МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

Я. Й. Бурак, Ю. К. Рудавський, М. А. Сухорольський

АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНИХ ОБОЛОНОК

Львів
“Інтелект-Захід”
2007

ББК 22.21; 22.161
Б 912
УДК 539.3; 517.95

Друкується за постановою вченої ради
Національного університету "Львівська політехніка"

Відповідальний редактор – кандидат фізико-математичних наук, професор **А. Ф. Барвінський**

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук, професор **В. А. Осадчук**,
доктор фізико-математичних наук, професор **Є. Я. Чапля**,
доктор технічних наук, професор **А. О. Сяський**

Я. Й. Бурак, Ю. К. Рудавський, М. А. Сухорольський
Б 912 **Аналітична механіка локально навантажених оболонок.** – Львів: "Інтелект-Захід", 2007. – 240 с.

ISBN 966-7597-63-6

Викладено послідовнісний підхід до побудови різних варіантів рівнянь теорії оболонок, формулювання та розв'язування задач про локальне навантаження тонкостінних пружних тіл. Рівняння теорії оболонок одержано з просторових рівнянь із використанням методів наближення функцій послідовностями частинних сум рядів за поліномами Лежандра та малими параметрами. Розв'язки задач про вимушені та власні коливання кусково-однорідних оболонок, оболонок з отворами, вирізами та масивними включеннями, а також контактних задач одержано методом граничних інтегральних рівнянь із використанням послідовнісного подання функцій Гріна.

Для студентів, аспірантів та наукових працівників.

Іл. 30. Бібліогр. 120.

Ya. J. Burak, Yu. K. Rudavskyy, M. A. Sukhorolskyy
Analitical Mechanics of Locally Loaded Shells. – Lviv: "Intelekt-Zakhid", 2007. – 240 p.

Sequential approach to constructing different variants of equations of the theory of shells, as well as to formulating and solving problems on local loadings of elastic bodies with thin walls is presented. Equations of the theory of shells are obtained from space equations applying the methods of approximation of functions by sequences of partial sums of series according to Legendre polynomials and small parameters. The solutions of problems on forced and proper oscillations of piecehomogeneous shells, and those with holes, cuts and massive inclusions, as well as contact problems are obtained by employing the method of boundary integral equations based on the sequential representation of Green functions.

For students and scientific workers.

Fig. 30. Ref. 120.

ББК 22.21; 22.161

ISBN 966-7597-63-6

ЗМІСТ

ВСТУП

У механіці деформівного твердого тіла вагоме місце займають задачі встановлення напружено-деформованого стану локально навантажених пружних тіл, зокрема, задачі про нагрів тіл джерелами тепла та дію зусиль, які зосереджені у точках або розподілені на частині тіла чи частині границі тіла. Розв'язки задач про дію зусиль, зосереджених у точках (сингулярні розв'язки рівнянь теорії пружності), використовуються в інженерних розрахунках. Вони також є основою для інтегрального подання розв'язків складніших задач механіки суцільного середовища та числових методів їх розв'язування. При формулюванні задач такого типу важливим є вибір вихідних математичних моделей (навантаження, форми тіла та взаємодії тіла з зовнішнім середовищем). Надмірне спрощення вихідних моделей (моделювання локальної дії зосередженими у точках зусиллями, моделювання геометрії реального тіла тілом з кутовими точками чи ребрами, моделювання взаємодії з середовищем як взаємодії з абсолютно твердим тілом) може призвести до невідповідності розв'язків реальному стану тіл [18, 28–30, 60, 62, 81, 84,88, 99, 103, 107, 116].

Визначення напружено-деформованого стану локально навантажених тонкостінних пружних тіл (тонкостінних елементів, таких як "пластини", "оболонки", "шари", "покриття") за використання рівнянь теорії пружності ускладнюється тим, що відповідні крайові задачі є погано обумовленими і, до того ж, тонкостінні тіла, як правило, є анізотропними, а вихідні рівняння подаються у криволінійних системах координат. Використання рівнянь теорії оболонок для розв'язування задач такого типу, хоч і спрощує побудову їх розв'язків, однак, внаслідок постулювання законів розподілу переміщень і напружень по товщині тіл, виникають певні обмеження щодо застосовності математичних моделей локальних навантажень та математичних моделей взаємодії тіл із зовнішнім середовищем. Так, у межах теорій оболонок типу Тимошенка (коли розподіл переміщень і напружень за товщиною постулюється лінійним законом) локалізація навантажень на бічних поверхнях і локалізація зовнішніх об'ємних сил можуть бути враховані лише за координатами серединної поверхні. Ступінь локалізації навантажень на лицевих поверхнях також впливає на розподіл переміщень та напружень за товщиною і цей розподіл може суттєво відрізнятися від лінійного. Природно, що ефективні розв'язки задач про локальне навантаження тонкостінних тіл можуть бути побудовані за умов формулювання відповідних крайових задач у межах теорії пружності з наступним їх зведенням до двовимірних задач за урахування відповідності математичних моделей навантажень, деформування тонкостінних тіл тощо.

Двовимірні математичні моделі деформування тонкостінних пружних тіл (теорії оболонок) можна класифікувати за методами їх побудови на дві групи, а саме – побудовані гіпотезно-апроксимаційним і послідовнісно-апроксимаційним методами. За першого підходу, ґрунтуючись на аналізі задач про деформування тонкостінних пружних тіл, які є крайовими задачами теорії пружності з малими параметрами, формулюють гіпотези щодо розподілу кінематичних та статичних характеристик, а рівняння теорії оболонок одержують, зазвичай, за допомогою варіаційних принципів теорії пружності.

За другого підходу в межах теорії пружності формулюють крайові задачі з малими параметрами, а двовимірні математичні моделі тонкостінних тіл будують шляхом наближення шуканих величин цих задач послідовностями частинних сум рядів за координатами або малими параметрами, що по суті є послідовнісним поданням математичних моделей деформування тонкостінних тіл.

В інженерній практиці найуживанішими [15, 21, 36, 49, 61, 63, 102, 112, 113, 117] є математичні моделі тонких пластин і оболонок, які ґрунтуються на гіпотезі Кірхгофа-Лява (прямолінійні елементи, перпендикулярні до серединної поверхні, не деформуються і залишаються прямолінійними та перпендикулярними до серединної поверхні деформованої оболонки), і у яких також нехтується нормальними до серединної поверхні напруженнями. Потреби розрахунку оболонок, які взаємодіють між собою та з іншими тілами, анізотропних оболонок та покрить, а також низка неузгодженостей класичної теорії сприяли побудові уточнених математичних моделей оболонок, які враховують поперечні лінійні та зсувні деформації. При побудові математичних моделей деформування оболонок, які враховують поперечні зсувні деформації, приймається (менш жорстка ніж в класичній теорії) гіпотеза щодо нормального лінійного елемента: нормальний елемент до серединної поверхні недеформованої оболонки не деформується, однак, він не обов’язково є нормальним до серединної поверхні деформованої оболонки. Різні варіанти уточнених теорій оболонок і пластин, які враховують лінійні та зсувні поперечні деформації, запропоновано в роботах [2, 22 – 26, 30, 50, 52, 67, 73].

У роботах [4, 21, 23, 24, 31, 32, 39, 58, 68, 72, 77, 94, 98] розвинуто методи послідовнісного подання двовимірних математичних моделей деформування тонкостінних пружних тіл, в основі яких лежить апроксимація переміщень і напружень послідовностями частинних сум рядів за системами функцій від товщинної координати або малими параметрами.

У математичній фізиці, зокрема, в теорії пружності для моделювання дії зовнішніх фізичних полів, локалізованих в областях, діаметри яких співмірні з товщиною оболонки, використовується як дельта-функція, так і дельтоподібні функції [14, 25, 46, 47, 55, 79, 91, 92 96, 100, 107]. Використання дельта-функції продиктоване насамперед досконалістю відповідного математичного апарату. Крім того, сингулярні розв’язки крайових задач, які відповідають дії зосереджених зусиль на оболонку, застосовують для подання в інтегральній формі розв’язків задач про навантаження оболонок силами, розподіленими в довільних областях. Сингулярні розв’язки закладені також в основу методу інтегральних рівнянь розв’язання крайових задач для довільних однозв’язних і багатозв’язних областей, контактних задач тощо. Ефективними (з міркувань побудови сингулярних розв’язків) є методи, які ґрунтуються на використанні інтегральних перетворень та розвинень у ряди [27, 28, 30 – 32, 34, 55, 64, 78, 102, 103]. Для побудови числових розв’язків задач про дію на оболонку зусиль, які зосереджені у точках, використовуються розв’язки задач про дію на оболонку розподілених на площадках зусиль (узагальнені розв’язки). Ефективними також є методи прискорення збіжності рядів, які ґрунтуються на зведенні до звичайних рядів, виділенні в явному вигляді сингулярних частин розв’язків, асимптотичних методах, методах узагальненого підсумовування рядів [32, 38, 57, 66, 76]. Природно, що швидкість збіжності рядів (які відображають узагальнені розв'язки задач про локальне навантаження оболонок), суттєво залежить від параметрів, які визначають область локалізації та гладкість функцій, тобто моделей локальної дії фізичних полів та середовища.

Задачі про локальне навантаження тонкостінних пружних тіл є некоректними в сенсі застосування найбільш поширеного у теорії пружності методу Фур'є, оскільки формально знайдені цим методом розв'язки подаються у вигляді розбіжних рядів (у класичному розумінні суми). Одним із шляхів вирішення цієї проблеми є послідовнісний підхід до побудови узагальнених розв'язків задач такого типу і, зокрема, подання узагальнених розв'язків у вигляді границь слабко збіжних послідовностей функцій [58, 92, 95, 96, 100, 101, 106].

