

ЯВНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ МОДЕЛІ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ КОНФЛІКТНОГО ПРОСТОРУ

Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко

Ін-т математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01004, Україна

We analyze a class of explicitly solvable models for problems of repartition of the conflict space between two alternative opponents. We prove existence of an equilibrium state for a complex nonlinear system the evolution of which is generated by a conflict interaction between its components. Explicit formulas have been obtained for limit compromising distributions in terms of probability measure densities. We consider a number of concrete model examples of repartition dynamics of the conflict territory and formation of an equilibrium (compromise) distribution of the territory. An interpretation of the results in the case of social and territory conflicts is given.

Проведен аналіз класу явно розв'язуваних моделей в задачах перерозподілення конфліктного простору між двома альтернативними опонентами. Доказано існування рівноважного стану складної нелінійної системи, еволюція якої во времени сгенерована конфліктним взаємодієм між її компонентами. Отримані явні формули для граничних компромісних розподілів в термінах густот вероятностних мер. Приведен ряд конкретних модельних прикладів динаміки перерозподілення конфліктної території і встановлення рівноважного (компромисного) розподілення простору. Предложена інтерпретація результатів относительно соціальних і територіальних конфліктів.

1. Вступ. У кожній конфліктній ситуації (ігровій чи реальній) виникає основне питання: кому і скільки має належати по справедливості? Іншими словами, яким має бути узаконений перерозподіл конфліктного ресурсу між противниками (гравцями, опонентами)?

У цій роботі ми досліджуємо клас відносно складних моделей із конфліктною взаємодією між парою альтернативних сторін (опонентів), в яких відповідь на поставлене вище питання вдається одержати математично точно в явній формі.

Головним інструментом наших побудов є поняття *динамічної системи конфлікту* (ДСК), введене в роботах [1–5]. Це поняття позначається трійкою $\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), *\}$. Тут Ω є простором конфлікту, $\mathcal{M}(\Omega)$ містить множину всіх можливих розподілів „ваги” опонентів на Ω , а $*$ позначає закон конфліктної взаємодії (боротьби) між противниками. Фактично $*$ — це деяке нелінійне перетворення у множині розподілів $\mathcal{M}(\Omega)$.

Простір Ω , як предмет конфліктної боротьби, є простором (територією) життєвого ресурсу або запасом певних цінностей для опонентів. У конкретних моделях (див. роботи [6–10]) роль Ω може відігравати математична версія простору фізичного ресурсу — скінченна або зчисленна множина точок, відрізок прямої, коло, область поверхні, компакт метричного простору.

Розподіли опонентів задаються функціями на Ω , які формують множину $\mathcal{M}(\Omega)$. В залежності від вибору Ω та інтерпретації розподілів множина $\mathcal{M}(\Omega)$ може складатися з векторів, скалярних функцій, мір або їхніх щільностей. Зокрема, розподіли опонентів можна задавати в термінах скінченно- чи нескінченновимірних векторних просторів (наприклад, \mathbb{R}^n , l_2), функціональних просторів $L_2(\Omega)$, класом невід’ємних мір на деякій σ -алгебрі під-

множин із Ω .

У цій роботі Ω є відрізком прямої. Задля спрощення в абстрактних побудовах ми покладемо $\Omega = [0, 1]$, хоча в комп'ютерних прикладах використовуємо довільні відрізки $\Omega = [a, b]$. За $\mathcal{M}(\Omega)$ ми беремо $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$ — простір нормованих на одиницю додатних мір на борелевій σ -алгебрі \mathcal{B} підмножин із відрізка $[0, 1]$. Отже, ми використовуємо стохастичну інтерпретацію і розподіли опонентів фіксуємо ймовірнісними мірами. Більш того, ми припускаємо, що міри є абсолютно неперервними, і для зручності доведень від мір переходимо до їхніх щільностей.

Закон конфліктної взаємодії, тобто перетворення $*$, задається формулами (2.2) в термінах щільностей імовірнісних мір (див. пункт 2). Зауважимо, що в більшості публікацій (див., наприклад, роботи [11–16]) рівняння, що описують еволюцію складних систем із конфліктною взаємодією, наведені безпосередньо в термінах числових, а не стохастичних характеристик.

Ми вивчаємо конфліктні взаємодії лише між парами опонентів, тому закон $*$ є бінарним перетворенням в $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$. Таке перетворення, як правило, є нелінійним і некомутативним відображенням:

$$\{\mu, \nu\} \xrightarrow{*} \{\mu_1, \nu_1\}, \quad \mu_1 = \mu * \nu, \quad \nu_1 = \nu * \mu.$$

Для довільної початкової пари мір $\mu_0 = \mu, \nu_0 = \nu$ із простору $\mathcal{M}_+^1(\Omega)$ ітерація відображення $*$ задає деяку траєкторію ДСК в дискретному часі:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu_N \\ \nu_N \end{array} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{array}{c} \mu_{N+1} \\ \nu_{N+1} \end{array} \right\}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Тут міри μ_0, ν_0 задають стартовий розподіл простору Ω між опонентами, а відображення $*$, як математичний аналог акту конфліктної взаємодії, використовується для опису еволюції системи в часі. За означенням стартовий розподіл є конфліктним, якщо носії мір μ_0, ν_0 перетинаються.

Задача полягає у дослідженні поведінки траєкторій $\{\mu_N, \nu_N\}$ при $N \rightarrow \infty$ на основі конкретної формули перетворення $*$. В цій роботі ми доводимо існування граничних розподілів $\{\mu_\infty, \nu_\infty\}$ у термінах щільностей (теорема 2.1). Цей результат є аналогом теореми про існування рівноважного стану для ДСК з попередніх робіт [17, 18]. Теорема 2.1 має незалежне доведення безпосередньо в термінах щільностей. Важливо, що тепер еволюція перерозподілу конфліктного простору припускає безпосереднє графічне зображення, що є цінним для застосувань. Цей факт проілюстровано конкретними прикладами.

Коротко пояснимо ідею переходу від кількісної до стохастичної характеристики конфліктних перерозподілів в абстрактному випадку.

Припустимо, що пара альтернативних фізичних стихій (опонентів, позначаємо їх A, B) довільно розподілені на спільному просторі існування Ω . Будемо вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ потужність присутності (масу) цих стихій на підмножинах $\Delta \subseteq \Omega$ задано невід'ємними числами $M(\Delta), m(\Delta)$ відповідно, а функції множин $M(\cdot), m(\cdot)$ є адитивними. Більш того, припускаємо, що в загальному випадку $M(\cdot), m(\cdot)$ є не-нормованими мірами на борелевій σ -алгебрі \mathcal{B} підмножин із Ω .

