Теорія ймовірностей
та математична статистика
Вип. 97, 2017, с. 188–195

Teoriya Ĭmovirnosteĭ
ta Matematychna Statystyka
No. 97, 2017, pp. 188–195

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ МОДЕЛІ ГАУССОВОГО ОДНОРІДНОГО ТА ІЗОТРОПНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ У ПРОСТОРІ $C(\mathbb{T})$

Н. В. ТРОШКІ

Анотація. Досліджено точність та надійність моделі однорідного та ізотропного випадкового поля у просторі $C(\mathbb{T})$.

Ключові слова і фрази. Гауссові випадкові поля, однорідні та ізотропні поля, моделювання, точність та надійність.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60G15; Secondary 60G07.

1. Вступ

Поряд із розвитком комп'ютерної техніки розвивається і комп'ютерне моделювання. Сьогодні чисельне моделювання випадкових процесів та полів широко застосовується в різних галузях природничих та соціальних наук, зокрема у метеорології, радіотехніці, соціології, фінансовій математиці, при випробуванні різних технічних систем. Комп'ютерне моделювання стало ефективним засобом, що дозволяє вникнути в суть природних явищ та передбачити наслідки діяльності людини і її впливу на навколишнє середовище. Цілий ряд методів моделювання випадкових процесів та полів розробили Г. О. Михайлов та його учні [12–16]. Г. О. Михайловим, зокрема, запропоновано і найбільш відомий метод моделювання стаціонарних процесів — метод розбиття та рандомізації спектра. Не менш вагомий внесок у розвиток моделювання зробили М. Й. Ядренко та його учні [17, 18, 22–24].

Поряд із побудовою моделей важливим питанням також є те, з якою точністю та надійністю запропонована модель наближає випадковий процес чи поле в певних метриках. Цим питанням присвячено ряд робіт Ю. В. Козаченка та його учнів [4–8, 11].

У цій роботі розглядається неперервне в середньому квадратичному, дійсне гауссове однорідне та ізотропне випадкове поле на $\mathbb{R}^2$. Як і в роботах [11, 20, 21] модель цього поля побудовано за допомогою модифікованого методу розбиття та рандомізації спектра, а зображення однорідного та ізотропного випадкового поля використано таке, яке було запропоновано М. Й. Ядренком у книзі [23].

Ця стаття є продовженням роботи [19]. Одним з основних результатів цієї роботи можна вважати те, що вперше оцінено ймовірність відхилення в рівномірній метриці моделі цього поля від самого поля, на компакті $\mathbb{T}$, а саме, знаходження оцінки для ймовірності

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{(t,x)\in\mathbb{T}}\left|X(t,x)-\widehat{X}(t,x)\right|>\varepsilon\right\},$$

де $X(t,x)$, $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ — поле, а $\widehat{X}(t,x)$ — його модель. Оцінку розподілу відхилення поля від його моделі в просторі $C(\mathbb{T})$ знайдено з використанням оцінок, отриманих у роботі [19]. Крім цього в даній роботі досліджено точність та надійність побудованої моделі.

Стаття складається з чотирьох розділів. У першому розділі обґрунтовано актуальність і новизну досліджень, та окреслено основні результати роботи. Другий розділ містить необхідні означення та попередні результати з теорії субгауссових випадкових величин, а також основні результати з роботи [19]. У третьому розділі знайдено оцінку ймовірності відхилення однорідного та ізотропного випадкового поля від його моделі, досліджено надійність та точність побудованої моделі у просторі $C(\mathbb{T})$. Підсумки роботи підведено в останньому, четвертому, розділі.

2. Необхідні відомості

Означення 2.1 [1]**.** Випадкову величину χ будемо називати субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathsf{E}\exp\{\lambda\chi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Простір усіх субгауссових випадкових величин, заданих на стандартному ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathbf{B}, \mathsf{P}\}$, будемо позначати $\mathrm{Sub}(\Omega)$. Простір $\mathrm{Sub}(\Omega)$ — простір Банаха з нормою $\tau(\chi) = \sup\limits_{\lambda \neq 0}\left[\frac{2\ln \mathsf{E}\exp\{\lambda\chi\}}{\lambda^2}\right]^{1/2}$.