Безпосередньо пов'язаними з задачею про дію на оболонку об'ємних сил, які локалізовані за координатами серединної поверхні і розподілені за заданим законом за товщинною координатою (що встановлюються у відповідності до теорії оболонок), є задачі про побудову функцій Гріна для крайових задач теорії оболонок і на цій основі формулювання граничних інтегральних рівнянь і визначення напружено-деформованого стану багатозв'язних пластин та оболонок [5, 8, 20, 11, 40, 41, 45, 54, 65, 97, 101,105, 109, 114]. Задача про локальне поверхневе навантаження оболонок пов'язана з формулюванням та розв'язуванням інтегральних рівнянь контактних задач теорії пластин та оболонок [1, 23, 57, 69, 84, 89, 116].

Послідовнісний підхід до побудови узагальнених розв'язків некоректно поставлених крайових задач ще не набув широкого застосування у теорії пружності. Проведені у даній роботі дослідження частково вирішують низку проблем, які виникають при застосуванні методів послідовнісного подання узагальнених розв'язків задач теорії пружності.

У першому розділі наведені основні відомості з теорії поверхонь, зокрема, поверхонь обертання. Сформульовано основні задачі теорії пружності для ортотропного та трансверсально-ізотропного шарів у криволінійних координатах. Геометричні рівняння та рівняння рівноваги для тонкого шару (у розумінні відношення товщини до найменшого радіуса кривини серединної поверхні) спрощені до рівнянь із незалежними від товщинної координати коефіцієнтами – форма, яка є зручною для застосування методу Фур'є.

У другому розділі запропоновано і систематизовано методику побудови теорій оболонок, яка ґрунтується на використанні апроксимації невідомих величин крайових задач теорії пружності послідовностями частинних сум рядів Фур'є за поліномами Лежандра. Проаналізовано два підходи до редукції тривимірних крайових задач теорії пружності для тонкого шару (у сенсі відношення товщини до найменшого радіуса кривини серединної поверхні) до двовимірних. В основу цих підходів закладено два способи апроксимації функцій послідовностями частинних сум рядів за поліномами Лежандра. Перший підхід приводить до структурно простих рівнянь, які, зазвичай, використовуються для розрахунку пластин і оболонок, на лицевих поверхнях яких задаються зусилля. В основу другого підходу закладено умовну апроксимацію переміщень та напружень поліномами; додатково реалізується умова неперервності напружень на лицевих поверхнях при наближенні до даних ізсередини шару. Одержані при цьому двовимірні математичні моделі деформування шару можуть використовуватися для розрахунку покрить і тонких шарів, на лицевих поверхнях яких задаються як напруження, так і переміщення. У межах другого підходу вирази для переміщень точок лицевих поверхонь містять доданки, які пропорційні поверхневим навантаженням, що природно регуляризує розв'язки (некоректно поставлених у розумінні існування класичних розв'язків) крайових задач із мішаними граничними умовами на лицевих поверхнях шару.

Із використанням згаданих вище підходів отримано основні рівняння довільних наближень розв'язків задач про визначення термопружного стану криволінійного шару, а також рівняння для перших наближень, які є відповідно математичною моделлю Тимошенка і модифікованою до неї математичною моделлю.

У третьому розділі розвинуто метод побудови (у межах теорій оболонок Тимошенка) спрощених математичних моделей деформування оболонок. В основу методу закладено ідею послідовнісного підходу, а саме – наближення шуканих величин послідовностями частинних сум рядів за введеними малими параметрами.

Запропоновано низку спрощених математичних моделей деформування оболонок типу Тимошенка, у яких деякі компоненти тензора деформацій є нехтовно малими: за незмінних по товщині жорстких поворотів відносно нормалі до серединної поверхні (узагальнення класичної моделі оболонок), за відсутності нормальних жорстких поворотів, за відсутності поперечних зсувних деформацій (спрощення класичної моделі оболонок). У межах кожної із побудованих математичних моделей деформування оболонок проаналізовано ключові рівняння для циліндричної і сферичної оболонок. Показано, що прийняття відповідних гіпотез не змінює типу диференціальних рівнянь вихідної теорії оболонок.

Модифікована математична модель деформування оболонки (за відсутності жорстких поворотів відносно нормалі до серединної поверхні) ґрунтується на припущенні про нехтовну малість жорстких поворотів щодо нормалі до серединної поверхні. У межах такої математичної моделі сформульовані відповідні граничні задачі. Одержано необхідні і достатні умови застосовності спрощених математичних моделей оболонок, які встановлюють обмеження на тангенціальні переміщення точок границі серединної поверхні.

Для задач про згин пластинки за відсутності нормальних жорстких поворотів вихідна система рівнянь зводиться до бігармонічного й гармонічного рівнянь. Ця модель уточнює класичну модель згину пластинки, у межах якої функція прогину є потенціальною функцією поля кутів повороту нормалі до серединної поверхні.

Побудовано розв'язки задачі про локальне поверхневе навантаження шарнірно закріпленої циліндричної панелі. Проведено числовий аналіз розв'язків задачі, які одержані за допомогою рівнянь теорії оболонок Тимошенка, класичної теорії оболонок і теорії оболонок у припущенні відсутності нормальних жорстких поворотів.

У четвертому розділі розглядається гіпотетичний підхід до побудови теорій оболонок. Підхід ґрунтується на варіаційних формулюваннях відповідних задач. Записано взаємнодвоїсті узагальнені варіаційні принципи теорії пружності у криволінійних координатах. Апроксимуючи переміщення і напруження в криволінійному шарі поліномами за товщинною координатою, спрощено відповідні функціонали енергії і сформульовано взаємнодвоїсті узагальнені варіаційні принципи теорії оболонок Тимошенка та модифікованої теорії оболонок Тимошенка. З використанням варіаційної постановки задач теорій оболонок, методом множників Лагранжа, сформульовано узагальнені варіаційні принципи спрощених теорій оболонок (за незмінних по товщині нормальних жорстких поворотів; за відсутніх нормальних жорсткими поворотами; а також за відсутніх поперечних зсувних деформацій і нормальних жорстких поворотів).

У п’ятому розділі сформульовано дельтоподібні послідовності фінітних функцій, які є базовими для послідовнісних подань математичних моделей локальних навантажень та узагальнених розв’язків Фур’є задач теорії оболонок із сингулярними правими частинами рівнянь. Проаналізовано обмеження на параметри локалізації поверхневих навантажень (дельтоподібних фінітних функцій), які забезпечують у межах теорії оболонок типу Тимошенка достатню точність розв’язків задач про локальне навантаження тонкостінних пружних тіл. Досліджено також похибки, які виникають за використання теорій оболонок типу Тимошенка при визначенні напружено-деформованого стану локально навантажених тонкостінних пружних тіл.

Досліджено коректність формулювань (у сенсі існування розв’язків Фур’є) крайових задач теорії оболонок та модифікованої теорії оболонок Тимошенка, які допускають відокремлення змінних, залежно від ступеня гладкості вільних членів диференціальних рівнянь. Встановлено умови на вільні члени рівнянь, за яких існують розв’язки Фур’є відповідних крайових задач (у вигляді сум рівномірно збіжних тригонометричних рядів з рівномірно збіжними рядами похідних, що входять у рівняння задач). Показано, зокрема, що розв’язки Фур’є крайових задач теорії оболонок типу Тимошенка існують, якщо праві частини рівнянь є з відокремленими змінними і періодичними функціями з першими похідними, які задовольняють умови Діріхле. Розв’язки Фур’є крайових задач модифікованої теорії оболонок Тимошенка існують, якщо праві частини рівнянь є періодичними функціями з відокремленими змінними і мають другі похідні, які справджують умови Діріхле.

На основі послідовнісного подання узагальнених функцій, зокрема, дельта-функції, побудовано математичні моделі локальної дії поверхневих навантажень та об’ємних сил. Проаналізовано методи узагальненого підсумовування тригонометричних рядів та послідовнісного подання узагальнених (у розумінні слабкої збіжності) розв’язків некоректних крайових задач теорії оболонок.

Побудовано дельтоподібні послідовності фінітних функцій із заданими властивостями гладкості. Поряд з дельта-функцією, як математичною моделлю локальної дії фізичних полів, розглядаються фінітні дельтоподібні функції (або дельтоподібні послідовності функцій). Визначені інтеграли із змінною верхньою межею від дельтоподібних функцій (з граничною функцією Хевісайда) є ефективним засобом математичного моделювання перехідних процесів.

Для моделювання дії фізичних полів, які локалізовані вздовж лінії (чи області) із заданою густиною, розглядаються як оператори згладжування (інтегральні згортки густин з дельтоподібними функціями), так і відповідні їм граничні елементи. При цьому оператори згладжування мають достатньо прості зображення у вигляді рівномірно збіжних рядів та інтегралів Фур'є. Такий підхід є поширенням уведених С. Л. Соболєвим узагальнених розв'язків крайових задач рівнянь із частинними похідними на задачі теорії оболонок. Узагальнений (у розумінні слабкої збіжності) розв'язок Фур'є некоректно поставленої крайової задачі визначається як границя послідовності розв'язків крайових задач з такими ж, як і для вихідної задачі диференціальними операторами у рівняннях і вільними членами – достатньо гладкими функціями, які слабко збігаються до правих частин рівнянь вихідної задачі.

Побудовано функції Гріна крайових задач теорій оболонок типу Тимошенка і модифікованих теорій оболонок типу Тимошенка у вигляді границь послідовностей узагальнених частинних сум подвійних тригонометричних рядів. Знайдено точний (з використанням рівнянь теорії пружності) і наближений (на основі рівнянь модифікованої теорії оболонок Тимошенка) розв'язки задачі про локальне поверхневе навантаження шару. Запропоновано математичну модель деформування тонкого трансверсально-ізотропного покриття (шару), що перебуває під дією силового поля та одночасно нагрівається джерелами тепла, які локалізовані за координатами у серединній поверхні і є лінійно залежними від товщинної координати. При цьому використано модифіковану теорію оболонок типу Тимошенка (за відсутності нормальних жорстких поворотів). Локальна дія температурного поля моделюється добутком несиметричних дельтоподібних функцій за часовою координатою і симетричних дельтоподібних фінітних функцій за лінійними координатами. Ефективність моделі ілюструється на прикладі задачі про імпульсний нагрів джерелами тепла покриття (шару), нанесеного на абсолютно тверде тіло.

