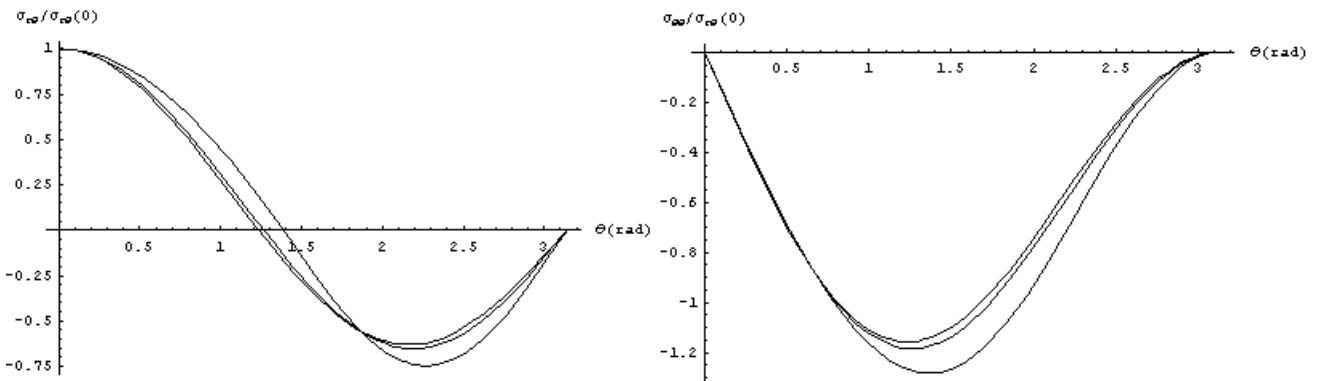


Рис. 3 Залежність функцій $\sigma_{r\theta}$ і $\sigma_{\theta\theta}$ від θ при різних швидкостях кінця тріщини

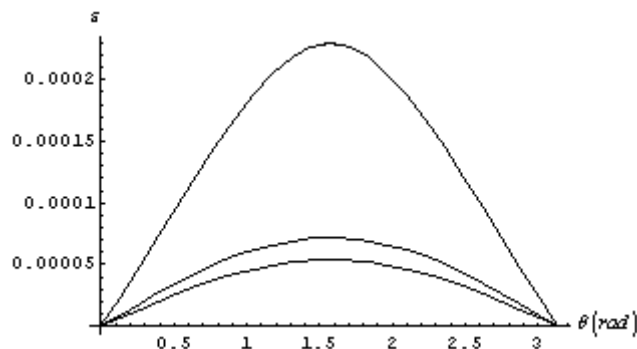


Рис. 4. Потік енергії у вершину рухомої тріщини через контур $r = 1$ при різних швидкостях кінця тріщини

З рисунків (2) і (3) бачимо, що при наближенні швидкості кінця тріщини до деякого значення (критичного), напруження зміщуються з площини тріщини і остання намагається розгалужитись. Критичним значенням швидкості є швидкість хвиль Релея.

3. Рух міжфазної тріщини

Проведемо аналітичні дослідження динамічного поширення кінця тріщини вздовж границі розділу середовищ з різними механічними характеристиками. Параметри, що характеризують дані середовища, позначимо $\rho_1 \lambda_1 \mu_1$ і $\rho_2 \lambda_2 \mu_2$. Припускається, що між матеріалами є повне зчеплення в незруйнованій області і вільні від напружень розімкнені береги тріщини (див. рис. 5).

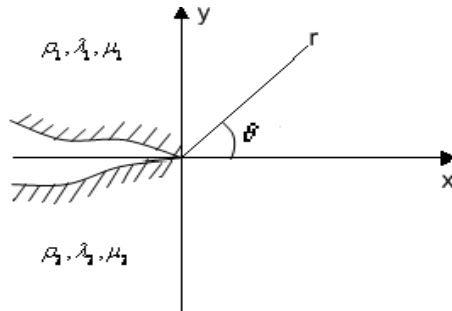


Рис. 5. Колінарне поширення між фазної тріщини

Хвильові потенціали, що задовольняють хвильові рівняння запишуться у вигляді (1). Загальний вигляд головних членів розв'язку

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha_1, \theta) &= (1 - \alpha_1^2 \sin^2 \theta)^{q/2} (A_1 \sin(q\omega_1) + B_1 \cos(q\omega_1)), \\ \Psi(\alpha_2, \theta) &= (1 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta)^{q/2} (A_2 \sin(q\omega_2) + B_2 \cos(q\omega_2)). \end{aligned} \tag{10}$$

де $\tan \omega_i = \gamma_i \tan \theta$, $\gamma_i = (1 - \alpha_i^2)^{1/2}$, $i = 1, 2$. Вирази (14) містить чотири довільні константи $A_i, B_i, (i = 1, 2)$. Використовуючи (1) і (2) можна визначити переміщення, а після того і напруження. Припускаючи, що береги тріщини вільні від напружень, отримаємо систему чотирьох лінійних однорідних рівнянь. Рівність нулю детермінанта визначає $q = 3/2$. Використаємо (10) для визначення локального напружено-деформованого стану поблизу вершини тріщини:

$$\begin{cases} \Phi^i(\alpha_i^j, \theta) = (1 - (\alpha_i^j)^2 \sin^2 \theta)^{q/2} \{A_1^i \sin(q\omega_1^i) + B_1^i \cos(q\omega_1^i)\}, \\ \Psi^i(\alpha_2^j, \theta) = (1 - (\alpha_2^j)^2 \sin^2 \theta)^{q/2} \{A_2^i \sin(q\omega_2^i) + B_2^i \cos(q\omega_2^i)\}. \end{cases} \tag{11}$$

де $\tan \omega_j^i = \gamma_j^i \tan \theta$, $\gamma_j^i = (1 - (\alpha_j^i)^2)^{1/2}$; $i, j = 1, 2$. Значення індексу $i = 1, 2$ відповідає розв'язку задачі у верхній і нижній півплощинах відповідно.

Вирази (11) разом з (1) визначають головні члени напружень і переміщень:

$$\begin{aligned} u_r^i(r, \theta, t) &= \frac{\partial \Phi^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^i}{\partial \theta}, \quad u_\theta^i(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^i}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial r}, \\ \sigma_{r\theta}^i(r, \theta, t) &= G_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\theta}^i(r, \theta, t) = \frac{2G_i(1-\nu_i)}{1-2\nu_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r} \right) + \frac{2G_i\nu_i}{1-2\nu_i} \frac{\partial u_r^i}{\partial r}. \end{aligned} \tag{12}$$

Тоді, відповідно до вибраної методики позначень, запишемо

$$\begin{aligned} u_r^i(r, \theta, t) &= (r/d)^{q-1} f(t) U_r^i(\theta, \alpha_1^i, \alpha_2^i) d, \quad u_\theta^i(r, \theta, t) = (r/d)^{q-1} f(t) U_\theta^i(\theta, \alpha_1^i, \alpha_2^i) d, \\ \sigma_{r\theta}^i(r, \theta, t) &= (r/d)^{q-2} f(t) \Sigma_{r\theta}^i(\theta, \alpha_1^i, \alpha_2^i) d^2, \quad \sigma_{\theta\theta}^i(r, \theta, t) = (r/d)^{q-2} f(t) \Sigma_{\theta\theta}^i(\theta, \alpha_1^i, \alpha_2^i) d^2. \end{aligned} \tag{13}$$

де $U_r^i, U_\theta^i, \Sigma_{r\theta}^i, \Sigma_{\theta\theta}^i, i = 1, 2$, залежать від θ і швидкості ν . Використовуючи (10), отримаємо розв'язки на границі розділу середовищ:

$$\begin{aligned} U_r^i(\pm 0)/q &= B_1^i + \gamma_2^i A_2^i, \quad U_\theta^i(\pm 0)/q = \gamma_1^i A_1^i - B_2^i, \\ \frac{\Sigma_{r\theta}^i(\pm 0)}{q(q-1)G_i} &= 2\gamma_1^i A_1^i - (2 - (\alpha_2^i)^2) B_2^i, \quad \frac{\Sigma_{\theta\theta}^i(\pm 0)}{q(q-1)G_i} = -2\gamma_2^i A_2^i - (2 - (\alpha_2^i)^2) B_1^i, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 U_r^i(\pm\pi)/q &= \pm A_1^i \sin(\pi q) + B_1^i \cos(\pi q) + \gamma_2^i (A_2^i \cos(\pi q) \mp B_2^i \sin(\pi q)), \\
 U_\theta^i(\pm\pi)/q &= \gamma_1^i (A_1^i \cos(\pi q) + B_1^i \sin(\pi q)) - (\pm A_2^i \sin(\pi q) + B_2^i \cos(\pi q)), \\
 \frac{\Sigma_{r\theta}^i(\pm\pi)}{q(q-1)G_i} &= 2\gamma_1^i (A_1^i \cos(\pi q) \mp B_1^i \sin(\pi q)) - \left(2 - (\alpha_2^i)^2\right) (\pm A_2^i \cos(\pi q) + B_2^i \sin(\pi q)), \\
 \frac{\Sigma_{\theta\theta}^i(\pm\pi)}{q(q-1)G_i} &= -\left(2 - (\alpha_2^i)^2\right) (\pm A_1^i \sin(\pi q) + B_1^i \cos(\pi q)) - \gamma_2^i (A_2^i \cos(\pi q) + B_2^i \sin(\pi q)) /
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Вирази (14), (15) визначають головні члени переміщень і напружень при підході до межі розділу зі сторони верхнього (індекс $i=1$) і нижнього (індекс $i=2$) середовищ.

Нехай вздовж осі Ox_1 рухається тріщина з постійною швидкістю v . У локальній системі координат, пов'язаній з вершиною тріщини, умови неперервності компонент вектора переміщень, нормальних і дотичних напружень на продовженні тріщини, а також граничні умови на берегах тріщини мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 U_r^1(+0) &= U_r^2(-0), & U_\theta^1(+0) &= U_\theta^2(-0), \\
 \Sigma_{r\theta}^1(+0) &= \Sigma_{r\theta}^2(-0), & \Sigma_{\theta\theta}^1(+0) &= \Sigma_{\theta\theta}^2(-0), \\
 \Sigma_{r\theta}^1(+\pi) &= \Sigma_{r\theta}^2(-\pi) = 0, & \Sigma_{\theta\theta}^1(+\pi) &= \Sigma_{\theta\theta}^2(-\pi) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Задовольняючи граничні умови (16), отримуємо детермінант

$$\begin{vmatrix} a_{11}\Sigma_{r\theta}(0) & a_{12}t\Sigma_{\theta\theta}(0) \\ -a_{21}t\Sigma_{r\theta}(0) & a_{22}\Sigma_{\theta\theta}(0) \end{vmatrix} = 0,
 \tag{17}$$

де

$$a_{11} = \frac{(\alpha_2^1)^2 \gamma_2^1}{G_1 R_1} + \frac{(\alpha_2^2)^2 \gamma_2^1}{G_2 R_2}, \quad a_{22} = \frac{(\alpha_2^1)^2 \gamma_1^1}{G_1 R_1} + \frac{(\alpha_2^2)^2 \gamma_1^1}{G_2 R_2}, \quad a_{12} = \frac{S_1}{G_1 R_1} + \frac{S_2}{G_2 R_2}, \quad t = \tan(\pi q).$$

Умови існування нетривіального розв'язку (рівність нулю детермінанта) (17) дозволяють отримати вираз для показника особливості розв'язку у вигляді:

$$\tan^2(\pi q) = -\frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}^2} \quad \text{або} \quad \tan(\pi q) = \pm ir(v), \quad \text{де} \quad r(v) = \sqrt{(a_{11}a_{22})/a_{12}^2}.$$

Показник сингулярності напружень $q_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2\pi i} \ln \left| \frac{1-r(v)}{1+r(v)} \right|$ комплексний, що і визначає осцилюючу особливість

напружень на продовженні тріщини. Дійсна частина показника вибирається із ряду можливих значень $n+1/2$ з енергетичних міркувань (так як і у випадку однорідного матеріалу густина енергії деформації повинна бути скінченною і не рівною нулю в довільному як завгодно малому околі вершини тріщини). Залежність уявної частини показника особливості від швидкості поширення кінця тріщини показано на рис. 6.

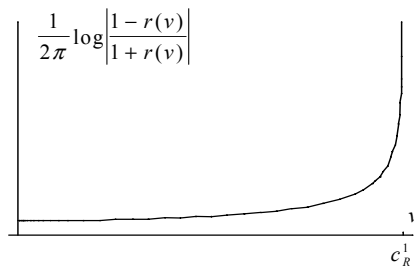


Рис. 6 Залежність уявної частини показника особливості від швидкості розповсюдження тріщини.

З даного рисунка бачимо, що зона осциляції суттєво міняється при досягненні швидкості руху кінця тріщини швидкості хвиль Релея. При досягненні швидкості хвиль Релея, показник осциляції прямує до нескінченності, тому зона осциляції стає нескінченно великою.

4. Висновки

Проведено аналіз поширення однорідної тріщини і магістральної тріщини вздовж прямолінійної границі розділу матеріалів з різними механічними характеристиками. Отримані результати також придатні для слабо криволінійних тріщин. Показано, що при нормальному відриві і поперечному зсуві при досягненні швидкості тріщини певного (критичного) значення, максимальне напруження $\Sigma_{r\theta}$ зміщується з площини тріщини і остання намагається розгалузистись. Критичною швидкістю для даної моделі є швидкість хвиль Релея. Ефект зміщення суттєво проявляється при досягненні критичної швидкості.

Встановлено що, модель інтерфейсної тріщини у випадку, коли береги тріщини не контактують, приводить до осцилюючих особливостей напружень. Критичною швидкістю поширення тріщини є швидкість хвиль Релея в більш м'якому середовищі. Зона осциляції напружень мала в порівнянні з характерними розмірами для малих швидкостей. При досягненні критичної швидкості ефект поширення суттєво проявляється. При досягненні критичної швидкості зона осциляції нескінченно зростає, і дана модель вже не працює. Порядок особливостей напружень не залежить від швидкості поширення кінця тріщини, він співпадає з порядком особливостей для однорідних тріщин.

1. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1981. 2. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова дум., 1981. 3. Математические основы теории разрушения / Под ред. Г. Либовица. – Т. 2. 4. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамическая механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1985. 5. Теоретическая и прикладная механика: Труды 14 международного конгресса IUTAM. – М.: Мир, 1979.

Надійшла до редколегії 17.01.2011 р.

УДК 629.7.015

О. Харитонов, канд. фіз.-мат. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ КОМБІНУВАННЯ ВЕЛИКОЇ ТА МАЛОЇ ТЯГИ ПРИ МІЖПЛАНЕТНИХ ПЕРЕЛЬОТАХ

На прикладі задачі про виконання перельоту типу Гомана досліджено ефективність комбінування ділянок великої та малої тяги при здійсненні міжпланетних перельотів. Припускається, що двигун великої тяги використовується на планетоцентричних, а двигун малої тяги – на геліоцентричних ділянках. Ефективність комбінування проаналізовано для космічних апаратів з рідинними і дворежимними ядерними ракетними двигунами.

The investigation of the efficiency of the combination of high- and low-thrust arcs of space vehicle trajectory is carried out for Homann-type interplanetary transfer. The high-thrust propulsion is used for planet centric maneuver realization and low-thrust propulsion is used for heliocentric maneuver realization. The efficiency of combination is investigated for the space vehicles with liquid and bi-modal nuclear rocket engines. It is shown that such the efficiency increasing with the increasing of heliocentric maneuver duration and delta velocity.

1. Вступ

Найбільш актуальними завданнями сучасної космонавтики є автоматизоване дослідження небесних тіл, що відносяться до ближнього космосу [8,10] та здійснення пілотованих експедицій до планет Сонячної системи, насамперед – Марсу [1,7,11]. Необхідною умовою ефективного проведення таких досліджень є швидка доставка до об'єктів дослідження великих вантажів, що вимагає застосування водночас потужних і ефективних рушійних систем. Підвищення ефективності маршових рушійних систем пов'язується, насамперед, з впровадженням нових енергоустановок малої тяги з ядерним джерелом енергії [1] і великими швидкостями витікання, що дозволить суттєво підвищити можливість доставки великих корисних навантажень. Проте, набір параболічної швидкості за допомогою установок малої тяги вимагає великих затрат часу. Тому було висунуто ідею здійснення перельотів до ближніх небесних тіл із комбінуванням великої та малої тяги [2]. При цьому маневри в сферах впливу планет здійснюються за допомогою двигунів великої тяги, а геліоцентричні маневри – за допомогою більш ефективних двигунів малої тяги. Існує кілька можливостей для технічного забезпечення цієї ідеї. Однією з них є використання багатоступінчастих ракет, в яких перша ступінь, що містить двигун великої тяги на хімічному паливі (рідинний ракетний двигун (РРД)), відкидається після виконання геоцентричного маневру [2]. Іншою можливістю є використання дворежимних ядерних ракетних двигунів (ДЯРД) [7]. При цьому на ділянці великої тяги ядерний реактор використовується як джерело теплової енергії для нагріву робочого тіла із подальшим його прискоренням у соплі, а на ділянці малої тяги – як джерело електричної енергії для живлення двигуна малої тяги. В такій схемі скидання першої ступені може не відбуватися. Порівняно із традиційними РРД, ядерний ракетний двигун (ЯРД) має приблизно вдвічі більшу ефективну швидкість витікання, що обумовлює переваги другого підходу.

В той же час, включення до складу космічного апарату (КА) установок малої тяги пов'язане з додатковими затратами маси, які не завжди компенсуються економією робочого тіла внаслідок її застосування.

У даній статті проведено порівняльний аналіз двох зазначених підходів для випадку модельної задачі перельоту до малих небесних тіл або сфер впливу планет. Припускається, що небесні тіла рухаються по кругових орбітах і для перельоту до них використовується схема Гомана. З метою спрощення, ефективність досліджувалася для задачі про зустріч з тілом призначення, а не задачі про його супроводження. При розрахунку траєкторій за основу прийнятий модифікований метод сфер впливу (ММСВ) [5], при цьому припускається, що планетоцентричний маневр (внутрішня задача) здійснюється виключно за допомогою двигуна великої тяги, а геліоцентричний (зовнішня задача) – за допомогою двигуна малої тяги. Для розрахунку геліоцентричної ділянки траєкторії застосовується метод транспортуючої траєкторії [3], що виправдано, з огляду на порівняно невеликі кутові відстані розглянутих маневрів.

2. Постановка і розв'язання задачі

Розглянемо задачу максимізації корисного навантаження при переведенні КА з заданої початкової кругової орбіти навколо Землі на геліоцентричну еліптичну орбіту (еліпс Гомана), рух по якій забезпечує зустріч з небесним тілом призначення (рис.1). Витрата палива на геоцентричній ділянці в першому наближенні оцінюється згідно класичного підходу імпульсної апроксимації. Отже, має місце співвідношення:

$$M_{H1} = M_{H0} e^{-\frac{\Delta v}{V}}, \quad (1)$$

де M_{H0} , M_{H1} – маси КА на початку і в кінці активної ділянки, Δv – характеристична швидкість маневру, V – ефективна швидкість витікання двигуна великої тяги. При переведенні КА з початкової кругової орбіти з радіусом R_0

на дотичну до неї гіперболічну орбіту з гіперболічним надлишком швидкості v_∞ характеристична швидкість визначається згідно формули

$$\Delta v = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu}{R_0}} - \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}, \quad (2)$$

де μ – гравітаційна стала Землі, R_0 – радіус кругової орбіти старту. Двигун великої тяги забезпечує виведення КА на сферу впливу зі швидкістю руху КА відносно Землі $v_\infty \in [0, v_{\text{orf}}]$, де v_{orf} – геоцентрична швидкість КА на сфері впливу, що відповідає перельоту без застосування двигуна малої тяги (гоманівський переліт). Оптимальний вибір v_∞ становить основний зміст задачі оптимального комбінування участі двигунів великої та малої тяги.

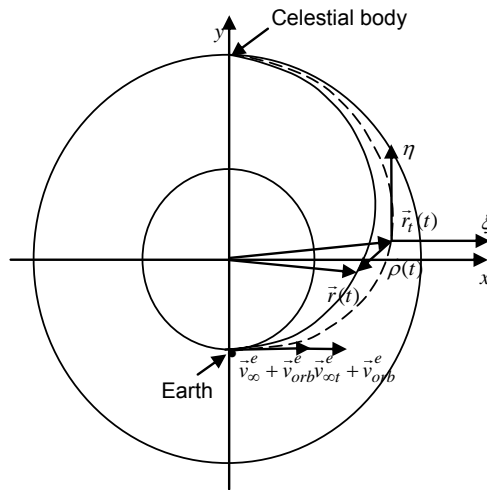


Рис. 1. Схема геліоцентричного маневру

Для оцінки витрат палива на геліоцентричній ділянці застосуємо модель ідеального двигуна обмеженої потужності [4]. Тоді маси КА на початку і в кінці ділянки малої тяги M_{L0} і M_{L1} будуть пов'язані співвідношенням:

$$M_{L1} = \frac{M_{L0}}{1 + \frac{M_{L0}}{2N_{el}} J} \quad (3)$$

де N_{el} – електрична потужність живлення двигуна малої тяги, J – функціонал динамічної частини задачі.

Динамічна частина задачі оптимального руху з малою тягою записується у вигляді [4]:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = \vec{a} + \vec{G}, \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0, \quad \vec{r}(T) = \vec{r}_1, \quad \vec{v}(T) = \vec{v}_1, \quad J = \int_0^T a^2 dt \rightarrow \min, \quad (4)$$

де \vec{a} – реактивне, а \vec{G} – гравітаційне прискорення, T – час виконання геліоцентричного маневру (відзначимо, що значення функціоналу J зменшується зі збільшенням T , тому оптимальна тривалість маневру з малою тягою T дорівнює тривалості пасивного руху по кеплерівській орбіті), \vec{r}_0, \vec{r}_1 – радіуси-вектори, що визначають задані положення КА на геліоцентричних орбітах Землі і планети призначення, $\vec{v}_0 = \vec{v}_e + \vec{v}_\infty$ – вектор геліоцентричної швидкості КА в момент початку руху з малою тягою, що дорівнює сумі орбітальної швидкості Землі \vec{v}_e та геоцентричної швидкості КА в момент виходу на сферу впливу Землі, $\vec{v}_\infty, \vec{v}_1$ – вектор орбітальної швидкості руху по еліпсу Гомана в момент зустрічі з тілом призначення (в момент дотику еліптичної гоманівської орбіти до кругової орбіти призначення).

Для отримання наближеного аналітичного розв'язку задачі (4) застосуємо метод транспортуючої траєкторії [3]. Подамо радіус-вектор центру мас КА $\vec{r}(t)$ у вигляді:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_i(t) + \vec{\rho}(t), \quad (5)$$

де \vec{r}_i – радіус-вектор початку транспортуючої системи координат, що рухається по кеплерівському еліпсу (штрихова лінія на рис. 1), $\vec{\rho}(t) = (\xi(t), \eta(t))$ – радіус-вектор центру мас КА в транспортуючій системі координат $O_i \xi \eta$. В якості транспортуючої орбіти використовується еліпс Гомана, що відповідає виконанню маневру без застосування рушійної системи малої тяги.

Рівняння руху і граничні умови задачі (4) запишемо, нехтуючи збуреннями гравітаційного прискорення, що виникають при переході від транспортуючої траєкторії до реальної [3]. Тоді в транспортуючій системі координат постановка задачі (4) запишеться так:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= v_{\xi}, \quad \dot{\eta} = v_{\eta}, \quad \dot{v}_{\xi} = a \cos \theta, \quad \dot{v}_{\eta} = a \sin \theta, \quad J = a^2, \\ \xi(0) &= 0, \quad \eta(0) = 0, \quad v_{\xi}(0) = v_{\infty} - v_{\infty t}, \quad v_{\eta}(0) = 0, \\ \xi(T) &= 0, \quad \eta(T) = 0, \quad v_{\xi}(T) = 0, \quad v_{\eta}(T) = 0, \\ J(0) &= 0, \quad J(T) \rightarrow \min,\end{aligned}\tag{6}$$

де v_{ξ}, v_{η} – компоненти вектора швидкості КА в транспортуючій системі координат, θ – кут між вектором реактивного прискорення $\vec{a}(t)$ і віссю $O\xi$ (для задачі (6) оптимальне значення $\theta_{opt} = 0$), $\vec{v}_{\infty} = (v_{\infty}, 0)$, $\vec{v}_{\infty t} = (v_{\infty t}, 0)$ – геоцентричні швидкості на границі сфери впливу Землі для, відповідно, перельоту з комбінуванням великої та малої тяги та перельоту по транспортуючій траєкторії за рахунок виключно двигуна великої тяги. Мінімальне значення функціоналу в задачі (6) дається виразом:

$$J(v_{\infty}) = \frac{4}{T} (v_{\infty t} - v_{\infty})^2.\tag{7}$$

У випадку застосування традиційного РРД і скидання ступені вираз для M_{L0} має вигляд:

$$M_{L0} = M_{H1} - M_{HT}(P_{\max}) - \beta(M_{H0} - M_{H1}),\tag{8}$$

де $M_{HT}(P_{\max})$ – маса РРД, що залежить від його максимальної тяги, $\beta(M_{H0} - M_{H1})$ – маса баку для зберігання палива, β – баківий коефіцієнт.

У випадку застосування ДЯРД і збереження ступені справедливо:

$$M_{L0} = M_{H1}.\tag{9}$$

Нарешті, маса корисного навантаження M_{π} у випадках застосування РРД і ДЯРД визначається виразами

$$M_{\pi} = M_{L1} - M_{LT}^{LRE}(N_{el}) - \beta(M_{L0} - M_{L1}) \text{ (РРД)},\tag{10}$$

$$M_{\pi} = M_{L1} - M_{HT}^{BNRE}(P_{\max}) - M_{LT}^{BNRE}(N_{el}) - \beta(M_{L0} - M_{L1}) \text{ (ДЯРД)}.\tag{11}$$

В (10) $M_{LT}^{LRE}(N_{el})$ – маса рушійної системи малої тяги, яка використовується у випадку застосування РРД як двигуна великої тяги і скидання першої ступені. Для розрахунку цієї маси використаємо співвідношення [9]

$$M_{LT}^{LRE}(N_{el}) = \alpha^{LRE}(N_{el})N_{el},\tag{12}$$

де $\alpha^{LRE}(N_{el})$ – питома маса, кг/кВт.

В (11) $M_{HT}^{BNRE}(P_{\max})$ – маса рушійної системи великої тяги, що входить до складу ДЯРД. Розрахунок здійснюється за формулою [9]:

$$M_{HT}^{BNRE}(P_{\max}) = \lambda(P_{\max})P_{\max},\tag{13}$$

де $\lambda(P_{\max})$ – питома маса, кг/кН.

Маса системи малої тяги, що входить до складу ДЯРД, розраховується за формулою [9]:

$$M_{LT}^{BNRE}(N_{el}) = \alpha^{BNRE}(N_{el})N_{el},\tag{14}$$

де $\alpha^{BNRE}(N_{el})$ – питома маса, кг/кВт.

Відмінність в рушійних системах малої тяги полягає у тому, що у випадку ДЯРД ядерний реактор використовується в якості джерела і теплової і (з відповідною системою перетворення) електричної енергії, а для РРД – лише в якості джерела електричної енергії. Тому маса ядерного реактора у випадку ДЯРД включається до маси рушійної системи великої тяги, а у випадку РРД – до маси рушійної системи малої тяги.

При фіксованих параметрах рушійної системи і КА R_0 , M_0 , β , P_{\max} , N_{el} , беручи до уваги (2),(3),(7)–(11), можемо стверджувати, що маса корисного навантаження залежить лише від швидкості v_{∞} , оптимальний вибір якої забезпечує оптимальний розподіл витрат палива між ділянками великої та малої тяги. Таким чином, інтерес представляє, насамперед, дослідження залежностей $M_{\pi}(v_{\infty})$ для варіантів комбінування великої та малої тяги з використанням РРД та ДЯРД, аналіз переваг ДЯРД над РРД та аналіз доцільності використання рушійної системи малої тяги взагалі.