Означення 2.2 [1]**.** Випадкове поле $X = \{X(u,v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ називається субгауссовим, якщо при всіх $u, v \in \mathbb{R}$ $X(u,v) \in \mathrm{Sub}(\Omega)$ та $\sup_{u,v\in\mathbb{R}} \tau(X(u,v)) < \infty$.

Означення 2.3 [23]**.** Випадкове поле $X = \{X(z), z \in \mathbb{R}^2\}$ називається однорідним у широкому розумінні в $\mathbb{R}^2$, якщо $\mathsf{E}\,X(z) = \mathrm{const}$, $z \in \mathbb{R}^2$ та

$$\mathsf{E}\,X(z)X(w) = B(z-w) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\lambda, z-w)}dF(\lambda), \quad z, w \in \mathbb{R}^2.$$

Означення 2.4 [23]**.** Нехай $SO(2)$ група обертань $\mathbb{R}^2$ навколо початку координат. Однорідне випадкове поле $X(z), z \in \mathbb{R}^2$, називається ізотропним, якщо для кожного елемента g із групи $SO(2)$ для будь-яких $z, w \in \mathbb{R}^2$ виконується співвідношення

$$\mathsf{E}\,X(z)X(w) = \mathsf{E}\,X(gz)X(gw).$$

Нехай $X = \{X(u,v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ — неперервне в середньому квадратичному, дійсне, гауссове, однорідне та ізотропне випадкове поле на $\mathbb{R}^2$. Будемо вважати, що $\mathsf{E}\,X(u,v) = 0$. Тоді легко отримати, подібно до того, як це робилось для комплексного поля у [23], таке зображення для $X(t,x)$, де (t,x) — полярні координати, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in [0, 2\pi]$:

$$X(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)\int_0^{\infty} J_k(t\lambda)d\eta_{1,k}(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\int_0^{\infty} J_k(t\lambda)d\eta_{2,k}(\lambda), \tag{1}$$

де $\eta_{i,k}(\lambda)$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots,$ — незалежні гауссові процеси з незалежними приростами, $\mathsf{E}\,\eta_{i,k}(\lambda) = 0$, $\mathsf{E}(\eta_{i,k}(b) - \eta_{i,k}(c))^2 = F(b) - F(c)$, $b > c$, $F(\lambda)$ — спектральна функція поля, $J_k(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k\varphi - u\sin\varphi)d\varphi$ — функція Бесселя першого роду, де $k = 1, 2, \ldots$

Побудуємо деяке розбиття $L = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_0 = 0$, $\lambda_l < \lambda_{l+1}$, $\lambda_{N-1} = \Lambda$, $\lambda_N = \infty$ та $C = \max_{0<l\leq N-2}\frac{\lambda_{l+1}}{\lambda_l} < \infty$.

За модель поля $X(t,x)$ будемо брати

$$\widehat{X}(t,x) = \sum_{k=1}^{M}\cos(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\eta_{1,k,l}J_k(t\zeta_l) + \sum_{k=1}^{M}\sin(kx)\sum_{l=0}^{N-1}\eta_{2,k,l}J_k(t\zeta_l), \tag{2}$$

де $\eta_{i,k,l}$, $i = 1, 2,$ — незалежні гауссові випадкові величини, $\eta_{i,k,l} = \int_{\lambda_l}^{\lambda_{l+1}} d\eta_{i,k}(\lambda)$ такі, що $\mathsf{E}\,\eta_{i,k,l} = 0$, $\mathsf{E}\,\eta_{i,k,l}^2 = F(\lambda_{l+1}) - F(\lambda_l) = b_l^2$, $b_l^2 > 0$, $\zeta_l, l = 0, \ldots, N-2,$ — незалежні випадкові величини, що не залежать від $\eta_{i,k,l}$ та розподілені на відрізках $[\lambda_l, \lambda_{l+1}]$ із функцією

$$F_l(\lambda) = \mathsf{P}\{\zeta_l < \lambda\} = \frac{F(\lambda) - F(\lambda_l)}{F(\lambda_{l+1}) - F(\lambda_l)},$$

$\zeta_{N-1} = \Lambda$. Якщо $b_l^2 = 0$, тоді $\zeta_l = 0$ з імовірністю одиниця. Для простоти вважатимемо, що $b_l^2 > 0$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$.