У шостому розділі із використанням послідовнісного подання функції Гріна (у вигляді границі послідовності узагальнених частинних сум рядів Фур'є) розвинуто метод граничних інтегральних рівнянь щодо динамічних задач теорії пологих оболонок. Розглядаються задачі про власні та вимушені коливання трансверсально-ізотропних пологих оболонок з отворами, масивними включеннями та вирізами, а також задачі про коливання кусково-однорідних оболонок. В основу досліджень напружено-деформованого стану закладено рівняння теорії оболонок за відсутності нормальних жорстких поворотів. Гіпотеза про нехтовну малість жорстких поворотів (відносно нормалі до серединної поверхні) є еквівалентна до гіпотези (прийнятої в теорії оболонок і у даній роботі) про домінуючий вплив на основні форми та частоти коливань інерційності елемента оболонки (в напрямку нормалі до серединної поверхні) порівняно з інерційністю в тангенціальних напрямках і кутовою інерційністю. Вихідна система рівнянь спрощеної теорії оболонок зводиться до системи трьох ключових рівнянь відносно функції прогину і двох потенціалів поля тангенціальних до серединної поверхні переміщень і кутів повороту нормалі. Відповідні крайові задачі для однозв'язної області зводяться до розв'язування системи трьох інтегральних рівнянь.

Проаналізовано алгоритм побудови числового розв'язку задачі про усталені коливання прямокутної мембрани з отвором (зсувні коливання пластини з отвором). Функцію Гріна для рівняння Гельмгольца для прямокутника подано у вигляді границі послідовності узагальнених частинних сум рядів. На цій основі сформульовано відповідні граничні інтегральні рівняння, розв'язки яких знайдено методом колокацій.

Сформульована також спрощена схема числового розв'язування граничних інтегральних рівнянь (методом фіктивного контуру) задачі про коливання мембрани. Встановлено залежність наближених розв'язків від параметрів дискретизації інтегральних рівнянь і параметрів узагальненого підсумовування рядів.

З використанням послідовнісного підходу до подання функцій Гріна для нестаціонарних задач теорії оболонок за відсутності нормальних жорстких поворотів, а також нестаціонарних задач класичної теорії оболонок розвинуто метод граничних інтегральних рівнянь. На основі одержаних співвідношень сформульовано інтегральні рівняння задач про усталені коливання оболонок і пластин із отворами. Розглядаються оболонки з шарнірно опертими зовнішніми краями (по контуру прямокутника) і довільно навантаженими або підкріпленими внутрішніми краями отворів. На краях отворів задаються три з шести величин – нормальна компонента вектора переміщення на серединній поверхні, нормальна компонента кута повороту, нормальна компонента мембранної сили та моменту, а також прогин і зрізувальна сила. Задачі зводяться до розв'язування системи трьох інтегральних рівнянь відносно трьох невідомих густин, які розподілені вздовж внутрішнього контуру.

Зведення інтегральних рівнянь до системи алгебраїчних проводиться за схемою, яка є аналогічною до задачі для прямокутної мембрани з отвором.

Запропоновано алгоритми числового розв'язування задач про усталені коливання пластин і оболонок, прямокутних у плані, з отворами, вирізами та масивними включенням, а також задач про усталені коливання кусково-однорідних оболонок та пластин. Досліджено напруження та власні частоти коливань прямокутних пластин з вільними від навантажень або підкріпленими отворами, з симетрично розміщеним масивним включенням і пластини з симетричними круговими вирізами. Показано, що значення власних частот коливань прямокутної пластини з круговим отвором є близькими до значень відповідних частот, які одержані методами скінченних елементів та Рітца.

Сьомий розділ присвячений постановці та розвитку послідовнісного підходу до розв'язування задач про взаємодію тонкостінних елементів з абсолютно жорсткими і пружними тілами. В основу побудови узагальнених розв'язків контактних задач теорії оболонок Кірхгофа-Лява і різних варіантів теорій оболонок типу Тимошенка закладено послідовнісне подання функцій Гріна і метод інтегральних рівнянь. Розглядаються задачі як про взаємодію оболонок з жорсткими тілами, так і взаємодію оболонок із жорсткими тілами через лінійно- і нелінійно-пружні проміжні шари.

Контактні задачі теорії оболонок про взаємодію оболонок із жорсткими тілами через нелінійно-пружний шар формулюються для випадку щільного прилягання оболонки і шару та відсутності дотичних напружень в області контакту. Прогин оболонки визначається через невідомі контактні напруження у вигляді інтегралів, ядра у яких задаються послідовностями узагальнених частинних сум рядів Фур'є, границею яких є функція Гріна. Для циліндричного резервуара, заповненого рідиною, знайдено розв'язок задачі про його взаємодію з двома жорсткими опорами через проміжний шар. Досліджено залежність контактних напружень від приведеної жорсткості проміжного шару; побудовано графіки розподілу контактних напружень.

Знайдено і проаналізовано розв'язки задач про взаємодію абсолютно жорстких гладких штампів постійної кривини з циліндричною оболонкою уздовж смуги. Показано, що значення контактних напружень, які знайдені за допомогою різних теорій оболонок, відрізняються тільки у околі границі області контакту, яка є співмірною з товщиною оболонки. Тому оптимальним при побудові числових розв'язків контактних задач є розбиття області контакту на відрізки, довжини яких співмірні з товщиною оболонки.

Розглядаються також задачі про взаємодію (без відшарування) циліндричної оболонки з підкріплюючими жорсткими елементами змінної кривини. Досліджено розв'язок задачі про підкріплення (вздовж смуги) шарнірно закріпленої замкнутої циліндричної оболонки овальним жорстким бандажем.

РОЗДІЛ 1

РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТОНКОСТІННОГО ТІЛА

Тонкостінні тіла (оболонки, пластини, шари, покриття і т. п.), внаслідок їх малої ваги і достатньо високих значень параметрів їх міцності, жорсткості та стійкості, широко застосовуються в авіаційній та космічній техніці, машинобудуванні, суднобудуванні та інших галузях техніки. Розрахунок сучасних оболонкових конструкцій ґрунтується на поєднанні методів фундаментальних та прикладних наук (механіки суцільного середовища, термодинаміки, теорії пружності, будівельної механіки, опору матеріалів тощо).

У розділі наведені основні рівняння теорії пружності для ортотропного шару в ортогональних криволінійних координатах та сформульовані відповідні крайові задачі. Для спрощення процедури зведення тривимірних задач до двовимірних реалізується гіпотеза про тонкостінність шару шляхом нехтування (порівняно з одиницею) відношеннями товщини шару до радіусів головних кривин серединної поверхні. Коефіцієнти рівнянь, отримані за такого підходу, не залежать від нормальної (до серединної поверхні) координати. Наведені також геометричні характеристики поверхонь обертання, які найчастіше використовуються в інженерних розрахунках.

1.1. РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ У ЗМІШАНІЙ СИСТЕМІ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ

1.1.1. Переміщення і деформації. Розглянемо криволінійний шар постійної товщини $2h$. Серединну поверхню S шару (поверхню рівновіддалену від лицевих поверхонь $S^{\pm}$) віднесемо до змішаної ортогональної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Координатні лінії $\alpha_1 = const$ і $\alpha_2 = const$ є лініями головних кривин серединної поверхні, а прямолінійна координата α_3 має напрям зовнішньої нормалі до серединної поверхні таким чином, щоб система координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ була правою. Рівняння $\alpha_3 = 0$ і $\alpha_3 = \pm h$ у цій системі координат є, відповідно, рівняннями серединної поверхні і лицевих поверхонь шару. Вважаємо також, що бічна поверхня шару є лінійчатою поверхнею, твірна якої перпендикулярна до серединної поверхні шару.

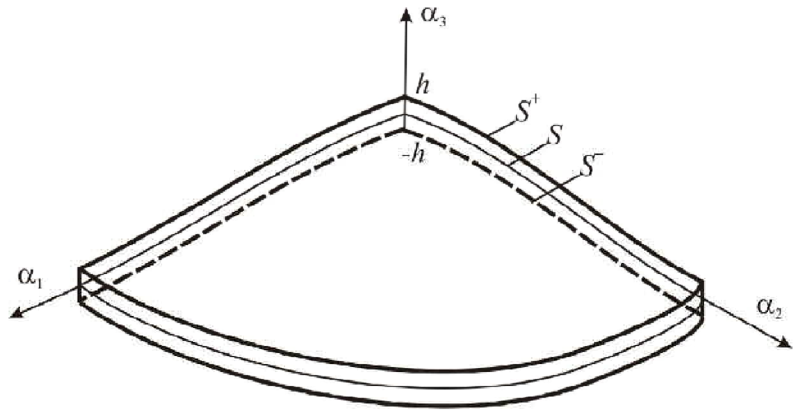

Рис. 1.1. Геометрія тонкостінного тіла

Квадрат лінійного елемента шару і квадрат лінійного елемента серединної поверхні шару задаються відповідно формулами $dl^2 = H_1^2 d\alpha_1^2 + H_2^2 d\alpha_2^2 + d\alpha_3^2$ і $dl^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2$, де $H_i = A_i(1 + k_i\alpha_3)$ $(i = 1, 2)$ – коефіцієнти Ламе; $A_i = A_i(\alpha_1, \alpha_2)$ – коефіцієнти першої квадратичної форми; $k_i = k_i(\alpha_1, \alpha_2)$ – головні кривини серединної поверхні. Коефіцієнти Ламе і коефіцієнти першої квадратичної форми не є довільними функціями [3, 15, 72, 83], зокрема, коефіцієнти Ламе задовольняють такі умови:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\right) + \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial\alpha_2\partial\alpha_3} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_3} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1} = 0. \qquad (1.1)$$