Внаслідок альтернативної природи стихій A, B вони вступають у фізичну конфліктну взаємодію за певним правилом. Еволюцію змін розподілів $M(\Delta), m(\Delta)$ в дискретному

часі $t = N = 0, 1, \dots$ ми пропонуємо описувати рекурентними рівняннями, які є аналогами різницевих рівнянь Лотки – Вольтерра:

$$\begin{aligned} M_{N+1}(\Delta) &= \lambda_A M_N(\Delta) + \Theta_N M_N(\Delta) - \tau_N(\Delta), \\ m_{N+1}(\Delta) &= \lambda_B m_N(\Delta) + \Theta_N m_N(\Delta) - \tau_N(\Delta), \quad N = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Тут $M_0(\Delta) = M(\Delta)$, $m_0(\Delta) = m(\Delta)$, λ_A, λ_B – параметри зовнішнього впливу (далі, для спрощення, покладаємо $\lambda_A = 1 = \lambda_B$). Дійсна функція $\Theta_N = \Theta(M_N, m_N)$ є аналогом мультиплікативного гамільтоніана системи (математично Θ є білінійним додатним функціоналом на просторі мір). Нарешті, міра $\tau_N(\Delta) = \tau(M_N, m_N; \Delta)$ – показник локальної конфронтації між опонентами, її числові значення характеризують локальні втрати чи здобутки внаслідок конфліктної боротьби та конкуренції. Зазначимо, що ми припускаємо повну рівноправність опонентів. Тому запропонований вище закон конфліктної взаємодії є симетричним за формою для опонентів A, B . Явний вигляд функціонала Θ та міри τ залежить від конкретної моделі.

Далі ми відмовляємося від кількісної характеристики опонентів і переходимо до ймовірнісної (стохастичної) інтерпретації. Це означає, що стани складної системи ми описуємо в термінах нормованих мір:

$$\mu_N(\Delta) := \frac{M_N(\Delta)}{M}, \quad \nu_N(\Delta) := \frac{m_N(\Delta)}{m}, \quad M = M(\Omega), \quad m = m(\Omega), \quad \Delta \in \mathcal{B},$$

які, очевидно, є ймовірнісними мірами. Отже, в термінах імовірнісних мір закон конфліктної динаміки задається рівняннями

$$\begin{aligned} \mu_{N+1}(\Delta) &= \frac{1}{z_N} [\mu_N(\Delta) (1 + \Theta_N) - \tau_N(\Delta)], \\ \nu_{N+1}(\Delta) &= \frac{1}{z_N} [\nu_N(\Delta) (1 + \Theta_N) - \tau_N(\Delta)], \quad N = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

де z_N – нормувальний знаменник, що не залежить від Δ . Ділячи праву та ліву частини цих рівнянь на Δ , припускаючи, що початкові міри є абсолютно неперервними відносно міри Лебега, та стягуючи Δ до точки $x \in \Delta$, приходимо до рівнянь динаміки в термінах щільностей мір μ_N, ν_N :

$$\begin{aligned} \rho_{N+1}(x) &= \frac{1}{z_N} [\rho_N(x)(1 + \Theta_N) - \tau_N(x)], \\ \sigma_{N+1}(x) &= \frac{1}{z_N} [\sigma_N(x)(1 + \Theta_N) - \tau_N(x)], \quad N = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{1.2}$$

де $\Theta_N \equiv \Theta(\rho_N, \sigma_N)$ має той самий сенс, що і вище, а $\tau_N(x) = \tau(\rho_N, \sigma_N; x)$ – щільність міри локальної конфронтації між опонентами A та B в точці x . Зауважимо, що в цій статті функціонал Θ та міру τ ми визначаємо за формулами (2.8), (2.9), тому абсолютна неперервність мір μ_N, ν_N при всіх $N = 1, 2, \dots$ впливає з абсолютної неперервності початкової пари мір.

Зрозуміло, що аналіз динамічної поведінки змін перерозподілів простору Ω між опонентами значно зручніше проводити в термінах імовірнісних мір (рівняння (1.2)), що частково і проводимо в цій роботі. Але зворотний перехід до кількісних характеристик у термінах ненормованих мір $M_N(\Delta)$, $m_N(\Delta)$ неважко здійснити для кожного моменту часу, навіть якщо величини $M_N(\Omega)$, $m_N(\Omega)$ не є сталими.

2. Теорема про існування граничних розподілів. У побудовах цього пункту ми покладаємо $\Omega = [0, 1]$. Динамічну систему $\{\Omega, \mathcal{M}(\Omega), *\}$, яку ми співставляємо парі абстрактних противників на просторі конфлікту $[0, 1]$, будуємо таким чином. За $\mathcal{M}(\Omega)$ беремо множину абсолютно неперервних відносно міри Лебега λ імовірнісних мір із простору $\mathcal{M}_+^1([0, 1])$, додатково припускаючи, що їхні щільності є неперервними функціями. Позначення $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}^1([0, 1])$ означає, що міри є ймовірнісними, абсолютно неперервними і для них має місце зображення

$$\mu(A) = \int_A \rho(x) d\lambda(x), \quad \nu(A) = \int_A \sigma(x) d\lambda(x), \quad A \in \mathcal{B}, \quad \rho, \sigma \in C([0, 1]), \quad (2.1)$$

де λ – міра Лебега.

