Ядерное тормозное излучение

Книга содержит основные идеи развиваемой автором теории тормозного излучения фотонов от минимальных до промежуточных энергий, которое сопровождает альфа-распад, протонный распад, спонтанное деление, столкновения протонов с ядрами. Отдельное внимание уделяется угловым расчетам матричных элементов излучения. Теория оказывается успешной в предсказаниях спектров (без нормировки на эксперимент) для ряда распадов ядер. Изучается роль туннелирования, излучение фотонов из этой области, влияние деформации ядра на форму спектра излучения. Для описания взаимодействий используется потенциальный подход, что позволяет на языке волновых функций учитывать пространственное распределение нуклонов, связав их с реалистическими ядерными потенциалами. В описании экспериментальных данных излучения фотонов в столкновениях протонов с ядрами промежуточных энергий теория оказывается не менее успешной по сравнению с известными релятивистскими моделями, что делает ее неплохой альтернативой к теории Фейнмановских диаграмм. Но теория не содержит инфракрасной катастрофы, известной в квантовой электродинамике. Математический аппарат излагается с включением промежуточных выкладок с ориентиром на студента-физика.

Сергей Петрович Майданюк
Родился 4 июня 1968 года. Окончил физический факультет КГУ им. Шевченко (1992). Кандидат физико-математических наук (2003). Старший научный сотрудник Лаборатории временного анализа ядерных процессов Института ядерных исследований НАН Украины. Исследования направлены на развитие методов квантовой механики в ядерной физике, физике частиц и космологии

978-3-8473-9526-3

Ядерное тормозное излучение

Майданюк

Сергей Петрович Майданюк

Ядерное тормозное излучение

Методы квантовой механики и электродинамики в задачах излучения

Palmarium
academic publishing

Оглавление

Предисловие

Вопросам тормозного излучения было много уделено внимания. Конечно, по этой теме хотелось бы отметить прекрасные монографии [1, 2] и обзоры [3, 4]. Однако, несмотря на действительно длинную историю по изучению тормозных фотонов в разных задачах квантовой физики и огромное число публикаций в престижной прессе, излучение в процессах, где в качестве одного из взаимодействующих фрагментов выступает атомное ядро, изучено наименее глубоко.

Такая ситуация выглядит довольно странной, ведь одна из основных (и, возможно, первых) идей, зачем вообще изучать тормозное излучение, — это получить более глубокую, новую информацию о ядерных взаимодействиях. Ведь тормозное излучение дает исследователю свой совершенно независимый, и часто, более богатый путь для этого. Так, например, если рассмотреть альфа-распад ядер, то непосредственные экспериментальные методы его изучения выдают нам лишь пару характеристик — Q_α-значение и период полураспада. В то же время, направление экспериментальных измерений спектров тормозного излучения расширяет этот набор до бесконечности (в наше распоряжение поступают вероятности излучения в зависимости от разных энергий фотонов и углов).

Если при определении периодов полураспада для разных типов распадов квазиклассические методы (дающие проницаемость барьера) являются практически преобладающими, то при определении матричных элементов в задачах излучения их совершенно нет необходимости использовать и мы можем вообще отказаться от квазиклассики (поскольку проницаемость совершенно не используется в таких задачах). Из одного лишь только этого сравнения видно, что методы по определению тормозного излучения могли бы быть прекрасным тестом квазиклассических решений задач распадов ядер, тем более что они опираются на дополнительную экспериментальную информацию — спектры излучения.

Однако, разница между числом публикаций по исследованию альфа-распада и числом публикаций по излучению тормозных фотонов, которое его сопровождает, просто колоссальна. В базу ядерных данных Национальной лаборатории Брукхевена [5] информация о тормозных фотонах совершенно не включена, тогда как здесь экспериментальным и теоретическим исследованиям периодов полураспада разных типов распадов ядер уделено существенное внимание. В то же время, эта база данных является, по-видимому, наиболее крупной в ядерной физике на данный момент. Она собирает данные практически со всех престижных журналов, по этой тематике проводятся регулярные и действительно дорогие конференции с огромным числом участников.

Среди разнообразия задач излучения фотонов, где проявляются многонуклонные ядерные силы, более всего было приложено сил к изучению столкновений протонов с ядрами. Принято считать, что для успешного описания таких процессов важным является взаимодействие между двумя нуклонами, которое с ростом энергий сталкиваемых частиц и фотонов приобретает лидирующую роль. Поэтому в основу моделей, развиваемых с целью описания таких процессов при более высоких энергиях, положено взаимодействие между двумя отдельными нуклонами, с дальнейшим применением формализма диаграмм Фейнмана. Из литературы можно заметить довольно бурное развитие таких релятивистских подходов, откуда может сложиться впечатление об их безальтернативности. Но, рассмотрение ядра как некой среды позволяет включить пространственное распределение множества нуклонов, которое описывается на языке волновых функций. Такой путь подключает нелокальность квантовой механики, являющуюся одним из основных ее свойств, дает базис для оперирования с граничными и начальными условиями, учитывает коллективные (многочастичные) эффекты (которые должны внести свой вклад в описание ядерных взаимодействий) и может быть реализован в потенциальном подходе с подключением мощного аппарата квантовой механики.

С целью получить сходящиеся спектры излучения, исследователи часто прибегают к помощи приближений всякого рода, что, к сожалению, практически стирает чувствительность результатов к параметрам ядерных потенциалов. Иногда ключевые аспекты расчетов авторами часто не указываются в публикациях, что в последствии приводит к путанице вплоть до таких престижных журналов как Physical Review Letters. Достижением согласия расчетов с экспериментом исследования разных авторов часто заканчиваются, тогда как информация из полученных спектров о ядерных силах, о динамике процессов даже не поднимается. Все это указывает на то, что основной потенциал тормозного излучения как средства для определения ядерных сил практически не задействован, несмотря на очень длинную историю по изучению тормозного излучения.

По моему мнению, основной причиной сложившейся ситуации является трудность описания ядерных сил в сложной многонуклонной системе. Всякая попытка включить в расчеты реалистические ядерные взаимодействия и сохранить к ним чувствительность при расчете спектров излучения делает такую задачу исключительно трудоемкой[1]. Об этом всякий раз писалось теми авторами, которые пытались в своих расчетах задействовать реалистические ядерные потенциалы. Поэтому, именно этому типу тормозного излучения и уделено внимание в этой книге. В основе описания взаимодействий выбран потенциальный подход, с стремлением максимально сохранить нелокальные эффекты квантовой механики и чувствительность спектров излучения к параметрами ядерных потенциалов. По этим причинам, изначальной моей задумкой при написании книги было стремление довести весь математический аппарат методов до максимально доступной формы, включив в изложение промежуточные выкладки, с целью стать понятными для студента-физика.

В первой главе рассмотрена задача тормозного излучения при альфа-распаде. Основной формализм развивается для этого процесса. Анализируются преимущества и недостатки разных подходов при сравнении расчетных спектров с имеющимися экспериментальными данными.

Наиболее удачное достижение согласия с экспериментом не должно быть всей целью развития модели. Напротив, более интересной выглядит следующая и более трудная задача: как получить новую информацию о протекании распада из экспериментальных данных вероятностей тормозного излучения, которое сопровождает этот распад. Во второй главе рассматривается дальнейшее развитие формализма модели, представленной в предыдущей главе, с уклоном включить деформацию ядра и выяснить ее влияние на спектр тормозного излучения. Модель, построенная в таком направлении, позволяет получать стабильные спектры излучения в зависимости от разных значений угла θ_β между направлением движения α-частицы (и ее туннелирования в подбарьерной области) и осью аксиальной симметрии деформированного ядра. Так, для ядра ^{226}Ra наблюдается стабильная картина отличия между вероятностями излучения, полученными для $\theta_\beta = 90^\circ$ и $\theta_\beta = 180^\circ$. А сравнение расчетных кривых с экспериментом показывает чувствительность такого подхода к извлечению наиболее подходящего значения для параметра квадрупольной деформации β_2.

[1]Таких работ крайне мало, несмотря на огромное число работ, посвященных изучению тормозных фотонов во всевозможных видах столкновений частиц, распадов и делении ядер.

Однако, дальнейшее развитие теории предыдущей главы с целью применить ее на множество α-распадных ядер для определения однозначной и ясной зависимости между формой деформации и формой спектра тормозных фотонов привело к значительным затруднениям. (1) Такая задача оказалась крайне неустойчивой. Ясная картина влияния деформации ядра на спектр излучения оказывается заметной лишь при отказе от ряда приближений (дипольного и др.). Но такой путь вычислений колоссально снижает сходимость счета матричных элементов, требует больше компьютерного времени, что делает дальнейшие анализ и поиски крайне сложными. (2) Среди всех имеющихся экспериментальных данных тормозного излучения при α-распаде, на данное время есть лишь одно ядро с заметной деформацией — это ^{226}Ra. Так-что экспериментальной информации крайне мало для более серьезного развития такого исследования. Из анализа всего имеющегося арсенала экспериментальных данных по излучению тормозных фотонов в разных видах распадов ядер, мы заметили, что такая связь значительно сильнее проявляется при спонтанном делении, а для развития теории имеется неплохой экспериментальный материал. Таким исследованиям посвящена третья глава.

Теория, излагаемая в предыдущих трех главах, базировалась на нерелятивистском уравнении Шредингера при определении волновых функций распадающей ядерной системы. В то же время, в литературе имеется больший спектр задач излучения фотонов с более высокими энергиями, для решения которых преимущественно развивались модели, построенные на принципиальной иной релятивистской основе, где ключевым элементом является аппарат квантовой теории полей с применением техник Фейнмановских диаграмм. С целью обобщить теорию предыдущих трех глав на релятивистские задачи излучения фотонов, в последней четвертой главе сделан первый шаг в таком направлении, где принципиально найден путь развития такой модели и теория развивается с основой на уравнении Паули, как первого приближения уравнения Дирака. Такая модель применяется к изучению тормозного излучения от минимальных до промежуточных энергий, которое сопровождает столкновения протонов с ядрами и протонный распад ядер. Она включает спиновый формализм, потенциальный подход к описанию взаимодействий протонов с ядрами, а оператор излучения включает магнитное излучение. Отдельное внимание отводится изучению магнитного излучения в рассматриваемых процессах. Как оказалось, такой подход не менее успешен в описании всех имеющихся экспериментальных данных излучения тормозных фотонов промежуточных энергий при столкновениях протонов с ядрами по сравнению с результатами, полученными на основе релятивистских квантово-полевых моделей, имеющих достаточно долгую историю (в несколько десятилетий) и имеющих достаточно много публикаций. Это указывает, что потенциальный подход к описанию взаимодействий в ядерных задачах излучения промежуточных энергий может стать серьезной альтернативой к квантово-полевым теориям с применением техник Фейнмановских диаграмм.

Я благодарен А. К. Зайченко и И. Е. Кашубе за их помощь в работе над численными методами и их компьютерной реализацией, Дж. Джардина за его активное содействие при работе с разными частями материала, А. К. Насирову за многократные полезные обсуждения свойств распадов и деления ядер. Особо хотелось бы выразить благодарность В. С. Ольховскому за его стимулирование, постоянную поддержку и помощь в работе над всем этим материалом на протяжении многих лет.

Киев, октябрь 2012 г. *С. П. Майданюк*

Некоторые обозначения:

i — индекс для обозначения состояния фрагмент-ядерной системы перед излучением фотона (называемого также начальным i-состоянием), добавляется ко всем квантовым числам этого состояния;

f — индекс для обозначения состояния фрагмент-ядерной системы после излучения фотона (называемого также конечным f-состоянием), добавляется ко всем квантовым числам этого состояния;

$\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{i}$ — единичный вектор, указывающий направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ от центра системы координат до точки пространства, где волновая функция фрагмент-ядерной системы описывает фрагмент в состоянии до излучения фотона;

$\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f}$ — единичный вектор, указывающий направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ от центра системы координат до точки пространства, где волновая функция фрагмент-ядерной системы описывает фрагмент в состоянии после излучения фотона;

$\mathbf{n}_{\mathrm{ph}}$ — единичный вектор, указывающий направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ от центра системы координат до точки пространства, где волновая функция фотона описывает его “появление”;

$\Psi_k(t)$ — нестационарная волновая функция квазистационарного состояния фрагмент-ядерной системы при ее распаде по уровню E_k;

$\psi_i(\mathbf{r}) = |k_i\rangle$ и $\psi_f(\mathbf{r}) = |k_f\rangle$ — стационарные волновые функции фрагмент-ядерной системы в начальном i-состоянии и конечном f-состоянии;

$\varphi_i(r)$ и $\varphi_f(r)$ — радиальные компоненты от стационарных волновых функций фрагмент-ядерной системы в начальном i-состоянии и конечном f-состоянии;

E_i и E_f — полная энергия фрагмент-ядерной системы в начальном i-состоянии и в конечном f-состоянии;

k_i и k_f — волновой вектор фрагмент-ядерной системы в начальном i-состоянии и в конечном f-состоянии;

θ_β — угол между направлением вылета α-частицы и осью аксиальной симметрии дочернего деформированного ядра при α-распаде (глава 2);

β_2 — параметр квадрупольной деформации дочернего ядра при α-распаде (глава 2);

$\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — единичные вектора линейной поляризации фотона (в кулоновской калибровке $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярны к вектору $\mathbf{k}$, где $\alpha = 1, 2$);

$\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$ — единичные вектора круговой поляризации фотона (перпендикулярны к вектору $\mathbf{k}$ в кулоновской калибровке);

$\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}$ — волновой вектор фотона (иногда нижнее обозначение будет опускаться);

$w = k = |\mathbf{k}|$ — частота (энергия) фотона.

Глава 1

Излучение при альфа-распаде ядер

В этой главе представлена мультипольная модель тормозного излучения, которое сопровождает α-распад. Отдельное внимание уделяется развитию углового формализма для определении матричных элементов излучения. Введено определение абсолютной вероятности тормозного излучения, где направление движения α-частицы над барьером (и ее туннелирования под барьером) определяется пространственным распределением ее волновой функции. Выполнен сравнительный анализ дипольного и мультипольного подходов, получена зависимость вероятности излучения от Q_α-значения, чисел протонов и нейтронов ядра. Эффективность модели и точность вычислений спектров анализируются в сравнении с имеющимися экспериментальными данными для ядер ^{210}Po, ^{214}Po, ^{226}Ra и ^{244}Cm. Даны предсказания спектров излучения для изотопов Th. Получена эмпирическая формула вероятности тормозного излучения при α-распаде.

1.1 Введение

За последние 20 лет много экспериментальных и теоретических усилий было приложено к изучению природы тормозного излучения, которое сопровождает α-распад ядер. Ключевая идея этих исследований состоит в поиске метода по извлечению новой информации о динамике α-распада и динамике туннелирования из экспериментальных спектров излучения. Продолжительности туннелирования в ядерных процессах имеют чрезвычайно малые значения, которые приближаются к ядерным временам. Этот факт приводит к практической невозможности проверить экспериментально нестационарные подходы к описанию туннелирования в ядерных задачах и построить на их основе динамические ядерные модели. Однако, исследователи находят новые пути, как извлечь новую информацию о динамике ядерных процессов. В частности, именно этим объясняется возрастающий интерес к изучению процессов тормозного излучения фотонов, которое сопровождает α-распад: через анализ измеренных спектров тормозного излучения найти продолжительность туннелирования α-частицы через барьер распада и количественно описать динамику α-распада (возможно, на первой его стадии).

Уже разработано достаточно много подходов к описанию тормозного излучения при α-распаде. Здесь наиболее интенсивно развивались модели с *квазиклассическим описанием α-распада* [6–8]. Квазиклассический подход в сравнении с полностью квантовым позволяет работать с рядом характеристик и параметров, физический смысл которых понятен, что позволяет быстрее разобраться в исследуемых вопросах этой задачи. В этом направлении особенно хотелось бы отметить недавний успех в описании новых экспериментальных данных для ядра ^{210}Po [9, 10]. Есть хорошие перспективы в исследовании динамики α-распада с анализом спектров излучения [11–13], в изучении динамики туннелирования при α-распаде непосредственно [14–17]. Вызывает интерес эффект [18], названный *эффектом Мюнхаузена*, который состоит в возрастании проницаемости барьера в результате излучения заряженной частицы во время ее туннелирования.

Однако, *прямой квантовый подход* (т. е. без применения квазиклассического приближения, когда волновые функции определяются при численном решении уравнения Шредингера з выбранным потенциалом) есть наиболее точным, богатым при изучении новых свойств и эффектов [19]. В этом направлении преимущественно развивалась модель, впервые предложенная Папенброком и Бертчем в работе [20], где волновая функция фотонов рассматривалась в дипольном приближении. Как оказалось, дипольное приближение существенно повышает сходимость вычислений матричного элемента излучения без заметной потери точности, что делает задачу доступной в квантовом подходе для многих исследователей. Нами разрабатывалась угловая квантовая модель, где при описании волновой функции фотонов были учтены дальнейшие коррекции и использован реалистический потенциал взаимодействия между α-частицей и ядром, согласно [21]. В рамках такой модели были реализованы два подхода, основанные на разных разложениях волновой функции фотонов: мультипольном [22] и разложении по сферическим волнам [23, 24].

Во втором подходе уже достигнуто согласие в описании новых экспериментальных данных для ^{210}Po, ^{214}Po ^{226}Ra [25–28]. Мультипольный подход разработан значительно меньше, который в то же время является более корректным при пространственном описании излучения. Поэтому появляется интерес в доведении этого подхода до надлежащего уровня. Как оказалось, такая модель позволяет рассчитывать абсолютные значения вероятностей излучения без их нормировки на экспериментальные данные. Это открывает возможность изучать излучение в распадах любого ядра, предсказывая новые спектры. Однако, не ясно, насколько сильно зависит излучение от энергии, с которой вылетает α-частица, да и существуют ли другие характеристики, влияние которых на излучение также существенно. Этим вопросам посвящена эта глава.

1.2 Движение заряженной частицы в электромагнитном поле ядра

Частицу с массой m, движущуюся в поле ядра с потенциалом $U(\mathbf{r})$, можно описать с помощью гамильтониана

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \triangle + U(\mathbf{r}). \tag{1.1}$$

Если частица электрически заряжена, то кроме поля $U(\mathbf{r})$ она подвергается действию электромагнитного поля с векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, создаваемого этим ядром. В этом случае гамильтониан частицы в суммарном поле ядра может быть построен из *уравнения Паули* (см. [29], стр. 264–271; также [30], стр. 187)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \Bigl(\hat{\mathbf{p}} - Z_{\mathrm{eff}} \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\Bigr)^2 + e\, A_0 - Z_{\mathrm{eff}} \frac{e\hbar}{2mc}\, \mu \times \mathbf{rot}\, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}) = \hat{H}_0 + \hat{W}, \tag{1.2}$$

где

$$\hat{W} = -Z_{\mathrm{eff}}\, \frac{e}{2mc}\, \Bigl(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}\Bigr) + e\, A_0 - Z_{\mathrm{eff}}\, \frac{e\hbar}{2mc}\, \mu \times \mathbf{rot}\, \mathbf{A} + Z_{\mathrm{eff}}^2\, \frac{e^2}{2mc^2}\, \mathbf{A}^2. \tag{1.3}$$

Здесь $\hat{W}$ — оператор взаимодействия, Z_{eff} — эффективный заряд системы (частица и дочернее ядро), μ — магнитный момент частицы. Далее в этой главе мы пренебрежем влиянием магнитного поля, т. е. примем $\mu = 0$. Также не будем рассматривать компоненту при A_0, считая ее меньшей по сравнению с остальными. Учитывая *кулоновскую* *калибровку* ($\text{div}\,\mathbf{A} = 0$), а также пренебрегая слагаемым, пропорциональным $\mathbf{A}^2/c^2$, получим

$$\hat{W} = -Z_{\text{eff}}\,\frac{e}{mc}\,\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}. \tag{1.4}$$

1.3 Теория возмущений квазистационарных состояний

Распадающееся ядро будем рассматривать как *составную систему: α-частица и дочернее ядро*. Пусть $\Psi_k^0(t)$ — нестационарная волновая функция квазистационарного состояния этой системы при ее распаде по уровню E_k, $\hat{H}_0(t)$ — гамильтониан этой системы. Тогда запишем

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_k^{(0)}(t)}{\partial t} = \hat{H}_0(t)\Psi_k^{(0)}(t). \tag{1.5}$$

Произвольное решение уравнения Шредингера может быть записано в виде интеграла

$$\Psi^{(0)}(t) = \int\limits_{k_{min}} a_k\Psi_k^{(0)}(t)dk, \tag{1.6}$$

где a_k — не зависящий от времени весовой коэффициент, определяющий относительный вес распада системы по уровню E_k.

При своем движении в электромагнитном поле дочернего ядра α-частица излучает тормозные фотоны. Будем полагать, что такой процесс возможен и при ее туннелировании (наличие или отсутствие такого излучения определит вероятность излучения при туннелировании). Процесс излучения меняет полную энергию рассматриваемой системы, и мы будем рассматривать его как возмущение системы. Далее будем изучать спонтанное излучение фотонов, т. е. когда частица подвергается воздействию поля лишь до первого излучения тормозного фотона. *Поэтому мы имеем дело с возмущением, действующим на систему в течение некоторого интервала времени. Моменты времени начала и конца действия возмущения на систему определяются таким началом и таким концом временного интервала, в течении которого мы принимаем возможным тормозное излучение α-частицей.* Запишем возмущенный гамильтониан в виде:

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0(t) + \hat{W}(t), \tag{1.7}$$

где $\hat{W}(t)$ — оператор возмущения, зависящий от времени.

Задача заключается в приближенном вычислении новых волновых функций $\Psi(t)$ по волновым функциям квазистационарных состояний $\Psi_k^{(0)}(t)$ невозмущенной системы. Неизвестные волновые функции будем искать из временного уравнения Шредингера с возмущенным гамильтонианом

$$i\hbar\,\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = (\hat{H}_0(t) + \hat{W}(t))\,\Psi(t), \tag{1.8}$$

в виде:

$$\Psi(t) = \int\limits_{k_{min}} a_k(t)\,\Psi_k^{(0)}(t)\,dk, \tag{1.9}$$

где коэффициенты разложения $a_k(t)$ уже являются функциями времени (см. [31] п. 40, стр. 177). Подставляя (1.9) в (1.8), запишем

$$i\hbar\int\limits_{k_{min}}\frac{\partial a_k(t)}{\partial t}\Psi_k^{(0)}\,dk + i\hbar\int\limits_{k_{min}} a_k(t)\frac{\partial\Psi_k^{(0)}}{\partial t}\,dk = \hat{H}_0\int\limits_{k_{min}} a_k(t)\Psi_k^{(0)}\,dk + \hat{W}(t)\int\limits_{k_{min}} a_k(t)\Psi_k^{(0)}\,dk. \tag{1.10}$$

Учитывая (1.5), получим

$$i\hbar \int\limits_{k_{min}} \Psi_k^{(0)} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t}\, dk = \int\limits_{k_{min}} \hat{W}(t)\, a_k(t)\, \Psi_k^{(0)}\, dk. \tag{1.11}$$

Здесь мы вводим оператор $\hat{W}(t)$ под знак интеграла, используя *свойство линейности (суперпозиции)* его действия на множество функций $\Psi_k^{(0)}$ при разных k. Считая весовые множители $a(t)$ зависящими лишь от времени, на которые не действует оператор $\hat{W}(t)$, получим

$$i\hbar \int\limits_{k_{min}} \Psi_k^{(0)} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t}\, dk = \int\limits_{k_{min}} a_k(t)\, \hat{W}(t)\, \Psi_k^{(0)}\, dk. \tag{1.12}$$

Умножая обе стороны этого равенства слева на $\Psi_m^{(0),*}$ и интегрируя по переменной $\mathbf{r}$ по всему пространству, получим

$$i\hbar \int\limits_{k_{min}} \left(\int \Psi_m^{(0),*} \Psi_k^{(0)} \mathbf{dr} \right) \cdot \frac{\partial a_k(t)}{\partial t}\, dk = \int\limits_{k_{min}} a_k(t) \cdot \left(\int \Psi_m^{(0),*} \hat{W}(t) \Psi_k^{(0)} \mathbf{dr} \right) dk. \tag{1.13}$$

Предположим, что для описания распадающей системы можно выбрать систему квазистационарных волновых функций $\Psi_k^{(0)}$ такой, чтобы она удовлетворяла следующему условию нормировки (для состояний в непрерывном спектре) (см. [31], п. 5, стр. 30–35):

$$\int \Psi_m^{(0),*}(t)\, \Psi_k^{(0)}(t)\, \mathbf{dr} = \delta(k-m). \tag{1.14}$$

С учетом этого перепишем (1.13) в виде:

$$i\hbar \frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = \int\limits_{k_{min}} a_k(t)\, W_{mk}(t)\, dk, \tag{1.15}$$

где

$$W_{mk}(t) = \int \Psi_m^{(0),*}\, \hat{W}(t)\, \Psi_k^{(0)}\, \mathbf{dr} \tag{1.16}$$

— матричные элементы возмущения, включающие временной множитель.

В качестве невозмущенной волновой функции возьмем волновую функцию квазистационарного i-состояния до излучения, чему соответствуют значения коэффициентов в (1.9): $a_i^{(0)} = \delta(k-i)$ (т. е. $a_k^{(0)} = 0$ при $k \neq i$). Для определения первого приближения ищем a_k в виде $a_k = a_k^{(0)} + a_k^{(1)}$, причем в правую сторону уравнения (1.15) (уже содержащего малые величины V_{mk}) подставляем $a_k = a_k^{(0)}$. Это дает

$$i\hbar \frac{\partial a_k^{(1)}(t)}{\partial t} = W_{ki}(t), \tag{1.17}$$

Для того чтобы указать, к какой из невозмущенных функций вычисляется поправка, введем второй индекс у коэффициентов a_k, написав

$$\Psi_i(t) = \int\limits_{k_{min}} a_{ki}(t)\, \Psi_k^{(0)}(t)\, dk. \tag{1.18}$$

Соответственно этому, напишем результат интегрирования уравнения (1.17) в виде:

$$a_{ki}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int W_{ki}(t)\, dt. \tag{1.19}$$

Таками весовыми множителями определяются волновые функции первого приближения.

1.4 Матричный элемент перехода

Рассмотрим волновые пакеты вида:

$$\Psi_{i,f}(\mathbf{r},t) = \int\limits_0^{+\infty} g(k-k_{i,f})\,\psi_{i,f}(k,\mathbf{r})\,e^{-iw(k)t}\,dk. \tag{1.20}$$

Используем их в качестве нестационарных волновых функций начального и конечного состояний. Для таких пакетов выполняются свойства:

$$\begin{aligned} &e^{-i\hat{H}_0 t}\,\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i(\mathbf{r})\,e^{-iw_i t},\\ &\psi_f^*(\mathbf{r})\,e^{i\hat{H}_0 t} = \psi_f^*(\mathbf{r})\,e^{iw_f t}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Теперь будем считать, что как в начальном так и в конечном состояниях система определяется также числом находящихся фотонов. Для строгого описания этого, перейдем от рассмотрения системы без излучения, которое учитывается как возмущение внешним полем, к рассмотрению системы с существующим в ней излучением, где как начальное так и конечное ее состояние определяется волновой функцией, уже зависящей также от чисел заполнения фотонов. Как и ранее, определим матричный элемент перехода $i \to f$ такой системы как первую поправку (1.19) (получаем подобно п. 41–42 в [31]):

$$a_{fi}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} \langle k_f, n_k+1\,|\,\hat{W}(\mathbf{r},t')\,|\,k_i, n_k\,\rangle\,dt', \tag{1.22}$$

где $\Psi_i(\mathbf{r},t) = |k_i\rangle$ и $\Psi_f(\mathbf{r},t) = |k_f\rangle$ — нестационарные волновые функции системы в начальном i-состоянии и в конечном f-состоянии, которые не учитывают излучение фотонов; $\hbar w = E$; n_k — число фотонов одного сорта с импульсом $\mathbf{k}$ в начальном i-состоянии. Если $n_k = 0$, тогда излучение называется *спонтанным*. Если $n_k > 0$, тогда излучение называется *вынужденным (индуцированным)*. Наличие фотонов в начальном состоянии стимулирует дополнительное испускание фотонов этого же сорта (что видно далее из формулы для вероятности излучения). Матричный элемент (1.22) определен в первом приближении по теории возмущений. Более простой формализм можно построить в рациональной системе единиц, в которой $\hbar = 1$ и $c = 1$. Однако, для полноты картины, мы будем выписывать постоянные $\hbar$ и c явно. Распишем выражение (1.22) для матричного элемента a_{fi}:

$$\begin{aligned} a_{fi}(t) &= -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} \Bigl\langle \Psi_f(\mathbf{r},t'),\ n_k+1 \Bigm| \hat{W}(\mathbf{r},t') \Bigm| \Psi_i(\mathbf{r},t'),\ n_k \Bigr\rangle\,dt' \ = \\ = \ & -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} \Bigl\langle \int\limits_0^{+\infty} g(k_2-k_f)\,\psi_f(k_2,\mathbf{r})\,e^{-iw(k_2)t}\,dk_2,\ n_k+1 \Bigm| \hat{W}(\mathbf{r},t') \times \\ \times & \ \Bigm| \int\limits_0^{+\infty} g(k_1-k_i)\,\psi_i(k_1,\mathbf{r})\,e^{-iw(k_1)t}\,dk_1,\ n_k \Bigr\rangle\,dt' \ = \ -\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^{+\infty} dk_2 \int\limits_0^{+\infty} dk_1\,g^*(k_2-k_f)\,g(k_1-k_i) \times \\ \times & \ \Bigl\langle \psi_f(k_2,\mathbf{r}),\ n_k+1 \Bigm| \int\limits_{t_0}^{t} e^{iw(k_2)t'}\,\hat{W}(\mathbf{r},t')\,e^{-iw(k_1)t'}\,dt' \Bigm| \psi_i(k_1,\mathbf{r}),\ n_k \Bigr\rangle \end{aligned}$$

или

$$a_{fi}(t) = \int\limits_0^{+\infty} dk_2 \int\limits_0^{+\infty} dk_1 \cdot g^*(k_2-k_f)\,g(k_1-k_i)\cdot\langle k_2, n_k+1|\,\tilde{W}(\mathbf{r},t)\,|\,k_1, n_k\rangle, \tag{1.23}$$

где

$$\tilde{W}(\mathbf{r},t) = -\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t} e^{iw_2t'}\,\hat{W}(\mathbf{r},t')\,e^{-iw_1t'}\;dt'. \tag{1.24}$$

В кулоновской калибровке оператор взаимодействия $\hat{W}(\mathbf{r},t)$ имеет вид (1.4).

Вычислим матричный элемент a_{fi}. Для этого возьмем векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ электромагнитного поля дочернего ядра с учетом кулоновской калибровки в виде (см. стр. 22, 28 в [32]):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_{\mathbf{k},\alpha}\Bigl(\hat{c}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{A}_{\mathbf{k},\alpha} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{A}^{*}_{\mathbf{k},\alpha}\Bigr), \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k},\alpha} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}}\;\mathbf{e}^{(\alpha)}\;e^{i(\mathbf{kr}-wt)}, \tag{1.25}$$

где $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — единичные вектора поляризации излученного фотона, $\mathbf{k}$ — волновой вектор фотона и $w = k = |\mathbf{k}|$. Вектора $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярны к $\mathbf{k}$ в кулоновской калибровке. Мы имеем две независимые поляризации $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона с импульсом $\mathbf{k}$ ($\alpha = 1, 2$). С учетом (1.4) и (1.25), запишем

$$\hat{W}(\mathbf{r},t) = -Z_{\mathrm{eff}}\,\frac{e}{mc}\sum_{k,\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}}\;\Bigl(\hat{c}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)}e^{i(\mathbf{kr}-wt)} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha),*}e^{-i(\mathbf{kr}-wt)}\Bigr)\,(-i\hbar)\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}. \tag{1.26}$$

Подставляя это выражение в (1.24), получим

$$\tilde{W}(\mathbf{r},t) \;=\; Z_{\mathrm{eff}}\,\frac{e}{mc}\sum_{k,\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}}\int\limits_{t_0}^{t} e^{iw_2t'}\;\Bigl(\hat{c}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)}e^{i(\mathbf{kr}-wt)} + \hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha),*}e^{-i(\mathbf{kr}-wt)}\Bigr)\;e^{-iw_1t'}\;dt'\;\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}. \tag{1.27}$$

Матричный элемент перехода преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\langle k_2, n_k+1|\,\tilde{W}(t)\,|\,k_1, n_k\rangle &= -\frac{i}{\hbar}\,\Bigl\langle k_2, n_k+1\Bigl|\int\limits_{t_0}^{t} e^{iw_2t'}\,\hat{W}(\mathbf{r},t')\,e^{-iw_1t'}\;dt'\Bigr|k_1, n_k\Bigr\rangle = \\
&= Z_{\mathrm{eff}}\,\frac{e}{mc}\sum_{k,\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}}\cdot\Bigl\langle k_2, n_k+1\Bigl|\hat{c}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha)}e^{i\mathbf{kr}}\int\limits_{t_0}^{t} e^{i(w_2-w_1-w)t'}\;dt'\;\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} + \\
&+ \hat{c}^{+}_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}^{(\alpha),*}e^{-i\mathbf{kr}}\int\limits_{t_0}^{t} e^{i(w_2-w_1+w)t'}\;dt'\;\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Bigr|k_1, n_k\Bigr\rangle.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Фотоны подчиняются статистике Бозе, согласно которой:

$$\begin{aligned}
\langle n_k+1|\,\hat{c}^{+}_{k,\alpha}\,|\,n_k\rangle &= \sqrt{n_k+1}, \\
\langle n_k+1|\,\hat{c}_{k,\alpha}\,|\,n_k\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Согласно (1.29), первое слагаемое в (1.28) сводится к нулю и мы получаем

$$\langle k_2, n_k+1|\,\tilde{W}(t)\,|\,k_1, n_k\rangle = Z_{\mathrm{eff}}\,\frac{e}{m}\sum_{k,\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}}\Bigl\langle k_2\Bigl|\,\mathbf{e}^{(\alpha),*}e^{-i\mathbf{kr}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Bigr|\,k_1\Bigr\rangle\sqrt{n_k+1}\;\int\limits_{t_0}^{t} e^{i(w_2-w_1+w)t'}dt'. \tag{1.30}$$

Далее мы будем изучать спонтанное излучение, т. е. излучение лишь первого фотона с импульсом $\mathbf{k}$, до излучения которого фотонов этого сорта не было ($n_k = 0$). Тогда сумму по n_k можно опустить и выражение (1.30) упрощается:

$$\langle k_2, 1|\,\tilde{W}(t)\,|\,k_1, 0\rangle = Z_{\mathrm{eff}}\,\frac{e}{m}\sum_{\alpha=1,2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}}\cdot\Bigl\langle k_2\Bigl|\,\mathbf{e}^{(\alpha),*}e^{-i\mathbf{kr}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Bigr|\,k_1\Bigr\rangle\cdot\int\limits_{t_0}^{t} e^{i(w_2-w_1+w)t'}\;dt'. \tag{1.31}$$

1.5 Осцилляции в спектрах излучения в нестационарном рассмотрении

Если на систему (α-частица и дочернее ядро) действует возмущение в течение некоторого конечного временного интервала t, то мы получим (при $w_1 - w_2 \neq w$):

$$\begin{aligned}\langle k_2, 1|\, \tilde{W}(t)\,|\, k_1, 0\rangle \; &= \; Z_{\mathrm{eff}}\, \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \Bigl\langle k_2 \Bigl|\, \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \,\Bigr|\, k_1 \Bigr\rangle \cdot \frac{e^{i(w_2-w_1+w)t'}}{i(w_2-w_1+w)}\Bigg|_{t'=0}^{t'=t} = \\ = \; Z_{\mathrm{eff}}\, \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}}\, &\Bigl\langle k_2 \Bigl|\, \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \,\Bigr|\, k_1 \Bigr\rangle \frac{\sin{(w_2-w_1+w)\,t} - i\cos{(w_2-w_1+w)\,t} + i}{w_2-w_1+w}\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\langle k_2, 1|\, \tilde{W}(t)\,|\, k_1, 0\rangle = Z_{\mathrm{eff}}\, \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \Bigl\langle k_2 \Bigl|\, \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \,\Bigr|\, k_1 \Bigr\rangle \cdot \frac{i}{w_2-w_1+w} \; + \\ + \;\; Z_{\mathrm{eff}}\, \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}}\, \Bigl\langle k_2 \Bigl|\, \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \,\Bigr|\, k_1 \Bigr\rangle \frac{\sin{(w_2-w_1+w)\,t} - i\cos{(w_2-w_1+w)\,t}}{w_2-w_1+w}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Первое слагаемое в этой формуле — это независящая от временного интервала t функция, которая определяет вероятность излученного фотона при α-распаде в стационарном подходе. Второе слагаемое вносит в матричный элемент осцилляции, период которых непосредственно связан с продолжительностью t действия возмущения. Итак, мы получили вероятность тормозного излучения, содержащую как монотонную, так и осциллирующую составляющие.

Теперь можно учесть, что при вылете α-частица проходит через все атомные оболочки. Можно выделить некую границу R_{at} завершающей внешней оболочки, где заканчивается ее влияние на α-частицу. При определении вероятностей излучения фотонов следует включить все эти оболочки в суммарный электромагнитный заряд (уже зависящий от расстояния между центрами масс α-частицы и дочернего ядра): если при старте α-частицы этот заряд практически равен числу протонов дочернего ядра (т. е. его зарядовому числу, которое является достаточно большим, поскольку α-распадные ядра обычно тяжелые), то при пересечении α-частицы границы R_{at} этот заряд снизится до -2. Если за пределами внешней границы R_{at} влиянием такого суммарного электромагнитного поля на α-частицу можно пренебречь, то область расстояний до R_{at} можно рассматривать, как область реального воздействия электромагнитного поля атома на α-частицу. В таком рассмотрении период осцилляций несет информацию о временной продолжительности пролета α-частицы, начиная от момента ее формирования в ядре и заканчивая ее покиданием пространственной области внешней атомной оболочки с границей R_{at}.

1.6 Стационарное приближение

Рассмотрим пределы интегрирования:

$$t_0 = -\infty, \quad t_1 = +\infty. \tag{1.33}$$

Учитывая свойство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\, dt = 2\pi\, \delta(\alpha), \tag{1.34}$$

из (1.31) получим

$$\langle k_2, 1|\, \tilde{W}\, | k_1, 0\rangle = Z_{\text{eff}}\, \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \Bigl\langle k_2 \Bigr| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Bigl| k_1 \Bigr\rangle \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w). \qquad (1.35)$$

Пусть

$$F_{fi} = Z_{\text{eff}}\, \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}}\, p\,(k_i, k_f), \quad p\,(k_i, k_f) = \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} \mathbf{p}(k_i, k_f), \quad \mathbf{p}(k_i, k_f) = \Bigl\langle k_2 \Bigr| e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Bigl| k_1 \Bigr\rangle. \qquad (1.36)$$

Тогда выражение (1.35) перепишем так:

$$\langle k_2, 1|\, \tilde{W}\, | k_1, 0\rangle = F_{21} \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w). \qquad (1.37)$$

Матричный элемент (1.23) приобретает вид:

$$a_{fi} = \int dk_2 \int dk_1\; g^*(k_2 - k_f)\, g(k_1 - k_i) \cdot F_{21} \cdot 2\pi\delta(w_2 - w_1 + w). \qquad (1.38)$$

Для *квазимонохроматических пакетов* имеем

$$a_{fi} = (\Delta k)^2 |C|^2 \cdot F_{fi} \cdot 2\pi\, \delta(w_2 - w_1 + w), \qquad (1.39)$$

где C — постоянная. Выберем ее, введя нормировку для пакетов

$$(\Delta k)^2 C^2 = 1. \qquad (1.40)$$

Тогда получим окончательное выражение для матричного элемента

$$a_{fi} = F_{fi} \cdot 2\pi\, \delta(w_f - w_i + w). \qquad (1.41)$$

Это выражение совпадает (с точностью до множителя 2π) с общей структурой матричного элемента в подходе квантовой теории поля (например, см. [29] (21.2) п. 21, стр. 168–169, где функция F_{fi} для *связных* диаграмм является гладкой, не содержащей других δ-функций). Наличие сингулярного множителя в (1.41) отвечает закону сохранения полной энергии системы с излучением.

Далее нас будут интересовать *вероятности переходов*, определенные на основе квадрата матричного элемента a_{fi}. В квантовой механике используют вероятности переходов, отнесенные к единичному интервалу времени и единичному пространственному объему. Такие вероятности можно определить, например, в квантовой теории поля, если матричный элемент включает 4-мерную δ-функцию. В нашем случае непосредственное вычисление квадрата матричного элемента (1.41) не позволяет определить вероятность перехода в единичном пространственном объеме. Однако эту проблему можно решить, нормируя вероятность на поток вылетающих частиц.

При вычислении квадрата матричного элемента приходится иметь дело с произведением двух дельта функций, являющихся сингулярными функциями. Рассмотрим два способа вычисления такого произведения. Первый способ мы возьмем из [29] (см. п. 21, стр. 169), используемый при построении вероятности перехода на основе матричного элемента в подходе квантовой теории поля. Принимая во внимание, что одномерная δ-функция возникает в результате интегрирования по всему временному интервалу ($T \to \infty$), находим *формулу понижения степени δ-функции* (см. [29], § 21, стр. 169):

$$[\delta(w)]^2 = \delta(w)\, \delta(0) = \delta(w)\, (2\pi)^{-1} \int dt = \delta(w)\, (2\pi)^{-1}\, T. \qquad (1.42)$$

Откуда получим

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi\, T\, |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w), \tag{1.43}$$

что подобно выражению (4.21) из [29] (с точностью до множителя $(2\pi)^2$, см. п. 21, стр. 169) и совпадает с (42,5) в [31] (точно, см. § 42, стр. 189). Сингулярный множитель T исчезает при переходе выражения (1.43) к вероятности в единицу времени.

Второй способ можно взять из [31] (см. п. 42, стр. 188-189). Запишем матричный элемент до наложения стационарного предела в виде:

$$a_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_0^T V_{fi}(t)\, dt, \tag{1.44}$$

где $V_{fi}(t)$ — оператор нестационарного возмущения. Выберем вид функции $V_{fi}(t)$ для квазимонохроматических пакетов при спонтанном излучении. Из (1.23), (1.31) и (1.40) получим (выберем $t_0 = 0$, $t_1 = T$):

$$\begin{aligned} V_{fi}(t) &= i\,\hbar \cdot F_{fi} \cdot e^{i\,(w_2 - w_1 + w)\,t} = \\ &= i\,\hbar \cdot Z_{\text{eff}}\, \frac{e}{m} \sum_{\alpha=1,2} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot \Big\langle k_2 \Big| \mathbf{e}^{(\alpha),*} e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Big| k_1 \Big\rangle \cdot e^{i\,(w_2 - w_1 + w)\,t}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

где функция F_{fi} определена в (1.36). Подставляя V_{fi} в (1.44), получим

$$a_{fi} = -i\, F_{fi}\, \frac{e^{i\,(w_f - w_i + w)\,T} - 1}{w_f - w_i + w}. \tag{1.46}$$

Отсюда находим квадрат матричного элемента:

$$|a_{fi}|^2 = |F_{fi}|^2\, \frac{4 \sin^2 \dfrac{(w_f - w_i + w)\,T}{2}}{(w_f - w_i + w)^2}. \tag{1.47}$$

Используя следующую формулу (см. [31], стр. 188):

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\sin^2 \alpha T}{\alpha^2 T} = \pi\, \delta(\alpha), \tag{1.48}$$

при больших $T \to +\infty$ получим

$$|a_{fi}|^2 = \pi\, T\, |F_{fi}|^2 \cdot \delta\Big(\frac{w_f - w_i + w}{2}\Big). \tag{1.49}$$

Воспользовавшись формулой:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \tag{1.50}$$

получим окончательно:

$$|a_{fi}|^2 = 2\pi\, T\, |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w).$$

Итак, мы вновь получили формулу (1.43), что совпадает с формулой (42,5) из [31] (см. стр. 189) с точностью до множителя $\hbar$. Однако, множитель $\hbar$ (появляющийся при вводе оператора излучения (1.40)) внесен явно в матричный элемент F_{fi}, что делает совпадение между (1.43) и формализмом в п. 42 из [31] полным.

1.7 Линейная и круговая поляризация фотона

Выразим вектора *линейной* поляризации $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ через *вектора круговой поляризации* $\boldsymbol{\xi}_\mu$ с противоположными направлениями вращения (см. [33], (2.39), стр. 42):

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} = -\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_0 = \mathbf{e}^{(3)} = 0. \tag{1.51}$$

Для векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$ получим

$$\left(\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\xi}_{+1} - \boldsymbol{\xi}_{-1} = -\sqrt{2}\mathbf{e}^{(1)} \\ \boldsymbol{\xi}_{+1} + \boldsymbol{\xi}_{-1} = -i\sqrt{2}\mathbf{e}^{(2)} \end{array}\right.\right) \to \left(\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}^{(1)} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{\xi}_{+1} - \boldsymbol{\xi}_{-1}\Big) \\ \mathbf{e}^{(2)} = \dfrac{i}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{\xi}_{+1} + \boldsymbol{\xi}_{-1}\Big) \end{array}\right.\right) \to \left(\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}^{(1),*} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{\xi}^*_{+1} - \boldsymbol{\xi}^*_{-1}\Big) \\ \mathbf{e}^{(2),*} = \dfrac{-i}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{\xi}^*_{+1} + \boldsymbol{\xi}^*_{-1}\Big) \end{array}\right.\right) \tag{1.52}$$

и найдем

$$\sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{\xi}^*_{+1} - \boldsymbol{\xi}^*_{-1}\Big) - \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{\xi}^*_{+1} + \boldsymbol{\xi}^*_{-1}\Big) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\xi}^*_{-1} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\xi}^*_{+1} = h_{-1}\boldsymbol{\xi}^*_{-1} + h_{+1}\boldsymbol{\xi}^*_{+1}, \tag{1.53}$$

где

$$h_{-1} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad h_1 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}. \tag{1.54}$$

Для чисел $h_{\pm 1}$ имеем свойство:

$$h_{-1} + h_{+1} = -i\sqrt{2}. \tag{1.55}$$

Тогда формулу (1.36) для $p\,(k_i, k_f)$ перепишем в виде:

$$p\,(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int \psi^*_f(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r})\, \mathbf{dr}. \tag{1.56}$$

Здесь $\psi_i(\mathbf{r}) = |k_i\rangle$ и $\psi_f(\mathbf{r}) = |k_f\rangle$ — стационарные волновые функции распадающей системы в начальном i-состоянии и конечном f-состоянии. $\boldsymbol{\xi}_{+1}$ и $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ — единичные вектора круговой поляризации излученного фотона, которые перпендикулярны к вектору $\mathbf{k}$ в кулоновской калибровке. Для дальнейшего определения матричного элемента $p\,(k_i, k_f)$ обычно используют разные разложения экспоненты $e^{-i\mathbf{kr}}$, связанной с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ электромагнитного поля дочернего ядра. На такой основе можно рассматривать разные подходы к расчету спектров ТИ. Важнейшей причиной разложения $e^{-i\mathbf{kr}}$ является сведение изначального интеграла в (1.56), сходимость которого маловероятна, к бесконечной сумме сходящихся интегралов. Каждый из них, имеющий свою степень сходимости, может быть вычислен с некоторой степенью точности и по-своему характеризует ТИ. Обычно используют первые несколько интегралов для оценки спектров ТИ.

1.8 Разложения векторного потенциала электромагнитного поля

В настоящее время, в этой задаче применялось три следующих типа разложения:

- Разложение в дипольном приближении:

$$e^{i\mathbf{kr}} = 1 + i\,\mathbf{kr} + \ldots \tag{1.57}$$

  где, в основном, в дальнейших расчетах матричных элементов и спектров используется лишь первое слагаемое (единица);

- Разложение по сферическим волнам (в направлении работ [23, 24, 26–28]):

$$e^{i\mathbf{kr}} = \sum_{l=0}^{+\infty} i^l (2l+1)\, P_l(\cos\theta_{\alpha\gamma})\, j_l(kr), \tag{1.58}$$

где $\theta_{\alpha\gamma}$ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ ($\mathbf{kr} = kr\,\cos\theta_{\alpha\gamma}$);

- Разложение по электрическим и магнитным мультиполям (см. [33], (2.106) на стр. 58; также стр. 22, 28 в [32]):

$$\boldsymbol{\xi}_\mu\, e^{i\mathbf{kr}} = \mu\sqrt{2\pi}\sum_{l,\nu}(2l+1)^{1/2}\, i^l\, D^l_{\nu\mu}(\varphi,\theta,0)\cdot\Bigl[\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r},M) + i\mu\,\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r},E)\Bigr], \tag{1.59}$$

где (см. [33], (2.73) на стр. 49, (2.80) на стр. 51)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r},M) &= j_l(kr)\,\mathbf{T}_{ll,\nu}(\mathbf{n}_{\rm ph}), \\ \mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r},E) &= \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\, j_{l-1}(kr)\,\mathbf{T}_{ll-1,\nu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) - \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\, j_{l+1}(kr)\,\mathbf{T}_{ll+1,\nu}(\mathbf{n}_{\rm ph}). \end{aligned} \tag{1.60}$$

Здесь $\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r},M)$ и $\mathbf{A}_{l\nu}(\mathbf{r},E)$ — *магнитные* и *электрические мультиполи*, $j_l\,(kr)$ — *сферические функции Бесселя порядка* l (см. Приложение А.3), $\mathbf{T}_{ll',\nu}(\mathbf{n})$ — *векторные сферические гармоники* (см. [33], стр. 45), θ_1, θ_2, θ_3 — углы, определяющие направление вектора $\mathbf{k}$ относительно оси z выбранной системы координат. Матрица $D^{l,*}_{\nu\mu}(\varphi,\theta,0)$ определяет направление вектора $\mathbf{k}$ относительно оси z в системе координат $\mathbf{r}$: углы φ и θ определены относительно направления вектора $\mathbf{k}$, но не $\mathbf{r}$. Согласно [33] (см. (2.48б) на стр. 45), функции $\mathbf{T}_{ll',\nu}(\mathbf{n})$ имеют следующий вид ($\xi_0 = 0$):

$$\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}) = \sum_{\mu=\pm1}(l,1,j\,|\,m-\mu,\mu,m)\; Y_{l,m-\mu}(\mathbf{n})\;\boldsymbol{\xi}_\mu, \tag{1.61}$$

где $(l,1,j\,|\,m-\mu,\mu,m)$ — *коэффициенты Клебша-Гордона* (см. Приложение А.4) и $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ — *сферические функции* (см. Приложение А.2).

Формула (1.59) определена, когда вектор $\mathbf{k}$ направлен произвольно относительно выбранной системы координат. Если ориентировать систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль вектора $\mathbf{k}$, тогда из (1.59) получим (см. [33], (2.105) на стр. 57):

$$\boldsymbol{\xi}_\mu e^{i\mathbf{kr}} = \mu\sqrt{2\pi}\sum_l (2l+1)^{1/2} i^l\Bigl[\mathbf{A}_{l\mu}(\mathbf{r},M) + i\mu\mathbf{A}_{l\mu}(\mathbf{r},E)\Bigr]. \tag{1.62}$$

Это выражение удобно использовать в случае, когда необязательно ориентировать систему координат относительно распадающегося ядра. Такое возможно, когда ядро и процесс распада сферически симметричны. Если распад проявляется асимметрично относительно оси z, тогда систему координат уже необходимо ориентировать относительно распадающегося ядра. Здесь, в общем случае вектор $\mathbf{k}$ и ось z уже не могут быть сонаправлены и следует использовать (1.59).

1.9 Мультипольный подход к определению матричного элемента

1.9.1 Приближение сферически симметричного α-распада

Будем считать, что взаимодействие между α-частицей и дочерним ядром на всей продолжительности α-распада может быть описано с помощью потенциала, полностью зависящего от расстояния между центрами масс α-частицы и дочернего ядра. В таком рассмотрении применимо сферически симметричное описание распада. Мы ориентируем систему координат так, чтобы ось z была сонаправлена с вектором $\mathbf{k}$, и получим

$$D^l_{\nu\mu}(\varphi, \theta, 0) = \delta_{\mu\nu}. \tag{1.63}$$

Волновые функции распадающей системы в начальном и конечном состояниях разделяются на радиальную и угловую компоненты, и такие состояния описываются квантовыми числами l и m. Нас будет интересовать такое излучение фотона, при котором система переходит в суперпозицию по всем возможным конечным состояниям с разными числами m_f при одном и том же l_f. Пусть в начальном состоянии мы имеем $l_i = m_i = 0$ и радиальная компонента волновой функции $\varphi_f(r)$ не зависит от m_f при выбранном l_f. Имеем

$$\begin{array}{rcl} \psi_i(\mathbf{r}) & = & \varphi_i(r)\, Y_{00}(\mathbf{n}^i_r), \\ \psi_f(\mathbf{r}) & = & \varphi_f(r) \displaystyle\sum_{m_f} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_r). \end{array} \tag{1.64}$$

Тогда матричный элемент (1.56) преобразуется к виду:

$$p\,(k_i, k_f) = \sqrt{2\pi} \sum_{l=1} (-i)^l \sqrt{2l+1} \left[p^M_l - i p^E_l \right], \tag{1.65}$$

где

$$p^M_l = \sum_{\mu=-1,1} \mu\, h_\mu\, p^M_{l\mu}, \quad p^E_l = \sum_{\mu=-1,1} \mu^2 h_\mu\, p^E_{l\mu} \tag{1.66}$$

и

$$\begin{array}{rcl} p^M_{l\mu} & = & \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2\, \psi^*_f(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}^*_{l\mu}(\mathbf{r}, M), \\ p^E_{l\mu} & = & \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2\, \psi^*_f(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}^*_{l\mu}(\mathbf{r}, E). \end{array} \tag{1.67}$$

Используя *градиентную формулу* (см. (2.56), стр. 46 в [33]):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(r)\, Y_{lm}(\mathbf{n}_r) = \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) \mathbf{T}_{ll-1,m}(\mathbf{n}_r) - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) \mathbf{T}_{ll+1,m}(\mathbf{n}_r), \tag{1.68}$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r}) = -\, \frac{d\,\varphi_i(r)}{dr}\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_r), \tag{1.69}$$

и тогда матричные элементы приобретают вид:

$$\begin{array}{rcl} p^M_{l_{\rm ph}} & = & -\, I_M(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}) \cdot J\,(l_f, l_{\rm ph}), \\ p^E_{l_{\rm ph}} & = & -\sqrt{\dfrac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\, I_E(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}-1) \cdot J\,(l_f, l_{\rm ph}-1) + \\ & + & \sqrt{\dfrac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\, I_E(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}+1) \cdot J\,(l_f, l_{\rm ph}+1), \end{array} \tag{1.70}$$

где

$$\begin{array}{rcl} J\,(l_f, n) & = & \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \varphi^*_f(l, r)\, \frac{d\varphi_i(r)}{dr}\, j_n(kr)\, r^2 dr, \\ I_M(l_f, l_{\rm ph}, n) & = & \displaystyle\sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu\, h_\mu \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}^f_r)\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_r)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} n, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\rm ph}, n) & = & \displaystyle\sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}^f_r)\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_r)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} n, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega. \end{array} \tag{1.71}$$

Вычислим следующие коэффициенты Клебша-Гордона (см. Приложение А.4):

$$(110\,|1,-1,0) = (110\,|-1,1,0) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \tag{1.72}$$

из (1.61) и (1.69) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) = \sum_{\mu=\pm 1} (110\,|-\mu\mu 0)\, Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i)\, \boldsymbol{\xi}_\mu = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i)\, \boldsymbol{\xi}_\mu, \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) = -\sqrt{\frac{1}{3}}\, \frac{d\varphi_i(r)}{dr} \sum_{\mu=-1,1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i)\, \boldsymbol{\xi}_\mu \end{aligned} \tag{1.73}$$

и для угловых интегралов для перехода в суперпозицию по всем возможным конечным f-состояниям с разными m_f при выбранном l_f из (1.71) находим

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}^*(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}^*(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega. \end{aligned} \tag{1.74}$$

1.9.2 Матричный элемент при $l_i \ne 0$

Если распадающееся ядро в начальном состоянии имеет $l_i \ne 0$, то волновую функцию такого состояния можно записать так:

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \varphi_i(r) \sum_{m_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i). \tag{1.75}$$

Используя градиентную формулу (1.68), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Bigl\{ \varphi_i(r) \sum_{m_i} Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_r^i) \Bigr\} = \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r}\, \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \\ &- \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r}\, \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}_r^i). \end{aligned} \tag{1.76}$$

Теперь найдем магнитную и электрическую матричные компоненты при $l_i \ne 0$. Для магнитной компоненты p_l^M имеем

$$\begin{aligned} p_l^M &= \sum_{\mu=-1,1} \mu h_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 \psi_f^*(\mathbf{r}) \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r}) \right) \mathbf{A}_{l\mu}^*(\mathbf{r}, M) = \\ &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i m_f} \mu h_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 \varphi_f^*(r)\, Y_{l_f m}^*(\mathbf{n}_r^f) \Bigl\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r}\, \varphi_i(r) \right) \times \\ &\times \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) - \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r}\, \varphi_i(r) \right) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}_r^i) \Bigr\}\, j_{l_{\mathrm{ph}}}(kr)\, \mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} l_{\mathrm{ph}}, \mu}^*(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}}), \end{aligned}$$

а для электрической компоненты $p^E_{l_{\rm ph}}$ получим

$$\begin{aligned}
p^E_{l_{\rm ph}} \; = \; & \sum_{\mu=\pm1} \mu^2 h_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 \psi^*_f(\mathbf{r}) \Bigl(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r})\Bigr) \mathbf{A}^*_{l_{\rm ph}\mu}(\mathbf{r}, E) \; = \\
= & \sum_{\mu=\pm1} \sum_{m_i m_f} h_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 \varphi^*_f(r)\, Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}^f_r) \cdot \Biggl\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \,\Bigl(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r}\, \varphi_i(r) \Bigr) \times \\
\times & \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}^i_r) \; - \; \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \,\Bigl(\frac{d\varphi_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r}\, \varphi_i(r) \Bigr) \sum_{m_i} \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}^i_r) \Biggr\} \times \\
\times & \Biggl\{ \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}} j_{l_{\rm ph}-1}(kr)\; \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}-1, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) - \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}} j_{l_{\rm ph}+1}(kr)\; \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}+1, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) \Biggr\}.
\end{aligned}$$

Эти компоненты можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned}
p^M_{l_{\rm ph}} \; = \; & \sqrt{\frac{1}{2l_i+1}} \, \Bigl\{ \sqrt{l_i}\; I_M(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_i-1) \cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\rm ph}) + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\rm ph}) \Bigr\} \; - \\
& - \; \sqrt{l_i+1}\; I_M(l_f, l_i, l_{\rm ph}, l_i-1) \cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\rm ph}) - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\rm ph}) \Bigr\} \Bigr\}, \\
p^E_{l_{\rm ph}} \; = \; & \sqrt{\frac{1}{(2l_i+1)(2l_{\rm ph}+1)}} \cdot \Bigl\{ \sqrt{l_i\, (l_{\rm ph}+1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_i-1, l_{\rm ph}-1) \; \times \\
& \times \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\rm ph}-1) \; + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\rm ph}-1) \Bigr\} \; - \\
& - \sqrt{l_i\, l_{\rm ph}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_i-1, l_{\rm ph}+1) \cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\rm ph}+1) \; + (l_i+1) \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\rm ph}+1) \Bigr\} \; + \\
& + \sqrt{(l_i+1)(l_{\rm ph}+1)} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_i+1, l_{\rm ph}-1) \cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\rm ph}-1) \; - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\rm ph}-1) \Bigr\} \; - \\
& - \sqrt{(l_i+1)\, l_{\rm ph}} \cdot I_E(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_i+1, l_{\rm ph}+1) \cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\rm ph}+1) \; - l_i \cdot J_2(l_i, l_f, l_{\rm ph}+1) \Bigr\} \Bigr\},
\end{aligned} \tag{1.77}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
J_1(l_i, l_f, n) \; & = \; \int\limits_0^{+\infty} \varphi^*_f(l_f, r)\, \frac{d\varphi_i(r, l_i)}{dr}\, j_n(kr)\; r^2 dr, \\
J_2(l_i, l_f, n) \; & = \; \int\limits_0^{+\infty} \varphi^*_f(l_f, r)\, \varphi_i(r, l_i)\; j_n(kr)\; r\, dr, \\
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1) \; & = \; \sum_{\mu=\pm1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} \mu h_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i\, l_1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph}\, l_{\rm ph}, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\; d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2) \; & = \; \sum_{\mu=\pm1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} h_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i l_1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_2, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\; d\Omega.
\end{aligned} \tag{1.78}$$

1.9.3 Физический смысл векторов $\mathbf{n}^i_r$, $\mathbf{n}^f_r$, $\mathbf{n}_{\rm ph}$ и расчет угловых интегралов при $l_i = 0$

Проанализируем физический смысл векторов $\mathbf{n}^i_{\rm r}$, $\mathbf{n}^f_{\rm r}$ и $\mathbf{n}_{\rm ph}$. Вначале рассмотрим вектор $\mathbf{n}^i_{\rm r}$. Согласно определению (4.96) для волновой функции $\varphi_i(\mathbf{r})$, он определяет направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ от центра системы координат до точки пространства, где эта волновая функция описывает частицу до излучения фотона. Такое описание нахождения частицы в точке, указанной радиус-вектором $\mathbf{r}$, имеет вероятностный смысл и выполняется по всему пространству. Углы θ_i и φ_i, определяющие угловое положение $\mathbf{n}^i_{\rm r}$, определяют относительное положение этого радиус-вектора относительно оси Oz системы координат (оси аксиальной симметрии дочернего ядра).

Вектор $\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f}$ определяет направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ от центра системы координат до точки пространства, где волновая функция $\varphi_f(\mathbf{r})$ описывает частицу после излучения фотона. Такое описание нахождения частицы также выполняется по всему пространству и вновь имеет вероятностный смысл. Изменение направления движения (или туннелирования) частицы в результате излучения фотона может быть описано сменой квантовых чисел l и m в угловой волновой функции: $Y_{00}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{i}) \to Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f})$ (которые меняют вероятность нахождения этой частицы по разным направлениям, внося асимметрию). Углы θ_f и φ_f от $\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f}$ вновь определяют относительное положение радиус-вектора $\mathbf{r}$ относительно оси Oz системы координат. Т. е. оба вектора $\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{i}$ и $\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f}$ в угловых интегралах (1.78) имеют одинаковый смысл и поэтому совпадают. Мы получим

$$\mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{i} = \mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f}. \tag{1.79}$$

Вектор $\mathbf{n}_{\mathrm{ph}}$ определяет направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ от центра системы координат до точки пространства, где волновая функция фотона описывает его "появление". Поэтому можно записать:

$$\mathbf{n}_{\mathrm{ph}} = \mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{i} = \mathbf{n}_{\mathrm{r}}^{f} = \mathbf{n}_{\mathrm{r}}. \tag{1.80}$$

Поскольку мы выбрали систему координат так, что ось z сонаправлена с вектором излучения фотона $\mathbf{k}$, тогда подынтегральная функция с вектором $\mathbf{r}$ в матричном элементе представляет собой амплитуду (а ее квадрат — вероятность) появления в точке пространства $\mathbf{r}$ частицы после излучения фотона, когда этот фотон излучен вдоль оси z. Тогда угол θ (от вектора $\mathbf{n_r}$) как раз и оказывается расположенным между направлениями движения частицы (с учетом туннелирования) и направлением излучения фотона.