У роботі [20] показано, що випадкові поля $\widehat{X}(t,x)$ та $X(t,x) - \widehat{X}(t,x)$ є субгауссовими випадковими полями. Позначимо через

$$\chi_M(t,x) = X(t,x) - \widehat{X}(t,x), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le 2\pi, \tag{3}$$

а також розглянемо

$$\sigma_0 = \sup_{\substack{0 \le t \le T \\ 0 \le x \le 2\pi}} \tau\bigl(\chi_M(t,x)\bigr)$$

та

$$\sigma(h) = \sup_{\substack{|t-s| \le h \\ |x-y| \le h}} \tau\bigl(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y)\bigr),$$

де $0 \le t, s \le T$, $0 \le x, y \le 2\pi$.

Твердження 2.1 [19]. *Нехай $X(t,x)$ та $\widehat{X}(t,x)$ визначені в (1) та (2) відповідно, розбиття $L = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_l < \lambda_{l+1}$ та $\lambda_{l+1} - \lambda_l = \frac{\Lambda}{N-1}$, $l = 0, \ldots, N-2$, і нехай при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ інтеграл $\int_0^\infty \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) < \infty$. Тоді*

$$\sigma_0 \le \Biggl[\frac{4^{2(1-\alpha)+1} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha} M}{2\alpha - 1}\left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha} \times$$
$$\times \left(F(\Lambda) + \left(\frac{3T}{2}\right)^{2\alpha} \int_0^\Lambda \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right) + 8M^2\bigl(F(+\infty) - F(\Lambda)\bigr) +$$
$$+ \frac{2^{2(1-\alpha)+1} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha}}{(2\alpha - 1) M^{2\alpha-1}} \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\Biggr]^{\frac{1}{2}}.$$

Твердження 2.2 [19]. *Нехай $X(t,x)$ та $\widehat{X}(t,x)$ визначені в (1) та (2) відповідно,*

$$\sigma(h) = \sup_{\substack{|t-s| \le h \\ |x-y| \le h}} \tau\bigl(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y)\bigr),$$

де $\chi_M(t,x)$ задається як (3), розбиття $L = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_N\}$ множини $[0, \infty)$ таке, що $\lambda_l < \lambda_{l+1}$ та $\lambda_{l+1} - \lambda_l = \frac{\Lambda}{N-1}$ і нехай при $\nu > \frac{1}{2}$ інтеграл $\int_0^\infty \lambda^{2\nu} dF(\lambda) < \infty$. Тоді

$$\sigma(h) \le \frac{C_1}{\bigl(\ln\bigl(\frac{1}{h} + 1\bigr)\bigr)^{\delta}},$$

де

$$C_1 = \Biggl[2 \cdot 4^{2(2-\alpha)}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha}\frac{M}{2\alpha - 1}\left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right)\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha} \times$$
$$\times \left(F(\Lambda) + \left[\left(\frac{3T}{4}\right)^{2\alpha} + (1 + 2^{\alpha+1}) T^{2\alpha} + \left(\frac{3T^2\Lambda}{2}\right)^{2\alpha}\right] \int_0^\Lambda \lambda^{2\alpha} dF(\lambda)\right) +$$
$$+ 9 \cdot 4^{4-2\alpha} M^2 \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\left(\int_\Lambda^\infty |\lambda - \Lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) + 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}\bigl(F(+\infty) - F(\Lambda)\bigr)\right) +$$
$$+ 4^{4-2\alpha} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha} M \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\bigl(\ln\bigl(k^2 + e^{\delta}\bigr)\bigr)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\right)\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha} \times$$