У просторі $\mathcal{M}_{ac}^1([0, 1])$ у термінах щільностей мір визначаємо некомутативне перетворення $*$ (закон конфліктної взаємодії):

$$\rho_1 = \rho * \sigma, \quad \sigma_1 = \sigma * \rho,$$

де

$$\rho_1(x) = \frac{1}{z} [\rho(x)(\Theta + 1) - \tau(x)], \quad \sigma_1(x) = \frac{1}{z} [\sigma(x)(\Theta + 1) - \tau(x)], \quad x \in [0, 1], \quad (2.2)$$

$$\Theta = \Theta(\rho, \sigma) := \int_{[0,1]} \sqrt{\rho(x)\sigma(x)} d\lambda(x), \quad (2.3)$$

$$\tau(x) := \min\{\rho(x), \sigma(x)\} = \begin{cases} \sigma(x), & \text{якщо } \rho(x) \geq \sigma(x), \\ \rho(x) & \text{– у протилежному випадку,} \end{cases} \quad x \in [0, 1]. \quad (2.4)$$

Легко підрахувати, що нормувальний знаменник

$$z = \Theta + 1 - W, \quad W := \int_{[0,1]} \tau(x) d\lambda(x). \quad (2.5)$$

Очевидно, що функції ρ_1, σ_1 в (2.2) належать до $C([0, 1])$ і є щільностями деяких нових мір $\mu_1, \nu_1 \in \mathcal{M}_{ac}^1([0, 1])$. Отже, можна стверджувати, що послідовна ітерація нелінійного перетворення $*$ породжує деяку траєкторію ДСК. Символічно її можна записати так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_N \\ \sigma_N \end{array} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{array}{l} \rho_{N+1} \\ \sigma_{N+1} \end{array} \right\}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

де $\rho_0 = \rho$, $\sigma_0 = \sigma$, а

$$\begin{aligned}\rho_{N+1}(x) &= \frac{1}{z_N} [\rho_N(x)(\Theta_N + 1) - \tau_N(x)], \\ \sigma_{N+1}(x) &= \frac{1}{z_N} [\sigma_N(x)(\Theta_N + 1) - \tau_N(x)], \quad x \in [0, 1], \quad N = 0, 1, \dots,\end{aligned}\tag{2.7}$$

і, відповідно до (2.3), (2.4) та (2.5),

$$\Theta_N = \int_{[0,1]} \sqrt{\rho_N(x)\sigma_N(x)} d\lambda(x),\tag{2.8}$$

$$\tau_N(x) = \min\{\rho_N(x), \sigma_N(x)\}, \quad x \in [0, 1],\tag{2.9}$$

та

$$z_N = \Theta_N + 1 - W_N, \quad W_N := \int_{[0,1]} \tau_N(x) d\lambda(x).\tag{2.10}$$

Варто зазначити, що в загальному випадку динамічна система, породжена відображенням $*$, згідно з формулами (2.7) має дві окремі множини нерухомих точок: Γ_1 та Γ_2 . Множина Γ_1 складається з усіх пар мір, щільності яких ρ , σ є тотожними, тобто

$$\Gamma_1 = \{\mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}^1([0, 1]) \mid \rho \equiv \sigma\}.$$

Дійсно, виходячи із тотожності мір, використовуючи (2.8)–(2.10), легко підрахувати, що $\Theta_N = 1$, $W_N = 1$, $z_N = 1$ для всіх N і, як наслідок, $\rho_N = \rho = \sigma_N = \sigma$. Множина Γ_2 складається з пар взаємно сингулярних (ортогональних) мір, тобто

$$\Gamma_2 = \left\{ \mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}^1([0, 1]) \mid \int_{[0,1]} \rho(x)\sigma(x) d\lambda(x) = 0 \right\}.$$

В цьому випадку $\Theta_N = 0$, $W_N = 0$, $z_N = 1$ для всіх N і неважко переконатися, що $\rho_N = \rho = \sigma_N = \sigma$.

Основним результатом статті є така теорема.

Теорема 2.1. *Кожна траєкторія ДСК $\{\Omega, \mathcal{M}_+^1([1, 0]), *\}$, що згенерована перетворенням $*$ за формулами (2.7) із початковим станом $\{\rho_0 = \rho, \sigma_0 = \sigma\}$, заданим довільною парою мір $\mu_0 = \mu, \nu_0 = \nu$, $\mu, \nu \in \mathcal{M}_{ac}^1([0, 1])$, $\mu, \nu \notin \Gamma_1$, збігається поточково*

$$\rho_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x), \quad \sigma_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x), \quad x \in [0, 1],\tag{2.11}$$

до нерухомого граничного стану, тобто

$$\rho_\infty * \sigma_\infty = \rho_\infty, \quad \sigma_\infty * \rho_\infty = \sigma_\infty.$$

Щільності граничних мір μ_∞, ν_∞ мають явний опис:

$$\begin{aligned}\rho_\infty(x) &= \begin{cases} \frac{h(x)}{D}, & \text{якщо } \rho(x) \geq \sigma(x), \\ 0 & \text{— у протилежному випадку,} \end{cases} \\ \sigma_\infty(x) &= \begin{cases} -\frac{h(x)}{D}, & \text{якщо } \rho(x) < \sigma(x), \\ 0 & \text{— у протилежному випадку,} \end{cases}\end{aligned}\quad (2.12)$$

де функція $h(x) = \rho(x) - \sigma(x)$, а $D = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} |h(x)| d\lambda(x)$ — повна варіаційна різниця початкових мір μ, ν .

Доведення. Нехай точка $x \in [0, 1]$ є такою, що $\rho(x) > \sigma(x)$. Тоді з (2.7) випливає, що послідовність значень неперервних функцій $h_N(x) = \rho_N(x) - \sigma_N(x)$ монотонно зростає:

$$h_{N+1}(x) > h_N(x), \quad N \geq 0.$$

Дійсно, безпосередньо з (2.7) видно, що

$$h_{N+1}(x) = h_N(x) \frac{\Theta_N + 1}{\Theta_N + 1 - W_N} > h_N(x),$$

оскільки завдяки (2.8) $\Theta_N > 0$, а завдяки (2.9) $0 < W_N < 1$ для всіх N . Отже, послідовність $h_N(x)$ збігається до скінченної границі або розбігається:

$$h_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} h_N(x) \leq +\infty. \quad (2.13)$$

Далі, знову завдяки (2.7) легко бачити, що послідовність $\{\sigma_N(x)\}_{N \geq 0}$ є монотонно спадною і обмеженою знизу. Тому ця послідовність має границю:

$$0 \leq \sigma_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) < +\infty. \quad (2.14)$$

Тепер з (2.13) та (2.14) випливає, що існує границя і для послідовності $\{\rho_N(x)\}_{N \geq 0}$:

$$\rho_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x) \leq +\infty. \quad (2.15)$$

Зрозуміло, що аналогічні міркування справедливі для всіх точок $x \in [0, 1]$ таких, що $\rho(x) \neq \sigma(x)$. Покажемо, що для всіх таких точок гранична функція ρ_∞ є обмеженою. Фактично це випливає з того, що завдяки (2.7) функції ρ_N, σ_N є неперервними та обмеженими при кожному N . Але припустимо, що існує точка $y \in [0, 1]$, в якій $\rho_\infty(y) = +\infty$. Розглянемо відношення $h_N(y)/h_N(x)$, де $x \in [0, 1]$ — така довільна точка, що $h(x) \neq 0$. З (2.7) видно, що відношення $h_N(y)/h_N(x)$ не залежить від N . Дійсно, для $N = 1$ маємо

$$\frac{h_1(y)}{h_1(x)} = \frac{(\rho(y) - \sigma(y))(\Theta + 1)}{(\rho(x) - \sigma(x))(\Theta + 1)} = \frac{h(y)}{h(x)}.$$