Найдем явный вид угловых интегралов I_M, I_E и матричных элементов $\mathbf{p}\,(k_i, k_f, \varphi, \theta)$, $\mathbf{p}\,(k_i, k_f, \theta)$ при $l_i = 0$. С учетом (1.80), перепишем угловые интегралы (1.74) так:

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \int Y_{l_f m}^{*}(\mathbf{n}_r) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}^{*}(\mathbf{n}_r)\, d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \int Y_{l_f m}^{*}(\mathbf{n}_r) \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}^{*}(\mathbf{n}_r)\, d\Omega. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Подставляя сюда вид (1.61) для векторной сферической гармоники в нужных индексах

$$\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}(\mathbf{n_r}) = \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu)\, Y_{n,\mu-\mu''}(\mathbf{n_r})\, \boldsymbol{\xi}_{\mu''}, \tag{1.82}$$

получим

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} \mu h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'}\, \boldsymbol{\xi}_{\mu''}^{*} \times \\ &\times \int Y_{l_f m}^{*}(\mathbf{n}_r)\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, Y_{n,\mu-\mu''}^{*}(\mathbf{n_r})\, d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} \sum_{\mu''=\pm 1} (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'}\, \boldsymbol{\xi}_{\mu''}^{*} \times \\ &\times \int Y_{l_f m}^{*}(\mathbf{n}_r)\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, Y_{n,\mu-\mu''}^{*}(\mathbf{n_r})\, d\Omega \end{aligned}$$

или (учитывая ортогональность векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$)

$$\begin{aligned} I_M(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu,\mu'=\pm 1} \mu h_\mu (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) \int Y_{l_f m}^{*}(\mathbf{n}_r)\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, Y_{n,\mu-\mu'}^{*}(\mathbf{n_r})\, d\Omega, \\ I_E(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_f} \sum_{\mu,\mu'=\pm 1} h_\mu\, (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) \int Y_{l_f m}^{*}(\mathbf{n}_r)\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, Y_{n,\mu-\mu'}^{*}(\mathbf{n_r})\, d\Omega. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Теперь рассмотрим угловой интеграл в этих выражениях. Подставляя сюда сферические функции (определив их, согласно (А.11) в Приложении А.2)

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \;=\; (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\, i^l \,\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^{|m|}(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi}, \tag{1.84}$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра (см. Приложение А.1), получим

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{lm}(\mathbf{n}_r)\,Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\,Y^*_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n_r})\,d\Omega \;= \\
&= \int (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\,(-1)^l\,i^l\,\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\;P_l^{|m|}(\cos\theta)\cdot e^{-im\varphi}\times \\
&\times (-1)^{\frac{-\mu'+|\mu'|}{2}}\,i^1\,\sqrt{\frac{2\cdot1+1}{4\pi}\frac{(1-|\mu'|)!}{(1+|\mu'|)!}}\;P_1^{|\mu'|}(\cos\theta)\cdot e^{-i\mu'\varphi}\times \\
&\times (-1)^{\frac{\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}}\,(-1)^n\,i^n\,\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}}\;P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos\theta)\cdot e^{i(-\mu+\mu')\varphi}\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \;= \\
&= (-1)^{\frac{m+|m|-\mu'+1+\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}}\,(-1)^{l+n}\,i^{l+n+1}\,\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\,\frac{3}{8\pi}\,\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}}\times \\
&\times \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m-\mu'-\mu+\mu')\varphi}\,d\varphi\cdot\int\limits_0^{\pi} P_l^{|m|}(\cos\theta)\;P_1^1(\cos\theta)\;P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

Интеграл по φ отличен от нуля лишь при выполнении условия:

$$m=-\mu.$$

Учитывая $\mu=\pm1$, получаем ограничения на возможные значения чисел m и l_f:

$$m=-\mu=\pm1,\quad l_f\ge1,\quad n\ge|\mu-\mu'|=|m+\mu'|. \tag{1.86}$$

Итак, получим

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{lm}(\mathbf{n}_r)\,Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\,Y^*_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n_r})\,d\Omega = \\
&= (-1)^{l+n-\mu'+1+\frac{|m+\mu'|}{2}}\,i^{l+n+1}\,\sqrt{\frac{3\,(2l+1)\,(2n+1)}{32\pi}\;\frac{(l-1)!}{(l+1)!}\;\frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}}\times \\
&\times \int\limits_0^{\pi} P_l^1(\cos\theta)\;P_1^1(\cos\theta)\;P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi.
\end{aligned} \tag{1.87}$$

Теперь распишем полный угловой интеграл $I_M(l_f,l_{\rm ph},n)$ в (1.83), выполняя интегрирование по углу φ:

$$\begin{aligned}
I_M(l_f,l_{\rm ph},n) \;&=\; \sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{m_f}\sum_{\mu=\pm1}\mu h_\mu\sum_{\mu'=\pm1}(n,1,l_{\rm ph}|\mu-\mu',\mu',\mu)\times \\
&\times (-1)^{l_f+n-\mu'+1+\frac{|m+\mu'|}{2}}\,i^{l_f+n+1}\,\sqrt{\frac{3\,(2l_f+1)\,(2n+1)}{32\pi}\;\frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!}\;\frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}}\times \\
&\times \int\limits_0^{\pi} P_{l_f}^1(\cos\theta)\;P_1^1(\cos\theta)\;P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \\
&= \sum_{m_f} -m\,h_{-m}\,i^{l_f+n+1}\,(-1)^{l_f+n+1}\,\sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2n+1)}{32\pi}\;\frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!}}\times \\
&\times \sum_{\mu'=\pm1}(-1)^{-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}}\,(n,1,l_{\rm ph}|-m-\mu',\mu',-m)\,\sqrt{\frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}}\times \\
&\times \int\limits_0^{\pi} P_{l_f}^1(\cos\theta)\;P_1^1(\cos\theta)\;P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta.
\end{aligned}$$

Введем коэффициент

$$
\begin{aligned}
C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n} &= (-1)^{l_f+n+1-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}}\,(n,1,l_{\rm ph}|-m-\mu',\mu',-m) \quad \times \\
&\times \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2n+1)}{32\pi}\,\frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!}\,\frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}}
\end{aligned}
\tag{1.88}
$$

и функцию

$$
f^{m\mu'}_{l_f n}(\theta) = P^1_{l_f}(\cos\theta)\; P^1_1(\cos\theta)\; P^{|m+\mu'|}_n(\cos\theta). \tag{1.89}
$$

В результате мы получаем полные угловые интегралы $I_M(l_f, l_{\rm ph}, n)$ и $I_E(l_f, l_{\rm ph}, n)$:

$$
\begin{aligned}
I_M(l_f;l_{\rm ph},n) &= \sum_{m_f} -m\,h_{-m}\;i^{l_f+n+1}\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}\int\limits_0^\pi f^{m\mu'}_{l_f n}(\theta)\;\sin\theta\,d\theta, \\
I_E(l_f;l_{\rm ph},n) &= \sum_{m_f} h_{-m}\;i^{l_f+n+1}\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}\int\limits_0^\pi f^{m\mu'}_{l_f n}(\theta)\;\sin\theta\,d\theta.
\end{aligned}
\tag{1.90}
$$

Определим дифференциальные выражения от этих угловых интегралов по углу θ так:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,I_M(l_f;l_{\rm ph},n)}{\sin\theta\,d\theta} &= \sum_{m_f} -m\,h_{-m}\;i^{l_f+n+1}\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n} f^{m\mu'}_{l_f n}(\theta), \\
\frac{d\,I_E(l_f;l_{\rm ph},n)}{\sin\theta\,d\theta} &= \sum_{m_f} h_{-m}\;i^{l_f+n+1}\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n} f^{m\mu'}_{l_f n}(\theta)
\end{aligned}
\tag{1.91}
$$

и дифференциальные матричные элементы p^M_l и p^E_l, зависящие от угла θ, так:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,p^M_{l_{\rm ph}}}{\sin\theta\,d\theta} &= -\,\frac{d\,I_M(l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph})}{\sin\theta\,d\theta}\cdot J\,(l_f,l_{\rm ph}), \\
\frac{d\,p^E_{l_{\rm ph}}}{\sin\theta\,d\theta} &= -\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\cdot\frac{d\,I_E(l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}-1)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot J\,(l_f,l_{\rm ph}-1)+ \\
&+\sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\cdot\frac{d\,I_E(l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}+1)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot J\,(l_f,l_{\rm ph}+1)
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,p^M_{l_{\rm ph}}}{\sin\theta\,d\theta} &= \sum_{m_f} m\,h_{-m}\;i^{l_f+l_{\rm ph}+1}\;J\,(l_f,l_{\rm ph})\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} l_{\rm ph}} f^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph}}(\theta), \\
\frac{d\,p^E_{l_{\rm ph}}}{\sin\theta\,d\theta} &= \sum_{m_f} -h_{-m}\;i^{l_f+l_{\rm ph}}\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\;J\,(l_f,l_{\rm ph}-1)\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}-1}\;f^{m\mu'}_{l_f,l_{\rm ph}-1}(\theta) - \\
&- \; h_{-m} i^{l_f+l_{\rm ph}}\sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\;J\,(l_f,l_{\rm ph}+1)\sum_{\mu'=\pm1} C^{m\mu'}_{l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}+1}\;f^{m\mu'}_{l_f,l_{\rm ph}+1}(\theta).
\end{aligned}
\tag{1.92}
$$

Можно видеть, что интегрирование так определенных функций (1.92) по углу θ с пределами от 0 до π дает полные матричные элементы p^M_l и p^E_l в точности.

1.9.4 Расчет угловых и полных матричных элементов при первых числах l_f, $l_{\rm ph}$

Найдем матричные элементы при первых числах l_f и $l_{\rm ph}$. Пусть

$$
l_f = 1, \quad l_{\rm ph} = 1. \tag{1.93}
$$

При таких числах матричные элементы (1.92) примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_1^M}{\sin\theta\,d\theta} &= -\,i\,J\,(1,1)\cdot\sum_{m=\pm1} m\,h_{-m}\sum_{\mu'=\pm1} C_{111}^{m\mu'}\,f_{11}^{m\mu'}(\theta),\\
\frac{d\,p_1^E}{\sin\theta\,d\theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,J\,(1,0)\sum_{m=\pm1} h_{-m}\sum_{\mu'=\pm1} C_{110}^{m\mu'}\,f_{10}^{m\mu'}(\theta)+\sqrt{\frac{1}{3}}\,J\,(1,2)\sum_{m=\pm1} h_{-m}\sum_{\mu'=\pm1} C_{112}^{m\mu'}\,f_{12}^{m\mu'}(\theta).
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Вычислив коэффициенты $C_{11n}^{m\mu'}$ и функции $f_{1n}^{m\mu'}(\theta)$ для первых чисел l_f и $l_{\rm ph}$ (см. Приложения А.5), получим

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_1^M}{\sin\theta\,d\theta} &= -\,i\,J\,(1,1)\cdot\Bigl(-h_1\,C_{111}^{-1,1}f_{11}^{-1,1}(\theta)+h_{-1}\,C_{111}^{1,-1}f_{11}^{1,-1}(\theta)\Bigr) = \\
&= -\,i\,J\,(1,1)\cdot\Bigl(h_1\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}\cdot\sin^2\theta\cos\theta+h_{-1}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}\cdot\sin^2\theta\cos\theta\Bigr) = \\
&= -\,i\,J\,(1,1)\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}\cdot\Bigl(h_1+h_{-1}\Bigr)\cdot\sin^2\theta\cos\theta = \\
&= -\,i\,J\,(1,1)\cdot\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}\cdot\Bigl(-i\sqrt{2}\Bigr)\cdot\sin^2\theta\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_1^E}{\sin\theta\,d\theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,J\,(1,0)\Bigl(h_1C_{110}^{-1,1}\,f_{10}^{-1,1}(\theta)+h_{-1}C_{110}^{1,-1}\,f_{10}^{1,-1}(\theta)\Bigr)+\sqrt{\frac{1}{3}}\,J\,(1,2)\,\times \\
&\times\,\Bigl(h_1C_{112}^{-1,-1}f_{12}^{-1,-1}(\theta)+h_1C_{112}^{-1,1}f_{12}^{-1,1}(\theta)+h_{-1}C_{112}^{1,-1}f_{12}^{1,-1}(\theta)+h_{-1}C_{112}^{1,1}f_{12}^{1,1}(\theta)\Bigr) = \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\,J\,(1,0)\Bigl(-h_1\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}\cdot\sin^2\theta-h_{-1}\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}\cdot\sin^2\theta\Bigr)+ \\
&+\,\sqrt{\frac{1}{3}}\,J\,(1,2)\Bigl(h_1\cdot\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}\cdot3\sin^4\theta-h_1\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\,(3\cos^2\theta-1)- \\
&-\,h_{-1}\cdot\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\theta\,(3\cos^2\theta-1)+h_{-1}\cdot\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}\cdot3\sin^4\theta\Bigr) = \\
&= i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot J\,(1,0)\cdot\sin^2\theta\;+\;i\,\frac{1}{16}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cdot J\,(1,2)\cdot\Bigl(-3\sin^4\theta+\sin^2\theta\,(3\cos^2\theta-1)\Bigr)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_1^M}{\sin\theta\,d\theta} &= -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cdot J\,(1,1)\cdot\sin^2\theta\cos\theta,\\
\frac{d\,p_1^E}{\sin\theta\,d\theta} &= i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot J\,(1,0)\cdot\sin^2\theta\;+\;i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cdot J\,(1,2)\cdot\sin^2\theta\,\Bigl(1-3\sin^2\theta\Bigr).
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Вычислим также полные матричные элементы. Интегрируя (1.95) по углу θ, получим

$$\begin{aligned}
p_1^M &= -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,J\,(1,1)\cdot\int\limits_0^\pi\sin^2\theta\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta = -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,J\,(1,1)\cdot\int\limits_0^\pi\sin^3\theta\,d\sin\theta = \\
&= -\frac{3}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,J\,(1,1)\cdot\frac{\sin^4\theta}{4}\Big|_0^\pi = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1^E &= i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,J\,(1,0)\int\limits_0^\pi\sin^2\theta\cdot\sin\theta\,d\theta+i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,J\,(1,2)\int\limits_0^\pi\sin^2\theta\,\Bigl(1-3\sin^2\theta\Bigr)\cdot\sin\theta\,d\theta\;= \\
&= -i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,J\,(1,0)\,\Bigl\{\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigr\}\Big|_0^\pi-\,i\,\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,J\,(1,2)\,\Bigl\{-2\cos\theta+\frac{5\cos^3\theta}{3}-\frac{3\cos^5\theta}{5}\Bigr\}\Big|_0^\pi
\end{aligned}$$

или

$$p_1^M = 0, \quad p_1^E = i\,\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Big\{J\,(1,0) - \frac{7}{10}\,\sqrt{2} \cdot J\,(1,2)\Big\}. \tag{1.96}$$

1.10 Дипольное приближение

1.10.1 Преобразование матричного элемента в дипольном приближении

При расчете матричного элемента в дипольном приближении удобно воспользоваться следующим соотношением:

$$\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle = -\,\frac{i\hbar}{E_i - E_f}\,\Big\langle f\,\Big|\,\frac{\partial\,V_i(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\,\Big|\,i\Big\rangle + \,\frac{i\hbar}{E_i - E_f}\,\Big\langle f\,\Big|\,V_{l,\,f}(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Big|\,i\Big\rangle \tag{1.97}$$

или

$$\Big\langle f\Big|\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Big|\,i\Big\rangle = \frac{1}{w_{fi}}\,\Big\langle f\,\Big|\,\frac{\partial\,V_i(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\,\Big|\,i\Big\rangle - \,\frac{1}{w_{fi}}\,\Big\langle f\,\Big|\,V_{l,\,f}(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Big|\,i\Big\rangle. \tag{1.98}$$

Докажем это соотношение.

Рассмотрим следующий коммутатор:

$$\begin{aligned}
[\hat{H},\,\mathbf{p}]\,\varphi(\mathbf{r}) &= \hat{H}\mathbf{p}\,\varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{p}\,\hat{H}\,\varphi(\mathbf{r}) = \Big(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r})\Big)\cdot\mathbf{p}\cdot\varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{p}\cdot\Big(\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r})\Big)\cdot\varphi(\mathbf{r}) = \\
&= V(\mathbf{r})\cdot\mathbf{p}\cdot\varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{p}\cdot V(\mathbf{r})\cdot\varphi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\,(-i\hbar)\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\varphi(\mathbf{r}) + i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,V(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r}) = \\
&= i\hbar\,\frac{\partial\,V(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}\,\varphi(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

или

$$[\hat{H},\,\mathbf{p}] = i\hbar\,\frac{\partial\,V(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}}. \tag{1.99}$$

Мы учтем, что при переходе из начального в конечное состояние меняется орбитальное квантовое число системы ($l_i \neq l_f$). Поэтому гамильтонианы распадающей системы в начальном и конечном состояниях отличаются центробежной компонентой потенциала, и мы получим (имеем $l_i = 0$):

$$\hat{H}_f = \hat{H}_i + V_{l,\,f}. \tag{1.100}$$

Отсюда запишем

$$\hat{H}_f\,\mathbf{p} - \mathbf{p}\,\hat{H}_i = \hat{H}_i\,\mathbf{p} + V_{l,\,f}\,\mathbf{p} - \mathbf{p}\,\hat{H}_i = [\hat{H}_i,\,\mathbf{p}] + V_{l,\,f}\,\mathbf{p} = i\hbar\,\frac{\partial\,V_i(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} + V_{l,\,f}\,\mathbf{p}. \tag{1.101}$$

Также запишем

$$\begin{aligned}
\langle f\,|\,\hat{H}_f\,\mathbf{p}\,|i\rangle &= \langle f\,|\,E_f\,\mathbf{p}\,|i\rangle = E_f\cdot\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle, \\
\langle f\,|\,\mathbf{p}\,\hat{H}_i\,|i\rangle &= \langle f\,|\,\mathbf{p}\,E_i\,|i\rangle = E_i\cdot\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle.
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Отсюда найдем

$$\langle f\,|\,\hat{H}_f\,\mathbf{p}\,|i\rangle - \langle f\,|\,\mathbf{p}\,\hat{H}_i\,|i\rangle = E_f\cdot\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle - E_i\cdot\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle = (E_f - E_i)\cdot\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle. \tag{1.103}$$

Учитывая (1.101), отсюда получим соотношение (1.97):

$$\langle f|\,\mathbf{p}\,|i\rangle = \frac{\langle f\,|\,\hat{H}_f\,\mathbf{p}\,|i\rangle - \langle f\,|\,\mathbf{p}\,\hat{H}_i\,|i\rangle}{E_f - E_i} = -\,\frac{i\hbar}{E_i - E_f}\,\Big\langle f\,\Big|\,\frac{\partial\,V_i(\mathbf{r})}{\partial\mathbf{r}} - V_{l,\,f}(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Big|\,i\Big\rangle.$$

1.10.2 Векторный потенциал A и матричный элемент в дипольном приближении

Матричный элемент $p\,(k_i, k_f)$ в дипольном приближении векторного потенциала $\mathbf{A}$ приобретает вид:

$$p\,(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu\, \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int \psi^*_f(\mathbf{r})\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r})\, \mathbf{dr}. \tag{1.104}$$

Применяя преобразование (1.98), получим

$$p\,(k_i, k_f) = \frac{1}{w_{fi}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu\, \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int \psi^*_f(\mathbf{r}) \left\{ \frac{\partial\, V_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r})\; - V_{l,\,f}(\mathbf{r})\, \frac{\partial\, \psi_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right\} \mathbf{dr}. \tag{1.105}$$

В приближении сферически-симметричного α-распада, которое определяется с радиальным потенциалом $V(r)$, мы воспользуемся представлением волновых функций в виде (1.64)

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \varphi_i(r)\, Y_{00}(\mathbf{n}^i_r), \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= \varphi_f(r)\, \sum_{m_f} Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_r). \end{aligned}$$

и тогда матричный элемент в (1.105) перепишем так:

$$p\,(k_i, k_f) = \frac{1}{w_{fi}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu\, \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} r^2 dr \int d\Omega \cdot \varphi^*_f(r)\, Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_r) \cdot \Bigl\{ \frac{\partial\, V_i(r)}{\partial \mathbf{r}}\, \varphi_i(r) - V_{l,\,f}(r)\, \frac{\partial\, \varphi_i(r)}{\partial \mathbf{r}} \Bigr\}. \tag{1.106}$$

Применяя градиентную формулу (1.68) при $l = 0$ (где $f(r)$ — произвольная радиальная функция)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, f(r) = -\frac{d\, f(r)}{dr}\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r) \tag{1.107}$$

и учитывая вид (1.73) для сферической функции $\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r)$

$$\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r) = \sum_{\mu'=\pm 1} (110| - \mu'\, \mu'\, 0)\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu'=\pm 1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'},$$

из (1.106) получим

$$\begin{aligned} p\,(k_i, k_f) \;=\; & -\frac{1}{w_{fi}} \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} \boldsymbol{\xi}^*_\mu\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \int\limits_0^{+\infty} \varphi^*_f(r) \Bigl\{ \varphi_i(r)\, \frac{d\, V_i(r)}{dr} \;- \\ & - \frac{d\, \varphi_i(r)}{dr}\, V_{l,\,f}(r) \Bigr\}\, r^2 dr \;\cdot \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_r)\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r)\, d\Omega. \end{aligned} \tag{1.108}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_{1,\,\mathrm{dip}}\,(l_f) &= \int\limits_0^{+\infty} \varphi^*_f(l_f, r)\, \varphi_i(r)\, \frac{d\, V_i(r)}{dr}\, r^2 dr, \\ J_{2,\,\mathrm{dip}}\,(l_f) &= \int\limits_0^{+\infty} \varphi^*_f(l_f, r)\, \frac{d\, \varphi_i(r)}{dr}\, V_{l,\,f}(r)\, r^2 dr, \\ I_{\mathrm{dip}}\,(l_f, m_f) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m} h_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_r)\, Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r)\, d\Omega. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Тогда учитывая условие ортогональности векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$, матричный элемент в (1.108) можно переписать так:

$$p\,(k_i, k_f) = -\,\frac{1}{w_{fi}}\,\Big\{J_{1\,\mathrm{dip}}\,(l_f) - J_{2,\,\mathrm{dip}}\,(l_f)\Big\}\cdot I_{\mathrm{dip}}\,(l_f, m_f). \tag{1.110}$$

Далее будем считать, что выполняется соотношение (1.80):

$$\mathbf{n}_{\mathrm{ph}} = \mathbf{n}_r^i = \mathbf{n}_r^f = \mathbf{n}_r.$$

Тогда угловой интеграл (1.109) отличен от нуля только при следующих соотношениях между квантовыми числами:

$$m_f = -\mu = \pm 1, \quad l_f = 1 \tag{1.111}$$

и равен:

$$I_{\mathrm{dip}}\,(l_f = 1) \;=\; \sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{\mu=\pm 1} h_\mu = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\Big(h_{-1} + h_{+1}\Big) = \sqrt{\frac{1}{3}}\,\Big(-i\,\sqrt{2}\Big) = -i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,. \tag{1.112}$$

Тогда матричный элемент (1.110) примет вид:

$$p\,(k_i, k_f) = i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{w_{fi}}\,\Big\{J_{1,\,\mathrm{dip}}\,(1) - J_{2,\,\mathrm{dip}}\,(1)\Big\}. \tag{1.113}$$

Соотношения (1.111) будем называть *правилами отбора для квантовых чисел в дипольном приближении*. Сравнивая их с правилами отбора в мультипольном приближении (1.86), мы видим, что: 1) они не накладывают никаких ограничений на излучение фотона; 2) переход системы после излучения фотона возможен только в новое квантовое состояние при $l_f = 1$.

1.10.3 Дифференциальный матричный элемент

Определим следующее дифференциальное выражение от интеграла I_{dip} по углу θ:

$$\frac{d\,I_{\mathrm{dip}}\,(l_f)}{\sin\theta\,d\theta} \;=\; \sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{\mu=\pm 1}\sum_{m} h_\mu \cdot \int\limits_0^{2\pi} Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_r)\,Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r)\,d\varphi. \tag{1.114}$$

Требуя выполнение правил отбора (1.111) и подставляя вид (1.84) для сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, для дифференциального выражения найдем

$$\begin{aligned}
\frac{d\,I_{\mathrm{dip}}\,(l_f)}{\sin\theta\,d\theta} \;&=\; \sqrt{\frac{1}{3}}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \cdot Y^*_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r)\,Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r)\,d\varphi \;= \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \cdot \int\limits_0^{2\pi}(-1)^{\frac{-\mu+|\mu|}{2}}\;i^{-1}\,\sqrt{\frac{2\cdot 1+1}{4\pi}\frac{(1-1)!}{(1+1)!}}\;P_1^1(\cos\theta)\cdot e^{i\mu\varphi}\times \\
&\times\;\; (-1)^{\frac{-\mu+|\mu|}{2}}\;i^1\,\sqrt{\frac{2\cdot 1+1}{4\pi}\frac{(1-1)!}{(1+1)!}}\;P_1^1(\cos\theta)\cdot e^{-i\mu\varphi}\,d\varphi \;= \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \cdot \frac{3}{4}\cdot P_1^1(\cos\theta)\cdot P_1^1(\cos\theta) = \\
&= \sqrt{3}\,(-i\,\sqrt{2})\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin^2\theta = -i\,\frac{\sqrt{6}}{4}\,\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{1.115}$$

Определим дифференциальный матричный элемент по углу θ так:

$$\frac{d\,p_{\mathrm{dip}}\,(l_f=1)}{\sin\theta\,d\theta} = -\frac{1}{w_{fi}}\Bigl\{J_{1,\,\mathrm{dip}}(1) - J_{2,\,\mathrm{dip}}(1)\Bigr\}\frac{d\,I_{\mathrm{dip}}(l_f)}{\sin\theta\,d\theta} = i\,\frac{\sqrt{6}}{4\,w_{fi}}\Bigl\{J_{1,\,\mathrm{dip}}(1) - J_{2,\,\mathrm{dip}}(1)\Bigr\}\sin^2\theta. \tag{1.116}$$

Можно видеть, что интегрирование функций, так определенных в (1.117), по углу θ (с соответствующими пределами) дает интегральный матричный элемент p_{dip} (1.110) в точности. Сравнивая решения (1.116) с (1.113), найдем уравнение связи между дифференциальными и интегральным матричными элементами в дипольном приближении:

$$\frac{d\,p_{\mathrm{dip}}}{\sin\theta\,d\theta} \;=\; i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{w_{fi}}\Bigl\{J_{1,\,\mathrm{dip}}\,(1) - J_{2,\,\mathrm{dip}}\,(1)\Bigr\}\cdot\frac{3}{4}\,\sin^2\theta \;=\; p\,(k_i,k_f)\cdot\frac{3}{4}\,\sin^2\theta. \tag{1.117}$$

1.11 Угловая вероятность тормозного излучения, сопровождающего α-распад ядер

1.11.1 Вероятность излучения фотона с импульсом k: определение

Определим вероятность перехода системы в единицу времени из начального i-состояния в конечные f-состояния, находящиеся в заданном интервале $d\nu_f$, с излучением фотона с возможными импульсами, определенными в заданном интервале $d\nu_{\mathrm{ph}}$, так (см. [31], (42,5) п. 42, стр. 189; [32], п. 44, стр. 191):

$$dW = \frac{|a_{fi}|^2}{T}\cdot d\nu = 2\pi\,|F_{fi}|^2\,\delta(w_f - w_i + w_{\mathrm{ph}})\cdot d\nu, \qquad d\nu = d\nu_f\cdot d\nu_{\mathrm{ph}}, \tag{1.118}$$

где $d\nu_{\mathrm{ph}}$ и $d\nu_f$ — интервалы, характеризующие фотон и систему в конечном f-состоянии. Если рассматривается излучение фотона с импульсом $\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}$, то

$$d\nu_{\mathrm{ph}} = \frac{d^3k_{\mathrm{ph}}}{(2\pi)^3} = \frac{w_{\mathrm{ph}}^2\,dw_{\mathrm{ph}}\,d\Omega_{\mathrm{ph}}}{(2\pi c)^3}, \quad w_{fi} = w_i - w_f = \frac{E_i - E_f}{\hbar}, \tag{1.119}$$

где $d\Omega_{\mathrm{ph}} = d\,\cos\theta_{\mathrm{ph}} = \sin\theta_{\mathrm{ph}}\,d\theta_{\mathrm{ph}}\,d\varphi_{\mathrm{ph}}$, $k_{\mathrm{ph}} = w_{\mathrm{ph}}/c$. Однако, поскольку при мультипольном разложении для векторного потенциала электромагнитного поля мы фиксировали систему координат таким образом, чтобы направление вектора $\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}$ совпадало с осью z (а дипольное приближение нечувствительно к этой ориентации), то в (1.118) мы не должны использовать $d\Omega_{\mathrm{ph}}$.

Относительно интервала $d\,\nu_f$ сделаем важное замечание. При построении вероятности в виде (1.118) мы используем матричный элемент F_{fi}, который определяется как интеграл по пространству с возможным учетом суммирования по некоторым квантовым числам системы в конечном f-состоянии. Эту процедуру можно рассмотреть как усреднение по этим характеристикам и тогда F_{fi} не зависит от них. Поэтому будем считать, что интервал $d\,\nu_f$, входящий в определение вероятности в виде (1.118), должен учитывать лишь те дополнительные характеристики и квантовые числа системы в конечном f-состоянии, по которым не выполнялось интегрирование и полное суммирование при определении F_{fi}. Подставляя вид (1.36) для F_{fi} и (1.119) в (1.118) и затем интегрируя это выражение по dw_{fi}, получим

$$dW \;=\; \frac{Z_{\mathrm{eff}}^2\,e^2}{m^2}\,\frac{\hbar\,w_{\mathrm{ph}}}{2\pi\,c^3}\,\Bigl|p(k_i,k_f)\Bigr|^2\,dw_{\mathrm{ph}}. \tag{1.120}$$

Это выражение представляет собой вероятность излучения фотона с импульсом $\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}$, где уже выполнены усреднение по поляризации фотона $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ и интегрирование по углам движения α-частицы после излучения фотона. Поэтому такая вероятность не зависит от направлений движения α-частицы после излучения. Для описания фотона с импульсом $\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}$, излученного под некоторым углом относительно направления $\mathbf{n}_{\mathbf{r}}^{f}$ движения (или туннелирования) α-частицы после излучения, введем вероятность излучения так:

Определим относительную дифференциальну вероятность по углу θ_f как такую функцию, определенный интеграл от которой по углу θ_f с пределами от 0 до π точно соответствует вероятности излучения (1.120).

Рассмотрим следующую функцию:

$$\frac{d^2W(\theta_f)}{dw_{\mathrm{ph}}\,d\cos\theta_f} = \frac{Z_{\mathrm{eff}}^2\,\hbar\,e^2}{2\pi\,c^3}\,\frac{w_{\mathrm{ph}}}{m^2}\,\Bigl\{p\,(k_i,k_f)\frac{d\,p^*(k_i,k_f,\theta_f)}{d\cos\theta_f} + \mathrm{c.\,c.}\Bigr\}, \tag{1.121}$$

где c. c.— обозначение комплексного сопряжения. Эта вероятность обратно пропорциональна объему нормировки V. Чтобы определить вероятность, независимую от выбранного объема V, мы разделим выражение (1.121) на поток выходящих α-частиц, который обратно пропорционален этому объему также. Так, теория квантовых полей нам дает следующее выражение потока (где $v(\mathbf{p}) = |\mathbf{p}|/p_0$ при $c = 1$, см. [29], § 21.4, стр. 174):

$$j = n_i\,v(\mathbf{p}_i), \quad v_i = |\mathbf{v}_i| = \frac{c^2\,|\mathbf{p}_i|}{E_i} = \frac{\hbar\,c^2\,k_i}{E_i}, \tag{1.122}$$

где n_i — среднее число частиц в единицу времени перед излучением фотона (мы имеем $n_i = 1$ для нормированной волновой функции в начальном i-состоянии), $v(\mathbf{p}_i)$ — модуль скорости выходящей α-частицы в системе отсчета, где центр масс ядра неподвижен. Итак, мы получаем *дифференциальную абсолютную вероятность*:

$$\begin{aligned}\frac{d\,P\,(\theta_f)}{dw_{\mathrm{ph}}} &= \frac{d^2\,W\,(\theta_f)}{dw_{\mathrm{ph}}\,d\cos\theta_f}\cdot\frac{E_i}{\hbar\,c^2\,k_i} = \\ &= \frac{Z_{\mathrm{eff}}^2\,e^2}{2\pi\,c^5}\,\frac{w_{\mathrm{ph}}\,E_i}{m^2\,k_i}\,\Bigl\{p\,(k_i,k_f)\frac{d\,p^*(k_i,k_f,\theta_f)}{d\,\cos\theta_f} + \mathrm{c.\,c.}\Bigr\}.\end{aligned} \tag{1.123}$$

Отметим, что существует также иной путь определения угловой вероятности тормозного излучения фотонов в задачах α-распада [10], основанный на другой связи матричного элемента излучения с углом θ между направлениями движения вылетающего фрагмента и излучения фотона. Иногда переменные φ_f и θ_f в скобках этих функций будем опускать.

Если вероятность dW имеет размерность массы (в рациональной системе единиц она равна c^{-1}) и совпадает с энергетической шириной Γ, то можно определить обратную к ней величину τ:

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}, \quad \Gamma = dW. \tag{1.124}$$

Согласно [29] (см. стр. 175), при рассмотрении перехода системы из начального состояния в конечное величина τ представляет собой время жизни частицы в начальном состоянии (до перехода). Поэтому в нашем случае, величина τ — это *среднее время жизни α-частицы до излучения фотона с частотой w_{ph}*.

1.11.2 Вероятность излучения в мультипольном подходе

Вычислим угловую вероятность (1.123) для первых чисел $l_f = 1$ и $l_{\rm ph} = 1$. Согласно (1.78), для матричного элемента $p_1(k_i, k_f)$ запишем

$$\begin{aligned}
p_1(k_i, k_f) & = \sqrt{2\pi} \cdot \Bigl\{ (-i)^l \sqrt{2l+1} \Bigl[p_l^M - i\, p_l^E \Bigr] \Bigr\} \Bigr|_{l=1} = -\sqrt{6\pi} \Bigl(i\, p_1^M + p_1^E \Bigr), \\
\frac{d\, p_1(k_i, k_f)}{\sin\theta\, d\theta} & = \sqrt{2\pi} \cdot \Bigl\{ (-i)^l \sqrt{2l+1} \Bigl[\frac{d\, p_l^M}{\sin\theta\, d\theta} - i\, \frac{d\, p_l^E}{\sin\theta\, d\theta} \Bigr] \Bigr\} \Bigr|_{l=1} = \\
& = -\sqrt{6\pi} \Bigl\{ i\, \frac{d\, p_1^M}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{d\, p_1^E}{\sin\theta\, d\theta} \Bigr\}.
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Используя найденные угловые электрическую и магнитную компоненты от матричного элемента (1.95):

$$\begin{aligned}
\frac{d\, p_1^M}{\sin\theta\, d\theta} & = -\frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1,1) \cdot \sin^2\theta \cos\theta, \\
\frac{d\, p_1^E}{\sin\theta\, d\theta} & = i\, \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1,0) \cdot \sin^2\theta \,+\, i\, \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1,2) \cdot \sin^2\theta \Bigl(1 - 3\sin^2\theta \Bigr)
\end{aligned}$$

и интегральные эти компоненты (1.96):

$$p_1^M = 0, \quad p_1^E = i\, \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Bigl\{ J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \Bigr\},$$

из (1.125) получим

$$\begin{aligned}
p_1(k_i, k_f) & = -\sqrt{6\pi} \cdot i\, \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Bigl\{ J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \Bigr\} = \\
& = -i \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \Bigl\{ J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \Bigr\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\, p_1(k_i, k_f)}{\sin\theta\, d\theta} = -\sqrt{6\pi} \Bigl\{ i\, \frac{d\, p_1^M}{\sin\theta\, d\theta} + \frac{d\, p_1^E}{\sin\theta\, d\theta} \Bigr\} = -\sqrt{6\pi} \Bigl\{ -i\, \frac{3}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1,1) \cdot \sin^2\theta \cos\theta + \\
& + i\, \frac{1}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot J(1,0) \cdot \sin^2\theta \,+\, i\, \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot J(1,2) \cdot \sin^2\theta \Bigl(1 - 3\sin^2\theta \Bigr) \Bigr\} = \\
& = i\, \sqrt{6\pi}\, \frac{1}{8} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cdot \Bigl\{ 3\, J(1,1) \cdot \cos\theta - \sqrt{2}\, J(1,0) - J(1,2) \cdot \Bigl(1 - 3\sin^2\theta \Bigr) \Bigr\} \cdot \sin^2\theta
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
p_1(k_i, k_f) & = -i \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \Bigl\{ J(1,0) - \frac{7}{10} \sqrt{2} \cdot J(1,2) \Bigr\}, \\
\frac{d\, p_1(k_i, k_f)}{\sin\theta\, d\theta} & = i\, \frac{\sqrt{6}}{8} \cdot \Bigl\{ 3\, J(1,1) \cdot \cos\theta - \sqrt{2}\, J(1,0) - J(1,2) \cdot \Bigl(1 - 3\sin^2\theta \Bigr) \Bigr\} \cdot \sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{1.126}$$

Теперь найдем дифференциальную абсолютную вероятность:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\,e^2}{2\pi\,c^5}\,\frac{w_{\rm ph}\,E_i}{m^2\,k_i}\,\biggl\{i\,\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\Bigl\{J\,(1,0) - \frac{7}{10}\,\sqrt{2}\cdot J\,(1,2)\Bigr\}\times \\
&\times i\,\frac{\sqrt{6}}{8}\cdot\Bigl\{3\,J^*(1,1)\cdot\cos\theta - \sqrt{2}\,J^*(1,0) - J^*(1,2)\cdot\Bigl(1-3\sin^2\theta\Bigr)\Bigr\}\cdot\sin^2\theta + \text{c. c.}\biggr\} = \\
&= \frac{Z_{\rm eff}^2\,e^2}{2\pi\,c^5}\,\frac{w_{\rm ph}\,E_i}{m^2\,k_i}\,\biggl\{\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\Bigl[J\,(1,0) - \frac{7}{10}\,\sqrt{2}\cdot J\,(1,2)\Bigr]\times \\
&\times\Bigl[\sqrt{2}\,J^*(1,0) + J^*(1,2)\cdot\Bigl(1-3\sin^2\theta\Bigr) - 3\,J^*(1,1)\cdot\cos\theta\Bigr] + \text{c. c.}\biggr\}\cdot\sin^2\theta
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\,e^2}{8\pi\,c^5}\,\frac{w_{\rm ph}\,E_i}{m^2\,k_i}\,\biggl\{\Bigl[J\,(1,0) - \frac{7}{10}\,\sqrt{2}\cdot J\,(1,2)\Bigr]\times \\
&\times\Bigl[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}J^*(1,2)\cdot\Bigl(1-3\sin^2\theta\Bigr) - \frac{3}{\sqrt{2}}\,J^*(1,1)\cdot\cos\theta\Bigr] + \text{c. c.}\biggr\}\cdot\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{1.127}$$

Несмотря на то, что интегральная магнитная компонента p_1^M от матричного элемента равна нулю, учет ее дифференциальной составляющей вносит ненулевой вклад в полную вероятность излучения фотона. Это выражение можно переписать так:

$$\frac{dP_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}} = \frac{dP_1^{E1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}} + \Delta\,\frac{d\,P_1^{M1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}}, \tag{1.128}$$

где первое слагаемое имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_1^{E1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\,e^2}{8\pi\,c^5}\,\frac{w_{\rm ph}\,E_i}{m^2\,k_i}\,\biggl\{\Bigl[J\,(1,0) - \frac{7}{10}\,\sqrt{2}\cdot J\,(1,2)\Bigr]\times \\
&\times\quad\Bigl[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}J^*(1,2)\cdot\Bigl(1-3\sin^2\theta\Bigr)\Bigr] + \text{c. c.}\biggr\}\cdot\sin^2\theta,
\end{aligned} \tag{1.129}$$

и определяет вероятность излучения фотона только за счет учета электрического мультиполя излучения E1. Второе слагаемое в (1.128) имеет вид:

$$\Delta\,\frac{d\,P_1^{E1+M1}(\theta_f)}{d\,w_{\rm ph}} = -\,\frac{3\,Z_{\rm eff}^2\,e^2}{8\pi\,\sqrt{2}\,c^5}\,\frac{w_{\rm ph}\,E_i}{m^2\,k_i}\,\biggl\{\Bigl[J\,(1,0) - \frac{7}{10}\sqrt{2}\,J\,(1,2)\Bigr]\,J^*(1,1) + \text{c. c.}\biggr\}\sin^2\theta\cos\theta \tag{1.130}$$

и определяет поправку к вероятности излучения за счет учета магнитного мультиполя M1. Из (1.130) видно, что найденную поправку можно разделить на радиальную и угловую компоненты.

1.11.3 Вероятность излучения в дипольном подходе

Найдем дифференциальную абсолютную вероятность (1.123) в зависимости от угла θ в дипольном приближении. Согласно (1.113) и (1.116), интегральный и дифференциальный по углу θ матричные элементы в дипольном приближении равны:

$$\begin{aligned}
p_{\rm dip}\,(l_f = 1) &= i\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{w_{fi}}\Bigl\{J_{1,\,\rm dip}\,(1) - J_{2,\,\rm dip}\,(1)\Bigr\}, \\
\frac{d\,p_{\rm dip}\,(l_f = 1)}{\sin\theta\,d\theta} &= i\,\frac{\sqrt{6}}{4}\,\frac{1}{w_{fi}}\Bigl\{J_{1,\,\rm dip}\,(1) - J_{2,\,\rm dip}\,(1)\Bigr\}\cdot\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

В начале вычислим интегральную вероятность:

$$\begin{aligned}
P_{\rm dip}(\theta_f) & = & \frac{Z_{\rm eff}^2 \hbar\, e^2}{2\pi\, c^3}\, \frac{w_{fi}}{m^2} \cdot \frac{E_i}{\hbar\, c^2 k_i} \cdot \Bigl| p_{\rm dip}\, (k_i, k_f) \Bigr|^2 = \\
& = & \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{fi}\, E_i}{m^2\, k_i} \cdot \Bigl|\; i\, \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{1}{w_{fi}}\, \Bigl\{ J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr\} \;\Bigr|^2 = \\
& = & \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{3\pi\, c^5}\, \frac{E_i}{m^2\, k_i\, w_{fi}} \cdot \Bigl|\; J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \;\Bigr|^2.
\end{aligned}$$

Теперь найдем дифференциальную вероятность в зависимости от угла θ:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\rm dip}(\theta_f)}{d\, w_{\rm ph}} & = \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{fi}\, E_i}{m^2\, k_i}\, \Bigl\{ p\,(k_i, k_f) \frac{d\, p^*(k_i, k_f)}{d\cos\theta_f} + \text{c. c.} \Bigr\}\Bigr|_{\rm dip} = \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{fi}\, E_i}{m^2\, k_i} \times \\
& \times \Bigl\{ i\, \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{1}{w_{fi}}\, \Bigl\{ J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr\}\, (-i)\, \frac{\sqrt{6}}{4}\, \frac{1}{w_{fi}}\, \Bigl\{ J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr\}^*\, \sin^2\theta + \text{c. c.} \Bigr\} = \\
& = \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{4\pi\, c^5}\, \frac{E_i}{m^2\, k_i\, w_{fi}}\, \Bigl\{ \Bigl| J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr|^2 \cdot \sin^2\theta + \text{c. c.} \Bigr\} = \\
& = \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{E_i}{m^2\, k_i\, w_{fi}} \cdot \Bigl| J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr|^2 \cdot \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Выпишем результат:

$$\begin{aligned}
\frac{dP_{\rm dip}(\theta_f)}{d\, w_{\rm ph}} & = & \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{E_i}{m^2\, k_i\, w_{fi}} \cdot \Bigl| J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr|^2 \cdot \sin^2\theta, \\
P_{\rm dip}(\theta_f) & = & \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{3\pi\, c^5}\, \frac{E_i}{m^2\, k_i\, w_{fi}} \cdot \Bigl| J_{1,\,{\rm dip}}\,(1) - J_{2,\,{\rm dip}}\,(1) \Bigr|^2.
\end{aligned} \tag{1.131}$$

Отсюда можно также записать:

$$\frac{dP_{\rm dip}(\theta_f)}{d\, w_{\rm ph}} = 3\pi \cdot P_{\rm dip}(\theta_f) \cdot \sin^2\theta. \tag{1.132}$$

1.11.4 Спектроскопический фактор

В определении вероятности тормозного излучения можно учесть вероятность формирования α-частицы в состоянии, из которого она затем покинет ядро. Для ясности, перейдем к другой задаче распада ядер, где этот вопрос изучен полнее. Так, в задаче распада ядра с вылетом протона таким является состояние ядра, которое заполнено протоном перед его вылетом и окажется пустым после вылета (т. е. уже для дочернего ядра). Чтобы получить значение для периода полураспада, следует разделить его, ранее определенного без учета вероятности формирования состояния с дальнейшим вылетом протона, на спектроскопический фактор $S_p^{\rm (th)}$ [45]. Спектроскопический фактор определяется в приближении независимых квазичастиц (independent quasiparticle approximation, BCS, согласно терминологии, указанной в [45]), согласно которому предполагается, что основное состояние для ядра с нечетным числом протонов является одно-квазичастичным, тогда как для нечетно-нечетных ядра это должна быть двух-квазичастичная конфигурация. В теории BSC спектроскопический фактор дается формулой $S_p^{\rm (th)} = u^2$, где u^2 — вероятность того, что сферические орбитали, соответствующие вылету протона, не заняты им в дочернем ядре [45, 115]. Для разных протонных эмиттеров учет спектроскопического фактора улучшает согласие между расчетными значениями периода полураспада и их экспериментальными значениями. Похожие подходы применяются также и в задаче α-распада с применением фактора $S_{\alpha}^{(\mathrm{th})}$. На такой основе, мы скорректируем формулу для вероятности излучения. Для мультипольного и дипольного подходов из (1.129) и (1.131) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_{\mathrm{mult},1}^{E1+M1}(\theta_f)}{d\,w_{\mathrm{ph}}} &= \frac{Z_{\mathrm{eff}}^2\,e^2}{8\pi\,c^5}\,\frac{w_{fi}\,E_i\,S_{\alpha}^{(\mathrm{th})}}{m^2\,k_i}\,\Big\{\Big[J\,(1,0) - \frac{7}{10}\,\sqrt{2}\cdot J\,(1,2)\Big]\times \\ &\times\Big[J^*(1,0) + \frac{1}{\sqrt{2}}J^*(1,2)\cdot\Big(1-3\sin^2\theta\Big) - \frac{3}{\sqrt{2}}\,J^*(1,1)\cdot\cos\theta\Big] + \text{c. c.}\Big\}\cdot\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{1.133}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_{\mathrm{dip}}(\theta_f)}{d\,w_{\mathrm{ph}}} &= \frac{Z_{\mathrm{eff}}^2\,e^2}{2\pi\,c^5}\,\frac{E_i\,S_{\alpha}^{(\mathrm{th})}}{m^2\,k_i\,w_{fi}}\cdot\Big|J_{1,\,\mathrm{dip}}\,(1) - J_{2,\,\mathrm{dip}}\,(1)\Big|^2\cdot\sin^2\theta, \\ \tilde{P}_{\mathrm{dip}}(\theta_f) &= \frac{Z_{\mathrm{eff}}^2\,e^2}{3\pi\,c^5}\,\frac{E_i\,S_{\alpha}^{(\mathrm{th})}}{m^2\,k_i\,w_{fi}}\cdot\Big|J_{1,\,\mathrm{dip}}\,(1) - J_{2,\,\mathrm{dip}}\,(1)\Big|^2. \end{aligned} \tag{1.134}$$

Отсюда видно, что включение спектроскопического фактора $S_{\alpha}^{(\mathrm{th})}$ снижает вероятность тормозного излучения.

1.12 Анализ

Чтобы оценить эффективность развиваемой модели и точность, которую она дает в практических расчетах вероятностей тормозного излучения, мы будем искать спектры для тех ядер, для которых имеются экспериментальные данные. Итак, мы имеем ядра ^{210}Po, ^{214}Po, ^{226}Ra и ^{244}Cm. Вероятность тормозного излучения мы определяем по (1.127), α-ядерный потенциал — по (11)–(15), а его параметры — по (16)–(22) в [27]. Q_{α}-значение мы берем из [34] (см. стр. 63): имеем 5.439 МэВ для ^{210}Po, 7.865 МэВ для ^{214}Po, 4.904 МэВ для ^{226}Ra, 5.940 МэВ для ^{244}Cm. Мы выбираем фиксированное значение угла $\vartheta_{\alpha\gamma}$ между направлениями движения α-частицы (с возможным туннелированием) и излучения фотона для ^{214}Po и ^{226}Ra, равное 90°, что соответствует геометрии выполненого эксперимента [26,27,35]. Для ^{210}Po мы используем такой же угол. Для ^{244}Cm мы рассмотрим два случая: значения угла 90° и 25°, с целью включить эксперименты [36] в общую картину анализа.

Первый шаг в такой задаче — определение волновых функций, которые должны быть найдены с достаточно высокой точностью, чтобы получить сходящиеся значения спектров излучения. Волновые функции α-распадающей системы в состояниях до и после излучения фотона показаны на Рис. 1.1 (для ядра ^{210}Po, при энергии излученного фотона 500 кэВ). В начальном состоянии волновая функция является комплексной. Это обеспечивает сохранение постоянного ненулевого потока (во внутренней области, области туннелирования и во внешней области), направленный наружу. В расчетах спектров волновая функция в конечном состоянии является действительной, что позволяет избежать расходимости при $r = 0$. В частности, на первых трех рисунках (а, б, с) можно видеть поведение волновых функций на границе раздела между областью туннелирования и внешней областью. Последний рисунок (г) показывает ошибки, которые мы имеем в численном счете, и можно надеяться, что это позволит получить сходящиеся картины вероятности тормозного излучения для всех изучаемых ядер.

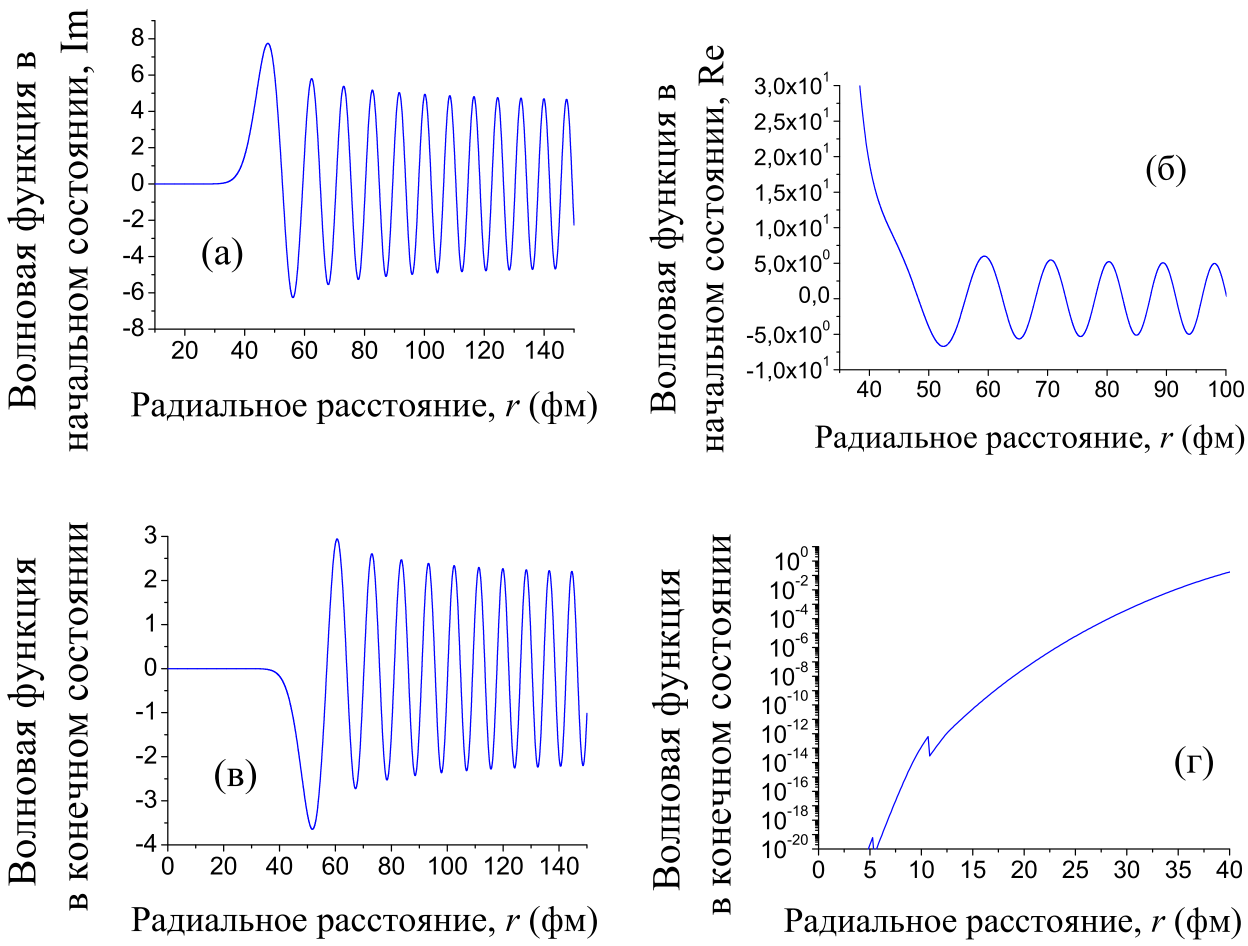

Рис. 1.1: Волновые функции α-распадающей системы для ядра ^{210}Po: (а) Мнимая часть волновой функции в начальном i-состоянии; (б) Действительная часть волновой функции в начальном i-состоянии; (в) Действительная волновая функция в конечном f-состоянии (после излучения фотона); (г) Ошибки, при определении волновой функции конечного f-состояния, появляющиеся в текущих расчетах спектров.

1.12.1 Спектры излучения для ^{214}Po, ^{226}Ra и ^{244}Cm: сравнение теории с экспериментом

Наилучшие результаты в согласии между теорией и экспериментом в таком мультипольном подходе удается получить для ядра ^{214}Po (см. Рис. 1.2 (а); здесь нет никакой нормировки расчетной кривой на экспериментальные данные). Из этого рисунка можно видеть, что для этого ядра расчетный спектр оказывается в достаточно неплохом согласии с экспериментальными данными [27] в диапазоне энергий излученного фотона от 100 кэВ до 750 кэВ. Вычисленные абсолютные вероятности тормозного излучения при α-распаде ядра ^{226}Ra и экспериментальные данные [26] для этого ядра представлены на Рис. 1.2 (б). Для этого ядра при более низких энергий излученных фотонов вычисленные спектры располагаются несколько ниже экспериментальных данных, но начиная от энергии 350 кэВ и выше достигается хорошее согласие между теорией и экспериментом. К этим результатам я добавлю вычисленные абсолютные вероятности излучения для ядра ^{244}Cm, сравнивая их с верхним пределом ошибок экспериментальных данных [36, 37] (см. Рис. 1.2 (в)). В расчете спектра используется угол $\vartheta_{\alpha\gamma} = 25^{\circ}$ (угол между направлением движения α-частицы и излучения фотона), что соответствует эксперименту [37], и я добавляю другой спектр при $\vartheta_{\alpha\gamma} = 90^{\circ}$. Из этого рисунка видно, что обе расчетные кривые расположены достаточно близко к верхнему пределу ошибок экспериментальных данных и, по-видимому, отсюда можно сделать вывод о том, что согласие между теорией и экспериментом не столь плохо. Этот рисунок ясно демонстрирует, что отличие между верхним и нижним спектрами могло бы быть объяснено разными значениями угла. Такое объяснение двух разных спектров на основе одной модели дано впервые и можно предполагать, что таким путем вопрос активно (остро) обсуждаемый в [38, 39] относительно ядра ^{210}Po, может быть закрыт.

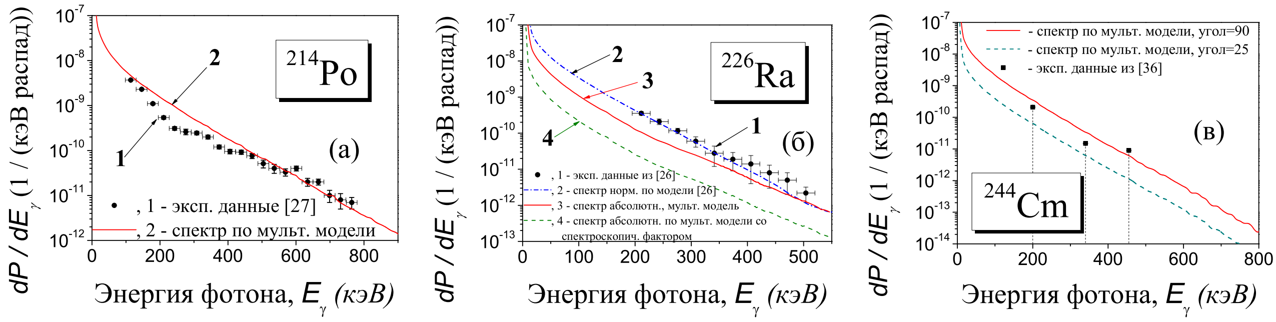

Рис. 1.2: Вероятность тормозного излучения при α-распаде ядер ^{214}Po, ^{226}Ra и ^{244}Cm: сплошная линия — абсолютная вероятность, вычисленная в мультипольном подходе, штрих-пунктирная линия — нормированная кривая, полученная в подходе [26], штриховая линия — абсолютная вероятность определенная по формуле (1.133) для мультипольной модели с учетом спектроскопического фактора $S_{\alpha}^{(\mathrm{th})}$ для деформированного ядра ^{226}Ra (мы используем приближенное значение $S_{\alpha}^{(\mathrm{th})} = 0.2$ из таблицы I в [40]), экспериментальные данные взяты из работы [27] для ^{214}Po, из работы [26] для ^{226}Ra, из работы [36, 37] для ^{244}Cm.

1.12.2 Спектры излучения для ^{210}Po: сравнение мультипольного подхода с дипольным

Мультипольный подход дает более точное описание спектров тормозного излучения как в абсолютном масштабе (т. е. без какой-либо нормировки на существующие экспериментальные данные), так и в случае, когда такая нормировка используется, по сравнению с дипольным подходом. Так, рассмотрим Рис. 1.3 (а), где представлены спектры для ядра ^{210}Po, найденные по мультипольному и дипольному подходам в абсолютной шкале. Чтобы ощутить чувствительность спектров к изменению формы внутренней ямы α-

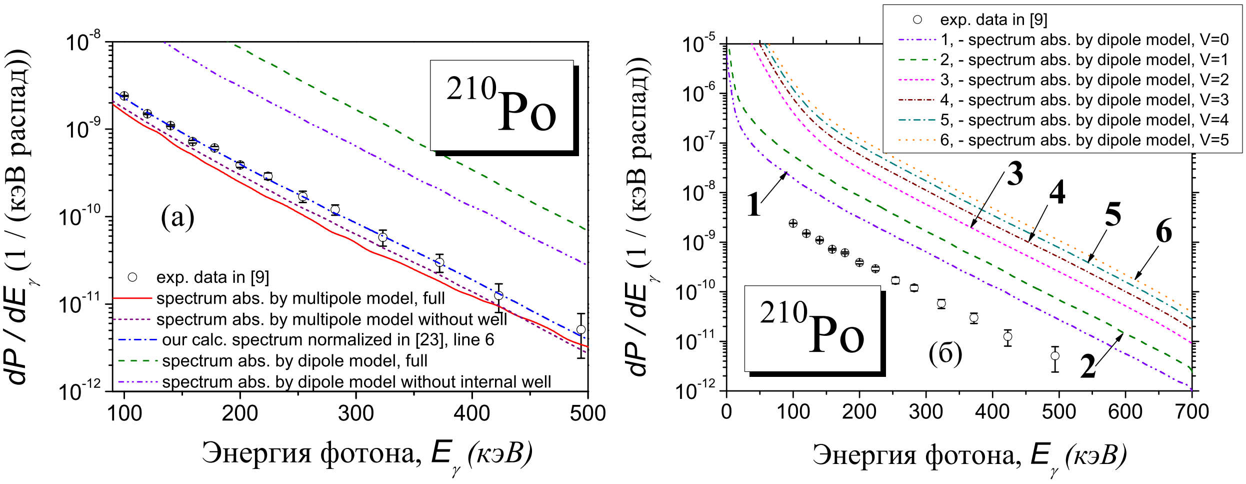

Рис. 1.3: Вероятности тормозного излучения при α-распаде ядра ^{210}Po, вычисленные без нормировки на эксперимент (сплошная линия — спектр, определенный по мультипольной модели; краткая штриховая линия — спектр, найденный по мультипольной модели без включения излучения из внутренней области вплоть до внутренней точки поворота; штриховая линия — полный спектр, полученный в дипольном приближении; штриховая дважды пунктриная линия — спектр, определенный в дипольном подходе без включения излучения из внутренней области; штрих-пунктриная линия — нормированный спектр, полученный в работе [23] с нормировкой, используемой в этой работе): (а) отличие между двумя спектрами, вычисленными в дипольном приближении с включением излучения из внутренней области и без такого излучения, не мало, в отличие от аналогичных вычислений в мультипольном подходе; (б) роль силы ядерной компоненты потенциала $\tilde{V}_0$ проявляется в расчетах спектров излучения в дипольном подходе: можно видеть, что чем больше силы ядерной компоненты, тем спектр выше и растет быстрее (в расчетах каждого спектра силу ядерной компоненты определяем как $\tilde{V}_0 = V_0 \cdot V$, где величина V_0 определяется формулой (14) в [21] и дополнительный множитель V имеет значения 0,1,2,3,4,5, как показано на рисунке).

ядерного потенциала (т. е. на области от $r \to 0$ до внутренней точки поворота), в этот рисунок включены следующие расчеты: (1) спектры без вклада излучения из такой внутренней ямы (для дипольного подхода это соответствует случаю прямоугольной ямы во внутренней области) и (2) полные спектры, полученные относительно полного α-ядерного потенциала с реалистической ядерной компонентой. Ясно видно, что для дипольного подхода влияние формы потенциала во внутренней области на спектр существенно сильнее, тогда как мультипольный подход менее чувствителен к ней. Такая особенность может быть объяснена более аккуратным использованием дальней асимптотической области в мультипольном подходе, тогда как дипольный подход сильнее эту область ограничивает. Это ведет к более высокой (быстрой) сходимости вычислений радиальных интегралов в дипольном приближении; как результат, такие спектры получаются значительно более устройчивыми. Однако, *более аккуратное использование дальней асимптотической области, которое обеспечивает мультипольный подход, улучшает согласие расчетных кривых с экспериментальными данными.* Этот важный пункт дает мультипольной модели силу предсказаний (без нормировки на эксперимент), в отличие от дипольного. Чтобы сделать эту картину более полной, я добавлю расчеты спектров для ^{210}Po в дипольном подходе для разных значений силы ядерной компоненты потенциала (nuclear strength), показанные на Рис. 1.3 (б). Отсюда ясно видно, что спектр тем выше, чем сила ядер-

данные α-распада				Вероятность излучения, 1 / кэВ / распад				
A_p	Q_α, МэВ	$b_\alpha^{\rm abs}$, %	$T_{1/2,\alpha}^{\rm exp}$, сек	100 кэВ	200 кэВ	300 кэВ	400 кэВ	500 кэВ
212	7.987	100.0	3.0 E-2	3.0 E-9	8.1 E-10	2.7 E-10	9.5 E-11	3.5 E-11
218	9.881	100.0	1.1 E-7	7.5 E-9	2.5 E-9	1.0 E-9	4.7 E-10	2.2 E-10
222	8.164	100.0	2.8 E-3	5.2 E-9	1.3 E-9	4.6 E-10	1.7 E-10	7.0 E-11
226	6.487	75.5	2.5 E+3	2.9 E-9	5.6 E-10	1.3 E-10	3.5 E-11	9.4 E-12
228	5.555	72.7	8.3 E+7	1.8 E-9	2.8 E-10	4.9 E-11	1.0 E-11	1.9 E-12

Таблица 1.1: Оцененные значения вероятностей тормозного излучения при α-распаде ядра ^{228}Th и его изотопов

ной компоненты больше (т. е. внутренняя яма α-ядерного потенциала глубже). Можно полагать, что для мультипольного подхода такая зависимость должна проявляться существенно слабее. Итак, мы будем использовать мультипольный подход для дальнейших расчетов спектров тормозного излучения и для анализа.

