



МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МНОГОЭТАПНЫЙ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 621.3.01:518

ГУСЫНИН Андрей Вячеславович

к.т.н., доцент, аналитик по компьютерным коммуникациям ООО «Тич Консалтинг Украина», e-mail: gusynin@gmail.com

Научные интересы: авиационно-космические системы, многорежимные летательные аппараты, динамика полета, дифференциальные преобразования.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения часто используются при моделировании различных проблем во многих областях науки и техники. В общем случае, они не имеют аналитического решения и для их решения применяются различные численные и численно-аналитические методы, которые доказали свою эффективность [1-3].

Применение большинства этих методов сопряжено с преодолением ряда математических и вычислительных сложностей. Одним из направлений, позволяющих преодолеть данные трудности, является разработанный акад. Пуховым Г.Е. метод дифференциальных преобразований (МДП) функций и уравнений [4,5]. Он может быть применен непосредственно к решению нелинейных дифференциальных уравнений без их предварительной линеаризации, исключает зависимость переменных от временного аргумента, допускает возможность получения решения в аналитическом виде. В соответствии с данным методом исходное дифференциальное уравнение записывается

в спектральном виде и решается в области изображений с последующим возвратом в область оригинала и предоставлением решения в виде усеченного степенного ряда Тейлора. Это позволяет получить хорошее приближение к точному решению при малой длине интервала, на котором рассматривается задача. Длина этого интервала определяется радиусом сходимости ряда Тейлора.

С целью расширения диапазона поиска решения применяют концепцию многоэтапного МДП [5-7]. Данная концепция заключается в разбиении интервала на подынтервалы, поиске на каждом подынтервале решения традиционным МДП и получении общего решения уравнения в виде суммы решений на подынтервалах.

Часто при решении нелинейных дифференциальных уравнений возникают математические трудности, связанные со сложной нелинейностью уравнений. Эти трудности можно преодолеть с помощью полиномов Адомиана [8-10]. В основу данного подхода положено разбиение нелинейного дифференциального уравнения на линейные и нелинейные ком-

поненты и аппроксимация неизвестной нелинейной части уравнения полиномами Адомиана. Это значительно упрощает решение нелинейных дифференциальных уравнений и расширяет сферу применения МДП.

В данной статье предложен модифицированный многоэтапный метод дифференциальных преобразований (МММДП) для численно-аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений с аппроксимацией нелинейных членов уравнений полиномами Адомиана.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Дифференциальные преобразования (ДП) позволяют заменить в математической модели физического процесса функции $x(t)$ непрерывного аргумента t их спектральными моделями в форме дискретных функций $X(k)$ целочисленного аргумента $k = 0, 1, 2, \dots$

Дифференциальные преобразования функции $x(t)$ имеют следующий вид:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=t_0}, \quad (1)$$

где $x(t)$ - оригинал функции, представляющий собой непрерывную, бесконечное число раз дифференцируемую и ограниченную вместе со всеми своими производными функцию действительного аргумента t , $X(k)$ - дифференциальное изображение оригинала (дифференциальный спектр), представляющее собой дискретную функцию целочисленного аргумента $k = 0, 1, 2, \dots$, H - масштабная постоянная, имеющая размерность аргумента t и часто равная отрезку $0 \leq t \leq H$,

на котором рассматривают функцию $x(t)$. Обратным преобразованием, позволяющим по изображению $X(k)$ получить оригинал $x(t)$ в форме степенного ряда Тейлора, является:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k). \quad (2)$$

или при $H=1$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)t^k. \quad (3)$$

Величина H должна быть меньше радиуса сходимости ряда ρ , который можно определить на основе признака сходимости Даламбера:

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{X(k)}{H^k} : \frac{H(k+1)}{H^{k+1}} \right| = H \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{X(k)}{X(k+1)} \right| \quad (4)$$

Обычно, для практических применений, функцию $x(t)$ определяют в виде конечного ряда:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^N X(k)t^k. \quad (5)$$