Аналогічно, для довільного N

$$\frac{h(y)}{h(x)} = \frac{h_N(y)}{h_N(x)}.$$

Тому при $N \rightarrow \infty$ отримуємо

$$\frac{h(y)}{h(x)} = \frac{h_\infty(y)}{h_\infty(x)}. \quad (2.16)$$

Рівність (2.16) може виконуватися, лише якщо $h_\infty(x) = +\infty$ для всіх $x \in [0, 1]$ таких, що $h(x) \neq 0$. Але згідно з початковими умовами і за побудовою це неможливо.

Далі, покажемо, що при умові $\rho(x) > \sigma(x)$ значення $\sigma_\infty(x) = 0$. З цією метою розглянемо послідовність відношень $R_N(x) = \rho_N(x)/\sigma_N(x)$. Покажемо, що ця послідовність є монотонно зростаючою: $R_{N+1}(x) > R_N(x)$. Дійсно,

$$\begin{aligned} R_{N+1}(x) &= \frac{\rho_{N+1}(x)}{\sigma_{N+1}(x)} = \frac{\rho_N(x)(\Theta_N + 1 - \sigma_N(x)/\rho_N(x))}{\sigma_N(x)(\Theta_N + 1) - \sigma_N(x)} = \\ &= \frac{\rho_N(x)(\Theta_N + 1 - \sigma_N(x)/\rho_N(x))}{\sigma_N(x)\Theta_N} = R_N(x)k_N = R(x) \cdot k \cdot k_1 \dots k_N, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де

$$k_N = \frac{1 + \Theta_N - \sigma_N(x)/\rho_N(x)}{\Theta_N} > 1,$$

оскільки $\sigma_N(x) < \rho_N(x)$ і $\sigma_N(x)/\rho_N(x) < 1$. Покажемо, що

$$1 < k < k_1 < \dots < k_N < \dots \quad (2.18)$$

Очевидно, що

$$k = \frac{1 + \Theta - \sigma(x)/\rho(x)}{\Theta} > 1.$$

Тому $R_1(x) > R(x) > 1$. Тепер покажемо, що $k < k_1$. За побудовою маємо

$$k_1 = \frac{1 + \Theta_1 - \sigma_1(x)/\rho_1(x)}{\theta_1} = \frac{\Theta_1 + \varepsilon_1}{\Theta_1}, \quad (2.19)$$

де очевидно, що число $\varepsilon_1 = 1 - \sigma_1(x)/\rho_1(x) = 1 - (R_1(x))^{-1}$ задовольняє нерівність

$$1 > \varepsilon_1 > 0. \quad (2.20)$$

З (2.20) випливає нерівність

$$k_1 = 1 + \varepsilon_1/\Theta_1 > 1 + \varepsilon/\Theta_1 \geq 1 + \varepsilon/\Theta = k,$$

де $\varepsilon = 1 - (R(x))^{-1}$. При цьому ми скористалися очевидними нерівностями $\varepsilon_1 > \varepsilon$ та $\Theta_1 \leq \Theta$. Тепер (2.18) отримуємо за індукцією, використовуючи аналоги співвідношень (2.19), (2.20).

Таким чином, ми довели, що $R_N(x) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Тому з необхідністю $\sigma_N(x) \rightarrow \sigma_\infty(x) = 0$. Отже, для послідовності $\rho_N(x)$ існує скінченна границя

$$\rho_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x) = h_\infty(x) > 0.$$

Аналогічно доводимо, що $\rho_N(x) \rightarrow 0$ для кожної точки $x \in [0, 1]$ з умовою $\rho(x) < \sigma(x)$, а також

$$\sigma_\infty(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(x) = -h_\infty(x) > 0.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $\rho \neq \sigma$, але існують точки $x \in [0, 1]$, в яких $\rho(x) = \sigma(x)$. Покажемо, що для них $\rho_N(x) = \sigma_N(x) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Дійсно, за індукцією для всіх $N \geq 0$ маємо

$$\begin{aligned} \rho_{N+1}(x) &= \sigma_{N+1}(x) = \frac{1}{z_N} [\sigma_N(x)(\Theta_N + 1) - \tau(x)] = \\ &= \sigma_N(x) \frac{\Theta_N + 1 - \tau(x)/\sigma_N(x)}{\Theta_N + 1 - W_N} = \\ &= \sigma_N(x) \frac{\Theta_N}{\Theta_N + 1 - W_N} < \sigma_N(x) = \rho_N(x), \end{aligned}$$

оскільки очевидно $\rho_N(x) = \tau_N(x) = \sigma_N(x)$ та $0 < W_N < 1$. Щоб довести, що $\rho_N(x) = \sigma_N(x) \rightarrow 0$, потрібно показати, що $\frac{\Theta_N}{\Theta_N + 1 - W_N} \rightarrow 0$. Останній факт є справедливим, оскільки $W_N \rightarrow 0$ та $\Theta_N \rightarrow 0$. Дійсно, позначивши через $[0, 1]_+$ множину всіх точок, де $\rho(x) > \sigma(x)$, а через $[0, 1]_-$ множину точок, де $\rho(x) \leq \sigma(x)$, запишемо Θ_N у вигляді

$$\begin{aligned} \Theta_N &= \int_{[0,1]} \sqrt{\rho_N(x)\sigma_N(x)} d\lambda(x) = \int_{[0,1]_+} \sqrt{\rho_N(x)\sigma_N(x)} d\lambda(x) + \\ &+ \int_{[0,1]_-} \sqrt{\rho_N(x)\sigma_N(x)} d\lambda(x) = \Theta_N^+ + \Theta_N^-. \end{aligned}$$

Тепер очевидно, що $\Theta_N^+ \rightarrow 0$, тому що $\rho_N(x)$ є обмеженою, а $\sigma_N(x) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Аналогічно $\Theta_N^- \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. З тих же причин

$$W_N := \int_{[0,1]} \tau_N(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]_+} \sigma_N(x) d\lambda(x) + \int_{[0,1]_-} \rho_N(x) d\lambda(x) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Залишилось довести (2.12). З цією метою розглянемо пару довільних точок $x_1, x_2 \in [0, 1]$ таких, що одночасно $\rho(x_1) < \sigma(x_1)$ та $\rho(x_2) < \sigma(x_2)$. Зауважимо, що завдяки (2.7)