3. Результати та їх аналіз

Для проведення розрахунків було обрано такі значення параметрів задачі: висота кругової навколоземної орбіти старту $h_0 = 400$ км, радіуси кругових геліоцентричних орбіт призначення: $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км (кругова орбіта Марсу), $R_2 = 500 \cdot 10^6$ км, $R_3 = 1000 \cdot 10^6$ км, стартова маса КА $M_0 = 160 \cdot 10^3$ кг, максимальна ефективна швидкість витікання РРД $V_{\max}^{LRE} = 4500$ м/с, максимальна ефективна швидкість витікання ДЯРД $V_{\max}^{BNRE} = 9310$ м/с, маса РРД великої тяги $M_{HT}(P_{\max}) = 0.01P_{\max}$, $P_{\max} = 980$ кН (типові параметри для орбітальних маршових РРД [4]), баківий коефіцієнт $\beta = 0.1$.

Питома маса $\lambda(P_{\max})$ у моделі (13), обчислювався шляхом інтерполювання даних таблиці 1 [9].

Таблиця 1. Значення питомої маси підсистеми великої тяги ДЯРД

P_{\max} , кН	66.7	112.2	222.4	333.6	1112.1
λ , кг/кН	36.7	32.4	21.2	19.6	16.3

Питомі маси рушійних систем малої тяги розраховуються за допомогою співвідношень [9]:

$$\alpha^{LRE} = \left(\frac{A}{BN_{el\max} + C} + D \right), \quad \alpha^{BNRE} = 0.7 \left(\frac{A}{BN_{el\max} + C} + D \right), \quad (15)$$

де $A=72.0$ кг, $B=0.01$, $C=1.05$ кВт, $D=2.83$ кг/кВт.

Швидкість $v_{\infty t}$ і час перельоту T обчислюються за відомими формули, що визначають параметри перельотів типу Гомана [6].

На рис. 2, 3 подано криві залежностей безрозмірної маси корисного навантаження $m_{\pi} = M_{\pi} / M_0$ від швидкості v_{∞} , що побудовані для схем з застосуванням РРД (рис.2) і ДЯРД (рис.3) для маневрів перельоту до небесних тіл, що рухаються по геліоцентричних кругових орбітах з радіусами R_1 (рис.2.а і 3.а) і R_3 (рис.2.б і 3.б). Наведені криві відповідають трьом різним значенням електричної потужності живлення двигуна малої тяги $N_{el} = 0.1, 0.5$ і 1.5 МВт. Згідно (2) v_{∞} визначає характеристичну швидкість маневру з великою тягою. Якщо мала тяга не використовується, то $v_{\infty} = v_{\infty t}$. У випадку застосування системи малої тяги оптимальне значення v_{∞} залежить від електричної потужності N_{el} , при збільшенні якої оптимальне значення v_{∞} зменшується, а отже, зменшуються енергетичні затрати на маневр з великою тягою.

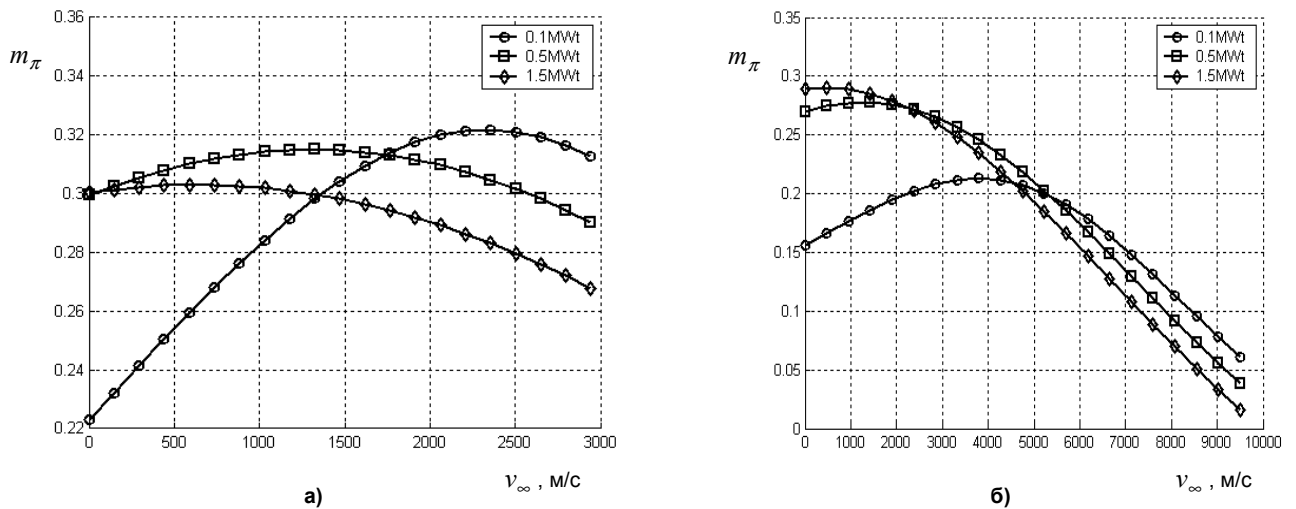


Рис. 2. Залежності маси корисного навантаження від швидкості КА на сфері впливу для схеми із застосуванням РРД. Перельоти до тіл, що рухаються по орбітах з радіусами: а. $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км, б. $R_3 = 1000 \cdot 10^6$ км

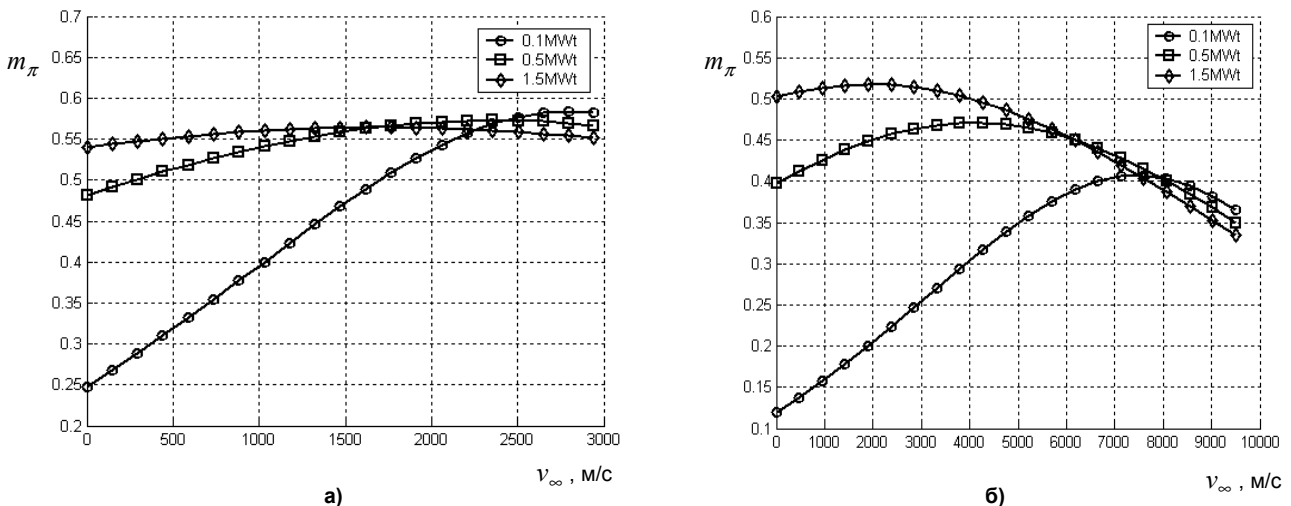


Рис. 3. Залежності маси корисного навантаження від швидкості КА на сфері впливу для схеми із застосуванням ДЯРД. Перельоти до тіл, що рухаються по орбітах з радіусами: а. $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км, б. $R_3 = 1000 \cdot 10^6$ км

Можливості перенесення долі енергетичних затрат з маневру з великою тягою на маневр з малою тягою тим більші, чим більше значення $v_{\infty t}$, а отже чим більший радіус кругової орбіти тіла призначення. Тому, серед трьох розглянутих рушійних систем малої тяги, для радіуса R_3 найбільш ефективною виявилася система з максимальним значенням N_{el} , яка дозволяє перенести на ділянку малої тяги максимум енергетичних затрат (оптимальне значення v_{∞} близьке до нуля). В той же час, для радіуса R_1 можливості економії палива шляхом перенесення частини енергетичних затрат на ділянку малої тяги менше, тому при збільшенні N_{el} така економія не компенсує збільшення маси рушійної системи і з трьох розглянутих систем більш ефективною виявилася та, що має найменшу потужність.

Для маневрів перельоту до небесних тіл, що рухаються по кругових орбітах з радіусами R_1, R_2, R_3 на рис. 4 наведено залежності максимального корисного навантаження від N_{el} .

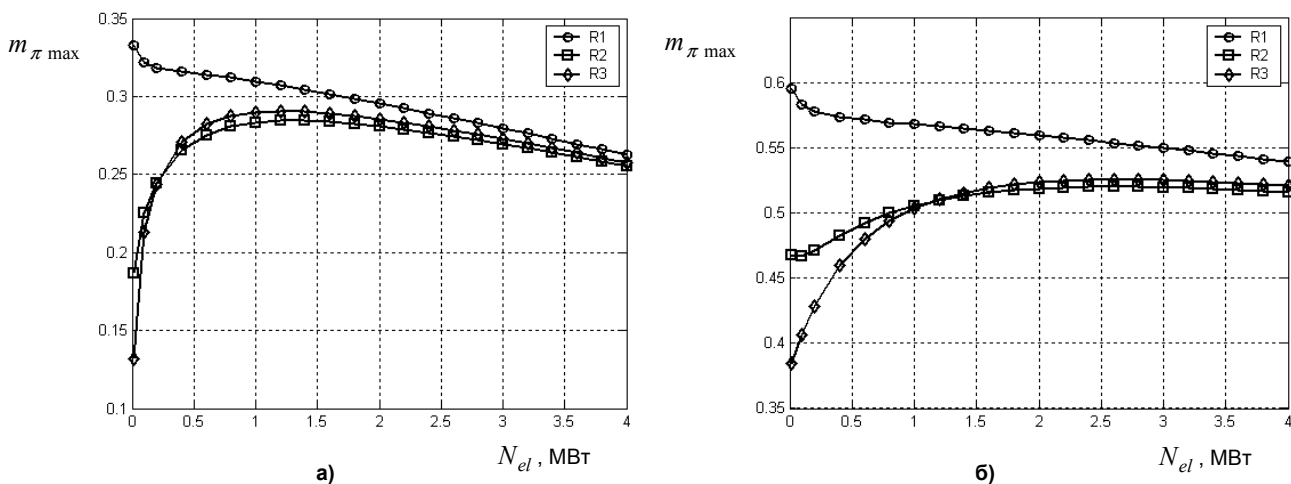


Рис. 4. Залежності маси корисного навантаження від електричної потужності.
а. – схема з застосуванням РРД, б. – схема із застосуванням ДЯРД

З рис. 4, по-перше, можна зробити висновок, що комбінування великої та малої тяги стає оптимальним лише у випадку маневрів з високою енергетикою (при великих значеннях характеристичної швидкості маневру). Дійсно, для першого маневру – перельоту до небесного тіла з радіусом орбіти R_1 , економія палива внаслідок застосування системи малої тяги не перевищувала маси цієї системи. Отже, для таких маневрів встановлення додаткової системи малої тяги є недоцільним. Порівнюючи другий і третій маневри, зробимо висновок, що максимальна маса корисного навантаження для третього маневру більша, не дивлячись на те, що цей маневр вимагає більших енергозатрат. Такий результат пояснюється тим, що для третього маневру час руху по геліоцентричній ділянці приблизно вдвічі більший, ніж для другого, а характеристична швидкість $v_{\infty t}$ більша лише на 32%. Тому, при виконанні третього маневру, є оптимальними менші значення реактивного прискорення, а отже – більші значення ефективної швидкості витікання, отже для третього маневру паливо витрачається більш ефективно.

Як впливає з рис.4 а) і 4.б), схема з застосуванням ДЯРД, порівняно із схемою з застосуванням РРД, забезпечує можливість доставки додаткового корисного навантаження, маса якого дорівнює приблизно 20% початкової маси КА. Насамперед, це є наслідком майже вдвічі більшої ефективної швидкості витікання у рушійній системі великої тяги.

На рис.5 порівняно корисне навантаження, доставка якого забезпечується РРД і ДЯРД з різними ефективними швидкостями витікання. Значення електричної потужності обрані близькими до оптимальних: для схеми із застосуванням ДЯРД для маневрів перельоту до небесних тіл радіусами орбіт R_1 і R_3 , виходячи з рис.4 було прийнято, відповідно, $N_{el} = 0.1$ МВт і 2.5 МВт. Як впливає з цього рисунку, при невеликих швидкостях витікання переваги від скидання першої ступені при застосуванні РРД є вагомими, проте вже при порівняно невеликому збільшенні швидкості витікання (менш ніж на 10%) застосування ДЯРД стає більш ефективним. Крім того, рис. 5 дозволяє проаналізувати ефективність комбінування режимів великої та малої тяги шляхом порівняння із схемою, коли маневр здійснюється за рахунок ЯРД великої тяги, мала тяга не застосовується, перша ступінь не скидається, але їй не враховується додаткова маса рушійної системи малої тяги. Як впливає з рис.5 а), для маневрів з низькою енергетикою (першого маневру – перельоту до небесного тіла з радіусом R_1) застосування системи малої тяги не виправдано.

Збільшення долі енергетичних затрат, що припадає на ділянку малої тяги, як у випадку третього маневру (рис.5 б.), веде до збільшення ефективності комбінування, що узгоджується з раніше зробленими висновками. Для схеми перельоту з використанням РРД і комбінуванням великої та малої тяги у випадку третього маневру застосування рушійної системи малої тяги дозволяє у високій мірі компенсувати втрати палива за рахунок низької швидкості витікання і практично досягнути тієї ж ефективності, що і для схеми з використанням тільки ЯРД великої тяги. Ефективність цих двох схем буде приблизно однаковою, якщо швидкість витікання ЯРД великої тяги становить 7700 м/с, що є досить високим значенням.

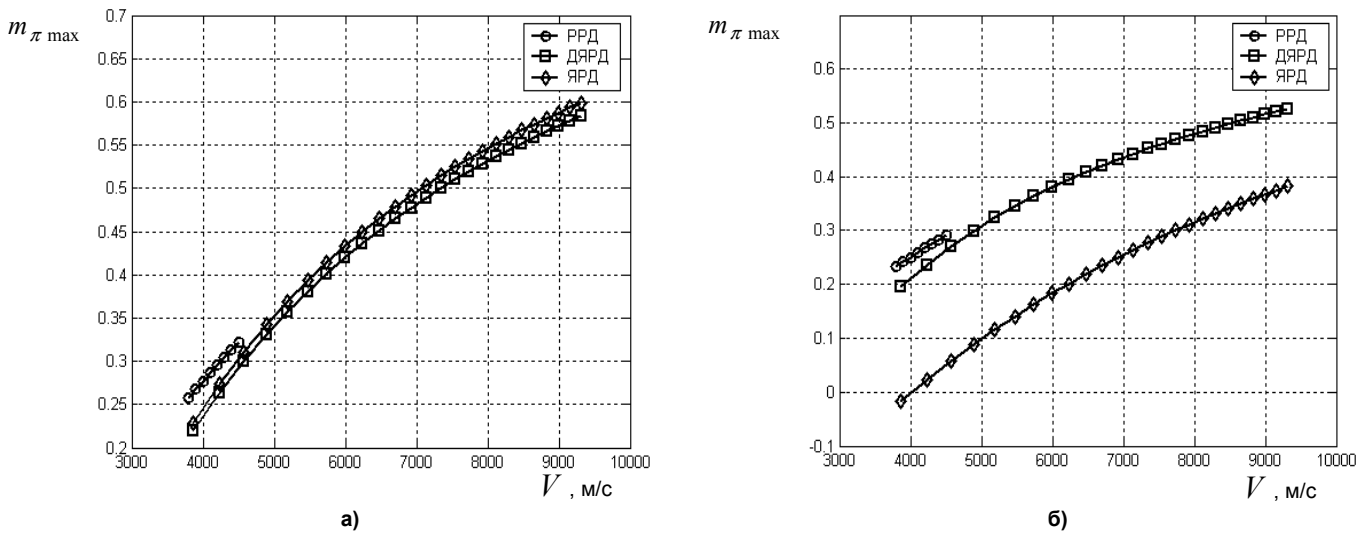


Рис. 5. Залежності маси корисного навантаження від ефективної швидкості витікання. а) – переліт до небесного тіла, що рухається по круговій орбіті з радіусом $R_1 = 227.94 \cdot 10^6$ км, б) – з радіусом $R_3 = 1000 \cdot 10^6$ км

3. Висновки

У статті розглянуто модельну задачу про оптимізацію маневру переведення космічного апарату з заданої кругової навколосемної орбіти на задану геліоцентричну орбіту зустрічі з небесним тілом. Траєкторія перельоту формується за рахунок комбінування участі двигунів великої та малої тяги. Показано, що ефективність комбінування великої та малої тяги збільшується разом з енергозатратами на виконання геліоцентричної частини маневру і, якщо для маневрів з порівняно невеликими енергозатратами комбінування не є доцільним, то у випадку маневрів з високою енергетикою такий підхід є дуже ефективним.

1. Акимов В. Н., Конохов В. Г., Коротеев А. А. Эффективность применения многорежимных ядерных электродвигательных установок с машинным преобразованием энергии // Изв. РАН, сер. "Энергетика". – 2008. – № 3. – С. 20–27. 2. Ахметшин Р. З., Белоглазов С. С., Белоусова Н. С. и др. Оптимизация перелетов к астероидам и кометам космических аппаратов с комбинированием большой и малой тяги. – Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1988. – 28 с. 3. Белецкий В. В., Егоров В. А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности // Космич. исслед. – 1964. – Т. 2, № 3. – С. 303–330. 4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с. 5. Ильин В. А., Кузмак Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. – М.: Наука, 1976. – 744 с. 6. Охоцимский Д. Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. – М.: Наука, 1990. – 448 с. 7. Borowski S. K. "Bimodal" nuclear thermal rocket (BNTR) propulsion for future human Mars exploration missions // NASA/CP–2004–212963. – 2004. – Vol. 1. – P. 305–323. 8. Ivashkin V. V., Stikhno S. A. On a hazard mitigation problem for Apophis–Earth possible collision in 2036 // 61st International Astronautical Congress, Prague, Czech Republic, September 27 – October 1, 2010. Proceedings, Paper IAC–10–C1.2.4. 9. Kharytonov O. M., Kiforenko B. M. Finite–thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion // Proc. of 61st International Astronautical Congress, Prague, CZ, 27.09 – 01.10.2010. – IAC–10–C1.9.7. – 11 p. 10. Mc. Guire M. L., Martini M. C., Packard T. W. et al. Use of high–power Brayton nuclear electric propulsion (NEP) for a 2033 Mars round–trip mission // NASA TM–2006–214106. – NASA, GRC. – 2006. – 11 p. 11. Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al. Project M³ – a study for manned Mars mission in 2031 // Acta Astronautica. – 2006. – Vol. 58. – P. 88–104.

Надійшла до редколегії 20.01.2011 р.

УДК 519.21

І. Козак, асп., В. Масол, проф.

ПРО ВІДХИЛЕННЯ РОЗПОДІЛУ ЧИСЛА КОНФІГУРАЦІЙ ЗАДАНОГО ТИПУ ВІД РОЗПОДІЛУ ПУАССОНА

Знайдено достатні умови, які дозволяють отримати оцінки відхилення розподілу числа конфігурацій заданого типу у випадковому $(0,1)$ -векторі, який складається з m_0 нулів і m_1 одиниць, $m_0 + m_1 = n$, $n > 0$, від розподілу Пуассона.

We find the sufficient conditions which allow for estimation of deviation of distribution of configurations' number of given type in random $(0,1)$ -vector, consisting of m_0 zeros and m_1 ones, $m_0 + m_1 = n$, $n > 0$ from Poisson distribution.

1. Вступ

Будемо казати, що n -вимірний вектор має специфікацію $0^{m_0}1^{m_1}$, де $m_0 + m_1 = n$, якщо він утворений з m_0 нулів та m_1 одиниць. Позначимо η_n число конфігурацій типу $1\alpha 0$, де $\alpha \in \{0, 1\}$, у векторі, який випадково і рівномірно вибирається з множини усіх векторів специфікації $0^{m_0}1^{m_1}$. В роботі [1] отримана формула (36) для знаходження розподілу випадкової величини η_n . Якщо $m_0 = 1$, то зазначена формула дає $P\{\eta_n = 0\} = \frac{2}{n} = 1 - P\{\eta_n = 1\}$. У даній роботі знайдені достатні умови на параметри m_0 , n та значення випадкової величини η_n , які дозволяють отримати нетривіальні оцінки відхилення розподілу цієї випадкової величини від розподілу Пуассона.

2. Основні результати

Покладемо $\lambda = m_0^2/n$, $m_0 \geq 2$, $G = \sqrt{2(k+1)m_0 \ln m_0}$, $k = k(n)$ – ціле число, $k \geq 1$.

Теорема 1. Нехай параметри ε_0 , $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $k \geq 1$, $m_0 \geq 2$, n змінюються таким чином, що

$$\frac{32k^2(k+1)\ln m_0}{m_0} < \varepsilon_0, \tag{1}$$

$$\frac{m_0}{n} < \frac{1}{2+3\sqrt{\varepsilon_0}}. \tag{2}$$

Тоді

$$-e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (\varepsilon_* + Q - \varepsilon_* Q) \leq P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \leq e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (\varepsilon^* e^{\varepsilon^*} + e^{\lambda} Q_1), \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon_* = & Rk \left(1 + Rk \frac{1}{8\sqrt{k(k+1)\ln m_0}} \right) + 3\lambda R(1+R) + 6\lambda^2 \frac{(1+R)^2}{m_0^2} + \frac{m_0^3}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{8k(k+1)\ln m_0} \right) \times \\ & \times \frac{(1+R^2k)^2 \left(\left[\frac{n}{2} \right] \right)^{-2}}{1 - m_0(1+R^2k) \left(\left[\frac{n}{2} \right] \right)^{-1}} + \frac{\lambda^2}{2m_0} + \frac{(k-1)k}{2m_0} + \frac{k(k-1)(2k-1)}{12m_0^2 \left(1 - \frac{k-1}{m_0} \right)}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\varepsilon^* = Rk + \lambda \frac{(4k+3)}{m_0(1-R)} + 3\lambda R + 4\lambda \frac{Rk(k+3)}{m_0^2(1-R)^2} + \frac{\lambda^2}{6m_0 \left(1 - \frac{\lambda}{m_0} \right)} \left(1 + \frac{1}{2m_0^2} \right),$$

$$Q = \frac{4}{m_0^{2\tau-\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{m_0^{2\tau-1}} \right)^k \frac{\exp\left\{ \frac{1}{12(m_0-k)} \right\}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{2G-k}{m_0-k} \right)} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2} \right) \exp\left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2} \right\}, \quad Q_1 = 2^k \exp\left\{ \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6m_0(1-\lambda m_0^{-1})} + \frac{\lambda^2}{12m_0^3(1-\lambda m_0^{-1})} \right\} Q, \tag{5}$$

$$\tau = const, \quad 0,74 < \tau < 1, \quad R = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}.$$

Теорема 2. Якщо виконується умова (1) теореми 1 і

$$\lambda \leq c < \infty, \quad \text{де } c = const, \tag{6}$$

то для $n \rightarrow \infty$ $P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \rightarrow 0$.

Приклад 1. Якщо $m_0 = 500$, $n = 2 \times 10^6$, $\lambda = 0,125$, $k = 1$, то виконуються умови (1), (2) теореми 1 і співвідношення (3) дає $-0,17 \leq P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \leq 0,47$.

Приклад 2. Якщо $m_0 = 5 \times 10^3$, $n = 5 \times 10^7$, $\lambda = 0,5$, $k = 2$, то виконуються умови (1), (2) теореми 1 і співвідношення (3) дає $-0,13 \leq P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \leq 0,44$.

3. Допоміжні твердження

Лема 3.1. Нехай виконуються умови (1) і для $k \geq 1$

$$x_1 + x_2 = k, \tag{7}$$

$$a_1 + a_2 = m_0, \tag{8}$$

де x_j , a_j – цілі невід'ємні числа, $j = 1, 2$,

$$a_1 \in \left[\frac{m_0}{2} - G; \frac{m_0}{2} + G \right]. \tag{9}$$

Тоді мають місце оцінки

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \leq \left(\frac{m_0}{2} \right)^k \exp\left\{ \sqrt{\varepsilon_0} \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}, \tag{10}$$

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \geq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \cdot \exp \left\{ -\sqrt{\varepsilon_0} - \frac{\varepsilon_0}{k \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)} - \frac{k(k-1)}{m_0 \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right)} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{3m_0^2 \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{k} - \frac{\varepsilon_0}{4k(k+1)\ln m_0}\right)} \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}. \quad (11)$$

Доведення. Перевіримо співвідношення (10). Беручи до уваги умови (8) і (9), отримаємо рівність

$$\max(a_1, a_2) = \frac{m_0}{2} + 2G, \quad (12)$$

яка дозволяє записати

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \leq \left(\frac{m_0}{2} + 2G\right)^k \exp \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{v=0}^{x_i-1} \ln \left(1 - \frac{v}{\frac{m_0}{2} + 2G}\right) \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}. \quad (13)$$

За допомогою умови (1) переконуємося в тому, що має місце оцінка $\max_{1 \leq v \leq k} \frac{v}{\frac{m_0}{2} + 2G} < 1$. Отже, до правої частини

співвідношення (13) можна застосувати нерівність

$$\ln(1+u) \leq u, \quad (14)$$

де $|u| < 1$, так що

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \leq \left(\frac{m_0}{2} + 2G\right)^k \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{x_i(x_i-1)}{\left(\frac{m_0}{2} + 2G\right)} \right) \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}. \quad (15)$$

Вираз $\left(\frac{m_0}{2} + 2G\right)^k$ подамо у вигляді $\left(\frac{m_0}{2} + 2G\right)^k = \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp \left\{ k \ln \left(1 + \frac{4G}{m_0}\right) \right\}$.

Беручи до уваги нерівність

$$\frac{4G}{m_0} < 1, \quad (16)$$

яку можна перевірити враховуючи умову (1), застосуємо (14) до $\ln(1 + 4Gm_0^{-1})$ і отримаємо

$$\left(\frac{m_0}{2} + 2G\right)^k \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp \left\{ k \frac{4G}{m_0} \right\}. \quad (17)$$

Підстановка (17) в (15) дає $C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \leq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp \left\{ k \frac{4G}{m_0} - \frac{1}{m_0 + 4G} \sum_{i=1}^2 x_i(x_i-1) \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}$. Звідси безпосередньо приходимо до (10), оскільки умова (1) дозволяє скористатися нерівністю

$$\frac{4kG}{m_0} < \sqrt{\varepsilon_0}. \quad (18)$$

Перевіримо співвідношення (11). Аналогічно (12) переконуємося у тому, що $\min(a_1, a_2) = \frac{m_0}{2} - 2G$. Отже,

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \geq \left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^k \exp \left\{ \sum_{i=1}^2 \sum_{v=0}^{x_i-1} \ln \left(1 - \frac{v}{\frac{m_0}{2} - 2G}\right) \right\} \frac{1}{x_1! x_2!}. \quad (19)$$

За допомогою умови (1) знаходимо, що для $k \geq 2$ справджується нерівність $\max_{1 \leq v \leq k} \frac{v}{\frac{m_0}{2} - 2G} < 1$. Тому до виразу

$\ln \left(1 - v \left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^{-1}\right)$, $v = 0, 1, 2, \dots, k$, $k \geq 2$, можна застосувати оцінку

$$\ln(1-u) \geq -u - \frac{u^2}{2(1-u)}, \quad (20)$$

де $0 \leq u < 1$, і записати співвідношення

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \geq \left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^k \exp \left\{ - \sum_{i=1}^2 \left[\frac{x_i(x_i-1)}{m_0-4G} + \frac{(x_i-1)x_i(2x_i-1)}{12\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)^2 \left(1-\frac{k}{\frac{m_0}{2}-2G}\right)} \right] \right\} \frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (21)$$

Беручи до уваги умову (7), перепишемо (21) наступним чином

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \geq \left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^k \exp \left\{ - \frac{k(k-1)}{m_0-4G} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{12\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)\left(\frac{m_0}{2}-2G-k\right)} \right\} \frac{1}{x_1!x_2!}. \quad (22)$$

До оцінки (22) приходимо також при $k=1$, що впливає безпосередньо з (7) і (19). Вираз $\left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^k$ подамо у наступному вигляді $\left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^k = \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp \left\{ k \ln \left(1 - \frac{4G}{m_0}\right) \right\}$, звідки з урахуванням (16) і (20) впливає

$$\left(\frac{m_0}{2} - 2G\right)^k \geq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp \left\{ -k \left[\frac{4G}{m_0} + \frac{\left(\frac{4G}{m_0}\right)^2}{2\left(1-\frac{4G}{m_0}\right)} \right] \right\}. \quad (23)$$

Підстановка (23) у (22) дає нерівність

$$C_{a_1}^{x_1} C_{a_2}^{x_2} \geq \left(\frac{m_0}{2}\right)^k \exp \left\{ -k \frac{4G}{m_0} - k \frac{\left(\frac{4G}{m_0}\right)^2}{2\left(1-\frac{4G}{m_0}\right)} - \frac{k(k-1)}{m_0-4G} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{12\left(\frac{m_0}{2}-2G\right)\left(\frac{m_0}{2}-2G-k\right)} \right\} \frac{1}{x_1!x_2!},$$

від якої за допомогою (18) нескладно перейти до (11).