1.12.3 Зависимость вероятности тормозного излучения от Q_α-значения и предсказания спектров при α-распаде изотопов Th

В недавно опубликованной работе [41] сообщается о текущих экспериментальных измерениях (исследованиях) тормозного излучения, сопровождающего α-распад ядра ^{228}Th. Мы оценим абсолютную вероятность излучения для этого ядра на основе описанной ранее модели. Результаты таких расчетов представлены на Рис. 1.4. В расчетах использованы такие параметры: угол ϑ между направлениями движения α-частицы (с возможным туннелированием) и излучением фотона равен 90°, а Q_α-значение — 5.555 МэВ [34].

В [26] мы объяснили отличие между вероятностями излучения фотонов (на основе как экспериментальных, так и теоретических результатов) при α-распаде ядер ^{226}Ra и ^{214}Po (зависимость вероятности тормозного излучения от энергии вылетающей α-частицы была также проанализирована в [42]): отличие между двумя спектрами может быть объяснено разной структурой этих ядер, что приводит к разной динамике туннелирования α-частицы в области барьера. Отличие между двумя спектрами излученных фотонов существенно определяется разными энергиями вылетающей α-частицы для ^{214}Po ($E_\alpha = 7.7$ МэВ) и ^{226}Ra ($E_\alpha = 4.8$ МэВ). Можно считать, что вероятность излучения фотона при туннелировании α-частицы меньше, чем при надбарьерном ее движении. Разные энергии вылетающей α-частицы для распадающихся ядер ^{214}Po и ^{226}Ra формируют разные длины туннелирования для этих ядер, что определяет разные вклады излучения фотонов из областей туннелирования, внешних областей, а также их интерференций в полные спектры. В результате, мы приходим к следующему свойству: *Чем больше об-*

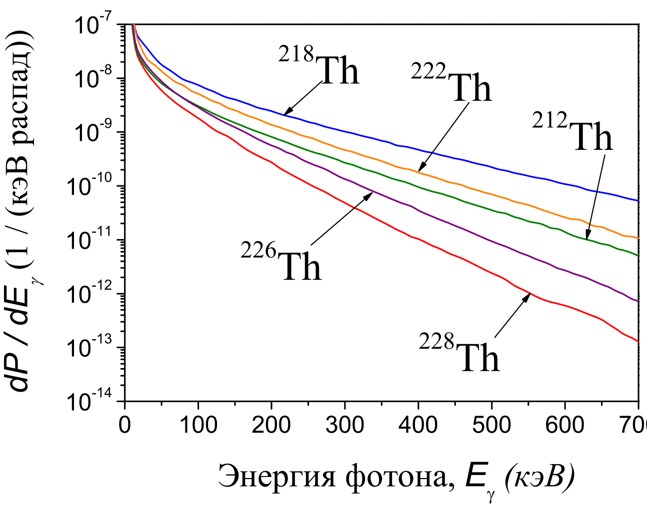

Рис. 1.4: Предсказанные абсолютные вероятности тормозного излучения при α-распаде ядра ^{228}Th и его изотопов.

ласть туннелирования, тем меньше вероятность тормозного излучения. Этим и объясняются меньшие значения для вычисленной вероятности излучения для ^{226}Ra по сравнению с ^{214}Po. На Рис. 1.4 можно видеть демонстрацию этого свойства для изотопов Th. В таблице 1.1 показано, как вероятность тормозного излучения зависит от Q_α-значения ядра для разных энергий излученных фотонов.

1.12.4 На сколько сильно меняется вероятность тормозного излучения в зависимости от числа протонов и нейтронов α-распадающей системы?

Теперь рассмотрим, насколько сильно вероятность излучения фотонов меняется в зависимости от числа протонов и нейтронов ядра, которое распадается. Для ясности анализа,

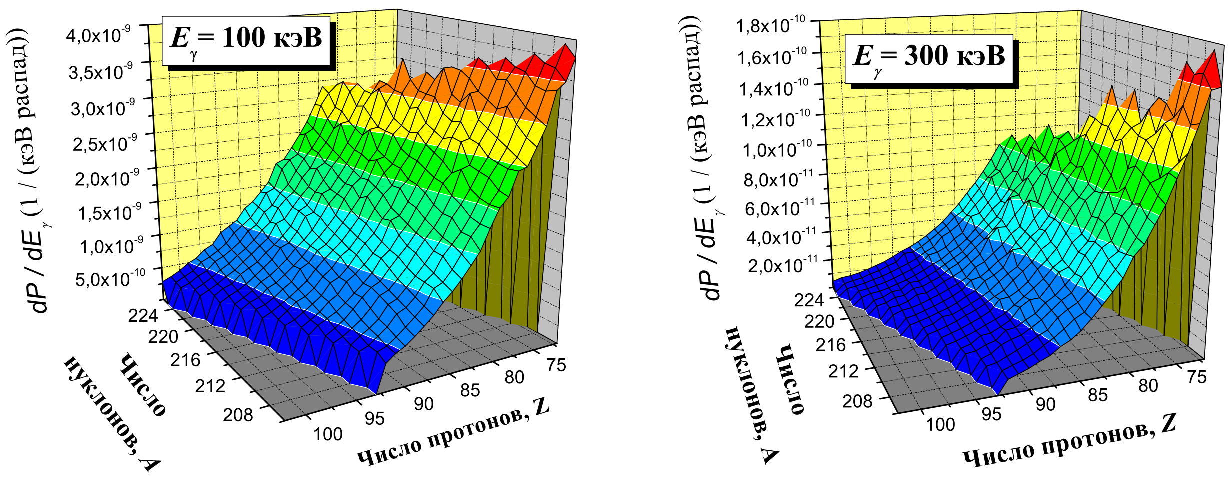

Рис. 1.5: Распределение абсолютной вероятности излучения при α-распаде в зависимости от чисел протонов и нейтронов распадающего ядра (использованы данные: $Q_\alpha = 5.439$ МэВ для ^{210}Po): (а) распределение вероятностей излучения при энергии $E_\gamma = 100$ кэВ, (б) распределение вероятностей излучения при энергии $E_\gamma = 300$ кэВ

мы зафиксируем Q-значение на одном выбранном значении и найдем вероятности в некотором диапазоне значений протонов и нейтронов (выберем угол между направлениями излучения фотонов и движения α-частицы равным 90°). На следующем Рис. 1.5 показано распределение абсолютных вероятностей в зависимости от числа протонов и нейтронов α-распадающего ядра для 100 кэВ, 300 кэВ и 500 кэВ излученных фотонов. Можно видеть, что с ростом числа нейтронов вероятность меняется слабо и монотонно, тогда как с ростом числа протонов вероятность монотонно уменьшается существенно сильнее.

1.12.5 Угловое распределение вероятности излучения фотонов

Рассмотрим, как меняется вероятность излучения фотонов от величины угла между направлениями движения α-частицы и излучения фотона. Для анализа мы рассмотрим ядро ^{210}Po. На Рис. 1.6 показаны вероятности излучения найденные по мультипольной модели, для разных значений этого угла. В частности, можно видеть, что спектр при угле 25° расположен значительно ниже по сравнению со спектром при угле 90°. Эти результаты позволяют связать воедино экспериментальные данные [37] и [35] полученные при этих

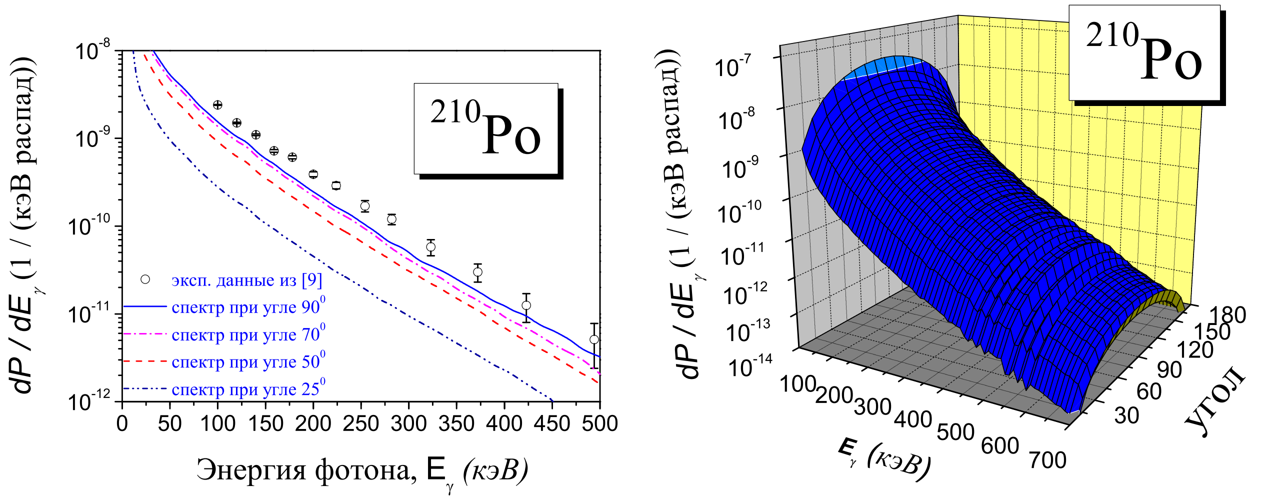

Рис. 1.6: Абсолютная вероятность излучения при α-распаде ^{210}Po в зависимости от угла $\vartheta_{\alpha\gamma}$ между направлениями движения α-частицы и излучения фотона

углах. Возможно, таким образом впервые удается дать теоретическое обоснование предположению об отличии между двумя экспериментами, выдвинутому в работах [38, 39]. На следующем Рис. 1.7 показано распределение вероятности излучения в зависимости от угла $\vartheta_{\alpha\gamma}$ между направлениями движения α-частицы и излучения фотона для ядра ^{210}Po. Видно, что угловое распределение вероятности формируется преимущественно первым

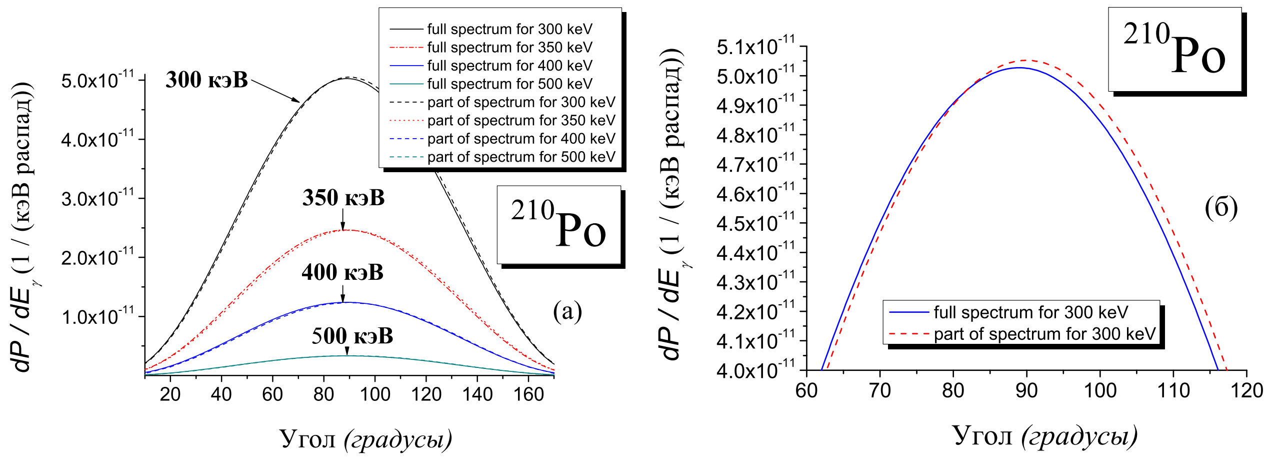

Рис. 1.7: Распределение вероятности излучения в зависимости от угла между направлениями движения α-частицы и излучения фотона для ядра ^{210}Po: (a) вероятности при 300 кэВ, 350 кэВ, 400 кэВ, 500 кэВ; (б) вероятности при 300 кэВ в увеличенном масштабе.

интегралом $J(1,0)$, тогда как следующие два интеграла $J(1,1)$ и $J(1,2)$ вносят малый вклад к полный спектр.

1.12.6 Формула вероятности тормозного излучения при α-распаде

Чтобы найти такую формулу, в начале мы ограничимся каким-нибудь одним ядром и будем искать вид этой формулы для него. После предварительного анализа и некоторых оценок спектров для разных ядер, в качестве стартовой зависимости мы нашли такую (для простоты, далее будем использовать $\vartheta_{\alpha\gamma} = 90°$):

$$\ln \left\{ \frac{dP_{\rm param}(w;\, a_0 \ldots a_4,\, n_1 \ldots n_4)}{d\,\Omega_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} \right\} = \ln \left\{ \frac{e^2}{8\,\pi\,c^5}\, \frac{Z_{\rm eff}^2\, E_i}{m^2\, k_i} \right\} + a_0 - a_1\, w^{n_1} + \frac{a_2}{w^{n_2}} + \frac{a_3}{w^{n_3}} + \frac{a_4}{w^{n_4}}, \tag{1.135}$$

где $a_0 \ldots a_4$ и $n_1 \ldots n_4$ — неизвестные постоянные, независящие от энергии излученного фотона и разные для разных ядер. Эти постоянные отражают "структуру" α-распада рассматриваемых ядер. Поэтому они должны зависеть от Q_α, $Z_{\rm eff}$, Z_d, A_d исследуемого ядра.

Чтобы найти эти параметры $a_0 \ldots a_4$ $n_1 \ldots n_4$ для выбранных ядер, мы введем следующие характеристики:

$$\begin{array}{rcl} \sigma\,(a_i,\, n_i) & = & \sqrt{\dfrac{1}{w_{\rm max} - w_{\rm min}} \displaystyle\int\limits_{w_{\rm min}}^{w_{\rm max}} \Bigl[\Delta P\,(w;\; a_i,\, n_i)\Bigr]^2\, dw}, \\ \Delta P\,(w;\; a_i,\, n_i) & = & \ln \left\{ \dfrac{dP_{\rm model}(w)}{d\,\Omega_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} \right\} \;-\; \ln \left\{ \dfrac{dP_{\rm param}(w;\, a_0 \ldots a_4,\, n_1 \ldots n_4)}{d\,\Omega_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} \right\}, \end{array} \tag{1.136}$$

где $dP_{\rm model}$ и $dP_{\rm param}$ — вероятности тормозного излучения, вычисленные по мультипольной модели и с помощью формулы (1.135) соответственно. Чем меньше σ при фиксированных остальных параметрах, тем кривая $dP_{\rm param}$, полученная с помощью формулы (1.135), должна быть ближе к спектру $dP_{\rm model}$, найденному по мультипольной модели. Т. е. наилучшее определение спектра тормозного излучения для изучаемых ядер по формуле (1.135) должно быть при таком выборе параметров $a_0 \ldots a_4$ и $n_1 \ldots n_4$, когда σ — минимально. Для удобства, назовем такой путь определения параметров для выбранных ядер *методом минимизации*. В таком подходе, для ядра ^{218}Th расчеты дают следующие значения (при $w_{\rm min} = 50$ кэВ и $w_{\rm max} = 900$ кэВ):

$$\begin{array}{c} n_1 = 1, \qquad n_2 = 0.5, \qquad n_3 = 1, \qquad n_4 = 2, \\ a_0 = 10.8, \quad a_1 = 0.007, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = 1. \end{array} \tag{1.137}$$

Оказывается, что кривая, полученная по формуле (1.135) при выборе (1.137), расположена наиболее близко ко спектру излучения для ^{218}Th. Поэтому можно ожидать, что вероятность тормозного излучения для произвольного ядра может быть достаточно хорошо аппроксимирована с помощью формулы (1.135) для энергий излученных фотонов до 1 МэВ. Оценки параметров для других ядер показывают, что возможно описать спектры излучения с достаточно хорошей точностью для разных ядер, используя только разные a_0 и a_1, при фиксированных $n_1 \ldots n_4$ и даже a_2, a_3, a_4.

На первом этапе построения формулы вероятности, мы определим параметры $n_1 \ldots n_4$, a_2, a_3 и a_4 для разных ядер по формуле (1.137) и постараемся выяснить, от чего должны зависеть a_0 и a_1. Простейшая зависимость a_0 и a_1 от Q, A_d и Z_d — линейная. Поэтому рассмотрим следующие формулы:

$$\begin{array}{rcl} a_0\,(Q, A_d, Z_d) & = & b_{00} + b_{01}\, Q + b_{02}\, A_d + b_{03}\, Z_d, \\ a_1\,(Q, A_d, Z_d) & = & b_{10} + b_{11}\, Q + b_{12}\, A_d + b_{13}\, Z_d, \end{array} \tag{1.138}$$

где введены новые неизвестные параметры b_{0i} и b_{1i} $(i = 0, 1, 2, 3)$, которые уже не зависят от Q, Z_d и A_d. Простейший путь — найти b_{01} и b_{11}. Для таких расчетов нам достаточно рассмотреть два ядра с равными числами Z_d и A_d и разными Q-значениями. Рассмотрим ядро ^{228}Th. Для него мы сперва вычисляем два спектра тормозного излучения по мультипольной модели при двух разных Q-значениях (выберем $Q_1 = 5.555$ МэВ и $Q_2 = 10$ МэВ),

данные α-распада						параметры			
No.	A_d	$A_d^{1/3}$	Z_d	$Z_{\rm eff}$	Q_α, МэВ	$a_0^{\rm (min)}$	$a_0^{\rm (param)}$	$a_1^{\rm (min)}$	$a_1^{\rm (param)}$
1	224	6.073177	88	0.42105	5.555	10.2	10.20083	0.0154	0.01531749
2	224	6.073177	88	0.42105	10.0	11.2	11.20020	0.0069	0.00681732
3	102	4.672328	50	0.03774	10.0	6.3	6.30084	0.00475	0.00440210
4	262	6.398827	107	0.36090	10.0	10.9	10.90000	0.008	0.00799993

Таблица 1.2: Параметры a_0 и a_1 для ^{228}Th, ^{106}Te и ядра с $A_p = 266$ и $Z_p = 109$ ($a_0^{\rm (min)}$ и $a_1^{\rm (min)}$ — параметры, вычисленные методом минимизации, $a_0^{\rm (param)}$ и $a_1^{\rm (param)}$ — параметры, найденные по формуле (1.139))

а затем найдем параметры a_0 и a_1 методом минимизации. Результаты таких расчетов показаны в Табл. 1.2 в первых двух строках с номерами 1 и 2.

Чтобы найти следующие два неизвестных параметра b_{ij} ($i = 1, 2,\ j = 0, 2, 3$), достаточно рассмотреть ядра с разными числами A_d, Z_d при зафиксированном одинаковом Q-значении. Чтобы достичь наиболее высокой точности, будем использовать предыдущее ядро и два новых с максимально большой разницей между их числами A_d. Для этогшо воспользуемся Таблицей в [34], откуда мы выбираем: ^{106}Te и ядро с $A_p = 266$, $Z_p = 109$. Далее мы находим спектры излучения при Q_α-значении равном 10 МэВ с помощью мультипольной модели, а затем определяем a_0 и a_1 с помощью метода минимизации. Результаты показаны в Табл. 1.2 в следующих двух строках под номерами 3 и 4. Используя данные этой таблицы, определяем неизвестные b_{0i} и b_{1i}, на основе которых получаем искомую зависимость a_0 и a_1 от Q, A_d и Z_d (Q в МэВ):

$$\begin{aligned} a_0\,(Q, A_d, Z_d) &= 4.60202 + 0.22497 \cdot Q + 0.11956 \cdot A_{\rm d} - 0.25492 \cdot Z_{\rm d}, \\ a_1\,(Q, A_d, Z_d) &= 0.0204108 - 0.0019123 \cdot Q + 1.086956 \cdot 10^{-6} \cdot A_{\rm d} + 6.0068649 \cdot 10^{-5} \cdot Z_{\rm d}. \end{aligned} \tag{1.139}$$

Теперь формула вероятности излучения (1.135) преобразуется к виду:

$$\ln \left\{ \frac{dP_1^{E1+M1}(w,\, \theta_f = 90^\circ)}{d\,\Omega_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} \right\} = \ln \left\{ \frac{e^2}{8\,\pi\,c^5}\, \frac{Z_{\rm eff}^2\, E_i}{m^2\, k_i} \right\} + a_0 - a_1\, w + \frac{10}{\sqrt{w}} + \frac{10}{w} + \frac{1}{w^2}. \tag{1.140}$$

Для четырех изучаемых ядер мы получили очень малое отличие между вероятностью излучения, вычисленной по мультипольной модели, и кривой, определенной по формуле (1.140) с параметрами (1.139) в диапазоне энергий излученных фотонов до 1 МэВ. *Т. е. с помощью одной формулы, параметры которой определяются на основе $A_{\rm d}$, $Z_{\rm d}$ и Q_α, нам удалось с достаточно хорошей точностью описать спектры тормозного излучения в диапазоне энергий излученных фотонов до 1 МэВ для четырех разных ядер (с сильно отличающимися $A_{\rm d}$).* Оказывается, что описание спектров тормозного излучения для всех ядер в диапазоне $A_{\rm d}$ от 107 до 262 при разных $Z_{\rm d}$ с помощью формулы (1.140) с параметрами (1.139) не всегда столь точно, однако достаточно неплохо (см. кривые на Рис. 1.8, полученные по формуле вероятности). Однако, точность определения вероятностей в таком подходе можно в дальнейшем улучшить существенно для "проблемных" ядер, если перейти от линейной зависимости (1.138) от чисел $A_{\rm d}$ и $Z_{\rm d}$ к гармонической.

1.13 Выводы и перспективы

В этой главе рассмотрена модель тормозного излучения, которое сопровождает α-распад. Эффективность модели и точность вычислений спектров анализируются в сравнении с

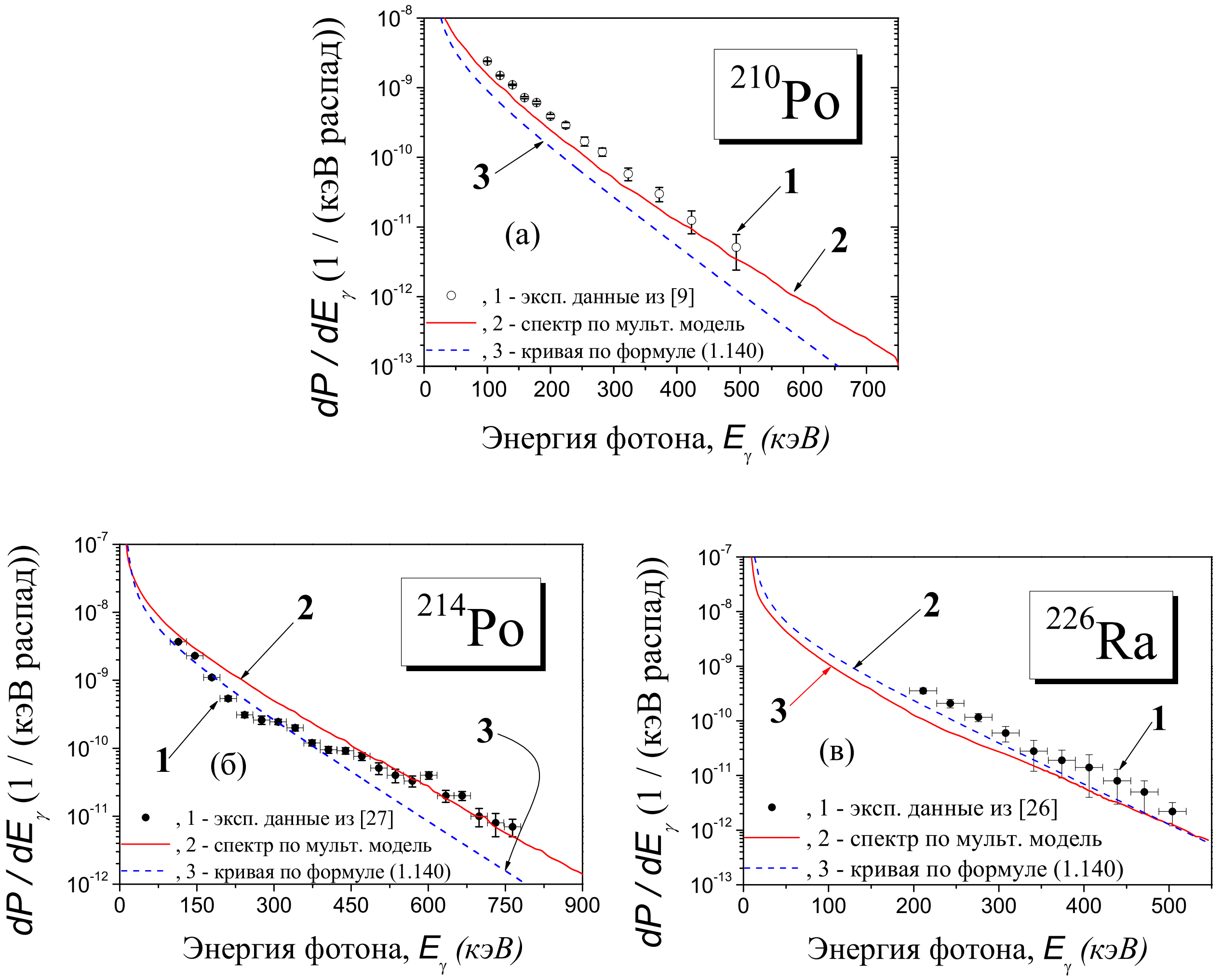

Рис. 1.8: Вероятность тормозного излучения при α-распаде ядер ^{210}Po, ^{214}Po и ^{226}Ra ($\vartheta_{\alpha\gamma} = 90^{\circ}$): абсолютная вероятность излучения, найденная по мультипольной модели (сплошная линия), экспериментальные данные (экспериментальные данные [9] для ^{210}Po, данные [27] для ^{214}Po и данные [26] для ^{226}Ra) и кривая, полученная по формуле (1.140) при (1.139) (штриховая линия).

имеющимися экспериментальными данными для ядер ^{210}Po, ^{214}Po, ^{226}Ra и ^{244}Cm. Отметим следующее.

- Наиболее мотивированным с физической точки зрения является мультипольный подход к определению вероятностей тормозного излучения, сопровождающего α-распад. Он выдает наиболее богатую информацию об угловом распределении вероятностей излучения. При описании всех имеющихся экспериментальных данных для α-распада (т. е. данных [9, 26, 27] для ядер ^{210}Po, ^{214}Po и ^{226}Ra, данных [37] для ядра ^{244}Cm) этот подход наиболее точен как при нормировке расчетных спектров на эксперимент (т. е. при расчете нормированных спектров), так и без какой либо такой нормировки (т. е. при расчете абсолютных спектров) по сравнению с иными известными подходами и моделями.

  - Наилучший результат в описании экспериментальных данных (без нормировки на них) достигнут для ядра ^{214}Po (с соответствующими экспериментальными данными [27]) в диапазоне энергий фотона от 100 кэВ до 750 кэВ (см. Рис. 1.2 (а), $Q_\alpha = 7.865$ МэВ, угол $\vartheta_{\alpha\gamma}$ между направлениями движения α-частицы и излучения фотона равен 90°).
  - Расчетные абсолютные вероятности тормозного излучения при α-распаде ядер ^{210}Po и ^{226}Ra для низких энергий излученных фотонов расположены несколько ниже экспериментальных данных [9] и [26], но для энергий фотонов, начиная от 350 кэВ и выше, достигается хорошее согласие между теорией и экспериментом (см. Рис. 1.2 (б) и (в), $Q_\alpha = 5.439$ МэВ для ^{210}Po и $Q_\alpha = 4.904$ МэВ для ^{226}Ra, $\vartheta_{\alpha\gamma} = 90°$).
  - Получено удовлетворительное согласие между спектром для ядра ^{244}Cm, вычисленным по мультипольной модели для угла $\vartheta_{\alpha\gamma} = 25°$, и верхним пределом ошибок экспериментальных данных [37] для этого ядра. В существующей литературе это ядро практически выключено из анализа. Полученное описание экспериментальных данных [37] в мультипольном подходе позволяет включить это ядро в существующий материал и дальнейший анализ для исследователей.

- В рамках дипольного подхода, излучение фотонов из внутренней области до барьера не столь мало и дает заметный вклад в полный спектр излучения. Мультипольный подход менее чувствителен к оценкам излучения из этой области. Эта особенность может быть объяснена более аккуратным использованием внешней асимптотической области мультипольным подходом, тогда как дипольный подход ограничивает эту область и, таким образом, существенно повышает сходимость при численном интегрировании спектров по r. Однако, более аккуратное использование дальней асимптотической области мультипольным подходом обеспечивает лучшее соответствие расчетных спектров с экспериментальными данными. Этот аспект дает мультипольному подходу силу предсказаний (т. е. оценок вероятностей излучения, когда нет экспериментальных данных для нормировки расчетной кривой), в отличие от дипольного.

- На основе мультипольной модели подтверждена гипотеза об объяснении отличия между двумя наборами экспериментальных данных [35] и [36] на основе разных значений 25° и 90° угла $\vartheta_{\alpha\gamma}$ между направлениями движения α-частицы и излучения фотона, выдвинутая в дискуссиях [38, 39].

- Предложена формула вероятности тормозного излучения при α-распаде произвольного ядра, позволяющая непосредственно (без нормировки на экспериментальные данные) оценить спектр на основе Q_α-значения, числа протонов Z_d и числа нейтронов $A_d - Z_d$ этого ядра. В диапазоне α-активных ядер, начиная от ^{106}Te до ядра с числами нуклонов $A_p = 266$ и протонов $Z_p = 109$ (эта область взята из [34]), для энергий излученного фотона от 50 кэВ до 900 кэВ она дает удовлетворительное согласие со спектрами, полученными на основе мультипольной модели[1]. Однако, анализируя результаты для ядер ^{210}Po, ^{210}Po и ^{226}Ra, оказывается, что без нормировки на эксперимент эта формула значительно точнее описывает экспериментальные данные (до 500 кэВ), по сравнению с дипольным подходом (например, см. [10]).

[1]Время счета спектра излучения для одного выбранного ядра по мультипольной модели может достигать до 10 часов (с целью достичь сходимости), тогда как время счета спектра по данной формуле не превышает нескольких секунд на том-же компьютере.

Глава 2

Излучение при альфа-распаде деформированных ядер

В этой главе описана квантовая модель тормозного излучения фотонов, которое сопровождает α-распад деформированного ядра. Ключевой пункт в модели — формализм деформации ядра. Модель позволяет получать стабильные спектры тормозного излучения в зависимости от разных значений угла θ_β между направлением движения α-частицы (и ее туннелирования в подбарьерной области) и осью аксиальной симметрии деформированного ядра. Определена аналитическая зависимость вероятности излучения от параметра квадрупольной деформации β_2 распадающегося ядра. На такой основе определяются спектры тормозного излучения для ядра ^{226}Ra, которое имеет параметр $\beta_2 = 0.151$, и результаты вычислений сравниваются с экспериментальными данными. Наблюдается стабильная картина отличия между вероятностями излучения, полученными для $\theta_\beta = 90^\circ$ и $\theta_\beta = 180^\circ$. Вероятность, проинтегрированная по всему диапазону значений угла θ_β, находится несколько выше вероятности излучения в приближении сферически-симметричного α-распада (т. е. при $\beta_2 \to 0$) и точнее описывает экспериментальные данные. Такие результаты ясно показывают, что учет деформации распадающегося ядра улучшает согласие между теорией и экспериментом для ^{226}Ra.

2.1 Введение

В последние годы много экспериментальных [9, 26, 27, 35–39] и теоретических (см. Главу 1) попыток было сделано в изучении природы тормозного излучения при α-распаде тяжелых ядер, поскольку поведение вероятности излучения фотонов сильно связано с динамикой α-распада и α–ядерным взаимодействием. В некоторых случаях в спектре тормозного излучения проявляются мало заметные осцилляции [27], другие исследователи находят минимум [36, 37], в иных экспериментах [9, 10] не наблюдается никакой структуры. Чтобы понять особенности спектров тормозного излучения и описать их достаточно точно, необходимо разработать подходящую модель, которая была бы чувствительной к характеристикам α-распада с целью точнее описать процесс туннелирования α-частицы через кулоновский барьер.

Если сравнить спектры тормозного излучения при α-распаде ядер ^{214}Po и ^{226}Ra, представленные в [26], которые имеют практически очень близкие формы α–ядерного потенциала, то можно заметить существенное отличие между ними, что указывает на существенно разную степень интенсивности излучения для этих ядер. Объяснение такого отличия в спектрах можно увидеть в разных Q-значениях α-распада для этих ядер. Но имеют ли эти два ядра другие характеристики, которые также заметно влияют на излучение фотонов? Q-значения для двух ядер дают существенно разные области туннелирования их барьеров. Можно предположить, что такое отличие приводит к существенно разным вкладам излучения из области туннелирования в полный спектр. Это было подтверждено экспериментально в [26]. Кроме того, можно предположить, что ускорение α-частицы наиболее велико в области максимального спада потенциального барьера (и смены градиента потенциала), и именно там α-частица излучает фотоны наиболее сильно — это и есть ситуация, когда α-частицы проходит через область ядерной поверхности. Отсюда, мы естественным образом приходим к другой возможной характеристике — деформации ядра. Теперь, сравнивая два изучаемых ядра, мы находим отличие в деформации их ядерной поверхности: тогда как ^{214}Po является практически сферически симметричным ядром, ^{226}Ra оказывается действительно деформированным ($\beta_2 = 0.151$)! Теперь появляется вопрос: насколько сильно деформация ядра влияет на спектр тормозного излучения фотонов? Будет ли такое влияние вообще заметно в спектрах для деформированных ядер или оно окажется сильным? Конечно, в таком направлении исследований было бы интересно рассмотреть сильно деформированные ядра, и выяснить, насколько сильно будет отличаться излучение фотонов из области ядерной поверхности для них. Но в этой главе мы будем ограничены имеющимися на сегодняшний день экспериментальными данными (чтобы тестировать такие расчеты), которые дают в наше распоряжение лишь одно ядро — ^{226}Ra.

Таким образом, мы приходим к новой и трудной задаче в теории: разработать формализм, позволяющий вычислять вероятности тормозного излучения с учетом деформации ядра. Естественно, такая модель должна быть апробирована расчетами, сравнительными оценками с экспериментальными данными и результатами других имеющихся подходов, должна быть достигнута сходимость в получении вероятностей излучения (чтобы их можно было считать достоверными).

2.2 Вероятность тормозного излучения при α-распаде

Рассмотрим основные положения модели. Мы определяем вероятность тормозного излучения при α-распаде ядра на основе матричного элемента перехода составной системы (α-частица и дочернее ядро) из ее состояния перед излучением фотона (назовем такое состояние *начальным i-состоянием*) в ее состояние после излучения фотона (назовем такое состояние *конечным f-состоянием*). Можно определить матричный элемент такого перехода системы и на его основе найти вероятность тормозного излучения при α-распаде (для краткости, обозначим ее как $W(w)$). Согласно (1)–(5) в [23] (также см. [22, 26, 27], однако k_f исключено), имеем

$$W(w) = N_0\, w\, |p\,(w)|^2, \quad k_{i,f} = \sqrt{2\, m\, E_{i,f}}, \quad w = E_i - E_f, \tag{2.1}$$

где

$$p\,(w) = \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)*} \int \psi_f^*(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \psi_i(\mathbf{r})\, \mathbf{dr}. \tag{2.2}$$

Здесь N_0 — коэффициент нормировки наших расчетных кривых на экспериментальные данные (все кривые будем нормировать на одну точку, выбранную при низких энергиях излученных фотонов), m — приведенная масса системы, $E_{i,f}$ и $k_{i,f}$ — полная энергия и волновой вектор системы в начальном i-состоянии или в конечном f-состоянии (при выборе соответствующего индекса i или f), $\psi_i(\mathbf{r})$ и $\psi_f(\mathbf{r})$ — волновая функция системы в начальном i- и в конечном f-состояниях, $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — вектор поляризации излученного фотона, $\mathbf{k}$ — волновой вектор фотона, $w = k = |\mathbf{k}|$ — частота (энергия) фотона. В этой главе мы будем использовать систему единиц, которая дает $\hbar = 1$ и $c = 1$, и кулоновскую калибровку, при которой векторы поляризации $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ для каждого фотона перпендикулярны его волновому вектору $\mathbf{k}$. Обозначения выбраны в соответствии с [22, 23, 26, 27].

Подобные выражения для вероятности тормозного излучения используются в [8, 20, 43] с представлением волновой функции излученного фотона в *дипольном приближении.*

2.2.1 Переход к векторам круговой поляризации

Перепишем вектора поляризации $\mathbf{e}^{\alpha}$ через вектора круговой поляризации $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ и $\boldsymbol{\xi}_{+1}$ с противоположными направлениями вращения (см. [33], стр. 42):

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}^1 - i\mathbf{e}^2), \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}^1 + i\mathbf{e}^2). \tag{2.3}$$

Подставляя эти выражения в (2.2), получим

$$p\,(w) = \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu}\,\boldsymbol{\xi}_{\mu}^{*} \int \psi_{f}^{*}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\mathbf{kr}}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \psi_{i}(\mathbf{r})\,\mathbf{dr}, \tag{2.4}$$

где

$$h_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1-i), \quad h_{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1+i), \quad h_{-1} + h_{1} = -i\sqrt{2}. \tag{2.5}$$

2.2.2 Выделение угла между направлением движения α-частицы и направлением излучения фотона

Рассмотрим вектора $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$. Вектор $\mathbf{k}$ представляет собой импульс фотона, указывающий направление его распространения. Вектор $\mathbf{r}$ — это радиус-вектор, указывающий положение α-частицы относительно центра масс дочернего ядра и (поскольку масса дочернего ядра существенно больше чем масса α-частицы) указывающий направление ее движения (или туннелирования). Тогда угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ (обозначим его как $\theta_{\alpha-\gamma}$) — это угол между направлением $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ движения (или туннелирования) α-частицы и направлением $\mathbf{n}_{\mathrm{ph}} = \mathbf{k}/k$ распространения излученного фотона. Можно записать [23]

$$\exp\,(-i\mathbf{kr}) = \exp\,(-ikr\cos\,(\theta_{\alpha-\gamma}), \quad k = |\mathbf{k}|, \quad r = |\mathbf{r}|. \tag{2.6}$$

Отсюда получим

$$p\,(w, \theta_{\alpha-\gamma}) = \sum_{\mu=-1,1} h_{\mu}\boldsymbol{\xi}_{\mu}^{*} \int\limits_{0}^{+\infty} r^2\,dr \int \psi_{f}^{*}(\mathbf{r})\,e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\,\psi_{i}(\mathbf{r})\,d\Omega. \tag{2.7}$$

2.3 Деформированный α-ядерный потенциал

Для описания взаимодействия между α-частицей и деформированным ядром возьмем потенциал вида:

$$V\,(r, \theta_{\beta}, l, Q_{\alpha}) = v_{C}\,(r, \theta_{\beta}) + v_{N}\,(r, \theta_{\beta}, Q_{\alpha}) + v_{l}\,(r), \tag{2.8}$$

где кулоновскую $v_{C}\,(r, \theta_{\beta})$, ядерную $v_{N}\,(r, \theta_{\beta}, Q_{\alpha})$ и центробежную $v_{l}\,(r)$ компоненты определим согласно [21] (см. (6)–(10)) так:

$$v_{C}\,(r, \theta_{\beta}) = \begin{cases} \dfrac{2Ze^2}{r}\,\Bigl(1 + \dfrac{3R^2}{5r^2}\beta_2 Y_{20}(\theta_{\beta})\Bigr), & \text{для } r \ge r_m, \\ \dfrac{2Ze^2}{r_m}\,\Bigl\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2r_m^2} + \dfrac{3R^2}{5r_m^2}\beta_2 Y_{20}(\theta_{\beta})\Bigl(2 - \dfrac{r^3}{r_m^3}\Bigr)\Bigr\}, & \text{для } r < r_m, \end{cases} \tag{2.9}$$

$$v_N\,(r,\theta_\beta,Q_\alpha) = \frac{V(A,Z,Q_\alpha)}{1+\exp\dfrac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}}, \tag{2.10}$$

$$v_l\,(r) = \frac{l\,(l+1)}{2mr^2}. \tag{2.11}$$

Параметры кулоновской и ядерной компонент определим, согласно [21] (см. (14), (16)–(19) в этой работе):

$$V\,(A,Z,Q_\alpha) \;=\; -\Big(30.275-0.45838\,Z/A^{1/3}+58.270\,I-0.24244\,Q_\alpha\Big), \tag{2.12}$$

$$\begin{array}{lcl} R & = & R_p\,(1+3.0909/R_p^2)+0.1243\,t, \\ R_p & = & 1.24\,A^{1/3}\,(1+1.646/A-0.191\,I), \\ t & = & I-0.4\,A/(A+200), \\ d & = & 0.49290, \\ I & = & (A-2Z)/A. \end{array} \tag{2.13}$$

Также согласно (21)–(22) в [21], имеем

$$r_m(\theta_\beta) = r_0 + R(\theta_\beta), \qquad r_0 = 1.5268, \qquad R(\theta_\beta) = R\,(1+\beta_2\,Y_{20}(\theta_\beta)). \tag{2.14}$$

Здесь A и Z — числа нуклонов и протонов в дочернем ядре; Q_α — Q-значение α-распада, R — радиус дочернего ядра, $V(A,Z,Q_\alpha,\theta)$ — сила ядерной компоненты; r_m — эффективный радиус ядерной компоненты, d — параметр диффузности; $Y_{20}(\theta_\beta)$ — сферическая гармоническая функция второго порядка, θ_β — угол между направлением вылета α-частицы и осью аксиальной симметрии дочернего ядра; β_2 — параметр квадрупольной деформации дочернего ядра.

2.3.1 Разложение ядерной компоненты по степеням β_2

Будем считать, что параметр деформации β_2 достаточно мал. Далее нам понадобится разложение ядерной компоненты по степеням β_2:

$$\begin{aligned} v_N\,(r,\theta_\beta,Q_\alpha) \;&=\; V\,(A,Z,Q_\alpha)\cdot\bigg\{\Big(1+\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\Big)^{-1}\bigg|_{\beta_2=0} + \\ &+\; \frac{\partial}{\partial\beta_2}\Big(1+\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\Big)^{-1}\bigg|_{\beta_2=0}\beta_2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\beta_2^2}\Big(1+\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\Big)^{-1}\bigg|_{\beta_2=0}\beta_2^2 + O\,(\beta_2^3)\bigg\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Учитывая:

$$\begin{aligned} \Big(1+\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\Big)^{-1}\bigg|_{\beta_2=0} \;&=\; \Big(1+\exp\frac{r-r_0-R}{d}\Big)^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial\beta_2}\Big(1+\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\Big)^{-1}\bigg|_{\beta_2=0} \;&=\; \Big(1+\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\Big)^{-2}\exp\frac{r-r_m(\theta_\beta)}{d}\,\frac{1}{d}\cdot\frac{\partial r_m(\theta_\beta)}{\partial\beta_2}\bigg|_{\beta_2=0} = \\ &=\; \frac{1}{d}\cdot\Big(1+\exp\frac{r-r_0-R}{d}\Big)^{-2}\exp\frac{r-r_0-R}{d}\cdot R\,Y_{20}(\theta_\beta), \end{aligned} \tag{2.16}$$

перепишем найденное разложение (2.15) так:

$$v_N\,(r,\theta_\beta,Q_\alpha) \;=\; V(A,Z,Q_\alpha)\cdot\Big\{v_{N0}\,(r) \;+\; v_{N1}\,(r)\cdot\beta_2\,Y_{20}(\theta_\beta) \;+\; O\,(\beta_2^2)\Big\}, \tag{2.17}$$

где

$$
\begin{aligned}
v_{N0}\,(r) &= \Bigl(1 + \exp\frac{r - r_0 - R}{d}\Bigr)^{-1}, \\
v_{N1}\,(r) &= \frac{R}{d}\cdot\Bigl(1 + \exp\frac{r - r_0 - R}{d}\Bigr)^{-2}\exp\frac{r - r_0 - R}{d} = \frac{R}{d}\,v_{N0}^2(r)\,\exp\frac{r - r_0 - R}{d}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

2.3.2 Приближение сферически-симметричного α-распада

Для большинства тяжелых ядер параметр деформации β_2 достаточно мал. В первом приближении мы можем применить приближение сферически-симметричного распада при определении α-ядерного потенциала (2.8)–(2.13). Нам известны волновые функции в начальном и конечном состояниях. В сферически-симметричном приближении эти волновые функции можно разложить на радиальную и угловую компоненты:

$$
\begin{aligned}
\varphi_i(r,\theta,\phi) &= R_i(r)\,Y_{l_i m_i}(\theta,\phi) &= \frac{\chi_i(r)}{r}\,Y_{l_i m_i}(\theta,\phi), \\
\varphi_f(r,\theta,\phi) &= R_f(r)\,Y_{l_f m_f}(\theta,\phi) &= \frac{\chi_f(r)}{r}\,Y_{l_f m_f}(\theta,\phi).
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

Мы вычисляем радиальную компоненту $\chi_{i,f}(r)$ численно на основе данного α-ядерного потенциала. Здесь мы используем следующие граничные условия: i-состояние системы перед излучением фотона представляет собой чистый распад, и поэтому для его описания мы используем волновую функцию для α-распада; после излучения фотона состояние системы меняется и логичнее использовать волновую функцию рассеяния α-частицы на дочернем ядре для описания f-состояния. Итак, мы накладываем следующие граничные условия на радиальную компоненту $\chi_{i,f}(r)$:

$$
\begin{aligned}
&\text{начальное } i\text{-состояние:} && \chi_i(r \to +\infty) \to G(r) + iF(r), \\
&\text{конечное } f\text{-состояние:} && \chi_f(r = 0) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

где F и G — кулоновские функции.

2.4 Волновая функция в деформированном α–ядерном потенциале

Будем искать волновую функцию деформированного α-ядерного потенциала с помощью теории возмущений. Предположим, что гамильтониан системы с таким потенциалом может быть представлен в виде:

$$\hat{H} = \hat{H}_{\rm sph} + \hat{W}, \tag{2.21}$$

где $\hat{H}_{\rm sph}$ — гамильтониан системы со сферически-симметричным α-ядерным потенциалом, $\hat{W}$ — малая поправка к невозмущенному оператору $\hat{H}_{\rm sph}$ (его возмущение). Задача теории возмущений может быть сформулирована следующим образом. Предположим, что собственные функции $\psi_{\rm sph}$ от невозмущенного оператора $\hat{H}_{\rm sph}$ относительно собственного значения E нам известны, т. е. мы знаем решение уравнения:

$$\hat{H}_{\rm sph}\,\psi_{\rm sph} = \Bigl(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle + V_{\rm sph}(r)\Bigr)\,\psi_{\rm sph} = E\,\psi_{\rm sph}. \tag{2.22}$$

Требуется найти приближенное решение $\psi_{\rm sph}$ уравнения с деформированным потенциалом $V(r,\theta_\beta)$:

$$\hat{H}\,\psi = \Bigl(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle + V(r,\theta_\beta)\Bigr)\,\psi = E\,\psi. \tag{2.23}$$

Анализируя вид деформированного потенциала (2.8) при $\beta_2 \ne 0$, мы находим такое значение угла θ_β (обозначим его как $\theta_{\rm sph}$), при котором этот потенциал превращается в сферически-симметричный $V_{\rm sph}(r)$:

$$Y_{20}\,(\theta_{\rm sph}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(1 - 3\cos^2\theta_{\rm sph}) = 0, \tag{2.24}$$

откуда получаем

$$\theta_{\rm sph} = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{2.25}$$

2.4.1 Оператор возмущения $\hat{W}$

Сравнивая (2.23) с (2.9), находим вид оператора $\hat{W}$ с точностью до первой поправки:

$$\hat{W}(r,\theta_\beta) = V(r,\theta_\beta) - V_{\rm sph}(r), \tag{2.26}$$

который может быть записан как комбинация от кулоновской w_C и ядерной w_N компонент:

$$\hat{W} = w_C(r,\theta_\beta) + w_N(r,\theta_\beta,Q_\alpha). \tag{2.27}$$

Из (2.9) определяем кулоновскую компоненту:

$$w_C\,(r,\theta_\beta) = \begin{cases} \beta_2\cdot\dfrac{6Ze^2\,R^2}{5r^3}\cdot Y_{20}(\theta_\beta), & \text{для } r \ge r_m, \\ \beta_2\cdot\dfrac{6Ze^2\,R^2}{5r_m^3}\,\Bigl(2-\dfrac{r^3}{r_m^3}\Bigr)\cdot Y_{20}(\theta_\beta), & \text{для } r < r_m \end{cases} \tag{2.28}$$

и из (2.17) — ядерную компоненту:

$$w_N\,(r,\theta_\beta,Q_\alpha) \;=\; V\,(A,Z,Q_\alpha)\cdot\Bigl\{v_{N1}\,(r)\cdot\beta_2\,Y_{20}(\theta_\beta) \;+\; o\,(\beta_2^2)\Bigr\}. \tag{2.29}$$

Итак, оператор $\hat{W}$ в первом приближении по β_2 может быть представлен так:

$$\hat{W} = \beta_2\cdot w^{(1)}(r)\cdot Y_{20}(\theta_\beta), \tag{2.30}$$

где

$$w^{(1)}\,(r) = \begin{cases} \dfrac{6Ze^2\,R^2}{5r^3} + V(A,Z,Q_\alpha)\cdot v_{N1}\,(r), & \text{для } r \ge r_m, \\ \dfrac{6Ze^2\,R^2}{5r_m^3}\,\left(2-\dfrac{r^3}{r_m^3}\right) + V\,(A,Z,Q_\alpha)\cdot v_{N1}(r), & \text{для } r < r_m. \end{cases} \tag{2.31}$$

2.4.2 Базис функций для разложения искомой волновой функции α-частицы

Чтобы применить теорию возмущений к определению волновой функции $\psi\,(\mathbf{r})$, необходимо задать множество известных нам функций, на основе которого можно было бы разложить искомую функцию $\psi\,(\mathbf{r})$ и такое представление было бы достоверным.

Пусть для каждого выбранного угла θ' нам известны решения волновой функции $\psi_{\theta'}$ уравнения Шредингера с потенциалом $V(r,\theta')$, предполагая этот угол фиксированным:

$$\hat{H}_{\theta'}\,\psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle + V(r,\theta')\right)\psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = E\,\psi_{\theta'}(\mathbf{r}). \tag{2.32}$$

Поскольку в таком рассмотрении потенциал $V(r, \theta')$ является сферически симметричным, то функция $\psi_{\theta'}(\mathbf{r})$ может быть записана через сумму парциальных волновых функций с квантовыми числами l, m:

$$\psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = \sum_{l',m'} \psi_{\theta',l',m'}(r, \theta, \varphi). \tag{2.33}$$

Теперь вспомним, что распадающаяся система в сферически симметричном приближении в состоянии до излучения фотона находилась в состоянии с квантовыми числами l_i и m_i (а после излучения фотона — в другом состоянии с новыми числами l_f, m_f). Введем обобщенное обозначение таких состояний, добавив индекс 0: l_0 и m_0. Тогда представление (2.33) можно переписать, явно выделив состояние, максимально близкое сферически-симметричной задаче излучения:

$$\psi_{\theta'}(\mathbf{r}) = \psi_{\theta',l'_0,m'_0}(r, \theta, \varphi) + \sum_{l',m' \ne l'_0,m'_0} \psi_{\theta',l',m'}(r, \theta, \varphi). \tag{2.34}$$

Далее будем искать разложение искомой функции $\psi\,(\mathbf{r})$ по функциям $\psi_{\theta'}$:

$$\psi\,(\mathbf{r}) = \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}(\mathbf{r})\; d\theta'. \tag{2.35}$$

Теперь если при каждом угле использовать только два значения чисел l и m, таких-же как в состоянии недеформированного ядра, тогда искомая волновая функция будет представлена в виде произведения радиальной и угловой составляющих. В таком случае, угловая составляющая будет полностью совпадать с угловой волновой функцией от и разложение окажется лишь разложением одной лишь радиальной составляющей искомой по радиальным функциям невозмущенных, те мы не получим угловой деформации в таком представлении. Поэтому, для описания и учета угловой деформации нам необходимо учесть как минимум два состояния с l, m в суммах в (2.25). На этой основе выделим явно слагаемое с квантовыми числами невозмущенной волновой функции:

$$\psi\,(\mathbf{r}) = \int c(\theta')\, \psi_{\theta',l'_0,m'_0}(r, \theta, \varphi)\; d\theta' + \int c(\theta') \sum_{l' \ne l'_0,\; m' \ne m'_0} \psi_{\theta',l',m'}(r, \theta, \varphi)\; d\theta'. \tag{2.36}$$

Подставляя разложение (2.35) в (2.23), получим

$$\begin{aligned}
\hat{H}\,\psi(\mathbf{r}) = \left(\hat{H}_{\rm sph} + \hat{W}\right) \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}\; d\theta' = \hat{H}_{\rm sph} \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}\; d\theta' + \hat{W} \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}\; d\theta' = \\
= \int c(\theta')\, \hat{H}_{\rm sph}\, \psi_{\theta'}\; d\theta' + \int c(\theta')\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\; d\theta' = \int c(\theta')\, E\, \psi_{\theta'}\, \delta(\theta_{\rm sph} - \theta')\; d\theta' + \int c(\theta')\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\; d\theta' = \\
= E\, c(\theta_{\rm sph})\, \psi_{\theta_{\rm sph}} + \int c(\theta')\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\; d\theta' = E \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}\; d\theta'
\end{aligned}$$

или

$$E \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}\; d\theta' - E\, c(\theta_{\rm sph})\, \psi_{\theta_{\rm sph}} = \int c(\theta')\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\; d\theta'. \tag{2.37}$$

Умножим с обоих сторон это равенство слева на $\psi^{*}_{\theta'',l'',m''}$:

$$\psi^{*}_{\theta'',l'',m''} E \int c(\theta')\, \psi_{\theta'}\; d\theta' - \psi^{*}_{\theta'',l'',m''} E\, c(\theta_{\rm sph})\, \psi_{\theta_{\rm sph}} = \psi^{*}_{\theta'',l'',m''} \int c(\theta')\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\; d\theta' \tag{2.38}$$

и проинтегрируем по объему $\mathbf{dr}$:

$$\begin{aligned}
E \int d\theta'\; c(\theta') \int \psi^{*}_{\theta'',l'',m''}\, \psi_{\theta'}\; \mathbf{dr} - E\, c(\theta_{\rm sph}) \int \psi^{*}_{\theta'',l'',m''}\, \psi_{\theta_{\rm sph}}\; \mathbf{dr} \quad = \\
= \quad \int d\theta'\; c(\theta') \int \psi^{*}_{\theta'',l'',m''}\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\; \mathbf{dr}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Будем считать, что выполняется свойство:

$$\int \psi^{*}_{\theta'' l'' m''}\, \psi_{\theta' l' m'}\, \mathbf{dr} = \delta(\theta' - \theta'')\, \delta_{l' l''}\, \delta_{m' m''}. \tag{2.40}$$

Отсюда находим

$$\int \psi^{*}_{\theta'' l'' m''}\, \psi_{\theta'}\, \mathbf{dr} = \int \psi^{*}_{\theta'' l'' m''} \sum_{l' m'} \psi_{\theta' l' m'}\, \mathbf{dr} = \delta(\theta' - \theta'') \sum_{l' m'} \delta_{l' l''}\, \delta_{m' m''} = \delta(\theta' - \theta''). \tag{2.41}$$

Учитывая (2.41), из (2.39) находим

$$E \int c(\theta')\, \delta(\theta'' - \theta')\, d\theta' - E\, c(\theta_{\mathrm{sph}})\, \delta(\theta'' - \theta_{\mathrm{sph}}) = \int d\theta'\, c(\theta') \int \psi^{*}_{\theta'', l'', m''}\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\, \mathbf{dr}$$

или

$$E \Big[c(\theta'') - c(\theta_{\mathrm{sph}})\, \delta(\theta'' - \theta_{\mathrm{sph}})\Big] = \int d\theta'\, c(\theta') \int \psi^{*}_{\theta'', l'', m''}\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\, \mathbf{dr}. \tag{2.42}$$

Будем искать значения коэффициентов $c_{\theta'}$ в виде рядов:

$$c_{\theta'} = c^{(0)}_{\theta'} + c^{(1)}_{\theta'} + c^{(2)}_{\theta'} + \ldots, \tag{2.43}$$

где величины $c^{(1)}_{\theta'}$ того же порядка малости, что и возмущение $\hat{W}$. Определим поправки к собственной функции ψ_{sph} при θ_{sph}, соответственно чему полагаем: $c^{(0)}_{\theta_{\mathrm{sph}}} = 1$, $c^{(0)}_{\theta'} = 0$ при $\theta' \neq \theta_{\mathrm{sph}}$. Для отыскания первого приближения, подставляем в уравнение (2.42) $c_{\theta'} = c^{(0)}_{\theta'} + c^{(1)}_{\theta'}$, сохранив только члены первого порядка малости. При $\theta'' \neq \theta_{\mathrm{sph}}$ получим

$$\begin{aligned} c^{(1)}(\theta'') &= \frac{1}{E} \int d\theta' \left(c^{(0)}(\theta') + c^{(1)}(\theta')\right) \int \psi^{*}_{\theta'', l'', m''}\, \hat{W}\, \psi_{\theta'}\, \mathbf{dr} = \\ &= \frac{c^{(0)}(\theta_{\mathrm{sph}})}{E} \int \psi^{*}_{\theta'', l'', m''}\, \hat{W}\, \psi_{\mathrm{sph}}\, \mathbf{dr} \end{aligned} \tag{2.44}$$

или

$$c^{(1)}(\theta'') = \frac{1}{E} \int \psi^{*}_{\theta'', l'', m''}\, \hat{W}\, \psi_{\mathrm{sph}}\, \mathbf{dr} \quad \text{при } \theta'' \neq \theta_{\mathrm{sph}}. \tag{2.45}$$

Найдем этот коэффициент, учитывая явный вид (2.30) оператора $\hat{W}$:

$$\begin{aligned} c^{(1)}(\theta'') &= \frac{1}{E} \int R^{*}_{\theta'', l''}(r)\, Y^{*}_{l'' m''}(\theta) \cdot \beta_2\, w^{(1)}(r)\, Y_{20}(\theta) \cdot \sum_{lm} R_{\mathrm{sph}, l}(r)\, Y_{lm}(\theta)\, \mathbf{dr} = \\ &= \beta_2 \cdot \frac{1}{E} \sum_{lm} \int\limits_{0}^{+\infty} R^{*}_{\theta'', l''}(r)\, w^{(1)}(r)\, R_{\mathrm{sph}, l}(r)\, r^2\, dr \times \\ &\times \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, Y^{*}_{l'' m''}(\theta)\, Y_{20}(\theta)\, Y_{lm}(\theta). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Определим угловой интеграл. Учитывая свойство (см. (4) [118], стр. 131)

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, Y_{l_1 m_1}(\theta, \varphi)\, Y_{l_2 m_2}(\theta, \varphi)\, Y^{*}_{l_3 m_3}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)\,(2l_2 + 1)}{4\pi\, (2l_3 + 1)}}\, C^{l_3 0}_{l_1 0 l_2 0}\, C^{l_3 m_3}_{l_1 m_1 l_2 m_2} \tag{2.47}$$

и независимость функции $Y_{20}(\theta)$ от угла φ, получим

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\pi} d\theta\, \sin\theta\, Y^{*}_{l'' m''}(\theta)\, Y_{20}(\theta)\, Y_{lm}(\theta) = \delta_{m m''} \sqrt{\frac{(2l + 1)\,(2 \cdot 2 + 1)}{4\pi\, (2l'' + 1)}}\, C^{l'' 0}_{l 0 2 0}\, C^{l'' m''}_{l m'' 2 0}. \tag{2.48}$$

Для удобства, введем следующее обозначение:

$$I_{ll''}^{m''} \;=\; \sqrt{\frac{5\cdot(2l+1)}{4\pi\,(2l''+1)}}\, C_{l020}^{l''0}\, C_{lm''20}^{l''m''}. \tag{2.49}$$

Тогда перепишем в виде:

$$c_{l''m''}^{(1)}(\theta'') \;=\; \beta_2\cdot\frac{1}{E}\sum_l I_{ll''}^{m''}\int\limits_0^{+\infty} R^*_{\theta'',\,l''}(r)\, w^{(1)}(r)\, R_{\mathrm{sph},\,l}(r)\, r^2\, dr. \tag{2.50}$$

Теперь из (2.35) выпишем решение для волновой функции деформированного потенциала:

$$\begin{aligned}
\psi\,(\mathbf{r}) &= \int c(\theta')\,\psi_{\theta'}(\mathbf{r})\,d\theta' = c(\theta_{\mathrm{sph}})\,\psi_{\theta_{\mathrm{sph}}}(\mathbf{r}) + \int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c(\theta')\,\psi_{\theta'}(\mathbf{r})\,d\theta' = \\
&= c^{(0)}(\theta_{\mathrm{sph}})\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r}) + \int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c^{(1)}(\theta')\,\psi_{\theta'}(\mathbf{r})\,d\theta' = \\
&= \psi_{\mathrm{sph,\,l_0,m_0}}(\mathbf{r}) + \sum_{l,m\neq l_0,m_0}\psi_{\mathrm{sph,\,l,m}}(\mathbf{r}) + \\
&+ \int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c^{(1)}(\theta')\,\psi_{\theta',\,l_0,m_0}(\mathbf{r})\,d\theta' + \sum_{l,m\neq l_0,m_0}\int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c^{(1)}(\theta')\,\psi_{\theta',\,l,m}(\mathbf{r})\,d\theta'.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Учитывая, что при любых (одинаковых) числах l и m функции $\psi_{\mathrm{sph,\,l,m}}$ и $\psi_{\theta',l,m}$ разделяются на радиальную и угловую компоненты, а угловая компонента просто равна одной и той же сферической функции Y_{lm}, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Delta_r\,\psi(\mathbf{r}) &= \int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c^{(1)}(\theta')\,\psi_{\theta',\,l_0,m_0}(\mathbf{r})\,d\theta', \\
\Delta_\theta\,\psi(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m\neq l_0,m_0}\Big\{\psi_{\mathrm{sph,\,l,m}}(\mathbf{r}) + \int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c^{(1)}(\theta')\,\psi_{\theta',\,l,m}(\mathbf{r})\,d\theta'\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Тогда деформированную волновую функцию (2.51) можно разделить явно на сферически-симметричную невозмущенную волновую функцию $\psi_{\mathrm{sph},\,l_0m_0}$ с числами l_0 и m_0, а также поправки $\Delta_r\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r})$ и $\Delta_\theta\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r})$, определяющие радиальную и угловую деформации этой невозмущенной волновой функции:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\mathrm{sph},\,l_0m_0}(\mathbf{r}) + \Delta_r\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r}) + \Delta_\theta\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r}). \tag{2.53}$$

Распишем функции $\psi_{\theta' lm}(\mathbf{r})$ через радиальную и угловую составляющие явно:

$$\psi_{\theta',\,lm}(\mathbf{r}) = R_{\theta' l}(r)\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{2.54}$$

Тогда найденные поправки можно представить так:

$$\begin{aligned}
\Delta_r\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r}) &= \Delta_r R_{\mathrm{sph,l_0}}(r)\cdot Y_{l_0m_0}(\theta,\varphi), \\
\Delta_\theta\,\psi_{\mathrm{sph}}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m\neq l_0,m_0}\Big\{R_{\mathrm{sph},l}(r) + \Delta_r R_{\mathrm{sph,l}}(r)\Big\}\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi),
\end{aligned} \tag{2.55}$$

где

$$\Delta_r R_{\mathrm{sph},\,l}(r) \;=\; \int\limits_{\theta'\neq\theta_{\mathrm{sph}}} c^{(1)}(\theta')\,R_{\theta' l}(r)\;\sin\theta'\,d\theta'. \tag{2.56}$$