відношення $h_N(x_1)/h_N(x_2)$ не залежить від N . Дійсно, за тією ж аргументацією, що і при доведенні (2.16), отримуємо

$$\frac{h(x_1)}{h(x_2)} = \frac{h_\infty(x_1)}{h_\infty(x_2)}.$$

Далі, з того, що $\rho_\infty(x_1) = h_\infty(x_1)$, маємо

$$\frac{\rho_\infty(x_1)}{\rho_\infty(x_2)} = \frac{h(x_1)}{h(x_2)}. \quad (2.21)$$

Тепер на підставі (2.21) робимо висновок, що величина $\rho_\infty(x)$ пропорційна $h(x)$ для всіх $x \in [0, 1]$ таких, що $\rho(x) > \sigma(x)$, тобто $\rho_\infty(x) = k_\rho h(x)$, де коефіцієнт k_ρ не залежить від x . Розкладаючи відрізок $[0, 1]$ на введені вище підмножини $[0, 1]_+$, $[0, 1]_-$, одержуємо

$$1 = \int_{[0,1]} \rho_\infty(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]_+} \rho_\infty(x) d\lambda(x) = k_\rho \int_{[0,1]_+} h(x) d\lambda(x).$$

Аналогічно, у випадку $\rho(x) \leq \sigma(x)$ отримуємо

$$1 = \int_{[0,1]} \sigma_\infty(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]_-} \sigma_\infty(x) d\lambda(x) = -k_\sigma \int_{[0,1]_-} h(x) d\lambda(x).$$

Звідси легко бачити, що

$$k_\rho = k_\sigma = 1/D, \quad D = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} |h(x)| d\lambda(x),$$

що й завершує доведення теореми.

Зауважимо, що теорема 2.1 по суті є аналогом основного результату з роботи [17]. Істотна відмінність полягає у способах доведення. Там збіжність мір розуміється у слабкому сенсі, тут — поточкова збіжність щільностей. Останній факт є важливим для застосувань, оскільки відкриває можливість явного аналізу динамічної поведінки перерозподілу конфліктного простору. Для ілюстрації теореми 2.1 наведемо кілька конкретних прикладів.

3. Комп'ютерні моделі. В усіх модельних прикладах опонент A відповідає розподілу $\rho(x)$, який будемо позначати суцільною лінією, а опонент B — розподілу $\sigma(x)$, його будемо позначати штриховою лінією.

Приклад 1. Нехай розподіли мір μ, ν задано степеневими функціями на відрізку $[0, 1]$, наприклад $F_\mu(x) = x^2$, $F_\nu(x) = x^3$ відповідно. Тоді щільності їхніх розподілів мають вигляд $\rho(x) = 2x$, $\sigma(x) = 3x^2$. Лише в одній точці $x_0 = 2/3$ ці щільності збігаються, $2x_0 = 3x_0^2$. Тому простір конфлікту в початковий момент часу розпадається на дві зв'язні частини: $[0, 2/3] \cup (2/3, 1]$. Як видно з рис. 1, *a*, скрізь до точки $2/3$ перевагу має опонент A , а після цієї точки пріоритет належить опоненту B . Вже після 20 кроків ітерації формули конфліктної взаємодії (2.7) (див. рис. 1, *б*) спостерігаємо перерозподіл присутності опонентів на цих двох ділянках і зміну поведінки функцій щільності мір μ_N, ν_N . Опонент B

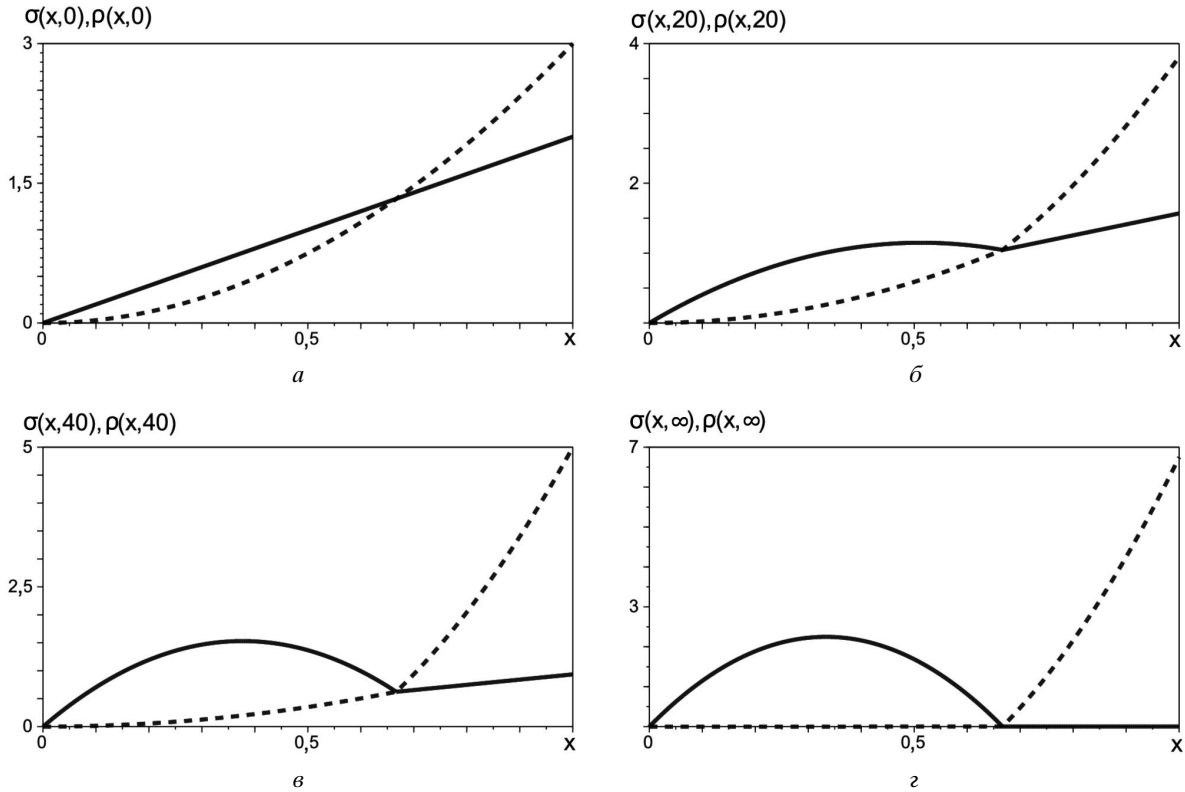


Рис. 1

поступово втрачає всю територію до точки $2/3$, тоді як опонент A повністю її захоплює, втрачаючи контроль на частині $(2/3, 1]$. Вже з рис. 1, в можна безпомилково передбачити остаточний результат конфліктної взаємодії. Рис. 1, г ілюструє граничний перерозподіл, який досить точно проявляється при відносно великих значеннях N .