Підставивши в рівняння (1.1) формули для коефіцієнтів Ламе і значення $\alpha_3 = 0$, одержимо відомі в теорії поверхонь рівняння Гаусса-Кодацці

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)=-k_1k_2A_1A_2,\\ \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1k_1\right)=k_2\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2k_2\right)=k_1\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}.\end{gathered}\tag{1.2}$$

З останніх двох рівнянь систем (1.1), (1.2) одержимо ще такі залежності:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1},\quad \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}.\tag{1.3}$$

Приймаємо, що при деформуванні шару пружні деформації є лінійними [2, 6, 12, 60, 75, 76, 110]. При цьому переміщення довільної точки шару задаються трьома компонентами за координатними напрямками $U_i = U_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$ $(i = 1, 2, 3)$. Переміщення є функціями просторових координат і часу. Деформований стан шару визначається симетричним тензором деформацій

$$\left\|e_{ij}\right\|=\left\|\begin{matrix} e_{11} & e_{12} & e_{13}\\ e_{21} & e_{22} & e_{23}\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{matrix}\right\|,\tag{1.4}$$

де e_{ii} $(i = 1, 2, 3)$ – лінійні деформації за напрямками координатних ліній; $e_{ij} = e_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ – кутові деформації.

Залежності деформацій від переміщень визнаються за формулами Коші

$$\begin{aligned} e_{11}&=\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}U_2+\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}U_3\right),\\ e_{22}&=\frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}U_1+\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}U_3\right),\\ e_{33}&=\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_3},\\ e_{12}&=\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{U_1}{H_1}\right)+\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{U_2}{H_2}\right),\\ e_{23}&=H_2\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\frac{U_2}{H_2}\right)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_2},\\ e_{13}&=H_1\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(\frac{U_1}{H_1}\right)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_1},\end{aligned}\tag{1.5}$$

або, з урахуванням формул (1.3) і співвідношень $\dfrac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} = k_i A_i \quad (i = 1, 2)$,

$$e_{11} = \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_2 + A_1 k_1 U_3\right),$$

$$e_{22} = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_1 + A_2 k_2 U_3\right),$$

$$e_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3}, \tag{1.6}$$

$$e_{12} = \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}U_2\right) + \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}U_1\right),$$

$$e_{23} = \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} - A_2 k_2 U_2\right),$$

$$e_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} - A_1 k_1 U_1\right).$$

Формули (1.5) або (1.6) за умов (1.1) і неперервності часткових похідних від переміщень однозначно задають компоненти тензора деформацій (1.4).

1.1.2. Рівняння локального стану. У сучасній техніці широкого застосування набули анізотропні матеріали, зокрема, композиційні матеріали. Матеріали, які в кожній точці мають три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, називаються ортотропно анізотропними або ортотропними. Вважаємо, що шар є криволінійно ортотропним тілом, що має в кожній точці три площадки пружної симетрії, перпендикулярні до координатних напрямів. При навантаженні шару справджується узагальнений закон Гука, згідно з яким у кожній точці тіла компоненти e_{ij} тензора деформацій є лінійними функціями компонент σ_{ij} ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) симетричного тензора напружень

$$\left\| \sigma_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{Vmatrix} \tag{1.7}$$

і функції температури $T = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t)$. Нульове значення функції температури відповідає ненапруженому станові шару. Перший індекс “i” компоненти σ_{ij} тензора напружень вказує на напрям дії цього напруження, а другий індекс “j” – на напрям нормалі до площадки, на якій діє напруження.

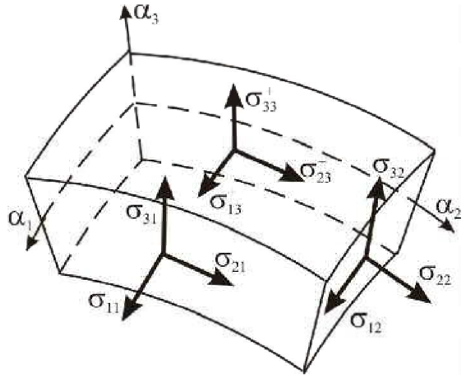

Рис. 1.2. Напрямки напружень

Рівняння узагальненого закону Гука для ортотропного тіла записуємо у такому вигляді [2, 7, 22, 53, 75]

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_{33} + \alpha_1^T T,\\
e_{22} &= -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_{11} + \frac{1}{E_2}\sigma_{22} - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_{33} + \alpha_2^T T,\\
e_{33} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_{11} - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_{22} + \frac{1}{E_3}\sigma_{33} + \alpha_3^T T,\\
e_{12} &= \frac{1}{G_{12}}\sigma_{12}, \quad e_{23} = \frac{1}{G_{23}}\sigma_{23}, \quad e_{31} = \frac{1}{G_{31}}\sigma_{31},
\end{aligned} \tag{1.8}$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності за напрямками координатних осей; $\nu_{12}, \nu_{13}, ..., \nu_{32}$ – коефіцієнти Пуассона (перший індекс показує напрямок поперечної зміни елемента шару, другий – напрямок дії напруження); $G_{12} = G_{21}, G_{23} = G_{32}, G_{31} = G_{13}$ – модулі зсуву, які характеризують зміну кутів між головними напрямками; $\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T$ – коефіцієнти лінійного розширення за напрямками координатних ліній.

Формули (1.8) містять дванадцять параметрів пружності, однак незалежними є тільки дев’ять, оскільки матриця коефіцієнтів пружності є симетричною. Тому, виконуються такі залежності:

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_2} = \frac{\nu_{23}}{E_3}.$$

Формули (1.8) можна записати відносно компонент тензора напружень. Тоді

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = F_{11}e_{11} + F_{12}e_{22} + F_{13}e_{33} - \left(F_{11}\alpha_1^T + F_{12}\alpha_2^T + F_{13}\alpha_3^T\right)T,\\
&\sigma_{22} = F_{21}e_{11} + F_{22}e_{22} + F_{23}e_{33} - \left(F_{21}\alpha_1^T + F_{22}\alpha_2^T + F_{33}\alpha_3^T\right)T,\\
&\sigma_{33} = F_{31}e_{11} + F_{32}e_{22} + F_{33}e_{33} - \left(F_{31}\alpha_1^T + F_{32}\alpha_2^T + F_{33}\alpha_3^T\right)T,\\
&\sigma_{12} = G_{12}e_{12}, \quad \sigma_{23} = G_{23}e_{23}, \quad \sigma_{31} = G_{31}e_{31}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Підставивши формули (1.9) у формули (1.8), одержимо систему рівнянь для визначення пружних характеристик F_{ij}. Її можна записати у матричній формі

$$\begin{Vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо

$$F_{11} = E_1^0\left(1 - \nu_{23}\nu_{32}\right), \quad F_{22} = E_2^0\left(1 - \nu_{13}\nu_{31}\right),$$

$$F_{33} = E_3^0\left(1 - \nu_{12}\nu_{21}\right), \quad F_{12} = E_1^0\left(\nu_{12} - \nu_{13}\nu_{32}\right),$$

$$F_{23} = E_2^0\left(\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}\right), \quad F_{13} = E_1^0\left(\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\right),$$

де $E_i^0 = E_i\left(1 - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13}\right)^{-1}$. Легко переконатися, що відповідна матриця коефіцієнтів пружності також симетрична, $F_{ij} = F_{ji}$.

Для криволінійного трансверсально-ізотропного шару, для якого координата α_3 в кожній точці перпендикулярна до площадок ізотропії, узагальнений закон Гука є таким:

$$\begin{aligned}
&e_{ii} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{ii} - \nu\sigma_{jj}\right) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_{33} + \alpha_T T,\\
&e_{33} = \frac{1}{E'}\sigma_{33} - \frac{\nu'}{E'}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right) + \alpha'_T T,\\
&e_{ij} = \frac{1}{G}\sigma_{ij}, \quad e_{i3} = \frac{1}{G'}\sigma_{i3} \qquad \left(i, j = 1, 2, i \neq j\right).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Тут E і E' – модулі Юнга в площадках ізотропії і перпендикулярних до неї напрямках; ν – коефіцієнт Пуассона, який характеризує скорочення елемента шару за напрямками ізотропії при розтязі його у цих напрямках; ν' – коефіцієнт Пуассона, який характеризує скорочення елемента у напрямку, перпендикулярному до площадок ізотропії, за розтягу у напрямках ізотропії; G' – модулі зсуву у напрямках, перпендикулярних до площадок ізотропії; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву у площадках ізотропії; α_T і α'_T – коефіцієнти лінійного розширення у площадках ізотропії і перпендикулярних до них напрямках.

Для трансверсально-ізотропного шару незалежними є такі пружні характеристики: $E, E', \nu, \nu', G', \alpha_T, \alpha'_T$.

Якщо властивості матеріалу однакові у всіх напрямках, маємо ізотропний матеріал, незалежними для якого є три параметри E, ν, α_T. Тоді $E' = E$, $\nu' = \nu$, $G' = G$, $\alpha'_T = \alpha_T$. Для ізотропного матеріалу використовують також пружні сталі Ламе G і λ, де $\lambda = \dfrac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$.