МНОГОЭТАПНЫЙ МЕТОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение m -ой степени:

$$f(t, x, x', \dots, x^{(m)}) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (6)$$

с заданными начальными условиями:

$$x^{(r)}(0) = c_r, \quad r = 0, 1, \dots, m-1 \quad (7)$$

С учетом (5), приближенное решение задачи (6)-(7) можно выразить в виде конечного ряда:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N X(k)t^k. \quad (8)$$

Следуя концепции многоэтапности, разобьем интервал $[0, T]$ на p заданных подынтервалов, $T_q = t_{q-1} - t_q, q = \overline{1, p}, \sum_{q=1}^p T_q = T$. Подынтервалы имеют одинаковый шаг $h = T/p$, q -ый узел разбиения равен $t_q = qh$. Применяя МДП к задаче (6)-(7) на первом подынтервале $[0, t_1]$ получим приближенное решение в виде

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^R X_1(k)t^k, t \in [0, t_1] \quad (9)$$

Учитывая начальные условия $x_1^{(r)}(0) = c_r$ и выражение (1) можно найти для первого подынтервала все значения $X_1(k), k = 0, 1, 2, \dots, R$, где R - количество учитываемых дискрет. Для $q \geq 2$ и для каждого последующего подынтервала $[t_{q-1}, t_q]$ будут использоваться начальные условия $x_q^{(r)}(t_{q-1}) = x_{q-1}^{(r)}(t_{q-1})$. Тогда выражение (1) для q -ого подынтервала примет вид:

$$X_q(r) = \frac{H^r}{r!} \left[\frac{d^r x_{q-1}(t)}{dt^r} \right]_{t=t_{q-1}}, r \geq 0. \quad (10)$$

Применим теперь МДП к задаче (6)-(7) на интервале $[t_{q-1}, t_q]$. Процесс повторяется и, в результате, получаем последовательность приближенных решений $x_q(t), q = 0, 1, \dots, p$ для решения $x(t)$, где

$$x_q(t) = \sum_{k=0}^R X_q(k)(t - t_{q-1})^k, t \in [t_{q-1}, t_q] \quad (11)$$

Здесь $N = R \cdot p$.

В конечном виде, при использовании многоэтапного МДП, получают решение в виде:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), t \in [0, t_1] \\ x_2(t), t \in [t_1, t_2] \\ \dots \\ x_p(t), t \in [t_{p-1}, t_p] \end{cases} \quad (12)$$

При $p=1$ имеем $h=T$ и многоэтапный МДП сводится к традиционному МДП.

ПОЛИНОМЫ АДОМИАНА

В основу применения метода полиномов Адомиана для нахождения приближенного аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений положено разбиение уравнения на линейные и нелинейные составляющие и аппроксимация неизвестных нелинейных составляющих уравнения полиномами Адомиана.

Рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение в операторной форме:

$$Px + Nx + Qx = c, \quad (13)$$

где $x = x(t)$; $P = \frac{d^n}{dt^n}$ - нелинейный дифференциальный оператор, $n > 1$; $N = \frac{d}{dt}$ - линейный дифференциальный оператор, Q - оператор нелинейной функции $f = f(x)$, c -правая часть уравнения.

В соответствии с методом полиномов Адомиана нелинейные члены уравнения аппроксимируются рядом:

$$Qx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (14)$$

Полиномы Адомиана A_n определяются выражением:

а решение $x(t)$ искомого уравнения представляется в виде ряда:

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[Q \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i \right) \right] \right\}_{\lambda=0}, \quad (16)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t). \quad (15)$$