$$\times\left(F(\Lambda)+\left(\frac{3T}{2}\right)^{2\alpha}\int_0^{\Lambda}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\right)+16M(F(+\infty)-F(\Lambda))\sum_{k=1}^{M}\left(\ln\left(k^2+e^{\delta}\right)\right)^{2\delta}+$$
$$+\frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)+(2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^{\infty}\lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right)+$$
$$+2^{4-\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\int_0^{\infty}\lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{\left(\ln\left(k^2+e^{\delta}\right)\right)^{2\delta}}{k^{2\alpha}}\Bigg]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$, $\frac{\alpha}{\delta}\le 1$, $\delta>0$ *та* $0<\beta\le 1$.

Означення 2.5. Нехай $\mathbb{T}=\{0\le t\le T,\ 0\le x\le 2\pi\}$. Випадкове поле $\widehat{X}(t,x)$ наближує гауссове поле $X(t,x)$ із надійністю $1-\gamma$, $0<\gamma<1$ та точністю $q>0$ у просторі $C(\mathbb{T})$, якщо існує таке розбиття L, що справджується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|X(t,x)-\widehat{X}(t,x)\right|>q\right\}\le\gamma.$$

Теорема 2.1. *Розглянемо* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}=\{t=(t_1,t_2):0\le t_i\le T, i=1,2\}$, $T>0$, $d(t,s)=\max_{1\le i\le 2}|t_i-s_i|$. *Нехай* $X=\{X(t),t\in\mathbb{T}\}$ *— субгауссове випадкове поле. Якщо* $\sup_{d(t,s)\le h}\tau\big(X(t)-X(s)\big)\le\sigma(h)$, *де* $\sigma(h)$ *— неперервна, монотонно спадна функція, така що* $\sigma(h)\to 0$ *при* $h\to 0$ *і* $\int_0^{\varepsilon_0}\sqrt{-\frac{1}{2}\ln\big(\sigma^{(-1)}(\varepsilon)\big)}\,d\varepsilon<\infty$, *де* $\varepsilon_0=$ $=\sup_{t\in\mathbb{T}}\big(\mathsf{E}|X(t)|^2\big)^{\frac{1}{2}}<\infty$ *і* $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ *— обернена функція до* $\sigma(\varepsilon)$.

Тоді $\mathsf{P}\{\sup_{t\in\mathbb{T}}|X(t)|>u\}\le 2\widetilde{A}(u,\theta)$ *для всіх* $0<\theta<1$ *і* $u>\frac{2\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$, *де*

$$\widetilde{A}(u,\theta)=\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(u(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)\right)^2\right\},$$
$$\widetilde{I}(v)=\int_0^{v}\left(2\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon.$$

Теорема 2.1 є частинним випадком теореми 8 з [10], див. також [9].

3. Основна частина

Теорема 3.1. *Нехай у моделі* $\widehat{X}(t,x)$ *розбиття* L *таке, що при* $q>\frac{2\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$, $0<\theta<1$ *виконується співвідношення*

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(q(1-\theta)-\frac{2}{\theta}\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)\right)^2\right\}\le\gamma,$$

де $\varepsilon_0=\sup_{0\le t\le T}\tau(\chi_M(t,x))=\sigma_0$, $\chi_M(t,x)$ *визначено у (3) та нехай* $\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)\le\widehat{I}(\theta\varepsilon_0)$, *тут*

$$\widehat{I}(\theta\varepsilon_0)=\int_0^{\theta\varepsilon_0}\sqrt{2\ln\left(\frac{T}{2}\left(\exp\left\{\left(\frac{C_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right\}-1\right)+1\right)}d\varepsilon,$$

C_1 *задано формулою (4),* $T>2\pi$, $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$, $\frac{\alpha}{\delta}\le 1$, $\delta>0$, $0<\beta\le 1$ *та* $\nu>\frac{1}{2}$.