1.1.3. Рівняння руху. Вважаємо, що шар перебуває під дією об'ємних сил і поверхневих навантажень. Диференціальні рівняння руху нескінченно малого елемента шару у вибраній системі координат є такими:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\sigma_{ii}\right) - \sigma_{jj}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\sigma_{ij}\right) + \sigma_{ji}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j} + \frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_iH_j\sigma_{i3}\right) +$$
$$+ \frac{\partial H_i}{\partial\alpha_3}H_j\sigma_{3i} + H_iH_j\left(F_i - \rho\frac{\partial^2U_i}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{1.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right) - \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_3}H_2\sigma_{11} - \frac{\partial H_2}{\partial\alpha_3}H_1\sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{31}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{32}\right) + H_1H_2\left(F_3 - \rho\frac{\partial^2U_3}{\partial t^2}\right) = 0,$$

де ρ – густина матеріалу; $\rho\dfrac{\partial^2U_1}{\partial t^2}$, $\rho\dfrac{\partial^2U_2}{\partial t^2}$, $\rho\dfrac{\partial^2U_3}{\partial t^2}$ – компоненти вектора інерційної сили; F_1, F_2, F_3 – компоненти об'ємної сили.

Рівняння руху запишемо з урахуванням формул (1.3) і формули $\dfrac{\partial H_i}{\partial\alpha_3} = k_iA_i$ ще у такій формі:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(H_j\sigma_{ii}\right) - \frac{1}{A_i}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}H_i\sigma_{jj} + \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(H_i\sigma_{ij}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}H_j\sigma_{ji} +$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_iH_j\sigma_{i3}\right) + \quad k_iA_iH_j\sigma_{3i} + H_iH_j\left(F_i - \rho\frac{\partial^2U_i}{\partial t^2}\right) = 0$$
$$(i, j = 1, 2, i \neq j), \tag{1.12}$$
$$\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left(H_1H_2\sigma_{33}\right) - k_1A_1H_2\sigma_{11} - k_2A_2H_1\sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{31}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{32}\right) + H_1H_2\left(F_3 - \rho\frac{\partial^2U_3}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Система рівнянь (1.6), (1.10), (1.12) містить п'ятнадцять рівнянь і стільки ж невідомих $U_i, e_{ii}, \sigma_{ii}, e_{ij} = e_{ji}, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$, які є функціями лінійних координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і часу t. Вона, взагалі кажучи, є системою рівнянь з частинними похідними першого порядку. Приймаємо, що функція температури і об'ємна сила – задані величини.

1.1.4. Крайові умови. На лицевих поверхнях шару $S^{\pm}$ $(\alpha_3 = \pm h)$ задаємо напруження

$$\sigma_{i3} = \sigma_{i3}^{+} \text{ на } S^{+}, \ \sigma_{i3} = \sigma_{i3}^{-} \text{ на } S^{-} \ (i = 1, 2), \tag{1.13}$$

або переміщення

$$U_i = u_i^{+} \text{ на } S^{+}, \ U_i = u_i^{-} \text{ на } S^{-}, \tag{1.14}$$

або мішані умови, де $\sigma_{i3}^{\pm}$, $u_i^{\pm}$ – відомі функції.

На бічній (лінійчатій) поверхні шару задаємо мішані умови

$$p_i = \overline{p}_i \text{ на } S_{\sigma}, \ (i = 1, 2, 3), \tag{1.15}$$
$$U_n = \overline{u}_n, \ U_{\tau} = \overline{u}_{\tau}, \ U_3 = \overline{u}_3 \text{ на } S_u,$$

де $p_i = \sigma_{i1}s_1 + \sigma_{i2}s_2$, $U_n = U_1 s_1 + U_2 s_2$, $U_{\tau} = -U_1 s_2 + U_2 s_1$; $\vec{n} = \{s_1, s_2, 0\}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до бічної поверхні; S_{σ}, S_u – взаємно доповнюючі частини бічної поверхні; $\overline{u}_n$, $\overline{u}_{\tau}$, $\overline{u}_3$, $\overline{p}_i$ – відомі функції.

Початкові умови задаємо у вигляді

$$\begin{gathered} U_n\big|_{t=0} = \mu_n, \ U_{\tau}\big|_{t=0} = \mu_{\tau}, \\ U_3\big|_{t=0} = \mu_3, \quad \left.\frac{\partial U_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta_n, \\ \left.\frac{\partial U_{\tau}}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta_{\tau}, \quad \left.\frac{\partial U_{i3}}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta_3, \end{gathered} \tag{1.16}$$

де μ_i, η_i – відомі функції.

При формулюванні задач про усталені коливання шару, замість умов (1.16), приймаємо гармонічну залежність від часу всіх величин системи рівнянь.

Невідомі функції рівнянь або лінійні комбінації цих функцій, значення яких задаються (при формулюванні граничних умов) на границі, будемо називати граничними змінними.

1.2. РІВНЯННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОНКОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ШАРУ

Розглянемо тонкий криволінійний шар постійної товщини (тонкостінне тіло), відношення товщини якого до найменшого радіуса кривини серединної поверхні є малою величиною порівняно з одиницею. Він може бути і не тонким у розумінні відношення товщини до лінійних розмірів серединної поверхні шару. Для таких пружних тіл у геометричних співвідношеннях (1.6) і рівняннях руху (1.12), можна прийняти такі наближені рівності [13, 72]

$$H_i \approx A_i \quad (i = 1, 2). \tag{1.17}$$

Прийняття цих гіпотез рівносильне нехтуванню доданками $k_i \alpha_3$ порівняно з одиницею у виразах для компонент тензорів деформацій та напружень, а також компонент вектора об'ємних сил. При цьому для квадрата довжини елемента шару матимемо формулу $dl^2 \approx A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2 + d\alpha_3^2$.

Рівняння рівноваги і геометричні співвідношення з урахуванням наближених рівностей (1.17) набудуть вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j \sigma_{ii}\right) - \sigma_{jj}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i \sigma_{ij}\right) + \sigma_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i A_j \sigma_{i3}\right) +$$

$$+ \sigma_{i3} A_j \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_j} + A_i A_j \left(F_i - \rho \frac{\partial U_i}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j), \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_3}\left(A_1 A_2 \sigma_{33}\right) - \sigma_{11} A_2 k_1 - \sigma_{22} A_1 k_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2 \sigma_{31}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A_1 \sigma_{32}\right) + A_1 A_2 \left(F_3 - \delta \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}\right) = 0;$$

$$e_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{U_j}{A_j} + k_i A_i U_3\right), \quad e_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3}, \tag{1.19}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{U_j}{A_i}\right) + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{U_i}{A_j}\right),$$

$$e_{i3} = \frac{\partial U_i}{\partial \alpha_3} + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i U\right) \quad (i, j = 1,\ 2,\ i \neq j).$$

Вважаємо, що шар є трансверсально-ізотропним тілом, для якого справджується узагальнений закон Гука (1.10). Запишемо його у такій формі

$$\begin{aligned} &\sigma_{ii} = E_0\left(e_{ii} + \nu e_{jj}\right) + \lambda' \sigma_{33} - \sigma_{ii}^T, \\ &\sigma_{33} = E_0'\left[e_{33} + \lambda'\left(e_{11} + e_{22}\right)\right] - \sigma_{33}^T, \\ &\sigma_{ij} = G e_{ij}, \quad \sigma_{i3} = G' e_{i3} \quad (i, j = 1,\ 2,\ i \neq j). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Тут

$$\sigma_{ii}^T = \frac{E \alpha_T}{1 - \nu} T, \quad \sigma_{33}^T = E_0'\left(2\lambda' \alpha_T + \alpha_T'\right) T \tag{1.21}$$

– температурні складові напружень і введено такі позначення [7, 159]

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad E_0 = \frac{E}{1-\nu^2} \tag{1.22}$$
$$\lambda' = \frac{\nu' E}{(1-\nu)E'}; \quad E_0' = \frac{(1-\nu)E'}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}.$$

Граничні і початкові умови задаються у вигляді (1.13)–(1.16).

1.3. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

В інженерній практиці найчастіше використовуються тонкостінні тіла, серединні поверхні яких одержуються обертанням деякої плоскої кривої навколо заданої осі [2, 12, 24, 32, 55, 63, 102]. Розглянемо гладку поверхню обертання *S*, рівняння якої задамо у параметричній формі [83]

$$x_1 = X_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad x_2 = X_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad x_3 = X_3(\alpha_1, \alpha_2), \tag{1.23}$$

де x_1, x_2, x_3 – координати точки поверхні у декартовій системі координат; α_1, α_2 – параметри; $X_i(\alpha_1, \alpha_2)$ – відомі функції.

Для поверхні обертання навколо осі Ox_3 параметру α_2 відповідає кут β, який характеризує положення мередіана (див. рис. 1.3). За параметр α_1 вибираємо одну з величин: t, r, θ, s, де $t = x_3$, r – радіус паралелі; θ – кут між віссю обертання і нормаллю $\vec{N}$ до поверхні; s – відстань за мередіаном від деякої фіксованої точки.