Аналогічно доведенню леми 3.1 можна переконатися у справедливості наступної леми.

Лема 3.2. Нехай для $k \geq 1$ виконуються умови (1), (2), (7)–(9). Тоді мають місце наступні оцінки

$$\prod_{i=1}^2 C_{r(i)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - a_i}^{a_i - x_i} \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{m_0-k} \exp \left\{ -\frac{3}{2}\lambda + \lambda \frac{(4k+3)}{m_0\left(1-\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{k}\right)} + 3\lambda \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{k} + \lambda \frac{4\sqrt{\epsilon_0}(k+3)}{m_0^2\left(1-\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{k}\right)^2} \right\} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{(a_i - x_i)!}, \quad (24)$$

$$\prod_{i=1}^2 C_{r(i)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - a_i}^{a_i - x_i} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{m_0-k} \exp \left\{ -\frac{3}{2}\lambda - 3\lambda \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{k} \left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{k}\right) - 6\lambda^2 \frac{1}{m_0^2} \left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{k}\right)^2 - \frac{m_0^3}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_0}{8k(k+1)\ln m_0}\right) \frac{\left(1 + \frac{\epsilon_0}{k}\right)^2 \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)^{-2}}{1 - m_0 \left(1 + \frac{\epsilon_0}{k}\right) \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)^{-1}} \right\} \prod_{i=1}^2 \frac{1}{(a_i - x_i)!},$$

де $r(i)=1$, якщо $1 \leq i \leq p$, $r(i)=0$, якщо $i > p$, $p = n - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Лема 3.3. Для $n > m_0 \geq 0$ справедливі наступні оцінки

$$C_n^{m_0} \leq \frac{n^{m_0}}{m_0!} \exp \left\{ -\frac{m_0(m_0-1)}{2n} \right\}, \quad (25)$$

$$C_n^{m_0} \geq \frac{n^{m_0}}{m_0!} \exp \left\{ -\frac{m_0(m_0-1)}{2n} - \frac{m_0(m_0-1)(2m_0-1)}{12n^2 \left(1 - \frac{m_0-1}{n}\right)} \right\}. \quad (26)$$

Доведення. Біноміальний коефіцієнт $C_n^{m_0}$ представимо у вигляді $C_n^{m_0} = \frac{n^{m_0}}{m_0!} \exp \left\{ \sum_{v=1}^{m_0-1} \ln \left(1 - \frac{v}{n}\right) \right\}$, звідси, беручи

до уваги нерівність (14), отримаємо оцінку зверху (25). Аналогічно за допомогою нерівності (20) знаходимо оцінку знизу (26).

Позначимо

$$I' = \sum_{x_1+x_2=k} \frac{k!}{x_1!x_2!} \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0-G-1}{2}} \frac{(m_0-k)!}{(a_1-x_1)!(m_0-a_1-x_2)!} \quad (27)$$

Лема 3.4. Нехай для $k \geq 1$ виконуються умови (1), (7), (8). Тоді справедлива наступна оцінка

$$I' \leq 2^{m_0} \cdot \left(\frac{1}{m_0^{2\beta-1}} \right)^k \frac{1}{m_0^{2\beta-\frac{1}{2}}} \frac{\exp \left\{ \frac{1}{12(m_0-k)} \right\}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{2G-k}{m_0-k}\right)}, \quad (28)$$

де $\beta = const$, $0,93 < \beta < 1$.

Доведення. За допомогою поліноміальної теореми, рівності (27) та умови (8) знаходимо

$$I' \leq \sum_{x_1+x_2=k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^2 x_i!} \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0-G-1}{2}} C_{m_0-k}^{a_1} a_1(a_1-1)\dots(a_1-x_1-1). \quad (29)$$

Умова (7), співвідношення (29) дають

$$I' \leq (2m_0)^k \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0-G}{2}} C_{m_0-k}^{a_1}. \quad (30)$$

За допомогою формули Стірлінга [2] праву частину (30) можна оцінити таким чином, що

$$I' \leq m_0^{k+1} 2^{m_0} \left(2\pi m_0 \left(1 - \frac{k}{m_0}\right) \left(1 - \frac{2G-k}{m_0-k}\right) \left(1 + \frac{2G-k}{m_0-k}\right) \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{12(m_0-k)} \right\} \exp \left\{ -\frac{2}{(m_0-k)} \left(G - \frac{k}{2}\right)^2 \langle 1 + \gamma(\xi) \rangle \right\}, \quad (31)$$

де $\gamma(\xi) = -\frac{2\xi}{3}$, $\xi = \frac{G-k}{m_0-k}$.

Умова (1) дозволяє отримати нерівність $\xi < \frac{G}{m_0} < \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{4k} < \frac{1}{4}$, звідки

$$0,83 < 1 + \gamma(\xi) < 1. \quad (32)$$

Покажемо, що

$$\frac{\left(1 - \frac{k}{2G}\right)^2}{1 - \frac{k}{m_0}} < 1. \quad (33)$$

Дійсно, нерівність (33) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{k}{2G} + \frac{2G}{m_0} < 2. \quad (34)$$

Але для $\varepsilon_0 \in (0,1)$ і $k \geq 1$ маємо

$$\frac{k}{2G} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{16(k+1)\ln m_0} < \frac{1}{32}, \quad (35)$$

$$\frac{2G}{m_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{2k} < \frac{1}{2}.$$

Отже, співвідношення (34), а разом з ним співвідношення (33), виконуються.
Оцінка

$$\left(1 - \frac{k}{2G}\right)^2 \left(1 - \frac{k}{m_0}\right)^{-1} > 0,93 \tag{36}$$

впливає з (35). Нерівності (33) і (36) дають

$$\beta < \frac{\left(1 - \frac{k}{2G}\right)^2}{1 - \frac{k}{m_0}} < 1, \tag{37}$$

де $\beta = const$, $0,93 < \beta < 1$.

За допомогою співвідношень (31), (32), (37) і $1 - (2G - k)(m_0 - k)^{-1} \leq 1 - km_0^{-1}$ приходимо до (28). Позначимо

$$I'' = \sum_{x_1+x_2=k} \frac{k!}{\prod_{i=1}^2 x_i!} \sum_{a_1=\frac{m_0}{2}+G+1}^{m_0} \frac{(m_0 - k)!}{(a_1 - x_1)!(m_0 - a_1 - x_2)!}$$

Аналогічно доведенню леми 3.4 можна перекоонатися у справедливості наступної леми.

Лема 3.5. Нехай для $k \geq 1$ виконуються умови (1), (7), (8). Тоді справедлива наступна оцінка

$$I'' \leq 2^{m_0+1} \left(\frac{1}{m_0^{2\tau-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\tau-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12(m_0 - k)}\right\}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{2G+k}{(m_0 - k)}\right)} \left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{2}\right) \exp\left\{\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{2}\right\},$$

де $\tau = const$, $0,74 < \tau < 1$.

Позначимо

$$S' = \sum_{a_1=0}^{\frac{m_0}{2}-G-1} \sum_{x_1+x_2=k} C_{a_1}^{x_1} C_{r(1)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - a_1}^{a_1-x_1} C_{m_0-a_1}^{x_2} C_{r(2)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (m_0-a_1)}^{m_0-a_1-x_2} \tag{38}$$

Лема 3.6. В умовах леми 3.4 справедлива нерівність

$$\frac{1}{C_n^{m_0}} S' \leq (2\lambda)^k \frac{1}{k!} \exp\left\{\frac{1}{2} \lambda + \lambda^2 \frac{1}{6m_0 \left(1 - \lambda \frac{1}{m_0}\right)} \left(1 + \frac{1}{2m_0^2}\right)\right\} \left(\frac{2}{m_0^{2\beta-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\beta-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12(m_0 - k)}\right\}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{2G+k}{m_0 - k}\right)}, \tag{39}$$

де $\beta = const$, $0,93 < \beta < 1$.

Доведення. Праву частину (38) можна оцінити наступним чином $S' \leq m_0^k \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{m_0-k} I'$, де I' визначено рівністю (27). Звідси з урахування співвідношень (26) та (28) отримаємо (39). Позначимо

$$S'' = \sum_{a_1=\frac{m_0}{2}+G+1}^{m_0} \sum_{x_1+x_2=k} C_{a_1}^{x_1} C_{r(1)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - a_1}^{a_1-x_1} C_{m_0-a_1}^{x_2} C_{r(2)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (m_0-a_1)}^{m_0-a_1-x_2} \tag{40}$$

Лема 3.7. В умовах леми 3.5 справедлива наступна оцінка

$$\frac{1}{C_n^{m_0}} S'' \leq 2\lambda^k \frac{1}{k!} \exp\left\{\frac{1}{2} \lambda + \lambda^2 \frac{1}{6m_0 \left(1 - \lambda \frac{1}{m_0}\right)} \left(1 + \frac{1}{2m_0^2}\right)\right\} \left(\frac{2}{m_0^{2\tau-1}}\right)^k \frac{1}{m_0^{2\tau-\frac{1}{2}}} \frac{\exp\left\{\frac{1}{12(m_0 - k)}\right\}}{\sqrt{2\pi} \left(1 - \frac{2G+k}{m_0 - k}\right)} \left(1 + \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{2}\right) \exp\left\{\frac{\sqrt{\epsilon_0}}{2}\right\},$$

Доведення. Аналогічно доведенню леми 3.6 (відмінність полягає лише в тому, що замість леми 3.4 використовується лема 3.5).

4. Доведення теорем

Доведення теореми 1. Для імовірності події $\{\eta_n = m_0 - k\}$ в [1] встановлено рівність, згідно якої

$$P(\eta_n = m_0 - k) = \sum \varphi(a, x, n) / C_n^{m_0}, \tag{41}$$

де $a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2)$, символ \sum означає додавання за всіма розв'язками в цілих невід'ємних числах рівнянь $a_1 + a_2 = m_0$, $x_1 + x_2 = k$, $\varphi(a, x, n) = \prod_{i=1}^2 C_{a_i}^{x_i} C_{r(i)+\lfloor n/2 \rfloor - a_i}^{a_i - x_i}$, $r(i) = 1$, якщо $1 \leq i \leq p$, $r(i) = 0$, якщо $i > p$, $p = n - 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Праву частину (41) подамо у вигляді трьох доданків

$$\sum_{\substack{a_1+a_2=m_0 \\ x_1+x_2=k}} \varphi(a, x, n) = S' + S'' + S_0, \tag{42}$$

де S' та S'' визначенні відповідно рівностями (38) і (40),

$$S_0 = \sum \varphi(a, x, n), \tag{43}$$

причому в (43) компоненти a_1 вектора a належать інтервалу $a_1 \in \left[\frac{m_0}{2} - G, \frac{m_0}{2} + G \right]$. Беручи до уваги (10), (24), (26) і (43), знаходимо

$$\frac{S_0}{C_n^{m_0}} \leq \lambda^k \exp\{-\lambda + \varepsilon^*\} \frac{1}{k!} S^* \frac{1}{2^{m_0}}, \tag{44}$$

де ε^* визначено рівністю (4), а $S^* = \sum \frac{k!}{\prod_{i=1}^2 x_i!} \frac{(m_0 - k)!}{\prod_{i=1}^2 (a_i - x_i)!} - (I' + I'')$. Звідси, приходимо до оцінки

$$S^* \leq 2^{m_0}. \tag{45}$$

Підстановка (45) в (44) дає

$$\frac{S_0}{C_n^{m_0}} \leq \lambda^k \exp\{-\lambda + \varepsilon^*\} \frac{1}{k!}. \tag{46}$$

За допомогою (41), (42), (46) і лем 3.6, 3.7 знаходимо

$$P\{\eta_n = m_0 - k\} \leq \lambda^k \exp\{-\lambda + \varepsilon^*\} \frac{1}{k!} + \lambda^k \frac{1}{k!} Q_1, \tag{47}$$

де Q_1 визначено рівністю (5). Співвідношення $e^\varepsilon \leq 1 + \varepsilon e^\varepsilon$ для $\varepsilon \geq 0$, дозволяє переписати (47) у вигляді

$$P\{\eta_n = m_0 - k\} \leq \lambda^k \frac{1}{k!} \exp\{-\lambda\} \left(1 + \varepsilon^* e^{\varepsilon^*} \right) + \lambda^k \frac{1}{k!} Q_1. \tag{48}$$

Із (48) випливає безпосередньо верхня оцінка (3) для різниці $P\{\eta_n = m_0 - k\} - e^{-\lambda} \lambda^k (k!)^{-1}$. Аналогічно доводиться нижня оцінка (3) для зазначеної різниці.

Доведення теореми 2. Умова (6) забезпечує виконання нерівності (2) для $n \rightarrow \infty$. Отже, можна скористатися співвідношенням (3) і переконатися, що вирази $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (\varepsilon_* + Q - \varepsilon_* Q)$, $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (\varepsilon^* e^{\varepsilon^*} + e^\lambda Q_1)$ можна зробити довільно малими для $n \rightarrow \infty$.

5. Висновок

Знайдені умови, які дозволяють отримати верхню та нижню оцінки відхилення розподілу числа конфігурацій фіксованого типу у випадковому n -вимірному $(0,1)$ -векторі специфікації $0^{m_0} 1^{m_1}$, $n = m_0 + m_1$, від розподілу Пуассона з параметром λ , $\lambda = n^{-1} m_0^2$ (теорема 1). Зазначені оцінки прямують до нуля, якщо $n \rightarrow \infty$ і $\lambda \leq c < \infty$, де $c = const$ (теорема 2).

1. Масол В. И. Асимптотическое поведение некоторых статистик $(0,1)$ -вектора // Теория вероятностей и математическая статистика. – 1990. – № 43. – С. 83–90. 2. Феллер В. Введения в теорию вероятностей и ее приложения – М., 1984.

УДК 534 +531.7+53.082.5

Л. Яровой, канд. техн. наук

ОСОБЛИВОСТІ РОБОТИ ЛАЗЕРНОГО ДОППЛЕРІВСЬКОГО ВІБРОМЕТРА З ТРИХВИЛЕВИМ ФОТОЗМІШУВАННЯМ В НАНОМЕТРОВОМУ ДІАПАЗОНІ

Досліджується можливість значного підвищення чутливості до слабких акустичних сигналів в лазерному доплерівському віброметрі (ЛДВ) шляхом залучення в процес фотодетектування третьої когерентної хвилі, в доданок до опорної та зондувальної хвиль. Встановлено, що це призводить до значного підвищення амплітуди вихідного сигналу ЛДВ для коливань з амплітудою меншою за половину довжини лазерної хвилі. Умовами аномального підвищення чутливості є наближеність фазової різниці $\Delta\phi$ другої та третьої хвиль до π та близькість їх амплітуд. В експерименті з доопрацьованим ЛДВ отримано 20 дБ підвищення чутливості віброметра до миттєвої швидкості коливання амплітудою 6 нм.

The laser Doppler vibrometer with additional probing beam is studied for vibration in the range of nanometer and less. We show theoretically and experimentally that extraordinary gain the output LDV signal occurs at the proper condition between powers and phases of interfering probing waves. The phenomenon was studied and confirmed experimentally.

1. Вступ

Лазерні доплерівські віброметри (ЛДВ) вимірюють частоту доплерівського зсуву зондувального лазерного променя, яка свідчить про миттєву швидкість об'єкту, що коливається. Якщо в ЛДВ в доданок до зондувального та опорного лазерних променів в фотодетектуванні приймає участь третя когерентна хвиля, то це призводить до появи хвилястості або гребінки піків на сигналі миттєвої частоти при умові, що амплітуда коливань досліджуваного об'єкту перевищує половину довжини хвилі лазера [7].

Поява додаткової хвилі викликана відбиттям зондувального променя від перешкод, таких як скляні вікна, елементи конструкції віброметра або досліджуваного об'єкту, пил або краплі вологи в повітрі. Оскільки явище трихвильового фотозмішування в загальному випадку спотворює сигнал віброметра [1] та призводить до значної похибки, використовуються спеціальні засоби для уникнення зайвої хвилі або методи компенсації завад [4, 5].

У випадку, коли амплітуда коливання менша за довжину хвилі, специфічна хвилястість зникає у вихідному сигналі, але форма та, головне, амплітуда сигналу віброметра набувають значної залежності від співвідношення між фазами та амплітудами оптичних хвиль, що інтерферують на фотодетекторі віброметра [6].

Нами розроблений метод [3], який дозволяє використати, при певних умовах, негативний вплив трихвильового фотозмішування (ТХФ) на користь для суттєвого підвищення апаратної чутливості до слабких акустичних коливань. Це стосується в тому числі і диференційних вимірювань, коли необхідно дослідити різницю в переміщенні, або швидкості в двох точках об'єкту.

2. Аналіз сигналів лазерного віброметра при трихвильовому фотозмішуванні

У випадку, коли існує трихвильове фотозмішування, на поверхні фотодетектору інтерферують три когерентні хвилі: $e_0 = E_0 \exp(-i \cdot (\omega_{opt}t + \Phi_0))$ – опорна хвиля, $e_1 = E_1 \exp(-i \cdot (\omega_{opt}t + \Phi_1))$ – зондувальна хвиля, а також, третя хвиля $e_2 = E_2 \exp(-i \cdot (\omega_{opt}t + \Phi_2))$, де Φ_0, Φ_1, Φ_2 – початкові фази, ω_{opt} – кругова оптична частота. Лазерні віброметри побудовані за гетеродинною схемою. Це означає, що опорна хвиля має зсув по частоті гетеродина f_0 , а фаза Φ_0 – додатковий член $2\pi f_0 t$. Нехай досліджується об'єкт, що коливається за гармонічним законом $x_1(t) = X_1 \cos(\Omega t)$, де X_1 – амплітуда, Ω – частота акустичних коливань. Будемо вважати, що коливання направлене вздовж лазерного променя ЛДВ, тоді фаза зондувальної становить $\Phi_1 = 2kX_1 \cos(\Omega t)$, а фаза третьої хвилі (назвемо її другою зондувальною) нехай становить $\Phi_2 = \Delta\phi$, $\Delta\phi$ – стала величина, що залежить від різниці початкових оптичних шляхів.

Як показано в [2] сигнал на виході лазерного доплерівського віброметра має вигляд:

$$\omega'(t) = -kX_1\Omega \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{2\eta \cdot \cos(2k \cdot X_1 \cdot \cos(\Omega t) + \Delta\phi) + \eta^2 + 1} \right] \sin(\Omega t), \quad (1)$$

де через $\eta = E_1 / E_2$ позначено відношення амплітуд зондувальної та другої опорної хвиль.

Формула (1) свідчить, що на відміну від класичного ЛДВ, сигнал якого пропорційний миттєвій швидкості в точці вимірювання, тобто $\omega_1(t) = -2kX_1\Omega \sin(\Omega t)$ (k – хвильовий вектор зондувального лазерного випромінювання), сигнал віброметра з ТХФ (1) має додатковий член, що нелінійно залежить від амплітуди коливання X_1 , різниці фаз $\Delta\phi$ і параметра η . У випадку $X_1 > \lambda/2$ у вихідному сигналі віброметра присутня хвилястість [7], амплітуда якої при наближенні η до одиниці зростає і в результаті утворюються гігантські сплески [1], що суттєво спотворює сигнал.

При $X_1 < \lambda/2$ сплески відсутні, але амплітуда та форма сигналу також залежать від η та $\Delta\phi$. На рис. 1 наведено розрахунок вихідного сигналу ЛДВ з ТХФ для коливань з амплітудою $X_1 = 6.2 \text{ нм}$ для $\eta = 1.1$ та двох різних значень фази $\Delta\phi$.

При коливаннях малої амплітуди $X_2 \ll \lambda$ та $\Delta\phi = \pi$ формула (1) спрощується:

$$\omega'(t) = -kX_1\Omega \cdot \left[1 + \frac{(\eta^2 - 1)}{4\eta \cdot (kX_1 \cos(\Omega t))^2 + (\eta - 1)^2} \right] \sin(\Omega t) \quad (2)$$

Результати моделювання сигналів віброметра з ТХФ для амплітуди $X_1 = 0.62 \text{ nm}$, $\lambda = 0.63 \text{ mkm}$, $\Omega = 2 \text{ kHz} \times 2\pi$ і $\Delta\phi = \pi$ наведено на рис. 2 для двох значень $\eta = 1.1$ та $\eta = 1.2$. Як можна бачити при малих амплітудах коливань форма сигналу ЛДВ втрачає асиметрію та стає подібною до форми досліджуваного коливання, як його відтворює класичний ЛДВ при $E_2 = 0$. При цьому амплітуда сигналу ЛДВ з ТХФ значно більша, ніж амплітуда сигналу класичного віброметра за інших рівних умов. А саме, при $\eta = 1.1$ сигнал віброметра з ТХФ більш ніж в десять разів перевищує сигнал класичного ЛДВ. Таким чином, з'являється можливість апаратного підсилення слабких сигналів при належному виборі параметрів оптичної схеми.

Це "підсилення" виникає завдяки другому нелінійному члену в (2). Для того, що спростити аналіз "підсилення" співвідношення (1) розкладемо у ряд від X_1

$$\omega = \omega(X_1)|_{X_1=0} + X_1 \frac{d\omega(X_1)}{dX_1} \Big|_{X_1=0} + \frac{1}{2} X_1^2 \frac{d^2\omega(X_1)}{dX_1^2} \Big|_{X_1=0} + \frac{1}{6} X_1^3 \frac{d^3\omega(X_1)}{dX_1^3} \Big|_{X_1=0} + \dots, \quad (3)$$

$$\text{де: } \frac{d\omega(X_1)}{dX_1} \Big|_{X_1=0} = D1 \cdot D2 \cdot (\eta - \cos(\delta\phi)),$$

$$\frac{d^2\omega(X_1)}{dX_1^2} \Big|_{X_1=0} = -2D1 \cdot D2^2 \cdot \cos(\Omega t) \sin(\delta\phi) \cdot (1 - \eta^2), \quad (4)$$

$$\frac{d^3\omega(X_1)}{dX_1^3} \Big|_{X_1=0} = -3D1 \cdot D2^3 \cos(\Omega t)^2 \cdot (1 - \eta^2) \cdot [4\eta - \cos(\delta\phi) \cdot (\eta^2 + 2\eta \cos(\delta\phi) + 1)],$$

$$\omega(X_1)|_{X_1=0} = 0, \quad D1 = -\Omega \cdot \eta \cdot \sin(\Omega t), \quad D2 = \frac{2k}{\eta^2 - 2\eta \cos(\delta\phi) + 1}, \quad \delta\phi = \pi - \Delta\phi.$$

Однією з умов появи додаткового "підсилення" є наближеність фазової різниці $\Delta\phi$ оптичних зондувальних каналів до π . При цьому другий член розкладу зникає, інші спрощуються, а формула для демодульованого сигналу набуває вигляду:

$$\omega = -2D1 \frac{kX_1}{(\eta - 1)} + 4D1 \cos^2(\Omega t) (\eta + 1) \left[\frac{kX_1}{(\eta - 1)} \right]^3. \quad (5)$$

Залежність амплітуди сигналу віброметра з ТХФ від співвідношення амплітуд променів η в (2) може бути записана, як:

$$\omega'_{amp} = kX_1\Omega \cdot \left[1 + \frac{(\eta + 1)}{(\eta - 1)} \right]. \quad (6)$$

Визначимо апаратну чутливість ЛДВ до вимірювань амплітуди коливання, як похідну $\frac{d(\omega'_{amp}(X_1))}{dX_1}$. Тоді за допомогою співвідношення $\alpha(\eta) = d(\omega'_{amp})/d(\omega_{amp})$ можна порівняти чутливість інструментів віброметра з ТХФ та класичного віброметра, де $\omega_{amp}(t) = 2kX_1$. В результаті отримаємо: $\alpha(\eta) = \eta/(\eta - 1)$.

Рис. 3 зображує залежність функції $\alpha(\eta)$ від аргументу $\eta = [1.05...1.3]$. Наприклад, при $\eta = 1.1$ відношення чутливостей дорівнює $\alpha = 10$, при $\eta = 1.05$ сягає $\alpha = 20$, а при наближенні $\eta \rightarrow 1$ – ще більше!

В той же час, при зростанні такого апаратного "підсилення" відбувається деформація вихідного сигналу, як це показано на рис. 1. Оцінити спотворення сигналу поблизу точки $\Delta\phi = \pi$ можна розрахувавши відношення $\zeta(\eta)$ третьої та першої гармонік сигналу, оскільки в цьому випадку функція $\omega'(t)$ парна і друга гармоніка дорівнює нулю. Результат розрахунку, який представлений на рис. 3 переривчастими лініями, показує, що нелінійні спотворення зростають з ростом підсилення. Але в той же час величина нелінійних спотворень зменшується при зменшенні амплітуди коливань. Таким чином, "підсилення" слабких коливань відбувається майже без спотворень в порівнянні з таким же "підсиленням" сигналів з більшою амплітудою. Наведений розрахунок свідчить, що, наприклад, при $\eta \approx 1.02$ підсилення сягає $\alpha \approx 50$, а величина нелінійних спотворень становить $\zeta = 1.0$ для амплітуди $X_1 = 4.0 \text{ nm}$ і тільки $\zeta = 0.1$ для $X_1 = 0.4 \text{ nm}$.