Учитывая найденное решение (2.50) для $c^{(1)}_{l''m''}(\theta')$, перепишем поправки, выделив явно параметр деформации β_2:

$$\begin{aligned}
\Delta_r\,\psi_{\rm sph}(\mathbf{r}) &= \beta_2\cdot\Delta_r\tilde{R}_{\rm sph,l_0}(r)\cdot Y_{l_0m_0}(\theta,\varphi),\\
\Delta_\theta\,\psi_{\rm sph}(\mathbf{r}) &= \sum_{l,m\ne l_0,m_0}\Bigl\{R_{{\rm sph},l}(r)+\beta_2\cdot\Delta_r\tilde{R}_{\rm sph,l}(r)\Bigr\}\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi),
\end{aligned}\tag{2.57}$$

где

$$\Delta_r\tilde{R}_{{\rm sph},\,l}(r) = \int\limits_{\theta'\ne\theta_{\rm sph}}\tilde{c}^{(1)}_{l'm'}(\theta')\,R_{\theta'l}(r)\,\sin\theta'\,d\theta',\tag{2.58}$$

$$\tilde{c}^{(1)}_{l'm'}(\theta') = \frac{1}{E}\sum_l I^{m'}_{ll'}\int\limits_0^{+\infty}R^*_{\theta',\,l'}(r)\,w^{(1)}(r)\,R_{{\rm sph},\,l}(r)\,r^2\,dr.\tag{2.59}$$

2.4.3 Градиенты от поправок деформированной волновой функции

Далее, для определения матричного элемента излучения при деформированном α-ядерном потенциале нам потребуется знать градиент от деформированной волновой функции. Найдем градиенты от радиальной и угловой поправок волновой функции. Воспользуемся градиентной формулой (см. (2.56) [33], стр. 46):

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,R(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left(\frac{dR}{dr}+\frac{l+1}{r}\,R\right)\mathbf{T}_{ll-1,\,m}(\mathbf{n_r}) - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left(\frac{dR}{dr}-\frac{l}{r}\,R\right)\mathbf{T}_{ll+1,\,m}(\mathbf{n_r}),\tag{2.60}$$

где $\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}_r)$ — векторные сферические гармоники, определенные согласно (1.61):

$$\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}_r) = \sum_{\mu=-1,1}(l1j|m-\mu\mu m)\;Y_{l,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\;\boldsymbol{\xi}_\mu,\tag{2.61}$$

$(l1j|m-\mu\mu m)$ — коэффициенты Клебша-Гордона (см. Приложение А.4), $Y_{1,\mu}(\mathbf{n}_r^{i,f})$ — сферические функции (см. Приложение А.2). В частности, для начального i-состояния с числами $l=0$ и $m=0$ получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,R(r)\,Y_{00}(\mathbf{n_r}) = -\frac{dR(r)}{dr}\,\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i),\\
&\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_r^i) = \sum_{\mu=-1,1}(110\,|-\mu\mu 0)Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_r^i)\;\boldsymbol{\xi}_\mu,\\
&(110\,|\,1,-1,0) = (110\,|-1,1,0) = \sqrt{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}\tag{2.62}$$

В результате, находим градиенты:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\psi_{{\rm sph},\,i,l_i=0}(\mathbf{r}) &= -\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{d\,R_{{\rm sph},\,i,l_i=0}(r)}{dr}\sum_{\mu'=-1,1}Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i)\,\boldsymbol{\xi}_{\mu'},\\
\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,\Delta_r\,\psi_{{\rm sph},\,l_i=0}(\mathbf{r}) &= -\beta_2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{d\,\Delta_r\,\tilde{R}_{{\rm sph},\,l_0=0}(r)}{dr}\sum_{\mu'=-1,1}Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_r^i)\,\boldsymbol{\xi}_{\mu'}.
\end{aligned}\tag{2.63}$$

При $l\ne 0$ находим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,R(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{l}{2l+1}}\left(\frac{dR}{dr}+\frac{l+1}{r}\,R\right)\sum_{\mu=-1,1}(l-1,1,l|m-\mu\mu m)\;Y_{l-1,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\;\boldsymbol{\xi}_\mu-\\
&-\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}}\left(\frac{dR}{dr}-\frac{l}{r}\,R\right)\sum_{\mu=-1,1}(l+1,1,l|m-\mu\mu m)\;Y_{l+1,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\;\boldsymbol{\xi}_\mu.
\end{aligned}\tag{2.64}$$

Отсюда находим градиент от угловой поправки, считая, что в начальном i-состоянии система имеет числа $l = m = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \Delta_\theta\, \psi(\mathbf{r}) \;&=\; \sum_{l=1,\, m} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \Bigl(\frac{d\, R_{\mathrm{sph},\, i,l}(r)}{dr} + \frac{l+1}{r}\, R_{\mathrm{sph},\, i,l}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, i,l}(r)}{dr} \quad + \\
&+\; \beta_2\, \frac{l+1}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, i,l}(r) \Bigr) \;\cdot \sum_{\mu=-1,1} (l-1, 1, l \,|\, m-\mu, \mu, m)\; Y_{l-1,\, m-\mu}(\mathbf{n}_r)\; \boldsymbol{\xi}_\mu - \\
&-\; \sum_{l \neq 0,\, m} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \Bigl(\frac{d\, R_{\mathrm{sph},\, i,l}(r)}{dr} - \frac{l}{r}\, R_{\mathrm{sph},\, i,l}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, i,l}(r)}{dr} \quad - \\
&-\; \beta_2\, \frac{l}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, i,l}(r) \Bigr) \;\cdot \sum_{\mu=-1,1} (l+1, 1, l \,|\, m-\mu, \mu, m)\; Y_{l+1,\, m-\mu}(\mathbf{n}_r)\; \boldsymbol{\xi}_\mu.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

В частности, найдем вид этого выражения при учете первого ненулевого $l = 1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \Delta_\theta\, \psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{3}} \Bigl(\frac{d\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} + \frac{2}{r}\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) + \beta_2 \frac{d\Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{2}{r}\, \Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) \Bigr) \times \\
&\times \sum_{m=-1,0,1} \sum_{\mu=-1,1} (0, 1, 1 \,|\, m-\mu, \mu, m)\; Y_{0,\, m-\mu}(\mathbf{n}_r)\; \boldsymbol{\xi}_\mu - \\
&- \sqrt{\frac{2}{3}} \Bigl(\frac{d\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} - \frac{1}{r}\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} - \beta_2\, \frac{1}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) \Bigr) \times \\
&\times \sum_{m=-1,0,1} \sum_{\mu=-1,1} (2, 1, 1 \,|\, m-\mu, \mu, m)\; Y_{2,\, m-\mu}(\mathbf{n}_r)\; \boldsymbol{\xi}_\mu.
\end{aligned}$$

Учитывая все возможные значения m для ненулевых функций Y_{0m} в первом слагаемом, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \Delta_\theta\, \psi(\mathbf{r}) \;&=\; \sqrt{\frac{1}{3}} \Bigl(\frac{d\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} + \frac{2}{r}\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) + \\
&+ \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} + \beta_2\, \frac{2}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) \Bigr) \sum_{\mu=-1,1} (0, 1, 1 \,|\, 0, \mu, \mu)\; \boldsymbol{\xi}_\mu \; - \\
&- \sqrt{\frac{2}{3}} \Bigl(\frac{d\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} - \frac{1}{r}\, R_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r)}{dr} - \beta_2\, \frac{1}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\, l=1}(r) \Bigr) \times \\
&\times \sum_{m=-1,0,1} \sum_{\mu=-1,1} (2, 1, 1 \,|\, m-\mu, \mu, m)\; Y_{2,\, m-\mu}(\mathbf{n}_r)\; \boldsymbol{\xi}_\mu.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

2.5 Расчет матричного элемента с учетом деформации α-распада

Как мы увидели ранее в (2.53), полная волновая функция деформированной α-распадающей системы разделяется на волновую функцию системы сферически-симметричного α-распада, а также на радиальную и угловую поправки от этой волновой функции на основе учета радиальной и угловой деформаций α-распада. На такой основе мы естественно приходим к такому же разделению полного матричного элемента:

$$p\,(w) = p_{\mathrm{sph}}\,(w) + \Delta_r p\,(w) + \Delta_\theta p\,(w), \tag{2.67}$$

где

$$p_{\mathrm{sph}}\,(w) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^{*} \int\limits_0^{+\infty} dr\; r^2\, e^{-ikr\, \cos\theta_{\alpha-\gamma}} \int \psi^{*}_{\mathrm{sph},f,l_f=1}(\mathbf{r})\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_{\mathrm{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r})\; d\Omega \tag{2.68}$$

матричный элемент сферически-симметричного распада,

$$\begin{aligned}\Delta_r\, p\,(w) &= \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr\; r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}} \times \\ &\times \int \Big\{ \Delta_r\, \psi^*_{\mathrm{sph}f,l_f=1}(\mathbf{r})\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_{\mathrm{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) + \psi^*_{\mathrm{sph},f,l_f=1}(\mathbf{r})\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \Delta_r\, \psi_{\mathrm{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) \Big\}\; d\Omega\end{aligned} \tag{2.69}$$

радиальная поправка, появляющаяся после учета радиальной деформации α-распада,

$$\begin{aligned}\Delta_\theta\, p\,(w) &= \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr\; r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}} \times \\ &\times \int \Big\{ \Delta_\theta\, \psi^*_{\mathrm{sph},f,l_f=1}(\mathbf{r})\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_{\mathrm{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) + \psi^*_{\mathrm{sph},f,l_f=1}(\mathbf{r})\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \Delta_\theta\, \psi_{\mathrm{sph},i,l_i=0}(\mathbf{r}) \Big\}\; d\Omega\end{aligned} \tag{2.70}$$

угловая поправка, появляющаяся после учета угловой деформации α-распада.

2.5.1 Матричный элемент от сферически-симметричной компоненты распада

Учитывая ортогональность векторов поляризации $\boldsymbol{\xi}^*_{\pm 1}$ и $\boldsymbol{\xi}_{\mp 1}$, найдем

$$\begin{aligned}p_{\mathrm{sph}}(w) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\, \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\; r^2\, dr \times \\ &\times \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_r)\, Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}^i_r)\; d\Omega.\end{aligned} \tag{2.71}$$

Учитывая свойство нормировки сферических функций $Y_{lm}(\mathbf{n}_r)$ (при $\mathbf{n}_r = \mathbf{n}^i_r = \mathbf{n}^f_r$), получим

$$p_{\mathrm{sph}}(w) = -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu\; \delta_{l_f,1}\, \delta_{m_f,-\mu} \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\, \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\; r^2\, dr. \tag{2.72}$$

Считая, что эта компонента должна быть преобладающей, определим правила отбора для квантовых чисел l и m конечного f-состояния (при которых интеграл отличен от нуля):

$$\begin{array}{lll} \text{начальное состояние:} & l_i = 0, & m_i = 0; \\ \text{конечное состояние:} & l_f = 1, & m_f = -\mu = \pm 1. \end{array} \tag{2.73}$$

С учетом всех возможных конечных состояний с числами m_f, получим

$$\begin{aligned}p_{\mathrm{sph}}(w) &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m=-1,0,1} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu\; \delta_{l_f,1}\, \delta_{m_f,-\mu} \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r) \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, r^2\, dr = \\ &= -\,\delta_{l_f,1}\, \delta_{m_f=\pm 1} \sqrt{\frac{1}{3}}\; (h_{-1} + h_{+1}) \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\, \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, r^2\, dr = \\ &= \;i\; \delta_{l_f,1}\, \delta_{m_f=\pm 1} \sqrt{\frac{2}{3}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\, \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\; r^2\, dr.\end{aligned} \tag{2.74}$$

2.5.2 Радиальная поправка к матричному элементу

Таким же образом, мы находим выражение для радиальной поправки к матричному элементу:

$$\begin{aligned} p_r(w) &= i\,\delta_{l_f,1}\,\delta_{m_f=\pm 1}\,\beta_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \int\limits_0^{+\infty} \Bigl(R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\, \frac{\partial \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph}\,i,l_i=0}(r)}{\partial r} \quad + \\ &+ \Delta_r\, \tilde{R}^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r) \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r} \Bigr)\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, r^2\, dr. \end{aligned} \tag{2.75}$$

2.5.3 Угловая поправка к матричному элементу

Найдем поправку $\Delta_\theta\, p\,(w)$ от угловой деформации волновой функции. Учитывая найденный градиент (2.66), получим

$$\begin{aligned} \Delta_\theta p\,(w) = & \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr\, r^2 e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}} \int \Bigl\{ \Delta_\theta\, \psi^*_f(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_{\mathrm{sph},i}(\mathbf{r}) + \psi^*_{\mathrm{sph},f}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \Delta_\theta\, \psi_i(\mathbf{r}) \Bigr\}\, d\Omega = \\ = & \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr\, r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}} \int \sum_{l'\neq 0,\,m'} \Bigl(R^*_{\mathrm{sph},\,f,l'}(r) + \beta_2\, \Delta_\theta\, \tilde{R}^*_{f,l'}(r) \Bigr)\, Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi) \times \\ \times & \Bigl\{ -\frac{d\,R_{\mathrm{sph},\,i}(r)}{dr} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu'=-1,1} Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}^i_r)\, \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \Bigr\}\, d\Omega + \\ + & \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr\, r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}} \int \sum_{l_f,m_f} R^*_{\mathrm{sph},f,l_f}(r)\, Y^*_{l_f m_f}(\theta,\varphi) \times \\ \times & \Bigl\{ \sum_{l\neq 0,\,m} \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \Bigl(\frac{dR_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} + \frac{l+1}{r}\, R_{\mathrm{sph},\,l}(r) + \beta_2 \frac{d\Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{l+1}{r}\, \Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r) \Bigr) \times \\ \times & \sum_{\mu=-1,1} (l-1,1,l\,|\,m-\mu,\mu,m)\, Y_{l-1,\,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\, \boldsymbol{\xi}_\mu - \\ - & \sum_{l\neq 0,\,m} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \Bigl(\frac{d\,R_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} - \frac{l}{r}\, R_{\mathrm{sph},\,l}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} - \beta_2\, \frac{l}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r) \Bigr) \times \\ \times & \sum_{\mu=-1,1} (l+1,1,l\,|\,m-\mu,\mu,m)\, Y_{l+1,\,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\, \boldsymbol{\xi}_\mu \Bigr\}\, d\Omega. \end{aligned}$$

Учитывая свойство ортогональности векторов поляризации $\boldsymbol{\xi}^*_{\pm 1}$ и $\boldsymbol{\xi}_{\mp 1}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta_\theta\, p\,(w) = & -\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \sum_{l'\neq 0,\,m'} \int\limits_0^{+\infty} \Bigl(R^*_{\mathrm{sph},\,f,l'}(r) + \beta_2\, \Delta_\theta\, \tilde{R}^*_{f,l'}(r) \Bigr) \times \\ \times & \frac{d\,R_{\mathrm{sph},\,i}(r)}{dr}\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, r^2\, dr \cdot \int Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\, Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}^i_r)\, d\Omega + \\ + & \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \int\limits_0^{+\infty} dr\, r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}} \sum_{l_f,m_f} R^*_{\mathrm{sph},f,l_f}(r) \sum_{l\neq 0,\,m} \times \\ \times & \Bigl\{ \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \Bigl(\frac{d\,R_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} + \frac{l+1}{r}\, R_{\mathrm{sph},\,l}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} + \beta_2\, \frac{l+1}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r) \Bigr) \times \\ \times & (l-1,1,l\,|\,m-\mu,\mu,m) \int Y^*_{l_f m_f}(\theta,\varphi)\, Y_{l-1,\,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\, d\Omega - \\ - & \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \Bigl(\frac{d\,R_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} - \frac{l}{r}\, R_{\mathrm{sph},\,l}(r) + \beta_2\, \frac{d\Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r)}{dr} - \beta_2\, \frac{l}{r}\, \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l}(r) \Bigr) \times \\ \times & (l+1,1,l\,|\,m-\mu,\mu,m) \int Y^*_{l_f m_f}(\theta,\varphi)\, Y_{l+1,\,m-\mu}(\mathbf{n}_r)\, d\Omega \Bigr\}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Теперь учитывая свойство ортогональности сферических функций Y_{lm}, упростим далее:

$$\begin{aligned}
\Delta_\theta\, p\,(w) = &-\sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \int\limits_0^{+\infty} \Bigl(R^*_{\mathrm{sph},\,f,l'=1}(r) + \beta_2\, \Delta_\theta \tilde{R}^*_{f,l'=1}(r)\Bigr)\, \frac{d\, R_{\mathrm{sph},\,i}(r)}{dr}\; e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, r^2\, dr\, + \\
&+ \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \sum_{l_f=0,m_f} \sqrt{\frac{l_f+1}{2l_f+3}}\, (l_f, 1, l_f+1\,|\,m_f, \mu, m_f+\mu) \int\limits_0^{+\infty} dr\, r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, R^*_{\mathrm{sph},f,l_f}(r)\, \times \\
&\times \biggl\{ \frac{dR_{\mathrm{sph},\,l=l_f+1}(r)}{dr} + \frac{l_f+2}{r} R_{\mathrm{sph},\,l=l_f+1}(r) + \beta_2 \frac{d\Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l=l_f+1}(r)}{dr} + \beta_2 \frac{l_f+2}{r} \Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l=l_f+1}(r) \biggr\} - \\
&- \beta_2 \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \sum_{l_f=1,m_f} \sqrt{\frac{l_f}{2l_f-1}}\, (l_f, 1, l_f-1\,|\,m_f, \mu, m_f+\mu) \int\limits_0^{+\infty} dr\, r^2\, e^{-ikr\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\, R^*_{\mathrm{sph},f,l_f}(r)\, \times \\
&\times \biggl\{ \frac{dR_{\mathrm{sph},\,l=l_f-1}(r)}{dr} - \frac{l_f-1}{r} R_{\mathrm{sph},\,l=l_f-1}(r) + \beta_2 \frac{d\Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l=l_f-1}(r)}{dr} - \beta_2 \frac{l_f-1}{r}\, \Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph},\,l=l_f-1}(r) \biggr\}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

2.5.4 Разложение по сферическим волнам

Для численных вычислений радиальных интегралов воспользуемся разложением плоской волны по сферическим волнам в виде (13)–(15) из [23] (см. также (34.1) в [31], стр. 144):

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{+\infty} (-i)^l (2l+1) P_l(\cos\theta_{\alpha-\gamma}) \Bigl(\frac{r}{k}\Bigr)^l \Bigl(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Bigr)^l \frac{\sin kr}{kr}, \tag{2.78}$$

где $z = r\cos\theta_{\alpha-\gamma}$. Вводя сферические функции Бесселя (см. Приложение A.3):

$$j_l(kr) = (-1)^l \Bigl(\frac{r}{k}\Bigr)^l \Bigl(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\Bigr)^l \frac{\sin kr}{kr}, \tag{2.79}$$

получим

$$e^{-ikr\cos\theta_{\alpha-\gamma}} = \Bigl(e^{ikr\cos\theta_{\alpha-\gamma}}\Bigr)^* = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n\, (-1)^n\, (2n+1)\; P_n(\cos\theta_{\alpha-\gamma})\; j_n(kr) \tag{2.80}$$

и из (2.74) и (2.75) найдем

$$\begin{aligned}
p_{\mathrm{sph}}(w) \;\; &= \;\; \delta_{l_f,1} \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}\, (-1)^n\, (2n+1)\; P_n(\cos\theta_{\alpha-\gamma}) \times \\
&\times \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\; \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; j_n(kr)\; r^2\, dr,
\end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
p_r(w) \;\; &= \;\; \delta_{l_f,1}\; \beta_2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}\, (-1)^n\, (2n+1)\; P_n(\cos\theta_{\alpha-\gamma}) \times \\
&\times \int\limits_0^{+\infty} \biggl\{ R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\; \frac{\partial \Delta_r\, \tilde{R}_{\mathrm{sph}\,i,l_i=0}(r)}{\partial r} + \Delta_r\, \tilde{R}^*_{f,l_f=1}(r) \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r} \biggr\}\; j_n(kr)\; r^2\, dr.
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Вводя следующее обозначения для радиальных интегралов:

$$\begin{aligned}
J_1(w;n) \;\; &= \;\; \int\limits_0^{+\infty} R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\; \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r}\; j_n(kr)\; r^2\, dr, \\
J_2(w;n) \;\; &= \;\; \int\limits_0^{+\infty} \biggl\{ R^*_{\mathrm{sph},\,f,l_f=1}(r)\; \frac{\partial \Delta_r \tilde{R}_{\mathrm{sph}\,i,l_i=0}(r)}{\partial r} + \Delta_r \tilde{R}^*_{f,l_f=1}(r) \frac{\partial R_{\mathrm{sph},\,i,l_i=0}(r)}{\partial r} \biggr\}\; j_n(kr)\; r^2\, dr,
\end{aligned} \tag{2.83}$$

перепишем решения (2.81) и (2.82) так:

$$\begin{aligned} p_{\text{sph}}(w) &= \delta_{l_f,1}\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}\,(-1)^n\,(2n+1)\,P_n(\cos\theta_{\alpha-\gamma})\cdot J_1(w;n), \\ p_r(w) &= \delta_{l_f,1}\,\beta_2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}\,(-1)^n\,(2n+1)\,P_n(\cos\theta_{\alpha-\gamma})\cdot J_2(w;n). \end{aligned} \tag{2.84}$$

Теперь полный матричный элемент (без учета угловой поправки) приобретает вид:

$$p\,(w) = \delta_{l_f,1}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\,\sum_{n=0}^{+\infty} i^{n+1}\,(-1)^n\,(2n+1)\,P_n(\cos\theta_{\alpha-\gamma})\cdot\Big(J_1(w;n)+\beta_2\,J_2(w;n)\Big). \tag{2.85}$$

2.5.5 Первая и вторая поправки $l=0$ и $l=1$

Полиномы Лежандра порядка l равны (см. Приложение A.1):

$$P_l\,(\beta) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{(d\beta)^l}(\beta^2-1)^l,\quad P_0\,(\beta)=1,\quad P_1\,(\beta)=\beta,\quad \beta=\cos\theta_{\alpha-\gamma}. \tag{2.86}$$

Тогда при $l=0$ и $l=1$ мы находим

$$\begin{aligned} p^{(n=0)}(w,\beta) &= i\,\delta_{l_f,1}\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,\cdot\Big(J_1(w;0)+\beta_2\,J_2(w;0)\Big), \\ p^{(n=1)}(w,\beta) &= \delta_{l_f,1}\,\sqrt{6}\,\cos\theta_{\alpha-\gamma}\cdot\Big(J_1(w;1)+\beta_2\,J_2(w;1)\Big). \end{aligned} \tag{2.87}$$

Из (2.1) мы находим первую и вторую поправки при $l=0$ и $l=1$ к вероятности тормозного излучения:

$$\begin{aligned} W_{l=0}(w) &= N_0 k_f w|p^{(n=0)}(w)|^2 = \frac{2}{3}N_0 k_f w|J_1(w;0)+\beta_2\,J_2(w;0)|^2, \\ W^{(n=1)}(w,\beta) &= N_0 k_f w\Big|p^{(n=1)}(w,\beta)\Big|^2 = 6N_0 k_f w\Big|J_1(w;1)+\beta_2\,J_2(w;1)\Big|^2\cos^2\beta \end{aligned} \tag{2.88}$$

и получаем полную вероятность тормозного излучения с точностью до второй поправки $l=1$:

$$W_{l=1}(w,\beta) = W_{l=0}(w)\Big|1-N(w,\beta_2)\cos\theta_{\alpha-\gamma}\Big|^2,\quad N(w,\beta_2) = 3i\frac{J_1(w;1)+\beta_2\,J_2(w;1)}{J_1(w;0)+\beta_2\,J_2(w;0)}. \tag{2.89}$$

2.6 Теория и эксперимент: спектры тормозного излучения для ^{226}Ra

Первый вопрос, который должен быть поставлен перед разработкой нового формализма, включающего деформацию α-распадающего ядра в модель тормозного излучения, — это насколько сильно деформация ядра влияет на спектр излучения (насколько сильно она может проявиться в спектрах и будет ли она вообще заметна). Другой не менее важный вопрос касается практической реализации подхода на компьютере: возможно ли вообще получить устойчивые (стабильные) отклонения спектров тормозного излучения, вызванные вариацией параметра квадрупольной деформации β_2, что позволило бы сделать однозначные выводы о влиянии деформации на спектр излучения.

Для расчетов мы выберем ядро ^{226}Ra, которое имеет ненулевое значение параметра квадрупольной деформации β_2 и его можно считать деформированным. Чтобы сделать первый шаг в решении этой задачи, мы будем искать лишь первую существенную коррекцию к волновой функции — радиальную, которая содержит информацию о деформации ядра. Мы вычисляем вероятность тормозного излучения по формуле (2.89) и определяем два радиальных интеграла $J_1(w;n)$ и $J_2(w;n)$ по формулам (2.83). α-ядерный потенциал определяется по формулам (2.8)–(2.11) с параметрами (2.12)–(2.14), взятыми из [26]. Q-значение α-распада для ^{226}Ra равно 4.904 МэВ (взято из [34], см. стр. 63, и также см. [26]). Параметр β_2 равен 0.151 (взято из [44]). Для ясности анализа влияния деформации ядра на форму спектра тормозного излучения мы выберем значение угла $\theta_{\alpha-\gamma}$ между направлением движения α-частицы (и ее туннелирования под барьером) и направлением излучения фотона равным $90^\circ \pm 20^\circ$, поскольку такой угол соответствует геометрической конфигурации расположения детекторов в эксперименте для данного ядра (с учетом углового разрешения детекторов).

На Рис. 2.1 показаны вероятности тормозного излучения при α-распаде ^{226}Ra, вычисленные при разных значениях угла θ_β между направлением движения α-частицы (и ее туннелированием под барьером) и направлением оси аксиальной симметрии распадающего ядра, а также экспериментальные данные [26]. На этом рисунке ясно видно, что спектр, полученный при угле $\theta_\beta = 180^\circ$ (см. синюю штриховую линию 4) и полностью совпадающий со спектром при $\theta_\beta = 0^\circ$, расположен несколько выше, чем спектр при угле $\theta_\beta = 90^\circ$ (см. красную штрих-пунктирную линию 3). На рисунке ясно видно отличие между этими двумя спектрами на всем диапазоне энергий излученных фотонов, это отличие возрастает с ростом энергии фотона E_γ и является устойчивым на всем диапазоне энергий излучения (что важно для достоверности выводов). На такой основе можно выдвинуть идею, как оценить деформацию ядра из спектров тормозного излучения:

Следует сравнивать расчетные спектры с экспериментальными данными при максимально высоких энергиях излученного фотона, где экспериментальные ошибки окажутся меньшими по сравнению с отличием между спектрами, полученными при разных значениях угла деформации.

Поскольку в экспериментах [26,27] не представляется возможным детектором α-частиц отфиксировать их вылет относительно направления оси аксиальной симметрии распадающего ядра, то мы проинтегрировали вероятность излучения по значениям угла деформации θ_β от 0 до π. Такая проинтегрированная вероятность показана на рисунке фиолетовой штрих-пунктирной линией 5. Отсюда видно, что эта кривая оказывается ближе расположенной к экспериментальным данным [26] при энергиях фотона выше $E_\gamma > 350$ кэВ, и поэтому улучшает их описание по сравнению с результатами, полученными при сферически-симметричном рассмотрении α-распада этого ядра (см. зеленую штрих-дважды-пунктирную линию 2 на рисунке).

2.7 Выводы и перспективы

В этой главе описана модель тормозного излучения, сопровождающего α-распад деформированных ядер. Этот подход, впервые представленный в работе [28], является дальнейшим развитием модели тормозного излучения при сферически симметричном α-распаде, ранее развиваемой в работах [22–24, 26, 27]. Отметим следующее.

- Основы построения модели:
  - α-ядерный потенциал определяется для деформированных ядер с учетом параметра квадрупольной деформации β_2 (параметры потенциала взяты из работы [21]). На его основе найдены коррекции к волновой функции распадающей α-ядерной системы, вызванные деформацией ядра.

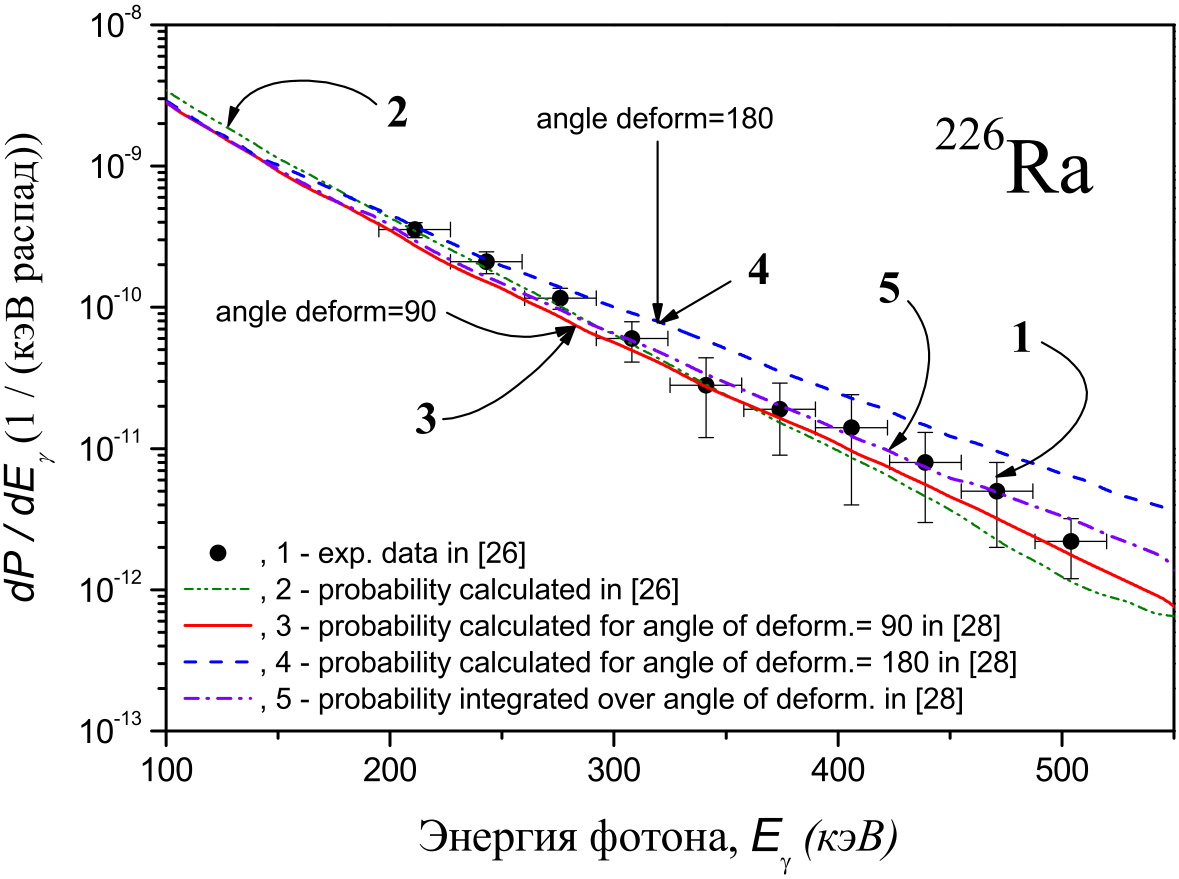

Рис. 2.1: Вероятность тормозного излучения при α-распаде ядра ^{226}Ra [28]: данные 1 — экспериментальные данные из [26], штрих-дважды-пунктирная линия 2 — вероятность, полученная в [26] в сферически симметричном приближении α-распада (едва заметное снижение этой линии по сравнению с кривыми 3–5 связано с исключением k_f в определении (2.1) для вероятности излучения), сплошная линия 3 — вероятность, полученная при угле деформации $\theta_\beta = 90°$, штриховая линия 4 — вероятность, вычисленная при угле деформации $\theta_\beta = 180°$, штрих-пунктирная линия 5 — вероятность, проинтегрированная по всем возможным значениям угла θ_β.

   - На основе этих коррекций определяется полный матричный элемент излучения, который разделяется на невозмущенный матричный элемент (т. е. соответствующий сферически-симметричному α-распаду), его радиальную и угловую коррекции.
   - В описании волновой функции фотонов используется разложение по сферическим волнам.

- Теоретический анализ показывает:
   - Зависимость вероятности тормозного излучения от параметра квадрупольной деформации β_2 имеет гармонический вид (см. (2.89)).
   - Зависимость вероятности тормозного излучения от угла $\theta_{\alpha-\gamma}$ между направлением движения α-частицы (и ее туннелирования в области барьера) и направлением излучения фотона имеет гармонический вид. В пределе $\beta_2 \to 0$ она возвращается к результатам, полученным для сферически-симметричного α-распада в предыдущей главе (см. также (5)–(8) в [26]).
   - Используя разложение волновой функции фотона по сферическим волнам, излучение фотонов в первом приближении $n = 0$ является сферически симметричным как для сферически симметричного α-распада, так и для деформированного. Включение следующей коррекции при $n = 1$ вносит угловую анизотропию в спектр излучения (см. (2.89)).

- Анализ сравнения спектров тормозного излучения, вычисленных по модели для деформированного ядра ^{226}Ra, с экспериментальными данными [26] показывает:
   - Формализм деформации ядра, включенный в модель, позволяет вычислять *устойчивые (стабильные)* спектры тормозного излучения для разных значений угла θ_β между направлением движения α-частицы и осью аксиальной симметрии дочернего ядра. Для ^{226}Ra мы получаем стабильную картину отличия между вероятностями для $\theta_\beta = 90^\circ$ и $\theta_\beta = 180^\circ$, которые попадают в интервалы ошибок экспериментальных данных.
   - Вероятность, проинтегрированная по всем возможным значениям угла деформации θ_β, расположена несколько выше по сравнению с вероятностью, найденной в приближении сферически симметричного α-распада (т. е. при $\beta_2 \to 0$). Это несколько улучшает согласие между теорией и экспериментом для ^{226}Ra, где ядро ранее рассматривалось сферически симметричным.

Изучение углового тормозного излучение, сопровождающего α-распад, дает более богатую информацию о самом процессе (чем периодов полураспада, энергий вылетающих α-частиц, других спектроскопических характеристик). В связи с этим, дальнейшие экспериментальные измерения спектров тормозного излучения в распадах сильно деформированных ядер имеют хорошую перспективу. Наиболее ценной такая информация была бы для ядер с максимально высокими Q_α-значениями распада (поскольку это максимально повышает чувствительность результатов к углу деформации и стабильность вычислений).

Глава 3

Излучение при спонтанном делении ядер

В этой главе представлена квантовая модель тормозного излучения фотонов, которое сопровождает спонтанное деление ядер. В процессе деления ядро рассматривается делящимся на два фрагмента. Эта задача требует знания волновых функций делящейся ядерной системы относительно таких фрагментов. Чтобы их найти, потенциал взаимодействия между рассматриваемыми фрагментами определяется по стандартной фолдинг-процедуре. Отдельное внимание уделяется серьезной проблеме вычисления радиальных интегралов, которые формируют матричный элемент излучения. С целью ее разрешения разработана новая процедура, которая позволяет существенно повысить точность расчета интегралов в дальней асимптотической области и достичь сходимости при вычислении матричных элементов для тяжелых фрагментов и для энергий излученных фотонов до 60 МэВ. Для расчетов выбрано ядро ^{252}Cf, для которого в литературе имеются экспериментальные данные. Определена полная вероятность излучения тормозных фотонов, выполнен анализ вкладов излучения в полный спектр, вызванных легкими, средними и тяжелыми фрагментами. В определении полных спектров достигается достаточно хорошее согласие между теорией и экспериментом в области энергий излученных фотонов до 60 МэВ.

3.1 Введение

Тогда как современные модели ядерных распадов широко используют квазиклассическое приближение при определении периодов полураспадов на основе проницаемости барьеров деления (например, см. [21, 34, 45, 46]), то задача тормозного излучения, которое сопровождает такие распады, не требуют никакого использования квазиклассических подходов. Это преимущество в изучении тормозного излучения открывает независимый путь к получению новой информации о распаде (и, возможно, его динамике). Однако, здесь может возникнуть следующий вопрос: какую новую информацию о распаде может дать такой способ?

Если мы сравним спектры тормозного излучения при α-распаде ядер ^{214}Po и ^{226}Ra, представленные в работе [26], то мы обнаружим существенное отличие между ними, что указывает на различное излучение фотонов при α-распаде этих ядер. Однако, эти два ядра имеют практически очень близкие формы α-ядерных потенциалов, что могло бы выглядеть очень странным, поскольку излучение фотонов этими ядрами сильно отличается. Объяснение дается разными Q-значениями (таким образом, Q-значение α-распада связывается с наклоном спектра излучения). Разные Q-значения этих ядер формируют разные области туннелирования. Это дает разные вклады излучения из областей туннелирования в полные спектры. Можно углубить это объяснение, если предположить, что *α-частица излучает фотоны наиболее сильно, когда она проходит область ядерной поверхности.* Итак, мы приходим к другой важной характеристике — деформации ядра. Сравнивая эти два ядра, мы находим отличие в деформации: тогда как ^{214}Po практически симметрично, то ^{226}Ra заметно деформировано. И действительно, как было показано в работе [28], вероятность излучения фотонов при α-распаде меняется в зависимости от направления вылетающей α-частицы относительно оси ориентации деформированного ядра. Чем больше деформация, тем сильнее меняется излучение фотонов. Таким образом, мы устанавливаем взаимосвязь между ядерной деформацией и спектром тормозного излучения.

Однако, в работе [28] не было учтено изменение ядерной поверхности в процессе постепенного вылета α-частицы из ее области и дальнейшего распада. Как было показано в этой работе, деформация ядра действительно проявляется в расчетах спектров излучения. Но тогда можно полагать, что спектры излучения должны быть чувствительны к изменению ядерной поверхности в процессе распада. Итак, мы могли бы прийти к прямой связи между формой спектров тормозного излучения и динамикой распада. Но такой вопрос лучше изучить на другой задаче: тормозное излучение фотонов, излученных при спонтанном делении ядер. В таком процессе роль деформации ядерной поверхности проявляется значительно сильнее и поэтому следует полагать, что излучение фотонов должно зависеть от нее значительно сильнее (чем при α-распаде).

3.2 Тормозное излучение при α-распаде: влияние деформации ядра на спектр излучения

Чтобы лучше понять взаимосвязь между α-распадом ядра и сопровождающим его излучением фотонов, можно разобраться в следующем вопросе: какие параметры α-распадающей системы сильно влияют на спектр излучения?

Посмотрим на Рис. 3.1, на который мы вынесли результаты экспериментальных и теоретических исследований тормозного излучения при α-распаде ядер ^{210}Po и ^{214}Po [27]. Посмотрев на этот рисунок, мы могли бы быть удивлены: почему эти два столь близкие изотопа полония (имеющие близкую форму α-ядерного потенциала) имеют столь разные спектры излученных фотонов? Чем может быть объяснено это отличие? Если мы взглянем на параметры α-распада этих двух ядер, мы сразу заметим, что эти два ядра имеют разные Q-значения: $Q_\alpha = 5.34$ МэВ для ^{210}Po и $Q_\alpha = 7.695$ МэВ для ^{214}Po [26]. Однако, такое столь малое отличие между двумя Q-значениями дает достаточно сильное отличие между периодами полураспада: $T_{1/2} = 1.2 \cdot 10^7$ сек для ^{210}Po и $T_{1/2} = 1.6 \cdot 10^{-4}$ сек для ^{214}Po (подобно отличию между двумя спектрами излучения)! Итак, мы устанавливаем взаимосвязь между периодами полураспада α-распада и наклонами спектров тормозного излучения, сопровождающего этот α-распад. В целом, Q-значение играет решающую роль в сложном процессе α-распада ядра и излучении фотонов, и мы получаем первый ответ на поставленный выше вопрос: *Q-значение имеет прямое влияние на спектр излучения* (см. также работу [42], в которой авторы, по-видимому впервые, анализировали такую зависимость).

Давайте найдем какие-либо иные параметры с сильным влиянием на спектр излучения. *Естественно можно предположить, что излучение фотонов при туннелировании α-частицы принципиально отличается от излучения во время ее надбарьерного движения.* На такой основе построим следующую логику. Отличающиеся Q-значения для двух ядер определяют разные области туннелирования. Такое отличие должно давать разные вклады излучения фотонов из областей туннелирования в полные спектры. Чем больше область туннелирования (Q-значение меньше), тем полный спектр излученных фотонов

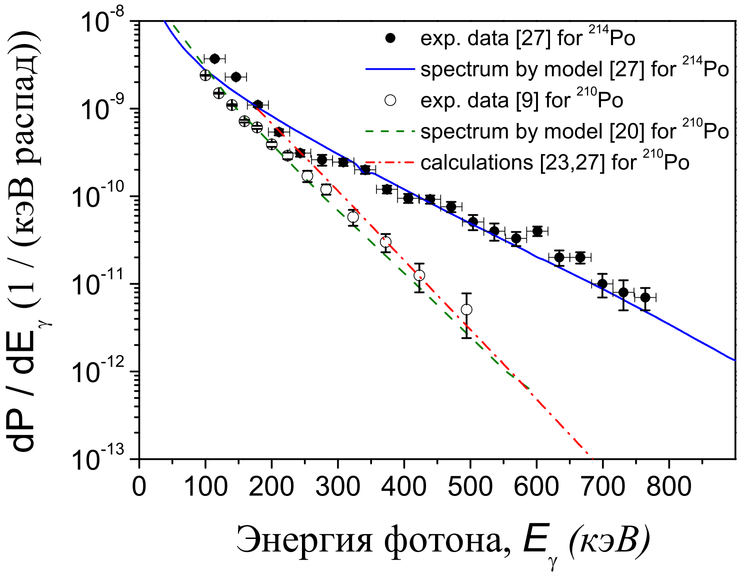

Рис. 3.1: Расчетные вероятности тормозного излучения, сопровождающего α-распад ядер ^{214}Po и ^{210}Po, в сравнении с экспериментальными данными: сплошная линия — спектр, рассчитанный для ^{214}Po в [27], штриховая линия — спектр, рассчитанный для ^{210}Po в дипольном подходе [20], штрих-пунктирная линия — спектр, полученный для ^{210}Po в [23, 27], темные кружки — экспериментальные данные [27] для ^{214}Po, светлые окружности — экспериментальные данные [9] для ^{210}Po.

будет менее интенсивным, т. е. сильнее спадает вниз (что было подтверждено экспериментально в работе [26]). Следовательно, форма потенциала в области туннелирования заметно влияет на спектр излучения. Но эта область включает также область ядерной поверхности α-распадающей системы, где проявляются все свойства ее деформации. В частности, *градиент потенциала взаимодействия между α-частицей и дочерним ядром в такой области меняется существенно сильнее, чем в дальнейшей области туннелирования, и поэтому он должен давать более сильное влияние на интенсивность излучения фотонов*. Отсюда вытекает идея о том, что фотоны излучаются наиболее интенсивно, когда α-частицы пересекает барьер, значит излучение фотонов должно быть чувствительным к форме деформации ядра. Так, мы приходим к следующему возможному ответу: *деформация α-распадающего ядра — это другой параметр, который влияет на спектр тормозного излучения*.

На следующем Рис. 3.2 представлены полные спектры при α-распаде ядер ^{214}Po и ^{226}Ra и вклады излучения фотонов из разных пространственных областей для этих ядер [26]. α-ядерные потенциалы очень близки для этих ядер, но разные Q-значения дают существенно разные области туннелирования: это объясняет более интенсивное излучение для ядра ^{214}Po, что и видно на рисунке. Чем сильнее излучение фотонов наблюдается в спектрах, тем уровень энергии α-распадающей системы смещается ниже после излучения. Итак, при более высоких энергиях фотонов деформация ядра играет более весомую роль в матричном элементе излучения, и мы приходим к следующему выводу: *деформация ядра должна сильнее проявляться в спектрах тормозного излучения при более высоких энергиях фотонов*. Вернемся назад к нашим предыдущим результатам для ядра ^{226}Ra, полученным в сферически симметричном приближении (см. Рис. 3.2 (б)). Можно видеть, что достаточно хорошее согласие между теорией и экспериментом было получено при малых энергиях фотонов, но начиная от 400 кэВ некоторое несоответствие появляется в таком описании. Однако, на основе предположения выше можно полагать, что

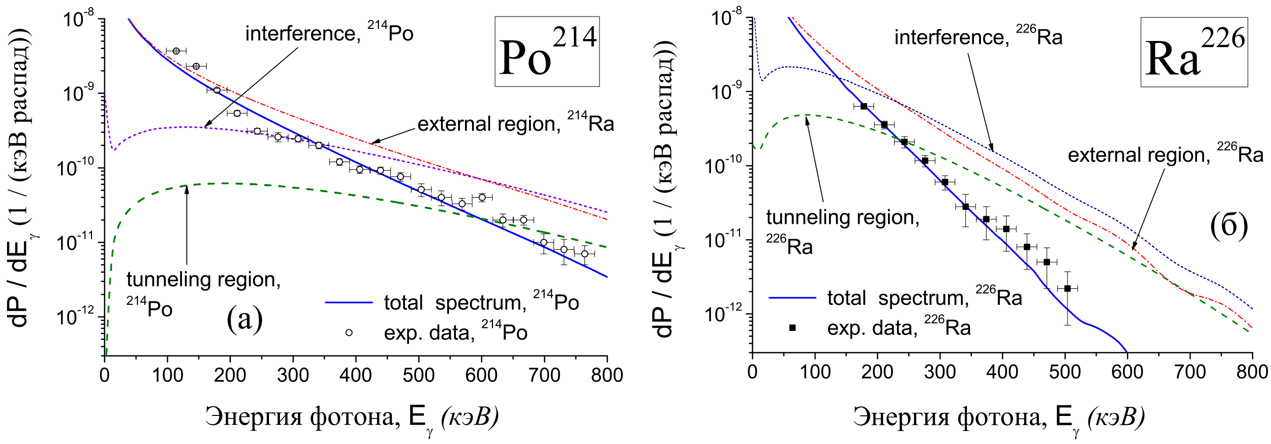

Рис. 3.2: Вклады фотонов для ядер ^{214}Po и ^{226}Ra, излученных из области туннелирования (штриховая линия) и внешней области (штрих-пунктирная линия), и интерференция (пунктирная линия). Для обоих ядер проявляется подобное поведение вкладов из областей туннелирования, внешних областей и интерференции относительно полного спектра. Суммарное излучение для ^{214}Po более интенсивно.

включение деформации этого ядра могло бы улучшить это описание экспериментальных данных и при более высоких энергиях.

С целью выяснить, насколько сильно ядерная деформация проявляется в спектрах излучения, мы оценили вероятности тормозного излучения для ядра ^{226}Ra, с учетом параметра его квадрупольной деформации $\beta_2 = 0.151$ [28]. Рассчетные вероятности излучения при α-распаде ^{226}Ra при разных значениях угла между направлениями движения α-частицы и осью аксиальной симметрии дочернего ядра и экспериментальные данные [26] показаны на Рис. 3.3. Можно видеть, что спектр при угле 180° (см. синюю штриховую линию на рисунке, которая совпадает с вероятностью излучения при угле 0°) расположен несколько выше по сравнению со спектром при угле 90° (см. красную сплошную линию на этом рисунке). Отличие между этими двумя спектрами наглядно видно и стабильно на всем диапазоне энергий излученных фотонов, оно возрастает при возрастании энергии фотонов. Если деформация сильнее, то излучение фотонов меняется сильнее также. Это устанавливает взаимосвязь между деформацией ядра и спектром тормозного излучения, это открывает возможность на основе анализа измеренных спектров излучения фотонов тестировать деформацию и некоторые другие характеристики, какие ранее были получены с помощью квазиклассических моделей распадов. В частности, учитывая деформацию ядра ^{226}Ra, мы улучшили согласие с экспериментальными данными по сравнению с нашими предыдущими результатами, полученными в сферически симметричном рассмотрении этого ядра [26].

Однако, наша модель и расчеты в работе [28] не учитывали возможность менять поверхность α-ядерной системы в процессе испускания α-частицы наружу. Деформация ядра, изучаемая в этой работе, выглядит скорее статической, т. е. не меняющейся для разных расстояний между центрами масс дочернего ядра и α-частицы, тогда как дочернее ядро меняет свою форму во время α-распада постоянно, т. е. динамически. После учета этой особенности мы могли бы прикоснуться к еще более интересной информации о распаде. Итак, поставим следующий вопрос: какой иной тип распада можно было выбрать для изучения, где рассмотренные виды деформации ядерной системы должны быть наиболее заметны. Процесс, где такие особенности включены во всей своей мощности и силе, — это деление ядра. Итак, мы приходим к задаче тормозного излучения фотонов, излученных при спонтанном делении. В делении вопрос динамической деформации ядер-

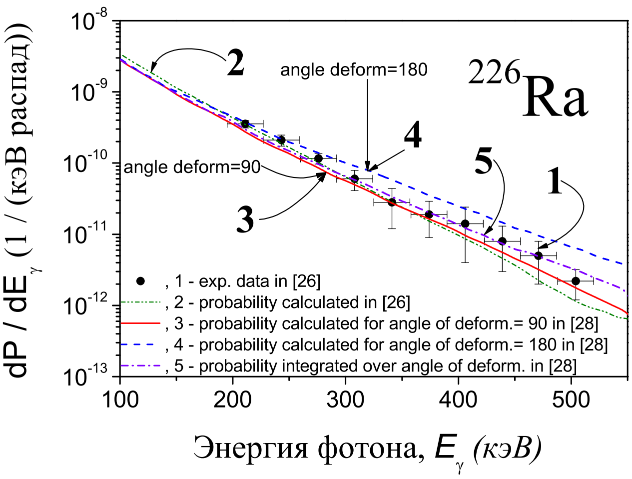

Рис. 3.3: Вероятности тормозного излучения фотонов при α-распаде деформированного ядра ^{226}Ra [28]: экспериментальные данные 1 взяты из [26], штрих-дважды пунктирная линия 2 — вероятность, полученная в [26] при сферически симметричном рассмотрении α-распада (в пределе $\beta_2 \to 0$), сплошная линия 3 — вероятность, рассчитанная в подходе [28] при угле деформации $\theta_\alpha = 90^\circ$, штирховая линия 4 — вероятность, рассчитанная в подходе [28] при угле деформации $\theta_\alpha = 180^\circ$, штрих-пунктирная линия 5 — вероятность, проинтегрированная по всему диапазону значений угла деформации θ_α [28].

ной системы естественным образом включен в рассмотрение и хороший формализм его описания разработан многими исследователями.

3.3 Модель тормозного излучения, которое сопровождает спонтанное деление

3.3.1 Форма поверхности ядерной системы в процессе деления

В задаче деления необходимо описать непрерывным образом последовательность поверхностей делящегося ядра, начиная от его основного состояния до деления, включая последовательность конфигураций и заканчивая конечной стадией, при которой сформированы два отдельных фрагмента и они находятся на далеком отдалении друг от друга. В описание поверхностей ядерной системы следует включить сферу, сфероид, октупольные деформации, положительные и отрицательные гексадекапольные деформации. Но поскольку множество вопросов в теории деления, вызванных отклонением ядерной системы от аксиальной симметрии, не касаются прямым образом определения спектров излучения фотонов (они могли бы быть развиты в дальнейшем), то мы будем сконцентрированы на формализме описания поверхностей ядерной системы, которая аксиально симметрична.

Определим форму поверхности ядерной системы в терминах трех квадратичных поверхностей, гладко связанных между собой: два сфероида, соединенные между собой через гиперболоидальную шейку (см. Рис. 3 в [47]). Воспользуемся уравнением поверхности жидкой капли, которое в цилиндрической системе координат можно записать в таком виде [47]:

$$\rho^2 = \begin{cases} a_1^2 - (a_1^2/c_1^2)\,(z-l_1)^2 & \text{при } l_1 - c_1 \le z \le z_1, \\ a_2^2 - (a_2^2/c_2^2)\,(z-l_2)^2 & \text{при } z_2 \le z \le l_2 + c_2, \\ a_3^2 + (a_3^2/c_3^2)\,(z-l_3)^2 & \text{при } z_1 \le z \le z_2. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь величина l_i указывает на положение центра i-й квадратичной поверхности, c_i — его ось симметрии и a_i — его полуось в перпендикулярном направлении ($i = 1, 2, 3$) (см. Рис. 3 в [47]). Таким образом, мы получаем девять параметров, которые используются для полного определения такой поверхности ядерной системы.

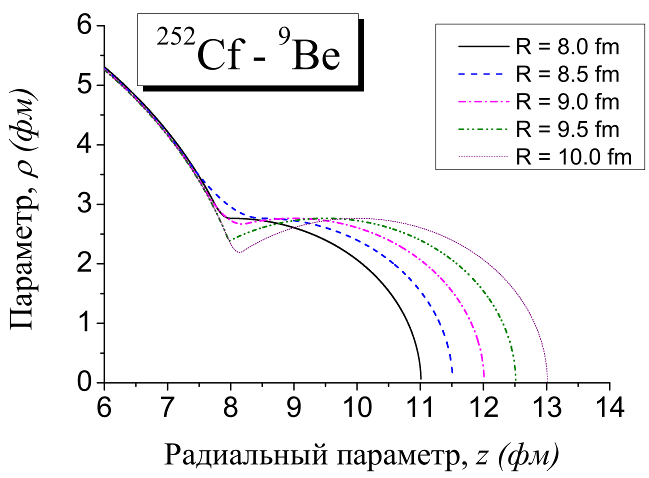

Рис. 3.4: Формы поверхностей ядерной системы с вылетом фрагмента ^{12}C, образуемые при различных расстояниях R между центрами дочернего ядра и фрагмента во время деления ядра ^{252}Cf (оси z и ρ определены, согласно (3.1)).

Однако, следуя формализму, предложенному Болстерли (Bolsterli) и др. в работе [47], один параметр можно исключить, используя требование сохранения объема всей системы постоянным, а другие два — наложив требование, что средняя поверхность должна быть гладко связана с внешними поверхностями (в точках z_1 и z_2). Это накладывает три связи на девять изначальных степеней свободы, что сводит число независимых параметров к шести.

Исключение положения центра масс окончательно уменьшает число независимых параметров до пяти. В качестве демонстрации применения такой процедуры для определения поверхностей, на Рис. 3.4 показаны поверхности, получаемые таким путем при разных расстояниях R между центрами дочернего ядра и вылетающего легкого фрагмента ^{9}Be, формируемых в процессе деления ядра ^{252}Cf. Мы будем определять радиусы материнского ядра и дочернего ядра, согласно работе [48].

3.3.2 Потенциал взаимодействия между дочерним ядром и вылетающим фрагментом

После того, как уравнение ядерной поверхности уже определено, нашим следующим шагом будет генерация потенциала взаимодействия между дочерним ядром и фрагментом, которые покрыты такой ядерной поверхностью и их центры масс находятся на заданном расстоянии. За несколько десятилетий были приложены значительные усилия в построении формализма для определения потенциальной энергии делящегося ядра как функции от числа нейтронов, протонов и от формы поверхности. Такая процедура должна описывать эволюцию поверхности ядерной системы непрерывным образом, начиная от формы материнского ядра, проходя через стадии роста деформации и завершая конечной стадией с образованием двух фрагментов и дальнейшим их разлетом. Потенциал взаимодействия между дочерним ядром и фрагментом можно записать в таком виде:

$$V_{\text{total}}(\mathbf{r}) \quad = \quad V_{\text{C}}(\mathbf{r}) + V_{\text{N}}(\mathbf{r}) + V_{\text{so}}(\mathbf{r}). \tag{3.2}$$

Кулоновская компонента $V_C(\mathbf{r})$ описывает взаимодействие между дочерним ядром и фрагментом на основе электромагнитных сил. Эту компоненту мы определим как энергию, формируемую электромагнитно заряженной средой, которая полностью заполняет объем ядерной системы, ограниченный заданной поверхностью. Однако, мы будем полагать, что энергия среды внутри объема фрагмента определяется исключительно взаимодействиями распределенного электромагнитного заряда (нуклонов) в этом фрагменте. Такая энергия не связана с взаимодействием фрагмента с остатком среды и, поэтому, она не должна вносить собственного вклада в кулоновскую компоненту $V_C(\mathbf{r})$. Поэтому определим кулоновскую компоненту так:

$$V_{\mathrm{C}}(\mathbf{r}) \quad = \quad E_{\mathrm{C,\,nucleus}}(\mathbf{r}) - E_{\mathrm{C,\,fragment}}, \tag{3.3}$$

где

$$E_{\mathrm{C,\,nucleus}}(\mathbf{r}) = \lambda_C \int\limits_{V,\,\mathbf{r}\neq\mathbf{r}'} \frac{\mathbf{dr}'^3}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}, \quad E_{\mathrm{C,\,fragment}} = \lambda_C \int\limits_{V_{\mathrm{f}},\,r\neq 0} \frac{\mathbf{dr}^3}{|\mathbf{r}|}, \quad \lambda_C = \frac{Z_{\mathrm{d}}\, Z_{\mathrm{f}}\, e^2}{V_p} \tag{3.4}$$

и два интеграла берутся по полному объему V системы деления (определенной относительно заданного расстояния r между центрами дочернего ядра и фрагмента) и объему фрагмента V_{f}, соответственно (Z_{d} и Z_{f} — электромагнитные заряды дочернего ядра и фрагмента).

На Рис. 3.5 (а) показаны кулоновская компонента (3.3), полученная по фолдинг-процедуре (3.4), и кулоновская компонента, определенная в [21] с наложением сферически симметричного приближения, вычисленные для α-распада ядра ^{210}Po. Как можно видеть, эти две компоненты расположены очень близко друг от друга.

Спино-независимую ядерную компоненту $V_{\mathrm{N}}(\mathbf{r})$ мы определим как разницу между энергией полной ядерной системы $E_{\mathrm{N,\,nucleus}}(\mathbf{r})$ (при заданном расстоянии $\mathbf{r}$ между центрами дочернего ядра и фрагмента) и ядерной энергией фрагмента $E_{\mathrm{N,\,fragment}}$ так:

$$V_{\mathrm{N}}(\mathbf{r}) \quad = \quad E_{\mathrm{N,\,nucleus}}(\mathbf{r}) - E_{\mathrm{N,\,fragment}}, \tag{3.5}$$

где $E_{\mathrm{N,nucleus}}$ и $E_{\mathrm{N,fragment}}$ можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{N,\,nucleus}}(\mathbf{r}) \quad &= \quad -\lambda_N \int\limits_V \frac{\mathbf{dr}^3}{1+\exp(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/a)}, \\ E_{\mathrm{N,\,fragment}} \quad &= \quad -\lambda_N \int\limits_{V_{\mathrm{f}}} \frac{\mathbf{dr}^3}{1+\exp(|\mathbf{r}|/a)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Первый интеграл берется по объему V делящейся ядерной системы, второй — только по объему фрагмента V_{f}. Мы ввели свой собственный параметр нормировки $\lambda_N = M_p/V_p$, где V_p и M_p — объем и масса материнского ядра. Как оказалось, такой выбор параметра λ_N дает нам практически достаточно хорошее совпадение между ядерной компонентой,

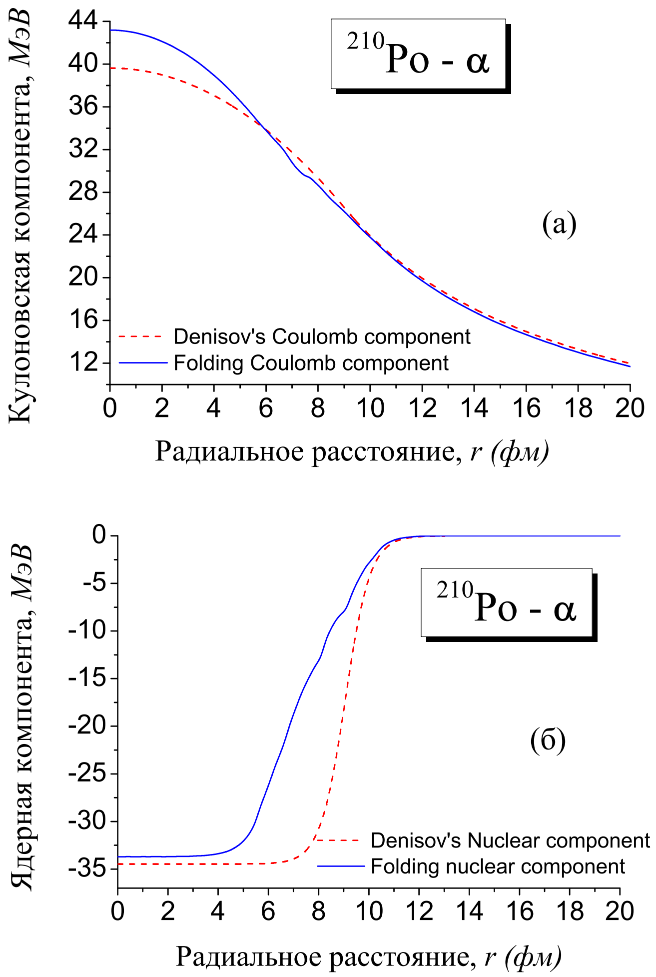

Рис. 3.5: Потенциал, получаемый в фолдинг-подходе, и сферически симметричный потенциал с параметрами, определенными в работе [21] для α-распада ядра ^{210}Po: (а) — кулоновские компоненты и (б) — ядерные компоненты.

определенной по (3.5) при (3.6), и ядерной компонентой, полученной с помощью параметризации, предложенной Денисовым и Экизоэ в работе [21] для α-распада. На Рис. 3.5 (б) можно видеть, что ядерные компоненты, найденные для α-распада ^{210}Po (используемые также в [23, 27]), практически очень близки в нижней части потенциальной ямы. Спин-орбитальной компонентой $V_{\rm so}(\mathbf{r})$ мы будем пренебрегать в дальнейших вычислениях.

После того, как полный потенциал в зависимости от расстояния между центрами дочернего ядра и вылетающего фрагмента уже задан, далее мы будем искать волновые функции. Для этого нам нужно знать Q-значения относительно каждого фрагмента, который принимает участие в делении. Мы определяем их как

$$Q = M_p - M_d - M_f, \tag{3.7}$$

где M_p, M_d и M_f — массы материнского ядра, дочернего ядра и интересуемого фрагмента, которые мы берем из работы [49].

3.3.3 Модель тормозного излучения, которое сопровождает развал ядерной системы на два фрагмента

Мы определим вероятность излучения тормозных фотонов, вызванного вылетом фрагмента во время процесса деления тяжелого ядра на основе матричного элемента перехода составной квантовой системы (состоящей из дочернего ядра и фрагмента) из ее состояния до излучения фотона (мы будем называть такое состояние *начальным i-состоянием*) в ее состояние после излучения фотона (будем называть такое состояние *конечным f-состоянием*). Согласно (1) и (4) в [23] (см. также работы [22, 26, 27]) мы можем записать:

$$\frac{d\,P(w,\vartheta_{f\gamma})}{dE_\gamma} = N_0\, w\, |p\,(w,\vartheta_{f\gamma})|^2, \qquad k_{i,f} = \sqrt{2m\,E_{i,f}}, \qquad w = E_i - E_f, \tag{3.8}$$

где

$$p\,(w,\vartheta_{f\gamma}) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu\, \boldsymbol{\xi}^*_\mu \int\limits_0^{+\infty} r^2\,dr \int \psi^*_f(\mathbf{r})\, e^{-ikr\,\cos\vartheta_{f\gamma}}\, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r})\; d\Omega. \tag{3.9}$$

Здесь вектор $\mathbf{k}$ представляет импульс фотона, указывающий также направление его распространения, вектор $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, указывающий положение центра масс фрагмента относительно центра масс дочернего ядра, $\theta_{\alpha-\gamma}$ — угол между направлением $\mathbf{n}_r = \mathbf{r}/r$ движения (или туннелирования) фрагмента и направлением $\mathbf{n}_{\rm ph} = \mathbf{k}/k$ распространения излученного фотона, $k = |\mathbf{k}|$ и $r = |\mathbf{r}|$. $E_{i,f}$ и $k_{i,f}$ — полная энергия и волновой вектор системы в начальном i-состоянии (т. е. состоянии до излучения фотона) или в конечном f-состоянии (т. е. состоянии после излучения фотона), $\psi_i(\mathbf{r})$ и $\psi_f(\mathbf{r})$ — волновые функции системы в начальном i- и конечном f- состояниях, $w = k = |\mathbf{k}|$ — частота (энергия) фотона, $\boldsymbol{\xi}_{-1}$ и $\boldsymbol{\xi}_{+1}$ — векторы круговой поляризации с противоположными направлениями вращения. Мы используем кулоновскую калибровку, при которой векторы поляризации $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ для каждого фотона перпендикулярны к его волновому вектору $\mathbf{k}$. Кроме того, в этой главе мы будем использовать систему единиц, при которой $\hbar = 1$ и $c = 1$. Такие обозначения использованы в соответствии с формализмом, развиваемым в работах [22, 23, 26, 27]. N_0 — коэффициент, определяемый как (see Ref. [75])

$$N_0 = \frac{Z^2_{\rm eff} e^2}{(2\pi)^4 m}, \tag{3.10}$$

где $Z_{\rm eff}$ и m — эффективный заряд и приведенная масса составной системы, где $Z_{\rm eff} = (Z_{\rm f} A_{\rm d} - Z_{\rm d} A_{\rm f})\,/\,(A_{\rm f} + A_{\rm d})$ (индекс f или d обозначает фрагмент или дочернее ядро, соответственно).