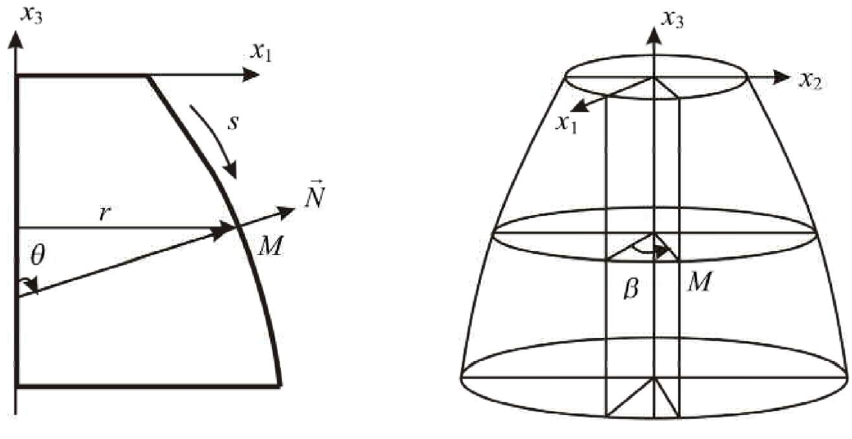

Рис. 1.3. Геометрія поверхні обертання

Поставимо у відповідність довільній точці $M(x_1, x_2, x_3)$, що лежить на поверхні *S*, радіус-вектор $\vec{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Для поверхні обертання маємо $x_1 = r\cos\beta$, $x_2 = r\sin\beta$, $x_3 = t$. Приймаючи $\alpha_2 = \beta$ і α_1 – одну з чотирьох відзначених величин, одержимо

$$\vec{X} = r(\alpha_1)\cos\alpha_2\vec{i} + r(\alpha_1)\sin\alpha_2\vec{j} + t(\alpha_1)\vec{k} = \tag{1.24}$$
$$= \{r(\alpha_1)\cos\alpha_2,\ r(\alpha_1)\sin\alpha_2,\ t(\alpha_1)\},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, які мають напрямки осей координат Ox_1, Ox_2, Ox_3.

Лінії, що лежать на поверхні *S* і відповідають значенням параметрів $\alpha_1 = const$ і $\alpha_2 = const$, називаються α_1-лінією і α_2-лінією і є відповідно мередіанами і паралелями.

Знайдемо вектори, дотичні до α_1- і α_2-ліній,

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_1} = \{r'\cos\alpha_2,\ r'\sin\alpha_2, t'\},\quad \frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_2} = \{-r\sin\alpha_2,\ r\cos\alpha_2,\ 0\}, \tag{1.25}$$

де $r' = \dfrac{dr}{d\alpha_1};\ t' = \dfrac{dt}{d\alpha_1}$.

Легко переконатися, що ці вектори ортогональні, $\dfrac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_1}\cdot\dfrac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_2} = 0$, тобто, α_1- і α_2-лінії в кожній точці поверхні обертання ортогональні між собою.

Знайдемо перший диференціал від вектора $\vec{X}$

$$d\vec{X} = \frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_1}d\alpha_1 + \frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_2}d\alpha_2 = \tag{1.26}$$
$$= \{r'(\cos\alpha_2 d\alpha_1 - \sin\alpha_2 d\alpha_2),\ r'(\sin\alpha_2 d\alpha_1 + \cos\alpha_2 d\alpha_2),\ t'd\alpha_1\}.$$

Модуль диференціала є довжиною елементарної дуги поверхні *S*,

$$dl = \left|d\vec{X}\right| = \sqrt{A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2}. \tag{1.27}$$

Тут

$$A_1 = \left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_1}\right| = \sqrt{(r')^2 + (t')^2},\quad A_2 = \left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_2}\right| = r \tag{1.28}$$

– коефіцієнти першої квадратичної форми.

Знайдемо нормальний вектор $\vec{N}$ до поверхні *S*, як векторний добуток векторів (1.25), дотичних до α_1- і α_2-ліній,

$$\vec{N}=\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_1}\times\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ r'\cos\alpha_2 & r'\sin\alpha_2 & t'\\ -r\sin\alpha_2 & r\cos\alpha_2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\{-rt'\cos\alpha_2,\ -rt'\sin\alpha_2,\ rr'\}. \qquad (1.29)$$

Трійка одиничних векторів

$$\vec{e}_1=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_1}=\frac{1}{\sqrt{(r')^2+(t')^2}}\{r'\cos\alpha_2, r'\sin\alpha_2, t'\},$$

$$\vec{e}_2=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\vec{X}}{\partial\alpha_2}=\{-\sin\alpha_2, -\cos\alpha_2, 0\}, \qquad (1.30)$$

$$\vec{e}_3=\frac{1}{A_1A_2}\vec{N}=\frac{1}{A_1}\ \{-t'\cos\alpha_2,\ -t'\sin\alpha_2,\ r'\}$$

називається основним триедром поверхні.

Розглянемо також другий диференціал від вектора $\vec{X}$

$$d^2\vec{X}=\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\alpha_1^2}d\alpha_1^2+2\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}d\alpha_1 d\alpha_2+\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\alpha_2^2}d\alpha_2^2, \qquad (1.31)$$

де

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\alpha_1^2}=\{r''\cos\alpha_2, r''\sin\alpha_2, t''\},$$

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=\{-r'\sin\alpha_2, r'\cos\alpha_2, 0\}, \qquad (1.32)$$

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial\alpha_2^2}=\{-r\cos\alpha_2, -r\sin\alpha_2, 0\}.$$

Знайдемо проекцію другого диференціала на нормальний до поверхні вектор $\vec{e}_3$

$$\vec{e}_3\cdot d^2\vec{X}=L_{11}d\alpha_1^2+2L_{12}d\alpha_1 d\alpha_2+L_{22}d\alpha_2^2, \qquad (1.33)$$

де L_{11}, L_{12}, L_{22} – коефіцієнти другої квадратичної форми.

Розкриваючи скалярний добуток векторів у формулі (1.33) з урахуванням формул (1.31), (1.32), знайдемо

$$\vec{e}_3 \cdot d^2\vec{X} = \frac{1}{A_1}\Big[\big(r''\cos\alpha_2 d\alpha_1^2 - 2r'\sin\alpha_2 d\alpha_1\, d\alpha_2 -$$

$$- r\cos\alpha_2 d\alpha_2^2)(-t'\cos\alpha_2) + \big(r''\sin\alpha_2 d\alpha_1^2 + 2r'\cos\alpha_2 d\alpha_1\, d\alpha_2 -$$

$$- r\sin\alpha_2 d\alpha_2^2)(-t'\sin\alpha_2) + t''r'd\alpha_1^2\Big] = \frac{1}{A_1}\Big[(-r''t' + t''r')d\alpha_1^2 + rt'd\alpha_2^2\Big].$$

Звідси,

$$L_{11} = \frac{-r''t' + r't''}{A_1}, \quad L_{12} = 0, \quad L_{22} = \frac{rt'}{A_1}. \tag{1.34}$$

З допомогою коефіцієнтів першої і другої квадратичних форм визначаються кривини нормальних перетинів, що проходять через α_1- і α_2-лінії, $k_{11} = -\dfrac{L_{11}}{A_1^2}$, $k_{22} = -\dfrac{L_{22}}{A_2^2}$, $k_{12} = \dfrac{L_{12}}{A_1 A_2}$. Координатні лінії поверхні, для яких дотичні вектори ортогональні і $L_{12} = 0$, називаються лініями кривини, а кривини $k_1 = k_{11}$, $k_2 = k_{22}$ називаються головними кривинами. Для них з урахуванням формул (1.34) маємо

$$k_1 = -\frac{L_{11}}{A_1^2} = \frac{r''t' - r't''}{A_1^3}, \quad k_2 = -\frac{L_{22}}{A_2^2} = -\frac{t'}{A_1 r}. \tag{1.35}$$

Знайдемо також потрібні для опису поверхонь проекції вектора $\vec{e}_3$ на осі Ox_3 і Or

$$\cos\theta = \frac{r'}{A_1}, \quad \sin\theta = -\frac{t'}{A_1}. \tag{1.36}$$

Розглянемо приклади визначення геометричних характеристик деяких типів поверхонь.

1.3.1. Використання радіуса паралелі для знаходження геометричних характеристик поверхні обертання. Нехай твірна поверхні обертання задається рівнянням $t = t(r)$ (див. рис. 1.3). Тоді рівняння твірної можна записати у вигляді

$$r = \alpha_1, \quad t = t(\alpha_1),$$

Звідси $t' = \dfrac{dt}{d\alpha_1}$, $r' = 1$, $r'' = 0$, $t'' = \dfrac{d^2 t}{d\alpha_1^2}$. Використовуючи формули (1.28), (1.34)– (1.36), знайдемо

$$A_1 = \sqrt{1+(t')^2}, \quad A_2 = \alpha_1, \quad k_1 = -\frac{t''}{A_1^3}, \quad k_2 = -\frac{t'}{A_1 A_2},$$
$$\cos\theta = -\frac{t'}{A_1}, \quad \sin\theta = \frac{1}{A_1}. \tag{1.37}$$

Для конічної поверхні з твірною $t = -tg\theta_0 \cdot r$, де θ_0 – кут, між нормаллю до твірної та віссю обертання, маємо параметричне рівняння

$$r = \alpha_1, \quad t = -tg\theta_0 \cdot \alpha_1.$$

Використовуючи також формули (1.37), знайдемо

$$A_1 = \frac{1}{\cos\theta_0}, \quad A_2 = \alpha_1, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{\sin\theta_0}{\alpha_1},$$
$$\cos\theta = \cos\theta_0, \quad \sin\theta = \sin\theta_0.$$

1.3.2. Використання координати вздовж осі обертання для знаходження геометричних характеристик поверхні обертання. Нехай твірна поверхні обертання задається рівнянням $r = r(-t)$ (див рис. 1.3). Запишемо параметричне рівняння твірної у вигляді

$$t = -\alpha_1, \quad r = r(\alpha_1).$$

Для геометричних характеристик поверхні обертання одержимо з (1.28), (1.34)–(1.36) формули

$$A_1 = \sqrt{1+(r')^2}, \quad A_2 = r, \quad k_1 = \frac{-t''}{A_1^3}, \quad k_2 = \frac{1}{A_1 A_2},$$
$$\cos\theta = \frac{r'}{A_1}, \quad \sin\theta = \frac{1}{A_1}. \tag{1.38}$$

Для циліндричної поверхні, утвореної обертанням прямої $r = R$ навколо осі Ot, маємо параметричне рівняння твірної $t = -\alpha_1, \quad r = R$. Підставивши ці формули у формули (1.28), (1.34)–(1.36), одержимо

$$A_1 = 1, \quad A_2 = R, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{1}{R},$$
$$\cos\theta = 0, \quad \sin\theta = 1.$$

1.3.3. Використання кута між нормаллю і віссю обертання для знаходження геометричних характеристик поверхні обертання. Нехай рівняння твірної $t = f(r)$ і приймемо $\theta = \alpha_1$ (див. рис. 1.3).