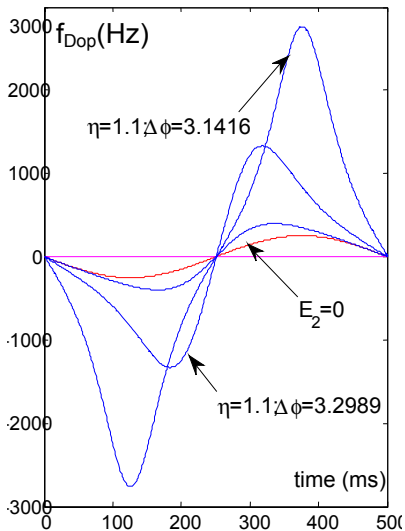


Рис. 1. Вихідні сигнали ЛДВ з ТХФ: $X_1 < \lambda/2$

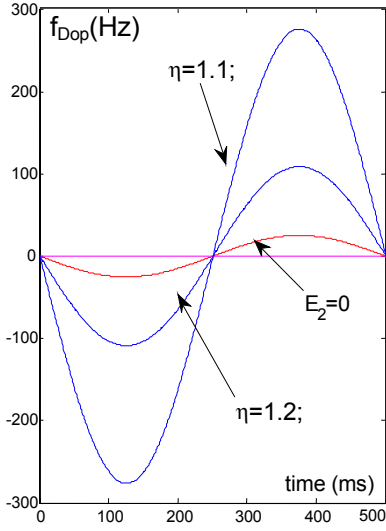


Рис. 2. Вихідні сигнали ЛДВ з ТХФ: $X_1 \ll \lambda/2$

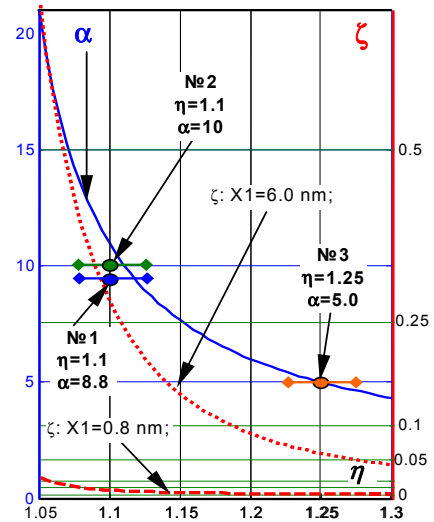


Рис. 3. Аномальне "підсилення" $\alpha(\eta)$ – суцільна лінія, нелінійне спотворення $\zeta(\eta)$ – переривчасті лінії

У випадку $\Delta\phi = \pi$ нелінійні спотворення форми сигналу можуть бути прийнятними, якщо $\frac{d\omega(X_1)}{dX_1} X_1 > \frac{d^3\omega(X_1)}{dX_1^3} X_1^2$. Розрахунок приводить до умови $X_1 < X_{nl}$, що накладається на критичну амплітуду:

$$X_{nl} = 0.2 \cdot \frac{\eta - 1}{k} \tag{7}$$

Наприклад при $\lambda = 0.63 \mu$ та $\eta = 1.1$ для відтворення форми сигналу без спотворення амплітуда X_1 не повинна перевищувати 2 nm . Коливання з амплітудою $X_1 = 6.2 \text{ nm}$ (епюра 1 на рис. 1) не відповідає цій вимозі, та коли амплітуда зменшується до $X_1 = 0.62 \text{ nm}$ (епюра 1 на рис. 2) коливання отримує симетричну близьку до косинуса форму.

Доречно додати, що викладені результати також стосуються диференціальних вимірювань, коли третій промінь направляють на іншу точку досліджуваного об'єкту, що коливається з амплітудою X_2 . У цьому випадку амплітуда вихідного сигналу ЛДВ пропорційна різниці $\delta X = X_1 - X_2$, для якої також залишаються вірними основні принципи, що викладені вище.

3. Експериментальні дослідження

Експериментальна перевірка результатів математичного моделювання трихвильового методу виконана на установці, блок-схема якої зображена на рис. 4. В експериментах використовувався серійний лазерний вібретр CLV-S 1 фірми POLYTEC GmbH, котрий був оснащений додатковим інтерферометром 2 задля здійснення трихвильового фотозмішування. Лазер вібретра генерує червоне випромінювання He-Ne лазера з $\lambda = 0.63 \text{ мкм}$.

Додатковий інтерферометр 2 складається з світлоподільного елемента 3, який розділяє зондувальний промінь на два у відношенні приблизно нарівно за інтенсивністю, та системи допоміжних дзеркал і світлоподільвачів. Перший зондувальний промінь спрямовується на досліджуваний елемент 4, що коливається з частотою Ω . Вздовж променя також розміщено керований фільтр нейтральної щільності 5. Другий зондувальний промінь спрямовується на фазомодулюючий елемент 6, котрий вкритий спеціальною відбиваючою фольгою.

Після відбиття мішенями назад випромінювання знов приймається оптичною системою вібретра 1, змішується його оптичною схемою з опорним променем (на рис. 4 не показано) та потрапляє на фотодетектор вібретра. Високочастотний сигнал детектора i_{det} потрапляє до контролера системи CLV, де виконується обробка доплерівської сигналу. Сигнал (напряга) на виході контролера пропорційний величині миттєвої швидкості об'єкту, яка пов'язана співвідношенням $v = \frac{\omega_{Dop}}{2k}$ з доплерівським зсувом. З контролера також отримується сигнал, що пропорційний логарифму амплітуди високочастотної складової фотоструму. Обидва ці сигнали досліджуються цифровим осцилоскопом 7 або за допомогою комп'ютера.

Для того, щоби контролювати параметр η , частина випромінювання, що повертається в обох зондувальних каналах до вібретра, відгалужується на фотоприймачі 8. Останні, в свою чергу, пов'язані зі схемою керування 9 щільністю фільтра 5. Генератор 10 збуджує дифузор, а генератор 11 змінює фазу одного з зондувальних променів.

Осцилограми на рис.5 демонструють форми сигналів на виході вібретра при наявності ТХФ з фазовими різницями $\Delta\phi = \pi$ (рис.5 А) та $\Delta\phi \approx 0.9\pi$ (рис.5 В). Об'єкт коливається за гармонічним законом з амплітудою $X_1 = 60 \text{ nm}$ та частотою $\Omega/2\pi = 120 \text{ Hz}$. Як можна вирахувати з рис.5А (нижній трек), збільшення амплітуди складає $\alpha = 8.3$.

Однак форма сигналу має спотворену форму далеку від гармонічної функції тому, що умова $X_1 < X_{nl}$ не виконується. Дійсно, в цьому експерименті $\eta \approx 1.1$ і критична амплітуда (7) $X_{nl} \approx 2nm \ll X_1$. Експериментальна точка ($\alpha = 8.3$, $\eta = 1.1$), котра нанесена на розрахункову криву рис.3 під номером №1, в межах похибки співпадає з розрахункам. Як і передбачається розрахунками, зміщення фази від точки π (рис.5 B) призводить до появи другої гармоніки у спектрі сигналу та несиметричній деформації його форми з загальним зменшенням амплітуди (рис.1).

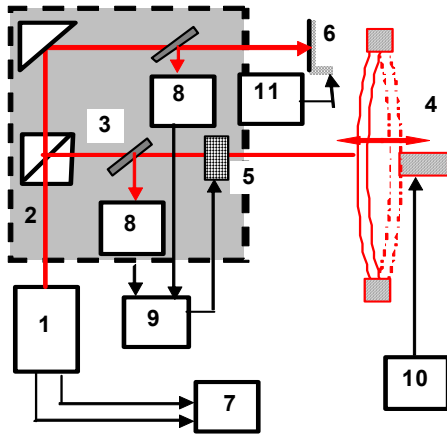


Рис. 4. Оптична схема експериментальної установки модифікованого віброметра з ТХВ

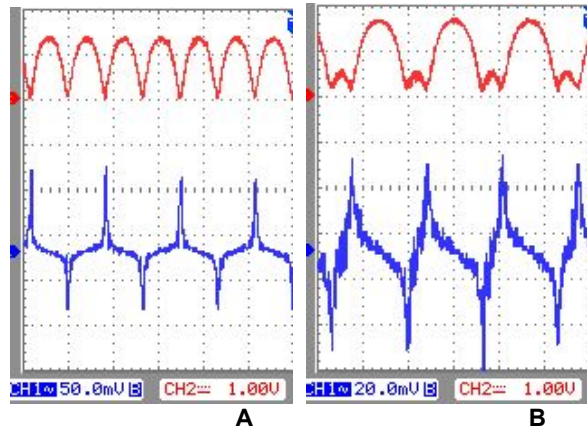


Рис. 5. Епюри вихідних сигналів віброметра з ТХФ: верхні епюри – амплітуда фотоструму, нижня епюра – вихідний сигнал ЛДВ (частота фотоструму)

Верхні треки осцилограм на кожному з малюнків відповідають логарифму амплітуди високочастотного сигналу. Треба відзначити той факт, що в точці $\Delta\phi = \pi$ спостерігається подвоєння частоти цього сигналу. Зникнення основної гармоніки в спектрі сигналу амплітуди може бути використано, як свідчення умови $\Delta\phi = \pi$.

Зменшення амплітуди вібрації покращує відповідність форми вихідного сигналу реальному процесу коливання. Результати іншого тесту приведені на рис. 6: верхня (A) осцилограма класичний сигнал ЛДВ без ТХФ ($X_1 = 6.5 \text{ nm}$ з частотою $\Omega / 2\pi = 1200 \text{ Hz}$), нижня (B) це – вихідний сигнал віброметра того ж вібруючого об'єкту при наявності ТХФ. У цьому експерименті знов $\eta \approx 1.1$, і хоча критична амплітуда (7) $X_{nl} = 2nm$ залишається такою ж самою, зменшення амплітуди вібрації в десять разів призводить до більш прийнятних нелінійних спотворень (а саме, $\zeta = -17dB$). В цьому експерименті було досягнуто максимальне підсилення сигналу 20 дБ ($\alpha \approx 10$) при прийнятному рівні нелінійних спотворень. Експериментальна точка № 2 з координатами ($\alpha = 10$, $\eta = 1.1$) також добре накладається на розрахункову залежність $\alpha(\eta)$ на рис. 3.

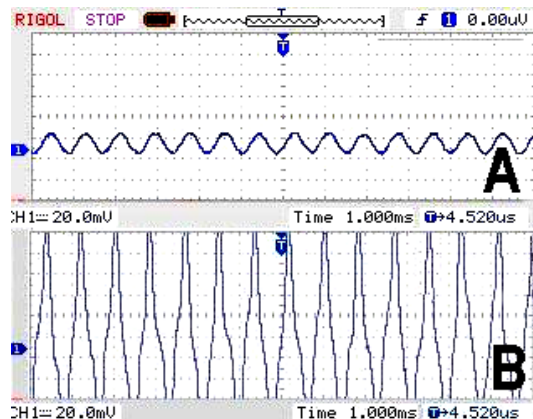


Рис.6. Осцилограми сигналів ЛДВ. Амплітуда коливання об'єкта 6.5 нм, частота 1.2 кГц: А – класичний ЛДВ, В – ЛДВ з додатковим променем (ТХФ)

Для подальшого зменшення спотворень вихідного сигналу відношення оптичних амплітуд було підвищено до $\eta = 1.25$, що, в свою чергу, підвищує параметр X_{nl} до $X_{nl} = 5nm$. На малюнку рис.7 зображена осцилограма вихідного сигналу ЛДВ при коливанні об'єкта з амплітудою $X_1 = 6nm$ та частотою $\Omega / 2\pi = 120 \text{ Hz}$. Оскільки амплітуда вібрації близька критичній амплітуді $X_1 \approx X_{nl}$, то форма сигналу, як це і видно з рис. 7, відтворюється майже без спотворень.

У попередньому експерименті (рис. 7) фазова різниця між лазерними хвилями вібрметра була близькою до π . Це підтверджує верхній трек на рис. 7, який відображає амплітуду сигналу на частоті гетеродину. Подвоєння частоти цього сигналу і є свідченнями протифази хвиль, що інтерферують (порівняймо з рис. 5А).

Розрахунок амплітуди коливань по даним рис. 7 дає результат 30 нм, хоча в дійсності $X_1 = 6 \text{ нм}$. Тобто аномальне підсилення складає $\alpha = 5$. Точка №3 ($\alpha = 5, \eta = 1.25$), яка нанесена рис. 3, добре співпадає з результатами розрахунку.

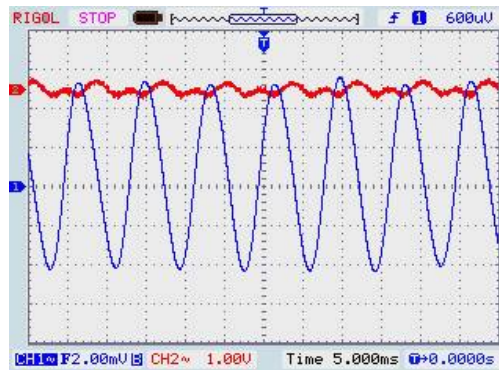


Рис. 7. Осцилограми сигналів ЛДВ. Амплітуда коливання об'єкта 6 нм, частота 120 Гц: верхня еюра – амплітуда фотоструму, нижня еюра – частота фотоструму (вихідний сигнал ЛДВ)

4. Висновки

Встановлено, що в схемі ЛДВ з двома зондувальними променями і одним опорним при умові, коли амплітуди зондувальних променів майже рівні, а початкові фази протилежні, для сигналів з амплітудою менше ніж половина довжини зондувальної хвилі спостерігається різке зростання амплітуди вихідного сигналу вібрметра. Таким чином, тільки оптичними апаратними засобами можна досягти значного "підсилення" амплітуди сигналу ЛДВ і, тим самим, підвищити чутливість до слабких акустичних сигналів.

При значному підвищенні чутливості спостерігається ріст нелінійних спотворень сигналу. Важливим результатом є те, що вразливість до нелінійних спотворень зменшується зі зменшенням амплітуди вібрації, тому запропонований метод найбільш ефективний саме для діагностики слабких акустичних сигналів.

У демонстраційному експерименті з спеціально доопрацьованим ЛДВ отримано десятикратне підвищення чутливості вібрметра до амплітуди миттєвої швидкості з рівнем нелінійних спотворень вихідного сигналу 17 dB та п'ятикратне підвищення амплітуди з рівнем нелінійних спотворень < 40 dB.

1. Яровой Л. Влияние когерентных помех на сигнал доплеровских вибрметров // Фізичні методи та засоби контролю середовищ, матеріалів та виробів "Леотест-2004". – К.; Львів. – 2004. – С. 35–39.
2. Яровой Л. К. Метод дискретного вимірювання малих переміщень за допомогою лазерного вібрметра // Вісник Київського університету. Механіка та Математика. – 2006. – Вип. 15–16. – С. 53–57.
3. Яровой Л. К. Застосування трихвильового фотозміщення для підвищення чутливості лазерного доплерівського вібрметра в субнанометровому діапазоні // Акустичний симпозиум "КОНСОНАНС-2009", Київ, 29 вересня – 1 жовтня 2009 року. – К., 2009. – С. 330–336.
4. Пат. 84937 Україна МПК G 01 B 9/02 Спосіб вимірювання вібрації / Яровой Л. К.; заявник власник патенту Київ Нац. Унів. ім. Тараса Шевченка. – № 200614074; заяв. 29.12.06; друк. 10.12.08, Бюл. № 23.
5. Dussarrat Olivier J., Clark D. F., Moir T. J. New demodulation process to reduce cochannel interference for a laser vibrometer sensing system // Proc. SPIE. Vibration Measurements by Laser Techniques, – 1998. – Vol. 3411. – P. 2–13.
6. Ombeline de La Rochefoucauld, Shyam M. Khana S., Olson E. Recording depth and signal competition in heterodyne interferometry // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – Vol. 117, № 3. – P. 1267–1284.
7. Yarovi L., Siegmund G. The effect of three-wave interference in laser Doppler vibrometry // Meas. Sci. Technol. – 2004. – Vol. 15. – P. 2150–2156.

Надійшла до редколегії 29.01.2011 р.

УДК 519.254.2 + 519.254

А. Щербіна, асп.

ПОРІВНЯННЯ ОЦІНОК СЕРЕДНІХ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ СУМІШЕЙ ЗІ ЗМІННИМИ КОНЦЕНТРАЦІЯМИ НА МОДЕЛЬОВАНИХ ДАНИХ

Розглянуто задачу оцінювання середнього значення у моделі двокомпонентної суміші із залежними спостереженнями. Описано лінійні та адаптивні непараметричні оцінки і оцінки найбільшої вірогідності для параметричної моделі. Якість цих оцінок порівнюється на модельованих вибірках.

Estimation of the mean value in the model of two-component mixture with dependent observations is considered. Linear and adaptive nonparametric estimators and maximum likelihood estimator for parametric model are described. Quality of such estimators is compared on simulated data.

1. Вступ

Задачі дослідження сумішей зі змінними концентраціями виникають в багатьох галузях природознавства. Зокрема, модель суміші природно виникає, коли об'єкти популяції, що досліджується, належать до декількох різних класів. Нехай ми досліджуємо популяцію об'єктів, вимірюючи у них певну числову характеристику X . Нехай існує M класів об'єктів, а розподіл характеристики X залежить лише від класу, до якого належить об'єкт.

Якщо при обстеженні клас, якому належить об'єкт точно не відомий, то для опису розподілу характеристики X можна використати модель суміші:

$$P(X \in A) = w^1 F_1(A) + w^2 F_2(A) + \dots + w^M F_M(A),$$

де F_l – розподіл l -ї компоненти суміші, а w^l – її концентрація у суміші (ймовірність, з якою досліджуваний об'єкт може належати до l -го класу). У класичній моделі суміші розподіли характеристик всіх об'єктів описуються наведеною вище моделлю з однаковими концентраціями компонент. Дослідження цих моделей було розпочато Ньюкомбом [7] та Пірсоном [8]. Огляд результатів у цій області можна знайти у Дж. Маклахана та Піла [6].

Останнім часом досліджуються моделі сумішей зі змінними концентраціями із незалежними спостереженнями [1-3]. У ці статті ми будемо розглядати випадок залежних спостережень, описаний у [4]. Залежність виникає через отримання об'єктів за допомогою випадкового відбору без повернення зі скінченної популяції. Опис відповідної моделі наведено у [9]. Нехай ми хочемо визначити середню успішність учнів у школі в залежності від того, палять вони чи ні. Питання про паління є "дражливим", тому безпосереднє опитування є небажаним. Тому можна спочатку провести анонімне обстеження у класах школи, яке дозволить визначити частки курців. А потім провести вибіркове або суцільне обстеження успішності учнів.

2. Опис моделі

Ми будемо розглядати випадок двох класів $M = 2$. Нехай популяція об'єктів складається з K груп з обсягами N_1, N_2, \dots, N_K об'єктів. При цьому в i -й групі міститься N_i^1 об'єктів першого класу, та N_i^2 об'єктів другого класу. Вважаємо ці величини відомими. Отже, можна визначити концентрації об'єктів першого та другого класів за формулою

$$w_i^l = \frac{N_i^l}{N_i}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad l = 1, 2.$$

Позначимо значення досліджуваної характеристики у цих об'єктів $\{X_{ij}, i = 1, 2, \dots, K, j = 1, 2, \dots, N_i\}$. Вважаємо їх незалежними випадковими величинами із невідомими розподілами, спільними для об'єктів одного класу. Нехай у цих розподілів існують скінченні другі моменти. Середні значення та дисперсії характеристики X об'єктів першого та другого класів будемо позначати μ_1, μ_2 та σ_1^2, σ_2^2 відповідно.

Далі, за допомогою простого випадкового відбору без повернення з кожної групи відбирається n_i спостережуваних об'єктів, $1 \leq n_i \leq N_i, i = 1, 2, \dots, K$. Значення характеристики X у відібраних об'єктів позначимо $\{Y_{ij}, i = 1, 2, \dots, K, j = 1, 2, \dots, n_i\}$. Іншими словами при фіксованому i множина цих характеристик є випадковою вибіркою без повернення з множини $\{X_{ij}, j = 1, 2, \dots, N_i\}$. Задача полягає у оцінюванні середніх значень характеристик X у об'єктів першого та другого класів за цими даними.

3. Опис оцінок

Ідея оцінювання полягає в тому, щоб використати відмінності концентрацій об'єктів першого та другого класів у групах. Через ці відмінності середні значення характеристик X у групах будуть відрізнятися. Для їх оцінювання будемо використовувати вибіркове середнє спостережених характеристик $T_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$. Обчислимо математичне сподівання цієї величини:

$$E T_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} E Y_{ij} = E Y_{i1} = E \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij} = \frac{1}{N_i} (N_i^1 \mu_1 + N_i^2 \mu_2) = w_i^1 \mu_1 + w_i^2 \mu_2, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Основними оцінками, які розглядаються у цій статті є зважені лінійні оцінки наступного вигляду:

$$\hat{\mu}_l = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l T_i, \quad l = 1, 2,$$

де $a_1^l, a_2^l, \dots, a_K^l$ – певні набори вагових коефіцієнтів. Математичне сподівання цієї оцінки дорівнює

$$E \hat{\mu}_l = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l E T_i = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l (w_i^1 \mu_1 + w_i^2 \mu_2) = \frac{\mu_1}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l w_i^1 + \frac{\mu_2}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l w_i^2, \quad l = 1, 2.$$

Оскільки оцінювання для другого класу відбувається аналогічно до оцінювання для першого класу, то надалі будемо розглядати оцінки лише для першого класу, а індекс 1 у a^l опускаємо.

Бачимо, що оцінка $\hat{\mu}_1$ буде незміщеною при виконанні наступних умов:

$$\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i w_i^1 = 1, \quad \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i w_i^2 = 0. \tag{1}$$

Надалі будемо вважати ці умови виконаними. Проте вони не однозначно визначають вагові коефіцієнти. Отже, постає питання про вибір найкращих вагових коефіцієнтів. Природною характеристикою якості незміщеної оцінки є її дисперсія. Наведемо твердження з [4] про явний вигляд дисперсії зваженої оцінки:

Твердження 1. Дисперсія оцінки $\hat{\mu}_1$ дорівнює:

$$D \hat{\mu}_1 = \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^K a_i^2 d_i, \quad d_i = \frac{1}{n_i} \left(w_i^1 \sigma_1^2 + w_i^2 \sigma_2^2 + \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} w_i^1 w_i^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 \right), \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Як бачимо, дисперсія залежить від вектору невідомих параметрів $\gamma = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$. Для того, щоб побудувати оцінки, які матимуть дисперсію, близьку до мінімальної можливої, замінімо величини $\{d_i, i = 1, 2, \dots, K\}$ їх оцінками

$\{f_i, i = 1, 2, \dots, K\}$. Щоб визначити найкращі вагові коефіцієнти, будемо мінімізувати вираз $\sum_{i=1}^K a_i^2 f_i$ при умовах (1).

Введемо в розгляд наступні зважені моменти концентрацій w_i^j :

$$r_j(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{(w_i^j)^j}{f_i}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Застосування методу множників Лагранжа показує, що в невідродженому випадку ($r_0(f)r_2(f) - r_1^2(f) \neq 0$) найкращі ваги розраховуються за наступною формулою:

$$a_i(f) = \frac{(r_0(f) - r_1(f))w_i^1 + r_2(f) - r_1(f)}{d_i(r_0(f)r_2(f) - r_1^2(f))}, \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Найпростіше в якості коефіцієнтів f_i використати тотожну одиницю. Отримані коефіцієнти називаються мінімаксними і розглядаються у [2]. Будемо позначати їх $a_i(1)$.

Подальше дослідження показує, що величини d_i майже обернено пропорційно залежать від n_i . А тому природно визначити коефіцієнти f_i наступним чином $f_i = 1/n_i$, $i = 1, 2, \dots, K$. Визначені за цими коефіцієнтами ваги будемо позначати $a_i(1/n)$.

Ще однією можливістю є так звані адаптивні оцінки. Спочатку, за допомогою мінімаксних ваг ми будемо оцінку вектора параметрів $\hat{\gamma} = (\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2)$:

$$\hat{\mu}_l = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l T_i, \quad \hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K a_i^l \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^K Y_{ij}^2 - \hat{\mu}_l^2, \quad l = 1, 2.$$

Далі, підставляємо отримані значення у вираз для d_i , отримуючи наступну оцінку:

$$\hat{d}_i = \frac{1}{n_i} \left(w_i^1 \hat{\sigma}_1^2 + w_i^2 \hat{\sigma}_2^2 + \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} w_i^1 w_i^2 (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)^2 \right), \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Обчислені за цими величинами ваги позначимо $a_i(\hat{d}_i)$. Якщо за цими вагами знову обчислити оцінки середніх та дисперсій, і повторити процедуру адаптивного оцінювання, то отримуємо двічі адаптивні оцінки $a_i(\hat{\hat{d}}_i)$.

Також для порівняння будемо розглядати найкращі ваги, обчислені з використанням справжніх значень d_i . Будемо позначати їх $a_i(d_i)$.

4. Порівняння оцінок на модельованих вибірках

Для дослідження якості розглянутих оцінок на вибірках скінченного обсягу ми провели імітаційні експерименти, кожен з яких складався з 10000 ітерацій. Кожна ітерація виконувалась наступним чином:

1. За певними розподілами генерувалися кількості об'єктів першого та другого класів у групах N_i^1 , N_i^2 та обсяги вибірок n_i для $i = 1, 2, \dots, K$. У випадку, коли величина N_i або n_i випадали рівними нулю, то генерація повторювалася, поки не отримувалась ненульовий результат.

2. Для кожної групи визначалися кількості об'єктів першого та другого класів у вибірці за гіпергеометричним розподілом з параметрами N_i^1 , N_i^2 та n_i . Позначимо їх n_i^1 та n_i^2 відповідно.

3. Для кожної групи генерувалися n_i^1 та n_i^2 величин з розподілами, що відповідають першому та другому класам. Вони утворювали набір характеристик $\{Y_{ij}, i = 1, 2, \dots, K, j = 1, 2, \dots, n_i\}$.

4. Обчислювалися вагові коефіцієнти за різними методами, як це було описано в попередньому розділі.

5. Розраховувалися вибіркові середні (1), обчислювалися оцінки (2) для різних вагових коефіцієнтів.

На базі отриманих оцінок підраховувалося вибіркове середньоквадратичне відхилення оцінок від справжнього значення. Для порівняння середньоквадратичних відхилень при різних K ми домножали їх на K . Відмітимо, що в усіх експериментах зміщення досліджуваних оцінок виявилось малим, порівняно з дисперсією, тому графіки зміщень та дисперсій окремо не наводяться.

У наступних двох прикладах наведено конкретні розподіли випадкових величин. Для них проведено імітаційні експерименти для різних K . Назви, позначення та спосіб відображення оцінок на графіках зведений у наступній таблиці.

Коефіцієнти	Позначення	Лінії на графіках
Мінімаксні	$a_i(1)$	Пунктирна
Зважені на обсяг вибірки	$a_i(1/n)$	Штрихована
Адаптивні коефіцієнти	$a_i(\hat{d}_i)$	З квадратами
Двічі адаптивні коефіцієнти	$a_i(\hat{\hat{d}}_i)$	З трикутниками
Найкращі коефіцієнти	$a_i(d_i)$	Суцільна

Приклад 1. Характеристики об'єктів класів мають нормальні розподіли з параметрами (0, 1) та (1, 4). Кількості об'єктів першого та другого класів у групах генерувалися за біноміальним розподілом з 7 випробуваннями та ймові-

рністю успіху 0.5. Обсяги вибірки генерувалися за біноміальним розподілом з N_i випробуваннями та ймовірністю успіху 0.5.

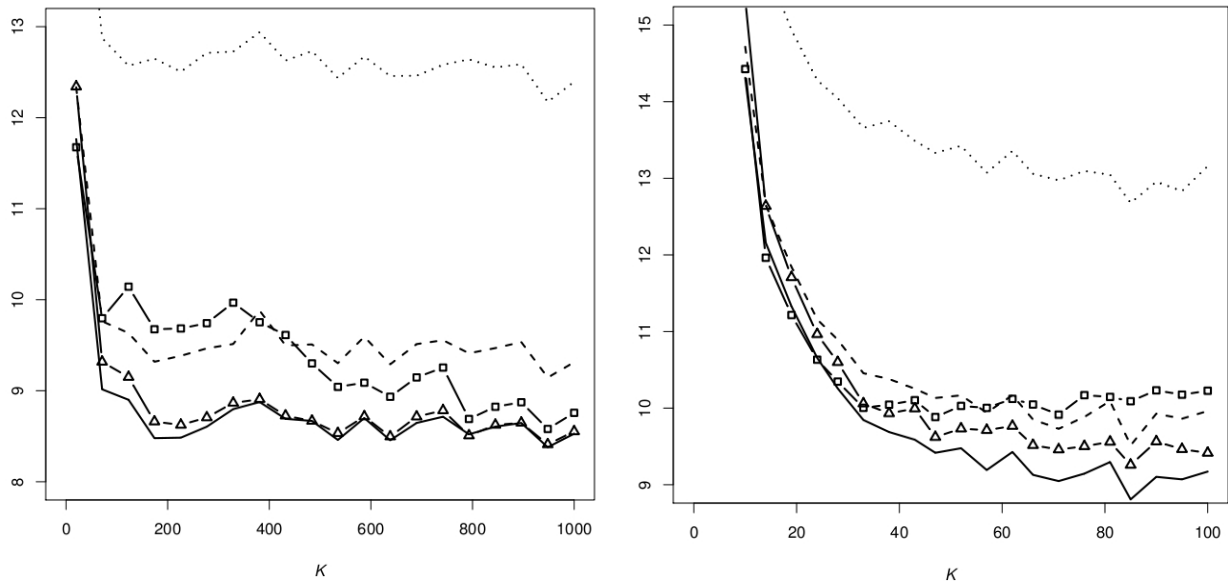


Рис. 1. Нормовані середньоквадратичні відхилення оцінок μ_1 для різних кількостей груп K

Як бачимо з рис. 1, середньоквадратичне відхилення найбільше у мінімакських оцінок. Коефіцієнти, зважені на обсяг вибірки, показують набагато кращі результати. Як і очікувалося, оцінки з найкращими коефіцієнтами мають найменше середньоквадратичне відхилення. Двічі адаптивні оцінки майже при всіх K виявилися кращими за адаптивні коефіцієнти та коефіцієнти, зважені на обсяг вибірки.