элементы которых для нелинейной функции $f = f(x)$ вычисляются по формулам [8]:

$$\begin{aligned} A_0 &= f(x_0), \quad A_1 = x_1 f^{(1)}(x_0), \quad A_2 = x_2 f^{(1)}(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 f^{(2)}(x_0), \\ A_3 &= x_3 f^{(1)}(x_0) + x_1 x_2 f^{(2)}(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 f^{(3)}(x_0), \\ A_4 &= x_4 f^{(1)}(x_0) + \left(x_1 x_3 + \frac{1}{2!} x_2^2 \right) f^{(2)}(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 x_2 f^{(3)}(x_0) + \frac{1}{4!} x_1^4 f^{(4)}(x_0), \\ A_5 &= x_5 f^{(1)}(x_0) + (x_2 x_3 + x_1 x_4) f^{(2)}(x_0) + \frac{1}{2!} (x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2) f^{(3)}(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 x_2 f^{(4)}(x_0) + \\ &+ \frac{1}{5!} x_1^5 f^{(5)}(x_0), \dots \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом свойств дифференциальных преобразований компоненты дифференциального изображения нелинейной функции $f(x)$ искомого дифференциального уравнения для i -ого подынтервала имеют вид:

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x_i(0)) = f(X_i(0)) = f(x_{i0}), \quad F(1) = \left. \frac{d}{dt} f(x_i(t)) \right|_{t=0} = x_i'(0) f^{(1)}(x_i(0)) = X_i(1) f^{(1)}(X_i(0)), \\ F(2) &= X_i(2) f^{(1)}(X_i(0)) + \frac{1}{2!} (X_i(1))^2 f^{(2)}(X_i(0)), \\ F(3) &= X_i(3) f^{(1)}(X_i(0)) + X_i(1) X_i(2) f^{(2)}(X_i(0)) + \frac{1}{3!} (X_i(1))^3 f^{(3)}(X_i(0)), \\ F(4) &= X_i(4) f^{(1)}(X_i(0)) + (X_i(1) X_i(3) + \frac{1}{2!} (X_i(2))^2) f^{(2)}(X_i(0)) + \frac{1}{2!} (X_i(1))^2 X_i(2) f^{(3)}(X_i(0)) + \\ &+ \frac{1}{4!} (X_i(1))^4 f^{(4)}(X_i(0)), \\ F(5) &= X_i(5) f^{(1)}(X_i(0)) + (X_i(2) X_i(3) + X_i(1) X_i(4)) f^{(2)}(X_i(0)) + \frac{1}{2!} (X_i(1))^2 X_i(3) + \\ &+ X_i(1) (X_i(2))^2 f^{(3)}(X_i(0)) + \frac{1}{3!} (X_i(1))^3 X_i(2) f^{(4)}(X_i(0)) + \frac{1}{5!} (X_i(1))^5 f^{(5)}(X_i(0)), \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $F(k)$ - дифференциальное изображение нелинейной функции $f(x)$ оригинала нелинейной функции дифференциального уравнения и соответствующие компоненты полинома Адомиана имеют одинаковую математическую

Принимая во внимание, что компоненты дифференциального изображения

структуру, можно считать, что компоненты дифференциального изображения оригинала нелинейной функции уравнения могут быть получены из соответствующих компонентов полиномов Адомиана путем замещения компоненты решения $x_{k_i}(t)$ соответствующим компонентом дифференциального изображения $X_i(k)$ того же индекса.

В работе [11] показано, что такое замещение может быть применено к любым видам нелинейностей дифференциальных уравнений. Таким образом, для решения нелинейных дифференциальных уравнений на большом интервале можно применить вышеописанный модифицированный многоэтапный метод дифференциальных преобразований с аппроксимацией нелинейной части уравнения полиномами Адомиана. Принимая во внимание наличие большого количества разработанных алгоритмов для определения полиномов Адомиана, такой подход позволит существенно уменьшить вычислительные затраты с одновременным обеспечением необходимой точности полученного решения.

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Ниже представлены примеры применения модифицированного многоэтапного метода дифференциальных преобразований к решению нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и дано сравнение полученных результатов с точным решением.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с квадратичной правой частью [12]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - x^2(t) + 1, \quad x(0) = 0. \quad (19)$$

Точное решение данного уравнения имеет вид:

$$x(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right).$$

С учетом свойств дифференциальных преобразований запишем уравнение (19) в спектральном виде:

$$\begin{aligned} (k+1)X(k+1) &= 2X(k) - \tilde{A}_k + \sigma(k), \\ X(0) &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } \sigma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1. \end{cases}$$

Решение уравнения (19) будем рассматривать на интервале $t \in [0, 2]$.