Тоді модель $\widehat{X}(t,x)$ *наближає гауссове випадкове поле* $X(t,x)$ *із надійністю* $1-\gamma$, $0<\gamma<1$ *та точністю* $q>0$ *у просторі* $C(\mathbb{T})$.

Доведення. Згідно з теоремою 2.1 при $q > \frac{2\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)}{\theta(1-\theta)}$, $0 < \theta < 1$, для $\chi_M(t,x)$ виконується нерівність

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t\in\mathbb{T}}|\chi_M(t,x)| > q\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(q(1-\theta) - \frac{2}{\theta}\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)\right)^2\right\},$$

де

$$\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0) = \int_0^{\theta\varepsilon_0}\left(2\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)} + 1\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\varepsilon, \quad \sigma(h) = \sup_{\substack{|t-s|\le h\\|x-y|\le h}}\tau\big(\chi_M(t,x) - \chi_M(s,y)\big).$$

Із твердження 2.2 для $\sigma(h)$ маємо

$$\sigma^{(-1)}(h) = \frac{1}{\exp\left\{\left(\frac{C_1}{h}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right\} - 1},$$

де $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, $\frac{\alpha}{\delta} \le 1$, $\delta > 0$, $0 < \beta \le 1$, $\nu > \frac{1}{2}$ та C_1 визначено в (4). Тоді

$$\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0) \le \int_0^{\theta\varepsilon_0}\sqrt{2\ln\left(\frac{T}{2}\left(\exp\left\{\left(\frac{C_1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right\} - 1\right) + 1\right)}d\varepsilon = \widehat{I}(\theta\varepsilon_0),$$

яке можна зробити як завгодно малим при певному підборі M, Λ та N. А саме, при заданій точності та надійності вибираємо M таким чином, щоб п'ятий та шостий доданки в (4) були як завгодно малими. Далі, врахувавши отримане значення M, вибираємо Λ так, щоб малими були доданки два та чотири з (4). І насамкінець, врахувавши значення M та Λ, вибираємо N таким чином, щоб доданки один та три в (4) були як завгодно малими. Зазначимо, що при такому виборі M, Λ та N як завгодно малим буде не тільки C_1, але і ε_0, яке визначене в твердженні 2.1. Тобто існує таке розбиття L, для якого справджується

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(q(1-\theta) - \frac{2}{\theta}\widetilde{I}(\theta\varepsilon_0)\right)^2\right\} \le \gamma.$$

А це разом із означенням 2.5 означає, що побудована модель $\widehat{X}(t,x)$ наближає поле $X(t,x)$ із надійністю $1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$ та точністю $q > 0$ у просторі $C(\mathbb{T})$. □

Приклад. Розглянемо модель $\widehat{X}(t,x)$ гауссового однорідного та ізотропного випадкового поля, зображення якої задано в (2). Для цієї моделі покладемо

$$F(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\lambda^4}, & \text{при } \lambda \ge 1,\\ 0, & \text{при } \lambda < 1. \end{cases}$$

Оцінимо величини C_1 та ε_0. Для цього подамо їх у вигляді

$$C_1 = (C_I + C_{II} + C_{III})^{\frac{1}{2}},$$

де

$$C_I = \frac{4^{3-2\alpha}\pi^{2\alpha}}{(2\alpha-1)M^{2\alpha-1}}\left(\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda) + (2T)^{2\alpha}\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^{2\delta}\int_0^\infty \lambda^{2\nu}dF(\lambda)\right) +$$
$$+ 2^{4-\alpha}T^{2\alpha}\pi^{2\alpha}\int_0^\infty \lambda^{2\alpha}dF(\lambda)\sum_{k=M+1}^\infty \frac{\big(\ln\big(k^2+e^\delta\big)\big)^{2\delta}}{k^{2\alpha}},$$