Приклад 2. Характеристики об'єктів класів мають розподіл Стюдента з трьома степенями свободи та нормальний розподіл з параметрами (1, 4). Кількості об'єктів першого та другого класів у групах генерувалися за рівномірним розподілом на множині $\{0,1,\dots,4\}$. Обсяги вибірки генерувалися за біноміальним розподілом з N_i випробуваннями та ймовірністю успіху 0.5.

Як бачимо з рис. 2, співвідношення між якістю оцінок з мінімакськими коефіцієнтами, коефіцієнтами, зважені на обсяг вибірки, та найкращими коефіцієнтами залишилось тим самим, як і в попередньому прикладі. Незвичайним є той факт, що адаптивні оцінки виявилися кращими за оцінки з найкращими коефіцієнтами. Цей ефект, можливо, виникає через наявність "важких хвостів" у розподілу Стюдента з трьома степенями свободи. Таким чином, адаптивні оцінки виявили здатність враховувати наявність викидів у вибірці при оцінюванні.

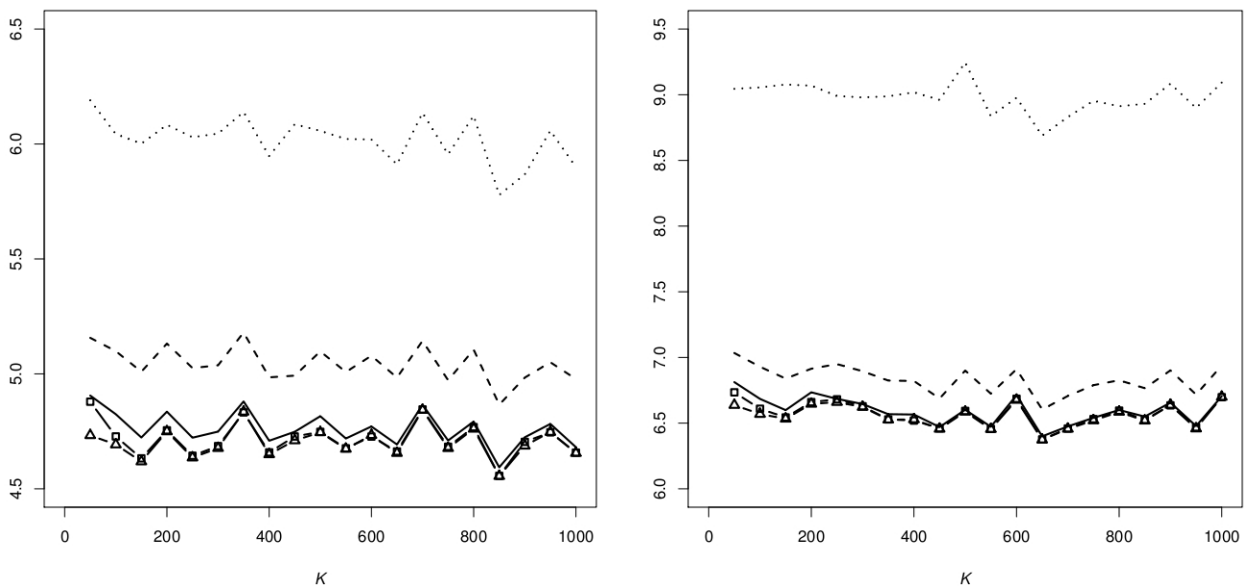


Рис. 2. Нормовані середньоквадратичні відхилення оцінок μ_1 (зліва) та μ_2 (справа) для різних кількостей груп K

Приклад 3. Розглянемо частковий випадок нашої задачі, коли характеристики об'єктів приймають тільки значення 0 та 1, причому $P(X = 1) = \mu_l$ для об'єктів, що належать l -тому класу. Спостерігаються характеристики всіх об'єктів, тобто $n_i = N_i$. До такої моделі можна застосувати оцінку максимальної вірогідності. Введемо позначення

$$Y_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}, \quad S_i = (Y_i, N_i^1, N_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

Нехай $t = (t_1, t_2)$ – вектор можливих значень невідомого параметра $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ з множини $[0, 1]^2$, а $s = (x_1, x_2, y)$. Введемо в розгляд функцію $f(s, t) = P(Y_1 = y | N_1^1 = x_1, N_1^2 = x_2, \mu = t)$. Тепер ми можемо записати логарифмічну функцію вірогідності:

$$L(S, t) = \sum_{i=1}^K \ln f(S_i, t).$$

Оцінку методу максимальної вірогідності буде значення параметра t , що максимізує логарифмічну функцію вірогідності:

$$\hat{\mu} = \arg \max_{t \in [0, 1]^2} L(S, t).$$

При моделюванні використовувалися наступні значення параметрів. Середні значення характеристик у класах дорівнювали $\mu_1 = 0.2$ та $\mu_2 = 0.5$. Загальна кількість об'єктів у групі була фіксована $N_i = 5$, а кількість об'єктів першого класу з рівними ймовірностями приймала значення на множині $\{0, 1, \dots, 5\}$.

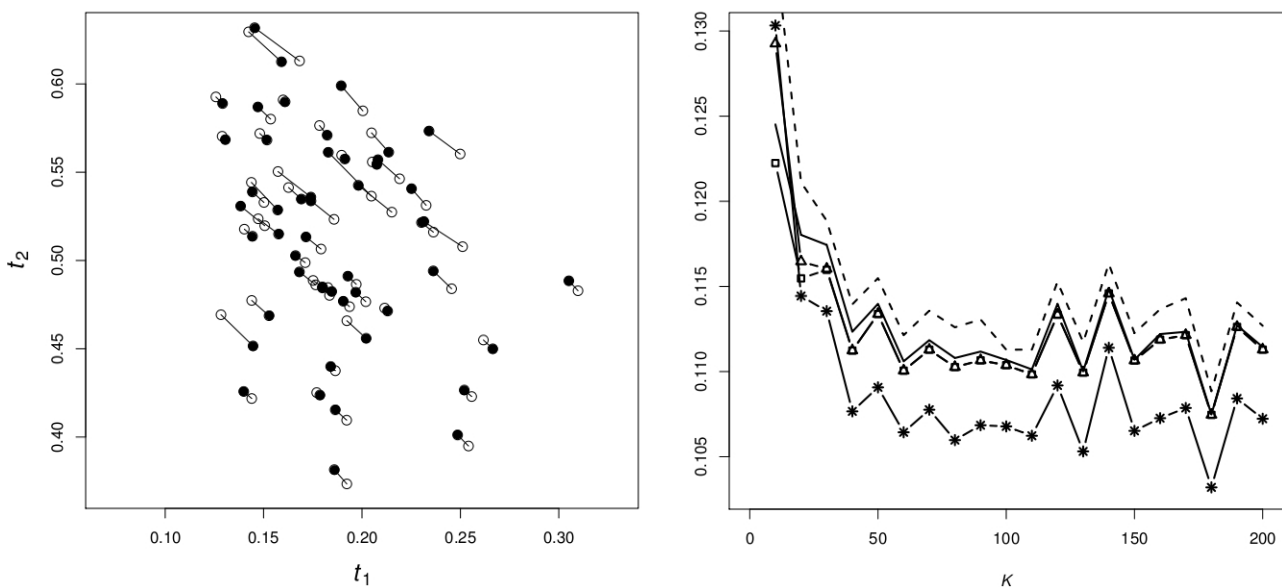


Рис. 3. Порівняння зважених оцінок та оцінок максимальної вірогідності

Для візуалізації зв'язку між зваженими оцінками та оцінками максимальної вірогідності для $K = 50$ було побудовано оцінки за обома методами. На рис. 3 зліва зображені зважені оцінки з найкращими коефіцієнтами та оцінки максимальної вірогідності. Порожні кружечки відповідають зваженим оцінкам, а повні – оцінкам максимальної вірогідності. Лінією з'єднані оцінки, що розраховані на спільних даних.

На рис. 3 справа зображені нормовані середньоквадратичні відхилення для різних оцінок. Оцінкам максимальної вірогідності відповідають лінії зі зірочками.

Таким чином, параметричні оцінки виявляються помітно кращими, ніж розглянуті нами непараметричні. Тому виникає питання про можливість поліпшення непараметричних оцінок за допомогою більш повного використання інформації, наявної у вибірці.

5. Висновки

Досліджено задачу оцінювання середнього значення у моделі суміші зі змінними концентраціями. Проведено порівняння різних оцінок на модельованих даних. Показані переваги застосування техніки адаптивного оцінювання у реальних обстеженнях. Розгляд часткового випадку з використанням параметричної моделі показав перевагу методу найбільшої вірогідності над зваженими оцінками.

1. Майборода Р. Є. Оцінка розподілів компонентів сумішей що змінюються // Укр. мат. журнал. – 1996. – Т. 48, № 4. – С. 562–566. 2. Майборода Р. Є. Статистичний аналіз сумішей. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2003. – 176 с. 3. Майборода Р. Є., Сувакова О. В. Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 213 с. 4. Щербіна А. М. Оцінювання середнього у моделі суміші зі змінними концентраціями // Теорія ймовірностей та математична статистика. 5. Kubauchuk O. O. Estimation of moments by observations from mixtures with varying concentrations // Theory of Stochastic Processes. – 2002. – Vol. 8 (24), № 3–4. – P. 226–232. 6. McLachlan G. J., Pell D. Finite Mixture Models. – NY: Wiley, 2000. 7. Newcomb S. A generalized theory of the combination of observations so as to obtain the best result // Amer. J. Math. – 1894. – Vol. 8. – P. 343–366. 8. Pearson K. Contribution to the mathematical theory of evolution // Trans. Roy. Soc. A. – 1894. – Vol. 185. – P. 71–110. 9. Shcherbina A., Maiboroda R. Merging data from anonymous and open surveys: two-population problems // Proceedings of the Baltic-Nordic-Ukrainian Summer School on Survey Statistics. – Kyiv: TBIIMC, 2009. – 177 p. 10. Titterton D. M., Smith A. F., Makov O. E. Analysis of Finite Mixture Distributions. – New York: Wiley.

ПОСТУПОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ ПОВЕРХНІ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ РІЗНИМИ ВИДАМИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Розглянуто задачу визначення нормальних переміщень точок поверхні пружного півпростору, що викликані поступовим прикладанням осесиметричного навантаження, інтенсивність якого є кусково лінійною функцією часу. Проведено оцінку частини енергії, яка перетворюється на енергію пружних хвиль, для трьох різних типів осесиметричних розподілів при однаковому значенні рівнодіючої навантажень.

Problem of determination of the normal displacements of an elastic half-space surface points caused by the gradual application of an axisymmetric load, the intensity of which is the partially linear function of time, is studied. The estimation of the energy spent on formation of elastic waves for three different axisymmetric distributions with the same value of total force is done.

1. Вступ

Аналіз розв'язків задач, про розподіл хвильових полів напружень і переміщень, що виникають у пружному півпросторі внаслідок прикладання до його межі змінних у часі зовнішніх навантажень, може бути корисним при вивченні динамічної контактної взаємодії пружних тіл в різноманітних динамічних системах. Передусім, це стосується розробки мікрохвильових двигунів. Не менш важливим є застосування задач про динамічне навантаження в медичній акустиці та геофізиці.

В [3] запропонований загальний підхід до вивчення задачі про рух точок поверхні пружного півпростору при миттєвому прикладанні до його межі осесиметричного навантаження $\sigma_0(r) = -p_0 R(r)$, за допомогою якого вдалося подати переміщення на поверхні півпростору у вигляді кратних інтегралів від функцій дійсних змінних. В цій праці досліджено такі частині випадки: навантаження, що виникає під гладким плоским штампом у статичній контактній задачі

$$R^S(r) = 1/\sqrt{1-(r/r_0)^2}, \tag{1}$$

тобто навантаження, що необмежене на краях площадки контакту, та розподіл Герца

$$R^H(r) = \sqrt{1-(r/r_0)^2}, \tag{2}$$

якому відповідає обмежене на площадці контакту навантаження з максимумом посередині ($r = 0$).

У [4] розглянуто навантаження спеціального вигляду

$$R^d(r) = (r/r_0)^2 \sqrt{1-(r/r_0)^2}. \tag{3}$$

Як і розподіл Герца воно є обмеженим на площадці контакту, але з мінімальним значенням посередині та максимумами на відстані $\sqrt{2/3}r_0$ від центру. Надалі у тексті роботи індексом "S" позначаються характеристики, що пов'язані зі штампом, "H" – з розподілом Герца, "d" – з навантаженням спеціального вигляду. Індекс {kd} вказує на один із трьох типів навантаження у загальних формулах.

Дана стаття є продовженням досліджень, що розпочаті у [3] і [4], і присвячена задачам про поступове навантаження межі пружного півпростору трьома обраними видами розподілів. Коротко нагадаємо результати відповідних задач про миттєве навантаження, на яких базуються наші подальші викладки.

2. Миттєве навантаження

Розглянемо пружний півпростір $z < 0$. Припустимо, що при $t < 0$ півпростір знаходився у стані спокою, причому межа є вільною від зусиль. Припустимо, що в момент часу $t = 0$ до поверхні півпростору миттєво прикладено деяке нормальне осесиметричне навантаження $\sigma_0(r)$, розподілене по колу $0 \leq r \leq r_0$, яке надалі залишається постійним в часі. Будемо визначати переміщення точок поверхні півпростору як функції часу t та відстані r між точкою і центром прикладання навантаження. Відповідно до припущень запишемо початкові і граничні умови:

$$u_r|_{t=0} = u_z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\partial u_z}{\partial t}|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

$$\sigma_z|_{z=0} = H(t) \begin{cases} \sigma_0(r), & r < r_0, \\ 0, & r > r_0, \end{cases} \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \tag{5}$$

де u_r, u_z – радіальні і нормальні переміщення точок півпростору; τ_{rz}, σ_z – дотичні і нормальні напруження точок півпростору; $H(t)$ – функція Хевісайда.

В загальному випадку, динамічне поле переміщень точок пружного півпростору описується рівнянням Ламе [2]:

$$2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div } \vec{u} - \text{rot rot } \vec{u} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \tag{6}$$

де ν – число Пуассона, G – модуль зсуву, ρ – густина матеріалу.

Застосовуючи до рівнянь руху (6) перетворення Ханкеля за просторовою координатою і перетворення Лапласа за часовою координатою, подамо переміщення півпростору у вигляді кратних інтегралів обернення Рімана-Мелліна. Тоді нормальні переміщення точок поверхні пружного півпростору запишемо у вигляді:

$$u_z(r, 0, t) = -\frac{P}{4\pi G r} f_z(l, \tau) = p_0 \tilde{f}_z(r, t), \tag{7}$$

де рівнодійна

$$P = \left| 2\pi \int_0^{r_0} \sigma_0(r) r dr \right| \tag{8}$$

для різних розподілів має значення

$$P^S = 2\pi r_0^2 p_0, \quad P^H = \frac{2\pi}{3} r_0^2 p_0, \quad P^d = \frac{4\pi}{15} r_0^2 p_0. \tag{9}$$

Функція $f_z(l, \tau)$ від безрозмірного радіусу та часу визначається формулою (11) [3, с.5].

Зазначимо, що переміщення у статичній задачі

$$u_z^{cm} = -\frac{P^{kd}}{4\pi G r} 2(1-\nu) I_0^{kd}(l), \tag{10}$$

де $I_0^{kd}(l)$ – інтеграл обернення за Ханкелем, визначається аналітично [3], [4] для обраних видів навантажень.

3. Поступове навантаження

Припустимо, що інтенсивність навантаження визначається кусково лінійною функцією часу, тобто зростає від нуля за лінійним законом до моменту часу T , а потім залишається постійною

$$p(t) = -p_0 \begin{cases} \frac{t}{T}, & t \leq T, \\ 1, & t > T. \end{cases}$$

У випадку миттєвого прикладання до межі півпростору навантаження $p(r) = p_0 R(r)$ у відповідності до (7) вираз для нормальних переміщень точок поверхні пружного півпростору має вигляд $u_z^i(r, t) = p_0 \tilde{f}_z(r, t)$. Тоді переміщення точок поверхні пружного півпростору при поступовому навантаженні $p(r, t) = p_0(t)R(r)$ можна записати через вже відомі переміщення при миттєвому навантаженні відповідно до типу осесиметричного розподілу за допомогою інтеграла типу згортки $u_z^g(r, t) = \int_0^t p_0(t-\tau) \frac{\partial \tilde{f}_z(r, \tau)}{\partial \tau} d\tau$. Тут індекс "i" вказує на те, що характеристика відпові-

дає задачі про миттєве навантаження, а "g" – про поступове, а функція $R(r)$ – просторова складова інтенсивності навантаження, що визначається формулами (1)-(3). Тоді

$$u_z^g(r, t) = -\frac{p_0}{T} \begin{cases} \int_0^t \tilde{f}_z(r, \tau) d\tau, & t \leq T, \\ \int_{t-T}^t \tilde{f}_z(r, \tau) d\tau, & t > T. \end{cases} \tag{11}$$

Знайдемо вирази нормальних швидкостей точок поверхні пружного півпростору при поступовому навантаженні через переміщення при миттєвому. Маємо:

$$v_z^g(r, t) = \frac{\partial u_z^g(r, t)}{\partial t} = \frac{p_0}{T} \begin{cases} \tilde{f}_z(r, t), & t \leq T, \\ \tilde{f}_z(r, t) - \tilde{f}_z(r, t-T), & t > T. \end{cases} \tag{12}$$

Введемо безрозмірний параметр часу $k = T(c_R / 2r_0)$, який відповідає T , де c_R – швидкість хвилі Релея. k вказує скільки разів хвиля Релея встигне пробігти діаметр площадки навантаження за час, поки його інтенсивність лінійно зростає.

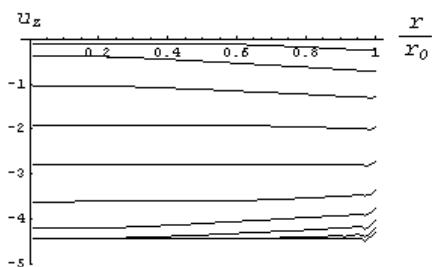


Рис. 1. Нормальні зміщення точок площадки навантаження, викликані поступовим прикладанням тиску, що виникає під плоским штампом у статичній задачі

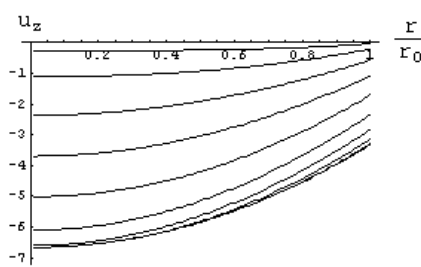


Рис. 2. Нормальні зміщення точок площадки навантаження, викликані поступовим прикладанням тиску Герца

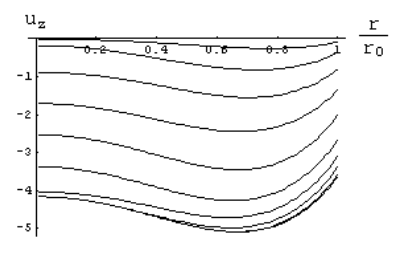


Рис. 3. Нормальні зміщення точок площадки навантаження, викликані поступовим прикладанням тиску спеціального вигляду

За (11) та даними для штампа і розподілу Герца [3] та для навантаження спеціального вигляду [4], побудовано графіки нормальних переміщень точок поверхні пружного півпростору в залежності від часу, який пройшов з моменту прикладання сили для трьох видів навантажень (рисунки 1, 2, та 3) у випадку $T = 2r_0 / c_R$, або $k = 1$.

Показано, що для навантаження, поступово прикладеного до межі півпростору, нормальні зміщення приймають свої статичні значення через час $T + 2r_0 / c_R$.

4. Оцінка частини енергії пружних хвиль при поступовому навантаженні

З теореми Клапейрона слідує, що при миттєвому навантаженні половина роботи зовнішніх сил перетворюється на енергію пружних деформацій, а половина – на енергію пружних хвиль. Оцінимо енергію, яка іде на створення пружних хвиль при поступовому навантаженні пружного півпростору обраними, різними за просторовим розподілом, типами навантажень (1) – (3) за умови, що радіус площадки контакту r_0 є однаковий, а p_0 підібрана таким чином, щоб рівнодіючі навантажень (9) співпадали:

$$p_0^S = \frac{2}{3} p_0, p_0^H = 2 p_0, p_0^d = 5 p_0. \tag{13}$$

Користуючись теоремою Клапейрона і (10), (13), знаходимо енергію пружних деформацій для кожного типу навантаження в аналітичному вигляді

$$A_{cm} = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^{r_0} r u_z^{cm}(r) \sigma_0(r) dr, \tag{14}$$

$$A_{cm}^S = \frac{2}{9} \pi^2 p_0^2 r_0^3 \frac{1-\nu}{G}, A_{cm}^H = \frac{4}{15} \pi^2 p_0^2 r_0^3 \frac{1-\nu}{G}, A_{cm}^d = \frac{5}{21} \pi^2 p_0^2 r_0^3 \frac{1-\nu}{G}$$

Роботу зовнішніх сил визначаємо за формулою

$$A(t) = 2\pi \int_0^t \int_0^{r_0} r v_z^g(r, \tau) p(r, \tau) dr d\tau. \tag{15}$$

Швидкості поверхні пружного півпростору $v_z^g(r, \tau)$ у (15) можна знайти за формулою (12) через чисельно отримані безрозмірні нормальні переміщення при миттєвому навантаженні для кожного типу розподілу, які позначимо $U_z^{\{kd\}}$ [3], [4]. Роботу зовнішніх сил знаходимо в момент, коли встановлюється статика, тобто $t = T + 2r_0 / c_R$. Таким чином, маємо:

$$A^S \left(T + \frac{2r_0}{c_R} \right) = \pi p_0^2 r_0^3 \frac{I^S(k)}{G}, A^H \left(T + \frac{2r_0}{c_R} \right) = \frac{1}{3} \pi p_0^2 r_0^3 \frac{I^H(k)}{G}, A^d \left(T + \frac{2r_0}{c_R} \right) = \frac{2}{15} \pi p_0^2 r_0^3 \frac{I^d(k)}{G}, \tag{16}$$

$$I^{\{kd\}}(k) = \frac{1}{k^2} I_1^{\{kd\}} + \frac{1}{k^2} I_{11}^{\{kd\}}(k) + \frac{1}{k} I_2^{\{kd\}} - \frac{1}{k} I_3^{\{kd\}},$$

$$I_1^{\{kd\}} = \int_0^1 \int_0^1 C^{\{kd\}}(r_1) t_1 U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1, I_2^{\{kd\}} = \int_0^1 \int_0^2 C^{\{kd\}}(r_1) U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1, \tag{17}$$

$$I_{11}^{\{kd\}}(k) = \int_0^1 \int_0^k C^{\{kd\}}(r_1) t_1 U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1, I_3^{\{kd\}} = \int_0^1 \int_0^1 C^{\{kd\}}(r_1) U_z^{\{kd\}}(r_1, t_1) dt_1 dr_1,$$

де $r_1 = r_0 / r$, $t_1 = c_R t / 2r_0$ – безрозмірні змінні, $C^{\{kd\}}(r_1)$ – функції для кожного виду розподілу:

$$C^H(r_1) = r_1 \sqrt{1-r_1^2}, C^d(r_1) = r_1^3 \sqrt{1-r_1^2}, C^S(r_1) = r_1 / \sqrt{1-r_1^2}.$$

5. Чисельні результати та висновки

Визначено частину роботи зовнішніх сил, яка іде на утворення пружних хвиль для розглянутих трьох типів навантаження $1 - A_{cm}^{kd} / A^{kd}(T + 2r_0 / c_R)$. На основі проведеного чисельного аналізу для різних значень параметру k (що відповідає різним T , тобто швидкості навантаження) виявлено різницю між частинами енергії, які ідуть на створення пружних хвиль для різних просторових розподілів навантажень. Відповідні чисельні данні подано в табл. 1, де "Д" – відсоток роботи зовнішніх сил, який перетворюється на енергію пружних статичних деформацій, "Х" – на утворення пружних хвиль.

Таблиця 1. Розподіл роботи зовнішніх сил на енергії статичної деформації та енергію хвиль

	Hertz %	Double %	Різниця H-D%	Stamp %	Різниця H-S%
$k = 1$	Д – 68,0062, Х – 31,9938	Д – 66,8189, Х – 33,1811	1,1873	Д – 66,1518, Х – 33,8482	1,8544
$k = 2$	Д – 78,7939, Х – 21,2061	Д – 77,2899, Х – 22,7101	1,50405	Д – 76,3909, Х – 23,6091	2,40301
$k = 5$	Д – 89,6221, Х – 10,3779	Д – 88,6163, Х – 11,3837	1,0058	Д – 87,9983, Х – 12,0017	1,6238

З отриманих результатів випливає, що частина енергії, яка йде на утворення пружних хвиль, залежить не лише від швидкості прикладання навантаження, а також і від його розподілу.

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с. 2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Куценко А. Г., Олійник В. Н., Улитко А. Ф. Перемещения точек поверхности упругого полупространства, вызванного мгновенным приложением осесимметричной нагрузки // Акуст. вісн. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 1–12. 4. Куценко О. Г., Баркова О. В. Нормальні зміщення точок поверхні пружного півпростору, викликані осесимметричним навантаженням спеціального вигляду // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2005. – Вип. 3. – С. 130–135.

Надійшла до редколегії 20.12.2010 р.

УДК 539.3

М. Шворак, студ.

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

Отримано аналітичний розв'язок нестационарної осесимметричної задачі термопружності для двошарового циліндра, що відповідає стрибкоподібній зміні в часі температури зовнішнього середовища. Нестационарна задача теплопровідності розв'язана за допомогою перетворення Лапласа. Кругові та поздовжні напруження отримані як розв'язок квазістатичної задачі термопружності при заданому розподілі температури.

Analytic solution of non-stationary axially symmetric problem of thermoelasticity for two-layer cylinder that corresponds to jump-like change in time ambient temperature are given. Non-stationary problem of thermal conduction is solved with the help of Laplace transform. Circle and longitudinal stresses are obtained as solution of quasi-static problem of thermoelasticity for given temperature distribution.

1. Вступ

У даній статті запропоновано аналітичний підхід до визначення напружено-деформованого стану (НДС) корпусу реактору (КР) в процесі протікання аварійного сценарію з умовною назвою "тепловий удар". КР обрано у якості об'єкту дослідження, оскільки він є основним конструктивним елементом реактора. Через явище радіаційного окрихчування найнебезпечнішою його частиною є частина напроти активної зони, де він являє собою круглий циліндр. Оскільки з внутрішньої сторони корпус реактора вкрито антикорозійним наплавленням з фізичними властивостями, відмінними від фізичних властивостей основного металу, то КР напроти активної зони може моделюватися двошаровим пружним циліндром. Аварійний сценарій "теплого удару" є одним із найнебезпечніших аварійних сценаріїв і передбачає, що в реактор, який знаходиться в стані рівномірного нагріву при робочій температурі (біля 270-290°C) швидко заливається холодною водою (біля 20°C).