Данный интервал разделим на p подынтервалов одинаковой длины $h = 2/p$ и запишем уравнение (20) для каждого подынтервала:

$$\begin{aligned} (k+1)X_q(k+1) &= 2X_q(k) - \tilde{A}_{kq} + \sigma(k), \\ X_1(0) = x_1(0) = x(0) = 0, & x_q(t_{q-1}) = x_{q-1}(t_{q-1}), q = 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (21)$$

В соответствии с процедурой (17), для нелинейной части уравнения (19) $f(x) = x^2$ вычисляем для каждого подынтервала компоненты A_{kq} полиномов Адомиана и по ним соответствующие компоненты \tilde{A}_{kq} для замещения ими компонент дифференциальных изображений нелинейной части уравнения:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0q} &= X_q^2(0), \quad \tilde{A}_{1q} = 2X_q(0)X_q(1), \\ \tilde{A}_{2q} &= X_q^2(1) + 2X_q(0)X_q(2), \\ \tilde{A}_{3q} &= 2X_q(0)X_q(3) + 2X_q(1)X_q(2), \\ \tilde{A}_{4q} &= 2X_q(0)X_q(4) + 2X_q(1)X_q(3) + X_q^2(2), \\ \tilde{A}_{5q} &= 2X_q(0)X_q(5) + 2(X_q(2)X_q(3) + X_q(1)X_q(4)) \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя значения \tilde{A}_{kq} в (21) и учитывая (5), находим приближенные решения уравнения (19) на каждом подинтервале. Суммируя данные решения получим общее решение уравнения (19) на заданном интервале.

На рис.1 показано сравнение между точным решением заданного уравнения, решением по стандартному методу дифференциальных преобразований ($p=1$) и решением по предложенному модифицированному многоэтапному методу дифференциальных преобразований при разбиении заданного интервала на 2, 4 и 10 подынтервалов. Решения получены с использованием 6-ти первых дискрет дифференциального изображения функции $x(t)$.

В табл.1 приведена относительная ошибка полученных решений.

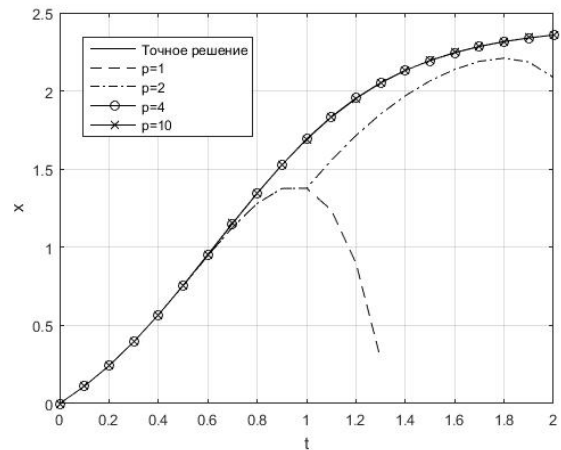


Рисунок 1 - Сравнение решений уравнения (19)