$$C_{II} = 9\cdot 4^{4-2\alpha} M^2 \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta} \left(\int_{\Lambda}^{\infty} |\lambda - \Lambda|^{2\alpha} dF(\lambda) + 2^{2\alpha}\Lambda^{2\alpha}\big(F(+\infty) - F(\Lambda)\big) \right) +$$
$$+ 16M\big(F(+\infty) - F(\Lambda)\big) \sum_{k=1}^{M} \big(\ln\big(k^2 + e^{\delta}\big)\big)^{2\delta},$$
$$C_{III} = 2\cdot 4^{2(2-\alpha)} \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{2\delta} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\alpha} \frac{M}{2\alpha - 1} \left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right) \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha} \times$$
$$\times \left(F(\Lambda) + \left[\left(\frac{3T}{4}\right)^{2\alpha} + (1 + 2^{\alpha+1})T^{2\alpha} + \left(\frac{3T^2\Lambda}{2}\right)^{2\alpha} \right] \int_0^{\Lambda} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right) +$$
$$+ 4^{4-2\alpha} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha} M \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\big(\ln\big(k^2 + e^{\delta}\big)\big)^{2\delta}}{k^{2\alpha}} \right) \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha} \times$$
$$\times \left(F(\Lambda) + \left(\frac{3T}{2}\right)^{2\alpha} \int_0^{\Lambda} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right),$$

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})^{\frac{1}{2}},$$

де

$$\varepsilon_I = \frac{2^{2(1-\alpha)+1} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha}}{(2\alpha - 1) M^{2\alpha-1}} \int_0^{\infty} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda),$$
$$\varepsilon_{II} = 8M^2\big(F(+\infty) - F(\Lambda)\big),$$
$$\varepsilon_{III} = \frac{4^{2(1-\alpha)+1} T^{2\alpha} \pi^{2\alpha} M}{2\alpha - 1} \left(2\alpha - \frac{1}{M^{2\alpha-1}}\right) \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^{2\alpha} \times$$
$$\times \left(F(\Lambda) + \left(\frac{3T}{2}\right)^{2\alpha} \int_0^{\Lambda} \lambda^{2\alpha} dF(\lambda) \right).$$

Виберемо $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\delta = 1$, $\nu = \frac{3}{2}$, $T = 1$, тоді після перетворень отримаємо

$$C_I = \frac{784\pi^2}{3M} + 16\pi^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{\big(\ln(k^2 + e)\big)^2}{k^2},$$
$$C_{II} = \frac{336M^2}{\Lambda^2} + \frac{16M}{\Lambda^4} \sum_{k=1}^{M} \big(\ln\big(k^2 + e\big)\big)^2,$$
$$C_{III} = 8\pi^2(2M - 1)\left(\frac{\Lambda}{N-1}\right)^2 \left(\frac{9}{2}\Lambda^2 - \frac{89}{8\Lambda^2} - \frac{1}{\Lambda^4} + \frac{61}{8}\right) +$$
$$+ 16\pi^2 M \left(\frac{\Lambda}{N-1}\right) \left(\frac{11}{2} - \frac{9}{2\Lambda^2} - \frac{1}{\Lambda^4}\right) \sum_{k=1}^{M} \frac{\big(\ln\big(k^2 + e\big)\big)^2}{k^2}.$$

Виберемо точність та надійність, з якими наша модель наближатиме випадкове поле, а саме $q = 0,06$, $1 - \gamma = 0,99$. Крім цього, нехай $\theta = \frac{1}{2}$. Тоді з теореми 3.1 отримаємо

$$2\exp\left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} \left(0,06 \cdot \frac{1}{2} - 4\widehat{I}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right) \right)^2 \right\} \le 0,01,$$

де

$$\widehat{I}\Big(\frac{\varepsilon_0}{2}\Big) = \int_0^{\frac{\varepsilon_0}{2}} \sqrt{2\ln\bigg(\frac{1}{2}\bigg(\exp\bigg\{\bigg(\frac{C_1}{\varepsilon}\bigg)\bigg\} - 1\bigg) + 1\bigg)}d\varepsilon = \\ = \int_0^{\frac{\varepsilon_0}{2}} \sqrt{2\ln\bigg(\frac{1}{2}\exp\bigg\{\frac{C_1}{\varepsilon}\bigg\} + \frac{1}{2}\bigg)}d\varepsilon,$$