Таким чином, процес теплового удару КР може бути досліджений на основі розв'язку задачі термопружності, що полягає у визначенні напружено-деформованого стану двошарового циліндру, у якого в початковий момент на внутрішній стінці миттєво змінюється температура зовнішнього середовища. Оскільки деформація пружного тіла викликає малу зміну його температури [2], ми маємо квазістатичну задачу термопружності, в якій не враховується ефект оберненої зв'язаності температурного поля і поля деформацій. Останнє набагато спрощує поставлену задачу, бо замість динамічної задачі термопружності, яка є досить складною, достатньо розглянути задачу нестационарної теплопровідності для двошарового циліндру та квазістатичну задачу про визначення температурних напружень за відомим розподілом температури в кожний момент часу.

У даній роботі зроблено уточнення розв'язку, запропонованого в [3], шляхом розгляду стінки з урахуванням скінченності її кривини. В [3] припускалося, що стінку можна замінити кусково-однорідним стрижнем.

2. Задача нестационарної теплопровідності

Розглядається нескінченний двошаровий циліндр, коли зовнішня поверхня циліндра теплоізолювана, а на всій внутрішній поверхні температура зовнішнього середовища змінюється однаково. Таким чином, маємо наступну нестационарну осесимметричну задачу: потрібно визначити в будь-який момент часу $t > 0$ температуру в області, що складається з двох однорідних частин "1", "2", якщо при $t < 0$ температура в кожній точці була рівна нульовій, а в початковий момент часу $t = 0$ на внутрішній стороні стрибкоподібно змінилася до значення T_0 (рис. 1). Бічна поверхня та правий кінець стержня вважається теплоізолюваними.

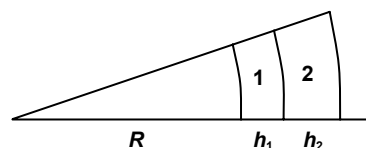


Рис. 1. Геометрія задачі теплопровідності

Позначимо через $T_1(r, t)$ розподіл температури на 1-й частині стержня, $T_2(r, t)$ – відповідно на 2-й. Задані розподіли температур задовольняють нестационарним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{a_k^2}{h^2} \left(\frac{\partial^2 T_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r + R/h} \frac{\partial T_k}{\partial r} \right), \quad k = 1, 2, \quad r \in [0, 1], \quad t \in [0, \infty]. \quad (1)$$

При цьому початкові умови є однорідними:

$$T_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2)$$

а граничні умови можна записати у вигляді

$$\left(T_1 - \frac{\lambda_1}{H_1 h} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad T_1 \Big|_{r=\frac{h_1}{h}} = T_2 \Big|_{r=\frac{h_1}{h}}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=\frac{h_1}{h}} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=\frac{h_1}{h}}, \quad (3)$$

В (1) – (3) введені наступні позначення: $h = h_1 + h_2$, $a_k^2 = \frac{\lambda_k}{\rho_k c_k}$, λ_k – коефіцієнти внутрішньої теплопровідності

ті, ρ_k – густини, c_k – теплоємності матеріалів шарів циліндрів, H – коефіцієнт тепловіддачі. Дві останні умови в (3) забезпечують неперервність розподілу температури та теплового потоку при переході від одного шару до іншого.

Для знаходження розв'язку поставленої задачі скористаймося перетворенням Лапласа за часовою змінною t та параметром перетворення s . Внаслідок застосування перетворення Лапласа в просторі образів одержуємо граничну задачу для рівняння Бесселя, розв'язок якої має вигляд

$$\tilde{T}_k(r, s) = C_k^{(1)} J_0 \left(i \frac{\sqrt{s} h}{a_k} \left(r + \frac{R}{h} \right) \right) + C_k^{(2)} Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s} h}{a_k} \left(r + \frac{R}{h} \right) \right), \quad (4)$$

де введено наступні позначення

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \frac{1}{A} \left(\frac{T_0}{s} - \frac{u\gamma - \zeta v}{\zeta\eta - \gamma\xi} B \right), \quad C_1^2 = \frac{D}{C} \frac{u\eta - v\xi}{\zeta\eta - \gamma\xi}, \quad C_2^1 = \frac{u\gamma - \zeta v}{\zeta\eta - \gamma\xi}, \quad C_2^2 = \frac{u\eta - v\xi}{\zeta\eta - \gamma\xi}, \\ \xi &= Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) - \frac{B}{A} J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \quad \zeta = Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + \frac{D}{C} J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right), \\ \eta &= Y_1 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) + \frac{B}{A} J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \quad \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_1}{a_2} \left(Y_1 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + \frac{D}{C} J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) \right), \\ u &= \frac{T_0}{s} \frac{1}{A} J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \quad v = -\frac{T_0}{s} \frac{1}{A} J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right), \\ A &= J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right) + \omega J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right), \quad B = Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right) + \omega Y_1 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_1} R \right), \\ C &= J_1 \left(i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left(1 + \frac{R}{h} \right) \right), \quad D = Y_1 \left(i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left(1 + \frac{R}{h} \right) \right), \quad \omega = i \frac{\sqrt{s} h}{a_1} \frac{\lambda}{H_1 h}. \end{aligned}$$

Для знаходження розподілу температури необхідно виконати обернене перетворення Лапласа, для чого скористаємося другою теоремою розкладу [1]:

$$T_k(r, t) = \sum_{s=s_k} \text{Res} \tilde{T}_k(r, s) e^{st},$$

де сума лишків береться за всіма простими полюсами $\tilde{T}_k(r, s)$, а рівняння для знаходження полюсів має вигляд

$$\zeta\eta - \gamma\xi = 0. \quad (5)$$

Остаточню розв'язок задачі (1) – (3) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} T_1(r, t) &= T_0 + \sum_{s=s_k} \frac{\zeta \left(u \frac{\eta}{\xi} - v \right)}{(\zeta\eta - \gamma\xi)_s} \left[-\frac{B}{A} J_0 \left(i \frac{\sqrt{s} h}{a_1} \left(r + \frac{R}{h} \right) \right) + Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s} h}{a_1} \left(r + \frac{R}{h} \right) \right) \right] e^{st}, \\ T_2(r, t) &= \sum_{s=s_k} \frac{\xi \left(u \frac{\eta}{\xi} - v \right)}{(\zeta\eta - \gamma\xi)_s} \left[\frac{D}{C} J_0 \left(i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left(r + \frac{R}{h} \right) \right) + Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s} h}{a_2} \left(r + \frac{R}{h} \right) \right) \right] e^{st}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для перевірки правильності одержаних результатів виконаємо асимптотичний розклад лівої частини (5) при $h/R \rightarrow 0$. В розгорнутому вигляді рівняння (5) має вигляд

$$\begin{aligned} &\left[C Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + D J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) \right] \times \left[A Y_1 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) + B J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) \right] - \\ &- \left[C \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{a_1}{a_2} \left(Y_1 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + D J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) \right) \right] \times \left[A Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) - B J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_1} (h_1 + R) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо вираз в перших дужках:

$$C Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + D J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) = J_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) Y_0 \left(-i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) + Y_1 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right) J_0 \left(i \frac{\sqrt{s}}{a_2} (h_1 + R) \right).$$

Зробивши заміни $z = -i\frac{\sqrt{s}}{a_2}(h_1 + R)$, $\mu = -\frac{ih_1}{a_1}\sqrt{s}$, $\beta = \frac{a_1}{a_2}\frac{h_1}{h_2}$ та виконавши асимптотичний розклад функцій Бесселя для великих значень їх аргументів, отримаємо

$$Y_0(z)J_1(z + \beta\mu) - J_0(z)Y_1(z + \beta\mu) \approx \frac{2}{\pi\sqrt{z(z + \beta\mu_n)}} \left[\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z + \beta\mu - \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(z + \beta\mu - \frac{3\pi}{4}\right) \right] = \frac{2}{\pi\sqrt{z(z + \beta\mu_n)}} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\mu\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{z(z + \beta\mu_n)}} \cos(\beta\mu).$$

Провівши аналогічні перетворення інших членів (5), остаточно отримаємо

$$\cos \mu_n \cos \beta\mu_n - \alpha \sin \mu_n \sin \beta\mu_n - \gamma \mu_n (\sin \mu_n \cos \beta\mu_n + \alpha \cos \mu_n \sin \beta\mu_n) = 0,$$

що повністю відповідає рівнянню для знаходження полюсів при розгляді задачі для стрижня, що складається з двох однорідних частин [3].

3. Квазістатична задача термопружності

Розв'яжемо тепер задачу термопружності. Будемо вважати, що температура у внутрішніх точках циліндра змінюється досить повільно. За такого припущення можна знехтувати силами інерції і розглядати статичну задачу термопружності. Проте, оскільки температурне поле все ж таки залежить від часової координати t , правильно говорити про квазістатичну задачу термопружності.

Отже, будемо розглядати рівновагу циліндра, який складається з двох однорідних пружних шарів: параметри першого шару будемо позначати індексом "1", другого – "2". Припустимо, що до циліндра не прикладено зовнішніх механічних зусиль, а зовнішнє навантаження відповідає температурному полю (6), якщо вважати, що $r = x + a$, $h_1 = b - a$, $h_2 = c - b$. Тут r – радіальна координата, що відраховується від осі циліндра. З умови осьової симетрії та припущення про рівність значень коефіцієнта Пуассона матеріалів обох шарів маємо, що дотичні напруження відсутні. Ненульовими залишаються радіальні напруження σ_r , колові напруження σ_θ та поздовжні напруження σ_z в кожному з двох шарів. Вони разом з радіальними зміщеннями u задовольняють рівнянням рівноваги

$$\frac{d\sigma_{rk}}{dr} + \frac{\sigma_{rk} - \sigma_{\theta k}}{r} = 0, \quad k = 1, 2 \tag{7}$$

та граничні умови

$$\sigma_{r1}|_{r=a} = \sigma_{r2}|_{r=c} = 0, \quad u_1|_{r=b} = u_2|_{r=b}, \quad \sigma_{r1}|_{r=b} = \sigma_{r2}|_{r=b}, \quad \sigma_z|_{z=\pm L} = 0. \tag{8}$$

Розв'язок задачі (7) – (8) побудовано, використовуючи підхід [4], в [3]. Подамо лише остаточні вирази для колової та поздовжніх напружень, які становлять найбільший інтерес при розрахунку на міцність

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr + \int_a^r T r dr - T r^2 \right] - \frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} q,$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \left[\frac{r^2 + b^2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr + \int_b^r T r dr - T r^2 \right] + \frac{r^2 + c^2}{c^2 - b^2} \frac{b^2}{r^2} q, \tag{9}$$

$$\sigma_{z1} = \frac{\alpha_1 E_1}{1-\nu} \left[\frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b T r dr - T r^2 \right] + \frac{Q}{b^2 - a^2}, \quad \sigma_{z2} = \frac{\alpha_2 E_2}{1-\nu} \left[\frac{2}{c^2 - b^2} \int_b^c T r dr - T r^2 \right] - \frac{Q}{c^2 - b^2}. \tag{10}$$

Коректність побудованого розв'язку перевірено на прикладі задачі про температурний удар циліндричної частини корпусу реактора ВВЕР-1000. Одержаний аналітичний розв'язок порівнювався з розв'язком, одержаним за допомогою апробованого методу скінченних елементів.

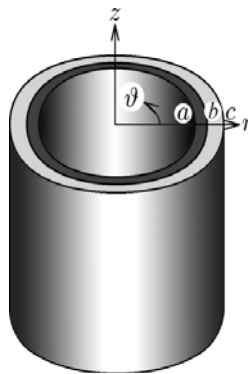


Рис. 2. Геометрія термопружної задачі

На рисунках 3, 4 та 5 подано розподіли температур, колових та поздовжніх напружень для різних моментів часу. Суцільні лінії відповідають аналітичному розв'язку (6), (9) та (10), точки – чисельному розв'язку в вузлах сітки.

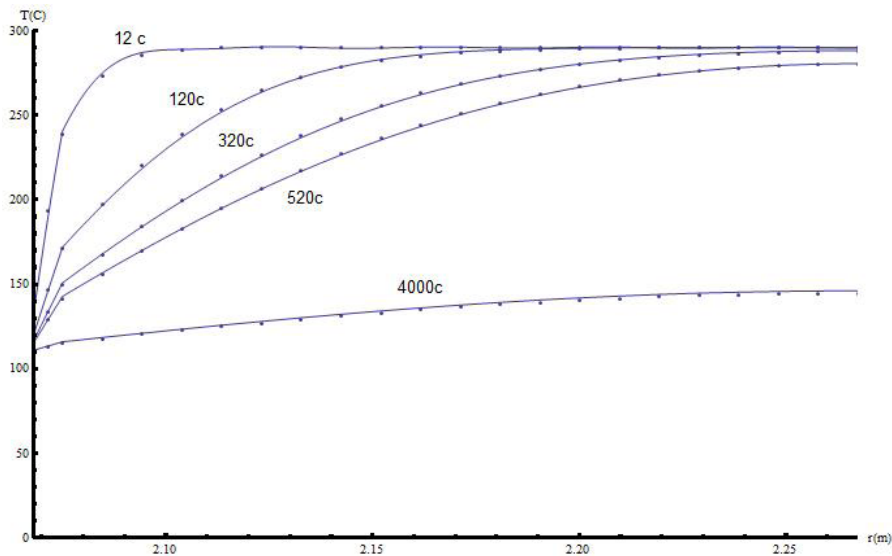


Рис. 3. Розподіл температури

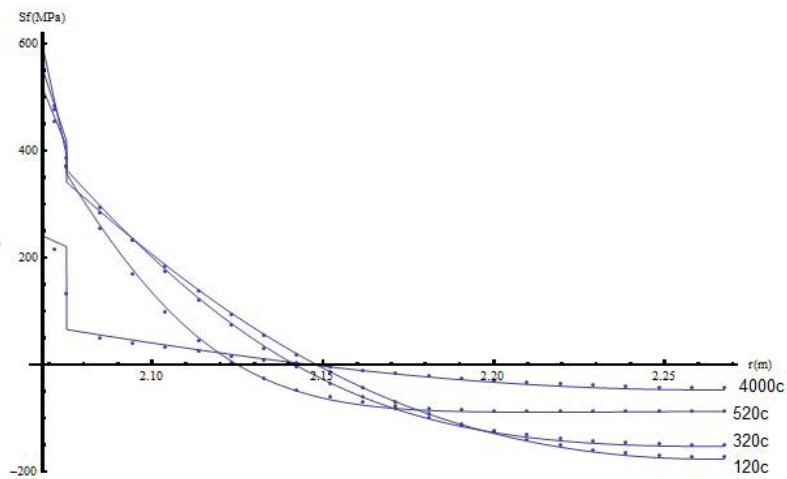


Рис 4. Розподіл колових напружень

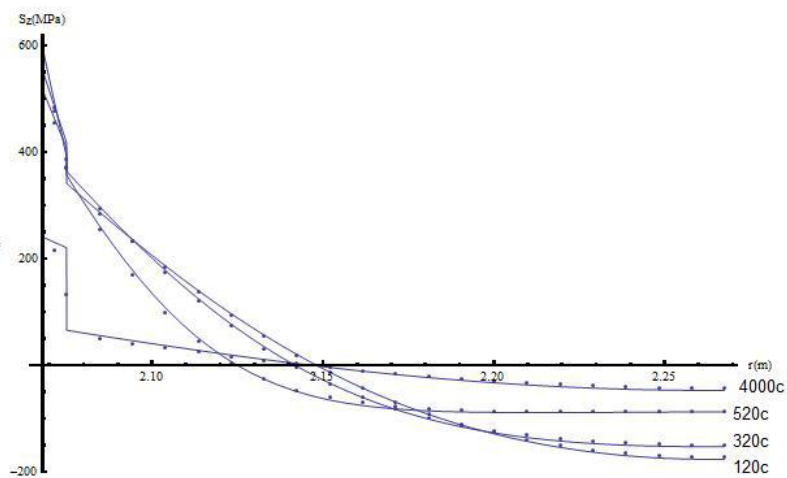


Рис 5. Розподіл повздовжніх напружень

Відхилення в значеннях температури та напружень пояснюються тим, що при одержанні чисельного розв'язку враховувалася залежність фізичних параметрів від температури. Аналіз чисельних результатів вказує на те, що врахування кривини стінки позитивно впливає на точність розв'язку.

4. Висновки

Одержано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для двохшарового пружного циліндру, зокрема, встановлено залежності температури, поздовжніх та колових напружень від радіальної та часової координати. На конкретному прикладі термічного удару корпусу реактора ВВЕР-1000 проведено порівняльний аналіз одержаного розв'язку з точним чисельним розв'язком, який враховує залежність фізичних параметрів від температури. Аналіз засвідчив високу точність (похибка в межах 5%) аналітичного розв'язку.

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с. 2. Коваленко А. Д. Термоупругость. – К.: Вища школа, 1975. – 216 с. 3. Куценко О. Г., Харитонов О. М., Зражевський Г. М. Аналітичний розв'язок нестационарної задачі термоупругості, що відповідає темпоудару двохшарового циліндру // Вісн. Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 2. – С. 65–70. 4. Тимошенко С. П., Гудьбер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

Надійшла до редколегії 22.12.2010 р.

УДК 533.6.013.42

Р. Богун, мол. наук. співр.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ РІДИНИ З ПЛАСТИНКОЮ НА ЇЇ ВІЛЬНІЙ ПОВЕРХНІ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ З ДОВІЛЬНИМ ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ДНОМ

Розглянуто задачу про вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном та пружну пластинку, яка покриває незбурену вільну поверхню рідини. З використанням розкладу за власними функціями допоміжно введеної спектральної задачі з параметром в граничній умові знайдено аналітичний розв'язок задачі. Розглянуто конкретний приклад механічної системи, для якого за запропонованим алгоритмом побудовано розв'язок.

The problem of coupled oscillation of ideal liquid in a cylindrical container with axisymmetric bottom and an elastic plate on the free surface is studied. An analytical solution of mentioned problem is constructed using eigenfunction expansion method. Using concrete example, we analyze the obtained solution.

1. Вступ

Створення резервуарів великої ємності для транспортування та збереження рідини потребує докладного аналізу можливого резонансного збурення хвильових рухів рідини. В якості засобів обмеження рухливості рідини використовують спеціальні мембрани або тонкі пружні пластинки, які покривають вільну незбурену поверхню рідини. Проблема взаємодії рідини і пружних елементів на її вільній поверхні в резервуарах канонічної геометричної форми досліджувалась в [2, 3, 5]. В [1] запропоновано наближені методи розв'язання задачі гідропругості у випадку довільного осесиметричного контейнера.

У даній статті розглядається задача гідропругості про зв'язані вільні коливання рідини та пружної пластинки, причому рідина знаходиться в резервуарі, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном, а пружний елемент розміщено на вільній поверхні рідини і жорстко закріплено на стінках резервуара.

2. Постановка задачі

Розглянемо резервуар, який має форму прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном. Нехай резервуар заповнено ідеальною та нестисловою рідиною на постійну глибину $H = h + h_d$ (h – висота рідини в циліндричній частині посудини, h_d – висота осесиметричного дна). Будемо також вважати, що незбурена вільна поверхня рідини покрита пружною круговою пластинкою радіуса r_0 , жорстко закріпленою по своєму контуру на стінках резервуара, а поле гравітаційних сил паралельне осі симетрії резервуара. Введемо до розгляду циліндричну систему координат $O r \eta z$ таку, що вісь Oz співпадає з віссю симетрії резервуара і спрямована вгору (протилежно до вектора земного прискорення). Початок системи координат $O r \eta z$ розмістимо в площині пластинки.

Задача про власні неосесиметричні коливання описаної механічної системи в безрозмірних величинах після відокремлення кутової та часової змінних може бути сформульована таким чином [1]:

$$\begin{aligned} -L^2[W(r)] + \delta W(r) &= -a^{-1} \gamma^2 \Phi(r, 0), \quad r \in [0, r_0], \quad W(r_0) = 0, \quad W'(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \quad (r, z) \in Q, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{L^*} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{L_0} = W(r), \quad \int_{L_0} W(r) ds = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $W(r)$ – складова нормального прогину пластинки в напрямку осі Oz , $\Phi(r, z)$ – складова потенціалу малих зміщень рідини, Q – область меридіонального перерізу резервуара, L_0 і L^* – лінії перетину площини меридіонального перерізу з незбуреною поверхнею пластинки і змочуваною поверхнею резервуара відповідно, \mathbf{v} – орт зовнішньої нормалі до границі області Q .

В (1) введено такі позначення:

$$\delta = \gamma^2 - \varepsilon, \quad \gamma^2 = \frac{a}{D} \lambda^2, \quad a = \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho R}, \quad D = \frac{D_c}{\rho g R^4}, \quad \lambda^2 = \frac{\omega^2 R}{g}, \quad \varepsilon = \frac{1}{D}, \quad L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Тут ρ_0 , δ_0 , D_c – відповідно густина, товщина і циліндрична жорсткість пластинки, ρ – густина рідини, R – характерний лінійний розмір резервуара, ω – власна частота коливань рідини і пластинки, g – модуль градієнта поля масових сил.

Складність розв'язання задачі (1) полягає в тому, що потрібно провести одночасне інтегрування рівнянь для функції $W(r)$, заданої на відрізку $[0; r_0]$, і рівнянь для функції $\Phi(r, z)$, визначеної в двовимірній області Q , причому функція $W(r)$ входить в граничну умову на L_0 для функції $\Phi(r, z)$, і разом з цим рівняння для функції $W(r)$ містить функцію $\Phi(r, z)$.

3. Застосування методу розкладу за власними функціями крайової задачі з параметром в граничній умові

Для того, щоб звести задачу (1) до однорідної задачі відносно функції $W(r)$, введемо до розгляду задачу на власні значення з параметром в граничній умові, яка в області Q формулюється в такий спосіб:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (r, z) \in Q, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}} \right|_{L_0^*} = 0, \quad |\varphi(0, z)| < \infty, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{v}} - \tau \varphi \right) \Big|_{L_0} = 0, \quad (2)$$

де \mathbf{v} – це орт зовнішньої нормалі до границі області Q , а τ – невідомий безрозмірний параметр.

За фізичним змістом однорідна задача (2) описує вільні коливання ідеальної рідини в резервуарі, що розглядається. При цьому квадрат власної частоти коливань σ^2 пов'язаний з безрозмірним параметром τ співвідношенням $\tau = \sigma^2 R / g$.

Упорядковані за зростанням власні значення спектральної задачі (2) позначимо τ_n , відповідні їм власні функції – $\varphi_n(r, z)$ ($n = 1, 2, \dots$). У [4] доведено, що розв'язки $\varphi_n(r, z)$ утворюють повну систему функцій на границі L_0 області Q , спектр задачі (2) є дискретним і має єдину точку згущення на нескінченності, для цих функцій справедливі такі умови ортогональності:

$$\int_{L_0} r \varphi_i \varphi_j ds = 0, \quad \int_{L_0} r \frac{\partial \varphi_i}{\partial \mathbf{v}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \mathbf{v}} ds = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (3)$$

Оскільки область меридіонального перерізу Q , яку розглядаємо в задачі, складається з канонічної та неканонічної підобластей, застосуємо до розв'язання спектральної задачі (2) метод декомпозиції області на підобласті [4]. Суть цього методу полягає в тому, що область ділиться лінією поділу l на підобласті, потім в кожній із новоутворених областей формулюється відповідна крайова задача, кожна з яких розв'язується одним із відомих методів. Ці задачі пов'язані між собою додатковою умовою спряження на лінії l поділу областей:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \mu \varphi = 0 \quad \text{на } l.$$

В результаті застосування варіаційного методу [1] до розв'язування задачі, сформульованої в області дна резервуара Q_1 , визначаються параметри μ_n . Розв'язок задачі, сформульованої в прямокутній частині області меридіонального перерізу Q_2 , будується з використанням методу розділення змінних:

$$\varphi_n^{(2)}(r, z) = \frac{1}{k_n} \frac{k_n \operatorname{ch}(k_n(z+h)) + \mu_n \operatorname{sh}(k_n(z+h))}{k_n \operatorname{sh}(k_n h) + \mu_n \operatorname{ch}(k_n h)} R_n(r), \quad R_n(r) = \frac{J_1(k_n r)}{J_1(k_n r_0)}, \quad \tau_n = k_n \frac{k_n \operatorname{th}(k_n h) + \mu_n}{k_n + \mu_n \operatorname{th}(k_n h)},$$

де $\varphi_n^{(2)}(r, z)$ – значення функції $\varphi(r, z)$, що вона набуває в області Q_2 , k_n – корені рівняння $J_1'(k_n r_0) = 0$, $n = 1, 2, \dots$

Після того, як знайдено розв'язок спектральної задачі (2), перейдемо до знаходження наближених розв'язків задачі (1). Подамо функцію $\Phi(r, z)$ у вигляді розкладу за власними функціями $\varphi_n(r, z)$, для визначення коефіцієнтів якого використаємо граничну умову для $\Phi(r, z)$ на контурі L_0 і умови ортогональності (3):

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n^2} \int_{L_0} r W(r) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{v}} ds \varphi_n(r, z), \quad N_n^2 = \int_{L_0} r \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 ds. \quad (4)$$

Обмежуючись в розкладі (4) скінченним числом членів M , розв'язання вихідної задачі гідропружності зведемо до розв'язання інтегро-диференціального рівняння відносно функції $W(r)$:

$$A(W) = -L^2[W(r)] + \delta W(r) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n R_n(r), \quad W(r_0) = W'(r_0) = 0, \quad |W(0)| < \infty, \quad (5)$$

де

$$E_n = -\frac{a^{-1} \gamma^2 r_0}{H_n^2 \tau_n} \int_0^{r_0} r W(r) R_n(r) dr, \quad H_n^2 = \frac{1}{2} \left(r_0^2 - \frac{1}{k_n^2} \right), \quad \delta = \begin{cases} \alpha^4 & \text{при } \delta > 0, \\ -\alpha^4 & \text{при } \delta < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Наближений розв'язок задачі (5), (6) можна побудувати за допомогою узагальненого методу Бубнова – Гальоркіна [1]. При цьому вихідна задача зводиться до узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення. Нижче при розв'язуванні задачі (5), (6) застосуємо інший підхід. Загальний розв'язок рівняння (5) подамо у вигляді:

$$W(r) = \sum_{p=1}^4 C_p F_p(\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n R_n(r), \quad (7)$$

де під знаком першої суми записано загальний розв'язок однорідного рівняння $A(W) = 0$, C_p – довільні сталі, $p = \overline{1, 4}$, а під знаком другої суми – частинний розв'язок рівняння (5). Функції $F_p(r)$ у формулі (7) при $\delta > 0$ мають вигляд $F_1(r) = J_1(r)$, $F_2(r) = Y_1(r)$, $F_3(r) = I_1(r)$, $F_4(r) = K_1(r)$, а при $\delta < 0$ $F_1(r) = \text{ber}_1(r)$, $F_2(r) = \text{ker}_1(r)$, $F_3(r) = \text{bei}_1(r)$, $F_4(r) = \text{kei}_1(r)$, де $Y_1(r)$ – функція Бесселя 2-го роду 1-го порядку, а $I_1(r)$ та $K_1(r)$ – модифіковані функції Бесселя відповідно 1-го та 2-го роду 1-го порядку, $\text{ber}_1(r)$, $\text{bei}_1(r)$ та $\text{ker}_1(r)$, $\text{kei}_1(r)$ – функції Кельвіна 1-го та 2-го роду 1-го порядку.

Відповідно до фізичного змісту задачі розв'язки $W(r)$ обмежені. Функції $F_2(\alpha r)$ та $F_4(\alpha r)$ необмежені при $r = 0$, тому $C_2 = 0$, $C_4 = 0$.

Підставивши вираз (7) в рівняння (5) і прирівнявши коефіцієнти при $R_n(r)$, отримаємо

$$W_n = -\frac{E_n}{k_n^4 \mp \alpha^4} \quad (\alpha \neq k_n). \quad (8)$$

У разі наявності альтернативного знаку \mp у наведених формулах знак мінус отримано при $\delta > 0$, а плюс – при $\delta < 0$.