Знайдемо параметричне рівняння твірної. З останніх двох рівнянь (1.37) знайдемо

$$t' = -tg\alpha_1 \cdot r', \tag{1.39}$$

де $r' = \dfrac{dr}{d\alpha_1}, \quad t' = \dfrac{dt}{d\alpha_1}.$

Врахувавши у формулі (1.39) вираз похідної від складної функції $t' = \dfrac{df}{dr} r'$, одержимо залежність координати r від параметра α_1 і, відповідно, параметричне рівняння твірної у вигляді

$$\frac{df(r)}{dr} = -tg\alpha_1, \quad t = f(r). \tag{1.40}$$

Геометричні характеристики поверхні обертання шукаємо за формулами (1.28), (1.34)–(1.36).

а) Знайдемо геометричні характеристики еліптичного тора, утвореного обертанням еліпса $\dfrac{t^2}{a^2} + \dfrac{(r-d)^2}{b^2} = 1$ навколо осі Ot (див. рис. 1.4).

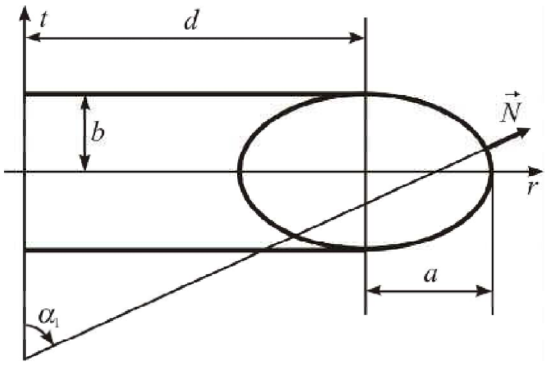

Рис. 1.4. Геометрія еліптичного тора

Диференціюючи це рівняння по r і враховуючи перше рівняння системи (1.40), одержимо таке рівняння: $\dfrac{t \cdot tg\alpha_1}{a^2} = \dfrac{r-d}{b^2}$. Приєднуючи до нього вихідне рівняння, згідно з (1.40) знайдемо параметричне рівняння твірної

$$r = d + \frac{a^2}{c}\sin\alpha_1, \quad t = \frac{b^2}{c}\cos\alpha_1, \tag{1.41}$$

де $c^2 = a^2 \sin^2 \alpha_1 + b^2 \cos^2 \alpha_1$.

Перша і друга похідні від функцій (1.41) мають вигляд

$$r' = \frac{a^2 b^2 \cos\alpha_1}{c^3}, \quad t' = -\frac{a^2 b^2 \sin\alpha_1}{c^3}, \tag{1.42}$$

$$r'' = -\frac{a^2b^2}{c^4}\left(c\sin\alpha_1 + 3c'\cos\alpha_1\right), \quad t'' = -\frac{a^2b^2}{c^4}\left(c\cos\alpha_1 - 3c'\sin\alpha_1\right).$$

Геометричні характеристики для еліптичного тора знайдемо за формулами (1.28), (1.34)–(1.36) у вигляді

$$A_1 = \frac{a^2b^2}{c^3}, \quad A_2 = r, \quad k_1 = \frac{1}{A_1}, \quad k_2 = \frac{\sin\alpha_1}{A_2},$$
$$\sin\theta = \sin\alpha_1, \quad \cos\theta = \cos\alpha_1. \tag{1.43}$$

б) Прийнявши у формулах (1.41) $d = 0$ і $a = b = R$, одержимо параметричне рівняння твірної – кола: $r = R\sin\alpha_1$, $t = R\cos\alpha_1$. З формул (1.43) одержимо геометричні характеристики відповідної поверхні обертання – сфери

$$A_1 = R, \quad A_2 = R\sin\alpha_1, \quad k_1 = \frac{1}{R}, \quad k_2 = \frac{1}{R}.$$

в) Якщо у формулах (1.41), (1.43) прийняти $d = 0$, то одержимо геометричні характеристики еліпсоїда обертання.

РОЗДІЛ 2

ПОСЛІДОВНІСНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ДВОВИМІРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ПРУЖНИХ ТІЛ

У розділі викладено послідовнісний підхід до побудови теорій оболонок, який ґрунтується на апроксимації розв'язків тривимірних задач теорії пружності для криволінійного шару послідовностями частинних сум рядів Фур'є за системою поліномів Лежандра від товщинної координати. У літературі [13, 19, 50, 52, 68, 70 - 72, 80, 110, 111] домінують два підходи до редукції тривимірних задач теорії пружності. Перший підхід ґрунтується на безумовній апроксимації переміщень та напружень поліномами Лежандра за товщинною координатою. Він приводить до структурно простих двовимірних математичних моделей деформування тонкостінних тіл. Однак у межах цих моделей не вдається коректно сформулювати змішані граничні умови на лицевих поверхнях тіл. Одержані при цьому двовимірні математичні моделі (класична теорія оболонок, теорія оболонок Тимошенка і теорії оболонок вищих порядків) використовують, здебільшого, для розрахунку пластин і оболонок, на лицевих поверхнях яких задаються напруження. В основу другого підходу закладено умовну апроксимацію переміщень і напружень поліномами. При апроксимації переміщень враховують граничні значення переміщень лицевих поверхонь, які визначаються з умов неперервності відповідних напружень при наближенні до лицевих поверхонь ізсередини шару. Одержані при цьому двовимірні математичні моделі деформування шару (модифікована теорія оболонок Тимошенка й уточнені теорії оболонок вищих порядків) можуть бути використані для розрахунку покрить і оболонок, на лицевих поверхнях яких задаються як зовнішні зусилля, так і переміщення.

2.1. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ПОСЛІДОВНОСТЯМИ ЧАСТИННИХ СУМ РЯДІВ ЗА ПОЛІНОМАМИ ЛЕЖАНДРА

Система поліномів Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком задачі Штурма-Ліувілля про власні значення і власні функції [59, 79]: *знайти значення параметра* λ, *для яких на відрізку* $-1 \le x \le 1$ *існує розв'язок рівняння*

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0 \qquad \left(-1<x<1\right),$$

який обмежений при $x=\pm 1$ *і нормований так, що* $y(1)=1$.

Власними значеннями цієї задачі є $\lambda = n(n+1)$, а власними функціями – поліноми Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\,\frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}\left(\frac{x}{h}\right)^{n-2k}. \tag{2.1}$$

Перші шість поліномів є такими

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right),\quad P_5(x)=\frac{1}{8}\left(63x^5-70x^3+15x\right),$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}\left(231x^6-315x^4+105x^2-5\right).$$

Вирази поліномів будь-якого порядку можна одержати, розвиваючи за степенями параметра α $\left(|\alpha|<1\right)$ твірну функцію $\Psi(x,\alpha)=\left(1-2\alpha x+\alpha^2\right)^{-1}$,

$$\Psi(x,\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\alpha^n. \tag{2.2}$$

При цьому ряд (2.2) збігається рівномірно для всіх значень $x\in[-1,1]$, якщо тільки $|\alpha|<1$.

Поліноми Лежандра є ортогональними функціями, тобто

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\ne n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases} \tag{2.3}$$

Умови ортогональності (2.3) випливають з властивостей самоспряженості відповідного диференціального оператора. Їх також можна одержати, ґрунтуючись на розвиненні (2.2). Справді, якщо перемножити ряди, записані за формулою (2.2) для різних параметрів $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, проінтегрувати їх добуток по x на відрізку $[-1, 1]$ і змінти порядок інтегрування та підсумовування (оскільки відповідні ряди збігаються рівномірно), то знайдемо

$$\int_{-1}^{1} \Psi(x,\alpha)\Psi(x,\beta)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^k \beta^n \int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)dx.$$

Обчислюючи інтеграл у лівій частині цієї формули з урахуванням явних виразів підінтегральних функцій, отримаємо

$$\int_{-1}^{1} \Psi(x,\alpha)\Psi(x,\beta)dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left[\sqrt{\beta\left(1-2\alpha x+\alpha^2\right)} + \sqrt{\alpha\left(1-2\beta x+\beta^2\right)}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Якщо використати розвинення $\ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k+1}$, то одержимо формулу $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1} (\alpha\beta)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^k \beta^n \int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)dx$. Звідси випливають співвідношення (2.3).

Відзначимо ще деякі властивості поліномів. З формули (2.1) бачимо, що $P_n(x)$ є поліномом степеня n і

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x). \tag{2.4}$$

Якщо у формулу (2.2) підставити значення $x = 1$, то одержимо вираз $\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)\alpha^n$. Звідси знайдемо, що $P_n(1) = 1$ і, з урахуванням формули (2.4), встановимо граничні значення поліномів $P_n(-1) = (-1)^n$.

Можна переконатися, що твірна функція $\Psi(x,\alpha)$ задовольняє диференціальне рівняння $\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + \Psi$. Підставивши в це рівняння вираз (2.2) для твірної функції і прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів параметра α, одержимо рекурентне співвідношення

$$(2n+1)P_n = \frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx}. \tag{2.5}$$

Послідовно додаючи співвідношення (2.5) окремо для парних і непарних значень n, одержимо такі формули для похідних від поліномів

$$\frac{dP_{2n+1}}{dx} = \sum_{m=0,2,\ldots}^{2n} (2m+1) P_m, \tag{2.6}$$

$$\frac{dP_{2n+2}}{dx} = \sum_{m=1,3,\ldots}^{2n+1} (2m+1) P_m \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Математичний апарат розвинення функцій за поліномами Лежандра є одним з ефективних засобів наближення функцій. Якщо функція $U(x)$, неперервна на проміжку $[-1, 1]$ і має на ньому неперервну другу похідну, то вона розвивається в рівномірно збіжний ряд за системою поліномів (2.1)

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k P_k(x), \tag{2.7}$$

де

$$u_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} u(x) P_k(x) dx. \tag{2.8}$$

Формулу (2.8) одержимо, домноживши ліву і праву частини рівності (2.7) на поліноми $P_m(x)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ та інтегруючи отримані співвідношення по x у межах від -1 до +1.