В сферически симметричном приближении делящейся системы матричный элемент (3.9) можно записать в таком виде:

$$p(w,\vartheta) \;=\; -\sqrt{\frac{1}{3}}\sum_{l=0}^{+\infty} i^l(-1)^l\,(2l+1)\,P_l(\cos\vartheta) \sum_{\mu=-1,1} h_\mu J_{m_f}(l,w), \quad h_\pm \;=\; \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i). \tag{3.11}$$

Здесь $J_{m_f}(l,w)$ — радиальный интеграл, независящий от угла ϑ:

$$J_{m_f}(l,w) = \int\limits_0^{+\infty} r^2\,R_f^*(r,E_f)\,\frac{\partial R_i(r,E_i)}{\partial r}\,j_l(kr)\,dr, \tag{3.12}$$

где $R_i(r)$ и $R_f(r)$ — радиальные компоненты полных волновых функций $\psi_i(\mathbf{r})$ и $\psi_f(\mathbf{r})$ системы в начальном i- и конечном f- состояниях, соответственно; $j_l(kr)$ — сферическая функция Бесселя порядка l (см. Приложение А.3), $P_l(\theta)$ — полином Лежандра порядка l (см. Приложение А.1). Мы используем такие правила отбора для квантовых чисел l и m:

$$\begin{array}{lll} i\text{-состояние до излучения фотона:} & l_i = 0, & m_i = 0; \\ f\text{-состояние после излучения фотона:} & l_f = 1, & m_f = -\mu = \pm 1. \end{array} \tag{3.13}$$

Чтобы вычислить спектры тормозного излучения, нам необходимо знать волновые функции в начальном и конечном состояниях. Мы находим радиальные компоненты $\chi_{i,f}(r)$ численно, решая уравнение Шредингера с заданным потенциалом (здесь $\chi_{i,f}(r) = r \cdot R_{i,f}(r)$), где мы используем следующие граничные условия: до излучения фотона мы имеем систему с вылетом фрагмента, поэтому волновая функция системы в начальном i-состоянии должна соответствовать расходящейся сферической волне на бесконечности; после излучения фотона состояние системы может измениться (за счет самого процесса излучения фотона), поэтому более удобно на данном этапе для описания конечного f-состояния использовать волновую функцию рассеяния фрагмента на ядре. Итак, мы накладываем следующие граничные условия на радиальные компоненты $\chi_{i,f}(r)$:

$$\begin{array}{ll} \text{начальное } i\text{-состояние:} & \chi_i(r\to+\infty) \to G(r) + iF(r), \\ \text{конечное } f\text{-состояние:} & \chi_f(r=0) = 0, \end{array} \tag{3.14}$$

где F и G — кулоновские функции.

3.3.4 Расчет радиальных интегралов в дальней асимптотической области и приближение ведущей гармоники

Большие массы фрагментов, участвующих в делении, и высокие энергии излученных фотонов требуют аккуратного учета значительно большего количества осцилляций подынтегральных функций, чем мы ранее имели в расчетах спектров тормозного излучения при α-распаде [22,23,26–28]. Как оказалось, наши техники и компьютерные коды, разработанные для определения спектров тормозного излучения при α-распаде, которые успешно себя оправдали в той задаче (и были, по-видимому, наиболее точными), оказались совершенно не способными для достижения хотя-бы минимальной удовлетворительной сходимости вычислений спектров тормозного излучения при делении. Таким образом, перед нами встала серьезная практическая проблема расчета спектров излучения фотонов при делении[1]. Однако, оказалось, что достаточно хорошую сходимость при достаточно хорошей точности можно получить в расчете матричных элементов в интересуемых областях

[1]По мнению автора, эта проблема является одной из ключевых причин, почему за столь долгий период изучения свойств деления ядер (более чем 40 лет), где было вовлечено очень много исследователей, практически не было сделано оценок спектров тормозного излучения в квантовом подходе, а в других

масс фрагментов и энергий излученных фотонов, применив в асимптотической области следующую процедуру. Вначале, следует разделить подынтегральную функцию, которая используется в изучаемом радиальном интеграле, на гармоники. Затем, все эти гармоники следует проинтегрировать независимо и, в завершении, на основе полученных таким образом интегралов составить суммарный интеграл. Так, используя (3.12) для радиального интеграла, в асимптотической области (начиная от некоторого значения R_{as}) мы имеем следующие волновые функции α-распадающей системы в начальном i-состоянии и конечном f-состоянии:

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= R_{i,\,l=0}\,Y_{00}(\mathbf{n}_r^i) = N_i \cdot \frac{G_{i,\,l=0}(r) + i\,F_{i,\,l=0}(r)}{r}, \\ \psi_f(\mathbf{r}) &= R_{f,\,l=1} \sum_m Y_{1\,m_f}(\mathbf{n}_r^f) = N_f \cdot \frac{A_f\,G_{f,\,l=1}(r) + B_f\,F_{f,\,l=1}(r)}{r} \sum_{m_f} Y_{1\,m_f}(\mathbf{n}_r^f), \end{aligned} \tag{3.15}$$

где $F(r)$ и $G(r)$ — кулоновские функции, и мы используем такую нормировку:

$$N_i = \sqrt{\frac{m}{k_i}}, \quad N_f = \frac{2}{\sqrt{A_f^2 + B_f^2}}. \tag{3.16}$$

Итак, асимптотическую часть интеграла (3.12) можно записать в виде

$$J_{\mathrm{as}}(n) = N_i\,N_f \int\limits_{R_{\mathrm{as}}}^{R_{\max}} [A_f\,G_f(r) + B_f\,F_f(r)] \cdot \frac{d}{dr} \frac{G_i(r) + i\,F_i(r)}{r} \cdot j_n(k_{\mathrm{ph}} r)\,r\,dr. \tag{3.17}$$

В дальней асимптотической области принято использовать два разных представления кулоновских функций. Если для более быстрых расчетов можно использовать следующий их вид:

$$F_{l,\eta}(r) = \sin\theta_{l,\eta}, \quad G_{l,\eta}(r) = \cos\theta_{l,\eta}, \quad \theta_{l,\eta}(\rho) = \rho - \eta\,\log(2\rho) - l\pi/2 + \sigma_l(\eta), \tag{3.18}$$

то для более аккуратных (но и трудоемких) вычислений лучше воспользоваться следующим:

$$F_{l,\eta}(r) = g\,\cos\theta_{l,\eta} + f\,\sin\theta_{l,\eta}, \quad G_{l,\eta}(r) = f\,\cos\theta_{l,\eta} - g\,\sin\theta_{l,\eta}, \tag{3.19}$$

где функции f и g имеют достаточно слабую зависимость от переменной r и в первом приближении их считают постоянными.

На Рис. 3.6 (а) показана подынтегральная функция интеграла (3.17). Отсюда видно, что эта функция имеет чрезвычайно сложный вид. При более детальном рассмотрении сразу становится заметным огромное число осцилляций, которые имеют гармоническую основу. На Рис. 3.6 (б) представлена форма этой функции на радиальном интервале 1 фм (от 890 до 891 фм для испускаемого фрагмента ^{115}Rh при энергии излученного фотона 300 кэВ). Функция имеет около 8 осцилляций, поэтому в области от 25 до 2225 фм она содержит около 17600 осцилляций!

Однако, интеграл (3.17) может быть разделен явно аналитически на отдельные интегралы, основанные на разных гармониках:

$$\begin{aligned} J_{\mathrm{as}}(n) = {} & \frac{N_i N_f k_i}{2} \Big\{ -(A_f - i\,B_f)\,J_1^+ - (A_f + i\,B_f)\,J_1^- + i\,(A_f - i\,B_f)\,J_2^+ + i\,(A_f + i\,B_f)\,J_2^- \Big\} + \\ & + \frac{N_i\,N_f\,(i - \eta_i)}{2} \Big\{ -(A_f - i\,B_f)\,J_3^+ - (A_f + i\,B_f)\,J_3^- + i\,(A_f - i\,B_f)\,J_4^+ + i\,(A_f + i\,B_f)\,J_4^- \Big\}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

более приближенных подходах таких работ также очень немного. На первый взгляд, это выглядит очень странным, поскольку уже давно существовал хорошо проработанный формализм оптической модели, рассчитывались спектры излучения для некоторых видов ядерных столкновений, и поэтому должно было быть накоплено достаточно много теоретического материала и компьютерных кодов для решения задачи тормозного излучения при делении.

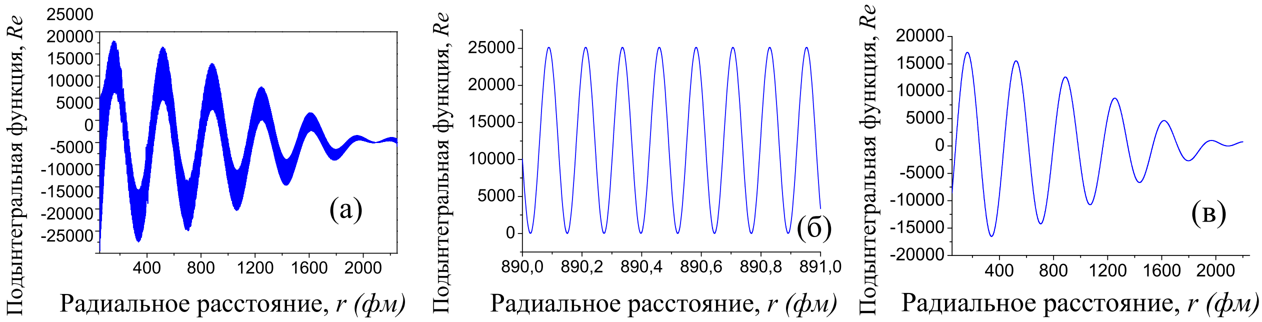

Рис. 3.6: (а) Подынтегральная функция (ее действительная часть) от радиального интеграла (3.17) для фрагмента ^{115}Rh, испускаемого в процессе спонтанного деления ядра ^{252}Cf; (б) Форма этой функции в пределах радиального интервала 1 фм (от 890 до 891 фм): можно видеть, что эта функция имеет 8 осцилляций; (в) Подынтегральная функция интеграла (3.22), представляющая собой ведущую гармоническую основу подынтегральной функции оригинального интеграла (3.17).

где

$$\begin{aligned} J_1^{\pm}(n) &= \int\limits_{R_{\mathrm{as}}}^{R_{\max}} \sin(\theta_i \pm \theta_f) j_n(k_{\mathrm{ph}}r)\, dr, \quad J_3^{\pm}(n) = \int\limits_{R_{\mathrm{as}}}^{R_{\max}} \sin(\theta_i \pm \theta_f) \frac{j_n(k_{\mathrm{ph}}r)}{r}\, dr, \\ J_2^{\pm}(n) &= \int\limits_{R_{\mathrm{as}}}^{R_{\max}} \cos(\theta_i \pm \theta_f) j_n(k_{\mathrm{ph}}r)\, dr, \quad J_4^{\pm}(n) = \int\limits_{R_{\mathrm{as}}}^{R_{\max}} \cos(\theta_i \pm \theta_f) \frac{j_n(k_{\mathrm{ph}}r)}{r}\, dr. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Чтобы выяснить, в каких интегралах подынтегральная функция имеет наибольший период осцилляций, следует искать гармоники с наименьшим аргументом, т. е. мы получаем $\theta_i - \theta_f$ и искомые интегралы J_1^-, J_2^-, J_3^-, J_4^-. Подынтегральные функции в J_3^- и J_4^- убывают более сильно с ростом r по сравнению с функциями в J_1^- и J_2^-. Следовательно, J_3^- и J_4^- вносят меньший вклад в полный интеграл (3.20). Поэтому формула (3.20) может быть переписана так:

$$J_{\mathrm{as}}^-(n) \cong \frac{N_i\, N_f\, k_i}{2} \cdot (A_f + i\, B_f) \cdot \Bigl\{-J_1^-(n) + i\, J_2^-(n)\Bigr\}. \tag{3.22}$$

На Рис. 3.6 (в) показана подынтегральная функция в таком интеграле. При ее сравнении с подынтегральной функцией полного интеграла, представленной на Рис. 3.6 (а), можно убедиться в том, что эта подынтегральная функция от J_{as}^- несет в себе основную тенденцию оригинальной функции, но она уже очищена от огромного числа осцилляций, которые колоссально снижают сходимость вычислений! Итак, интеграл (3.22) может быть рассмотрен как удачное (допустимое) приближение предыдущего интеграла. Назовем такой переход *приближением ведущей гармоники.*

В частности, внутри рассматриваемой области от 25 до 2225 фм мы получаем только 6 осцилляций для основного интеграла $J_{\mathrm{as}}^-(0)$, по сравнению с 17600 осцилляциями, которые содержит наш предыдущий интеграл $J_{\mathrm{as}}(0)$. Следующие два интеграла J_3^+ и J_4^+ определяют собой остаток от неучтенных осцилляций. Поэтому мы определим следующий интеграл

$$J_{\mathrm{as}}^+(n) \cong \frac{N_i\, N_f\, k_i}{2} \cdot (A_f - i\, B_f) \cdot \Bigl\{-J_1^+(n) + i\, J_2^+(n)\Bigr\}. \tag{3.23}$$

С целью учесть оставшуюся коррекцию, которую можно добавить в рассмотрение, запишем

$$J_{\rm as}^{(r)}(n) \;\; \cong \;\; \frac{N_i\, N_f\, k_i}{2} \Bigl[(A_f + i\, B_f) \Bigl\{ -J_3^-(n) + i\, J_4^-(n) \Bigr\} + (A_f - i\, B_f) \Bigl\{ -J_3^+(n) + i\, J_4^+(n) \Bigr\} \Bigr]. \tag{3.24}$$

Конечно, сумма этих интегралов дает изначальный интеграл (3.20) в точности. Наши расчеты спектров тормозного излучения для разных тяжелых фрагментов показали, что коррекция, выполненная на основе включения $J_{\rm as}^{+}(n)$ и $J_{\rm as}^{(r)}(n)$, практически очень мала. Поэтому приближение ведущей гармоники дает достаточно хорошую точность при определении спектров.

Если мы хотим включить вклад излучения при $r > R_{\max}$, то следует развивать технику определения радиального интеграла далее. С этой целью, можно воспользоваться следующими приближенными формулами:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\cos\, \alpha\, r\; dr}{r} &= \frac{\sin\, \alpha\, r}{\alpha\, r}\Big|_{R_{\max}}^{+\infty} + \int\limits_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\sin\, \alpha\, r\; dr}{\alpha\, r^2} \simeq - \frac{\sin\, \alpha\, R_{\max}}{\alpha\, R_{\max}} + O\,(R_{\max}^{-2}), \\
\int\limits_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\sin\, \alpha\, r\; dr}{r} &= - \frac{\cos\, \alpha\, r}{\alpha\, r}\Big|_{R_{\max}}^{+\infty} - \int\limits_{R_{\max}}^{+\infty} \frac{\cos\, \alpha\, r\; dr}{\alpha\, r^2} \simeq \frac{\cos\, \alpha\, R_{\max}}{\alpha\, R_{\max}} + O\,(R_{\max}^{-2}),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

которые имеют точность до $R_{\max}^{-2}$. Для первого $n = 0$ мы получаем

$$\begin{aligned}
J_{1,\,\rm rest}^{-}(0) \;\; \simeq \;\; & \frac{N_i\, N_f\, k_i}{4\, k_{\rm ph}} \Bigl[(A_f + i\, B_f)\, \frac{\sin\,(\theta_i - \theta_f - k_{\rm ph} r)}{(k_i - k_f - k_{\rm ph})\, r} - (A_f + i\, B_f)\, \frac{\sin\,(\theta_i - \theta_f + k_{\rm ph} r)}{(k_i - k_f + k_{\rm ph})\, r} + \\
& + (B_f - i\, A_f)\, \frac{\cos\,(\theta_i - \theta_f - k_{\rm ph} r)}{(k_i - k_f - k_{\rm ph})\, r} - (B_f - i\, A_f)\, \frac{\cos\,(\theta_i - \theta_f + k_{\rm ph} r)}{(k_i - k_f + k_{\rm ph})\, r} \Bigr] \Big|_{r = R_{\max}} + \; O\,(R_{\max}^{-2}).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Так можно искать остальные интегралы при следующих значениях n. Однако, наши оценки показали пренебрежимо малую роль подобных интегралов $J_{\rm i,\,rest}^{\pm}(n)$, если ведущий интеграл $J_{\rm as}^{-}$ определять по формуле (3.22) и корректно выбирать значение $R_{\max}$.

3.4 Результаты

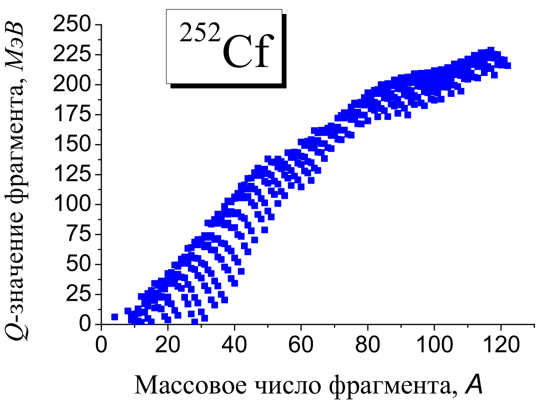

Рис. 3.7: Распределение Q-значений относительно массового числа A фрагментов, которые принимают участие в процессе спонтанного деления ^{252}Cf.

Используем описанный выше метод для определения спектров тормозного излучения фотонов при спонтанном делении ядра ^{252}Cf. Чтобы понять, как решать такую задачу, вначале мы сделаем более простые оценки: найдем вклад излучения фотонов, вызванного лишь одним фрагментом с произвольными массовым и зарядовым числами A и Z, который участвует в сложном процессе деления с заданным Q-значением. Распределение Q-значений для фрагментов с массовыми числами в пределах диапазона 4–125 показано на Рис. 3.7 (получается более чем 2000 фрагментов), которые участвуют в процессе спонтанного деления ядра ^{252}Cf. Все эти фрагменты вызывают тормозное излучения фотонов и, поэтому, задача определения суммарного спектра при спонтанном делении становится крайне сложной.

3.4.1 Излучение фотонов, вызванное легкими и средними фрагментами при делении ^{252}Cf

В качестве первого шага, мы выберем такой фрагмент и найдем спектр фотонов, для которых эта теория хорошо проверена. Так, если в качестве такого фрагмента выбирать α-частицу, то мы получим хлорошо изученный случай распада, для которого мы имеем разработанный формализм [22, 23, 26–28]. Итак, расчеты начнем рассмотрением случая вылета α-частицы из ядра ^{252}Cf.

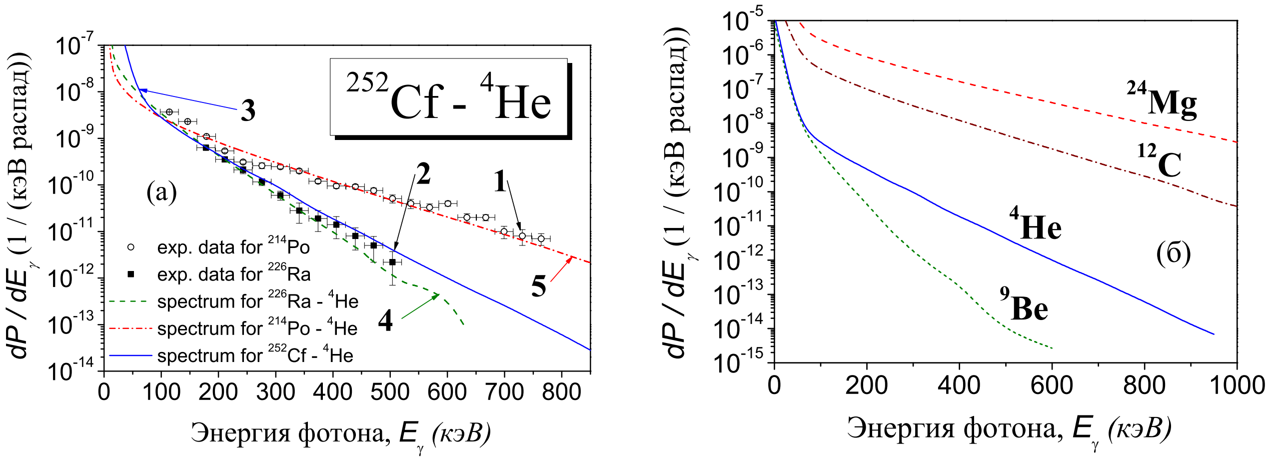

Рис. 3.8: Вероятности тормозного излучения для легких и средних фрагментов, участвующих в процессе деления ^{252}Cf: спектр излучения при вылете α-частицы из ^{252}Cf (сплошная линия, $Q = 6.217$ МэВ) в сравнении со спектрами излучения при α-распаде ^{214}Po (штриховая линия, $Q = 7.7$ МэВ) и ^{226}Ra (штрих-пунктирная линия, $Q = 4.8$ МэВ) [26] (а); спектры излучения, вызванные испусканием фрагментов ^{9}Be (пунктирная линия, $Q = 6.927$ МэВ), ^{12}C (штрих-пунктирная линия, $Q = 23.318$ МэВ) и ^{24}Mg (штриховая линия, $Q = 54.583$ МэВ) из ядра ^{252}Cf в сравнении со спектром излучения для α-частицы (сплошная линия, $Q = 6.217$ МэВ) для того же ядра ^{252}Cf (б).

Результаты расчета спектров показаны на Рис. 3.8 (а) где были выбраны параметры $\vartheta = 90^\circ$ и $l = 0$. Для сравнения мы также включили в рисунок наши предыдущие результаты [26] для α-распада ядер ^{214}Po и ^{226}Ra. На следующем Рис. 3.8 (б) показаны результаты расчета спектров излучения фотонов при вылете фрагментов средней массы ^{9}Be, ^{12}C и ^{24}Mg, в сравнении со спектром фотонов полученных для α-распада того же ядра. Из рисунков видно, что вероятности излучения оказываются выше для более тяжелых фрагментов, имеющих более высокие значения Q-значения и эффективного заряда. В случае излучения фотонов при вылете фрагмента ^{9}Be из ядра ^{252}Cf, вероятность излучения становится меньше, чем для α-частицы. Это можно объяснить близкими значениями Q-значения и эффективного заряда ($Q(^{9}\text{Be}) = 6.927$ МэВ, $Q(^{4}\text{He}) = 6.217$ МэВ, и $Z_{\text{eff}}(^{9}\text{Be}) = 0.5$, $Z_{\text{eff}}(^{4}\text{He}) = 0.444$), тогда как барьер и область туннелирования существенно больше. Это условие для фрагмента ^{9}Be уменьшает излучение тормозных фотонов по сравнению с излучением для α-частицы. Для более тяжелого фрагмента ^{24}Mg вероятность излучения фотонов больше, чем для более легких рассматриваемых фрагментов.

3.4.2 Излучение вызванное выходом тяжелых фрагментов и полный спектр тормозного излучения, сопровождающий спонтанное деление ^{252}Cf

Вычисления вероятностей излучения фотонов для тяжелых ядер являются наиболее трудоемкими. Фрагменты с тяжелыми массами, участвующие в процессе деления, имеют наиболее высокие Q-значения. Чтобы получить стабильные спектры, необходимо учитывать колоссальное число осцилляций подынтегральной функции при интегрировании радиальных интегралов, определяющих матричный элемент излучения. Высокие энергии излученных фотонов (от сотен кэВ до десятков и даже сотен МэВ) значительно усиливают такую трудность определения достоверных спектров. После интегрирования матричного элемента в асимптотической области на основе формулы (3.18), нам удается достичь сходимости вычислений и получить устойчивые спектры вероятностей излучения для отдельных тяжелых фрагментов. Результаты таких вычислений для фрагментов в области масс $A = 95 - 115$ показаны на Рис. 3.9.

Чтобы определить полный спектр излученных тормозных фотонов при спонтанном делении ядра ^{252}Cf, следует усреднить все найденные вероятности тормозного излучения для отдельных фрагментов. Вклад излучения фотонов, вызванного каждым фрагментом, в полный спектр определяется на основе учета вероятностей прохождения процесса деления с вылетом каждого рассмотренного фрагмента. Итак, мы будем определять полную вероятность излучения тормозных фотонов по следующей формуле:

$$\frac{dP(w,\vartheta)}{dE_\gamma} = \sum_i a_i \frac{dP_i(w,\vartheta)}{dE_\gamma} \qquad \Big(\text{при условии} \quad \sum_i a_i = 1\Big), \tag{3.27}$$

где a_i — весовая амплитуда, соответствующая испусканию фрагмента с массовым номером i, и суммирование выполняется в пределах всей области масс. Чтобы определить интересуемую весовую амплитуду для разных фрагментов, мы воспользуемся известным распределением масс для ядра ^{252}Cf, данным в работе [50] в сравнении с экспериментальными данными [51]. Поскольку основной вклад в это распределение несут фрагменты в массовом диапазоне 95–115 (при котором остаточное ядро попадает в массовый диапазон 137–157), то в расчетах суммарной вероятности тормозного излучения мы ограничимся этими значениями масс. В качестве примера мы представим на Рис. 3.9 (а) вероятности тормозного излучения фотонов при спонтанном делении ^{252}Cf, вызванные 7 фрагментами (от ^{95}Zr до ^{115}Rh) с массами, включенными в указанную выше область. Отдельные вклады излучения в полный спектр от отдельных фрагментов оказываются чувствительными к эффективному заряду и Q-значению соответствующего фрагмента. На Рис. 3.9 (б) показан полная вероятность излученных фотонов, получаемая по указанной выше процедуре усреднения (3.27).

3.5 Выводы

В этой главе представлен формализм по описанию тормозного излучения фотонов, которое сопровождает спонтанное деление ядер [80]. Этот формализм развивается в направлении работ [23, 26–28], согласно которому изучаемый процесс деления рассматривается в полностью квантовом подходе. При определении волновой функции фотонов применяется разложение сферических волн (см. также [52]). Для практических расчетов было выбрано ядро ^{252}Cf. Результаты вычислений сравниваются с доступными из литературы экспериментальными данными [53–57] по измерениям вероятностей тормозного излучения фотонов при спонтанном делении ^{252}Cf. Наши результаты по теоретическому определению полных спектров тормозного излучения фотонов высоких энергий при спонтан-

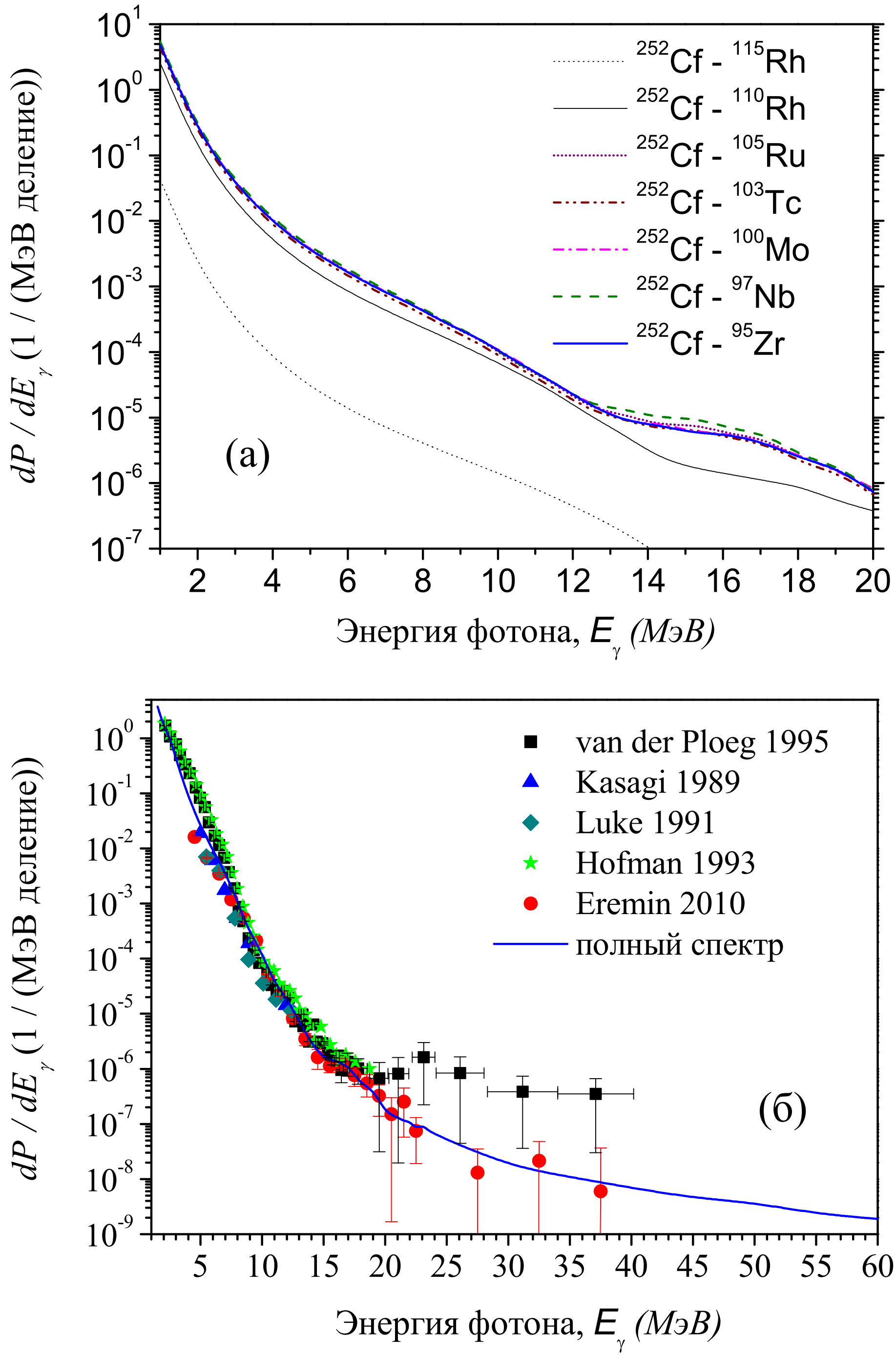

Рис. 3.9: (а) Вероятность тормозного излучения фотонов, вызванного испусканием тяжелых фрагментов в процессе спонтанного деления ядра ^{252}Cf, которые попадают в массовый диапазон $A = 95 - 115$ (сплошная линия — для фрагмента ^{95}Zr: $Q = 202.36$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 3.055$; штриховая линия — для ^{97}Nb: $Q = 200.43$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 3.277$; пунктирная линия — для ^{100}Mo: $Q = 204.81$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 3.111$; штрих-пунктирная линия — для ^{103}Tc: $Q = 204.47$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 2.944$; штрих-дважды пунктирная линия — для ^{105}Ru: $Q = 205.22$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 3.166$; краткая штриховая линия — для ^{110}Rh: $Q = 214.53$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 2.222$; краткая пунктирная линия — для ^{115}Rh: $Q = 226.74$ МэВ, $Z_{\rm eff} = 0.277$). (б) Полная (суммарная) вероятность тормозного излучения фотонов при спонтанном делении ядра ^{252}Cf: теоретический спектр (сплошная линия) получен на основе усреднения вкладов излучения от всех фрагментов, рассмотренных на предыдущем рисунке; экспериментальные данные (квадраты — из работы [57], треугольники — из работы [53], ромбы — из работы [56] and звездочки — из работы [59], круги — из работы [58]).

ном делении ^{252}Cf оказались в хорошем согласии с экспериментальными данными [53–57]. Оценены вклады излучения фотонов, вызываемого вылетом легких, средних и тяжелых фрагментов, которые продуцируются в процессе деления ^{252}Cf. Мы наблюдаем взаимосвязь между выходами излучения от каждого отдельного фрагмента и его Q-значением и эффективным зарядом, которые определяют волновую функцию системы деления и вероятность тормозного излучения. Чтобы определить эти волновые функции, на основе стандартной фолдинг-процедуры нами построен потенциал взаимодействия между испускаемым фрагментом с произвольным массовым и зарядовым числами и остаточным ядром. Одну из основных трудностей в этой задаче представляет собой расчет радиальных интегралов, которые формируют матричный элемент излучения. С этой целью, разработана новая процедура, которая позволяет существенно повысить точность вычислений радиального интеграла в дальней асимптотической области. Как впоследствии выяснилось, эта процедура оказалось ключевым пунктом, открывшим возможность впервые изучать излучение тормозных фотонов в задаче деления в полностью квантовом рассмотрении. Эта процедура названа приближением ведущей гармоники.

Глава 4

Излучение во взаимодействиях протонов с ядрами от низких до промежуточных энергий

В этой главе представлена модель тормозного излучения, которое сопровождает столкновения протонов с ядрами и протонный распад ядер. Она включает спиновый формализм, потенциальный подход к описанию взаимодействий протонов с ядрами, а оператор излучения включает магнитное излучение. На ее основе изучена роль магнитного излучения в протонном распаде. На примере ядра ^{146}Tm проанализировано: (1) насколько сильно магнитное излучение и как меняется полный спектр при его учете, (2) при каких углах магнитное излучение проявляется наиболее сильно, (3) есть ли такие расстояния между вылетающим протоном и дочерним ядром, где магнитное излучение существенно возрастает относительно электрического, (4) как ведет себя магнитное излучение в области туннелирования, (5) как меняются спектры при стремлении энергии излученных фотонов к нулю (чему они равны в нуле и какова максимальная вероятность при околонулевых энергиях). Показано, что предлагаемая модель позволяет успешно описать излучение тормозных фотонов, которые сопровождают столкновения протонов с ядрами ^{9}Be, ^{12}C и ^{208}Pb при энергии падения $T_{\mathrm{lab}} = 140$ MeV (для энергий фотонов до 120 МэВ), ядрами ^{9}C, ^{64}Cu и ^{107}Ag при энергии падения $T_{\mathrm{lab}} = 72$ МэВ (для энергии фотонов до 60 МэВ).

4.1 Введение

Принято считать, что для успешного описания столкновений протонов с ядрами важным является взаимодействие между двумя нуклонами, которое с ростом энергий постепенно приобретает лидирующую роль в такой задаче. Поэтому в релятивистских моделях таких столкновений положено взаимодействие между двумя отдельными нуклонами (т. е. нуклон-нуклонное или двунуклонное), с дальнейшим применением формализма диаграмм Фейнмана. Но, с другой стороны, рассмотрение ядра как некой среды позволяет включить пространственное распределение множества нуклонов. Такой путь учитывает нелокальность квантовой механики, являющуюся одним из основных ее свойств. При сравнении этих двух рассмотрений появляется вопрос: что более фундаментально и важно, точечное взаимодействие между отдельными двумя нуклонами ядерной системы или квантовые эффекты нелокальности в ней?

Надо ли вообще учитывать нелокальные эффекты при изучении таких взаимодействий? Насколько они малы? Так, например, в [60] показано, что корректный учет граничных и начальных условий в задаче протонного распада способен изменить период полураспада протонных эмиттеров до 200 раз (например, на такую величину могут быть изменены расчетные результаты [61–69], тогда как принятая средняя ошибка составляла лишь несколько процентов). Значит, нелокальные эффекты действительно не малы и их учет способен сильно изменить результат.

Другим аспектом являются коллективные эффекты. Модели с нуклон-нуклонным взаимодействием были бы эффективными, если бы коллективные эффекты между нуклонами ядерной системы были пренебрежимо малы. Однако мы знаем, что при малых энергиях это не так. Можно было бы думать, что многочастичные взаимодействия исчезают с ростом энергии взаимодействующих нуклонов. Так, если рассмотреть тормозное излучение (ТИ), которое сопровождает столкновения протонов я ядрами, то существуют указания, что двунуклонные соударения дают наибольшую интенсивность излучения. Но мы находим, что многонуклонные эффекты должны проявляться и возрастать с ростом энергии излученных фотонов.[1] Подтверждение о существенном влиянии многочастичных взаимодействий на процесс излучения и всей важности их изучения мы находим и в ряде других работ (например, см. [70]; в частности, двунуклонные подходы не дают ответ на вопрос о природе жестких фотонов).

Свойства тормозного излучения, сопровождающего рассеяние протонов на ядрах, изучены достаточно хорошо (например, см. обзор [3], также [4] для столкновений между тяжелыми ионами). Как правило, рассматривается эмиссия фотонов, где в качестве излучателя в ядерной системе могут выступать как ядро в целом, так и отдельные нуклоны в нем. Сам процесс излучения изучается в результате торможения нуклонов в среднем поле ядра или в следствие нуклон-нуклонных соударений. В то же время неоднократно указывалось (например, см. [70]), что хуже всего изучены свойства ядерного тормозного излучения, сопровождающего нуклон-ядерные и ядерно-ядерные столкновения (особенно в области промежуточных энергий до 150 МэВ / нуклон). Это вызывает наш интерес к использованию оптических потенциалов [71] и фолдинг- потенциалов [72] при изучении тормозного излучения, которое сопровождает взаимодействия (столкновения) протонов с ядрами[2]. Было бы интересно получить модель, позволяющую описывать спектры в диапазоне энергий от минимальных до промежуточных. Усиливает наш интерес к такому потенциальному подходу также то, что он позволяет непосредственно использовать нелокальность квантовой механики при описании взаимодействий.

Однако, в изучении тормозного излучения, которое сопровождает α-распад ядер [6–13, 18–20, 22, 23, 26–28, 35–37, 41–43, 73–76], спонтанное деление ядер [53, 55–59, 77–81], тройное деление ядер [82], а также столкновения нуклонов на ядрах [70, 83–85], ионов и ядер на ядрах при нерелятивистских энергиях [4], не было учтено излучение, вызванное магнитным моментом фрагмента движущегося относительно ядра. Такой путь может быть оправдан предположением, что при таких энергиях излученных фотонов магнитное излучение достаточно мало и им вполне можно пренебречь в расчетах (например, см. [70]). При описании взаимодействий такие модели связаны с решением уравнения Шредингера. Мощный подход для описания многочастичных эффектов могли бы предложить микроскопические модели малонуклонных систем, где волновая функция определяется по методу резонансных групп. Но, например, мы видим, что аспект магнитного излучения не был включен в такую модель, развиваемую для описания тормозного излучения при рассеянии (столкновениях) протонов на α-частицах [86], α-частиц на α-частицах и легких ядрах [87, 88].

Магнитное излучение связано с магнитным моментом и спином фрагмента, взаимодействующего с ядром. Попытка учесть эти аспекты приводит к матричной форме урав-

[1] Например, в задаче α-распада, с ростом энергии излученного фотона для получения стабильного значения вероятности его излучения необходимо постоянно повышать верхнюю границу пространственной области, в пределах которой вычисляются интегралы. В задаче деления эта проблема проявляется существенно сильнее.

[2] Так, например, такой потенциальный подход к описанию нуклон-ядерных взаимодействий при сравнении с двунуклонным делает его практически безальтернативным.

нений взаимодействия (простейшим из которых является двукомпонентное уравнение Паули) и многокомпонентной волновой функции ядерной системы (например, см. [89], стр. 32–35, 48–60). Однако, магнитная компонента излучения и спиновый формализм включены в релятивистские модели столкновений нуклонов между собой и с ядрами при промежуточных (intermediate) энергиях (базирующиеся на уравнении Дирака). Здесь я хотел бы выделить два направления интенсивных исследований: [90, 91] и [92–103]. Однако, основной упор в этих работах был сделан на построение наиболее корректного релятивистского описания взаимодействия между двумя нуклонами в такой задаче, где формализм преимущественно развивался в импульсном представлении. Поэтому, с точки зрения теории, было бы интересно получить модель, объединяющую спиновый формализм взаимодействующих фрагментов ядерной системы (с учетом принципа Паули при построении волновой функции и включением магнитного момента) и потенциальный подход при описании взаимодействия между ними.

Наиболее удобной является задача описания тормозного излучения при столкновении протонов с ядрами или протонном распаде. В [104] изучалось ТИ в распадах с вылетом протона (см. также [105]). Однако, здесь не было учтено магнитное излучение, вызванное магнитным моментов протона (но была учтена спин-орбитальная компонента в потенциале взаимодействия и оценено ее влияние на спектр). Для ясного выяснения его роли и насколько оно мало, нужна модель, включающая такой аспект. Основной целью этой работы является построение такой модели, где мы ограничимся граничными условиями для протонного распада.

Итак, намеченная нами программа должна использовать реалистические потенциалы взаимодействия между протоном и ядром, которые определяются на основе анализа экспериментальных сечений столкновений этих двух объектов. Важный пункт в формализме — введение спина. Это ключевой пункт, позволяющий связать формализм предыдущих моделей с пространственным потенциальным подходом к описанию взаимодействий (например, см. [104]) с полностью релятивистскими теориями, используемыми в основе уравнение Дирака. Существенно, что такая связь позволяет нам применить ранее развитые аналитические методы и компьютерные коды к решению задач излучения фотонов в релятивистской теории.

Что интересного и нового могла бы дать такая модель? Поставим такие вопросы. Насколько сильно магнитное излучение и как меняется полный спектр при его учете? Существуют ли такие углы, при которых магнитное излучение намного сильнее? Есть ли такие расстояния между вылетающим протоном и дочерним ядром, где магнитное излучение существенно возрастает относительно электрического? Как ведет себя магнитное излучение в области туннелирования? С точки зрения теории интересно разобраться в том, как ведет себя спектр излучения при стремлении энергии излученных фотонов к нулю. В частности, выясним, будет ли этот спектр неограниченно возрастать или стремиться к некому конечному пределу, и каков предел в таком случае? Отметим, что в литературе нами не найдено какой-либо информации по этим вопросам. На эти вопросы мы отвечаем в данной главе.

4.2 Уравнение Паули многонуклонной системы

Рассмотрим обобщение Паули для $A+1$ нуклонов, которые представляют собой систему протона и ядра, в лабораторной системе отсчета (получаемую, как обобщение (1.3.6) в [89], стр. 33)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad \hat{H} = \sum_{i=1}^{A+1}\Big\{\frac{1}{2m_i}\Big(\mathbf{p}_i - \frac{z_i e}{c}\mathbf{A}_i\Big)^2 + z_i e\, A_{i,0} - \frac{z_i e\hbar}{2m_i c}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A}_i\Big\} + V(\mathbf{r}_1\ldots\mathbf{r}_{A+1}), \tag{4.1}$$

где для произвольного нуклона с номером i использовано соотношение (подобное уравнению (1.3.4) в [89] для частицы во внешней поле)

$$\chi = \frac{1}{2m_i c}\,\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{p}_i - \frac{z_i e}{c}\mathbf{A}_i\right)\psi. \tag{4.2}$$

Здесь $\Psi = (\chi,\psi)$ — биспинорная волновая функция протон-ядерной системы, m_i и z_i — масса и заряд нуклона с номером i, $\mathbf{A}_i$ — компонента потенциала электромагнитного поля, формируемого этим нуклоном (которое описывает рождение тормозных фотонов, вызванное именно этим нуклоном), $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, A — массовое число ядра, $V(\mathbf{r}_1\ldots\mathbf{r}_{A+1})$ — потенциал (как ядерных, так и электромагнитных) взаимодействий между всеми нуклонами [3]. Мы переходим в систему центра масс, в которой относительное расстояние между центрами масс протона и ядра описывается с помощью вектора $\mathbf{r}$ (например, см. Приложение А в работе [82], также [70]). Тогда можно представить этот гамильтониан как $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$, где $\hat{W}$ объединяет все компоненты электромагнитного поля, который мы определим как оператор излучения тормозного фотона, вызванного полной ядерной системой, и $\hat{H}_0$ — остаточный гамильтониан без включения излученных фотонов. Пренебрегая относительным движением нуклонов ядра относительно его центра масс в расчете $\hat{W}$, мы получим

$$\begin{aligned}
\hat{W} &= \hat{W}_{\rm el} + \hat{W}_{\rm mag},\\
\hat{W}_{\rm el} &= -Z_{\rm eff}\,\frac{e}{2mc}\,(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) + eA_0 + Z_{\rm eff}^2\,\frac{e^2}{2mc^2}\,\mathbf{A}^2,\\
\hat{W}_{\rm mag} &= -Z_{\rm eff}\,\frac{e\hbar}{2mc}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $Z_{\rm eff}$ и m — эффективный заряд и приведенная масса протон-ядерной системы, $\hat{\mathbf{p}}$ — оператор импульса, сопряженный к радиус-вектору $\mathbf{r}$.

4.3 Оператор излучения

Пренебрегая слагаемыми при $e^2\mathbf{A}^2/c^2$ и A_0, оператор излучения (4.3) в кулоновской калибровке можно представить так:

$$\hat{W} = -Z_{\rm eff}\,\frac{e}{mc}\,\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} - Z_{\rm eff}\,\frac{e\hbar}{2mc}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = -Z_{\rm eff}\,\frac{e}{mc}\Big(\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{A}\Big). \tag{4.4}$$

Согласно теории квантовой электродинамики, выберем векторный потенциал электромагнитного поля в виде ($\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)}$):

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1,2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w_{\rm ph}}}\,\mathbf{e}^{(\alpha),*}e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}, \tag{4.5}$$

[3]Согласно [89] (см. стр. 32), уравнение (4.1) может быть использовано, если энергия ε_i произвольного нуклона с номером i достаточно близка к его массе m_i, т. е. при $|\varepsilon_i - m_i| \ll m_i$ ($c = 1$). Отсюда можно получить высокоэнергетическое предельное значение для падающей энергии протона: $\varepsilon_p \ll 2m_p \simeq 1.86$ ГэВ. Значит, в пределах области энергий до $\varepsilon_{\rm p}$ уравнение (4.1) включает все релятивистские свойства, которые дает нам уравнение Дирака (однако, учет приближения (4.2) может внести свои поправки). В частности, этот предел оказывается значительно выше, чем промежуточные энергии протон-ядерных столкновений, рассматриваемые в этой главе.

где $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ — единичные вектора поляризации фотона ($\mathbf{e}^{(\alpha),*} = \mathbf{e}^{(\alpha)}$), $\mathbf{k}_{\rm ph}$ — волновой вектор фотона и $w_{\rm ph} = k_{\rm ph}c = |\mathbf{k}_{\rm ph}|c$. Вектора $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ перпендикулярны к $\mathbf{k}_{\rm ph}$ в Кулоновской калибровке. Мы имеем два независимых вектора поляризации $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ для фотона с импульсом $\mathbf{k}_{\rm ph}$ ($\alpha = 1, 2$). Можно далее было бы развивать формализм в системе единиц, где $\hbar = 1$ и $c = 1$, но для полноты картины мы будем выписывать постоянные $\hbar$ и c явно. Подставляя вектор $\mathbf{A}$ в оператор возмущения (4.4), получим

$$\hat{W} \;=\; -Z_{\rm eff}\,\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}}\sum_{\alpha=1,2}\Big(\mathbf{e}^{(\alpha)}\,e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\hat{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{e}^{(\alpha)}e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\Big). \tag{4.6}$$

Подставим явный вид оператора импульса, получим далее:

$$\hat{W} \;=\; Z_{\rm eff}\,\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}}\sum_{\alpha=1,2}\Big(i\,\mathbf{e}^{(\alpha)}\,e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\nabla - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\Big[\nabla\times\mathbf{e}^{(\alpha)}\Big]\,e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\Big). \tag{4.7}$$

Учтя свойство:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\,e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} = e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\Big(-i\mathbf{k}_{\rm ph} + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big), \tag{4.8}$$

перепишем оператор излучения так:

$$\hat{W} \;=\; Z_{\rm eff}\,\frac{e}{mc}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w_{\rm ph}}}\sum_{\alpha=1,2} e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\Big(i\,\mathbf{e}^{(\alpha)}\,\nabla - \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\Big[\nabla\times\mathbf{e}^{(\alpha)}\Big] + i\,\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\Big[\mathbf{k}_{\rm ph}\times\mathbf{e}^{(\alpha)}\Big]\Big). \tag{4.9}$$

Выпишем явно векторные произведения:

$$\Big[\mathbf{k}_{\rm ph}\times\mathbf{e}^{(1)}\Big] \;=\; \left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_{\rm x} : k_{\rm y}e_{\rm z}^{(1)} - k_{\rm z}e_{\rm y}^{(1)} = 0 \\ \mathbf{e}_{\rm y} : k_{\rm z}e_{\rm x}^{(1)} - k_{\rm x}e_{\rm z}^{(1)} = k_{\rm z}\,e_{\rm x}^{(1)} = k \\ \mathbf{e}_{\rm z} : k_{\rm x}e_{\rm y}^{(1)} - k_{\rm y}e_{\rm x}^{(1)} = 0 \end{array}\right\} = k_{\rm ph}\,\mathbf{e}^{(2)}, \tag{4.10}$$

$$\Big[\mathbf{k}_{\rm ph}\times\mathbf{e}^{(2)}\Big] \;=\; \left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_{\rm x} : k_{\rm y}e_{\rm z}^{(2)} - k_{\rm z}e_{\rm y}^{(2)} = -k_{\rm z}e_{\rm y}^{(2)} = -k \\ \mathbf{e}_{\rm y} : k_{\rm z}e_{\rm x}^{(2)} - k_{\rm x}e_{\rm z}^{(2)} = 0 \\ \mathbf{e}_{\rm z} : k_{\rm x}e_{\rm y}^{(2)} - k_{\rm y}e_{\rm x}^{(2)} = 0 \end{array}\right\} = -\,k_{\rm ph}\,\mathbf{e}^{(1)}, \tag{4.11}$$

$$\Big[\mathbf{k}_{\rm ph}\times\mathbf{e}^{(3)}\Big] \;=\; \left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_{\rm x} : k_{\rm y}e_{\rm z}^{(3)} - k_{\rm z}e_{\rm y}^{(3)} = 0 \\ \mathbf{e}_{\rm y} : k_{\rm z}e_{\rm x}^{(3)} - k_{\rm x}e_{\rm z}^{(3)} = 0 \\ \mathbf{e}_{\rm z} : k_{\rm x}e_{\rm y}^{(3)} - k_{\rm y}e_{\rm x}^{(3)} = 0 \end{array}\right\} = 0. \tag{4.12}$$

Также найдем сумму:

$$\sum_{\alpha=1,2,3}\Big[\mathbf{k}_{\rm ph}\times\mathbf{e}^{(\alpha)}\Big] = k_{\rm ph}\,(\mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}^{(1)}). \tag{4.13}$$

4.4 Матричный элемент излучения

Рассмотрим матричный элемент в виде:

$$F_{fi} \;\equiv\; \Big\langle k_f\Big|\,\hat{W}\,\Big|\,k_i\Big\rangle = \int \psi_f^*(\mathbf{r})\,\hat{W}\,\psi_i(\mathbf{r})\,\mathbf{dr}, \tag{4.14}$$

где $\psi_i(\mathbf{r}) = |k_i\rangle$ и $\psi_f(\mathbf{r}) = |k_f\rangle$ — стационарные волновые функции протон-ядерной системы в начальном i-состоянии (т. е. состоянии до излучения фотона) и конечном f-

состоянии (т. е. состоянии после излучения фотона). Подставляя в (4.14) оператор излучения в виде (4.9), получим

$$
\begin{aligned}
F_{fi} \; &= \; \langle k_f |\, \hat{W} \,| k_i \rangle = \\
&= \Bigl\langle k_f \Bigr| \, Z_{\rm eff}\, \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \sum_{\alpha=1,2} e^{-i\,\mathbf{kr}} \, \Bigl(i\,\mathbf{e}^{(\alpha)}\, \nabla - \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\nabla \times \mathbf{e}^{(\alpha)}\Bigr] + i\,\frac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}\Bigr] \Bigr) \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle = \\
&= Z_{\rm eff}\, \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \sum_{\alpha=1,2} \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}} \, \Bigl(i\,\mathbf{e}^{(\alpha)}\, \nabla - \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \nabla\Bigr] + i\,\frac{1}{2}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}\Bigr] \Bigr) \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle = \\
&= Z_{\rm eff}\, \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \, \Bigl\{ i \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}}\, \nabla \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \nabla\Bigr] \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle + \\
&+ i\,\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \Bigl[\mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}\Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}}\, \boldsymbol{\sigma} \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle \Bigr\}
\end{aligned}
$$

или

$$
F_{fi} \quad = \quad \langle k_f |\, \hat{W} \,| k_i \rangle \quad = \quad Z_{\rm eff}\, \frac{e}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{w}} \, \Bigl\{ p_{\rm el} + p_{\rm mag,1} + p_{\rm mag,2} \Bigr\}, \tag{4.15}
$$

где

$$
\begin{aligned}
p_{\rm el} \quad &= \quad i \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}}\, \nabla \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle, \\
p_{\rm mag,1} \quad &= \quad \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\mathbf{e}^{(\alpha)} \times \nabla\Bigr] \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle, \\
p_{\rm mag,2} \quad &= \quad -i\, \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \Bigl[\mathbf{k} \times \mathbf{e}^{(\alpha)}\Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\,\mathbf{kr}}\, \boldsymbol{\sigma} \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Такое определение F_{fi} согласуется с ранее используемыми нами обозначениями, используемыми в работах [22, 23, 26–28, 75, 76, 80, 82, 104]:

$$
\begin{aligned}
F_{fi} \quad &= \quad Z_{\rm eff}\, \frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{w}} \cdot p\,(k_i, k_f), \\
p\,(k_i, k_f) \quad &= \quad \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*}\, \mathbf{p}\,(k_i, k_f) = \sum_{\mu=-1,1} h_\mu \, \boldsymbol{\xi}^*_\mu \, \mathbf{p}\,(k_i, k_f), \\
\mathbf{p}\,(k_i, k_f) \quad &= \quad \Bigl\langle k_f \Bigr| \, e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Bigl| \, k_i \Bigr\rangle = \int \psi^*_f(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \psi_i(\mathbf{r})\, \mathbf{dr}.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Для квадрата матричного элемента излучения получаем

$$
|a_{fi}|^2 \quad = \quad 2\pi\, T\, |F_{fi}|^2 \cdot \delta(w_f - w_i + w). \tag{4.18}
$$

4.5 Волновая функция протона в поле ядра и суммирование по спиновым состояниям

Определим волновую функцию протона в поле ядра. Будем искать ее в виде билинейной комбинации собственных функций двух подсистем — орбитальной и спиновой (см. (1.4.2), [89], стр. 42):

$$
\psi_{jM}(\mathbf{r}, s) = R\,(r) \sum_{m=-l}^{l} \sum_{\mu=\pm 1/2} C^{jM}_{lm1/2\mu}\, Y_{lm}(\mathbf{n}_{\rm r})\, v_\mu(s), \tag{4.19}
$$

где $R(r)$ — радиальная скалярная функция (будем считать, что $R(r)$ не зависит от m при одинаковом l), $\mathbf{n}_{\mathrm{r}} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{r}$, $Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})$ — сферические функции (см. Приложение A.2), $C^{jM}_{lm1/2\mu}$ — коэффициенты векторного сложения (коэффициенты Клебша-Гордона), $M = m + \mu$ и $l = j \pm 1/2$, s — спиновая переменная. Однако, мы учтем, что как до излучения фотона, так и после него мы не можем фиксировать экспериментально отдельные состояния с выбранным числом M (собственным значением оператора $\hat{J}_z$). Поэтому вместо (4.19) нас будет интересовать суперпозиция по всем состояниям с разными числами M:

$$\psi_{jl}(\mathbf{r}, s) = R(r) \sum_{m=-l}^{l} \sum_{\mu=\pm 1/2} C^{j,M=m+\mu}_{lm1/2\mu}\, Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, v_{\mu}(s). \tag{4.20}$$

Для удобства дальнейших выкладок введем пространственную волновую функцию в виде:

$$\varphi_{lm}(\mathbf{r}) = R_l(r)\, Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}). \tag{4.21}$$

Рассмотрим, что собой представляет спиновая функция $v_{\mu}(s)$. Расписав ее по компонентам, мы видим, что $v_{\mu_1}(s)$ и $v_{\mu_2}(s)$ — собственные функции оператора спина $\hat{s}_z$, отвечающие собственным значениям $s_z = \sigma_1$ и $s_z = \sigma_2$ (см. [31], стр. 247). Каждая такая функция отвечает состоянию, в котором частица обладает определенным значением s_z. Итак, имеем

$$v_{\mu_1}(s) = \delta_{\mu_1 s}, \quad v_{\mu_2}(s) = \delta_{\mu_2 s}. \tag{4.22}$$

Действие оператора спина на волновую функцию выражается формулой (см. (55,4), [31], стр. 248)

$$(\hat{\mathbf{s}}\, v_{\mu})(\sigma) = \sum_{\sigma'} s_{\sigma\sigma'}\, v_{\mu}(\sigma'), \tag{4.23}$$

которая дает следующие матричные элементы, неравные нулю:

$$\begin{aligned}
(s_x)_{\sigma,\sigma-1} &= (s_x)_{\sigma-1,\sigma} = \frac{1}{2}\sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)},\\
(s_y)_{\sigma,\sigma-1} &= -(s_y)_{\sigma-1,\sigma} = -\frac{i}{2}\sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)},\\
(s_z)_{\sigma\sigma} &= \sigma.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

В случае спина 1/2 ($s = 1/2$, $\sigma = \pm 1/2$) эти матрицы двухрядны. Имеем

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{4.25}$$

Найдем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
v^*_{\mu_f}(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x\, v_{\mu_i}(s_i) &= v^*_{\mu_f}(s_f)\sum_{s'}(\sigma_x)_{s_i s'}\, v_{\mu_i}(s') =\\
&= \Big\{\delta_{s_i,-1/2}\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, v_{\mu_i}(+1/2) + \delta_{s_i,+1/2}\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, v_{\mu_i}(-1/2)\Big\}\sqrt{(s+|s_i|)(s-|s_i|+1)},\\
v^*_{\mu_f}(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y\, v_{\mu_i}(s_i) &= v^*_{\mu_f}(s_f)\sum_{s'}(\sigma_y)_{s_i s'}\, v_{\mu_i}(s') =\\
&= i\Big\{\delta_{s_i,-1/2}\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, v_{\mu_i}(+1/2) - \delta_{s_i,+1/2}\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, v_{\mu_i}(-1/2)\Big\}\sqrt{(s+|s_i|)(s-|s_i|+1)},\\
v^*_{\mu_f}(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z\, v_{\mu_i}(s_i) &= v^*_{\mu_f}(s_f)\sum_{s'}(\sigma_z)_{s_i s'}\, v_{\mu_i}(s') =\\
&= \Big\{\delta_{s_i,-1/2}\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, v_{\mu_i}(-1/2) + \delta_{s_i,+1/2}\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, v_{\mu_i}(+1/2)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Используя (4.22) и (4.24), получим

$$\begin{aligned} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x\,v_{\mu_i}(s_i) &= \delta_{\mu_f,s_f}\,\Bigl\{\delta_{s_i,-1/2}\,\delta_{\mu_i,+1/2} + \delta_{s_i,+1/2}\,\delta_{\mu_i,-1/2}\Bigr\}, \\ v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y\,v_{\mu_i}(s_i) &= i\,\delta_{\mu_f,s_f}\,\Bigl\{\delta_{s_i,-1/2}\,\delta_{\mu_i,+1/2} - \delta_{s_i,+1/2}\,\delta_{\mu_i,-1/2}\Bigr\}, \\ v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z\,v_{\mu_i}(s_i) &= \delta_{\mu_f,s_f}\,\Bigl\{\delta_{s_i,-1/2}\,\delta_{\mu_i,-1/2} + \delta_{s_i,+1/2}\,\delta_{\mu_i,+1/2}\Bigr\} \end{aligned} \tag{4.27}$$

и найдем суммы:

$$\begin{aligned} &\sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x\,v_{\mu_i}(s_i) = 1, \\ &\sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y\,v_{\mu_i}(s_i) = i\,\Bigl\{\delta_{\mu_i,+1/2} - \delta_{\mu_i,-1/2}\Bigr\}, \\ &\sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z\,v_{\mu_i}(s_i) = 1. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Эти формулы можно переписать в виде компонент вектора:

$$\begin{aligned} \sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\,v_{\mu_i}(s_i) \;&=\; \mathbf{e}_{\rm x} \sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_x\,v_{\mu_i}(s_i) + \\ + \mathbf{e}_{\rm y} \sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y\,v_{\mu_i}(s_i) \;&+\; \mathbf{e}_{\rm z} \sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_z\,v_{\mu_i}(s_i) \;= \\ &= \mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\,i\,\Bigl\{\delta_{\mu_i,+1/2} - \delta_{\mu_i,-1/2}\Bigr\} + \mathbf{e}_{\rm z}, \end{aligned} \tag{4.29}$$

где введена система единичных ортов $\mathbf{e}_{\rm x}$, $\mathbf{e}_{\rm y}$, $\mathbf{e}_{\rm z}$.