Записавши значення для коефіцієнтів E_n з урахуванням загального розв'язку (7) для функції $W(r)$, підставимо отримані вирази для E_n у вираз (8). В результаті одержимо рівність, з якої можуть бути виражені коефіцієнти W_n :

$$W_n = G_n(\gamma) \left(C_1 \int_0^{r_0} r F_1(\alpha r) R_n(r) dr + C_3 \int_0^{r_0} r F_3(\alpha r) R_n(r) dr \right), \quad G_n(\gamma) = \frac{a^{-1} \gamma^2}{H_n^2 \left((k_n^4 \mp \alpha^4) \tau_n - a^{-1} \gamma^2 \right)}.$$

Із умови $W'(r_0) = 0$ визначимо сталу C_3 через C_1 : $C_3 = -\frac{F_1'(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)} C_1$. Тут і далі штрих означає похідну лише за аргументом. В результаті коефіцієнт W_n має вигляд:

$$W_n = C_1 u_n(\gamma), \quad \text{де } u_n(\gamma) = \frac{\alpha^3 r_0}{k_n^4 \mp \alpha^4} G_n(\gamma) \tilde{u}_n(\alpha r_0), \quad \tilde{u}_n(r) = \begin{cases} 2F_1'(r) & \text{при } \delta > 0, \\ \frac{(F_1'(r))^2 + (F_3'(r))^2}{F_3'(r)} & \text{при } \delta < 0. \end{cases}$$

Підставивши знайдені вирази для коефіцієнтів W_n у розклад (7), отримаємо:

$$W(r) = C_1 \left(F_1(\alpha r) - \frac{F_1'(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)} \cdot F_3(\alpha r) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\gamma) R_n(r) \right). \quad (9)$$

Використавши граничну умову $W(r_0) = 0$ і умову існування нетривіального розв'язку отриманого рівняння, задачу зведемо до характеристичного рівняння відносно параметра γ :

$$\frac{1}{\alpha r_0} \cdot \left(\frac{F_1(\alpha r_0)}{F_1'(\alpha r_0)} - \frac{F_3(\alpha r_0)}{F_3'(\alpha r_0)} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 G_n(\gamma)}{k_n^4 - \alpha^4} = 0, \quad \frac{1}{\alpha r_0} \cdot \frac{F_1(\alpha r_0) F_3'(\alpha r_0) - F_3(\alpha r_0) F_1'(\alpha r_0)}{(F_1'(\alpha r_0))^2 + (F_3'(\alpha r_0))^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 G_n(\gamma)}{k_n^4 + \alpha^4} = 0. \quad (10)$$

Перше рівняння отримуємо при додатному δ , а друге – при від'ємному. Можна показати, що на кожному інтервалі (ξ_n, ξ_{n+1}) містяться лише один корінь кожного із рівнянь (10), причому $\xi_n = \sqrt{\frac{(k_n^4 + \varepsilon) \tau_n}{a^{-1} + \tau_n}}$, $n = 1, 2, \dots$

При цьому функції $W_k(r)$ і $\Phi_k^{(2)}(r, z)$ визначаються за формулами:

$$W_k(r) = C_1 \left(F_1(\alpha_k r) - \frac{F_1'(\alpha_k r_0)}{F_3'(\alpha_k r_0)} \cdot F_3(\alpha_k r) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3 r_0 G_n(\gamma_k)}{k_n^4 \mp \alpha_k^4} \tilde{u}_n(\alpha_k r_0) R_n(r) \right), \quad (11)$$

$$\Phi_k^{(2)}(r, z) = C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_k^3 r_0}{a^{-1} \gamma_k^2} G_n(\gamma_k) \tilde{u}_n(\alpha_k r_0) R_n(r) \cdot \frac{k_n \text{ch}(k_n(z+h)) + \mu_n \text{sh}(k_n(z+h))}{k_n \text{ch}(k_n h) + \mu_n \text{sh}(k_n h)} \right).$$

Функція $\Phi_k^{(2)}(r, z)$ у формулах (11) – це розв'язок, що побудований в області Q_2 .

Звернемо увагу на те, що згідно з запропонованим алгоритмом для розрахунку власних коливань розглядуваної гідропружної системи потрібно розв'язати трансцендентні рівняння, які містять достатньо велику кількість власних значень μ_n знайдених досить точно. Точність обчислення значень μ_n і достатня їх кількість забезпечується на основі варіаційного методу [1]. Для розв'язання задачі гідропружності у випадку резервуара з плоским дном потрібно покласти всі $\mu_n = 0$.

4. Аналіз розв'язку і деякі результати розрахунків

Наведемо деякі результати розрахунків зв'язаних неосесиметричних коливань пластинки і рідини в резервуарі за описаним вище алгоритмом. Будемо розглядати резервуар, що має форму прямого кругового циліндра з

півсферичним дном. Радіуси основи циліндра, пластинки та сферичного дна дорівнюють r_0 , висота рідини в циліндричній частині $h = r_0$. За характерний лінійний розмір виберемо радіус r_0 . Подані нижче результати обчислень отримано для безрозмірних значень параметрів системи: $a = 0,01$, $D = 0,02$.

У табл. 1 подано збіжність перших чотирьох власних значень задачі (1) в залежності від кількості членів M у розкладах (11). Дані табл. 1 свідчать про те, що відносна помилка обчислень для першого власного значення λ_1 при $M = 2$ не перевищує 0,11%, а для другого – 21%, де за точні прийнято обчислені при $M = 30$ значення. При $M = 8$ знайдено значення λ_i ($i = \overline{1,4}$) з трьома–сімома точними значущими цифрами, а при $M = 16$ кількість точних цифр чотирьох частотних параметрів зростає до п'яти–семи. Зауважимо, що перше власне значення табл. 1 визначалося з другого характеристичного рівняння (10), а всі інші – з першого рівняння (10). Отримані результати добре узгоджуються з результатами, що отримані за допомогою узагальненого методу Бубнова–Гальоркіна [1]. На рис. 1 зображено графіки залежності перших чотирьох власних значень задачі від безрозмірного параметра висоти h рідини в циліндричній частині резервуара з півсферичним дном. При зменшенні висоти h до нуля, значення λ_i прямують до значень обчислених для півсферичного резервуара без циліндричної частини, повністю заповненого рідиною, а при збільшенні h – до значень, отриманих при розрахунках для резервуара з плоским дном, заповненого рідиною на висоту h .

Таблиця 1. Значення нижчих частот системи в залежності від кількості M членів у розкладах (11)

M	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
2	5,2137490	24,174920	–	–
4	5,2084679	19,998449	48,307341	114,41092
6	5,2084290	19,990708	48,040627	91,470019
8	5,2084273	19,990366	48,030549	91,341429
10	5,2084271	19,990331	48,029540	91,329444
12	5,2084271	19,990325	48,029375	91,327520
16	5,2084270	19,990324	48,029328	91,326975
20	5,2084270	19,990324	48,029323	91,326922
30	5,2084270	19,990324	48,029322	91,326912

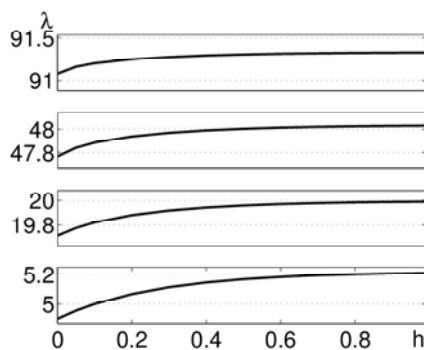


Рис. 1. Залежність нижчих частот системи від висоти h рідини

У деяких роботах з гідропружності розглядають задачу за відсутності поля масових сил (статичної складової тиску на пружну поверхню), а також безінерційний пружний елемент на вільній поверхні рідини. Цим самим вводяться певні додаткові припущення. Результати досліджень свідчать, що нехтування цими складовими може призвести до істотних помилок при обчисленні значень частот зв'язаних коливань рідини і пластинки, причому зі збільшенням номера власної частоти системи відносна похибка обчислень зменшується.

5. Висновки

Запропоновано аналітичний розв'язок задачі гідропружності про власні коливання ідеальної нестисливої рідини в резервуарі у формі прямого кругового циліндра з довільним осесиметричним дном і з пружною пластинкою на вільній поверхні рідини. В результаті застосування методу розкладу за власними функціями допоміжно введеної спектральної задачі з параметром в граничній умові задачу гідропружності зведено до однорідної граничної задачі для інтегро–диференціального рівняння відносно прогину пластинки. Знайдено точний розв'язок цього рівняння. Визначення власних частот гідропружної системи зведено до розв'язання трансцендентного рівняння. На конкретному прикладі для частково заповненого рідиною резервуара, що має форму прямого кругового циліндра з півсферичним дном, наведено аналіз отриманого розв'язку.

1. Бoуn П. І. Вільні коливання рідини в резервуарі, що має форму тіла обертання та пружну пластинку на вільній поверхні // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 3. – С. 26–52. 2. Докучаев Л. В. О колебаниях резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 1. – С. 49–54. 3. Троценко В. А. О колебаниях жидкости в сосудах, свободная поверхность которой закрыта мембранной оболочкой из гиперупругого материала // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 6. – С. 166–177. 4. Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев, 1969. 5. Bauer H. F. Frequencies of a hydroelastic rectangular system // Forsch. Ingenieur. – 1993. – Vol. 59, № 1, 2. – P. 18–22.

УДК 519.218.8

М. Андросенко, ст. викл., О. Кільчинський, доц.,
Т. Клецька, ст. викл., Т. Крижановська, доц.

ГЕОМЕТРИЧНІ ОЗНАКИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ З ДИСКРЕТНИМ СПЕКТРОМ

Доведено теореми про класи кореляційних функцій для стаціонарних випадкових процесів з дискретним спектром. Встановлено достатні ознаки, за якими можна дослідити тип стаціонарного випадкового процесу, орієнтуючись лише на геометричні властивості (без гармонійного аналізу) його кореляційної функції.

Theorems on classes of correlation functions for stationary random processes with a discrete spectrum are given. Sufficient tests with which the type of stationary random process is established, proceeding from geometrical properties (without the harmonic analysis) of its correlation function are obtained.

1. Вступ

Питання про належність стаціонарного випадкового процесу (СВП) $\xi(t)$ до класу процесів з дискретним чи неперервним спектром можна з'ясувати, досліджуючи розвинення його кореляційної функції $K_\xi(\tau)$ за системою тригонометричних функцій. Згідно з класифікацією [1, 2], у випадку СВП з дискретним спектром і періодичною з періодом $T = [-l; l]$ кореляційною функцією $K(\tau)$ остання має розклад в ряд Фур'є з невід'ємними коефіцієнтами D_k , $k = 0, 1, \dots$, вигляду

$$K(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \frac{k\pi}{l} \tau. \quad (1)$$

Процедура розвинення в ряд (1) і перевірки нерівностей $D_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, часто не є тривіальною справою. Нами продовжено дослідження [1] про можливість класифікації СВП за геометричними ознаками кореляційної функції, тобто без її розвинення в ряд Фур'є. В [1] клас можливих кореляційних функцій для СВП з дискретним спектром обмежено умовою їх монотонності на періоді. У даній статті цей клас розширено.

2. Основна частина

Наступна теорема встановлює нові достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є вигляду (1) з невід'ємними коефіцієнтами.

Теорема 1. Нехай функцію $f(\tau)$ можна подати як суму

$$f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau), \quad (2)$$

де функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ визначені на проміжку $[0; l]$ і задовольняють такі умови:

A1. функція $f_1(\tau)$ є неперервною, не зростаючою, її похідна $f_1'(\tau)$ є кусково-неперервною і неспадною;

A2. справджується нерівність

$$\int_0^l f_1(\tau) d\tau \geq 0, \quad (3)$$

B1. функція $f_2(\tau)$ є неперервною, похідна $f_2'(\tau)$ є кусково-неперервною і неспадною;

B2. справджується нерівність

$$\int_0^l f_2(\tau) d\tau \geq 0; \quad (4)$$

B3. має місце властивість

$$f_2(l - \tau) = f_2(\tau). \quad (5)$$

Тоді функція $f(\tau)$ розкладається на проміжку $[0; l]$ в ряд Фур'є вигляду (1) з невід'ємними коефіцієнтами D_k , $k = 0, 1, \dots$, тобто може бути кореляційною функцією деякого СВП з дискретним спектром.

Доведення. З умов теореми випливає, що на проміжку $[0; l]$ функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ є неперервними. Функція $f_1(\tau)$ як неспадна на $[0; l]$ не має екстремумів, а функція $f_2(\tau)$ як неперервна, вгнута (опукла донизу) та симетрична відносно прямої $\tau = l/2$ має єдиний екстремум – мінімум в точці $\tau = l/2$, бо на проміжку $[0; l/2]$ ця функція не зростає, а на проміжку $[l/2; l]$ – не спадає.

Нехай τ_1, τ – довільні числа, для яких $0 < \tau_1 < \tau < l/2$. Позначимо $\tau_2 = l - \tau_1$. Тоді, враховуючи рівність (5), за властивістю вгнутості для точок τ_1, τ, τ_2 маємо $f_2(\tau) \leq \lambda f_2(\tau_1) + (1 - \lambda) f_2(\tau_2) = f_2(\tau_1)$, де $\lambda = \frac{\tau_2 - \tau}{\tau_2 - \tau_1}$, $0 < \lambda < 1$.

Звідси, зважаючи на довільність вибору точок τ_1, τ і умову $0 < \tau_1 < \tau < l/2$, переконаємося, що на проміжку $[0; l/2]$ функція $f_2(\tau)$ є незростаючою. Враховуючи умову (5), маємо, що на проміжку $[l/2; l]$ функція $f_2(\tau)$ є не-

спадною. Таким чином, на проміжку $[0; l]$ функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ задовольняють умови теореми Діріхле і після продовження парним чином на проміжок $[-l; 0]$ ці функції можна розкласти в ряд Фур'є вигляду

$$f_r(\tau) = \frac{1}{2} D_0^{(r)} + \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{(r)} \cos v_k \tau, \quad 0 \leq \tau \leq l, \quad r = 1, 2, \quad (6)$$

де

$$D_k^{(r)} = \frac{2}{l} \int_0^l f_r(\tau) \cos v_k \tau \, d\tau, \quad v_k = k \frac{\pi}{l}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (7)$$

В [1] показано, що всі коефіцієнти ряду (6) для функції $f_1(\tau)$ є невід'ємними. Доведемо, що таку саму властивість мають коефіцієнти ряду (6) для функції $f_2(\tau)$. Розкладемо функцію $f_2(\tau)$ в ряд Фур'є і оцінимо значення коефіцієнтів $D_k^{(2)}, k = 0, 1, \dots$. З умови А4 теореми 1 випливає нерівність $D_0^{(2)} \geq 0$. Розглянемо два випадки коефіцієнтів $D_k^{(2)}$ з непарними і парними номерами.

Випадок 1: k – непарне число. Позначимо $k = 2p - 1, p \in N$. Для коефіцієнтів $D_k^{(2)}, k = 0, 1, \dots$, з (7) виводимо

$$D_k^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(\tau) \cos v_k \tau \, d\tau = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} f_2(\tau) \cos v_k \tau \, d\tau + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l f_2(\tau) \cos v_k \tau \, d\tau = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} [f_2(\tau) + (-1)^k f_2(l - \tau)] \cos v_k \tau \, d\tau.$$

Звідси, враховуючи властивість (5) і непарність числа k , отримуємо $D_{2p-1}^{(2)} = 0, p \in N$.

Випадок 2: k – парне число. Позначимо $k = 2p, p \in N$. Після інтегрування частинами, з (7) знаходимо:

$$\begin{aligned} D_k^{(2)} &= \frac{2}{l} \int_0^l f_2(\tau) \cos v_k \tau \, d\tau = \frac{2}{l} \int_0^l f_2(\tau) d \frac{\sin v_k \tau}{v_k} = -\frac{2}{l} \int_0^l f_2'(\tau) \frac{\sin v_k \tau}{v_k} \, d\tau = \\ &= -\frac{2}{l v_k^2} \int_0^{k\pi} f_2' \left(\frac{z}{v_k} \right) \sin z \, dz = -\frac{2}{l v_k^2} \sum_{j=1}^k \int_{(j-1)\pi}^{j\pi} f_2' \left(\frac{z}{v_k} \right) \sin z \, dz = \frac{2}{l v_k^2} \int_0^{\pi} S_k(\theta) \sin \theta \, d\theta, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$S_k(\theta) = \sum_{j=1}^k (-1)^j f_2' \left(\frac{\theta + (j-1)\pi}{v_k} \right) = \sum_{i=1}^p \left[f_2' \left(\frac{\theta + (2i-1)\pi}{v_k} \right) - f_2' \left(\frac{\theta + (2i-2)\pi}{v_k} \right) \right].$$

Оскільки функція $f_2'(\tau)$ є неспадною, то справджуються нерівності

$$f_2' \left(\frac{\theta + (2i-1)\pi}{v_k} \right) \geq f_2' \left(\frac{\theta + (2i-2)\pi}{v_k} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad i = \overline{1; p},$$

і функція $S_k(\theta)$ є невід'ємною. Отже, враховуючи (8), невід'ємними є й усі коефіцієнти $D_{2p}^{(2)}, p \in N$.

Таким чином, функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ розкладаються в ряд Фур'є з невід'ємними коефіцієнтами і однаковими частотами v_k , а отже згідно (2) їх сума – функція $f(\tau)$ має ту саму властивість, тобто розкладається в ряд Фур'є з невід'ємними коефіцієнтами, тобто належить до класу можливих кореляційних функцій СВП з дискретним спектром. Теорему 1 доведено.

Для пошуку функцій $f(\tau)$, які задовольняють умови теореми 1, можна використати наступну теорему.

Теорема 2. Нехай функція $f(\tau)$ визначена на проміжку $[0; l]$ і має такі властивості:

- С1. є неперервною; має кусково-неперервні першу і другу похідні, похідна $f'(\tau)$ є неспадною;
- С2. справджується нерівність

$$\int_{l/2}^l f(\tau) \, d\tau \geq 0; \quad (9)$$

С3. для довільного $\tau \in [0; l/2]$ виконуються співвідношення:

$$1) f(\tau) \geq f(l - \tau), \quad 2) f'(\tau) \leq f'(l - \tau), \quad 3) f''(\tau) \geq f''(l - \tau). \quad (10)$$

Тоді функція $f(\tau)$ може бути кореляційною функцією деякого СВП з дискретним спектром.

Доведення. Функцію $f(\tau)$ подамо у вигляді (2), поклавши

$$f_1(\tau) = \begin{cases} f(\tau) - f(l - \tau), & 0 \leq \tau \leq l/2, \\ 0, & l/2 < \tau \leq l, \end{cases} \quad f_2(\tau) = \begin{cases} f(l - \tau), & 0 \leq \tau \leq l/2, \\ f(\tau), & l/2 < \tau \leq l. \end{cases} \quad (11)$$

Покажемо, що функції $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ задовольняють умови теореми 1. З виразу (11) для функції $f_1(\tau)$ і умови С1 теореми 2 випливає, що функція $f_1(\tau)$ є неперервною, має кусково-неперервні першу і другу похідні, і на проміжку $[0; l]$ майже всюди справджуються рівності

$$f_1'(\tau) = \begin{cases} f_1''(\tau) + f_1''(l-\tau), & 0 \leq \tau \leq l/2, \\ 0, & l/2 < \tau \leq l, \end{cases} \quad f_1''(\tau) = \begin{cases} f_1''(\tau) - f_1''(l-\tau), & 0 \leq \tau \leq l/2, \\ 0, & l/2 < \tau \leq l. \end{cases}$$

Враховуючи нерівності 2), 3) в (10), отримуємо нерівність для першої похідної $f_1'(\tau) \leq 0$, тобто на проміжку $[0; l]$ функція $f_1(\tau)$ не зростає, та нерівність для другої похідної $f_1''(\tau) \geq 0$, тобто на проміжку $[0; l]$ похідна $f_1'(\tau)$ є неспадною. З формули (11) для функції $f_1(\tau)$ і нерівності 1) в (10) випливає, що всюди на проміжку $[0; l]$ функція $f_1(\tau)$ є невід'ємною і задовольняє (3). Отже, усі умови теореми 1 щодо функції $f_1(\tau)$ виконуються.

Перевіримо тепер, чи виконуються умови теореми 1 щодо функції $f_2(\tau)$. З формули (11) для функції $f_2(\tau)$ переконаємось, що функція $f_2(\tau)$ задовольняє (4). Тоді з умов С1 теореми 2 встановлюємо, що при $0 \leq \tau \leq l$ функція $f_2(\tau)$ є неперервною і має кусково-неперервні першу і другу похідні, для яких на проміжку $[0; l]$ майже всюди справджуються рівності

$$f_2'(\tau) = \begin{cases} -f_2'(l-\tau), & 0 \leq \tau \leq l/2, \\ f_2'(\tau), & l/2 < \tau \leq l, \end{cases} \quad f_2''(\tau) = \begin{cases} f_2''(l-\tau), & 0 \leq \tau \leq l/2, \\ f_2''(\tau), & l/2 < \tau \leq l. \end{cases}$$

Звідси з умови С1 теореми 2 випливає нерівність $f_2''(\tau) \geq 0$, тобто похідна $f_2'(\tau)$ є неспадною. Інтегруючи функцію $f_2(\tau)$, встановлюємо:

$$\int_0^l f_2(\tau) d\tau = \int_0^{l/2} f_2(l-\tau) d\tau + \int_{l/2}^l f_2(\tau) d\tau = 2 \int_0^{l/2} f_2(\tau) d\tau.$$

Зважаючи на нерівність (9), звідси виводимо, що $\int_0^l f_2(\tau) d\tau \geq 0$, тобто функція $f_2(\tau)$ задовольняє умову (4). Отже усі умови теореми 1 щодо функції $f_2(\tau)$ виконуються.

Таким чином, функція $f(\tau) = f_1(\tau) + f_2(\tau)$ задовольняє усі умови теореми 1 і належить до класу кореляційних функцій СВП з дискретним спектром. Теорему 2 доведено.

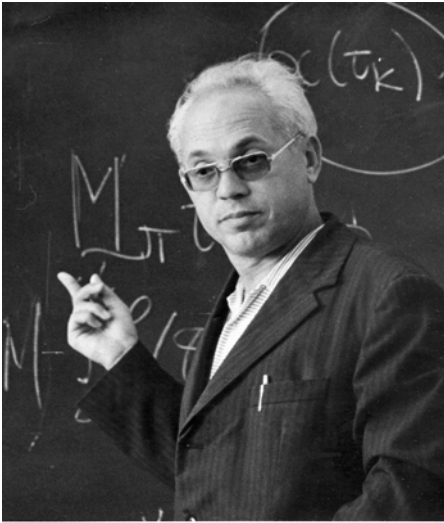
3. Висновки

Сформульовано і доведено теореми, які дозволяють розширити попередні уявлення про функціональні властивості кореляційних функцій СВП із дискретним спектром. З'ясовано, що протягом півперіоду $[0, l]$ ці функції можуть бути немонотонними. Встановлено нові геометричні властивості графіка кореляційної функції $y = f(\tau)$ на основному півперіоді $[0, l]$, а саме:

- 1) на півперіоді $[0, l]$ крива $y = f(\tau)$ є неперервною і опуклою донизу;
- 2) на проміжку $[0, l/2]$ ця крива не зростає, а на проміжку $[l/2, l]$ – не спадає;
- 3) дотична до графіка $y = f(\tau)$, $0 < \tau \leq l/2$, має властивість: у рівновіддалених від кінців відрізка $[0, l]$ точках $\tau, l-\tau$, довжина відрізка дотичної від точки дотику $(\tau; f(\tau))$ до точки перетину з прямою $\tau = 0$ завжди є не меншою за довжину відрізка дотичної від точки дотику $(l-\tau; f(l-\tau))$ до точки перетину з прямою $\tau = l$.

1. Кільчинський О. О., Скрипка В. І. Про кореляційну функцію стаціонарного випадкового процесу з дискретним спектром // Збірник наукових праць ДЕТУТ. Серія "Транспортні системи і технології". – 2009. – Вип. 15. – С. 130–133. 2. Коваленко І. Н., Кузнецов І. Ю., Шуренков В. Н. Случайные процессы. Справочник. – К.: Наук. думк., 1983. – 366 с.

АНАТОЛІЙ ВОЛОДИМИРОВИЧ СКОРОХОД (10.09.1930 – 03.01.2011)



Анатолій Володимирович Скороход народився у місті Нікополі Дніпропетровської області в сім'ї вчителів – батько викладав у школі математику, фізику і астрономію, мати – історію, літературу, математику. Тож з раннього дитинства Анатолій і його молодший брат Валерій виховувались в любові до знань, природи та книг. Шкільне життя Анатолія розпочалося у місті Марганець, але навчання було перерване у воєнні роки, тож значна увага освіти приділялась вдома. У 1946 році сім'я тимчасово переїхала на Волинь у місто Ковель, рятуючись від голоду на Наддніпрянщині. Тут у 1948 році А. В. Скороход закінчив середню школу і того ж року вступив до Київського державного університету ім. Т. Г. Шевченка на механіко-математичний факультет.

На старших курсах під керівництвом академіка АН УРСР Бориса Володимировича Гнеденка і доцента Йосипа Ілліча Гіхмана (згодом – члена-кореспондента Академії наук України та близького друга і колеги А. В. Скорохода по спільній роботі) юнак активно включається в наукову роботу в області теорії ймовірностей. Він одночасно успішно працює над розв'язанням декількох складних проблем. Закінчуючи університет (1953 рік), А. В. Скороход був автором п'яти наукових праць, три з них були опубліковані в провідних журналах "Успехи математических наук", "Доклады АН СССР", дві – у збірнику наукових праць студентів Київського уні-

верситету. Варто також зауважити, що дві з цих ранніх наукових праць А. В. Скорохода вже у 1961 році були перекладені англійською мовою і видані у США в збірнику "Selected Translations on Mathematical Statistics and Probability". По закінченню університету А. В. Скороход навчається в аспірантурі під керівництвом професора Є. Б. Динкіна (Московський державний університет ім. М. В. Ломоносова, 1953–1956 роки).

Після свого повернення з Москви до Києва у 1957 році, А. В. Скороход почав викладати у Київському університеті, а з 1964 році перейшов на основну роботу до Інституту математики АН УРСР, очоливши там новостворений відділ теорії випадкових процесів. Проте зв'язки з кафедрою теорії ймовірностей і Київським університетом він ніколи не поривав. Працюючи на кафедрі за сумісництвом, він фактично виконував навантаження штатного професора: керував роботою наукового семінару, численних аспірантів, читав основні та спеціальні курси. "Процеси з незалежними приростами", "Процеси Маркова", "Стохастичні диференціальні рівняння", "Випадкові оператори", "Міри в гільбертових просторах" – ось далеко не повний перелік спеціальних курсів, прочитаних А. В. Скороходом для студентів кафедри теорії ймовірностей. Майже впродовж сорока років кожного року він читав нормативний курс "Теорія випадкових процесів". На основі багаторічного досвіду читання цього курсу був написаний підручник "Лекції з теорії випадкових процесів" (видавництво "Либідь", 1980 р.). Цей підручник в стислому вигляді містить відомості про основні класи випадкових процесів і дає яскраве уявлення про сучасний стан теорії випадкових процесів та їх застосування. В 1994 році цей підручник перевидано англійською мовою.

Важко переоцінити роль А. В. Скорохода в розвитку теорії ймовірностей у Київському університеті. Творча особистість Анатолія Володимировича, спілкування з ним впливали на його друзів, колег, учнів і студентів. Кожен доповідач на науковому семінарі, яким він керував, навіть у випадку суворої критики, одержував цінні поради для подальшої роботи. З самого початку роботи в університеті А. В. Скороход вирізнявся неординарністю свого підходу до побудови лекцій, його неперервна творча думка часто спонукала його до експромтів у доведеннях, що робило слухачів співучасниками творчого процесу. Його діалоги з доповідачами на наукових семінарах і в Київському університеті, і в Інституті математики, його вміння збагнути внутрішню суть проблеми, узагальнити її, визначити можливі слабкі місця в доведенні, побачити несподівані зв'язки з іншими проблемами – перетворили засідання семінарів у справжню творчу лабораторію і кожен, хто прагнув займатись наукою, намагався виступити перед А. В. Скороходом. Таким чином, Київська школа з теорії ймовірностей, яка створювалась на цих семінарах, є в значній мірі результатом його творчої активності. Під безпосереднім керівництвом А. В. Скорохода понад п'ятдесят молодих науковців захистили кандидатські дисертації, а 17 учнів стали докторами наук.