Приклад 2. Нехай початкові міри μ, ν відповідають аналогам нормальних розподілів із різними центрами та амплітудами. Точніше, розглянемо дві міри, задані щільностями

$$\rho(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \exp(-2(x-1)^2),$$

$$\sigma(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \exp(-4,5(x-1,2)^2).$$

У цьому прикладі простір конфлікту розкладається на три ділянки (див. рис. 2, а). На центральній ділянці опонент B має значну перевагу по амплітуді над опонентом A . Тому в результаті конфліктної взаємодії він лише частково зазнає зміщення центра свого максимального значення, істотно збільшує свою амплітуду, але втрачає маргінальні для нього ділянки. Натомість опонент A зазнає істотних якісних змін. Його розподіл розпадається на дві роз'єднані частини, він повністю втрачає регіон своєї максимальної присутності (окіл точки $x = 1$), до того ж змушений перемістити точку своєї максимальної амплітуди на відносно велику відстань (див. рис. 2, б).

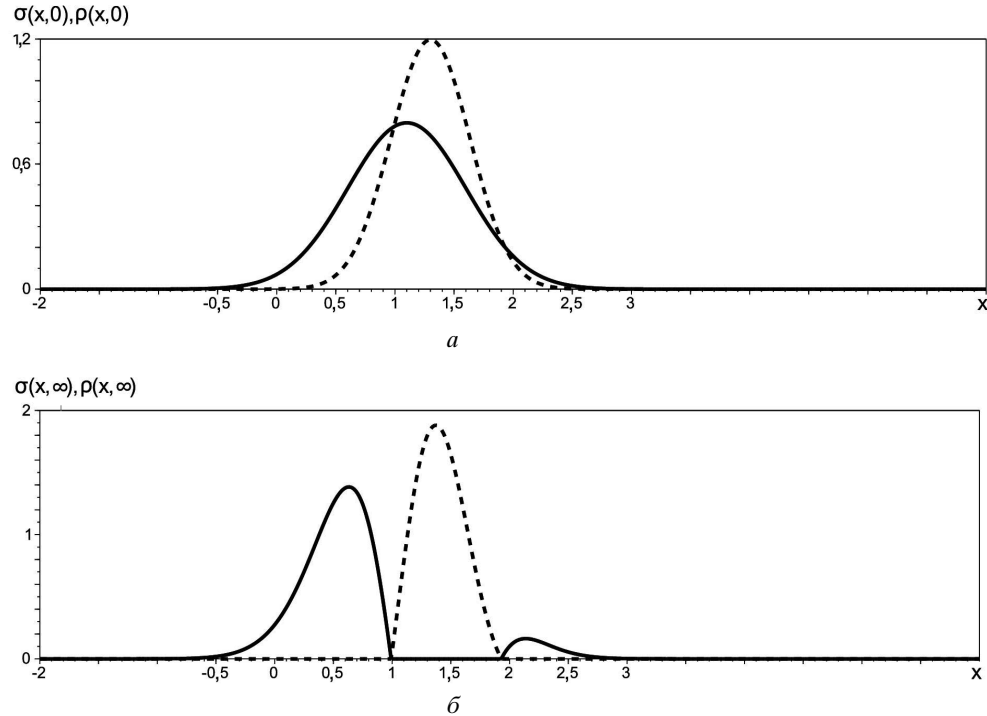


Рис. 2

Приклад 3. Розглянемо випадок, коли початкові розподіли опонентів A , B задані комбінаціями аналогів нормальних розподілів із різними центрами та амплітудами:

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{2k} \exp\left(\frac{-(2k)^2(x-k)^2}{2}\right),$$

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{3k} \exp\left(\frac{-(3k)^2(x-1,2k)^2}{2}\right)$$

(див. рис. 3, *а*). Використовуючи приклад 2, можна прогнозувати і передбачати якісну поведінку кожного з опонентів. Але саме комп'ютерне моделювання дає точну картину динаміки конфліктної боротьби. З рис. 3 видно, що простір конфлікту розкладається на кілька регіонів із граничними точками, в яких значення щільностей $\rho(x)$, $\sigma(x)$ є рівними. В кожному регіоні перемагає той опонент, який має найбільшу амплітуду своєї компоненти розподілу. Протилежна сторона в цих регіонах занулюється і змушена переміщувати центри максимальних значень щільності свого розподілу. Кожен з опонентів розпадається на кілька ізолюваних компонент (див. графіки на 20 (рис. 3, *б*) і 40 (рис. 3, *в*) кроках). Цікаво, що форма післяконфліктних розподілів має більш виразні центри максимальних значень у порівнянні з початковими (див. рис. 3, *з*).