Теперь будем искать матричные элементы в (4.16). В начале мы выполним в них суммирование по всем спиновым состояниям. Используя собственные значения спиновых функций (4.22), для первого элемента получим

$$\begin{aligned} \Bigl\langle k_f \Bigl|\, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\nabla\,\Bigr| k_i \Bigr\rangle \;&= \sum_{m_i,m_f}\,\sum_{s_i,s_f=\pm1/2} \int R_f^*(r) \sum_{\mu_f=\pm1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})^*\, v_{\mu_f}^*(s_f)\, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla\, \times \\ &\times\; R_i(r) \sum_{\mu_i=\pm1/2} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i}\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_{\rm r})\, v_{\mu_i}(s_i)\, \mathbf{dr} = \\ &= \sum_{m_i,m_f}\,\sum_{\mu_f=\pm1/2}\,\sum_{\mu_i=\pm1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \Bigl[\sum_{s_i,s_f=\pm1/2} v_{\mu_f}^*(s_f)\, v_{\mu_i}(s_i)\Bigr] \times \\ &\times \int R_f^*(r)\, Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})^*\, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla\, R_i(r)\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_{\rm r})\, \mathbf{dr} = \\ &= \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm1/2}\,\sum_{m_i,m_f} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \Bigl\langle k_f \Bigl|\, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\nabla\,\Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

где $\langle k_f|\ldots| k_i\rangle_{\mathbf{r}}$ — однокомпонентный матричный элемент вида

$$\Bigl\langle k_f \Bigl|\, \hat{f} \,\Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}} \;\equiv\; \int R_f^*(r)\, Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})^*\, \hat{f}\, R_i(r)\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_{\rm r})\, \mathbf{dr}, \tag{4.31}$$

в котором используются пространственные волновые функции вида (4.21) и интегрирование выполняется только по пространственным переменным. Используя найденные суммы (4.28), для третьего элемента найдем

$$\Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\boldsymbol{\sigma}\Bigr| k_i \Bigr\rangle = \sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} \int R_f^*(r) \sum_{m_f} \sum_{\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})^*\, v^*_{\mu_f}(s_f)\, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\,\boldsymbol{\sigma} \times$$
$$\times R_i(r) \sum_{m_i} \sum_{\mu_i = \pm 1/2} C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i}\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_{\rm r})\, v_{\mu_i}(s_i)\, \mathbf{dr} =$$
$$= \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_f = \pm 1/2} \sum_{\mu_i = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \cdot \Bigl[\sum_{s_i, s_f = \pm 1/2} v^*_{\mu_f}(s_f)\, \boldsymbol{\sigma}\, v_{\mu_i}(s_i) \Bigr] \times$$
$$\times \int R_f^*(r)\, Y_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})^*\, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, R_i(r)\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}_{\rm r})\, \mathbf{dr} =$$
$$= \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f} C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \Bigl[\mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\, i \Bigl\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \Bigr\} + \mathbf{e}_{\rm z} \Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}}, \tag{4.32}$$

Аналогичные вычисления выполняем для второго элемента. Выпишем решения для всех матричных элементов, просуммированных по спиновым состояниям:

$$\Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla \Bigr| k_i \Bigr\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \cdot \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}},$$
$$\Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Bigl[\mathrm{e}^{(\alpha)} \times \nabla \Bigr] \Bigr| k_i \Bigr\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \times$$
$$\times \Bigl[\mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\, i \Bigl\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \Bigr\} + \mathbf{e}_{\rm z} \Bigr] \cdot \Bigl[\mathrm{e}^{(\alpha)} \times \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}} \Bigr], \tag{4.33}$$
$$\Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \boldsymbol{\sigma} \Bigr| k_i \Bigr\rangle = \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \times$$
$$\times \Bigl[\mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\, i \Bigl\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \Bigr\} + \mathbf{e}_{\rm z} \Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}}.$$

Далее, чтобы найти матричные элементы (4.16), выполним в них суммирование по векторам поляризации. Находим сумму для первого элемента:

$$\sum_{\alpha = 1,2} \mathbf{e}^{(\alpha)} \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla \Bigr| k_i \Bigr\rangle =$$
$$= \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i}\, (\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)}) \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \nabla \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}}. \tag{4.34}$$

Для третьего элемента получим

$$\sum_{\alpha = 1,2,3} \Bigl[\mathbf{k}_{\rm ph} \times \mathbf{e}^{(\alpha)} \Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \boldsymbol{\sigma} \Bigr| k_i \Bigr\rangle = k_{\rm ph} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \times$$
$$\times (\mathbf{e}^{(2)} - \mathbf{e}^{(1)}) \cdot \Bigl[\mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\, i \Bigl\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \Bigr\} + \mathbf{e}_{\rm z} \Bigr] \cdot \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}}. \tag{4.35}$$

Ориентируем систему ортов $\mathbf{e}_{\rm x}$, $\mathbf{e}_{\rm y}$ и $\mathbf{e}_{\rm z}$ так, чтобы $\mathbf{e}_{\rm z}$ был сонаправлен с вектором $\mathbf{k}_{\rm ph}$, а $\mathbf{e}_{\rm x}$ и $\mathbf{e}_{\rm y}$ — с векторами $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$. Получим

$$\mathbf{e}_{\rm x} = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}_{\rm y} = \mathbf{e}^{(2)}. \tag{4.36}$$

Учитывая свойства ортогональности этих векторов, упрощаем (4.35) далее:

$$\sum_{\alpha = 1,2,3} \Bigl[\mathbf{k}_{\rm ph} \times \mathbf{e}^{(\alpha)} \Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \boldsymbol{\sigma} \Bigr| k_i \Bigr\rangle = k_{\rm ph} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \times$$
$$\times \Bigl[-1 + i \Bigl\{ \delta_{\mu_i, +1/2} - \delta_{\mu_i, -1/2} \Bigr\} \Bigr] \Bigl\langle k_f \Bigl| e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}}. \tag{4.37}$$

Видим, что слагаемое при $\mathbf{e}^{(3)}$ выпадает. Для второго элемента из (4.16) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1,2,3} \Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}}\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \Big[\mathrm{e}^{(\alpha)} \times \nabla \Big] \Big| \, k_i \Big\rangle \; = \; \sum_{m_f, m_i} \; \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f, *}_{l_f m_f 1/2 \mu_f} \, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \; \times \\ & \times \Big[\mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\, i \Big\{ \delta_{\mu_i, +1/2} \; - \; \delta_{\mu_i, -1/2} \Big\} + \mathbf{e}_{\rm z} \Big] \cdot \Big[\sum_{\alpha=1,2,3} \mathrm{e}^{(\alpha)} \times \Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \nabla \Big| \, k_i \Big\rangle_{\mathbf{r}} \Big]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

В Кулоновской калибровке имеем

$$\mathbf{e}_{\rm x} = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \mathbf{e}_{\rm y} = \mathbf{e}^{(2)}, \quad \mathbf{e}_{\rm z} || \mathbf{e}^{(3)}, \quad |\mathbf{e}_{\rm x}| = |\mathbf{e}_{\rm y}| = |\mathbf{e}_{\rm z}| = 1, \quad |\mathbf{e}^{(3)}| = 0. \tag{4.39}$$

С учетом этого выпишем окончательные решения для матричных элементов (4.16):

$$\begin{aligned} p_{\rm el} \quad & = \; i \sum_{m_f, m_i} \; \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f, *}_{l_f m_f 1/2 \mu_f} \, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \cdot (\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)}) \Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \; \nabla \; \Big| \, k_i \Big\rangle_{\mathbf{r}}, \\ p_{\rm mag,\,1} \quad & = \; \frac{1}{2} \sum_{m_f, m_i} \; \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f, *}_{l_f m_f 1/2 \mu_f} \, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \cdot \Big[\mathbf{e}_{\rm x} + \mathbf{e}_{\rm y}\, i \Big\{ \delta_{\mu_i, +1/2} \; - \; \delta_{\mu_i, -1/2} \Big\} + \mathbf{e}_{\rm z} \Big] \times \\ & \times \quad \Big[\sum_{\alpha=1,2} \mathrm{e}^{(\alpha)} \times \Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \nabla \Big| \, k_i \Big\rangle_{\mathbf{r}} \Big], \\ p_{\rm mag,\,2} \quad & = \; \frac{-i\,k_{\rm ph}}{2} \sum_{m_f, m_i} \; \sum_{\mu_i,\,\mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f, *}_{l_f m_f 1/2 \mu_f} \, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \; \times \\ & \times \quad \Big[-1 + i \Big\{ \delta_{\mu_i, +1/2} \; - \; \delta_{\mu_i, -1/2} \Big\} \Big] \, \Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\,\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \; \Big| \, k_i \Big\rangle_{\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

4.6 Матричные элементы по пространственным переменным

Теперь мы будем искать матричные элементы:

$$\Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \; \Big| \, k_i \Big\rangle_{\mathbf{r}} = \int \varphi^{*}_{f}(\mathbf{r}) \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \varphi_{i}(\mathbf{r}) \, \mathbf{dr}, \;\; \Big\langle k_f \Big| \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \; \Big| \, k_i \Big\rangle_{\mathbf{r}} = \int \varphi^{*}_{f}(\mathbf{r}) \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, \varphi_{i}(\mathbf{r}) \, \mathbf{dr}. \tag{4.41}$$

4.6.1 Линейная и круговая поляризации излученного фотона

Перепишем вектора *линейной* поляризации $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ через *вектора круговой поляризации* $\boldsymbol{\xi}_{\mu}$ с противоположными направлениями вращения (см. [33], (2.39), стр. 42):

$$\boldsymbol{\xi}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_{+1} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \, (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}), \quad \boldsymbol{\xi}_{0} = \mathbf{e}^{(3)}, \tag{4.42}$$

где

$$h_{\pm} = \mp \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}, \quad h_{-1} + h_{+1} = -i\sqrt{2}, \quad \sum_{\alpha=1,2} \mathbf{e}^{(\alpha),*} = h_{-1} \, \boldsymbol{\xi}^{*}_{-1} + h_{+1} \, \boldsymbol{\xi}^{*}_{+1}. \tag{4.43}$$

Имеем (в Кулоновской калибровке при $\mathbf{e}^{(3)} = 0$):

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, (\boldsymbol{\xi}_{-1} - \boldsymbol{\xi}_{+1}), \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \, (\boldsymbol{\xi}_{-1} + \boldsymbol{\xi}_{+1}), \tag{4.44}$$

$$\sum_{\mu = \pm 1} \boldsymbol{\xi}^{*}_{\mu} \cdot \boldsymbol{\xi}_{\mu} = \frac{1}{2} \, (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}) \, (\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)})^{*} + \frac{1}{2} \, (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)}) \, (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)})^{*} = 2. \tag{4.45}$$

Из определения (4.42) получим

$$\boldsymbol{\xi}^*_{-1} = -\boldsymbol{\xi}_{+1}, \quad \boldsymbol{\xi}^*_{+1} = -\boldsymbol{\xi}_{-1}. \tag{4.46}$$

Отсюда находим векторные произведения векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$:

$$\begin{aligned}
\Big[\boldsymbol{\xi}_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}\Big] &= \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}) \times \frac{-1}{\sqrt{2}}\,(\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)})\Big] = \frac{-1}{2}\Big[(\mathbf{e}^{(1)} - i\mathbf{e}^{(2)}) \times (\mathbf{e}^{(1)} + i\mathbf{e}^{(2)})\Big] = \\
&= -\frac{1}{2}\Big\{i\,[\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}] - i\,[\mathbf{e}^{(2)} \times \mathbf{e}^{(1)}]\Big\} = -i\,[\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}] = -i\,\mathbf{e}_{\mathrm{z}},
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
\Big[\boldsymbol{\xi}^*_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}\Big] &= -\Big[\boldsymbol{\xi}_{+1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}\Big] = 0, & \Big[\boldsymbol{\xi}^*_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{-1}\Big] &= -\Big[\boldsymbol{\xi}_{+1} \times \boldsymbol{\xi}_{-1}\Big] = i\,\mathbf{e}_{\mathrm{z}}, \\
\Big[\boldsymbol{\xi}^*_{+1} \times \boldsymbol{\xi}_{-1}\Big] &= -\Big[\boldsymbol{\xi}_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{-1}\Big] = 0, & \Big[\boldsymbol{\xi}^*_{+1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}\Big] &= -\Big[\boldsymbol{\xi}_{-1} \times \boldsymbol{\xi}_{+1}\Big] = -i\,\mathbf{e}_{\mathrm{z}}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

4.6.2 Разложение векторного потенциала A по мультиполям

Разложим векторный потенциал $\mathbf{A}$ электромагнитного поля по мультиполям. Согласно [33] (см. (2.106) на стр. 58), в сферически симметричном приближении имеем

$$\boldsymbol{\xi}_\mu\, e^{i\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}\mathbf{r}} = \mu\sqrt{2\pi}\sum_{l_{\mathrm{ph}}=1}(2l_{\mathrm{ph}}+1)^{1/2}\, i^{l_{\mathrm{ph}}}\cdot\Big[\mathbf{A}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},M) + i\mu\,\mathbf{A}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},E)\Big], \tag{4.49}$$

где (см. [33], (2.73) на стр. 49, (2.80) на стр. 51)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},M) &= j_{l_{\mathrm{ph}}}(k_{\mathrm{ph}}r)\,\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}}l_{\mathrm{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}), \\
\mathbf{A}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},E) &= \sqrt{\frac{l_{\mathrm{ph}}+1}{2l_{\mathrm{ph}}+1}}\,j_{l_{\mathrm{ph}}-1}(k_{\mathrm{ph}}r)\,\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}}l_{\mathrm{ph}}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}) - \sqrt{\frac{l_{\mathrm{ph}}}{2l_{\mathrm{ph}}+1}}\,j_{l_{\mathrm{ph}}+1}(k_{\mathrm{ph}}r)\,\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}}l_{\mathrm{ph}}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Здесь $\mathbf{A}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},M)$ и $\mathbf{A}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},E)$ — *магнитные* и *электрические мультиполи*, $j_{l_{\mathrm{ph}}}(k_{\mathrm{ph}}r)$ — сферические функции Бесселя порядка l_{ph} (см. Приложение A.3), $\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}}l'_{\mathrm{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})$ — векторные сферические гармоники, см. (1.61)). Выражение (4.49) является решением волнового уравнения электромагнитного поля в виде плоской волны, которое представлено в виде суммы электрических и магнитных мультиполей (например, см. стр. 83–92, п. 2.2 в [89]). Поэтому отдельные мультипольные слагаемые в (4.49) являются решениями этого волнового уравнения для заданных чисел j_{ph} и l_{ph} (j_{ph} — квантовое число, определяющее собственное значение оператора полного момента фотона, тогда как $l_{\mathrm{ph}} = j_{\mathrm{ph}}-1, j_{\mathrm{ph}}, j_{\mathrm{ph}}+1$ связано с оператором орбитального момента, но определяет собственные значения четности фотона и поэтому также является квантовым числом).

Мы ориентировали систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль вектора $\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}$ (см. [33], (2.105) на стр. 57). Согласно [33] (см. стр. 45), функции $\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}}l'_{\mathrm{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})$ имеют следующий вид ($\boldsymbol{\xi}_0 = 0$):

$$\mathbf{T}_{j_{\mathrm{ph}}l_{\mathrm{ph}},m}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}) = \sum_{\mu=\pm1}(l_{\mathrm{ph}},1,j_{\mathrm{ph}}\,|\,m-\mu,\mu,m)\;Y_{l_{\mathrm{ph}},m-\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\;\xi_\mu, \tag{4.51}$$

где $(l,1,j\,|\,m-\mu,\mu,m)$ — коэффициенты Клебша-Гордона (см. Приложение A.4). Из (4.49) и (4.45) можно получить такую формулу (при $\mathbf{e}^{(3)} = 0$):

$$\begin{aligned}
e^{-i\mathbf{k}_{\mathrm{ph}}\mathbf{r}} &= \frac{1}{2}\sum_{\mu=\pm1}\boldsymbol{\xi}^*_\mu\,\boldsymbol{\xi}_\mu\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\mu=\pm1}\boldsymbol{\xi}_\mu\,\mu\sqrt{2\pi}\sum_{l_{\mathrm{ph}}=1}(2l_{\mathrm{ph}}+1)^{1/2}\,(-i)^{l_{\mathrm{ph}}}\cdot\Big[\mathbf{A}^*_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},M) - i\mu\,\mathbf{A}^*_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r},E)\Big].
\end{aligned} \tag{4.52}$$

4.6.3 Сферически симметричный распад

Используя разложение (4.52), преобразуем матричные элементы (4.41) далее. В начале рассмотрим первый матричный элемент:

$$\begin{aligned}
& \Bigl\langle k_f \Bigl| \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}} = \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \varphi_i(\mathbf{r}) \, \mathbf{dr} = \\
= \; & \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \, \mu \, \sqrt{2\pi} \sum_{l_{\rm ph}=1} (2l_{\rm ph}+1)^{1/2} \, (-i)^{l_{\rm ph}} \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \Bigl[\mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \, \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \Bigr] \varphi_i(\mathbf{r}) \, \mathbf{dr} = \\
= \; & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\rm ph}=1} (2l_{\rm ph}+1)^{1/2} \, (-i)^{l_{\rm ph}} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \, \mu \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, \varphi_i(\mathbf{r}) \, \Bigl[\mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \, \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \Bigr] \, \mathbf{dr}
\end{aligned}$$

или

$$\Bigl\langle k_f \Bigl| \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \, \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\rm ph}=1} (-i)^{l_{\rm ph}} \sqrt{2l_{\rm ph}+1} \sum_{\mu=\pm 1} \Bigl[\mu \, \tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^M - i \, \tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^E \Bigr], \tag{4.53}$$

где

$$\tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^M = \boldsymbol{\xi}_\mu \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, \varphi_i(\mathbf{r}) \; \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, M) \, \mathbf{dr}, \quad \tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^E = \boldsymbol{\xi}_\mu \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, \varphi_i(\mathbf{r}) \; \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \, \mathbf{dr}. \tag{4.54}$$

Для второго матричного элемента получим

$$\begin{aligned}
& \Bigl\langle k_f \Bigl| \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}} = \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, e^{-i\mathbf{k}_{\rm ph}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, \varphi_i(\mathbf{r}) \, \mathbf{dr} = \\
= & \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \, \mu \, \sqrt{2\pi} \sum_{l_{\rm ph}=1} (2l_{\rm ph}+1)^{1/2} (-i)^{l_{\rm ph}} \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \Bigl[\mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \, \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \Bigr] \Bigl(\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \Bigr) \mathbf{dr} = \\
= & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\rm ph}=1} (2l_{\rm ph}+1)^{1/2} \, (-i)^{l_{\rm ph}} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \, \mu \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, \Bigl[\mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, M) - i\mu \, \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \Bigr] \, \Bigl(\frac{\partial \, \varphi_i(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \Bigr) \, \mathbf{dr}
\end{aligned}$$

или

$$\Bigl\langle k_f \Bigl| \, e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, \Bigr| k_i \Bigr\rangle_{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\rm ph}=1} (-i)^{l_{\rm ph}} \sqrt{2l_{\rm ph}+1} \sum_{\mu=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_\mu \, \mu \, \times \Bigl[p_{l_{\rm ph}\mu}^M - i\mu \, p_{l_{\rm ph}\mu}^E \Bigr], \tag{4.55}$$

где

$$\begin{aligned}
p_{l_{\rm ph}\mu}^M & = \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, \Bigl(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, \varphi_i(\mathbf{r}) \Bigr) \, \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, M) \, \mathbf{dr}, \\
p_{l_{\rm ph}\mu}^E & = \int \varphi_f^*(\mathbf{r}) \, \Bigl(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \, \varphi_i(\mathbf{r}) \Bigr) \, \mathbf{A}_{l_{\rm ph}\mu}^*(\mathbf{r}, E) \, \mathbf{dr}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Теперь упростим матричные элементы из (4.40). Используя формулы (4.53)–(4.56), для первого элемента находим

$$\begin{aligned}
& p_{\rm el} = i \sum_{m_i, m_f} \; \sum_{\mu_i, \, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^* \times \\
\times \; & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\rm ph}} (-i)^{l_{\rm ph}} \sqrt{2l_{\rm ph}+1} \sum_{\mu'=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \, \mu' \, \times \Bigl[p_{l_{\rm ph}\mu'}^M - i\mu' \, p_{l_{\rm ph}\mu'}^E \Bigr] = \\
= \; & i \sum_{m_i, m_f} \; \sum_{\mu_i, \, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\rm ph}} (-i)^{l_{\rm ph}} \sqrt{2l_{\rm ph}+1} \, \mu \, \Bigl[p_{l_{\rm ph}\mu}^M - i\mu \, p_{l_{\rm ph}\mu}^E \Bigr] = \\
= \; & i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \; \sum_{\mu_i, \, \mu_f = \pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f, *} \, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{l_{\rm ph}} (-i)^{l_{\rm ph}} \sqrt{2l_{\rm ph}+1} \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \, \mu \, \Bigl[p_{l_{\rm ph}\mu}^M - i\mu \, p_{l_{\rm ph}\mu}^E \Bigr] =
\end{aligned}$$

или

$$p_{\mathrm{el}} = i\,\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \sum_{l_{\mathrm{ph}}=1} (-i)^{l_{\mathrm{ph}}} \sqrt{2l_{\mathrm{ph}}+1}\ \cdot \Big[p_{l_{\mathrm{ph}}}^{M} - i\, p_{l_{\mathrm{ph}}}^{E}\Big], \tag{4.57}$$

где

$$p_{l_{\mathrm{ph}}}^{M} = \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu\, \mu\, p_{l_{\mathrm{ph}}\mu}^{M}, \qquad p_{l_{\mathrm{ph}}}^{E} = \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu\, p_{l_{\mathrm{ph}}\mu}^{E}. \tag{4.58}$$

Для третьего матричного элемента получим

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{mag},\,2} \ &= \ \frac{-i\,k_{\mathrm{ph}}}{2} \sum_{m_f, m_i} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \Big[-1 + i\,\Big\{\delta_{\mu_i,+1/2} \ - \ \delta_{\mu_i,-1/2}\Big\}\Big] \times \\ &\times \ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l_{\mathrm{ph}}=1} (-i)^{l_{\mathrm{ph}}} \sqrt{2l_{\mathrm{ph}}+1} \sum_{\mu=\pm 1} \Big[\mu\, \tilde{p}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}^{M} - i\, \tilde{p}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}^{E}\Big], \end{aligned} \tag{4.59}$$

где

$$\tilde{p}_{l_{\mathrm{ph}}}^{M} = \sum_{\mu=\pm 1} \mu\, \tilde{p}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}^{M}, \qquad \tilde{p}_{l_{\mathrm{ph}}}^{M} = \sum_{\mu=\pm 1} \tilde{p}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}^{E}. \tag{4.60}$$

Теперь рассмотрим второй матричный элемент. Из (4.40) и (4.53) запишем

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{mag},\,1} \ &= \ \frac{1}{2} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \times \\ &\times \ \Big[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\boldsymbol{\xi}_{-1} - \boldsymbol{\xi}_{+1}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\,(\boldsymbol{\xi}_{-1} + \boldsymbol{\xi}_{+1})\, i\,\Big\{\delta_{\mu_i,+1/2} \ - \ \delta_{\mu_i,-1/2}\Big\} + \mathbf{e}_{\mathrm{z}}\Big] \times \\ &\times \ \Big[\sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \boldsymbol{\xi}_\mu^{*} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l} (-i)^{l} \sqrt{2l+1} \sum_{\mu'=\pm 1} \boldsymbol{\xi}_{\mu'}\, \mu' \ \times \Big[p_{l\mu'}^{M} - i\mu'\, p_{l\mu'}^{E}\Big]\Big]. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Из найденных ранее свойств (4.48) можно видеть, что векторные произведения векторов $\boldsymbol{\xi}\pm 1$ дают только вектор $\mathbf{e}_{\mathrm{z}}$, умноженный на скаляр. Преобразуем (4.61) далее:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{mag},\,1} \ &= \ \frac{1}{2} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{z}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{l} (-i)^{l} \sqrt{2l+1} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\mu'=\pm 1} h_\mu\, \mu' \Big[\boldsymbol{\xi}_\mu^{*} \times \boldsymbol{\xi}_{\mu'}\Big] \cdot \Big[p_{l\mu'}^{M} - i\mu'\, p_{l\mu'}^{E}\Big] \ = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{l} (-i)^{l} \sqrt{2l+1}\, \mathbf{e}_{\mathrm{z}} \sum_{\mu=\pm 1} \Big[\boldsymbol{\xi}_\mu^{*} \times \boldsymbol{\xi}_\mu\Big] h_\mu \Big[\mu\, p_{l\mu}^{M} - i\, p_{l\mu}^{E}\Big] \ = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*} C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{l} (-i)^{l} \sqrt{2l+1}\mathbf{e}_{\mathrm{z}} \sum_{\mu=\pm 1} -i\mu\, \mathbf{e}_{\mathrm{z}} h_\mu \Big[\mu\, p_{l\mu}^{M} - i\, p_{l\mu}^{E}\Big] \ = \\ &= \ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{l} (-i)^{l} \sqrt{2l+1} \ \cdot \sum_{\mu=\pm 1} h_\mu \Big[i\, p_{l\mu}^{M} + \mu\, p_{l\mu}^{E}\Big] \ = \\ &= \ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m_i, m_f} \sum_{\mu_i,\,\mu_f=\pm 1/2} C_{l_f m_f 1/2 \mu_f}^{j_f M_f,\,*}\, C_{l_i m_i 1/2 \mu_i}^{j_i M_i} \sum_{l} (-i)^{l} \sqrt{2l+1} \ \cdot \sum_{\mu=\pm 1} i\, h_\mu\, \mu \Big[\mu\, p_{l\mu}^{M} - i\, p_{l\mu}^{E}\Big]. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Выпишем решения:

$$
\begin{aligned}
p_{\mathrm{el}} & = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \sum_{l_{\mathrm{ph}}} (-i)^{l_{\mathrm{ph}}}\, \sqrt{2l_{\mathrm{ph}}+1}\, \sum_{m_i, m_f}\, \sum_{\mu_i,\, \mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f} C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \Bigl[i\, p^{M m_i m_f}_{l_{\mathrm{ph}}} + p^{E m_i m_f}_{l_{\mathrm{ph}}} \Bigr], \\
p_{\mathrm{mag},1} & = -\,\frac{1}{2}\, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \sum_{l_{\mathrm{ph}}} (-i)^{l_{\mathrm{ph}}}\, \sqrt{2l_{\mathrm{ph}}+1} \cdot \sum_{m_i, m_f}\, \sum_{\mu_i,\, \mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \times \\
& \times \sum_{\mu = \pm 1} h_{\mu}\, \Bigl[i\, p^{M m_i m_f}_{l_{\mathrm{ph}} \mu} + \mu\, p^{E m_i m_f}_{l_{\mathrm{ph}} \mu} \Bigr], \\
p_{\mathrm{mag},2} & = -\, \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, k\, \sum_{l_{\mathrm{ph}}} (-i)^{l_{\mathrm{ph}}}\, \sqrt{2l_{\mathrm{ph}}+1} \cdot \sum_{m_i, m_f}\, \sum_{\mu_i,\, \mu_f = \pm 1/2} C^{j_f M_f,\,*}_{l_f m_f 1/2 \mu_f}\, C^{j_i M_i}_{l_i m_i 1/2 \mu_i} \times \\
& \times \Bigl[-1 + i \Bigl\{ \delta_{\mu_i, +1/2} \;-\; \delta_{\mu_i, -1/2} \Bigr\} \Bigr] \cdot \Bigl[i\, \tilde{p}^{M}_{l_{\mathrm{ph}}} + \tilde{p}^{E}_{l_{\mathrm{ph}}} \Bigr].
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

4.6.4 Расчет компонент $p^M_{l_{\mathrm{ph}}\mu}$ и $p^E_{l_{\mathrm{ph}}\mu}$ и $\tilde{p}^M_{l_{\mathrm{ph}}\mu}$, $\tilde{p}^E_{l_{\mathrm{ph}}\mu}$: случай $l_i = 0$

В сферически симметричной задаче волновые функции распадающейся системы в начальном и конечном состояниях можно записать в виде произведения радиальной и угловой компонент. В начале мы проанализируем случай $l_i = 0$. Тогда:

$$
\varphi_i(\mathbf{r}) \;=\; R_i(r)\, Y_{00}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}}). \tag{4.64}
$$

Используя *градиентную формулу* (см. [33], (2.56) на стр. 46)

$$
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, f(r)\, Y_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}) = \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \Bigl(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \Bigr) \mathbf{T}_{ll-1,m}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}) - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \Bigl(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \Bigr) \mathbf{T}_{ll+1,m}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}) \tag{4.65}
$$

и учитывая (4.64), получим

$$
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \varphi_i(\mathbf{r}) = -\, \frac{dR_i(r)}{dr}\; \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}}). \tag{4.66}
$$

Используя это соотношение и (4.50), преобразуем выражения (4.56) для магнитной и электрической компонент далее:

$$
\begin{aligned}
p^M_{l_{\mathrm{ph}}\mu} & = \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 \varphi^*_f(\mathbf{r})\, \Bigl(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r}) \Bigr)\, \mathbf{A}^*_{l_{\mathrm{ph}}\mu}(\mathbf{r}, M) = \\
& = \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 R^*_f(r)\, Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}})\, \Bigl(-\frac{dR_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}}) \Bigr)\, j_{l_{\mathrm{ph}}}(kr)\, \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} l_{\mathrm{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}}) = \\
& = -\int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r) \frac{dR_i(r)}{dr} j_{l_{\mathrm{ph}}}(kr)\, r^2 dr\; \cdot \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}})\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}})\, \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} l_{\mathrm{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p^E_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 \varphi^*_f(\mathbf{r}) \Big(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \varphi_i(\mathbf{r})\Big) \mathbf{A}^*_{l_{\rm ph}\mu}(\mathbf{r}, E) \;= \\
&= \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2\, R^*_f(r)\, Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \left(-\frac{dR_i(r)}{dr} \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\right) \times \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}} j_{l_{\rm ph}-1}(kr)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) - \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}} j_{l_{\rm ph}+1}(kr)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) \right\} \;= \\
&= -\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r) \frac{dR_i(r)}{dr} j_{l_{\rm ph}-1}(kr)\, r^2 dr \cdot \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega - \\
&+ \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r) \frac{dR_i(r)}{dr} j_{l_{\rm ph}+1}(kr)\, r^2 dr \cdot \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
p^M_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; -\int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r) \frac{dR_i(r)}{dr} j_{l_{\rm ph}}(kr)\, r^2 dr \cdot \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph},\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega, \\
p^E_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; -\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r) \frac{dR_i(r)}{dr} j_{l_{\rm ph}-1}(kr)\, r^2 dr \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega - \\
&+ \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r) \frac{dR_i(r)}{dr} j_{l_{\rm ph}+1}(kr)\, r^2 dr \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Введя следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
J\,(l_f, n) \;&=\; \int\limits_0^{+\infty} \frac{dR_i(r)}{dr}\, R^*_f(l, r)\, j_n(kr)\, r^2 dr, \\
I\,(l_f, l_{\rm ph}, n, \mu) \;&=\; \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} n,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega,
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

выражения (4.67) можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
p^M_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; -\, I\,(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}, \mu) \cdot J\,(l_f, l_{\rm ph}), \\
p^E_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; -\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\; I\,(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}-1, \mu) \cdot J\,(l_f, l_{\rm ph}-1) + \\
&\quad + \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\; I\,(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}+1, \mu) \cdot J\,(l_f, l_{\rm ph}+1).
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

Аналогично из (4.54) находим компоненты $\tilde{p}^M_{l_{\rm ph}\mu}$ и $\tilde{p}^E_{l_{\rm ph}\mu}$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}^M_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r)\, R_i(r)\, j_{l_{\rm ph}}(kr)\, r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph},\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega, \\
\tilde{p}^E_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r)\, R_i(r)\, j_{l_{\rm ph}-1}(kr)\, r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega - \\
&\quad - \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r)\, R_i(r)\, j_{l_{\rm ph}+1}(kr)\, r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega.
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

Введя новые обозначения для интегралов:

$$\begin{aligned}
\tilde{J}\,(l_f, n) \;&=\; \int\limits_0^{+\infty} R_i(r)\, R_f^*(l,r)\, j_n(kr)\, r^2 dr, \\
\tilde{I}\,(l_f, l_{\rm ph}, n, \mu) \;&=\; \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} n, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.71}$$

перепишем (4.70) так:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^M_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; \tilde{I}\,(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}, \mu) \cdot \tilde{J}\,(l_f, l_{\rm ph}), \\
\tilde{p}^E_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\, \tilde{I}\,(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}-1, \mu) \cdot \tilde{J}\,(l_f, l_{\rm ph}-1) - \\
&\quad - \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\, \tilde{I}\,(l_f, l_{\rm ph}, l_{\rm ph}+1, \mu) \cdot \tilde{J}\,(l_f, l_{\rm ph}+1).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

4.6.5 Расчет компонент $p^M_{l_{\rm ph}\mu}$, $p^E_{l_{\rm ph}\mu}$ и $\tilde{p}^M_{l_{\rm ph}\mu}$, $\tilde{p}^E_{l_{\rm ph}\mu}$: случай $l_i \ne 0$

Теперь рассмотрим случай, когда распадающееся ядро в начальном состоянии имеет $l_i \ne 0$. Используя градиентную формулу, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, \varphi_i(\mathbf{r}) \;&=\; \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \Bigl\{ R_i(r)\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) \Bigr\} = \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r}\, R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) - \\
&- \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r}\, R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}).
\end{aligned} \tag{4.73}$$

С помощью этой формулы магнитная компонента $p^M_{l\mu}$ из (4.56) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
p^M_{l\mu} \;&=\; \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 R^*_f(r)\, Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \left\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r}\, R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) - \right. \\
&- \left. \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r}\, R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) \right\} j_{l_{\rm ph}}(kr)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}).
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Для электрической компоненты $p^E_{l_{\rm ph}\mu}$ из (4.56) получим

$$\begin{aligned}
p^E_{l_{\rm ph}\mu} \;&=\; \int\limits_0^{+\infty} dr \int d\Omega\, r^2 R^*_f(r)\, Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r}) \cdot \left\{ \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} + \frac{l_i+1}{r}\, R_i(r) \right) \times \right. \\
&\times \left. \mathbf{T}_{l_i l_i-1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) \;-\; \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}} \left(\frac{dR_i(r)}{dr} - \frac{l_i}{r}\, R_i(r) \right) \mathbf{T}_{l_i l_i+1, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r}) \right\} \times \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}} j_{l_{\rm ph}-1}(kr)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}-1, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) - \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}} j_{l_{\rm ph}+1}(kr)\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_{\rm ph}+1, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph}) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
J_1(l_i, l_f, n) \quad &= \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{dR_i(r, l_i)}{dr}\, R^*_f(l_f, r)\, j_n(kr)\, r^2 dr, \\
J_2(l_i, l_f, n) \quad &= \quad \int\limits_0^{+\infty} R_i(r, l_i)\, R^*_f(l_f, r)\, j_n(kr)\, r\, dr, \\
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, \mu) \quad &= \quad \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i\, l_1,\, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph}\, l_{\rm ph},\, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu) \quad &= \quad \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i l_1,\, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_2,\, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Тогда выражения (4.74) и (4.75) можно записать так:

$$\begin{aligned} p^{M}_{l_{\mathrm{ph},\mu}} \; = \; & \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}}\, I_M(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_i-1, \mu)\cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}) + (l_i+1)\cdot J_2(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}) \Bigr\} - \\ - \; & \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}}\, I_M(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_i+1, \mu)\cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}) - l_i\cdot J_2(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}) \Bigr\}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned} p^{E}_{l_{\mathrm{ph},\mu}} \; = \; & \sqrt{\frac{1}{(2l_i+1)(2l_{\mathrm{ph}}+1)}}\cdot \Bigl\{ \sqrt{l_i\,(l_{\mathrm{ph}}+1)}\cdot I_E(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_i-1, l_{\mathrm{ph}}-1, \mu)\times \\ & \times \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}-1) \; + (l_i+1)\cdot J_2(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}-1) \Bigr\} - \\ & - \sqrt{l_i\, l_{\mathrm{ph}}}\cdot I_E(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_i-1, l_{\mathrm{ph}}+1, \mu)\cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}+1) \; + (l_i+1)\cdot J_2(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}+1) \Bigr\} + \\ & + \sqrt{(l_i+1)(l_{\mathrm{ph}}+1)}\cdot I_E(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_i+1, l_{\mathrm{ph}}-1, \mu)\cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}-1) - l_i\cdot J_2(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}-1) \Bigr\} - \\ & - \sqrt{(l_i+1)\, l_{\mathrm{ph}}}\cdot I_E(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_i+1, l_{\mathrm{ph}}+1, \mu)\cdot \Bigl\{ J_1(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}+1) \; - l_i\cdot J_2(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}+1) \Bigr\} \Bigr\}. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Аналогично находим компоненты $\tilde{p}^{M}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}$ и $\tilde{p}^{E}_{l_{\mathrm{ph}}\mu}$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{M}_{l_{\mathrm{ph}}\mu} \; = \; & \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r)\, R_i(r)\, j_{l_{\mathrm{ph}}}(kr)\, r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}})\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}})\, \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} l_{\mathrm{ph}},\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega, \\ \tilde{p}^{E}_{l_{\mathrm{ph}}\mu} \; = \; & \sqrt{\frac{l_{\mathrm{ph}}+1}{2l_{\mathrm{ph}}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r)\, R_i(r)\, j_{l_{\mathrm{ph}}-1}(kr) r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}}) Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}}) \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} l_{\mathrm{ph}}-1,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega - \\ & - \sqrt{\frac{l_{\mathrm{ph}}}{2l_{\mathrm{ph}}+1}} \int\limits_0^{+\infty} R^*_f(r)\, R_i(r)\, j_{l_{\mathrm{ph}}+1}(kr)\, r^2 dr \cdot \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}})\, Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}})\, \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} l_{\mathrm{ph}}+1,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega. \end{aligned} \tag{4.79}$$

Введя обозначения для интегралов:

$$\begin{aligned} \tilde{J}\,(l_i, l_f, n) \; = \; & \int\limits_0^{+\infty} R_i(r)\, R^*_f(l, r)\, j_n(kr)\, r^2 dr, \\ \tilde{I}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, n, \mu) \; = \; & \boldsymbol{\xi}_\mu \int Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}})\, Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}})\, \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega, \end{aligned} \tag{4.80}$$

перепишем (4.79) так:

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{M}_{l_{\mathrm{ph}}\mu} \; = \; & \tilde{I}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_{\mathrm{ph}}, \mu)\cdot \tilde{J}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}), \\ \tilde{p}^{E}_{l_{\mathrm{ph}}\mu} \; = \; & \sqrt{\frac{l_{\mathrm{ph}}+1}{2l_{\mathrm{ph}}+1}}\, \tilde{I}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_{\mathrm{ph}}-1, \mu)\cdot \tilde{J}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}-1) - \\ - \; & \sqrt{\frac{l_{\mathrm{ph}}}{2l_{\mathrm{ph}}+1}}\, \tilde{I}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}, l_{\mathrm{ph}}+1, \mu)\cdot \tilde{J}\,(l_i, l_f, l_{\mathrm{ph}}+1). \end{aligned} \tag{4.81}$$

Исходя из физического смысла векторов $\mathbf{n}^i_{\mathrm{r}}$, $\mathbf{n}^f_{\mathrm{r}}$ и $\mathbf{n}_{\mathrm{ph}}$, мы получаем следующее соотношение между ними (см. п. 1.9.3):

$$\mathbf{n}_{\mathrm{ph}} = \mathbf{n}^i_{\mathrm{r}} = \mathbf{n}^f_{\mathrm{r}} = \mathbf{n}_{\mathrm{r}}. \tag{4.82}$$

В выбранной ранее ориентации системы координат ее ось z сонаправлена с вектором излучения фотона $\mathbf{k}$. Поэтому угол θ (определяемый вектором $\mathbf{n_r}$) как раз и оказывается расположенным между направлениями движения протона (с учетом туннелирования) и направлением излучения фотона. Используя соотношение (4.82), далее мы вычисляем угловые интегралы (см. Приложения B.1–B.3).

4.6.6 Дифференциальные матричные элементы излучения

Для описания тормозного излучения фотонов в зависимости от угла θ, которое сопровождает протонный распад, мы введем следующие дифференциальные матричные элементы:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_{l_{\rm ph}\mu}^{M}}{\sin\theta\,d\theta} \; = \; & \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}}\,\frac{d\,I_M\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_i-1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\Bigl\{J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph})+(l_i+1)\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph})\Bigr\} - \\
- \; & \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}}\,\frac{d\,I_M\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_i+1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\Bigl\{J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph})-l_i\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph})\Bigr\},
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_{l_{\rm ph}\mu}^{E}}{\sin\theta\,d\theta} = & \sqrt{\frac{1}{(2l_i+1)(2l_{\rm ph}+1)}}\cdot\Bigl\{\sqrt{l_i\,(l_{\rm ph}+1)}\cdot\frac{d\,I_E\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_i-1,l_{\rm ph}-1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\times \\
& \times\Bigl\{J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\;+(l_i+1)\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\Bigr\} - \\
& -\sqrt{l_i\,l_{\rm ph}}\cdot\frac{d\,I_E\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_i-1,l_{\rm ph}+1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\Bigl\{J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\;+(l_i+1)\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\Bigr\} + \\
& +\sqrt{(l_i+1)(l_{\rm ph}+1)}\cdot\frac{dI_E\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_i+1,l_{\rm ph}-1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\Bigl\{J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)-l_i\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\Bigr\} - \\
& -\sqrt{(l_i+1)\,l_{\rm ph}}\cdot\frac{d\,I_E\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_i+1,l_{\rm ph}+1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\Bigl\{J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\;-l_i\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\Bigr\}\Bigr\}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^{M}}{\sin\theta\,d\theta} \; = \; & \frac{d\,\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph},\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\tilde{J}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph}), \\
\frac{d\,\tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^{E}}{\sin\theta\,d\theta} \; = \; & \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\frac{d\,\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}-1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\tilde{J}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1) - \\
- \; & \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\frac{d\,\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}+1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot\tilde{J}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1).
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Можно видеть, что интегрирование так определенных функций по углу θ с пределами от 0 до π дает полные матричные элементы $p_{l_{\rm ph}\mu}^{M}$ и $p_{l_{\rm ph}\mu}^{E}$, определенные в (4.77) и (4.78), и матричные элементы $\tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^{M}$ и $\tilde{p}_{l_{\rm ph}\mu}^{E}$, определенные в (4.81).

При $l_i = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p_{l_{\rm ph}\mu}^{M}}{\sin\theta\,d\theta} \; = \; & -\frac{d\,I\,(l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph},\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot J\,(l_f,l_{\rm ph}) = J\,(l_f,l_{\rm ph})\sum_{\mu'=\pm1} C_{l_f l_{\rm ph} l_{\rm ph}}^{\mu\mu'} f_{l_f l_{\rm ph}}^{\mu\mu'}(\theta), \\
\frac{d\,p_{l_{\rm ph},\mu}^{E}}{\sin\theta\,d\theta} \; = \; & -\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\cdot\frac{d\,I\,(l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}-1,\mu)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot J\,(l_f,l_{\rm ph}-1) + \\
+ \; & \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\cdot\frac{d\,I\,(l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}+1)}{\sin\theta\,d\theta}\cdot J\,(l_f,l_{\rm ph}+1) = \\
= \; & -\sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\,J\,(l_f,l_{\rm ph}-1)\sum_{\mu'=\pm1} C_{l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}-1}^{\mu\mu'}\,f_{l_f,l_{\rm ph}-1}^{\mu\mu'}(\theta) + \\
+ \; & \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\,J\,(l_f,l_{\rm ph}+1)\sum_{\mu'=\pm1} C_{l_f,l_{\rm ph},l_{\rm ph}+1}^{\mu\mu'}\,f_{l_f,l_{\rm ph}+1}^{\mu\mu'}(\theta).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

4.7 Угловая вероятность тормозного излучения фотонов с импульсом $\mathbf{k}_{\rm ph}$

Для определения углового тормозного излучения фотонов при протонном распаде мы воспользуемся логикой, ранее описанной для задачи α-распада. Итак, согласно (1.123), мы определим *дифференциальные относительную и абсолютную вероятности* так:

$$\frac{d^2W(\theta_f)}{dw_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} = \frac{Z_{\rm eff}^2\, \hbar\, e^2}{2\pi\, c^3}\, \frac{w_{\rm ph}}{m^2}\, \Bigl\{p\,(k_i, k_f) \frac{d\, p^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d\cos\theta_f} + {\rm c.\,c.}\Bigr\}, \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\, P\,(\theta_f)}{dw_{\rm ph}} &= \frac{d^2\, W\,(\theta_f)}{dw_{\rm ph}\; d\cos\theta_f} \cdot \frac{E_i}{\hbar\, c^2\, k_i} = \\
&= \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{\rm ph}\, E_i}{m^2\, k_i}\, \Bigl\{p\,(k_i, k_f) \frac{d\, p^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d\, \cos\theta_f} + {\rm c.\,c.}\Bigr\},
\end{aligned} \tag{4.88}$$

где c. c.— обозначение комплексного сопряжения. На основе формулы (4.15) распишем (4.88), разделив разные компоненты излучения:

$$\frac{d\, P(\theta_f)}{dw_{\rm ph}} = \frac{d\, P_{\rm el}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} + \frac{d\, P_{\rm mag,1}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} + \frac{d\, P_{\rm mag,2}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} + \frac{d\, P_{\rm interference}(\theta_f)}{w_{\rm ph}}, \tag{4.89}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{d\, P_{\rm el}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{\rm ph}\, E_i}{m^2\, k_i}\, \Bigl\{p_{\rm el}\,(k_i, k_f)\, \frac{d\, p_{\rm el}^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d\, \cos\theta_f} + {\rm c.\,c.}\Bigr\}, \\
\frac{d\, P_{\rm mag,1}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{\rm ph}\, E_i}{m^2\, k_i}\, \Bigl\{p_{\rm mag,1}\,(k_i, k_f)\, \frac{d\, p_{\rm mag,1}^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d\, \cos\theta_f} + {\rm c.\,c.}\Bigr\}, \\
\frac{d\, P_{\rm mag,2}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{\rm ph}\, E_i}{m^2\, k_i}\, \Bigl\{p_{\rm mag,2}\,(k_i, k_f)\, \frac{d\, p_{\rm mag,2}^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d\, \cos\theta_f} + {\rm c.\,c.}\Bigr\}, \\
\frac{d\, P_{\rm interference}(\theta_f)}{w_{\rm ph}} &= \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{\rm ph}\, E_i}{m^2\, k_i}\, \Bigl\{p_{\rm el}\,(k_i, k_f)\, \frac{d\,[p_{\rm mag,1}^*(k_i, k_f, \theta_f) + p_{\rm mag,2}^*(k_i, k_f, \theta_f)]}{d\, \cos\theta_f} + \\
&+ \; p_{\rm mag,1}\,(k_i, k_f)\, \frac{d\,[p_{\rm el}^*(k_i, k_f, \theta_f) + p_{\rm mag,2}^*(k_i, k_f, \theta_f)]}{d\, \cos\theta_f} + \\
&+ \; p_{\rm mag,2}\,(k_i, k_f)\, \frac{d\,[p_{\rm el}^*(k_i, k_f, \theta_f) + p_{\rm mag,1}^*(k_i, k_f, \theta_f)]}{d\, \cos\theta_f} + {\rm c.\,c.}\Bigr\}.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Назовем $d\, P_{\rm el}$ *электрической компонентой ТИ* (или электрическим ТИ), $d\, P_{\rm mag,1}$ — *магнитной компонентой ТИ* (или магнитным ТИ), $d\, P_{\rm mag,2}$ — *коррекцией магнитной компоненты ТИ* (или коррекцией магнитного ТИ), $d\, P_{\rm interference}$ — *интерференционной компонентой ТИ*. Иногда переменные φ_f и θ_f в скобках этих функций будем опускать.

Для описания тормозного излучения, которое сопровождает столкновения протонов на ядрах, мы будем рассматривать нормированные сечения

$$\frac{d^2\, \sigma}{dw_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} = N_0\, w_{\rm ph} \cdot \Bigl\{p\,(k_i, k_f)\, \frac{d\, p^*(k_i, k_f, \theta_f)}{d\, \cos\theta_f} \; + \; {\rm c.\,c.}\Bigr\}, \tag{4.91}$$

где N_0 — нормирующий множитель (определяемый через нормировку расчетной кривой полного спектра излучения на одну точку экспериментальных данных) и при определении матричных элементов мы будем использовать граничное условие для упругого рассеяния для протон-ядерной волновой функции в состоянии до излучения фотона.

4.8 Результаты

В начале мы рассмотрим, какую вероятность тормозного излучения фотонов дает модель для протонного распада ядер. Согласно модели, вероятность излучения определяется по формуле (4.88). Потенциал взаимодействия между протоном и ядром определяется по формулам (26)–(27) с параметрами, вычисляемым по формулам (28)–(29) в [104]. Волновые функции распадающей системы в состояниях до и после излучения фотона определяются относительно такого потенциала в сферически симметричном приближении. Граничные условия и условие нормировки определяются, согласно (B.1)–(B.9) в [104]. При выборе подходящих протонных эмиттеров для расчетов и анализа мы воспользовались систематикой, приведенной в работе [63] (см. Таблицу II в этой статье). Так, в [104] были отобраны ядра ^{157}Ta, ^{161}Re, ^{167}Ir, ^{185}Bi, распадающиеся из состояния $2s_{1/2}$ (при $l_i = 0$), ядра $^{109}_{53}\mathrm{I}_{56}$, $^{112}_{55}\mathrm{Cs}_{57}$, распадающиеся из состояния $1d_{5/2}$, и ядра $^{146}_{69}\mathrm{Tm}_{77}$, $^{151}_{71}\mathrm{Lu}_{80}$, распадающиеся из состояния $0h_{11/2}$ (при $l_i \ne 0$). Но в этой главе мы ограничимся произвольным выбором одного ядра (взято $^{146}_{69}\mathrm{Tm}_{77}$) при $l_i \ne 0$ (поскольку такие расчеты существенно более сложны, чем для ядер при $l_i = 0$), с целью сосредоточить свое внимание на изучение новых физических эффектов, которые может дать эта модель (и считая, что для других ядер такие найденные эффекты будут подобными). Для выбранного ядра $^{146}_{69}\mathrm{Tm}_{77}$ имеем $l_i = 5$, $l_f = 4$, $Q = 1.140$ МэВ (взято из [104]).

4.8.1 Электрическое, магнитное излучения и угловые спектры

В начале мы рассмотрим, насколько заметно магнитное излучение на фоне полного спектра (чтобы выяснить, есть ли вообще смысл его изучать). Результаты расчета вероятностей излучения во время протонного распада ядра ^{146}Tm (при выбранном угле $\theta = 90^\circ$ между направлениями движения протона (с его туннелированием под барьером) и излучения фотона) представлены на Рис. 4.1. На этих рисунках добавлены электри-

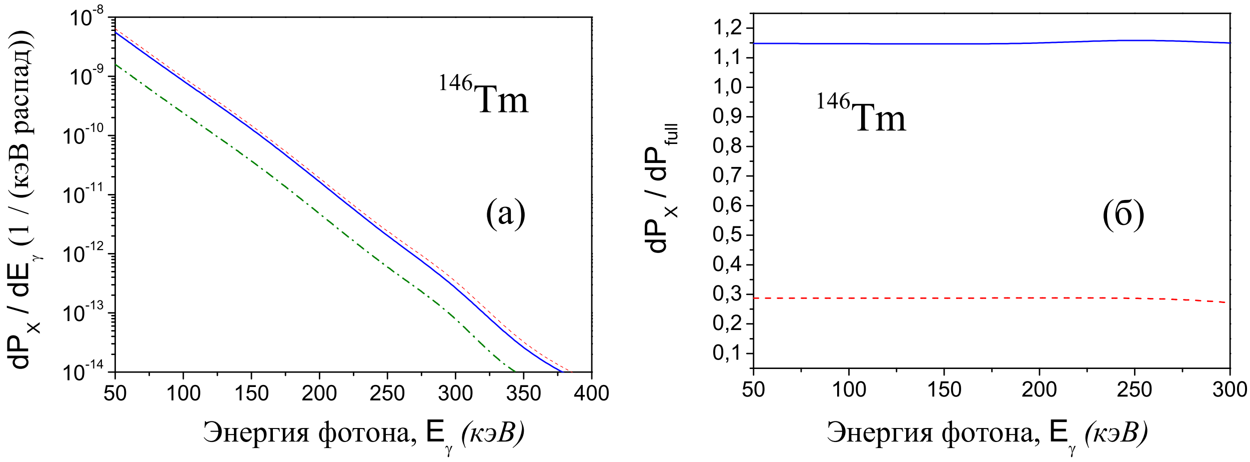

Рис. 4.1: Полный спектр тормозного излучения, электрическая и магнитная компоненты излучения, определенные по (4.90) (при $\theta = 90^\circ$): (а) полный спектр (сплошная линия), электрическая компонента dP_{el} (пунктирная линия) и магнитная компонента $dP_{\mathrm{mag},1}$ (штрих-пунктирная линия), (б) отношения компонент к полному спектру (сплошная линия — отношение $dP_{\mathrm{el}}/dP_{\mathrm{full}}$, штриховая линия — отношение $dP_{\mathrm{mag},1}/dP_{\mathrm{full}}$). Можно видеть, что магнитное излучение вносит вклад около 28 процентов в диапазоне энергий 50–300 кэВ.

ческая и магнитная компоненты ТИ. Отсюда можно видеть, что магнитное излучение меньше электрического. Но оно вносит вклад около 28 процентов в полный спектр (см.

Рис. 4.1 (б)), т. е. не столь мало (чтобы им можно было пренебречь) и его следует учитывать в дальнейших оценках спектров ТИ в распадах ядер с вылетом заряженных фрагментов с ненулевым спином. Однако, включение магнитной компоненты подавляет полную вероятность излучения: согласно Рис. 4.1 (б) (см. сплошную синюю линию), включение магнитной компоненты в расчет определяется величиной $P_{\rm el}/P_{\rm full} \simeq 1.14$, которая больше единицы. Этот эффект уменьшения излучения можно объяснить наличием немалой деструктивной интерференции между электрической и магнитной компонентами во всем рассмотренном диапазоне энергий излучения. Согласно Рис. 4.1 (б), относительные доли электрической и магнитной компонент к полному спектру не меняются в зависимости от энергии излученного фотона. По нашим оценкам, коррекция магнитной компоненты $dP_{\rm mag,2}$ меньше от электрической и магнитной компонент в 10^6 раз (поэтому далее мы будем пренебрегать таким излучением).

Теперь проанализируем, как меняется магнитное излучение от угла θ между вылетающим протоном и излученным фотоном. В частности, выясним, есть ли некие значения такого угла, при которых магнитное излучение возрастает максимально сильно относительно электрического. На Рис. 4.2 представлены угловые распределения электрического и магнитного излучения при протонном распаде ^{146}Tm. Отсюда можно видеть, что

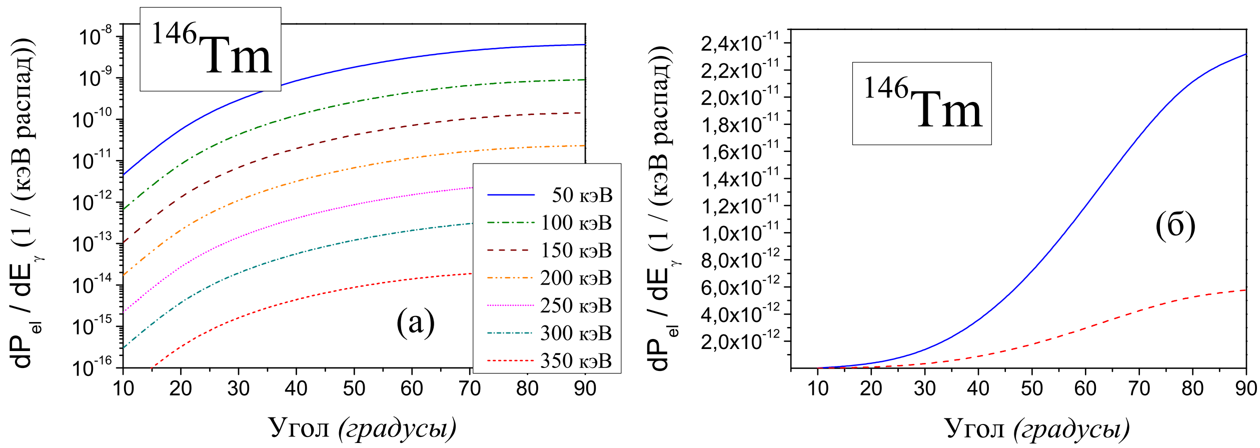

Рис. 4.2: Угловые распределения тормозного излучения фотонов при протонном распаде ядра ^{146}Tm: (а) электрическая компонента излучения $dP_{\rm el}$, вычисленная при разных энергиях излученных фотонов; (б) электрическая компонента $dP_{\rm el}$ (сплошная линия) и магнитная компонента $dP_{\rm mag,1}$ (штриховая линия) для выбранной энергии фотона 200 кэВ. Можно видеть, что оба спектра пропорционально растут с ростом угла.

с ростом значения угла электрическая и магнитная компоненты возрастают пропорционально. Из Табл. 4.1 ясно видно, что выделить значение угла, при котором магнитное излучение максимально сильно проявляется на фоне электрического, не удается.

4.8.2 Как меняются электрическое и магнитное излучения в зависимости от расстояния между протоном и дочерним ядром?

Обычно, авторы работ по изучению тормозного излучения, которое сопровождает разные виды столкновений частиц между собой и с ядрами, распады и деление ядер, вычисляют спектры на основе интегрирования по пространственным переменным. В релятивистских моделях ТИ в столкновениях нуклонов между собой и с ядрами (при промежуточных энергиях) расчеты преимущественно выполняются в импульсном представлении. Такие

Угол θ	Вероятность излучения		
	Электрическая компонента dP_{el}	Магнитная компонента $dP_{\mathrm{mag},1}$	$dP_{\mathrm{mag},1}/dP_{\mathrm{el}}$
10°	$1.704 \cdot 10^{-14}$	$4.198 \cdot 10^{-15}$	0.24630
20°	$2.580 \cdot 10^{-13}$	$6.357 \cdot 10^{-14}$	0.24636
30°	$1.192 \cdot 10^{-12}$	$2.940 \cdot 10^{-13}$	0.24647
40°	$3.329 \cdot 10^{-12}$	$8.212 \cdot 10^{-13}$	0.24665
50°	$6.952 \cdot 10^{-12}$	$1.716 \cdot 10^{-12}$	0.24692
60°	$1.188 \cdot 10^{-11}$	$2.939 \cdot 10^{-12}$	0.24730
70°	$1.727 \cdot 10^{-11}$	$4.281 \cdot 10^{-12}$	0.24779
80°	$2.158 \cdot 10^{-11}$	$5.361 \cdot 10^{-12}$	0.24841
90°	$2.319 \cdot 10^{-11}$	$5.779 \cdot 10^{-12}$	0.24916

Таблица 4.1: Электрическая и магнитная компоненты излучения в зависимости от угла θ между направлениями вылетающего протона и излученного фотона при выбранной энергии фотона 200 keV. Можно видеть, что отношение магнитного излучения к электрическому практически не меняется при изменении этого угла.

подходы практически скрывают информацию о том, насколько сильным является излучение в зависимости от расстояния между центрами масс двух исследуемых объектов. Однако, естественно думать, что фотоны излучаются с разной силой в зависимости от такого расстояния. Можно предположить, что электрическое и магнитное излучения по разному происходят в зависимости от расстояния. Поставим такие вопросы:

1. Может ли магнитное излучение в некой пространственной области оказаться сильнее от электрического?
2. Как меняются электрическое и магнитное излучения в зависимости от расстояния между протоном и ядром?
3. Что происходит с электрическим и магнитным излучениями в области туннелирования? Есть ли здесь принципиальное отличие от излучения во внешней области?

Чтобы выполнить такое исследование, мы введем определение вероятности излучения тормозных фотонов из выбранной пространственной области. В представленном формализме излучение в зависимости от расстояния определяется радиальными интегралами $J_1(l_i, l_f, n)$, $J_2(l_i, l_f, n)$ и $J_3(l_i, l_f, n)$ в (4.76) и (4.80), где интегрирование выполняется по всему пространственному диапазону. Поэтому, чтобы получить излучение лишь из произвольно выбранного интервала $r \in [r_1, r_2]$, мы рассмотрим интеграл вида

$$J_m(l_i, l_f, n; r_1, r_2) \;=\; \int\limits_{r_1}^{r_2} f_m(r)\, dr, \tag{4.92}$$

где $m = 1, 2, 3$ и $f_m(r)$ — подынтегральная функция соответствующего радиального интеграла $J_m(l_i, l_f, n)$, определенного в (4.76) или (4.80). В частности, $J_m(l_i, l_f, n; r_1, r_2)$ переходит в $J_m(l_i, l_f, n)$ при $r_1 \to 0$ и $r_2 \to +\infty$. Теперь, чтобы рассмотреть излучение из достаточно малой окрестности Δr выбранного расстояния r, получим

$$J_m(l_i, l_f, n; r, r + \Delta r) \;=\; \int\limits_{r}^{r+\Delta r} f_m(r')\, dr'. \tag{4.93}$$

Отсюда определим амплитуду вероятности излучения в зависимости от расстояния r так:

$$\begin{aligned} J_m\left(l_i, l_f, n; r\right) &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{J_m(l_i, l_f, n; r, r+\Delta r)}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r} \int\limits_r^{r+\Delta r} f_m(r')\, dr' = \\ &= \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r}\, f_m(r) \int\limits_r^{r+\Delta r} dr' = f_m(r) \lim_{\Delta r \to 0} \frac{1}{\Delta r}\, \Delta r = f_m(r). \end{aligned} \tag{4.94}$$

Далее, матричные элементы и вероятность излучения с уже включенной зависимостью от расстояния r мы определим, как и ранее, где вместо радиальных интегралов $J_m\left(l_i, l_f, n\right)$ воспользуемся введенными $J_m\left(l_i, l_f, n; r\right)$. Для обозначения новых величин, уже зависящих от расстояния r, мы будем включать переменную r в скобки соответствующих символов.

На Рис. 4.3 представлено поведение магнитной компоненты $dP_{\mathrm{mag},1}(r)$ на фоне электрической $dP_{\mathrm{el}}(r)$ в зависимости от расстояния r. Видно, что поведение обоих функций подобно: во внешней области они осциллируют (имея максимумы и ямы в близких пространственных областях), тогда как в области туннелирования имеют монотонный характер с возможной одной ямой. В целом, магнитное излучение подавляет полное излучение на всей пространственной области. Излучение из внутренней области до барьера является наиболее слабым, а из внешней области — наиболее сильным. Изменение коррекции

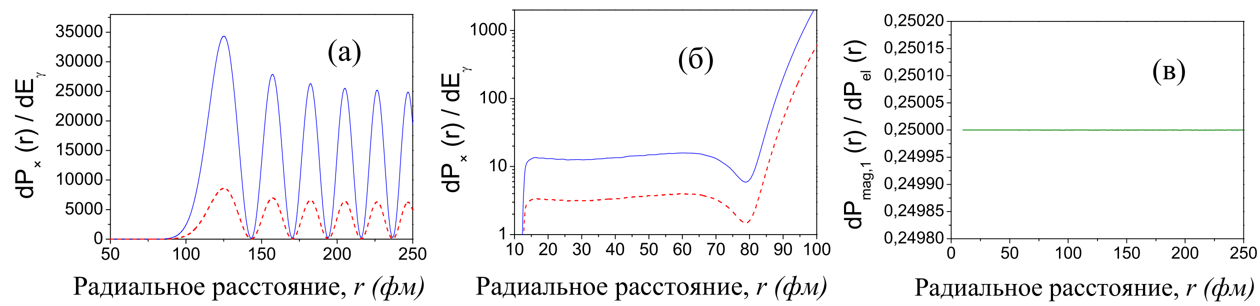

Рис. 4.3: Поведение магнитной компоненты $dP_{\mathrm{mag},1}(r)$ и электрической компоненты $dP_{\mathrm{mag},1}(r)$ излучения в зависимости от расстояния r между центрами масс вылетевшего протона и дочернего ядра, при энергии 200 кэВ излученного фотона (при $\theta = 90°$). (а) Магнитная компонента $dP_{\mathrm{mag},1}(r)$ (штриховая линия) и электрическая компонента $dP_{\mathrm{el}}(r)$ (сплошная линия) в области до 250 фм. Видно, что на внешней области за барьером обе функции осциллируют одинаково, тогда как в области туннелирования они значительно меньше. (б) Магнитная компонента $dP_{\mathrm{mag},1}(r)$ (штриховая линия) и электрическая компонента $dP_{\mathrm{el}}(r)$ (сплошная линия) в области туннелирования (до 80 фм). Видно, что в этой области обе функции имеют монотонное поведение (с возможной одной ямой, но без единой осцилляции). При выходе за пределы барьера во внешнюю область начинается первая осцилляция с последующим резким возрастающим пиком (что указывает на более сильное излучение из внешней области по сравнению с областью туннелирования, т. е. при туннелировании излучение слабее). Также видно, что при выходе из области барьера во внутреннюю область (около 12 фм) начинается сильный спад обоих функций (с осцилляциями) — это указывает на чрезвычайно малое излучение из пространственной области ядра. (в) Отношение магнитной компоненты к электрической $dP_{\mathrm{mag},1}(r) \,/\, dP_{\mathrm{el}}(r)$ (сплошная линия). Видно, что это соотношение сохраняется во всем диапазоне расстояний, одинаково как в области туннелирования, так и во внешней области.