Значну увагу приділяв А. В. Скороход популяризації математичних знань серед молоді. Він виступав з численними науково-популярними лекціями, в тому числі і по телебаченню, восени кожного року відкривав своєю лекцією новий навчальний рік Університету юних математиків, ректором якого він був. У 80-х роках минулого століття він здійснив разом із співробітниками свого відділу ряд подорожей по Україні з метою популяризації математичних знань та імен видатних українських математиків. А. В. Скороходом написано низку підручників і науково-популярних книг, серед яких класичний, створений спільно з І. І. Гіхманом і М. Й. Ядренком університетський підручник з теорії ймовірностей і математичної статистики, та створений спільно з А. Я. Дороговцевим, Д. С. Сільвестровим і М. Й. Ядренком збірник задач з теорії ймовірностей. Всього А. В. Скороходом видано (самостійно і у співавторстві) 16 науково-популярних книг, які виховали смак до математики і до творчої діяльності у багатьох школярів і студентів.

А. В. Скорохода автор понад 300 статей, надрукованих у провідних наукових журналах, та 23 монографій (разом з перекладами – 45). Відзначимо тут лише деякі з цих монографій. У 1961 році вийшла в світ у видавництві Київського університету його перша книга "Исследования по теории случайных процессов", яка вже в 1965 році була перевидана у США. У 1964 році в московському видавництві "Наука" була опублікована його друга книга "Случайные процессы с независимыми приращениями". У 1965 році у тому ж видавництві разом з І. І. Гіхманом він видає ще одну книгу – "Введение в теорию случайных процессов" (654 с.), яка була перевидана у 1968 році у Польщі та у 1969 році – у США.

Наукова кар'єра А. В. Скорохода складалась надзвичайно успішно. Основні етапи його наукової кар'єри такі: доктор фізико-математичних наук, професор (1963 рік), член-кореспондент НАН України (1967 рік), академік НАН України (1985 рік), член Американської академії мистецтв і наук (2000 рік), лауреат Державних премій України в галузі науки і техніки (1982 і 2003 роки).

Перший цикл наукових праць, які принесли А. В. Скороходу широке визнання, присвячено граничним теоремам для випадкових процесів, що побудовані за сумами незалежних випадкових величин. Ці праці стали заключним етапом в серії спроб багатьох математиків узагальнити знаменитий принцип інваріантності Донскера на той випадок, коли граничним виступає довільний процес з незалежними приростами, не обов'язково неперервний. Вже в цьому циклі А. В. Скороход продемонстрував неабияку творчу силу, оригінальність мислення. Саме в цих працях, які до речі склали основу його кандидатської дисертації, були запропоновані і метод одного ймовірнісного простору, і кілька топологій в просторі функцій без розривів 2-го роду, одна з яких набула широкого застосування і носить тепер назву "топології Скорохода", а побудований ним топологічний простір – "простору Скорохода". Це були винайдені ним же інструменти, з допомогою яких він, йдучи новим (знайденим ним самим) шляхом, зумів дати вичерпні відповіді на всі запитання щодо узагальнення згаданого вище принципу інваріантності Донскера. Уже в цих працях А. В. Скороход виявив себе як послідовний прихильник прямих ймовірнісних методів розв'язування проблем теорії ймовірностей. Теорія стохастичних диференціальних рівнянь є найзначнішим розділом теорії ймовірностей, де панують прямі ймовірнісні методи, і цілком природньо, що саме вона привернула увагу А. В. Скорохода. Його прихід в цю теорію відзначився відразу кількома значними досягненнями, які вивели його в лідери в цій галузі науки. Згадаємо тут лише, як ефектно використав А. В. Скороход метод одного ймовірнісного простору для доведення існування розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь за припущення, що їх коефіцієнти є лише неперервними функціями, тобто можуть не задовольняти умову Ліпшиця. Притаманне науковій творчості А. В. Скорохода прагнення до розвитку конструктивних методів вивчення випадкових процесів сприяло розвитку багатьох новітніх методів у сучасній теорії ймовірностей.

Другим важливим напрямком розвитку теорії стохастичних диференціальних рівнянь, в якому праці А. В. Скорохода початку 60-х років були піонерськими, є рівняння, що описують процеси на многовидах з межею. Ці праці викликали надзвичайний інтерес в багатьох ймовірнісних центрах світу і стимулювали цілий ряд видатних досліджень проблеми конструювання згаданих процесів. Сам А. В. Скороход також мав нагоду повернутись до цієї проблеми (див. книгу "Стохастические уравнения для сложных систем", Наука, Москва, 1983). В цій же книзі А. В. Скороход повертається ще до однієї проблеми, якою він цікавився в другій половині 60-х років. Це проблема опису локальної структури всіх неперервних процесів Маркова або, скажімо, таких, які не мають розривів 2-го роду. Ще в 1966 році А. В. Скороход довів, що досить широкий клас неперервних процесів Маркова випадковою заміною часу зводиться до квазидифузійного процесу. У творчому доробку А. В. Скорохода є глибокі дослідження щодо гауссових мір у нескінченновимірних просторах, книги "Интегрирование в гильбертовом пространстве", "Случайные линейные операторы", а також написаний разом з Й. І. Гіхманом тритомник "Теория случайных процессов" – фундаментальна монографія, що охоплює тогочасний стан більшості розділів теорії випадкових процесів. Серед понять, які в ті роки ввів А. В. Скороход і які тепер стали робочим інструментом не тільки математиків, а й спеціалістів з фізики, поняття розширеного стохастичного інтегралу, поняття сильного (слабкого) випадкового лінійного оператора, поняття стохастичної напівгрупи. Перше із згаданих понять надзвичайно популярне в теперішній час і часто зустрічається в працях математиків (і фізиків!) як "інтеграл Скорохода". Що стосується поняття сильного випадкового лінійного оператора, то його А. В. Скороход використав для опису структури тих чи інших класів стохастичних напівгруп. Ці результати ввійшли до книг "Процессы с независимыми приращениями" (друге видання, "Наука", Москва, 1986) та "Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений" (Наукова думка, Київ, 1987). У цій другій книзі А. В. Скороход дав застосування стохастичних напівгруп до дослідження проблеми стійкості стохастичних систем.

У світовій науковій літературі з іменем А. В. Скорохода пов'язаний цілий ряд наукових термінів, означення яких дається у Wikipedia, серед них вже вище згадані Skorokhod space, Skorokhod topology, Skorokhod integral, а також його метод вкладення випадкового блукання в траєкторії вінерового процесу або його узагальнення – Skorokhod embedding problem, або Skorokhod representation problem, його дослідження, пов'язані з відбиттям випадкового процесу від межі даної області має назву Skorokhod reflection problem. Усталеними в науковій літературі є також терміни Skorokhod theorem, Skorokhod stochastic differential equation, тощо. Кожна із перелічених вище проблем, англійські назви яких подано вище, стала об'єктом досліджень і узагальнень не однієї сотні фахівців у різних країнах світу.

А. В. Скороход завжди виділявся незалежністю своїх суджень, своїх позицій, хоча це в роки тоталітарного режиму було досить небезпечно. У 1968 році за участь у виступі групи представників української інтелігенції на захист конституційних прав громадян А. В. Скороходу було заборонено читати лекції студентам, керувати аспірантами. Півтора десятиліття років йому відмовляли у виїзді за кордон для участі в наукових конференціях. А. В. Скороход з гідністю переніс обмеження своїх прав. У ті роки він говорив, що математика рятує його від життєвих негараздів. І дійсно, в період своєї п'ятнадцятирічної опали він працював особливо плідно. Відсутність же А. В. Скорохода на міжнародних наукових форумах породила думку серед зарубіжних вчених про те, що А. В. Скороход – це зібране ім'я радянських фахівців, які працюють в галузі теорії випадкових процесів, подібно до того, як група французьких вчених об'єдналася під іменем Бурбакі.

З 1993 року А. В. Скороход працював у Мічиганському університеті (м. Лансінг, штат Мічиган, США), не пориваючи наукових зв'язків з Інститутом математики НАН України. Його наукові праці останніх років пов'язані з дослідженням асимптотичної поведінки динамічних систем, які перебувають під впливом випадкових збурень. Результати цих досліджень склали основу монографії "Random perturbation methods with applications in science and engineering", написану у співавторстві з Хабібом Салехі і Франком Хоппенштедтом (Springer, 2002, Ser. Appl. Math. Sci., № 150).

ІГОР БОРИСОВИЧ РОМАНЕНКО
(28.04.1975 – 09.02.2011)



9 лютого 2011 року після тривалої тяжкої хвороби не стало доцента кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету, кандидата фізико-математичних наук, доцента, лауреата премії Президента України для молодих вчених Ігоря Борисовича Романенка.

І. Б. Романенко народився 28 квітня 1975 року у Києві. Ще під час навчання у школі Ігор виявив здібності до математики, фізики, хімії, літератури. Після закінчення середньої школи у 1992 році він вступив на механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка, згодом спеціалізувався по кафедрі математичної фізики. Викладачі факультету пам'ятають І. Б. Романенка як старанного і сумлінного студента – він вважався одним з найкращих студентів курсу.

У 1997 році після закінчення з відзнакою механіко-математичного факультету Ігоря запросили на викладацьку роботу – він почав працювати асистентом кафедри математичної фізики і вступив до аспірантури Інституту математики НАН України (без відриву від виробництва), де під керівництвом академіка НАН України І. В. Скрипника в 2001 році успішно захистив кандидатську дисертацію на тему "Топологічні характеристики загальних нелінійних параболічних задач".

Працюючи на кафедрі математичної фізики спочатку асистентом, а потім з 2003 року – доцентом, Ігор Борисович сумлінно ставився до своїх обов'язків і за коротких час став одним з провідних викладачів кафедри математичної фізики. Він проводив практичні заняття з нормативних курсів "Інформатика і програмування", "Практикум з ЕОМ", "Комплексний аналіз", "Рівняння математичної фізики", "Методи обчислень", читав лекції з курсу "Комплексний аналіз", викладав для студентів кафедри математичної фізики низку спеціальних курсів лекцій, згодом розробив і викладав для магістрів механіко-математичного факультету нормативні курси лекцій "Диференціальні рівняння з частинними похідними", "Узагальнені функції в математичній фізиці" "Векторний аналіз і теорія поля" та проводив практичні заняття з цих курсів. І. Б. Романенко вів плідну методичну роботу – його перу належить 5 навчальних посібників і 9 науково-методичних розробок з комплексного аналізу та математичної фізики для студентів механіко-математичного факультету, 12 методичних праць з елементарної математики для учнів загальноосвітніх шкіл.

Неабиякий педагогічний хист і ґрунтовні знання з математики дозволяли Ігорю Борисовичу на високому рівні викладати навчальний матеріал. Як викладач доцент І. Б. Романенко був строгим, вимогливим і принциповим, він сильно переживав, коли студенти погано засвоювали матеріал, весь час намагався різними шляхами заохотити студентів до навчання. Незважаючи на свою строгість і вимогливість, Ігор Борисович був чуйною, співчутливою людиною і завжди намагався допомогти студентам у навчанні. І. Б. Романенко з великою повагою ставився абсолютно до усіх студентів, які у нього навчалися. Студенти поважали Ігоря Борисовича, любили його, хоча добре знали, що він нікому не давав поблажок.

Поважали І. Б. Романенка не тільки у студентських колах. Високий рівень підготовки, працюovitість, педагогічна майстерність, вимогливе і в той же час дружнє ставлення до студентів – все це дозволило Ігорю Борисовичу заслужити повагу серед колег кафедри і факультету, які вважали його висококваліфікованим викладачем і науковцем.

Незважаючи на значне педагогічне навантаження, Ігор Борисович продовжував вести плідні наукові дослідження – він активно працював над докторською дисертацією. Його наукові інтереси стосувалися теорії топологічних методів аналізу крайових задач для квазілінійних та нелінійних параболічних рівнянь високого порядку. У наукових працях І. Б. Романенка за допомогою аналізу топологічних характеристик типу степеня відображення, пов'язаного з досліджуваними рівняннями, вивчалася питання про єдиність і локальне існування розв'язку загальної крайової задачі для нелінійного параболічного диференціального рівняння довільного (парного) порядку, а за наявності апріорної оцінки розв'язку – існування його глобального розв'язку. Наукові результати Ігоря Борисовича мали конструктивний характер, оскільки дозволяли не лише отримати відповідь на питання про існування та єдиність розв'язку, а й побудувати наближені розв'язки досліджуваних задач, зокрема, в його працях доведено сильну збіжність послідовності гальоркінських наближень розв'язку нелінійної параболічної крайової задачі. Він автор 23 наукових статей.

Наукові результати І. Б. Романенка отримали високу оцінку – у 2009 році за цикл наукових праць "Дослідження розв'язків крайових задач для еліптичних і параболічних рівнянь у неканонічних областях" у складі авторського колективу І. Б. Романенку було присуджено премію Президента України для молодих вчених.

Ігор Борисович був неординарною особистістю. Ще в студентські роки багатогранна натура Ігоря Борисовича не дозволяла йому зосередитись виключно на навчанні. У цей час він починає захоплюватися туризмом, ходить із друзями у походи і сам їх організовує, залучає до свого захоплення багато молодих людей. А ще Ігор – один з лідерів команди КВК факультету, пише вірші, співає, грає на гітарі. Своїм захопленням він залишався вірним і після закінчення навчання в університеті – продовжував ходити у туристичні походи, плавати на байдарках, грати у КВК навіть тоді, коли став поважним викладачем.

Багатогранна натура, кипуча енергія, талант організатора і менеджера не дозволяли Ігорю Борисовичу обмежитися лише науковою та педагогічною діяльністю. Він намагався реалізовувати себе і в інших сферах життя. І це в нього гарно і вдало виходило. Майже відразу після приходу на роботу до університету Ігор Борисович організував навчальний центр, в якому школярі мали можливість глибше вивчати математику, інформатику і програмування. У цьому центрі працювали однокурсники Ігоря Борисовича і студенти факультету.

На жаль, реалії тих часів завадили цьому навчальному центру успішно розвиватися далі, але І. Б. Романенко на цьому не зупинився. Згодом він організував туристичну фірму "4 сторони" – своє захоплення туризмом Ігор Борисович поставив на професійну основу. Фірма займалася організацією туристичних маршрутів і походів як для початківців, так і для досвідчених туристів. На базі фірми працювали курси з підготовки інструкторів з туризму, одним з кращим серед яких був сам Ігор. Разом з Ігорем Борисовичем працювали його однодумці: колишні студенти факультету, друзі по студентських походах. Згодом, коли туристична фірма "4 сторони" вийшла на стабільний рівень діяльності, Ігор Борисович мабуть зрозумів, що вона не зможе дозволити реалізувати всі його творчі задуми. Властива математику здатність логічно мислити, аналізувати різноманітні ситуації, робити висновки дозволили І. Б. Романенку проявити себе і у фінансовій сфері. В останні роки свого життя Ігор Борисович активно займався вивченням і аналізом фінансової ситуації в Україні, він написав низку праць і підготував власні навчальні курси з основ фінансової діяльності, в яких виклав свої міркування стосовно фінансових ринків, можливостей інвестування коштів, організував компанію з навчання основ фінансової діяльності, проводив регулярні семінари, на яких обговорювалася економічна та фінансова ситуація в Україні.

На жаль, багатьом планам Ігоря Борисовича Романенка не довелося здійснитися.

Ігор був спокійним, стриманим і ввічливим у спілкуванні, гарним і надійним товаришем, на підтримку і допомогу якого завжди можна було розраховувати. Як співробітник кафедри він ніколи не ставив свої інтереси вище інтересів своїх колег, кафедри, факультету. Всі доручення – і з розробки нових курсів лекцій, і з рецензування дисертацій і навчальних посібників, і з оформлення кімнати засідань вченої ради факультету виконувалися ним добросовісно, на високому професійному рівні. Він допомагав багатьом молодим колегам по кафедрі підбирати матеріали для наукової роботи, нормативних і спеціальних курсів. Такі прохання Ігор зустрічав із розумінням і нікому не відмовляв у допомозі. Ігоря Борисовича любили.

І. Б. Романенко боровся з тяжкою хворобою до останніх днів, сподівався на одужання, ніколи не жалівся. Стороння людина не могла б подумати, що він тяжко хворий – хвороба ніяк не позначалася на виконанні ним своїх професійних обов'язків.

Світла пам'ять про Ігоря Борисовича, як гарного фахівця – викладача і науковця, колегу, прекрасну людину назавжди збережеться в наших серцях.

**Городній М. Ф., Парасюк І. О., Глущенко А. А., Самойленко В. Г., Мельник Т. А.,
Кириченко А. М., Данілов В. Я., Вакал Є. С., Довгий Б. П., Попов В. В.,
Обвінцев О. В., Ловейкін А. В., Верьовкіна Г. В., Самойленко Ю. І.,
Крєневич А. П., Бородін В. А., Парусімов Г. В., Попова Н. А., Рукавцова І. І.**

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ СТАТЕЙ

для авторів "Вісника Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка"

У "Віснику Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка" (далі - "Вісник") публікуються оригінальні статті з актуальних питань математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, математичної фізики, геометрії, топології, алгебри, теорії ймовірностей, теорії оптимального керування, теоретичної механіки, теорії пружності, механіки рідини та газу. Статті мають ґрунтуватися на матеріалах оригінальних наукових досліджень. Оглядові статті не приймаються. Питання про відповідність статті профілю видання вирішується редакційною колегією. Усі матеріали, які надходять до редколегії, рецензуються. У разі доопрацювання статті авторами на вимогу редакції (після рецензування) разом з переробленим текстом повертається перший варіант рукопису. При затримці автором понад один місяць первинна дата надходження не зберігається. Відхиливши рукопис, редакція повертає автору лише один примірник. Рішення щодо включення статті до випуску "Вісника" приймається редакційною колегією Вісника.

Після виходу у світ усі матеріали реферуються в "Zentralblatt MATH" (<http://www.emis.de/ZMATH>). Зміст випуску та анотації статей розміщено на Web-сторінці Вісника – <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/VisnykUniv>, а також на сайті Національної бібліотеки України імені В. І. Вернадського <http://www.nbuv.gov.ua/portal/Natural/VKNU/index.html>.

Загальні вимоги

До Редакційної колегії "Вісника" подається наступне:

- два примірники статті українською мовою, оформлені відповідно до вимог Видавничо-поліграфічного центру "Київський університет", як наведено нижче;
- експертний висновок за підписом керівника установи автора (якщо серед авторів є громадяни України);
- позитивна рецензія від установи, яку представляє автор (автори);
- електронний носій з текстом статті у форматі текстового редактора **MS WORD for Windows**. Текст на носії та друкований примірник мають бути ідентичними;

Вимоги до оформлення та якості друкованого примірника

Стаття має бути надрукована українською мовою з одного боку аркуша, на білому папері формату А4. Обсяг статті не має перевищувати восьми сторінок (разом із назвою, анотацією, формулами, таблицями, рисунками та списком літератури). Текст має бути чітким та однакового рівня чорного кольору. Кожний примірник має бути підписаний автором (авторами). Сторінки нумеруються олівцем на зворотному боці аркуша. Слід дотримуватися наступних умов щодо загального вигляду та розташування матеріалу статті:

- текст має бути поданий у вигляді файла формату **MS WORD for Windows (*.doc)** без застосування **стильової розмітки**;
- поля - "Верхнее" 2.54 см, "Нижнее" 2.0 см, "Левое" 1.8 см, "Правое" 1.8 см, "Переплет" 0 см, От края до колонтитула "Верхнего" 1.7 см, "Нижнего" 1.7 см.
- комп'ютерний набір тексту слід здійснювати за такими параметрами:
 - шрифт статті – Arial, розмір 9;
 - інтервал між рядками – одинарний;
 - перед і після назви статті та кожного її розділу має бути пропуск в один рядок;
 - відступ першого рядка кожного абзацу має дорівнювати 0.5 см;
- матеріали статті має бути поданий у такій послідовності:
 - індекс УДК (для природничих факультетів), (Arial, 8 pt, Bold);
 - перший ініціал, прізвище, учений ступінь (якщо він є) або посада (за відсутності вченого ступеня) кожного співавтора (між ініціалом і прізвищем ставити нерозривний інтервал; ця вимога поширюється й на прізвища, що наводяться в основному тексті статті), (Arial, 8 pt, напівжирний), адреса електронної пошти (Arial, 8 pt, курсив);
 - назва статті (українською, 5–9 слів, відповідна змісту статті, конкретна, без словосполучень на зразок "Дослідження питання...", "Деякі питання...", "Проблеми...", "Шляхи..." тощо), (Arial Black, 10 pt, звичайний);
 - анотація (українською та англійською, не більше 50 слів, із застосуванням безособових конструкцій на зразок "...отримано задовільні результати ..."); (Arial, 8 pt, напівжирний курсив); до англійського тексту має бути включено назву статті та прізвища і ініціали авторів;
 - основний повний текст статті (з таблицями та рисунками);
 - список літератури (Arial, 7 pt, звичайний);
 - дата надходження до редколегії, наприклад, "**Надійшла до редколегії 09.11.05**". (Arial, 7 pt, напівжирний, розрядка 1 pt, вирівняти по правому краю).

Додаткові вимоги до тексту статті:

- кожен аббревіатуру слід вводити в текст у дужках після першого згадування відповідного повного словосполучення; лише потім можна користуватися введеною аббревіатурою;
- джерела списку літератури подавати в тексті у квадратних дужках, наприклад [1], [1; 6]; при цитуванні конкретної сторінки – наводити після номера джерела, наприклад: [1, с. 5]; якщо вводиться в тих самих квадратних дужках ще джерело, то воно відокремлюється від попереднього крапкою з комою (наприклад, [4, с. 5; 8, с. 10–11]; **не подавати в тексті розгорнутих посилань!**, таких як: (Іванов А.П. Вступ до мовознавства. – К., 2000. – С. 54);
- усі цитати подавати мовою "Вісника" (незалежно від мови оригіналу), обов'язково супроводжуючи їх посиланнями на джерело та конкретну сторінку;
- не робити посторінкових посилань, а подавати їх у дужках безпосередньо в тексті;
- на всі таблиці й рисунки давати посилання в тексті статті;

- усі таблиці повинні мати заголовки (над таблицею, окремим абзацом тексту);
- усі рисунки мають супроводжуватися підписами (знизу від рисунка, окремим абзацом; підпис не має бути елементом рисунка!); шрифт написів рисунка: Arial, розмір – 8, напівжирний, якість рисунків повинна бути достатньою для відтворення тонких ліній, градацій відтінків при чорно-білому друці; редакція залишає за собою право вимагати поліпшення якості малюнків для отримання задовільної якості чорно-білого друку;
- формули у статтях набирати лише за допомогою редактора формул (Microsoft Equation чи MathType Equation), шрифт та розмір формул (настройки в MathType 4.0):

Define Style:		Define Size:	
Text	Times New Roman	Full	9 pt
Function	Times New Roman	Subscript/Superscript	7 pt
Variable	Times New Roman italic	Sub-Subscript/Superscript	6 pt
L.C.Greek	Symbol	Symbol	14 pt
UC.Greek	Symbol	Sub-Symbol	9 pt
Vector-matrix	Times New Roman bold		
Number	Times New Roman		

Літери **латинської абетки**, що позначають фізичні величини, подають **курсивом**, літери **грецької** – **прямим шрифтом**. Проте позначення деяких величин подають **прямим шрифтом** латинського алфавіту. До них, зокрема, належать позначення:

- чисел подібності – Bi (Біо), Ku (Кирпичова), Pe (Пекле), Re (Рейнолдса) та ін.;
- тригонометричних, гіперболічних, обернених, колових, обернених гіперболічних функцій;
- температури в кельвінах (K) або градусах Цельсія ($^{\circ}C$), Фаренгейта ($^{\circ}F$), Реомюра ($^{\circ}R$);
- умовних математичних скорочень максимуму й мінімуму (max , min), значення величин (opt), сталості величини ($const$, $idem$), знаків границь (Lim , lim), десяткових, натуральних логарифмів з будь-якою основою (lg , ln , log) та ін.;
- хімічних елементів і сполук.
- між числовим значенням і скороченою назвою одиниці виміру величини слід ставити нерозривний інтервал;
- термінологія статті має відповідати стандартам галузі науки та бути звірена зі спеціальними термінологічними словниками української мови.

Нумерація формули наскрізна по тексту статті, незалежно від розділів, і тільки у разі посилання на них у тексті.

Вимоги до складання списку літератури

Список літератури має бути укладений в алфавітному порядку за прізвищами авторів спочатку за кириличною абеткою, потім – латинською. Згідно із наказом Держспоживстандарту України від 10.11.06 № 3232 **при складанні списку літератури необхідно застосовувати національний стандарт, ідентичний ГОСТ 7.1.–2003** "Система стандартів з інформації, бібліотечної та видавничої справи. Бібліографічний запис. Бібліографічний опис. Загальні вимоги та правила складання". Не допускаються посилання на неопубліковані роботи.

Розбиття статті на розділи

Рекомендується розбиття статті на такі розділи: ВСТУП, МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ (для експериментальних робіт), РЕЗУЛЬТАТИ І ОБГОВОРЕННЯ, ВИСНОВКИ. Наявність розділів ВСТУП та ВИСНОВКИ є обов'язковими. Для теоретичних робіт допускається вільніше ділення матеріалу на розділи, наприклад, замість розділу МАТЕРІАЛИ І МЕТОДИ рекомендуються розділи ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ, МОДЕЛЬ і тому подібне. Розділи не нумеруються, в назвах розділів усі букви прописні і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. При необхідності розділи діляться на підрозділи. Назви підрозділів друкуються з великої літери і виділяються напівжирним шрифтом, вирівнювання по центру. Перед і після кожного розділу чи підрозділу має бути пропуск в один рядок.

Фонди, гранти

Наприкінці тексту статті після пропуску одного рядка, якщо потрібно, вказується назва фонду, який фінансував роботу, і номер гранту.

Застереження

Неприпустимим є:

- подання матеріалів з недотриманням правил, встановлених видавництвом, до параметрів видань;
- подання перекладів текстів за допомогою програм автоматичного перекладу;
- подання непідготовлених, недопрацьованих авторами "сирих" матеріалів.
- затримання авторами матеріалів, наданих видавництвом для вичитки.

Відомості про авторів

Відомості про авторів заносяться до тексту статті за наступним:

Відкрити меню MS WORD for Windows **ФАЙЛ>СВОЙСТВА**, обрати закладку **ДОКУМЕНТ** та заповнити поля **Назва**, **Автор**. У полі **Заметки** занести ім'я, прізвище, поштова адреса та контактні телефони авторів (робочий, мобільний, домашній – за власним вибором)

Невиконання авторами при оформленні рукопису цих правил є підставою для відхилення статті. Редакція звертає увагу авторів на необхідність додержання граматичних норм мови статті.

Наукове видання



ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МАТЕМАТИКА. МЕХАНІКА

Випуск 26

За авторською редакцією

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"
Виконавець Д. Ананьївський

Автори опублікованих матеріалів несуть повну відповідальність за підбір, точність наведених фактів, цитат, економіко-статистичних даних, власних імен та інших відомостей. Редколегія залишає за собою право скорочувати та редагувати подані матеріали. Рукописи та дискети не повертаються.



**Підписано до друку 08.06.10. Формат 60x84^{1/8}. Вид. № 195-1. Гарнітура Arial. Папір офсетний.
Друк офсетний. Наклад 500. Ум. друк. арк. 7,90. Обл.-вид. арк. 11,33. Зам. № 210-5264.**

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43,
☎ (38044) 239 32 22; факс (38044) 239 31 28.
E-mail: vydav_polygraph@univ.kiev.ua
WWW: <http://vpc.univ.kiev.ua>