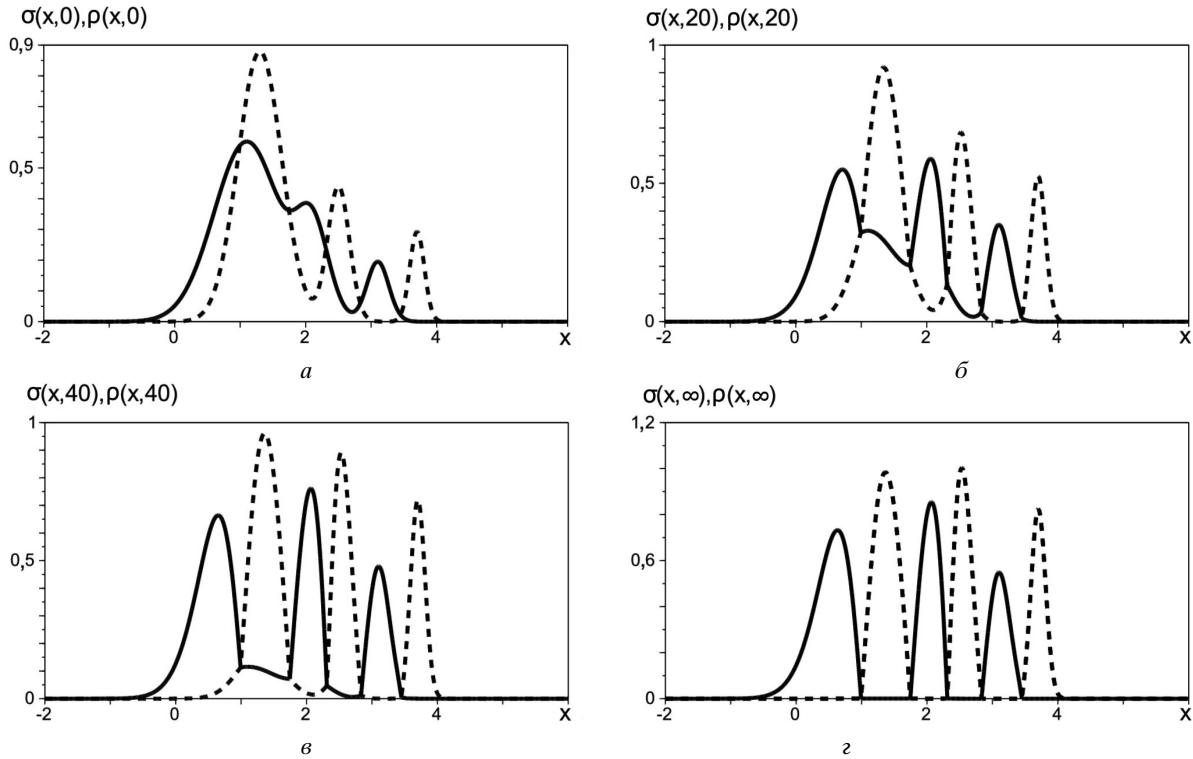


Рис. 3

Приклад 4. Нехай щільності розподілів задано формулами

$$\rho(x) = 1,57 - \sum_{k=1}^5 \frac{\sqrt{2\pi}}{2k} \exp\left(\frac{-(2k)^2(x-k-2)^2}{2}\right),$$

$$\sigma(x) = 1,486 - \sum_{k=1}^5 \frac{\sqrt{2\pi}}{3k} \exp\left(\frac{-(3k)^2(0,2x-2k+2)^2}{2}\right).$$

Рис. 4 ілюструє у відносно простій формі один із дивних ефектів теорії конфліктних взаємодій. Коротко його можна сформулювати як ефект неминучої трансформації примітивного дикого хижака під впливом тонкої спектральної структури жертви. Докладніше суть ефекту полягає у наступному.

В початковий момент часу щільність розподілу опонента *A* (суцільна лінія) на сегменті [2, 8] перевищує або не поступається щільності розподілу опонента *B* (штрихова лінія) на рис. 4, *a*). На цьому сегменті *A* є хижак, а *B* — жертвою. Їхня істотна відмінність полягає у формі щільностей. У опонента *A* щільність на цьому сегменті майже незмінна, близька до 0,1, а щільність розподілу опонента *B* має досить хвилясту форму. Такий розподіл опонента *B* можна інтерпретувати як спектральну структурну нетривіальність (взагалі вона може мати надзвичайно складну будову і містити велику кількість інформації). Грубий (дикий) ефект конфліктної боротьби в цій моделі проявляється у втраті опонентом *B* на сегменті [2, 8] його структурної нетривіальності. Якою б багатою не була його

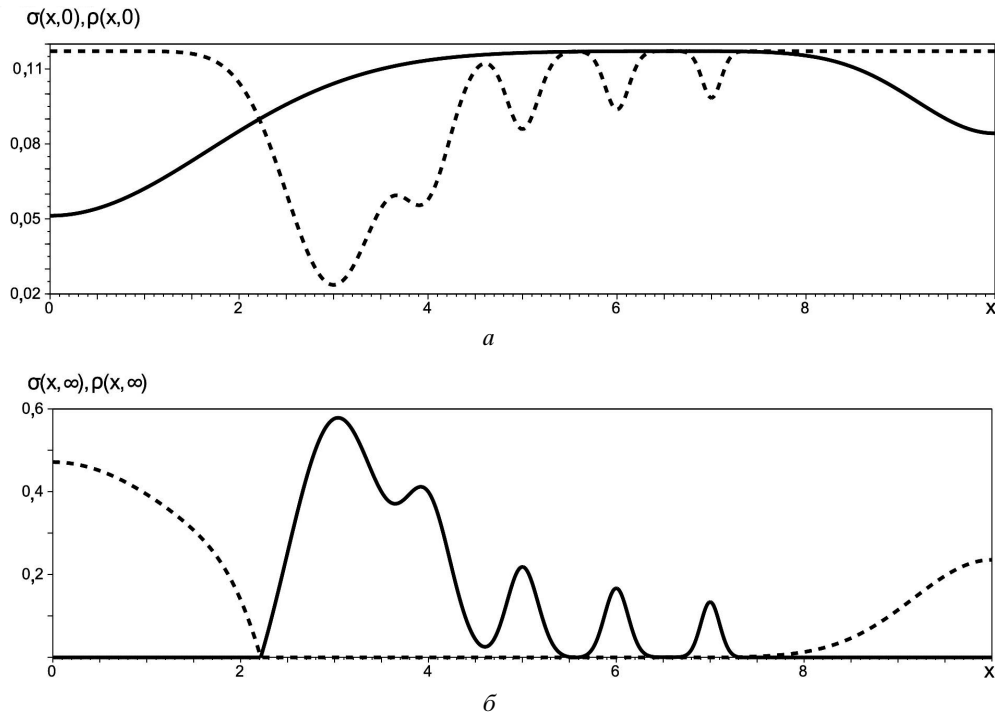


Рис. 4

спектральна картина, в результаті конфлікту щільність його розподілу занулюється, переходить у зону повного знищення (див. рис. 4, б). Натомість опонент А, який захоплює практично всю територію сегмента [2, 8], сильно змінює форму щільності свого розподілу. Вона стає хвилястою, тобто спектрально нетривіальною. Хижак трансформується під впливом жертви. Хоча образ відтворення структури опонента В майже фотографічно негативний, мінімуми переходять у максимуми, і навпаки. Цей ефект має надзвичайно важливі наслідки у моделях конфліктної боротьби біологічних субстанцій, коли дикий, але потужний субстрат забиває менш потужну популяцію складнішої спектральної будови, вбираючи в себе спотворений варіант коду його будови. В ході конфліктної взаємодії перерозподіляються не лише територія конфлікту, але і спектральні характеристики опонентів.