тобто

$$2\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(0,03 - 4\int_0^{\frac{\varepsilon_0}{2}} \sqrt{2\ln\bigg(\frac{1}{2}\exp\bigg\{\frac{C_1}{\varepsilon}\bigg\} + \frac{1}{2}\bigg)}d\varepsilon\right)^2\right\} \le 0,01.$$

За допомогою наближених чисельних методів одержимо таке: для $\widehat{C}_1 = 15{,}79$ та $\hat{\varepsilon}_0 = 0,97$ ця нерівність справджується, тобто ми отримали, що

$$(C_I + C_{II} + C_{III})^{\frac{1}{2}} \le \widehat{C}_1$$

та

$$(\varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III})^{\frac{1}{2}} \le \hat{\varepsilon}_0.$$

Не зменшуючи загальності, покладемо $C_I \le \frac{\widehat{C}_1^2}{3}$, $C_{II} \le \frac{\widehat{C}_1^2}{3}$, $C_{III} \le \frac{\widehat{C}_1^2}{3}$ та $\varepsilon_I \le \frac{\hat{\varepsilon}_0^2}{3}$, $\varepsilon_{II} \le \frac{\hat{\varepsilon}_0^2}{3}$, $\varepsilon_{III} \le \frac{\hat{\varepsilon}_0^2}{3}$.

Розв'язавши нерівності для C_I та ε_I відносно M, отримаємо два значення для M, із цих значень вибираємо максимальне. Врахувавши обране значення M, розв'язуємо нерівності для C_{II} та ε_{II} відносно Λ та вибираємо максимальне з них. Підставивши знайдені значення M та Λ в нерівності для C_{III} та ε_{III}, аналогічно обчислюємо значення N.

За допомогою відповідних програмних пакетів можна знаходити значення всіх необхідних величин і будувати модель гауссового однорідного та ізотропного поля.

4. Висновки

Ця робота завершує дослідження, розпочаті в роботі [19]. Тут знайдено оцінки відхилення однорідного та ізотропного випадкового поля від його моделі в метриці простору $C(\mathbb{T})$ і цим самим досліджено точність та надійність моделі, побудованої модифікованим методом розбиття та рандомізації спектра.

Список літератури

1. V. Buldygin, Yu. Kozachenko, *Metric characterization of random variables and random processes*, AMS, Providence, RI, 2000.
2. R. Guiliano Antonini, Yu. Kozachenko, T. Nikitina, *Spaces of φ-sub-Gaussian random variables*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl., **27** (2003), 95–124.
3. B. V. Dovhai, Yu. V. Kozachenko, H. I. Slyvka-Tylyshchak, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics with Random Factors*, Kiev University, 2008. (Ukrainian)
4. Yu. V. Kozachenko, L. F. Kozachenko, *Simulation accuracy of stationary Gaussian stochastic processes in $L^2(0,T)$*, J. Math. Sci., **72** (1994), no. 3, 3137–3143.
5. Yu. V. Kozachenko, A. O. Pashko, *The accuracy of modeling random processes in norms of Orlicz spaces. I*, Theory Probab. Math. Statist., **58** (2000), 51–66.
6. Yu. V. Kozachenko, A. O. Pashko, I. V. Rozora, *Modeling of Random Processes and Fields*, Zadruga, Kyiv, 2007. (Ukrainian)
7. Yu. V. Kozachenko, O. O. Pogoriliak, A. M. Tegza, *Modelling of Gaussian Random Processes and Cox Processes*, Karpaty, Uzhgorod, 2012. (Ukrainian)
8. Y. Kozachenko, O. Pogorilyak, I. Rozora, A. Tegza, *Simulation of Stochastic Processes with Given Accuracy and Reliability*, ISTE Press, London, Elsevier, Oxford, 2016.
9. Yu. V. Kozachenko, G. I. Slyvka, *Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions*, Theory Probab. Math. Statist., **69** (2004), 67–83.