Таблица 1

Относительная ошибка решения

| t | Точное решение | Количество подинтервалов | | | | | | | |
|-----|----------------|--------------------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|-----------------|
| | | p = 1 | | p = 2 | | p = 4 | | p = 10 | |
| | | Решение | ε_r | Решение | ε_r | Решение | ε_r | Решение | ε_r |
| 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.110295196 | 0.110295177 | 8.06e-09 | 0.110295177 | 8.06e-09 | 0.110295177 | 8.06e-09 | 0.110295177 | 8.25e-09 |
| 0.2 | 0.241976799 | 0.241974042 | 1.17e-06 | 0.241974042 | 1.17e-06 | 0.241974042 | 1.17e-06 | 0.241974042 | 1.17e-06 |
| 0.3 | 0.395104849 | 0.395052593 | 2.22e-05 | 0.395052593 | 2.22e-05 | 0.395052592 | 2.22e-05 | 0.395101635 | 1.36e-06 |
| 0.4 | 0.567812166 | 0.567384160 | 1.82e-04 | 0.567384160 | 1.82e-04 | 0.567384159 | 1.82e-04 | 0.567802478 | 4.11e-06 |
| 0.5 | 0.756014393 | 0.753819406 | 9.31e-04 | 0.753819406 | 9.31e-04 | 0.753819406 | 9.31e-04 | 0.756004030 | 4.40e-06 |
| 0.6 | 0.953566217 | 0.945254325 | 3.53e-03 | 0.945254325 | 3.53e-03 | 0.951305884 | 9.59e-04 | 0.953557089 | 3.87e-06 |
| 0.7 | 1.152948967 | 1.127566235 | 1.08e-02 | 1.127566235 | 1.08e-02 | 1.150720089 | 9.45e-04 | 1.152940023 | 3.79e-06 |
| 0.8 | 1.346363655 | 1.280437785 | 2.80e-02 | 1.280437785 | 2.80e-02 | 1.344380575 | 8.41e-04 | 1.346365965 | -9.80e-07 |
| 0.9 | 1.526911313 | 1.376068943 | 6.40e-02 | 1.376068943 | 6.40e-02 | 1.526090723 | 3.48e-04 | 1.526913446 | -9.05e-07 |
| 1.0 | 1.689498392 | 1.377777000 | 1.32e-01 | 1.377777000 | 1.32e-01 | 1.693269326 | -1.60e-03 | 1.689501594 | -1.36e-06 |
| 1.1 | 1.831240782 | 1.238484565 | 2.51e-01 | 1.555603647 | 1.17e-01 | 1.834477382 | -1.37e-03 | 1.831243482 | -1.15e-06 |
| 1.2 | 1.951360119 | 0.899095559 | 4.46e-01 | 1.714827696 | 1.00e-01 | 1.954060293 | -1.15e-03 | 1.951356182 | 1.67e-06 |
| 1.3 | 2.050735693 | 0.286759215 | 7.48e-01 | 1.852929091 | 8.39e-02 | 2.052844842 | -8.95e-04 | 2.050732449 | 1.38e-06 |
| 1.4 | 2.131326610 | -0.686977929 | 1.20 | 1.969328780 | 6.87e-02 | 2.132338811 | -4.29e-04 | 2.131321347 | 2.23e-06 |
| 1.5 | 2.195633294 | -2.128132031 | 1.83 | 2.064533078 | 5.56e-02 | 2.193498948 | 9.05e-04 | 2.195629127 | 1.77e-06 |
| 1.6 | 2.246285959 | -4.162353955 | 2.72 | 2.138696629 | 4.56e-02 | 2.244614083 | 7.09e-04 | 2.246283265 | 1.14e-06 |
| 1.7 | 2.285778286 | -6.937113270 | 3.91 | 2.189603939 | 4.08e-02 | 2.284481384 | 5.50e-04 | 2.285776201 | 8.84e-07 |
| 1.8 | 2.316324737 | -10.623994260 | 5.49 | 2.210069511 | 4.51e-02 | 2.315340893 | 4.17e-04 | 2.316324057 | 2.89e-07 |
| 1.9 | 2.339806374 | -15.421103928 | 7.53 | 2.184756548 | 6.58e-02 | 2.339163535 | 2.73e-04 | 2.339805856 | 2.20e-07 |
| 2.0 | 2.357771653 | -21.555592000 | 10.14 | 2.086414259 | 1.15e-01 | 2.357772701 | -4.44e-07 | 2.357771729 | -3.19e-08 |

Пример 2. Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение [9,11]:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2x(t) + 4x(t) \cdot \ln x(t), \quad x(t) > 0 \quad (23)$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

Точное решение данной задачи имеет вид: $x(t) = e^{t^2}$.