4. Замість дискусії. Існує багато публікацій щодо моделей, які досліджують феномен конфлікту. На формування нашого підходу вплинули роботи [12, 15, 16]. Популярна і відома модель динамічної системи конфлікту описує поведінку субстанцій типу „хижак – жертва” (див. [19, 20]) з різноманітними уточненнями формули конфліктних взаємодій. Найбільш універсальна модель описується рівняннями Лотки – Вольterra вигляду

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2),$$

де функції $x_i(t)$ позначають кількості конкурентних біологічних видів в момент часу t , а коефіцієнти r_i , a_{ik} є параметрами задачі. Рівняння (2.2) формально простіші, але завдяки стохастичній інтерпретації мають більш загальне коло для застосувань. Окрім того, використання щільностей дозволяє явно (графічно) ілюструвати динамічну поведінку і характер конфліктної взаємодії. Із формул (2.12) одержуємо явний закон розподілу кон-

фліктного простору: щільність граничної (післяконфліктної) присутності кожного з опонентів відмінна від нуля лише в точках стартового пріоритету. Цей висновок визначає правило компромісного поділу спірної території між противниками.

Замість фізичного протистояння між протилежними тенденціями (економічними конкурентами, релігійними, політичними чи соціальними групами) потрібно проводити теоретичний розрахунок на основі формул (2.12) і встановлювати розподіл спірної території договором без фізичних жертв. Важливо, що теорема 2.1 встановлює не лише межі рівноважного (компромісного) перерозподілу конфліктної території, а і нову щільність „справедливого” розподілу кожного з опонентів на своїй території. Цей аспект розвинутої тут теорії конфлікту в певному сенсі доповнює абстрактну схему знаходження рівноваги по Нешу з теорії ігор [21, 22].

Насамкінець відзначимо цікаві ефекти перерозподілу конфліктного простору в моделях соціології [23, 24], в термінах структурованих мір [25, 26] та в задачі „захоплення” території [27].

Література

1. Кошманенко В. Д. Теорема про конфлікт для пари стохастических векторов // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 4. — С. 555–560.
2. Koshmanenko V. The theorem of conflict for probability measures // Math. Meth. Oper. Res. — 2004. — **59**, № 2. — P. 303–313.
3. Кошманенко В. Д., Харченко Н. В. Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково-рівномірно розподілених мір // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 7. — С. 927–938.
4. Koshmanenko V, Kharchenko N. Spectral properties of image measures after conflict interactions // Theory Stochast. Process. — 2004. — **10** (26), № 3-4. — P. 73–81.
5. Bodnarchuk M. V., Koshmanenko V. D., Kharchenko N. V. Properties of limit states of dynamical conflict system // Nonlinear Oscillations. — 2004. — **7**, № 4. — P. 446–461.
6. Боднарчук М. В., Кошманенко В. Д., Самойленко І. В. Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 4. — С. 435–450.
7. Albeverio S., Koshmanenko V., Samoilenko I. The conflict interaction between two complex systems: cyclic migration // J. Interdiscipl. Math. — 2008. — **11**, № 2. — P. 163–185.
8. Koshmanenko V., Samoilenko I. The conflict triad dynamical system // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2011. — **16**. — P. 2917–2935.
9. Koshmanenko V. D., Karataeva T. V. Cyclic model of fire-water conflict // XVII Int. Conf. Dynam. System Modelling and Stability Investigation. — Kyiv, 2015. — P. 180.
10. Каратаєва Т. В., Кошманенко В. Д. Модель динамічної системи конфлікту типу „вогнь–вода” // Нелінійні коливання. — 2014. — **17**, № 2. — С. 228–247.
11. Renshaw E. Modelling biological populations in space and time. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. — 403 p.
12. Epstein J. M. Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science. — Addison-Wisley Publ. Co., 1997. — 164 p.
13. Kuang Y., Beretta E. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system // J. Math. Biol. — 1998. — **36**. — P. 389–406.
14. Maron M. Modelling populations: from malthus to the threshold of artificial life // Evolut. and Adapt. Systems. — Univ. Sussex, 2003. — P. 1–17.
15. Kar T. K. Modelling and analysis of a harvested prey-predator system incorporating a prey refuge // J. Comput. and Appl. Math. — 2006. — **185**. — P. 19–33.
16. Coleman P. T., Vallacher R., Nowak A., Bui-Wrzosinska L. Interactable conflict as an attractor: presenting a dynamical-systems approach to conflict, escalation, and interactability // IACM Meeting Paper. — 2007.

17. *Koshmanenko V. D.* Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems // *Meth. Funct. Anal. and Top.* — 2014. — **20**, № 4. — P. 379–390.
18. *Кошманенко В. Д., Петренко С. М.* Розклад Гана–Жордана як рівноважний стан системи конфлікту // *Укр. мат. журн.* — 2016. — **67**, № 1. — С. 64–77.
19. *Murray J. D.* *Mathematical biology I: An Introduction.* — Springer, 2002. — 551 p.
20. *Murray J. D.* *Mathematical biology II: spatial models and biometrical applications.* — Springer, 2004. — 811 p.
21. *фон Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
22. *Schelling T. C.* *The strategy of conflict.* — Cambridge: Harvard Univ. Press, 1980. — 309 p.
23. *Khan Md. Mahbubush Salam, Kazuyuki Ikko Takahashi.* Mathematical model of conflict and cooperation with non-annihilating multi-opponent // *J. Interdiscipl. Math.* — 2006. — **9**, № 3. — P. 459–473.
24. *Salam Md. Mahbubush Khan, Kazuyuki Ikko Takahashi.* Segregation through conflict // *Adv. Appl. Soc.* — 2013. — **3**, № 8. — P. 315–319.
25. *Koshmanenko V. D.* On dynamical system of conflict with fair redistribution of vital resources // *Int. Conf. Dynam. Syst. and Appl.* — Kyiv, 2015. — P. 31.
26. *Koshmanenko V., Verygina I.* Dynamical systems of conflict in terms of structural measures // *Meth. Funct. Anal. and Top.* — 2016. — **22**, № 1. — P. 81–93.
27. *Веригіна І. В.* Порівняння стратегій двох опонентів у задачі „захоплення” території // *Доп. НАН України.* — 2016. — № 5. — P. 7–12.

*Одержано 20.01.16,
після доопрацювання — 08.11.16*