10. Y. Kozachenko, A. Slyvka-Tylyshchak, *The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space* $\mathrm{Sub}_{\varphi}(\Omega)$, Applied Mathematics, **5** (2014), 2318–2333.
11. Yu. V. Kozachenko, N. V. Troshki, *Accuracy and reliability of a model of Gaussian random process in* $C(\mathbb{T})$ *space*, Int. J. Stat. Manag. Syst., **10** (2015), no. 1–2, 1–15.
12. G. A. Mikhailov, *Modeling random processes and fields with the help of Palm processes*, Doklady AN SSSR, **262** (1982), no. 3, 531–535. (Russian)
13. G. A. Mikhailov, *Some Questions of the Theory of Monte Carlo Methods*, Nauka, Novosibirsk, 1974. (Russian)
14. G. A. Mikhailov, K. K. Sabelfeld, *On numerical simulation of impurity diffusion in stochastic velocity fields*, Izvestiya AN SSSR Ser. Physics, **16** (1980), no. 3, 229–235. (Russian)
15. G. A. Mikhailov, *Approximate models of random processes and fields*, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., **23** (1983), no. 3, 558–566. (Russian)
16. G. A. Mikhailov, A. V. Voytishek, *Numerical Statistical Modeling*, Akademia, Moscow, 2006. (Russian)
17. A. Olenko, T. Pogány *Direct Lagrange-Yen type interpolation of random fields*, Theory Stoch. Process., **9(25)** (2003), no. 3–4, 242–254.
18. A. Olenko, T. Pogány *On sharp Bbounds for remainders in multidimensional sampling theorem*, Sampl. Theory Signal Image Process., **6** (2007), no. 3, 249–272.
19. N. V. Troshki, *Upper bounds for supremums of the norms of the deviation between a homogeneous isotropic random field and its model*, Theor. Probab. Math. Statist., **94** (2017), 159–184.
20. N. V. Troshki, *Accuracy and reliability of a model for a Gaussian homogeneous and isotropic random field in the space* $L_p(\mathbb{T})$, $p \geq 1$, Theory Probab. Math. Stat., **90** (2015), 183–200.
21. N. Troshki, *Construction models of Gaussian random processes with a given accuracy and reliability in* $L_p(\mathbb{T}), p \geq 1$, J. Classical Anal., **3** (2013), no. 2, 157–165.
22. Z. O. Vyzhva, *On approximation of 3-D isotropic random fields on the sphere and statistical simulation*, Theory Stoch. Process., **3** (1997), no. 3–4, 463–467.
23. M. I. Yadrenko, *Spectral Theory of Random Fields*, Optimization Software, Publications Division, New York, 1983.
24. M. I. Yadrenko, A. K. Rakhimov, *Statistical simulation of a homogeneous isotropic random field on the plane and estimations of simulation errors*, Theory Probab. Math. Stat., **49** (1994), 177–181.

Кафедра теорії ймовірностей та математичного аналізу, математичний факультет, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», вул. Університетська, 14, м. Ужгород, Україна, 88000

Адреса електронної пошти: FedoryanichNatali@ukr.net

Стаття надійшла до редколегії 16.08.2016

ACCURACY AND RELIABILITY OF A MODEL OF A GAUSSIAN HOMOGENEOUS AND ISOTROPIC RANDOM FIELD IN THE SPACE $C(\mathbb{T})$

N. V. TROSHKI

Abstract. In this paper we studied accuracy and reliability of a model of a homogeneous and isotropic random field in the space $C(\mathbb{T})$.

ТОЧНОСТЬ И НАДЁЖНОСТЬ МОДЕЛИ ГАУССОВОГО ОДНОРОДНОГО И ИЗОТРОПНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C(\mathbb{T})$

Н. В. ТРОШКИ

Аннотация. Исследованы точность и надежность модели однородного и изотропного случайного поля в пространстве $C(\mathbb{T})$.