магнитной компоненты $dP_{\mathrm{mag},2}(r)$ на фоне электрической $dP_{\mathrm{el}}(r)$ в зависимости от расстояния r показано на Рис. 4.4. В целом, оно оказывается существенно слабее. Интересно отметить, что в области туннелирования оно по постоянно возрастает, в отличие от электрической и магнитной компонент (см. Рис. 4.4 (в)). Это вызывает резкий пик функции

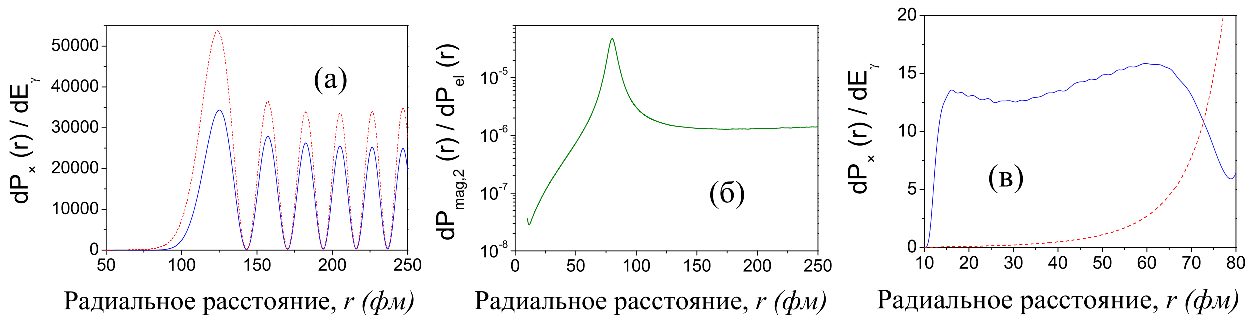

Рис. 4.4: Поведение коррекции магнитной компоненты излучения $dP_{\mathrm{mag},2}(r)$ в зависимости от расстояния r между центрами масс вылетевшего протона и дочернего ядра, при энергии 200 кэВ излученного фотона (при $\theta = 90°$). (а) Коррекция магнитной компоненты $dP_{\mathrm{mag},2}(r) \times 10^6$ (штриховая линия) и электрическая компонента $dP_{\mathrm{el}}(r)$ (сплошная линия) в области до 250 фм. Видно, что на внешней области за барьером обе функции осциллируют одинаково, тогда как в области туннелирования (до 80 фм) они значительно меньше. (б) Отношение коррекции магнитной компоненты к электрической $dP_{\mathrm{mag},2}(r) \,/\, dP_{\mathrm{el}}(r)$. Можно видеть, что наблюдается резкий пик около 80 фм (что соответствует внешней точке поворота). (в) Коррекция магнитной компоненты $dP_{\mathrm{mag},2}(r) \times 10^5$ (штриховая линия) и электрическая компонента $dP_{\mathrm{el}}(r)$ (сплошная линия) в области туннелирования. Видно, что в области туннелирования эти две функции ведут себя принципиально по разному. Этим можно объяснить наличие пика в кривой на предыдущем рисунке (б).

$dP_{\mathrm{mag},2}(r) \,/\, dP_{\mathrm{el}}(r)$ при выходе из области барьера, показанный на Рис. 4.4 (б). Этот пик мог бы вызвать интерес, поскольку он проявляется вблизи второй точки поворота, т. е. указывает на внешнюю пространственную границу барьера. Но, к сожалению, этот пик чрезвычайно слаб (на фоне полного спектра), для того чтобы можно было далее искать какие-либо возможные способы его экспериментального обнаружения.

4.8.3 Спектры при энергии излученных фотонов вблизи нуля

С точки зрения теории интересно разобраться в том, как ведет себя спектр излучения при стремлении энергии излученных фотонов к нулю. В частности, выясним, будет ли этот спектр неограниченно возрастать или стремиться к некому конечному пределу, и каков предел в таком случае? Отметим, что в литературе нами не найдено какой-либо информации по этим вопросам.

Для фотонов низких энергий (т. е. мягких фотонов) принято выделять два основных подхода: первый подход берет свое начало от известной работы [106], написанной Лоу (Low), и основан на применении теоремы для мягких фотонов (soft-photon theorem) на все процессы ядерного тормозного излучения, второй подход основан на применении приближения Фешбаха и Энни [107], которое, по-видимому, является более эффективным вблизи резонансов (см. также [3]). Однако, как было отмечено в [3] (см. стр. 376), существует и иной путь развития этой теории — потенциальный, к которому можно отнести и нашу модель. Согласно теории КЭД, при стремлении энергии фотонов к нулю возникает особенность в расчете матричного элемента (известная в литературе под названием "инфракатастрофа", см. стр. 258–273 в [89]; стр. 194–200 в [108]; стр. 194, 225, 231 в [29]). Однако, в нашем подходе мы получаем сходящиеся интегралы и конечное значение вероятности тормозного излучения. Например, рассмотрим первый интеграл из (4.76) при

$n = 0$ в пределе $w_{\rm ph} \to 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{w_{\rm ph}\to 0} J_1(l_i, l_f, n=0) &= \lim_{w_{\rm ph}\to 0} \int\limits_0^{R_0=1/k} \frac{dR_i(r,l_i)}{dr}\, R_f^*(l_f,r)\, j_0(kr)\, r^2 dr \;+ \\ &+ \lim_{w_{\rm ph}\to 0} \int\limits_{R_0=1/k}^{+\infty} \frac{dR_i(r,l_i)}{dr}\, R_f^*(l_f,r)\, j_0(kr)\, r^2 dr.\end{aligned} \tag{4.95}$$

При $w_{\rm ph} \to 0$ имеем $j_0(kr) = \sin(kr)/(kr) \to 1$ ($k = w_{\rm ph}/c$). Поэтому можно видеть, что первое слагаемое сходится (согласно выбранным граничным условиям, $\chi_f(r) = 0$ при $r = 0$, где $R_f(r) = \chi_f(r)/r$. Второе слагаемое не включает малые энергии фотона ($k > 1/R_0$) и поэтому является обычным интегралом в наших расчетах спектров при немалых энергиях фотонов, т. е. сходится. Аналогичный результат можно получить при произвольном выбранном n и для $J_2(l_i, l_f, n)$, $\tilde{J}(l_i, l_f, n)$. На этой основе, согласно (4.77), (4.78) и (4.81), все матричные элементы $p_{\rm el}$, $p_{\rm mag,1}$ и $p_{\rm mag,2}$ (и угловые матричные элементы) сходятся при произвольном выборе квантовых чисел l_i, l_f. Согласно (4.88), имеем

$$\lim_{w_{\rm ph}\to 0} \frac{d\,P(\varphi_f, \theta_f)}{d\Omega_{\rm ph}\, d\cos\theta_f} = \lim_{w_{\rm ph}\to 0} \frac{Z_{\rm eff}^2\, e^2}{2\pi\, c^5}\, \frac{w_{\rm ph}\, E_i}{m^2\, k_i} \left\{ p\,(k_i, k_f)\, \frac{d\,p^*(k_i, k_f, \Omega_f)}{d\,\cos\theta_f} + {\rm c.\,c.} \right\} = 0. \tag{4.96}$$

На Рис. 4.5 показаны спектры наших расчетов при энергии излученных фотонов до 2.5 кэВ. Отсюда видно, что при уменьшении энергии фотонов вероятность излучения

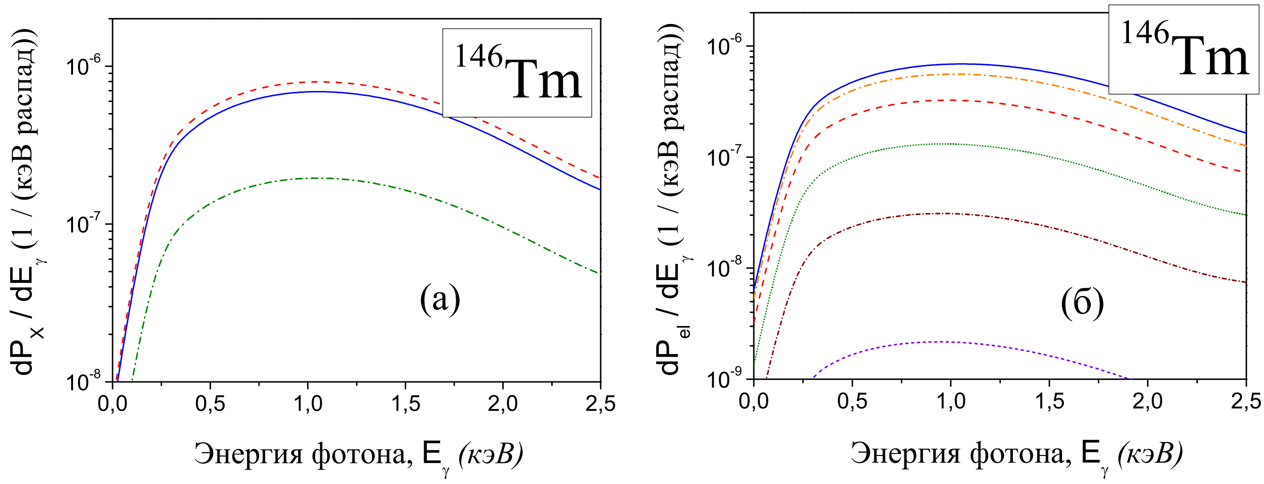

Рис. 4.5: Поведение спектров ТИ при околонулевых энергиях излученных фотонов (до 2.5 кэВ): (а) полный спектр (сплошная линия), электрическая компонента $dP_{\rm el}$ (штриховая линия) и магнитная компонента $dP_{\rm mag,1}$ (штрих-пунктирная линия) при $\theta = 90^\circ$; (б) полный спектр в зависимости от величины угла θ (сплошная линия — для $\theta = 90^\circ$, штрих-пунктирная линия — для $\theta = 75^\circ$, штриховая линия — для $\theta = 60^\circ$, краткая пунктирная линия — для $\theta = 45^\circ$, краткая штрих-пунктирная линия — для $\theta = 30^\circ$, краткая штриховая линия — для $\theta = 15^\circ$).

постепенно возрастает, плавно достигая максимума, а затем монотонно снижается (в пределе $w \to 0$ мы получаем $dP \to 0$). Согласно расчетам, вероятность имеет конечное максимальное значение при энергии излученного фотона менее 1,5 кэВ. Т. е. в нашем подходе инфракрасной катастрофы нет.

4.8.4 Спектры в столкновениях протонов с ядрами при промежуточных энергиях

В завершение, мы кратко рассмотрим, как ведет себя описанная выше модель при более высоких энергиях. Для исследования выберем столкновения протонов с ядрами при промежуточных энергиях налетающих протонов. Мы вычисляем сечение тормозного излучения по формуле (4.91), нормируя его на одну точку экспериментальных данных. Потенциал взаимодействия между протоном и ядром мы определяем таким-же образом, как и для протонного распада ядер[4]. На Рис. 4.6 показаны результаты наших расчетов для $p+^{9}\mathrm{Be}$, $p+^{12}\mathrm{C}$ и $p+^{208}\mathrm{Pb}$ при энергии падения налетающего протона $T_{\mathrm{lab}} = 140$ МэВ в сравнении с экспериментальными данными и результатами расчетов по другим моделям, разработанным на полностью релятивистской основе для промежуточных энергий фотонов. Из Рис. 4.6 (а) видно, что наш подход не хуже описывает экспериментальные данные [110] для $p+^{9}\mathrm{Be}$ в диапазоне энергий от 20 МэВ до 120 МэВ по сравнению с результатами, полученными Накаямой и Бертчем (Bertsch) в работе [109], и вычислениями Накаямы в работе [90]. На следующем рисунке (б) мы вновь достигаем неплохого согласия в наших расчетах с экспериментальными данными [110] для $p+^{12}\mathrm{C}$ по сравнению с имеющимися теоретическими результатами, полученными Ремингтоном (Remington), Бланом (Blann) и Бертчем в работе [111]. Сравнение с вычислениями авторов этой работы (представленными на Рис. 1 там), показывает: для энергий фотонов вплоть до 90 МэВ наша кривая близка к спектру, полученному в формализме мастер-уравнения с применением квазикласической формулы для сечения тормозного излучения (см. штрих-дважды пунктирную линию на этом рисунке), и сечению, полученному на основе квазиклассической формулы с умножением на множитель 2 для обмена мезонами (см. краткую пунктирную линию на этом рисунке). Но для более высоких энергий фотонов (от 90 до 120 МэВ) мы достигаем лучшего согласия с экспериментом по сравнению с результатами работы [111]. Сравнение наших результатов с квантовыми расчетами, выполнеными в работе [111] (см. краткую штриховую линию на этом рисунке), указывает на абсолютную применимость нашего квантового подхода в описании излучения тормозных фотонов высоких энергий при столкновениях протонов на ядрах. В то же время, такой подход позволяет рассматривать более глубоко квантовые свойства (такие, как нелокальность) рассматриваемого процесса столкновения. На последнем рисунке (в) представлено подобное сопоставление между нашими расчетами и результатами работы [111] для $p+^{208}\mathrm{Pb}$. На всех рисунках мы добавили наши расчеты вкладов для магнитного и электрического излучений.

На Рис. 4.7 показаны результаты расчета сечений тормозного излучения по модели, описанной в этой главе, для столкновений $p+^{9}\mathrm{C}$, $p+^{64}\mathrm{Cu}$ и $p+^{107}\mathrm{Ag}$ в сравнении с экспериментальными данными [112] при энергии падения протонов $T_{\mathrm{lab}} = 72$ MeV. На этих рисунках мы показываем полный спектр, полученный по формуле (4.91), и скорректированый спектр, получаемый по формуле (4.91) с последующим делением на k_f (в соответствии с формулой (13) для сечения в работе [70]). Сравнение с квантовыми расчетами, выполнеными в работе [70] (см. Рис. 1 в той работе), показывает большую сходимость вычислений на основе подхода, описанного в этой главе. Этот результат может быть так-

[4]Трудность в достижении сходимости при компьютерных расчетах матричных элементов является ключевой проблемой в получении достоверных значений сечений тормозного излучения. По мнению автора, эта проблема может оказаться основной причиной, почему идея потенциального подхода до настоящего времени не развита на должном уровне для определения спектров тормозного излучения при промежуточных энергий, которое сопровождает разные виды ядерных процессов. Чтобы достичь сходимости компьютерных вычислений, при получении спектров на Рис. 4.6 и 4.7 на радиальной области от R_{as} до $R_{\max}$ был применен подход, описанный в Приложении работы [80]. Для большей ясности анализа, были использованы одинаковые значения этих параметров: $R_{\mathrm{as}} = 0.9\times(R_R+7a_R)$, $R_{\max}$ выбрано таким, что его дальнейшее увеличение уже не меняло заметно спектр, R_R и a_R — параметры потенциала, определенные формулой (29) в работе [104].

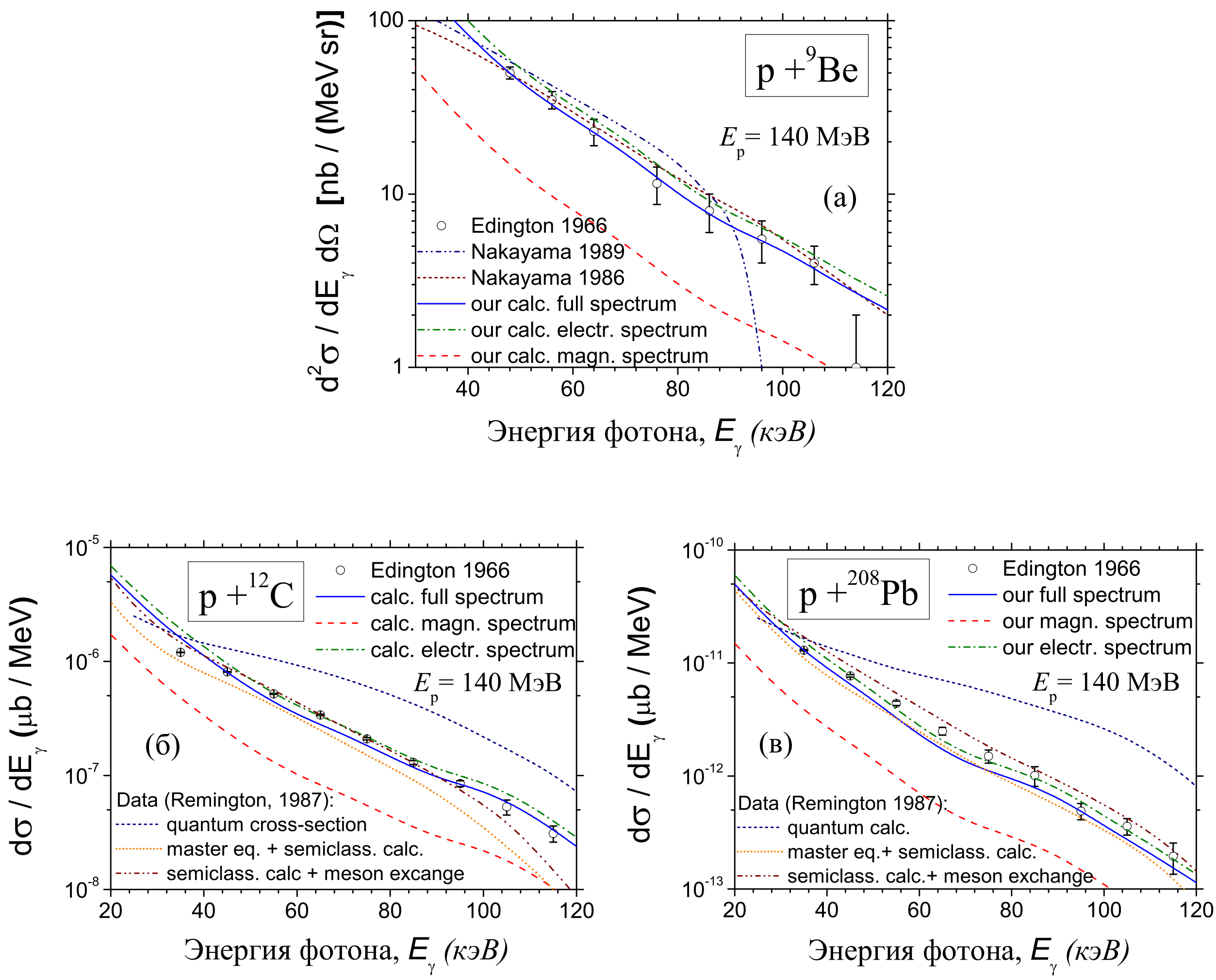

Рис. 4.6: Сечения тормозного излучения в столкновениях протонов с ядрами в лабораторной системе отсчета при энергии падения $T_{\rm lab} = 140$ МэВ (в расчетах выбран угол излучения фотонов $\vartheta = 90^\circ$): (a) Сопоставление расчетов для $p+^9$Be на основе нашей модели (сплошная линия — полный спектр, штрих-пунктирная линия — электрическая компонента излучения, штриховая линия — магнитная компонента излучения) с результатами работы (Nakayama 1986: [109], краткая штриховая линия), результатами работы (Nakayama 1989: [90], штрих-дважды пунктирная линия) и экспериментальными данными (Edington 1966: [110]); (б, в) Сопоставление расчетов для $p+^{12}$C и $p+^{208}$Pb на основе нашей модели (сплошная линия — полный спектр, штрих-пунктирная линия — электрическая компонента излучения, штриховая линия — магнитная компонента излучения) с вычислениями Ремингтона, Блана и Бертча в работе (Remington 1987: [111], штрих-дважды пунктирная линия — вычисления в формализме мастер-уравнения с применением квазиклассической формулы для сечения тормозного излучения, краткая пунктирная линия — сечение, полученное на основе квазиклассической формулы с умножением на множитель 2 для обмена мезонами, и краткая штриховая линия — квантовые расчеты сечения тормозного излучения) и экспериментальными данными (Edington 1966: [110]).

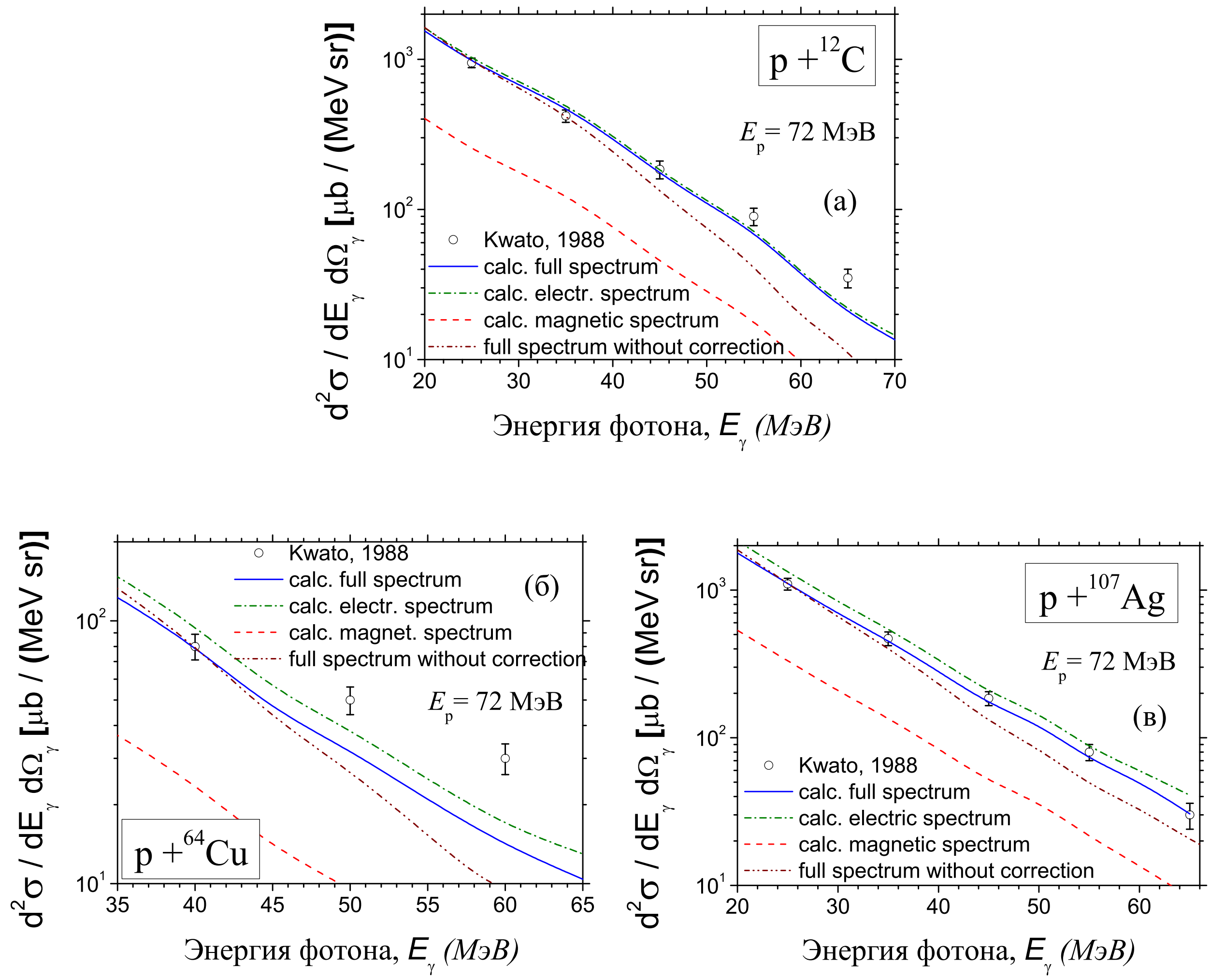

Рис. 4.7: Сечения тормозного излучения в столкновениях протонов с ядрам в лабораторной системе отсчета при энергии падения $T_{\mathrm{lab}} = 72$ МэВ (в наших расчетах выбран угол излучения фотонов $\vartheta = 90^{\circ}$): Сравнение для $p + ^{12}$C (а), $p + ^{64}$Cu (б) и $p + ^{107}$Ag (в) между полным сечением, полученным по формуле (4.91) (штриховая дважды-пунктирная линия), скорректированным сечением, полученным по формуле (4.91) с делением на k_f (сплошная линия) и экспериментальными данными (Kwato 1988: [112]). На все рисунки мы добавляем электрическую компоненту (штрих-пунктирная линия) и магнитную компоненту (штриховая линия).

же ответом (подтверждением) на предположение, выдвинутое авторами работы [70] о том, что квантовый подход (с включенной реалистической ядерной компонентой потенциала взаимодействия) совершенно применим к описанию экспериментальных данных тормозного излучения при протон-ядерных столкновениях.

4.8.5 Роль мультипольных компонент в угловом анализе

Первые оценки мультипольных компонент тормозного излучения более высокого порядка в задачах распада ядер были получены Ткаля в [43, 73]. На примере излучения фотонов при α-распаде ядер ^{226}Ra, ^{210}Po и ^{214}Po он показал, что для энергий фотонов до 900 кэВ излучение $E2$ дает вклад от 50 до 1000 раз слабее в полный спектр по сравнению с $E1$ (см. Рис. 1 в [43]). Также имеются данные Кургалина, Чувильского и Чураковой для вклада $E2$ в задаче α-распада ^{210}Po [113]: согласно их расчетам, вклад мультиполя $E2$ меньше относительно $E1$ от 50 до 500 раз для энергий фотонов до 800 кэВ. Мы изучали этот вопрос также: согласно нашим оценкам, мультипольные слагаемые $E2$ и $M2$ оказались достаточно малы. Авторы работы [10] исследовали дипольный и квадрупольный вклады в квазиклассическом рассмотрении вероятности тормозного излучения при α-распаде, изучили роль интерференции между этими вкладами[5]. Других каких-либо оценок по излучению мультиполя $E2$ и мультиполей более высокого порядка, которые могли бы быть получены до настоящего времени, нам не известно. На основе этих соображений обычно в задачах тормозного излучения расчеты в мультипольном подходе проводятся на основе первого мультиполя $E1$, который вносит преобладающий вклад в полный спектр (в нашем подходе стабильными получаются, как минимум, 4 или 5 первых значащих цифр спектра).

Основная трудность в получении достоверных значений для спектров более высоких мультиполей заключается в уменьшении сходимости счета матричного элемента излучения, которую следует достичь. Отметим лишь некоторые из причин. (1) Амплитуды и фазы кулоновских функций в асимптотической области (которая является очень важной при определении спектров) вычисляются на основе асимптотических рядов, которые в общем случае расходятся. Поэтому точность определения волновых функций ограничена неким пределом, преодолеть который не удается. Если же отказаться от применения асимптотических рядов при определении асимптотических кулоновских функций, то формулы становятся сходящимися, но более приближенными. Как оказывается, такой переход заметно проявляется на спектрах излучения более высоких мультиполей и растет с ростом мультипольности. (2) С ростом мультипольности растет и пространственная область, в пределах которой следует вычислять радиальные интегралы. Подынтегральные функции во всех этих интегралах имеют осциллирующий затухающий вид. Уже для достижении минимальной приемлемой точности при вычислении интегралов от первых мультиполей приходится аккуратно учитывать огромное число осцилляций, что является сложной численной задачей (например, см. Приложение и Рис. 6 в работе [80]). Переход к мультиполям более высокого порядка значительно усложняет ее. В этом смысле для каждого мультиполя можно говорить о своем пределе, который существует при численном определении радиальных интегралов. Указания на всю серьезность этой проблемы и перспективность методов решения можно найти в работах авторов, которые также пы-

[5] Интересной в этой работе является идея определения квадрупольной поправки к эффективному заряду в дипольном приближении. Но разложение в [10] и мультипольное разложение в данной главе имеют разные основу и смысл. В [10] дипольный и квадрупольный вклады определяются как первый член (при $l_f = 1$) и второй член (при $l_f = 2$) разложения волновой функции $\varphi_f(\mathbf{r})$ α-ядерной системы в состоянии после излучения фотона (см. eq. (B1)–(B4) в [10]), при представлении эффективного заряда для двух-зарядовой ядерной системы (см. eq. (A1)–(A4) в [10]). Мультипольный подход в данной главе основан на стандартном мультипольном разложении волновой функции фотона (4.49)–(4.50).

тались определять спектры тормозного излучения в ядерных задачах с реалистическими потенциалами взаимодействия (например, см. [3, 4, 70]).

Чтобы лучше понять, как меняется угловая вероятность тормозного излучения в зависимости от выбора квантовых чисел l_i, l_f и $l_{\rm ph}$ (определяющего мультипольный член разложения), преобразуем формулы, максимально явно выделив в них функции, определяющие угловую зависимость. Такая информация полностью содержится в дифференциальных матричных элементах. После вычислений мы получаем

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p^{M}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \delta_{\mu,m_i-m_f}\,P^{|m_f|}_{l_f}\sum_{\mu'=\pm1}\Bigl\{\delta_{l_i\neq0}\,c^{\mu'}_1\,P^{|m_i-\mu'|}_{l_i-1} - c^{\mu'}_2\,P^{|m_i-\mu'|}_{l_i+1}\Bigr\}\cdot P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\rm ph}},\\
\frac{d\,p^{E}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \delta_{\mu,m_i-m_f}\,P^{|m_f|}_{l_f}\sum_{\mu'=\pm1}\Bigl\{\Bigl[\delta_{l_i\neq0}\,c^{\mu'}_3\,P^{|m_i-\mu'|}_{l_i-1} + c^{\mu'}_5\,P^{|m_i-\mu'|}_{l_i+1}\Bigr]\,P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\rm ph}-1} -\\
&- \Bigl[\delta_{l_i\neq0}\,c^{\mu'}_4\,P^{|m_i-\mu'|}_{l_i-1} + c^{\mu'}_6\,P^{|m_i-\mu'|}_{l_i+1}\Bigr]\,P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\rm ph}+1}\Bigr\},
\end{aligned}\tag{4.97}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\tilde{p}^{M}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \delta_{m_i,m_f}\,c_7\cdot P^{|m_i|}_{l_i}\,P^{|m_f|}_{l_f}\,P^{0}_{l_{\rm ph}},\\
\frac{d\,\tilde{p}^{E}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \delta_{m_i,m_f}\,P^{|m_i|}_{l_i}\,P^{|m_i|}_{l_f}\Bigl\{c_8\,P^{0}_{l_{\rm ph}-1} - c_9\,P^{0}_{l_{\rm ph}+1}\Bigr\},
\end{aligned}\tag{4.98}$$

где

$$\begin{aligned}
c^{\mu'}_1 &= \sqrt{\frac{l_i}{2l_i+1}}\,C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{ph} l_i-1,l_{ph}}\cdot\Bigl[J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}) + (l_i+1)\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph})\Bigr],\\
c^{\mu'}_2 &= \sqrt{\frac{l_i+1}{2l_i+1}}\,C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{ph} l_i+1,l_{ph}}\cdot\Bigl[J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}) - l_i\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph})\Bigr],
\end{aligned}\tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
c^{\mu'}_3 &= \sqrt{\frac{l_i\,(l_{\rm ph}+1)}{(2l_i+1)(2l_{\rm ph}+1)}}\,C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{ph} l_i-1,l_{\rm ph}-1}\cdot\Bigl[J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\;+(l_i+1)\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\Bigr],\\
c^{\mu'}_4 &= \sqrt{\frac{l_i\,l_{\rm ph}}{(2l_i+1)(2l_{\rm ph}+1)}}\,C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{ph} l_i-1,l_{\rm ph}+1}\cdot\Bigl[J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\;+(l_i+1)\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\Bigr],\\
c^{\mu'}_5 &= \sqrt{\frac{(l_i+1)(l_{\rm ph}+1)}{(2l_i+1)(2l_{\rm ph}+1)}}\,C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{ph} l_i+1,l_{\rm ph}-1}\cdot\Bigl[J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\;-l_i\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1)\Bigr],\\
c^{\mu'}_6 &= \sqrt{\frac{(l_i+1)\,l_{\rm ph}}{(2l_i+1)(2l_{\rm ph}+1)}}\,C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{ph} l_i+1,l_{\rm ph}+1}\cdot\Bigl[J_1(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\;-l_i\cdot J_2(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1)\Bigr],
\end{aligned}\tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= C^{m_i\mu}_{l_i l_f l_{\rm ph} l_{\rm ph}}\cdot\tilde{J}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph}),\\
c_8 &= \sqrt{\frac{l_{\rm ph}+1}{2l_{\rm ph}+1}}\,C^{m_i\mu}_{l_i l_f l_{\rm ph},l_{\rm ph}-1}\cdot\tilde{J}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph}-1),\\
c_9 &= \sqrt{\frac{l_{\rm ph}}{2l_{\rm ph}+1}}\,C^{m_i\mu}_{l_i l_f l_{\rm ph},l_{\rm ph}+1}\cdot\tilde{J}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph}+1).
\end{aligned}\tag{4.101}$$

Здесь $c^{\mu'}_1$ ... $c^{\mu'}_6$ и c_7 ... c_9 не зависят от угла θ. Функция $\delta_{l_i\neq0}$ определена как $\delta_{l_i\neq0}=0$ при $l_i=0$ и $\delta_{l_i\neq0}=1$ при $l_i\neq0$. На основе этих формул можно сделать следующий вывод.

1. Числа l_i и l_f определяют основу формы углового распределения вероятности излучения фотонов, значения $l_{\rm ph}$ вносят осцилляции в эту форму:

   (a) Число осцилляций такой формы минимально при $l_{\rm ph}=1$ и растет с ростом $l_{\rm ph}$.

(b) $c_1^{\mu'} \ldots c_6^{\mu'}$ и $c_7 \ldots c_9$ — веса осцилляций при каждом выбранном $l_{\rm ph}$. Так как интегралы J_1, J_2 уменьшаются с ростом $l_{\rm ph}$ (при фиксированном $w_{\rm ph}$), поэтому каждый матричный элемент со следующим значением $l_{\rm ph}$ вносит в базовую форму распределения новый вклад с меньшей вероятностью, но с большим числом осцилляций.

2. Если при некотором выбранном l_i полиномы $P_{l_i \pm 1}^{|m_i - \mu'|}$ или при выбранном l_f полиномы $P_{l_f}^{|m_f|}$ в (4.97) (при некотором выбранном l_i полиномы $P_{l_i}^{|m_i|}$ или при выбранном l_f полиномы $P_{l_f}^{|m_f|}$ в (4.98)) равны нулю при некотором значении угла θ, то дифференциальные матричные элементы в (4.97) (в (4.98)) останутся равными нулю при любом значении $l_{\rm ph}$ для такого угла θ.

На Рис. 4.8 показаны угловые распределения электрической компоненты излучения $dP_{\rm el}$ при протонном распаде ядра ^{146}Tm для первых трех мультиполей ($l_{\rm ph} = 1, 2, 3$). Из

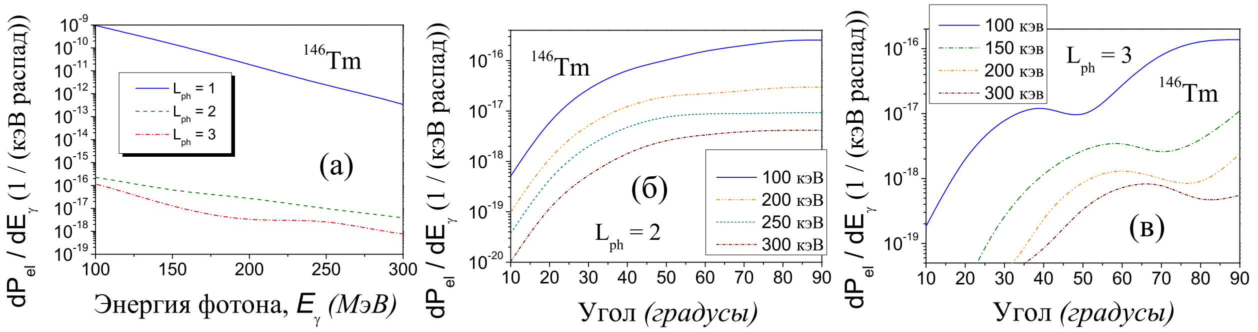

Рис. 4.8: Вклады электрической компоненты излучения $dP_{\rm el}$ при протонном распаде ядра ^{146}Tm для первых трех мультиполей ($l_{\rm ph} = 1, 2, 3$). (а) Спектры при угле $\vartheta = 90^\circ$: можно видеть, что вклад излучения при $l_{\rm ph} = 1$ (сплошная линия) значительно больше по сравнению с вкладами излучения при $l_{\rm ph} = 2$ (штриховая линия) и $l_{\rm ph} = 3$ (штрих-пунктирная линия), т. е. является преобладающим на всем диапазоне энергий излученных фотонов. (б) Мультипольная компонента излучения при $l_{\rm ph} = 2$ в зависимости от угла ϑ: в угловом диапазоне от 0 до 90° может появиться один дополнительный экстремум в этой кривой, но он практически сглажен (при данной точности вычислений). Однако, при малых значениях угла θ с ростом $l_{\rm ph}$ каждая следующая кривая резче (быстрее) возрастает по сравнению с угловыми спектрами при $l_{\rm ph} = 1$ (см. Рис. 4.2 (а)). (в) Мультипольная компонента излучения при $l_{\rm ph} = 3$ в зависимости от угла ϑ: появление еще одного нового экстремума формирует первую осцилляцию. Наблюдается смещение максимума и ямы спектра в сторону больших значений угла θ с ростом энергии излученного фотона.

рисунка (а) видно, что второй и третий мультиполи (при $l_{\rm ph} = 2$ и $l_{\rm ph} = 3$, $\theta = 90^\circ$) на 5–7 порядков меньше по сравнению с первым (при $l_{\rm ph} = 1$, $\theta = 90^\circ$). Угловые распределения этих мультиполей при $l_{\rm ph} = 2$ и $l_{\rm ph} = 3$ показаны на следующих рисунках (б, в). В частности, отсюда видно, что с ростом мультипольности (т. е. числа $l_{\rm ph}$) излучение сильне проявляется для меньших значений угла ϑ (при фиксированных значениях l_i и l_f для ^{146}Tm). Явные выражения для дифференциальных матричных элементов для первых нескольких значений l_i и l_f при произвольном $l_{\rm ph}$ приведены в Приложении C.

4.9 Выводы

В этой главе описана модель тормозного излучения, которое сопровождает протонный распад ядер и столкновения протонов с ядрами в диапазоне от низких до промежуточных энергий [114]. Модель включает спиновый формализм, потенциальный подход к описанию взаимодействий протонов с ядрами, а оператор излучения включает компоненту магнитного излучения (поскольку его вид определяется на основе уравнения Паули). С помощью этой модели в задаче тормозного излучения при протонном распаде исследована роль магнитного излучения, входящего в полный спектр. Для исследований выбрано ядро ^{146}Tm. Получено следующее:

1. В диапазоне энергий фотонов от 50 до 300 кэВ магнитное излучение вносит вклад около 28 процентов в полный спектр (см. Рис. 4.1), т. е. не столь мало и его следует учитывать в дальнейших оценках спектров тормозного излучения в распадах ядер с вылетом заряженных фрагментов с ненулевым спином. Однако, включение магнитной компоненты в расчет подавляет полную вероятность излучения: такое ослабление полного излучения определяется величиной $P_{\rm el}/P_{\rm full} \simeq 1.14$, которая больше единицы. Этот эффект подавления излучения можно объяснить наличием немалой деструктивной интерференции между электрической и магнитной компонентами во всем рассмотренном диапазоне энергий излучения. Относительные доли электрической и магнитной компонент к полному спектру не меняются при изменении энергии излученного фотона. Коррекция магнитной компоненты $dP_{\rm mag,2}$ в 10^6 раз меньше электрической и магнитной компонент.

2. С ростом угла θ между направлениями вылетающего протона и излученного фотона электрическая и магнитная компоненты возрастают пропорционально (см. Рис. 4.2), а отношение между ними сохраняется (см. Табл. 4.1). Поэтому выделить значение угла, при котором магнитное излучение максимально сильно проявляется на фоне электрического, не удается.

3. Магнитная компонента $dP_{\rm mag,1}(r)$ зависит от расстояния r между центрами масс протона и дочернего ядра подобно электрической компоненте $dP_{\rm el}(r)$ (их отношение не меняется на расстояниях от 5 до 250 фм). Во внешней области (за барьером) магнитная компонента $d\tilde{P}_{\rm mag,1}$ и электрическая компонента $d\tilde{P}_{\rm el}$ осциллируют (имея максимумы и ямы в близких радиальных координатах), в области туннелирования они имеют монотонный характер с возможной одной ямой (см. Рис. 4.3). В целом, магнитное излучение подавляет полное излучение на всей пространственной области. Излучение из внутренней области до барьера является наиболее слабым, а из внешней области — наиболее сильным.

4. Изменение коррекции магнитной компоненты $dP_{\rm mag,2}(r)$ оказывается существенно слабее электрической $dP_{\rm el}(r)$ в зависимости от расстояния r (см. Рис. 4.4). В области туннелирования она монотонно возрастает в отличие от электрической и магнитной компонент, что вызывает резкий пик функции $dP_{\rm mag,2}(r)/dP_{\rm el}(r)$ около 80 фм при выходе из области барьера (что соответствует внешней точке поворота).

5. При уменьшении энергии фотонов к нулю вероятность излучения постепенно возрастает, плавно достигая конечного максимума (при энергии излученного фотона менее 1,5 кэВ), а затем монотонно снижается к нулю (см. Рис. 4.5). Угловое распределение вероятности излучения при околонулевых энергиях ведет себя подобно изученному выше в диапазоне энергий от 50 до 350 кэВ. Инфракрасной катастрофы в таком подходе нет.

В завершение, мы показали, что предлагаемый потенциальный квантовый подход позволяет достаточно успешно описать излучение тормозных фотонов при промежуточных энергиях, которые сопровождают столкновения протонов с ядрами ^{9}Be, ^{12}C и ^{208}Pb при энергии падения $T_{\rm lab} = 140$ MeV (для энергий фотонов до 120 МэВ, см. Рис. 4.6), ядрами ^{9}C, ^{64}Cu и ^{107}Ag при энергии падения $T_{\rm lab} = 72$ МэВ (для энергии фотонов до 60 МэВ, см. Рис. 4.7).

Приложение A

Математические дополнения

A.1 Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра $P_l\,(\cos\theta)$ и *присоединенные полиномы Лежандра* $P_l^m(\cos\theta)$ определяем, согласно [31] (см. стр. 752–754, (c,1)–(c,4); также см. [33] (2.6), стр. 34):

$$\begin{aligned}
P_l\,(\cos\theta) &= \frac{1}{2^l\,l!}\,\frac{d^l}{(d\,\cos\theta)^l}\,(\cos^2\theta-1)^l,\\
P_l^m(\cos\theta) &= \sin^m\theta\frac{d^m\,P_l(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^m}=\frac{1}{2^l\,l!}\sin^m\theta\frac{d^{l+m}}{(d\,\cos\theta)^{l+m}}(\cos^2\theta-1)^l=\\
&= (-1)^m\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!\,2^l\,l!}\sin^{-m}\theta\frac{d^{l-m}}{(d\,\cos\theta)^{l-m}}(\cos^2\theta-1)^l.
\end{aligned}\tag{A.1}$$

причем $m=0\ldots l$. Эти полиномы подчиняются нормировочным условиям, которые можно использовать в качестве проверки вычисления полиномов ($\mu=\cos\theta$; см. [31], (c,6)–(c,9) стр. 753–754):

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}[P_l\,(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2}{2l+1}, && \int_{-1}^{1}P_l\,(\mu)\,P_{l'}\,(\mu)\,d\mu = 0,\\
&\int_{-1}^{1}[P_l^m\,(\mu)]^2\,d\mu=\frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}, && \int_{-1}^{1}P_l^m\,(\mu)\,P_{l'}^m\,(\mu)\,d\mu = 0.
\end{aligned}\tag{A.2}$$

В начале найдем полиномы Лежандра P_l:

$$\begin{aligned}
P_0\,(\cos\theta) &= 1,\\
P_1\,(\cos\theta) &= \cos\theta,\\
P_2\,(\cos\theta) &= \frac{1}{2}\,(3\,\cos^2\theta-1),\\
P_3\,(\cos\theta) &= \frac{1}{2}\,(5\,\cos^3\theta-3\,\cos\theta),\\
P_4\,(\cos\theta) &= \frac{1}{8}\,(35\,\cos^4\theta-30\,\cos^2\theta+3),\\
P_5\,(\cos\theta) &= \frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta-70\,\cos^3\theta+15\,\cos\theta).
\end{aligned}\tag{A.3}$$

Теперь вычислим присоединенные полиномы Лежандра при первых значениях l и m:

$$\begin{aligned}
P_1^0\,(\cos\theta) &= \sin^0\theta\frac{d^0\,P_1(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^0}=P_1(\cos\theta)=\cos\theta,\\
P_1^1\,(\cos\theta) &= \sin\theta\frac{d}{d\,\cos\theta}\,\cos\theta=\sin\theta,
\end{aligned}\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
P_2^0(\cos\theta) &= \sin^0\theta \frac{d^0\,P_2(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^0} = P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}\,(3\,\cos^2\theta - 1),\\
P_2^1(\cos\theta) &= \sin\theta \frac{d}{d\,\cos\theta}\frac{1}{2}\,(3\,\cos^2\theta - 1) = 3\,\sin\theta\,\cos\theta,\\
P_2^2(\cos\theta) &= \sin^2\theta \frac{d^2}{(d\,\cos\theta)^2}\frac{1}{2}\,(3\,\cos^2\theta - 1) = 3\,\sin^2\theta,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
P_3^0(\cos\theta) &= \sin^0\theta \frac{d^0\,P_3(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^0} = P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}\,[5\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta],\\
P_3^1(\cos\theta) &= \sin\theta \frac{d}{d\,\cos\theta}\frac{1}{2}[5\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta] = \frac{1}{2}\sin\theta(15\,\cos^2\theta - 3) = \frac{3}{2}\sin\theta(5\,\cos^2\theta - 1),\\
P_3^2(\cos\theta) &= \sin^2\theta \frac{d^2}{(d\,\cos\theta)^2}\frac{1}{2}\,[5\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta] = 15\,\sin^2\theta\,\cos\theta,\\
P_3^3(\cos\theta) &= \sin^3\theta \frac{d^3}{(d\,\cos\theta)^3}\frac{1}{2}\,[5\,\cos^3\theta - 3\,\cos\theta] = 15\,\sin^3\theta,
\end{aligned} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
P_4^0(\cos\theta) &= \sin^0\theta \frac{d^0\,P_4(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^0} = P_4(\cos\theta) = \frac{1}{8}\,[35\,\cos^4\theta - 30\,\cos^2\theta + 3],\\
P_4^1(\cos\theta) &= \sin\theta \frac{d}{d\,\cos\theta}\,\frac{1}{8}\,[35\,\cos^4\theta - 30\,\cos^2\theta + 3] = \frac{1}{2}\,\sin\theta\,(35\,\cos^3\theta - 15\,\cos\theta),\\
P_4^2(\cos\theta) &= \sin^2\theta \frac{d^2}{(d\,\cos\theta)^2}\,\frac{1}{8}\,[35\,\cos^4\theta - 30\,\cos^2\theta + 3] = \frac{1}{2}\,\sin^2\theta\,(105\,\cos^2\theta - 15),\\
P_4^3(\cos\theta) &= \sin^3\theta \frac{d^3}{(d\,\cos\theta)^3}\,\frac{1}{8}\,[35\,\cos^4\theta - 30\,\cos^2\theta + 3] = 105\,\sin^3\theta\,\cos\theta,\\
P_4^4(\cos\theta) &= \sin^4\theta \frac{d^4}{(d\,\cos\theta)^4}\,\frac{1}{8}\,[35\,\cos^4\theta - 30\,\cos^2\theta + 3] = 105\,\sin^4\theta,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
P_5^0(\cos\theta) &= \sin^0\theta \frac{d^0\,P_5(\cos\theta)}{(d\,\cos\theta)^0} = P_5(\cos\theta) = \frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta),\\
P_5^1(\cos\theta) &= \sin\theta \frac{d}{d\,\cos\theta}\,\frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta)\ =\\
&= \frac{1}{8}\,\sin\theta\,(315\,\cos^4\theta - 210\,\cos^2\theta + 15) = \frac{15}{8}\,\sin\theta\,(21\,\cos^4\theta - 14\,\cos^2\theta + 1),\\
P_5^2(\cos\theta) &= \sin^2\theta \frac{d^2}{(d\,\cos\theta)^2}\,\frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta)\ =\\
&= \frac{1}{2}\,\sin^2\theta\,(315\,\cos^3\theta - 105\,\cos\theta) = \frac{105}{2}\,\sin^2\theta\,(3\,\cos^3\theta - \cos\theta),\\
P_5^3(\cos\theta) &= \sin^3\theta \frac{d^3}{(d\,\cos\theta)^3}\,\frac{1}{8}(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta) = \frac{105}{2}\sin^3\theta(9\,\cos^2\theta - 1),\\
P_5^4(\cos\theta) &= \sin^4\theta \frac{d^4}{(d\,\cos\theta)^4}\,\frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta)\ =\\
&= \frac{105\cdot 2\cdot 9}{2}\,\sin^4\theta\,\cos\theta = 945\,\sin^4\theta\,\cos\theta,\\
P_5^5(\cos\theta) &= \sin^5\theta \frac{d^5}{(d\,\cos\theta)^5}\,\frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta) = 945\,\sin^5\theta.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Выпишем найденные решения:

$$P_0^0(\cos\theta) = 1, \qquad P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta, \qquad P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta,$$
$$P_2^0(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}\,(3\cos^2\theta - 1), \qquad P_2^1(\cos\theta) = 3\,\sin\theta\cos\theta, \qquad P_2^2(\cos\theta) = 3\,\sin^2\theta,$$
$$P_3^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\,(5\cos^2\theta - 3)\,\cos\theta, \quad P_3^1(\cos\theta) = \frac{3}{2}\,\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1),$$
$$P_3^2(\cos\theta) = 15\,\sin^2\theta\,\cos\theta, \qquad P_3^3(\cos\theta) = 15\,\sin^3\theta \tag{A.9}$$

$$P_4^0\,(\cos\theta) = \frac{1}{8}\,[35\,\cos^4\theta - 30\,\cos^2\theta + 3], \quad P_5^0\,(\cos\theta) = \frac{1}{8}\,(63\,\cos^5\theta - 70\,\cos^3\theta + 15\,\cos\theta),$$
$$P_4^1\,(\cos\theta) = \frac{1}{2}\,\sin\theta\,(35\,\cos^3\theta - 15\,\cos\theta), \quad P_5^1\,(\cos\theta) = \frac{15}{8}\,\sin\theta\,(21\,\cos^4\theta - 14\,\cos^2\theta + 1),$$
$$P_4^2\,(\cos\theta) = \frac{1}{2}\,\sin^2\theta\,(105\,\cos^2\theta - 15), \quad P_5^2\,(\cos\theta) = \frac{105}{2}\,\sin^2\theta\,(3\,\cos^3\theta - \cos\theta),$$
$$P_4^3\,(\cos\theta) = 105\,\sin^3\theta\,\cos\theta, \quad P_5^3\,(\cos\theta) = \frac{105}{2}\,\sin^3\theta\,(9\,\cos^2\theta - 1),$$
$$P_4^4\,(\cos\theta) = 105\,\sin^4\theta, \quad P_5^4\,(\cos\theta) = 945\,\sin^4\theta\,\cos\theta,$$
$$P_5^5\,(\cos\theta) = 945\,\sin^5\theta. \tag{A.10}$$

А.2 Сферические функции Y_{lm}

Сферические функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ определяем, согласно [31] (см. стр. 119, (28,7)–(28,8), стр. 752–755):

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \;=\; (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\, i^l\, \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^{|m|}(\cos\theta)\cdot e^{im\varphi}, \tag{A.11}$$

где $P_l^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра (см. Приложение А.1). Для функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ выполняется такое условие нормировки (см. [31], (28,3), стр. 118):

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} Y^*_{l'm'}(\theta,\varphi)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)\;\sin\theta\; d\theta\; d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{A.12}$$

Функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)$, отличающиеся знаком m, связаны друг с другом соотношениями (см. (28,9), стр. 119 в [31]):

$$Y^*_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^{l-m}\, Y_{l-m}(\theta,\varphi). \tag{A.13}$$

Выпишем выражения нескольких первых нормированных сферических функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ (см. [31], стр. 754–755):

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, & Y_{10} &= i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\;\cos\theta,\\
Y_{1,\pm1} &= \mp\, i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\;\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}, & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\;(1-3\cos^2\theta),\\
Y_{2,\pm1} &= \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\;\cos\theta\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi}, & Y_{2,\pm2} &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\;\sin^2\theta\cdot e^{\pm 2i\varphi},
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
Y_{30} &= -i\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\,\cos\theta\,(5\cos^2\theta-3),\\
Y_{3,\pm1} &= \pm i\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\,\sin\theta\,(5\cos^2\theta-1)\cdot e^{\pm i\varphi},\\
Y_{3,\pm2} &= -i\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\,\cos\theta\sin^2\theta\cdot e^{\pm 2i\varphi},\\
Y_{3,\pm3} &= \pm i\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\,\sin^3\theta\cdot e^{\pm 3i\varphi}.
\end{aligned} \tag{A.15}$$

A.3 Сферические функции Бесселя

Определим сферические функции Бесселя (функции Бесселя полуцелого порядка), согласно (33,9), (33,10) и (33,11) в [31] (см. стр. 139), так:

$$J_{n+1/2}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,x^n\Big(\frac{d}{xdx}\Big)^n\,\frac{\sin x}{x}. \tag{A.16}$$

Найдем рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
J_{n+1/2}(x) &= (-1)^n\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,x^n\Big(\frac{d}{xdx}\Big)\Big(\frac{d}{xdx}\Big)^{n-1}\,\frac{\sin x}{x}=\\
&= (-1)^n\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,x^n\frac{d}{xdx}\,(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,x^{1-n}\cdot\Big[(-1)^{n-1}\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,x^{n-1}\Big(\frac{d}{xdx}\Big)^{n-1}\,\frac{\sin x}{x}\Big]=\\
&= -\sqrt{x}\,x^n\frac{d}{xdx}\,x^{1/2-n}\cdot J_{n-1+1/2}(x)=\\
&= -\sqrt{x}\,x^n\cdot\Big\{\frac{1}{x}\,(1/2-n)\,x^{-1/2-n}\cdot J_{n-1+1/2}(x)+\frac{1}{x}\,x^{1/2-n}\cdot\frac{d\,J_{n-1+1/2}(x)}{dx}\Big\}=\\
&= -\Big\{\frac{1/2-n}{x}\cdot J_{n-1+1/2}(x)+\frac{d\,J_{n-1+1/2}(x)}{dx}\Big\}
\end{aligned}$$

или

$$J_{n+1/2}(x) = (n-1/2)\,\frac{J_{(n-1)+1/2}(x)}{x}-\frac{d\,J_{(n-1)+1/2}(x)}{dx}. \tag{A.17}$$

Для первых индексов получим

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x},\\
J_{1+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big\{\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}\Big\},\\
J_{2+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big\{\Big(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\Big)\sin x-\frac{3}{x^2}\cos x\Big\},\\
J_{3+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big\{\Big(\frac{15}{x^4}-\frac{6}{x^2}\Big)\sin x+\Big(\frac{1}{x}-\frac{15}{x^3}\Big)\cos x\Big\},\\
J_{4+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big\{\Big(\frac{105}{x^5}-\frac{45}{x^3}+\frac{1}{x}\Big)\sin x+\Big(-\frac{105}{x^4}+\frac{10}{x^2}\Big)\cos x\Big\},\\
J_{5+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big\{\Big(\frac{945}{x^6}-\frac{420}{x^4}+\frac{15}{x^2}\Big)\sin x+\Big(-\frac{945}{x^5}+\frac{105}{x^3}-\frac{1}{x}\Big)\cos x\Big\},\\
J_{6+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\Big\{\Big(\frac{10395}{x^7}-\frac{4725}{x^5}+\frac{210}{x^3}-\frac{1}{x}\Big)\sin x+\Big(-\frac{10395}{x^6}+\frac{1260}{x^4}-\frac{21}{x^2}\Big)\cos x\Big\}.
\end{aligned} \tag{A.18}$$

	$(j_a 1 j \vert m_a m_b m)$	
	$m_b = 1$	$m_b = -1$
$j = j_a + 1$	$\left(\frac{(j_a+m)(j_a+m+1)}{(2j_a+2)(2j_a+2)}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{(j_a-m)(j_a-m+1)}{(2j_a+1)(2j_a+2)}\right)^{1/2}$
$j = j_a$	$-\left(\frac{(j_a+m)(j_a-m+1)}{2j_a(j_a+1)}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{(j_a-m)(j_a+m+1)}{2j_a(j_a+1)}\right)^{1/2}$
$j = j_a - 1$	$\left(\frac{(j_a-m)(j_a-m+1)}{2j_a(2j_a+1)}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{(j_a+m+1)(j_a+m)}{2j_a(2j_a+1)}\right)^{1/2}$

Таблица А.1: Коэффициенты Клебша-Гордона.