Спектральная модель задачи (23) имеет вид:

$$(k+1)(k+2)X_q(k+2) = 2X_q(k) + \tilde{A}_{kq}, \quad (24)$$

$$X_1(0) = x_1(0) = x(0) = 1, \quad X_1(1) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x_q(t_{q-1}) = x_{q-1}(t_{q-1}), \quad q = 2, \dots, p.$$

В соответствии с процедурой (17), для нелинейной части уравнения (23) $f(x) = 4x \ln x$ вычисляем для каждого подынтервала компоненты A_{kq} полиномов Адомиана и соответствующие ком-

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0q} &= 4X_q(0) \ln X_q(0), \quad \tilde{A}_{1q} = 4X_q(1) (\ln X_q(0) + 1), \quad \tilde{A}_{2q} = 4X_q(2) (\ln X_q(0) + 1) + 2X_q^2(1) X_q^{-1}(0), \\ \tilde{A}_{3q} &= 4X_q(3) (\ln X_q(0) + 1) + 4X_q(1) X_q(2) X_q^{-1}(0) - \frac{4}{3!} X_q^3(1) X_q^{-2}(0), \\ \tilde{A}_{4q} &= 4X_q(4) (\ln X_q(0) + 1) + 4X_q^{-1}(0) \cdot (X_q(1) X_q(3) + \frac{1}{2!} X_q^2(2)) - \frac{4}{2!} X_q^2(1) X_q(2) X_q^{-2}(0) + \\ &+ \frac{8}{4!} X_q^4(1) X_q^{-3}(0), \\ \tilde{A}_{5q} &= 4X_q(5) (\ln X_q(0) + 1) + 4X_q^{-1}(0) \cdot (X_q(2) X_q(3) + X_q(1) X_q(4)) - \frac{4}{2!} X_q^{-2}(0) \cdot (X_q^2(1) X_q(3) + \\ &+ X_q(1) X_q^2(2)) + \frac{8}{3!} X_q^3(1) X_q(2) X_q^{-3}(0) - \frac{24}{5!} X_q^5(1) X_q^{-4}(0), \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя значения \tilde{A}_{kq} в (24) с учетом (5) находим приближенные решения уравнения (23) на каждом подынтервале. Суммируя данные решения получим общее решение уравнения (23) на заданном интервале.

На рис.2 показано сравнение между точным решением заданного уравнения, решением по стандартному методу дифференциальных преобразований ($p=1$) и

$$(k+1)(k+2)X(k+2) = 2X(k) + \tilde{A}_k, \quad (24)$$

$$X(0) = 1, \quad X(1) = 0$$

Решение уравнения (19) будем рассматривать на интервале $t \in [0, 2]$.

Данный интервал разделим на p подынтервалов одинаковой длины $h = 2/p$ и запишем уравнение (23) для каждого подынтервала:

поненты \tilde{A}_{kq} для замещения ими компонентов дифференциальных изображений:

решением по предложенному модифицированному многоэтапному методу дифференциальных преобразований при разбиении заданного интервала на 2, 4 и 10 подынтервалов. Решения получены с использованием 5-ти первых дискрет дифференциального изображения функции $x(t)$.

В табл.2 приведена относительная ошибка полученных решений.

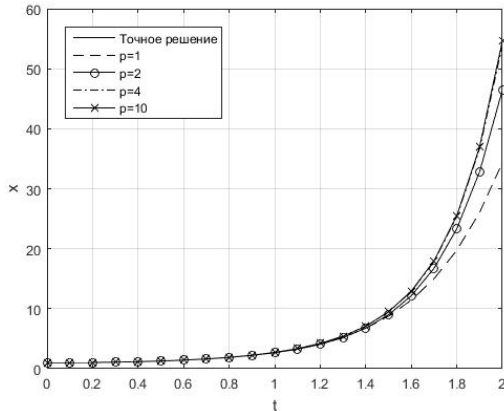


Рисунок 2 - Сравнение решений уравнения (23)