А.4 Коэффициенты Клебша-Гордона

Определим коэффициенты Клебша-Гордона, согласно Таблице ПА.1 из [33] (см. стр.317), имеющей вид: Используя таблицу А.1, находим

$$\begin{aligned}
(011\vert\, 2,-1,\,1) &= \sqrt{\frac{(j_a-m)(j_a-m+1)}{(2j_a+1)(2j_a+2)}} = \sqrt{\frac{(0-1)(0-1+1)}{(2\cdot 0+1)(2\cdot 0+2)}} = 0,\\
(011\vert\, 0,\,1,\,1) &= \sqrt{\frac{(j_a+m)(j_a+m+1)}{(2j_a+2)(2j_a+2)}} = \sqrt{\frac{(0+1)(0+1+1)}{(2\cdot 0+2)(2\cdot 0+2)}} = \sqrt{\frac{1}{2}},\\
(011\vert\, 0,-1,-1) &= \sqrt{\frac{(j_a-m)(j_a-m+1)}{(2j_a+1)(2j_a+2)}} = \sqrt{\frac{(0+1)(0+1+1)}{(2\cdot 0+1)(2\cdot 0+2)}} = \sqrt{\frac{1}{2}},\\
(011\vert -2,\,1,-1) &= \sqrt{\frac{(j_a+m)(j_a+m+1)}{(2j_a+2)(2j_a+2)}} = \sqrt{\frac{(0-1)(0-1+1)}{(2\cdot 0+2)(2\cdot 0+2)}} = 0;
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
(111\vert\, 2,-1,\,1) &= \sqrt{\frac{(j_a-m)(j_a+m+1)}{2j_a(j_a+1)}} = \sqrt{\frac{(1-1)(1+1+1)}{2\cdot 1\cdot(1+1)}} = 0,\\
(111\vert\, 0,\,1,\,1) &= -\sqrt{\frac{(j_a+m)(j_a-m+1)}{2j_a(j_a+1)}} = -\sqrt{\frac{(1+1)(1-1+1)}{2\cdot 1\cdot(1+1)}} = -\sqrt{\frac{1}{2}},\\
(111\vert\, 0,-1,-1) &= \sqrt{\frac{(j_a-m)(j_a+m+1)}{2j_a(j_a+1)}} = \sqrt{\frac{(1+1)(1-1+1)}{2\cdot 1\cdot(1+1)}} = \sqrt{\frac{1}{2}},\\
(111\vert -2,\,1,-1) &= -\sqrt{\frac{(j_a+m)(j_a-m+1)}{2j_a(j_a+1)}} = -\sqrt{\frac{(1-1)(1+1+1)}{2\cdot 1\cdot(1+1)}} = 0;
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
(211\vert\, 2,-1,\,1) &= \sqrt{\frac{(j_a+m+1)(j_a+m)}{2j_a(2j_a+1)}} = \sqrt{\frac{(2+1+1)(2+1)}{2\cdot 2\cdot(2\cdot 2+1)}} = \sqrt{\frac{3}{5}},\\
(211\vert\, 0,\,1,\,1) &= \sqrt{\frac{(j_a-m)(j_a-m+1)}{2j_a(2j_a+1)}} = \sqrt{\frac{(2-1)(2-1+1)}{2\cdot 2\cdot(2\cdot 2+1)}} = \sqrt{\frac{1}{10}},\\
(211\vert\, 0,-1,-1) &= \sqrt{\frac{(j_a+m+1)(j_a+m)}{2j_a(2j_a+1)}} = \sqrt{\frac{(2-1+1)(2-1)}{2\cdot 2\cdot(2\cdot 2+1)}} = \sqrt{\frac{1}{10}},\\
(211\vert -2,\,1,-1) &= \sqrt{\frac{(j_a-m)(j_a-m+1)}{2j_a(2j_a+1)}} = \sqrt{\frac{(2+1)(2+1+1)}{2\cdot 2\cdot(2\cdot 2+1)}} = \sqrt{\frac{3}{5}}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

А.5 Коэффициенты $C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}$ при $l_i = 0$

Рассмотрим коэффициенты $C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}$ при $l_i = 0$:

$$\begin{aligned} C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n} &= (-1)^{l_f+n+1-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}} (n, 1, l_{\rm ph}| -m-\mu', \mu', -m) \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2l_f+1)(2n+1)}{32\pi} \frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}}. \end{aligned} \tag{А.22}$$

Согласно (1.86), при $l_f = 1$, $l_{\rm ph} = 1$ и $n = 0$ имеем

$$m = -\mu' = \pm 1. \tag{А.23}$$

Коэффициент $C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}$ принимает вид:

$$\begin{aligned} C^{m\mu'}_{110} &= (-1)^{1+0+1-\mu'+0} (011|\, 0, \mu', -m) \sqrt{\frac{(2\cdot 1+1)\,(2\cdot 0+1)}{32\pi} \; \frac{(1-1)!}{(1+1)!} \; \frac{(0-0)!}{(0+0)!}} = \\ &= -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011|\, 0, \mu', -m). \end{aligned} \tag{А.24}$$

Учитывая значения (А.19) для следующих коэффициентов Клебша-Гордона:

$$(011|\, 0, 1, 1) \;=\; (011|\, 0, -1, -1) \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}},$$

получим

$$\begin{aligned} C^{-1-1}_{110} &= 0, \\ C^{-11}_{110} &= -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011|\, 0, 1, 1) &&= -\sqrt{\frac{3}{128\,\pi}} &= -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, \\ C^{1-1}_{110} &= -\sqrt{\frac{3}{64\pi}} \cdot (011|\, 0, -1, -1) &&= -\sqrt{\frac{3}{128\,\pi}} &= -\frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, \\ C^{11}_{110} &= 0. \end{aligned} \tag{А.25}$$

При $l_f = 1$, $l_{\rm ph} = 1$ и $n = 1$ свойство (А.23) выполняется также. Коэффициенты $C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}$ принимают вид:

$$\begin{aligned} C^{m\mu'}_{111} &= (-1)^{1+1+1-\mu'+0} (111|\, 0, \mu', -m) \sqrt{\frac{(2\cdot 1+1)\,(2\cdot 1+1)}{32\pi} \; \frac{(1-1)!}{(1+1)!} \; \frac{(1-0)!}{(1+0)!}} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111|\, 0, \mu', -m). \end{aligned} \tag{А.26}$$

Учитывая значения (А.20) для следующих коэффициентов Клебша-Гордона:

$$(111|\, 0, 1, 1) = -\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (111|\, 0, -1, -1) = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

получим

$$\begin{aligned} C^{-1-1}_{111} &= 0, \\ C^{-11}_{111} &= \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111|\, 0, 1, 1) &&= -\frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}, \\ C^{1-1}_{111} &= \sqrt{\frac{9}{64\pi}} \cdot (111|\, 0, -1, -1) &&= \frac{3}{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}, \\ C^{11}_{111} &= 0. \end{aligned} \tag{А.27}$$

При $l_f = 1$, $l_{\rm ph} = 1$ и $n = 2$ свойство (A.23) не выполняется. Имеем

$$\begin{aligned}
&C^{m\mu'}_{112} = \\
&= (-1)^{1+2+1-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}}(211|-m-\mu',\mu',-m)\sqrt{\frac{(2\cdot1+1)(2\cdot2+1)}{32\,\pi}\frac{(1-1)!}{(1+1)!}\frac{(2-|m+\mu'|)!}{(2+|m+\mu'|)!}} = \\
&= (-1)^{-\mu'+\frac{|m+\mu'|}{2}}\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{(2-|m+\mu'|)!}{(2+|m+\mu'|)!}}\cdot(211|-m-\mu',\mu',-m).
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Распишем при разных $m = \pm1$ и $\mu' = \pm1$:

$$\begin{aligned}
C^{-1-1}_{112} &= (-1)^{1+\frac{|-1-1|}{2}}\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{(2-|-1-1|)!}{(2+|-1-1|)!}}\cdot(211|\,1+1,-1,1) = \\
&= \sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{1}{4!}}\cdot(211|\,2,-1,1) = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2\,\pi}}\cdot(211|\,2,-1,1), \\
C^{-11}_{112} &= (-1)^{-1+\frac{|-1+1|}{2}}\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{(2-|-1+1|)!}{(2+|-1+1|)!}}\cdot(211|\,1-1,1,1) = \\
&= -\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}}\cdot(211|\,011) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot(211|\,011), \\
C^{1-1}_{112} &= (-1)^{1+\frac{|1-1|}{2}}\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{(2-|1-1|)!}{(2+|1-1|)!}}\cdot(211|-1+1,-1,-1) = \\
&= -\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}}\cdot(211|\,0,-1,-1) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot(211|\,0,-1,-1), \\
C^{11}_{112} &= (-1)^{-1+\frac{|1+1|}{2}}\sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{(2-|1+1|)!}{(2+|1+1|)!}}\cdot(211|-1-1,1,-1) = \\
&= \sqrt{\frac{15}{64\,\pi}\frac{1}{4!}}\cdot(211|\,-2,1,-1) = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2\,\pi}}\cdot(211|\,-2,1,-1).
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Используя найденные значения (A.21) для коэффициентов Клебша-Гордона:

$$(211|\,2,-1,\,1) = \sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad (211|\,0,\,1,\,1) = \sqrt{\frac{1}{10}},$$
$$(211|\,0,-1,-1) = \sqrt{\frac{1}{10}}, \quad (211|\,-2,\,1,-1) = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

получим

$$\begin{aligned}
C^{-1-1}_{112} &= \frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2\,\pi}}\cdot(211|\,2,-1,1) &&= \frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2\,\pi}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} &&= \frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, \\
C^{-11}_{112} &= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot(211|\,011) &&= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}} &&= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, \\
C^{1-1}_{112} &= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot(211|\,0,-1,-1) &&= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{1}{10}} &&= -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, \\
C^{11}_{112} &= \frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2\,\pi}}\cdot(211|\,-2,1,-1) &&= \frac{1}{16}\sqrt{\frac{5}{2\,\pi}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}} &&= \frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Выпишем значения вычисленных коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&C^{-1-1}_{110} = 0, && C^{-11}_{110} = -\frac{1}{8}\cdot\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, && C^{1-1}_{110} = -\frac{1}{8}\cdot\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, && C^{11}_{110} = 0; \\
&C^{-1-1}_{111} = 0, && C^{-11}_{111} = -\frac{3}{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}, && C^{1-1}_{111} = \frac{3}{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\,\pi}}, && C^{11}_{111} = 0; \\
&C^{-1-1}_{112} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, && C^{-11}_{112} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, && C^{1-1}_{112} = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}, && C^{11}_{112} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2\,\pi}}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

A.6 Функции $f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta)$

Рассмотрим функцию $f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta)$:

$$f_{l_f n}^{m\mu'}(\theta) = P_{l_f}^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta). \tag{A.32}$$

При $l_f = 1$ и $n = 0, 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} f_{10}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_0^{|m+\mu'|}(\cos\theta), \\ f_{11}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_1^{|m+\mu'|}(\cos\theta), \\ f_{12}^{m\mu'}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_2^{|m+\mu'|}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{A.33}$$

Распишем при разных $m = \pm 1$ и $\mu' = \pm 1$:

$$\begin{aligned} f_{10}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_0^2(\cos\theta) &&= 0, \\ f_{10}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_0^0(\cos\theta) &&= \sin^2\theta, \\ f_{10}^{1-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_0^0(\cos\theta) &&= \sin^2\theta, \\ f_{10}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_0^2(\cos\theta) &&= 0; \\[1ex] f_{11}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_1^2(\cos\theta) &&= 0, \\ f_{11}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_1^0(\cos\theta) &&= \sin^2\theta\cos\theta, \\ f_{11}^{1-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_1^0(\cos\theta) &&= \sin^2\theta\cos\theta, \\ f_{11}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_1^2(\cos\theta) &&= 0; \\[1ex] f_{12}^{-1,-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_2^2(\cos\theta) &&= 3\sin^4\theta, \\ f_{12}^{-11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_2^0(\cos\theta) &&= \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\,(3\cos^2\theta - 1), \\ f_{12}^{1-1}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_2^0(\cos\theta) &&= \tfrac{1}{2}\sin^2\theta\,(3\cos^2\theta - 1), \\ f_{12}^{11}(\theta) &= P_1^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_2^2(\cos\theta) &&= 3\sin^4\theta. \end{aligned} \tag{A.34}$$

Приложение B

Угловые интегралы

B.1 Интегралы I_E и I_M для частиц с ненулевым спином при произвольном l_i

Найдем интегралы:

$$
\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, \mu) \quad &= \quad \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i\, l_1,\, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph}\, l_{\rm ph},\, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\; d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu) \quad &= \quad \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i l_1,\, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_2,\, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\; d\Omega.
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

Согласно (1.61), векторные сферические гармоники $\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n})$ имеют вид ($\xi_0 = 0$):

$$
\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n}) = \sum_{\mu=\pm 1} (l, 1, j \,|\, m-\mu, \mu, m)\; Y_{l, m-\mu}(\mathbf{n})\; \boldsymbol{\xi}_\mu,
$$

где $(l, 1, j \,|\, m-\mu, \mu, m)$ — коэффициенты Клебша-Гордона. Подставляя эти функции в (B.1) и учитывая (4.82), получим

$$
\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, \mu) \quad &= \quad \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i \,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \;\times \\
&\times \quad \sum_{\mu''=\pm 1} (l_{\rm ph}, 1, l_{\rm ph} \,|\, \mu - \mu'', \mu'', \mu)\; Y^*_{l_{\rm ph},\, \mu-\mu''}(\mathbf{n}_{\rm r})\; \boldsymbol{\xi}^*_{\mu''}\; d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu) \quad &= \quad \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i \,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \;\times \\
&\times \quad \sum_{\mu''=\pm 1} (l_2, 1, l_{\rm ph} \,|\, \mu - \mu'', \mu'', \mu)\; Y^*_{l_2,\, \mu-\mu''}(\mathbf{n}_{\rm r})\; \boldsymbol{\xi}^*_{\mu''}\; d\Omega
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, \mu) \quad &= \quad \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i \,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; (l_{\rm ph}, 1, l_{\rm ph} \,|\, \mu - \mu', \mu', \mu) \;\times \\
&\times \quad \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y^*_{l_{\rm ph},\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu) \quad &= \quad \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i \,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; (l_2, 1, l_{\rm ph} \,|\, \mu - \mu', \mu', \mu) \;\times \\
&\times \quad \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y^*_{l_2,\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; d\Omega.
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

Здесь мы учли свойство ортогональности векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm 1}$. Подставляя в эти выражения сферическую функци $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, определенную, согласно (A.11):

$$
Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad = \quad (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\; i^l\; \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\; P_l^{|m|}(\cos\theta) \cdot e^{im\varphi},
$$

найдем угловой интеграл в (B.2):

$$\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y^*_{n,\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\; d\Omega \;=$$

$$= \int (-1)^{\frac{m_f+|m_f|}{2}}\, (-1)^{l_f}\, i^{l_f} \sqrt{\frac{2l_f+1}{4\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}}\; P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\cdot e^{-im_f\varphi}\times$$
$$\times\, (-1)^{\frac{m_i-\mu'+|m_i-\mu'|}{2}}\; i^{l_1} \sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}\frac{(l_1-|m_i-\mu'|)!}{(l_1+|m_i-\mu'|)!}}\; P^{|m_i-\mu'|}_{l_1}(\cos\theta)\cdot e^{i(m_i-\mu')\varphi}\times$$
$$\times\, (-1)^{\frac{\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}}\, (-1)^n\, i^n \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}}\; P^{|\mu-\mu'|}_{n}(\cos\theta)\cdot e^{i(-\mu+\mu')\varphi}\cdot\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= (-1)^{\frac{m_f+|m_f|+m_i-\mu'+|m_i-\mu'|+\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}}\; (-1)^{l_f+n}\; i^{l_f+l_1+n}\times$$
$$\times \sqrt{\frac{2l_f+1}{4\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}} \sqrt{\frac{2l_1+1}{4\pi}\frac{(l_1-|m_i-\mu'|)!}{(l_1+|m_i-\mu'|)!}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}}\times$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m_f+m_i-\mu'-\mu+\mu')\varphi}\, d\varphi\cdot \int\limits_0^{\pi} P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^{|m_i-\mu'|}_{l_1}(\cos\theta)\; P^{|\mu-\mu'|}_{n}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta. \tag{B.3}$$

Интеграл по φ отличен от нуля лишь при выполнении условия:

$$\mu = m_i - m_f. \tag{B.4}$$

Также получим ограничения:

$$n \geq |\mu-\mu'| = |m_i - m_f + \mu'|, \quad \mu = \pm 1. \tag{B.5}$$

Учитывая это, получим

$$\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y^*_{n,\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\; d\Omega =$$
$$= (-1)^{l_f+n+m_i-\mu'}\; i^{l_f+l_1+n+|m_f|+|m_i-\mu'|+|m_i-m_f-\mu'|}\;\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_1+1)\,(2n+1)}{16\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}\;\frac{(l_1-|m_i-\mu'|)!}{(l_1+|m_i-\mu'|)!}\;\frac{(n-|m_i-m_f-\mu'|)!}{(n+|m_i-m_f-\mu'|)!}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\pi} P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^{|m_i-\mu'|}_{l_1}(\cos\theta)\; P^{|m_i-m_f-\mu'|}_{n}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta. \tag{B.6}$$

Теперь распишем магнитный угловой интеграл:

$$I_M\,(l_i, l_f, l_\mathrm{ph}, l_1, \mu) \;=\; \sum_{\mu'=\pm1} (l_1, 1, l_i\,|\, m_i-\mu', \mu', m_i)\;(l_\mathrm{ph}, 1, l_\mathrm{ph}\,|\,\mu-\mu', \mu', \mu)\;\times$$
$$\times\;(-1)^{l_f+l_\mathrm{ph}+m_i-\mu'}\; i^{l_f+l_1+l_\mathrm{ph}+|m_f|+|m_i-\mu'|+|m_i-m_f-\mu'|}\;\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_1+1)\,(2l_\mathrm{ph}+1)}{16\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}\;\frac{(l_1-|m_i-\mu'|)!}{(l_1+|m_i-\mu'|)!}\;\frac{(l_\mathrm{ph}-|m_i-m_f-\mu'|)!}{(l_\mathrm{ph}+|m_i-m_f-\mu'|)!}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\pi} P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^{|m_i-\mu'|}_{l_1}(\cos\theta)\; P^{|m_i-m_f-\mu'|}_{l_\mathrm{ph}}(\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta. \tag{B.7}$$

Для электрического углового интеграла получим

$$\begin{aligned}
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu) \;=\; & \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i \,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; (l_2, 1, l_{\rm ph} \,|\, \mu - \mu', \mu', \mu) \times \\
& \times (-1)^{l_f + l_2 + m_i - \mu'}\; i^{l_f + l_1 + l_2 + |m_f| + |m_i - \mu'| + |m_i - m_f - \mu'|} \times \\
& \times \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_1+1)\,(2l_2+1)}{16\pi} \frac{(l_f - |m_f|)!}{(l_f + |m_f|)!} \,\frac{(l_1 - |m_i - \mu'|)!}{(l_1 + |m_i - \mu'|)!}\, \frac{(l_2 - |m_i - m_f - \mu'|)!}{(l_2 + |m_i - m_f - \mu'|)!}} \times \\
& \times \int\limits_0^{\pi} P_{l_f}^{|m_f|}(\cos\theta)\; P_{l_1}^{|m_i - \mu'|}(\cos\theta)\; P_{l_2}^{|m_i - m_f - \mu'|}(\cos\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Введем коэффициент

$$\begin{aligned}
C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'} \;=\; & (-1)^{l_f + l_2 + m_i - \mu'}\; i^{l_f + l_1 + l_2 + |m_f| + |m_i - \mu'| + |m_i - m_f - \mu'|} \times \\
& \times (l_1, 1, l_i \,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; (l_2, 1, l_{\rm ph} \,|\, m_i - m_f - \mu', \mu', m_i - m_f) \times \\
& \times \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_1+1)\,(2l_2+1)}{16\pi} \frac{(l_f - |m_f|)!}{(l_f + |m_f|)!} \,\frac{(l_1 - |m_i - \mu'|)!}{(l_1 + |m_i - \mu'|)!}\, \frac{(l_2 - |m_i - m_f - \mu'|)!}{(l_2 + |m_i - m_f - \mu'|)!}}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

и функцию

$$f_{l_1 l_f l_2}^{m_i m_f \mu'}(\theta) = P_{l_1}^{|m_i - \mu'|}(\cos\theta)\; P_{l_f}^{|m_f|}(\cos\theta)\; P_{l_2}^{|m_i - m_f - \mu'|}(\cos\theta). \tag{B.10}$$

В результате мы получаем угловые интегралы в таком виде:

$$\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, \mu) \quad & = \; \delta_{\mu, m_i - m_f} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_{\rm ph}}^{m_i m_f \mu'} \int\limits_0^{\pi} f_{l_1 l_f l_{\rm ph}}^{m_i m_f \mu'}(\theta)\; \sin\theta\, d\theta, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu) \; & = \; \delta_{\mu, m_i - m_f} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'} \int\limits_0^{\pi} f_{l_1 l_f l_2}^{m_i m_f \mu'}(\theta)\; \sin\theta\, d\theta.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Определим дифференциальные выражения от этих угловых интегралов по углу θ так:

$$\begin{aligned}
\frac{d\, I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, \mu)}{\sin\theta\, d\theta} \quad & = \; \delta_{\mu, m_i - m_f} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_{\rm ph}}^{m_i m_f \mu'} \cdot f_{l_1 l_f l_{\rm ph}}^{m_i m_f \mu'}(\theta), \\
\frac{d\, I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2, \mu)}{\sin\theta\, d\theta} \; & = \; \delta_{\mu, m_i - m_f} \sum_{\mu'=\pm 1} C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'} \cdot f_{l_1 l_f l_2}^{m_i m_f \mu'}(\theta).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

B.2 Интегралы I_E и I_M для частиц с ненулевым спином при $l_i = 0$

Вычислим угловой интеграл (4.68) при $l_i = 0$:

$$I\,(l_f, l_{\rm ph}, n, \mu) \;=\; \int Y_{l_f m_f}^{*}(\mathbf{n}_{\rm r}^{f})\; \mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_{\rm r}^{i})\; \mathbf{T}_{l_{\rm ph} n, \mu}^{*}(\mathbf{n}_{\rm ph})\, d\Omega. \tag{B.13}$$

Используя значения коэффициентов Клебша-Гордона

$$(110|1,-1,0) = (110|-1,1,0) = \sqrt{\frac{1}{3}}, \tag{B.14}$$

из (4.51) найдем

$$\mathbf{T}_{01,0}(\mathbf{n}_{\rm r}^{i}) = \sum_{\mu=\pm 1} (110|-\mu\mu 0)\; Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_{\rm r}^{i})\; \boldsymbol{\xi}_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu=\pm 1} Y_{1,-\mu}(\mathbf{n}_{\rm r}^{i})\; \boldsymbol{\xi}_{\mu} \tag{B.15}$$

и из (B.13) получим

$$I\left(l_{\mathrm{f}}, l_{\mathrm{ph}}, n, \mu\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu'=\pm1} \boldsymbol{\xi}_{\mu'} \int Y^*_{l_f m_{\mathrm{f}}}(\mathbf{n}^{\mathrm{f}}_{\mathrm{r}})\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}^{i}_{\mathrm{r}})\, \mathbf{T}^*_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{ph}})\, d\Omega. \tag{B.16}$$

Подставляя сюда выражение для векторной сферической гармоники в нужных индексах:

$$\mathbf{T}_{l_{\mathrm{ph}} n,\mu}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}}) = \sum_{\mu''=\pm1} (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu'', \mu'', \mu)\, Y_{n,\mu-\mu''}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, \boldsymbol{\xi}_{\mu''} \tag{B.17}$$

и учитывая условие ортогональности векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm1}$, получим

$$I\left(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n, \mu\right) = \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{\mu'=\pm1} (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, Y^*_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, d\Omega. \tag{B.18}$$

Используя явный вид (A.11) для сферической функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, распишем угловой интеграл в (B.18) так:

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, Y^*_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, d\Omega = \\
&= \int (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} (-1)^l\, i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta) \cdot e^{-im\varphi} \times \\
&\times (-1)^{\frac{-\mu'+|\mu'|}{2}}\, i^1 \sqrt{\frac{2\cdot1+1}{4\pi} \frac{(1-|\mu'|)!}{(1+|\mu'|)!}}\, P_1^{|\mu'|}(\cos\theta) \cdot e^{-i\mu'\varphi} \times \\
&\times (-1)^{\frac{\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}} (-1)^n\, i^n \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}}\, P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos\theta) \cdot e^{i(-\mu+\mu')\varphi}\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \\
&= (-1)^{\frac{m+|m|-\mu'+1+\mu-\mu'+|\mu-\mu'|}{2}} (-1)^{l+n} i^{l+n+1} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|\mu-\mu'|)!}{(n+|\mu-\mu'|)!}} \times \\
&\times \int_0^{2\pi} e^{i(-m-\mu'-\mu+\mu')\varphi}\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi} P_l^{|m|}(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_n^{|\mu-\mu'|}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Интеграл по φ отличен от нуля лишь при выполнении условий:

$$m_f = -\mu = \pm1, \quad l_f \geq 1, \quad n \geq |\mu - \mu'| = |m_f + \mu'|. \tag{B.20}$$

Учитывая это, получим

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{lm}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, Y_{1,-\mu'}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, Y^*_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\mathrm{r}})\, d\Omega = \\
&= (-1)^{l+n-\mu'+1+\frac{|m+\mu'|}{2}}\, i^{l+n+1} \sqrt{\frac{3\,(2l+1)\,(2n+1)}{32\pi} \frac{(l-1)!}{(l+1)!} \frac{(n-|m+\mu'|)!}{(n+|m+\mu'|)!}} \times \\
&\times \int_0^{\pi} P_l^1(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_n^{|m+\mu'|}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Теперь распишем полный угловой интеграл (B.18), выполняя интегрирование по углу φ:

$$\begin{aligned}
I\left(l_f, l_{\mathrm{ph}}, n, \mu\right) &= \delta_{m_f,-\mu}\, i^{l_f+n+1} (-1)^{l_f+n+1} \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2n+1)}{32\pi} \frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!}} \times \\
&\times \sum_{\mu'=\pm1} (-1)^{-\mu'+\frac{|-\mu+\mu'|}{2}} (n, 1, l_{\mathrm{ph}} | \mu - \mu', \mu', \mu) \sqrt{\frac{(n-|\mu'-\mu|)!}{(n+|\mu'-\mu|)!}} \times \\
&\times \int_0^{\pi} P^1_{l_f}(\cos\theta)\, P_1^1(\cos\theta)\, P_n^{|\mu'-\mu|}(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta.
\end{aligned}$$

Введем коэффициент $C^{m\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}$:

$$C^{\mu\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n} = i^{l_f+n+1}\,(-1)^{l_f+n+1-\mu'+\frac{|\mu'-\mu|}{2}}\,(n,1,l_{\rm ph}|\mu-\mu',\mu',\mu)\times \times\sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2n+1)}{32\pi}\,\frac{(l_f-1)!}{(l_f+1)!}\,\frac{(n-|\mu'-\mu|)!}{(n+|\mu'-\mu|)!}} \tag{B.22}$$

и функцию $f^{\mu\mu'}_{l_f n}(\theta)$:

$$f^{\mu\mu'}_{l_f n}(\theta) = P^1_{l_f}(\cos\theta)\;P^1_1(\cos\theta)\;P^{|\mu'-\mu|}_n(\cos\theta). \tag{B.23}$$

В результате мы получаем полный угловой интеграл:

$$I\,(l_f,l_{\rm ph},n,\mu) = \delta_{m_f,-\mu}\sum_{\mu'=\pm1} C^{\mu\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n}\int\limits_0^\pi f^{\mu\mu'}_{l_f n}(\theta)\;\sin\theta\,d\theta. \tag{B.24}$$

Определим дифференциальное выражение от этого интеграла по углу θ так:

$$\frac{d\,I\,(l_f,l_{\rm ph},n,\mu)}{\sin\theta\,d\theta} = \delta_{m_f,-\mu}\sum_{\mu'=\pm1} C^{\mu\mu'}_{l_f l_{\rm ph} n} f^{\mu\mu'}_{l_f n}(\theta). \tag{B.25}$$

B.3 Интегралы $\tilde{I}$ для частиц с ненулевым спином при произвольном l_i

Теперь мы вычислим интеграл $\tilde{I}\,(l_f,l_{\rm ph},n,\mu)$, введенный в (4.71), и интеграл $\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},n,\mu)$, введенный в (4.80). Чтобы сузить работу по поиску решений, заметим, что достаточно искать решение для второго интеграла. Найдя его, затем мы сможем получить решения также и для первого интеграла, просто выбрав $l_i=0$. Итак, рассмотрим интеграл:

$$\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},n,\mu) = \boldsymbol{\xi}_\mu\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\,Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\,\mathbf{T}^*_{l_{\rm ph}n,\,\mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\,d\Omega. \tag{B.26}$$

Подставляя сюда функцию $\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n})$ в виде (4.51) в нужных индексах:

$$\mathbf{T}_{l_{\rm ph}n,\,\mu}(\mathbf{n}_{\rm r}) = \sum_{\mu'=\pm1}(n,1,l_{\rm ph}\,|\,\mu-\mu',\mu',\mu)\;Y_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\;\boldsymbol{\xi}_{\mu'},$$

получим

$$\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},n,\mu) = \boldsymbol{\xi}_\mu\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\,Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\cdot\sum_{\mu'=\pm1}(n,1,l_{\rm ph}\,|\,\mu-\mu',\mu',\mu)\;Y^*_{n,\mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\;\boldsymbol{\xi}^*_{\mu'}\;d\Omega.$$

Учитывая свойство ортогональности векторов $\boldsymbol{\xi}_{\pm1}$, получаем

$$\tilde{I}\,(l_i,l_f,l_{\rm ph},n,\mu) = (n,1,l_{\rm ph}\,|\,0,\mu,\mu)\times\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\,Y_{l_i m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\,Y^*_{n0}(\mathbf{n}_{\rm r})\,d\Omega. \tag{B.27}$$

Перепишем угловой интеграл в (B.27) так:

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y_{l_i,\, m_i}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y^*_{n0}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\; d\Omega = \\
= \;& \int (-1)^{\frac{m_f+|m_f|}{2}}\, (-1)^{l_f}\, i^{l_f} \sqrt{\frac{2l_f+1}{4\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}}\; P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\cdot e^{-i m_f\varphi}\times \\
\times \;& (-1)^{\frac{m_i+|m_i|}{2}}\, i^{l_i} \sqrt{\frac{2l_i+1}{4\pi}\frac{(l_i-|m_i|)!}{(l_i+|m_i|)!}}\; P^{|m_i|}_{l_i}(\cos\theta)\cdot e^{i m_i\varphi}\times \\
\times \;& (-1)^n\, i^n \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}\; P^0_n(\cos\theta)\cdot \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \\
= \;& (-1)^{\frac{m_f+|m_f|+m_i+|m_i|}{2}}\, (-1)^{l_f+n}\, i^{l_f+l_i+n}\cdot \sqrt{\frac{2l_f+1}{4\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}\;\frac{2l_i+1}{4\pi}\frac{(l_i-|m_i|)!}{(l_i+|m_i|)!}\;\frac{2n+1}{4\pi}}\;\times \\
\times \;& \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m_f+m_i)\varphi}\, d\varphi\cdot \int\limits_0^{\pi} P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^{|m_i|}_{l_i}(\cos\theta)\; P^0_n(\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta.
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Интеграл по φ отличен от нуля лишь при выполнении условия:

$$m_i = m_f. \tag{B.29}$$

Учитывая это, получим

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y_{l_i,\, m_i}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\, Y^*_{n0}(\mathbf{n}_\mathrm{r})\; d\Omega = \\
&= (-1)^{l_f+n+m_i+|m_i|}\; i^{l_f+l_i+n}\cdot \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_i+1)\,(2n+1)}{16\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}\;\frac{(l_i-|m_i|)!}{(l_i+|m_i|)!}}\;\times \\
&\times \int\limits_0^{\pi} P^{|m_i|}_{l_i}(\cos\theta)\; P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^0_n(\cos\theta)\cdot\sin\theta\, d\theta
\end{aligned} \tag{B.30}$$

и находим полный интеграл:

$$\begin{aligned}
\tilde I\,(l_i, l_f, l_\mathrm{ph}, n, \mu) \;&=\; \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_i+1)\,(2n+1)}{16\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}\;\frac{(l_i-|m_i|)!}{(l_i+|m_i|)!}}\;\times \\
\times\, (n, 1, l_\mathrm{ph}\,|\,0, \mu, \mu)\; &(-1)^{l_f+n+m_i+|m_i|}\; i^{l_f+l_i+n}\cdot \int\limits_0^{\pi} P^{|m_i|}_{l_i}(\cos\theta)\; P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^0_n(\cos\theta)\;\sin\theta\, d\theta.
\end{aligned} \tag{B.31}$$

Введем коэффициент

$$\begin{aligned}
C^{m_i\mu}_{l_i l_f l_\mathrm{ph} n} \;&=\; (-1)^{l_f+n+m_i+|m_i|}\; i^{l_f+l_i+n}\cdot (n, 1, l_\mathrm{ph}\,|\,0, \mu, \mu)\times \\
&\times\; \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_i+1)\,(2n+1)}{16\pi}\frac{(l_f-|m_i|)!}{(l_f+|m_i|)!}\;\frac{(l_i-|m_i|)!}{(l_i+|m_i|)!}}
\end{aligned} \tag{B.32}$$

и используем функцию (B.10), переписав ее в нужных индексах так:

$$f^{m_i m_i 0}_{l_i l_f l_n}(\theta) = P^{|m_i|}_{l_i}(\cos\theta)\; P^{|m_i|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^0_{l_n}(\cos\theta). \tag{B.33}$$

В результате мы получаем угловой интеграл:

$$\tilde I\,(l_i, l_f, l_\mathrm{ph}, n, \mu) \;=\; \delta_{m_i, m_f}\; C^{m_i\mu}_{l_i l_f l_\mathrm{ph} n} \int\limits_0^{\pi} f^{m_i m_i 0}_{l_i l_f n}(\theta)\;\sin\theta\, d\theta. \tag{B.34}$$

Определим дифференциальное выражение от этого интеграла по углу θ так:

$$\frac{d\,\tilde I\,(l_i, l_f, l_\mathrm{ph}, n, \mu)}{\sin\theta\, d\theta} \;=\; \delta_{m_i, m_f}\; C^{m_i\mu}_{l_i l_f l_\mathrm{ph} n}\, f^{m_i m_i 0}_{l_i l_f n}(\theta). \tag{B.35}$$

B.4 Интегралы для вылетающих фрагментов с нулевым спином при произвольном l_i

Найдем интегралы:

$$\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} \mu h_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i\, l_1,\, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph}\, l_{\rm ph},\, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\; d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} h_\mu \int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}^f_{\rm r})\, \mathbf{T}_{l_i l_1,\, m_i}(\mathbf{n}^i_{\rm r})\, \mathbf{T}^*_{l_{\rm ph} l_2,\, \mu}(\mathbf{n}_{\rm ph})\; d\Omega.
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Подставляя сюда векторные сферические гармоники $\mathbf{T}_{jl,m}(\mathbf{n})$ в виде (1.61), получим

$$\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i m_f} \mu h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i\,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; (l_{\rm ph}, 1, l_{\rm ph}\,|\, \mu - \mu', \mu', \mu) \times \\
&\times \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y^*_{l_{\rm ph},\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; d\Omega, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2) &= \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{m_i m_f} h_\mu \sum_{\mu'=\pm 1} (l_1, 1, l_i\,|\, m_i - \mu', \mu', m_i)\; (l_2, 1, l_{\rm ph}\,|\, \mu - \mu', \mu', \mu) \times \\
&\times \int Y^*_{l_f m}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r}) \cdot Y^*_{l_2,\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; d\Omega.
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Здесь мы учли свойство ортогональности векторов $\xi_{\pm 1}$ и соотношение (1.80). Подставляя сюда явный вид (A.11) сферических функций $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, найдем угловой интеграл в (B.37):

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})\, Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\, Y^*_{n,\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; d\Omega\; = \\
&= (-1)^{\frac{m_f + |m_f| + m_i - \mu' + |m_i - \mu'| + \mu - \mu' + |\mu - \mu'|}{2}}\; (-1)^{l_f + n}\; i^{l_f + l_1 + n} \times \\
&\times \sqrt{\frac{2l_f + 1}{4\pi} \frac{(l_f - |m_f|)!}{(l_f + |m_f|)!}}\; \sqrt{\frac{2l_1 + 1}{4\pi} \frac{(l_1 - |m_i - \mu'|)!}{(l_1 + |m_i - \mu'|)!}}\; \sqrt{\frac{2n + 1}{4\pi} \frac{(n - |\mu - \mu'|)!}{(n + |\mu - \mu'|)!}} \times \\
&\times \int\limits_0^{2\pi} e^{i(-m_f + m_i - \mu' - \mu + \mu')\varphi}\; d\varphi \cdot \int\limits_0^{\pi} P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^{|m_i - \mu'|}_{l_1}(\cos\theta)\; P^{|\mu - \mu'|}_{n}(\cos\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta.
\end{aligned} \tag{B.38}$$

Интеграл по φ отличен от нуля лишь при условиях:

$$\mu = m_i - m_f, \quad n \ge |\mu - \mu'| = |m_i - m_f + \mu'|, \quad \mu = \pm 1. \tag{B.39}$$

Учитывая это, получим

$$\begin{aligned}
&\int Y^*_{l_f m_f}(\mathbf{n}_{\rm r})\, Y_{l_1,\, m_i-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\, Y^*_{n,\, \mu-\mu'}(\mathbf{n}_{\rm r})\; d\Omega = \\
&= (-1)^{l_f + n + m_i - \mu'}\; i^{l_f + l_1 + n + |m_f| + |m_i - \mu'| + |m_i - m_f - \mu'|} \times \\
&\times \sqrt{\frac{(2l_f + 1)\,(2l_1 + 1)\,(2n + 1)}{16\pi} \frac{(l_f - |m_f|)!}{(l_f + |m_f|)!}\; \frac{(l_1 - |m_i - \mu'|)!}{(l_1 + |m_i - \mu'|)!}\; \frac{(n - |m_i - m_f - \mu'|)!}{(n + |m_i - m_f - \mu'|)!}} \times \\
&\times \int\limits_0^{\pi} P^{|m_f|}_{l_f}(\cos\theta)\; P^{|m_i - \mu'|}_{l_1}(\cos\theta)\; P^{|m_i - m_f - \mu'|}_{n}(\cos\theta) \cdot \sin\theta\; d\theta
\end{aligned} \tag{B.40}$$

и для полных угловых интегралов I_M и I_E находим окончательные решения:

$$\begin{aligned}
I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1) &= \sum_{m_i m_f} (m_i - m_f)\, h_{m_i - m_f} \sum_{\mu'=\pm 1} C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_{\rm ph}} \int\limits_0^{\pi} f^{m_i m_f \mu'}_{l_f l_1 l_{\rm ph}}(\theta)\; \sin\theta\, d\theta, \\
I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2) &= \sum_{m_i m_f} h_{m_i - m_f} \sum_{\mu'=\pm 1} C^{m_i m_f \mu'}_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_2} \int\limits_0^{\pi} f^{m_i m_f \mu'}_{l_f l_1 l_2}(\theta)\; \sin\theta\, d\theta,
\end{aligned} \tag{B.41}$$

где мы ввели коэффициент

$$\begin{aligned}C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'} &= (-1)^{l_f+l_2+m_i-\mu'}\ i^{l_f+l_1+l_2+|m_f|+|m_i-\mu'|+|m_i-m_f-\mu'|} \times \\ &\times (l_1, 1, l_i\,|\, m_i-\mu', \mu', m_i)\ (l_2, 1, l_{\rm ph}\,|\, m_i-m_f-\mu', \mu', m_i-m_f) \times \\ &\times \sqrt{\frac{(2l_f+1)\,(2l_1+1)\,(2l_2+1)}{16\pi}\frac{(l_f-|m_f|)!}{(l_f+|m_f|)!}\ \frac{(l_1-|m_i-\mu'|)!}{(l_1+|m_i-\mu'|)!}\ \frac{(l_2-|m_i-m_f-\mu'|)!}{(l_2+|m_i-m_f-\mu'|)!}}\end{aligned} \tag{B.42}$$

и функцию

$$f_{l_f l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'}(\theta) = P_{l_f}^{|m_f|}(\cos\theta)\ P_{l_1}^{|m_i-\mu'|}(\cos\theta)\ P_{l_2}^{|m_i-m_f-\mu'|}(\cos\theta). \tag{B.43}$$

Определим дифференциальные выражения от этих интегралов по углу θ так:

$$\begin{aligned}\frac{d\,I_M\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1)}{\sin\theta\,d\theta} &= \sum_{m_i m_f} (m_i-m_f)\,h_{m_i-m_f} \sum_{\mu'=\pm1} C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_{\rm ph}}^{m_i m_f \mu'} \cdot f_{l_f l_1 l_{\rm ph}}^{m_i m_f \mu'}(\theta), \\ \frac{d\,I_E\,(l_i, l_f, l_{\rm ph}, l_1, l_2)}{\sin\theta\,d\theta} &= \sum_{m_i m_f} h_{m_i-m_f} \sum_{\mu'=\pm1} C_{l_i l_f l_{\rm ph} l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'} \cdot f_{l_f l_1 l_2}^{m_i m_f \mu'}(\theta).\end{aligned} \tag{B.44}$$

Приложение C

Мультипольный анализ: диффереинальные матричные элементы при первых значениях l_i и l_f

Чтобы яснее увидеть, как меняются разные мультипольные вклады в зависимости от угла θ, вы распишем диффереинальные матричные элементы (4.97) и (4.98) для первых нескольких значений l_i и l_f при произвольном l_{ph}, явно выделив угловую зависимость:

1. $l_i = 0,\ l_f = 0$ (при $m_i = m_f = 0$):

$$\frac{dp^M_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} = \frac{dp^E_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} = 0, \qquad \frac{d\tilde{p}^M_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} = c_7\ P^0_{l_{\text{ph}}}, \qquad \frac{d\tilde{p}^E_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} = c_8\ P^0_{l_{\text{ph}}-1} - c_9\ P^0_{l_{\text{ph}}+1}. \tag{C.1}$$

2. $l_i = 0,\ l_f = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p^M_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= -\sin^2\theta \sum_{\mu'=\pm1} c_2^{\mu'}\cdot P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\text{ph}}}, && m_i = 0,\ m_f = \pm1,\\
\frac{d\,p^E_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \sin^2\theta \sum_{\mu'=\pm1} \Big\{c_5^{\mu'}\ P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\text{ph}}-1} - c_6^{\mu'}\ P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\text{ph}}+1}\Big\}, && m_i = 0,\ m_f = \pm1,\\
\frac{d\,\tilde{p}^M_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= c_7\cdot\cos\theta\ P^0_{l_{\text{ph}}}, && m_i = 0,\ m_f = 0,\\
\frac{d\,\tilde{p}^E_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \cos\theta\ \Big\{c_8\ P^0_{l_{\text{ph}}-1} - c_9\ P^0_{l_{\text{ph}}+1}\Big\}, && m_i = 0,\ m_f = 0.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

3. $l_i = 0,\ l_f = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\,p^M_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= -3\ \sin^2\theta\ \cos\theta \sum_{\mu'=\pm1} c_2^{\mu'}\cdot P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\text{ph}}}, && m_i = 0,\ m_f = \pm1,\\
\frac{d\,p^E_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= 3\ \sin^2\theta\ \cos\theta \sum_{\mu'=\pm1} \Big\{c_5^{\mu'}\ P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\text{ph}}-1} - c_6^{\mu'}\ P^{|\mu-\mu'|}_{l_{\text{ph}}+1}\Big\}, && m_i = 0,\ m_f = \pm1,\\
\frac{d\,\tilde{p}^M_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \frac{c_7}{2}\,(3\ \cos^2\theta - 1)\ P^0_{l_{\text{ph}}}, && m_i = 0,\ m_f = 0,\\
\frac{d\,\tilde{p}^E_{l_{\text{ph}}\mu}}{\sin\theta\,d\theta} &= \frac{1}{2}\,(3\ \cos^2\theta - 1)\ \Big\{c_8\ P^0_{l_{\text{ph}}-1} - c_9\ P^0_{l_{\text{ph}}+1}\Big\}, && m_i = 0,\ m_f = 0.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

4. $l_i = 1$, $l_f = 1$:

При $|m_i - m_f| = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\, p^{M}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\, d\theta} &= \cos\theta \cdot \sum_{\mu'=\pm 1} \Big\{ -\,\delta_{m_i,0}\; 3\, c_2^{\mu'}\; \sin^2\theta + \delta_{m_i,\pm 1} \Big[\delta_{m_i \mu'}\; c_1^{m_i} - c_2^{\mu'}\; P_2^{|m_i-\mu'|}\; \Big] \Big\} \cdot P_{l_{\rm ph}}^{|\mu-\mu'|}, \\
\frac{d\, p^{E}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\, d\theta} &= \cos\theta \cdot \sum_{\mu'=\pm 1} \Big\{ \delta_{m_i,0}\; 3\, \sin^2\theta\, c_5^{\mu'}\; + \delta_{m_i,\pm 1} \Big[\delta_{m_i \mu'}\; c_3^{m_i} + c_5^{\mu'}\; P_2^{|m_i-\mu'|} \Big] \Big\}\, P_{l_{\rm ph}-1}^{|\mu-\mu'|} \quad - \\
&- \cos\theta \cdot \sum_{\mu'=\pm 1} \Big\{ \delta_{m_i,0}\; 3\, \sin^2\theta\, c_6^{\mu'} + \delta_{m_i,\pm 1} \Big[\delta_{m_i \mu'}\; c_4^{m_i} + c_6^{\mu'}\; P_2^{|m_i-\mu'|} \Big] \Big\}\, P_{l_{\rm ph}+1}^{|\mu-\mu'|},
\end{aligned} \tag{C.4}$$

При $m_i = m_f = 0, \pm 1$,

$$\frac{d\, \tilde{p}^{M}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\, d\theta} = c_7 \cdot (P_1^{|m_i|})^2\, P^0_{l_{\rm ph}}, \quad \frac{d\, \tilde{p}^{E}_{l_{\rm ph}\mu}}{\sin\theta\, d\theta} = (P_1^{|m_i|})^2 \Big\{ c_8\; P^0_{l_{\rm ph}-1} - c_9\; P^0_{l_{\rm ph}+1} \Big\}. \tag{C.5}$$

Коэффициенты $c_1^{\mu'} \ldots c_6^{\mu'}$ и $c_7 \ldots c_9$ приведены в формулах (4.99)–(4.101).

Литература

[1] М. Я. Амусья, В. М. Буймистров, Б. А. Зон и др., *Поляризационное тормозное излучение частиц и атомов* (Наука, Москва, 1987), 335 стр.

[2] М. Я. Амусья, *Тормозное излучение* (Энергоатомиздат, Москва, 1990), 208 стр.

[3] В. А. Плюйко, В. А. Поярков, *Ядерное тормозное излучение в реакциях с протонами*, ЭЧАЯ **18** (Вып. 2), 374–418 (1987).

[4] В. В. Каманин, А. Куглер, Ю. Э. Пенионжкевич, И. С. Баткин, И. В. Копытин, *Эмиссия высокоэнергетических гамма-квантов в реакциях с тяжелыми ионами при нерелятивистских энергиях*, ЭЧАЯ **20** (Вып. 4), 743–829 (1989).

[5] http://www.nndc.bnl.gov

[6] M. I. Dyakonov, I. V. Gornyi, *Electromagnetic radiation by a tunneling charge*, Phys. Rev. Lett. **76** (19), 3542–3545 (1996).

[7] M. I. Dyakonov, *Bremsstrahlung spectrum in α decay*, Phys. Rev. **C60**, 037602 (1999) [4 pages], nucl-th/9903016.

[8] N. Takigawa, Y. Nozawa, K. Hagino, A. Ono and D. M. Brink, *Bremsstrahlung in α decay*, Phys. Rev. **C59** (2), R593–R597 (1999), nucl-th/9809001.

[9] H. Boie, H. Scheit, U. D. Jentschura, F. Köck, M. Lauer, A. I. Milstein, I. S. Terekhov, and D. Schwalm, *Bremsstrahlung in α decay reexamined*, Phys. Rev. Lett. **99**, 022505 (2007), arXiv:0706.2109.

[10] U. D. Jentschura, A. I. Milstein, I. S. Terekhov, H. Boie, H. Scheit, and D. Schwalm, *Quasiclassical description of bremsstrahlung accompanying α decay including quadrupole radiation*, Phys. Rev. **C77**, 014611 (2008) [7 pages] .

[11] C. A. Bertulani, D. T. de Paula and V. G. Zelevinsky, *Bremsstrahlung radiation by a tunneling particle: A time-dependent description*, Phys. Rev. **C60** (3), 031602 (1999) [4 pages], nucl-ex/9812009.

[12] S. Misicu, M. Rizea and W. Greiner, *Emission of electromagnetic radiation in α-decay*, Journ. Phys. G **27**, 993–1003 (2001).

[13] W. van Dijk and Y. Nogami, *Model study of bremsstrahlung in alpha decay*, Few-body Systems Supplement **14**, 229–232 (2003).

[14] O. Serot, N. Carjan and D. Strottman, *Transient behaviour in quantum tunneling: time-dependent approach to alpha decay*, Nucl. Phys. **A569**, 562–574 (1994).

[15] W. van Dijk and Y. Nogami, *Novel expression for the wave function of a decaying quantum systems*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2867–2871 (1999).

[16] W. van Dijk and Y. Nogami, *Analytical approach to the wave function of a decaying quantum system*, Phys. Rev. **C65**, 024608 (2002) (14 pages).

[17] B. Ivlev and V. Gudkov, *New enhanced tunneling in nuclear processes*, Phys. Rev. **C69**, 037602 (2004) [4 pages], nucl-th/0307012.

[18] V. V. Flambaum and V. G. Zelevinsky, *Quantum Münchhausen effect in tunneling*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3108–3111 (1999), nucl-th/9812076.

[19] I. S. Batkin, I. V. Kopytin, and T. A. Churakova, *Internal bremsstrahlung accompanying α decay*, Yad. Fiz. (Sov. Journ. Nucl. Phys.) **44**, 1454–1458 (1986) [Translation: Sov. J. Nucl. Phys. **44**, 1454 (1986)].

[20] T. Papenbrock, G. F. Bertsch, *Bremsstrahlung in α-decay*, Phys. Rev. Lett. **80** (19), 4141–4144 (1998), nucl-th/9801044.

[21] V. Yu. Denisov, H. Ikezoe, *Alpha-nucleus potential for alpha-decay and sub-barrier fusion*, Phys. Rev. **C72**, 064613 (2005) [9 pages], nucl-th/0510082.

[22] S. P. Maydanyuk, and V. S. Olkhovsky, *Does sub-barrier bremsstrahlung in α-decay of ^{210}Po exist?* Prog. Theor. Phys. **109** (2), 203–211 (2003), nucl-th/0404090.

[23] S. P. Maydanyuk, and V. S. Olkhovsky, *Angular analysis of bremsstrahlung in α-decay*, Europ. Phys. Journ. **A28** (3), 283–294 (2006); nucl-th/0408022.

[24] S. P. Maydanyuk, and S. V. Belchikov, *Bremsstrahlung in alpha-decay: angular analysis of spectra*, Prob. At. Sci. Tech.. Ser.: Nucl. Phys. Inv. (44) **5**, 19–21 (2004), nucl-th/0404013.

[25] G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Giardina, G. Fazio, C. Saccá, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, *Radiation of bremsstrahlung accompanying the α-decay of heavy nuclei*, Radiation Effects and Defects in Solid **164** (5–6), 283–286 (2009).

[26] G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, and C. Saccá, *Bremsstrahlung emission during α-decay of* ^{226}Ra, Mod. Phys. Lett. **A23** (31), 2651–2663 (2008), arXiv:0804.2640.

[27] G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, C. Saccá, N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, D. A. Smirnov, S. P. Maydanyuk, and V. S. Olkhovsky, *Bremsstrahlung emission accompanying alpha-decay of* ^{214}Po, Europ. Phys. Journ. **A36** (1), 31–36 (2008).

[28] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Giardina, G. Fazio, G. Mandaglio, M. Manganaro, *Bremsstrahlung emission accompanying α-decay of deformed nuclei*, Nucl. Phys. **A823** (1–4), 38–46 (2009).

[29] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля* (Наука, Москва, 1980), стр. 320.

[30] С. де Бенедетти, *Ядерные взаимодействия* (Атомиздат, Москва, 1968), стр. 475 [in Russian; eng. variant: S. de Benedetti, Nuclear Interactions, John Wiley and Sons, Inc., New York - London - Sydney].

[31] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, курс Теоретической физики*, Том 3 (Наука, Москва, 1989) стр. 768 — [in Russian; eng. variant: Oxford, Uk, Pergamon, 1982].

[32] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика, курс Теоретической физики*, т. 4 (Наука, Москва, 1989), 704 стр. — [in Russian; eng. variant: Oxford, Uk, Pergamon, 1982, 652 p.].

[33] И. А. Айзенберг, В. Грайнер, *Механизмы возбуждения ядра*, т. 2 (Атомиздат, Москва, 1973), 348 с. [in Russian; Engl.: J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Excitation mechanisms of the nucleus. Electromagnetic and weak interactions* (North-Holland publishing company, Amsterdam-London, 1970)].

[34] B. Buck, A. C. Merchant and S. M. Perez, *Half-lives of favored alpha decays from nuclear ground states*, Atomic Data and Nuclear Data Tables **54** (1), 53–74 (1993).

[35] A. D'Arrigo, N. V. Eremin, G. Fazio, G. Giardina, M. G. Glotova, T. V. Klochko, M. Sacchi, and A. Taccone, *Investigation of bremsstrahlung emission in α-decay of heavy nuclei*, Phys. Lett. **B332** (1–2), 25–30 (1994).

[36] J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki and H. Yuki, *Bremsstrahlung emission in α-decay and tunneling motion of α-particle*, Journ. Phys. **G23**, 1451–1457 (1997).

[37] J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki and H. Yuki, *Bremsstrahlung in α-decay of ^{210}Po: do α-particles emit photons in tunneling?* Phys. Rev. Lett. **79** (3), 371–374 (1997).

[38] N. V. Eremin, G. Fazio and G. Giardina, *Comment on "Bremsstrahlung in α-decay of ^{210}Po: do α-particles emit photons in tunneling?"* Phys. Rev. Lett. **85** (14), 3061 (2000).

[39] J. Kasagi, H. Yamazaki, N. Kasajima, T. Ohtsuki and H. Yuki, *Replay on Comment on "Bremsstrahlung in α-decay of ^{210}Po: Do α-particles emit photons in tunneling?"* Phys. Rev. Lett. **85** (14), 3062 (2000).

[40] S. Peltonen, D. S. Delion, and J. Suhonen, *α-decay spectroscopy of deformed nuclei reexamined*, Phys. Rev. **C78** (3), 034608 (2008) [7 pages].

[41] T. Ohtsuki, H. Yuki, K. Hirose, T. Mitsugashira, *Status of the electron accelerator for radioanalytical studies at Tohoku University*, Czech. Journ. Phys. **56**, D391–D398 (2006).

[42] W. So, and Y. Kim, *Energy and charge dependency for bremsstrahlung in α-decay*, Journ. Korean Phys. Soc. **37** (3), 202–208 (2000).

[43] E. V. Tkalya, *Bremsstrahlung in α-decay and "interference of space regions"*, Phys. Rev. **C60** (5), 054612–054615 (1999).

[44] P. Möller, J. R. Nix, W. D. Myers, and W. J. Swiatecki, *Half-lives of favored alpha decays from nuclear ground states*, At. Dat. Nucl. Dat. Tabl. **59**, 185 (1995).

[45] S. Åberg, P. B. Semmes, and W. Nazarewicz, *Spherical proton emitters*, Phys. Rev. **C56**, 1762–1773 (1997).

[46] A. Sobiczewski, and K. Pomorski, *Description of structure and properties of superheavy nuclei*, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 292–349 (2007).

[47] M. Bolsterli, E. O. Fiset, J. R. Nix, and J. L. Norton, *New calculation of fission barriers for heavy and superheavy nuclei*, Phys. Rev. **C5** (3), 1050–1077 (1972).

[48] G. Royer, *On the coefficients of the liquid drop model mass formulae and nuclear radii*, Nucl. Phys. **A807** (3–4), 105–118 (2008).

[49] G. Audi, A. H. Wapstra, C. Thibault, *The AME2003 atomic mass evaluation: (II). Tables, graphs and references*, Nucl. Phys. **A729** (1), 337–676 (2003).

[50] Z. Büyükmumcu, M. Kildir, *Monte Carlo calculation of the de-excitation of fission fragments of* ^{252}Cf(sf) *within multimodal random neck rupture model*, Phys. Rev. **C74** (5), 054613 (2006) [12 pages].

[51] C. Budtz-Jorgensen, H.-H. Knitter, *Simultaneous investigation of fission fragments and neutrons in* ^{252}Cf(SF), Nucl. Phys. **A490** (2), 307–328 (1988).

[52] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, *Bremsstrahlung in alpha-decay: angular analysis of spectra*, Prob. At. Sci. Tech.. Ser.: Nucl. Phys. Inv. (44) **5**, 19–21 (2004), nucl-th/0404013.

[53] J. Kasagi, H. Hama, K. Yoschida, M. Sakurai, K. Ishii, *Nucleus-nucleus bremsstrahlung observed in the spontaneous fission of* ^{252}Cf, Proc. Fifth Int. Conf. Clustering Aspects in Nucl. and Subnucl. Systems (Kyoto, 1988), Journ. Phys. Soc. Jpn. Suppl. **58**, 620–625 (1989).

[54] V. A. Varlachev, G. N. Dudkin, V. N. Padalko, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **71** (11), 1635–1639 (2007).

[55] F. S. Dietrich, J. C. Browne, W. J. O'Connell, and M. J. Kay, *Spectrum of* γ *rays in the 8 to 20-MeV range from* ^{252}Cf *spontaneous fission*, Phys. Rev. **C10** (2), 795–802 (1974).

[56] C. J. Luke, C. A. Gossett, and R. Vandenbosch, *Search for hign energy* γ *rays from the spontaneous fission of* ^{252}Cm, Phys. Rev. **C44** (4), 1548–1554 (1991).

[57] H. van der Ploeg, J. C. S. Bacelar, A. Buda, C. R. Laurens, A. van der Woude, J. J. Gaardhoje, Z. Zelazny, G. van 't Hof, and N. Kalantar-Nayestanaki, *Emission of photons in spontaneous fission of* ^{252}Cf, Phys. Rev. **C52** (4), 1915–1923 (1995).

[58] N. V. Eremin, A. A. Paskhalov, S. S. Markochev, E. A. Tsvetkov, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio, G. Giardina and M. V. Romaniuk, Int. J. Mod. Phys. **E19**, 1183 (2010).

[59] D. J. Hofman, B. B. Back, C. P. Montoya, S. Schadmand, R. Varma and P. Paul, *High energy* γ *rays from* ^{252}Cf *spontaneous fission*, Phys. Rev. **C47** (3), 1103–1107 (1993).

[60] S. P. Maydanyuk, S. V. Belchikov, *Problem of nuclear decay by proton emission in fully quantum consideration: Calculations of penetrability and role of boundary condition*, Journ. Mod. Phys. **2** (6), 572–585 (2011) [open access].

[61] S. A. Gurvitz, G. Kälbermann, *Decay width and the shift of a quasistationary state*, Phys. Rev. Lett. **59** (3), 262–265 (1987).

[62] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez, *Ground state proton emission from heavy nuclei*, Phys. Rev. **C45** (4), 1688–1692 (1992).

[63] S. Åberg, P. B. Semmes, W. Nazarewicz, *Spherical proton emitters*, Phys. Rev. **C56** (4), 1762–1773 (1997).

[64] H. Esbensen and C. N. Davids, *Coupled-channels treatment of deformed proton emitters*, Phys. Rev. **C63** (1), 014315 (2000) [13 pages].

[65] K. Hagino, *Role of dynamical particle-vibration coupling in reconciliation of the* $d_{3/2}$ *puzzle for spherical proton emitters*, Phys. Rev. **C64** (4), 041304(R) (2001) [5 pages].

[66] S. A. Gurvitz, P. B. Semmes, W. Nazarewicz and T. Vertse, *Modified two-potential approach to tunneling problems*, Phys. Rev. **A69** (4), 042705 (2004) [8 pages].

[67] D. S. Delion, R. J. Liotta, R. Wyss, *Systematics of proton emission*, Phys. Rev. Lett. **96**, 072501 (2006), *nucl-th/0601070.*

[68] J. M. Dong, H. F. Zhang and G. Royer, *Proton radioactivity within a generalized drop model*, Phys. Rev. **C79** (5), 054330 (2009) [6 pages].

[69] D. S. Delion, *Universal decay rule for reduced widths*, Phys. Rev. **C80** (2), 024310 (2009) [7 pages].

[70] I. V. Kopitin, M. A. Dolgopolov, T. A. Churakova, A. S. Kornev, Yad. Fiz. **60** (5), 869–879 (1997).

[71] F. D. Jr. Becchetti, and G. W. Greenlees, *Nucleon-nucleus optical-model parameters,* $A > 40$*,* $E < 50$ *MeV*, Phys. Rev. **182** (4), 1190–1209 (1969).

[72] Dao T. Khoa, and G. R. Satchler, *Generalized folding model for elastic and inelastic nucleus-nucleus scattering using realistic density dependent nucleon-nucleon interactions*, Nucl. Phys. **A668**, 3–41 (2000).

[73] E. V. Tkalya, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **116**, 390 (1999) [Translation: Sov. Phys. JETP **89** (2), 208–218 (1999)].

[74] M. Ya. Amusia, B. A. Zon, and I. Yu. Kretinin, *Polarization bremsstrahlung in* α *decay*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **132** (2007) 387 [Translation: Sov. Phys. JETP **105** (2), 343–346 (2007)].

[75] S. P. Maydanyuk, *Multipolar approach for description of bremsstrahlung during* α*-decay and unified formula of the bremsstrahlung probability*, The Open Nucl. Part. Phys. J. **2**, 17–33 (2009) [open access].

[76] S. P. Maydanyuk, *Multipolar approach for description of bremsstrahlung during* α*-decay*, Jour. Phys. Study. **13** (3), 3201 (2009) [15 стр., in Ukrainian, open access].

[77] H. W. Sobel, A. A. Hruschka, W. R. Kropp, J. Lathrop, F. Reines, M. F. Crouch, B. S. Meyer and J. P. F. Sellschop, *High-energy gamma rays from spontaneous fission of* ^{238}U, Phys. Rev. **C7** (4), 1564–1579 (1973).

[78] H. van der Ploeg, R. Postma, J. C. Bacelar, T. van den Berg, V. E. Iacob, J. R. Jongman, and A. van der Woude, *Large gamma anisotropy observed in the* ^{252}Cf *spontaneous-fission process*, Phys. Rev. Lett. **68** (21), 3145–3147 (1992).

[79] V. A. Varlachev, G. N. Dudkin and V. N. Padalko, Bull. Rus. Acad. Sci.: Phys. **71**, 1635 (2007).

[80] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio and G. Giardina, *Bremsstrahlung emission of high energy accompanying spontaneous of* ^{252}Cf, Phys. Rev. **C82**, 014602 (2010).

[81] Deepak Pandit, S. Mukhopadhyay, Srijit Bhattacharya, Surajit Pal, A. De and S. R. Banerjee, *Coherent bremsstrahlung and GDR width from 252Cf cold fission*, Phys. Lett. **B690** (5), 473–476 (2010).

[82] S. P. Maydanyuk, V. S. Olkhovsky, G. Mandaglio, M. Manganaro, G. Fazio and G. Giardina, *Bremsstrahlung emission of photons accompanying ternary fission of* ^{252}Cf, Talk in the International Symposium *"Quasifission Process in Heavy Ion Reactions"* (Messina, Italy, 8-9 Nov. 2010), Journ. Phys.: Conf. Ser. **282**, 012016 (2011).

[83] B. Kursunoglu, *Proton bremsstrahlung*, Phys. Rev. **105** (6), 1846–1853 (1957).

[84] A. D'Arrigo, N. L. Doroshko, N. V. Eremin, G. Giardina, B. N. Govorov, V. S. Olkhovsky, A. Taccone, *Bremsstrahlung study of nuclear reaction dynamics: the* ^{16}O+p *reaction*, Nucl. Phys. **A549** (3), 375–386 (1992).

[85] A. D'Arrigo, N. L. Doroshko, N. V. Eremin, G. Fazio, G. Giardina, B. V. Govorov, V. S. Olkhovsky, A. Taccone, *Delay-advance phenomenon observed by bremsstrahlung spectrum of the* $^{12}\mathrm{C}+p$ *collision*, Nucl. Phys. **A564** (2), 217–226 (1993).

[86] Q. K. K. Liu, Y. C. Tang, and H. Kanada, *Microscopic study of* $p+\alpha$ *bremsstrahlung*, Phys. Rev. **C42** (5), 1895–1898 (1990).

[87] D. Baye and P. Descouvemont, *Microscopic description of nucleus-nucleus bremsstrahlung*, Nucl. Phys. **A443**, 302–320 (1985).

[88] D. Baye, C. Sauwens, P. Descouvemont, and S. Keller, *Accurate treatment of Coulomb contribution in nucleus-nucleus bremsstrahlung*, Nucl. Phys. **A529**, 467–484 (1991).

[89] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1981) стр. 432.

[90] K. Nakayama, *High-energy photons in neutron-proton and proton-nucleus collisions*, Phys. Rev. **C39** (4), 1475–1487 (1989).

[91] V. Herrmann, J. Speth, K. Nakayama, *Nucleon-nucleon bremsstrahlung at intermediate energies*, Phys. Rev. **C43** (2), 394–415 (1991).

[92] M. K. Liou, and Z. M. Ding, *Theory of bremsstrahlung amplitudes in the soft photon approximation*, Phys. Rev. **C35** (2), 651–667 (1987).

[93] M. K. Liou, D. Lin, and B. F. Gibson, *Anatomy of the soft photon approximation in hadron-hadron bremsstrahlung*, Phys. Rev. **C47** (3), 973–990 (1993).

[94] M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, *Novel soft-photon analysis of* $pp\gamma$ *below pion-production threshold*, Phys. Lett. **B345** (4), 372–378 (1995).

[95] M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, *Erratum*, Phys. Lett. **B355**, 606(E) (1995).

[96] M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, *Pauli principle in the soft-photon approach to proton-proton bremsstrahlung*, Phys. Rev. **C54** (4), 1574–1584 (1996).

[97] Yi Li, M. K. Liou, and W. M. Schreiber, *Proton-proton bremsstrahlung calculation: Studies of the off-shell proton electromagnetic vertex and of pseudoscalar vs pseudovector* πN *couplings*, Phys. Rev. **C57** (2), 507–524 (1998).

[98] Yi Li, M. K. Liou, R. Timmermans, and B. F. Gibson, *Noncoplanarity effects in proton-proton bremsstrahlung*, Phys. Rev. **C58** (4), R1880–R1883 (1998).

[99] R. G. E. Timmermans, B. F. Gibson, Yi Li, and M. K. Liou, *Noncoplanarity in proton-proton bremsstrahlung*, Phys. Rev. **C65**, 014001 (2001) [15 pages].

[100] M. K. Liou, T. D. Penninga, R. G. E. Timmermans, and B. F. Gibson, *Soft-photon analysis of nucleon-nucleon bremsstrahlung: Anomalous magnetic moment effects*, Phys. Rev. **C69** (1), 011001 (2004) [5 pages].

[101] Y. Li, M. K. Liou, and W. M. Schreiber, *Proton-proton bremsstrahlung calculation: Comparison with recent high-precision experimental results*, Phys. Rev. **C72** (2), 024005 (2005) [4 pages].

[102] R. G. E. Timmermans, T. D. Penninga, B. F. Gibson, and M. K. Liou, *Nucleon-nucleon bremsstrahlung: Anomalous magnetic moment effects*, Phys. Rev. **C73** (3), 034006 (2006) [20 pages].

[103] Yi Li, M. K. Liou, W. M. Schreiber, and B. F. Gibson, *Proton-proton bremsstrahlung: consequences of different on on-shell-point conditions*, Phys. Rev. **C84** (3), 034007 (2011) [10 pages].

[104] S. P. Maydanyuk, *Multipolar model of bremsstrahlung accompanying proton decay of nuclei*, Jour. Phys. **G38** (8), 085106 (2011); arXiv:1102.2067.

[105] S. D. Kurgalin, Yu. M. Chuvilskiy, and T. A. Churakova, Izv. Acad. Nauk: Ser. Fiz. **65**, 672 (2001) [in Russian].

[106] F. E. Low, *Bremsstrahlung of Very Low-Energy Quanta in Elementary Particle Collisions*, Phys. Rev. **110** (4), 974–977 (1958).

[107] H. Feshbach, D. R. Yennie, *Radiation of low energy quanta in nuclear reactions*, Nucl. Phys. **37**, 150–171 (1962).

[108] Н. Ф. Нелипа, *Физика элементарных частиц* (Высшая школа, Москва, 1977), 608 стр.

[109] K. Nakayama, G. Bertsch, *High energy photon production in nuclear collisions*, Phys. Rev. **C34** (6), 2190–2200 (1986).

[110] J. Edington, B. Rose, *Nuclear bremsstrahlung from 140 MeV protons*, Nucl. Phys. **89** (3), 523–552 (1966).

[111] B. A. Remington, M. Blann, and G. F. Bertsch, *n-p bremsstrahlung interpretation of high energy gamma rays from heavy-ion collisions*, Phys. Rev. **C35** (5), 1720–1729 (1987).

[112] M. Kwato Njock, M. Maurel, H. Nifenecker, J. A. Pinston, F. Schussler, D. Barneoud, S. Drissi, J. Kern, J. P. Vorlet, *Nuclear bremsstrahlung production in proton-nucleus reactions at 72 MeV*, Phys. Lett. **B207** (3), 269–272 (1988).

[113] S. D. Kurgalin, Yu. M. Chuvilskiy, and T. A. Churakova, Vestnik VGU, Ser. Fiz. Mat. **1**, 21–26 (2004) [in Russian].

[114] S. P. Maydanyuk, *Model for bremsstrahlung emission accompanying interactions between protons and nuclei from low energies up to intermediate energies: Role of magnetic emission*, Phys. Rev. **C86** (1), 014618 (2012), [21 pages], arXiv: 1203.1498.

[115] K. Heyde, *The Nuclear Shell Model* (Springer Verlag, Berlin, 1990).

[116] V. Yu. Denisov and A. A. Khudenko, *Alpha-decay half-lives, alpha-capture and alpha-nucleus potential*, Phys. Rev. **C79**, 054614 (2009) [23 pages], arXiv:0902.0677.

[117] V. Yu. Denisov and A. A. Khudenko, *Alpha decays to ground and excited states of heavy deformed nuclei*, Phys. Rev. **C80**, 034603 (2009) [10 pages].

[118] Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента* (Наука, Ленинград, 1975), 439 стр.

[119] J. Todd, *Survey of Numerical Analysis* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1962).

[120] M. J. Seaton, NUMER*, a code for Numerov integrations of Coulomb functions*, Com. Phys. Comm. **146** (2), 254–260 (2002).

[121] N. Michel, *Precise Coulomb wave functions for a wide range of complex l, η and z*, Com. Phys. Comm. **176** (3), 232–249 (2007).