решения существенно зависит от числа разбиения заданного интервала на подинтервалы, что подтверждает эффективность применения модифицированного многоэтапного метода дифференциальных преобразований для решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Полученные результаты численных экспериментов показывают, что точность

Таблица 2

Относительная ошибка решения

| t | Точное решение | Количество подынтервалов | | | | | | | |
|-----|----------------|--------------------------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|-----------|--------------|
| | | p=1 | | p=2 | | p=4 | | p=10 | |
| | | Решение | ϵ_r | Решение | ϵ_r | Решение | ϵ_r | Решение | ϵ_r |
| 0.0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0.1 | 1.010050 | 1.010050 | 1.53e-14 | 1.010050 | 0 | 1.010050 | 0 | 1.010050 | 0 |
| 0.2 | 1.040811 | 1.040811 | 1.57e-11 | 1.040811 | 0 | 1.040811 | 0 | 1.040811 | 0 |
| 0.3 | 1.094174 | 1.094174 | 9.15e-10 | 1.094172 | 3.66e-08 | 1.094172 | 3.66e-08 | 1.094174 | 0 |
| 0.4 | 1.173511 | 1.173509 | 1.64e-08 | 1.173483 | 5.13e-07 | 1.173483 | 5.13e-07 | 1.173509 | 3.66e-08 |
| 0.5 | 1.284025 | 1.284017 | 1.56e-07 | 1.283854 | 3.13e-06 | 1.283854 | 3.13e-06 | 1.284023 | 3.66e-08 |
| 0.6 | 1.433329 | 1.433276 | 9.81e-07 | 1.432576 | 1.38e-05 | 1.432871 | 8.39e-06 | 1.433325 | 7.33e-08 |
| 0.7 | 1.632316 | 1.632060 | 4.69e-06 | 1.629658 | 4.87e-05 | 1.631536 | 1.43e-05 | 1.632309 | 1.28e-07 |
| 0.8 | 1.896481 | 1.895481 | 1.83e-05 | 1.888491 | 1.46e-04 | 1.895302 | 2.16e-05 | 1.896469 | 2.20e-07 |
| 0.9 | 2.247908 | 2.244559 | 6.13e-05 | 2.226624 | 3.90e-04 | 2.246104 | 3.30e-05 | 2.247888 | 3.66e-07 |
| 1.0 | 2.718282 | 2.708333 | 1.82e-04 | 2.666667 | 9.45e-04 | 2.715011 | 5.99e-05 | 2.718249 | 6.04e-07 |
| 1.1 | 3.353485 | 3.326626 | 4.92e-04 | 3.254793 | 1.81e-03 | 3.347628 | 1.07e-04 | 3.353429 | 1.03e-06 |
| 1.2 | 4.220696 | 4.153623 | 1.23e-03 | 4.064104 | 2.87e-03 | 4.211602 | 1.67e-04 | 4.220606 | 1.65e-06 |
| 1.3 | 5.419481 | 5.262406 | 2.88e-03 | 5.186252 | 4.27e-03 | 5.405905 | 2.49e-04 | 5.419326 | 2.84e-06 |
| 1.4 | 7.099327 | 6.750635 | 6.39e-03 | 6.758059 | 6.25e-03 | 7.078025 | 3.90e-04 | 7.099069 | 4.73e-06 |
| 1.5 | 9.487736 | 8.747559 | 1.36e-02 | 8.983339 | 9.24e-03 | 9.447642 | 7.34e-04 | 9.487280 | 8.35e-06 |
| 1.6 | 12.935817 | 11.422572 | 2.77e-02 | 12.163010 | 1.42e-02 | 12.861312 | 1.36e-03 | 12.935038 | 1.43e-05 |
| 1.7 | 17.993309 | 14.995544 | 5.49e-02 | 16.735113 | 2.30e-02 | 17.871947 | 2.22e-03 | 17.991899 | 2.58e-05 |
| 1.8 | 25.533722 | 19.749154 | 1.06e-01 | 23.326359 | 4.04e-02 | 25.341195 | 3.53e-03 | 25.531245 | 4.54e-05 |
| 1.9 | 36.966053 | 26.043515 | 2.00e-01 | 32.816795 | 7.60e-02 | 36.640983 | 5.95e-03 | 36.961451 | 8.43e-05 |
| 2.0 | 54.598150 | 34.333333 | 3.71e-01 | 46.419219 | 1.50e-01 | 53.940771 | 1.20e-02 | 54.589832 | 1.52e-04 |

Выводы

Решения нелинейных дифференциальных уравнений стандартным мето-

дом дифференциальных преобразований имеют хорошую сходимость с точным решением только в малых интервалах. Предложенный модифицированный мно-



гоэтапный метод дифференциальных преобразований с аппроксимацией нелинейных членов уравнений полиномами Адомиана является эффективным методом для получения приближенного решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в более широком диапазоне. Полученные результаты численных экспериментов показывают, что точность приближенного решения существенно зависит от количества разбиения заданного интервала

на подинтервалы и увеличением количества подинтервалов можно достичь хорошего согласования с точным решением.

Модифицированный многоэтапный метод дифференциальных преобразований позволяет получить решение нелинейных дифференциальных уравнений в более широком диапазоне с приемлемой точностью и может найти широкое применение при решении различных научных и практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Na Tsung Yen. Vychislitel'nye metody reshenija prikladnyh granichnyh zadach / Tsung Yen N. – М.: Mir, 1982. – 296 s.
2. Samojlenko A.M. Chislennno-analiticheskie metody issledovanija reshenij kraevykh zadach / A.M. Samojlenko, N.I. Ronto. – К.: Naukova dumka. – 1970. – 800 s.
3. Faires J.D., Burden R.L. Numerical Methods. - PWS, Boston, Massachusetts, 1993. – 736 pp.
4. Pukhov G.E. Differencial'nye preobrazovanija i matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh processov / G.E. Puhov. – К.: Nauk. dumka, 1986. – 160 s.
5. Pukhov G.E. Differencial'nye preobrazovanija funkcij i uravnenij / G.E. Puhov. – К.: Nauk. dumka, 1980. – 419s.
6. Rashidi M.M., Chamkha A.J., Keimanesh M. Application of multi-step differential transform method on flow of a second-grade fluid over a stretching or shrinking sheet // American Journal of Computational Mathematics. – 2011. – Vol.1, No.2. – P. 119-128. - doi: 10.4236/ajcm.2011.12012.
7. Biazar J., Mohammadi F. Multi-step differential transform method for nonlinear oscillators // Nonlinear Sci. Lett. A. – 2010. – Vol.1., No.4. – P. 391-397.
8. Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method. – Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994. – 352 pp.
9. Behiry S.H. Differential transform method for nonlinear initial-value problems by Adomian polynomials // Journal of Applied & Computational mathematics. – 2012. – Vol. 1, Issue 3. – P. 109-114.
10. Gusynin V.P. Reshenie nelinejnyh dvouhetochnykh kraevykh zadach modificirovannym metodom differencial'nykh preobrazovanij / V.P. Gusynin, A.V. Gusynin // Problemy priborostroenija. – 2016. - №1. – S.3-14.
11. Ebad A. On a general formula for computing the one-dimensional differential transform of nonlinear functions and its applications // Proceedings of the American Conference on Applied Mathematics, Harvard, Cambridge, USA, 2012. – P. 92-97.
12. Elsaid A. Adomian polynomials: a powerful tool for iterative methods of series solution of nonlinear equation // Journal of Applied Analysis and Computation. – 2012. - Vol.2, No.4. – P.381-394.
13. Chang S.-H., Chang I.-L. A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions // Appl. Math. Comput. – 2008. – V. 195(2). - P. 799-808.

Рецензент: д.т.н., проф. Лисенко О.І.,
Інститут телекомунікаційних систем
НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»