Оскільки ряд (2.7) рівномірно збігається, функцію $u(x)$ можна наблизити з будь-якою точністю послідовністю частинних сум її ряду $\left\{ S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x) \right\}$, тобто, *для довільного* $\varepsilon > 0$ *можна підібрати такий номер N, що для усіх* $n > N$, $|u(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

За такого наближення розв'язки (переміщення) відповідних задач теорії пружності для тонкостінних елементів можна шукати у вигляді частинних сум рядів за поліномами Лежандра від нормальної (до серединної поверхні) координати. Вирази для напружень одержують диференціюванням відповідних частинних сум для переміщень.

Однак, характерним для задач теорії пружності є те, що доводиться одночасно шукати поліноміальні наближення для переміщень і напружень (для функції та її похідної) і, до того ж, задаються граничні (на лицевих поверхнях) значення напружень або переміщень. У спрощеній формі відповідну задачу можна сформулювати так: *побудувати поліноміальні наближення для функції* $u(x)$ *та її похідної* $\sigma(x) = \frac{du}{dx}$ *за умови* $\sigma(\pm 1) = \sigma^{\pm}$.

Однаково ефективно в теорії пружності використовуються обидва способи наближення функції та її похідної. Розглянемо відповідні схеми (два варіанти поліноміальних наближень). Насамперед встановимо залежності між коефіцієнтами розвинення (2.7) функції $u(x)$ і її похідної

$$\sigma(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k P_k(x). \tag{2.9}$$

Якщо підставити розвинення (2.7) і (2.9) у рівність $\sigma(x) = \frac{du}{dx}$ і врахувати формули (2.6), то одержимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k P_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \frac{dP_m}{dx} = \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} u_m \sum_{k=1}^{m-1} (2k+1) P_k +$$

$$+ \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} u_m \sum_{k=0,2,\ldots}^{m-1} (2k+1) P_k = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} (2k+1) P_k \sum_{m=k+1,k+3,\ldots}^{\infty} u_m +$$

$$+ \sum_{k=0,2,\ldots}^{\infty} (2k+1) P_k \sum_{m=k+1,k+3,\ldots}^{\infty} u_m .$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових поліномів, одержимо такі залежності між коефіцієнтами ряду (2.9) та (2.7)

$$\begin{cases} \sigma_0 = u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2k+1} + \ldots, \\ \frac{\sigma_2}{5} = u_3 + u_5 + \ldots + u_{2k+1} + \ldots, \\ \ldots \\ \frac{\sigma_{2k}}{4k+1} = u_{2k+1} + \ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_1}{3} = u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2k} + \ldots, \\ \frac{\sigma_3}{7} = u_4 + u_6 + \ldots + u_{2k} + \ldots, \\ \ldots \\ \frac{\sigma_{2k-1}}{4k-1} = u_{2k} + \ldots \end{cases} \tag{2.10}$$

Віднімаючи кожні сусідні два співвідношення (2.10), одержимо залежності між коефіцієнтами ряду (2.7) для функції $u(x)$ та ряду (2.9) для функції $\sigma(x)$

$$\begin{cases} u_1 = \sigma_0 - \dfrac{\sigma_2}{5}, \\ u_3 = \dfrac{\sigma_2}{5} - \dfrac{\sigma_4}{9}, \\ \qquad \ldots \\ u_{2k+1} = \dfrac{\sigma_{2k}}{4k+1} - \dfrac{\sigma_{2k+2}}{4k+5}, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{\sigma_1}{3} - \dfrac{\sigma_3}{7}, \\ u_4 = \dfrac{\sigma_3}{7} - \dfrac{\sigma_5}{11}, \\ \qquad \ldots \\ u_{2k} = \dfrac{\sigma_{2k-1}}{4k-1} - \dfrac{\sigma_{2k+1}}{4k+3}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Відзначимо, що усі співвідношення системи (2.11) містять скінченну кількість доданків. З перших формул (2.10) знайдемо залежності граничних значень функції $u(x)$ від перших двох коефіцієнтів розвинення функції $\sigma(x)$

$$u(\pm 1) = u_0 \pm \sigma_0 + \frac{\sigma_1}{3}. \tag{2.12}$$

Перший спосіб поліноміального наближення функції та її похідної. Приймаємо, що задані коефіцієнти u_k $(k = 0,\ 1,\ ...,\ n)$ розвинення функції $u(x)$ і граничні значення $\sigma^{\pm} = \sigma(\pm 1)$ її похідної. Функцію $u(x)$ наближуємо n-ою частинною сумою ряду (2.7)

$$S_n(u, x) = \sum_{k=0}^{n} u_k P_k(x).$$

Згідно з поліноміальним наближенням для функції $u(x)$ функцію $\sigma(x)$ наближуємо $(n-1)$-ою частинною сумою ряду (2.9),

$$S_{n-1}(\sigma, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma'_k P_k(x).$$

Коефіцієнти цієї частинної суми визначаємо за першими n формулами системи (2.10), в яких приймаємо $u_k = 0$ $(k = n+1, ...)$.

Таким чином, за першим способом наближення для функції та її похідної маємо

$$u(x) \approx S_n(u, x) \ \ (-1 \le x \le 1),$$

$$\sigma(x) \approx \begin{cases} S_{n-1}(\sigma, x), & -1 < x < 1, \\ \sigma^{\pm}, & x = \pm 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Другий спосіб поліноміального наближення функції та її похідної ґрунтується на використанні співвідношень (2.11). Вважаємо, як і в першому випадку, що задані скінченна кількість коефіцієнтів розвинення функції $u(x)$ і граничні значення її похідної $\sigma^{\pm} = \sigma(\pm 1)$. Функцію $u(x)$ наближаємо частинною сумою (2.13) всередині проміжку $[-1,1]$ і вводимо (невідомі) граничні значення $u^{\pm}=u(\pm 1)$. Функцію $\sigma(x)$ наближуємо $(n+1)$-частинною сумою ряду (2.9). Отже для функцій $u(x)$ і $\sigma(x)$ маємо такі апроксимаційні вирази

$$u(x)\approx\begin{cases} S_n(u,x), & -1<x<1, \\ u^{\pm}, & x=\pm 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\sigma(x)\approx S_{n+1}(\sigma,x)=\sum_{k=0}^{n+1}\sigma_k'' P_k(x) \qquad (-1\le x\le 1). \tag{2.15}$$

Тут коефіцієнти σ_k'' визначаються з системи рівнянь, яку складають перші $(n-1)$ рівнянь (2.11), і два рівняння

$$\sum_{k=0}^{n+1}\sigma_k'' P_k(\pm 1)=\sigma^{\pm},$$

які відповідають умові неперервності полінома (2.15) у граничних точках $x=\pm 1$.

Граничні значення $u^{\pm}$ поліноміального наближення (2.14) функції $u(x)$ визначаються за формулою (2.12).

Зазначимо, що одержані другим способом апроксимаційні формули (2.14), (2.15) містять на дві складові більше від відповідних формул (2.13), одержаних із застосуванням першого способу. При цьому кількість незалежних коефіцієнтів в апроксимаційних виразах (2.13)–(2.15) залишається однаковою. Крім того, співвідношення (2.11), які використовуються для визначення коефіцієнтів апроксимаційного виразу для функції $\sigma(x)$, є точними. Водночас і при побудові апроксимаційних виразів для функції $\sigma(x)$ за першим способом, приймається рівність нулеві зліченої кількості коефіцієнтів, $u_k=0$ $(k=n+1,...)$, в усіх співвідношеннях (2.10).

2.2. ПЕРШИЙ ВАРІАНТ РЕДУКЦІЇ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ДВОВИМІРНИХ

Розглядаємо тонкий (в розумінні відношення товщини до найменшого радіуса кривини серединної поверхні) трансверсально-ізотропний шар, напружено-деформований стан якого описується системою рівнянь (1.18)–(1.20) і задаються граничні умови першого роду (1.13) на лицевих поверхнях, змішані граничні умови (1.15) на боковій поверхні і початкові умови (1.16).

Вихідна система рівнянь задачі є системою диференціальних рівнянь першого порядку відносно трьох компонент вектора переміщень $\{U_1,U_2,U_3\}$ і шести компонент тензора деформацій $\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{33},\sigma_{12}=\sigma_{21},\sigma_{13}=\sigma_{31}$, $\sigma_{32}=\sigma_{23}$. Приймаємо, *що розв'язок відповідної крайової задачі та його похідні, які входять у рівняння,* *подаються у вигляді рівномірно збіжних рядів за системою многочленів Лежандра відносно координати* α_3. При цьому формули (2.1), (2.6) для змінної α_3, $-h \le \alpha_3 \le h$, за умови ортогональності (2.3) запишуться так

$$P_n(\alpha_3) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} \left(\frac{\alpha_3}{h}\right)^{n-2m},$$

$$\frac{dP_{2n+1}}{d\alpha} = \frac{1}{h} \sum_{m=0,2,\ldots}^{2n} (2m+1) P_m, \qquad \frac{dP_{2n+2}}{d\alpha} = \frac{1}{h} \sum_{m=1,3,\ldots}^{2n+1} (2m+1) P_m, \tag{2.16}$$

$$\int_{-h}^{h} P_n(\alpha_3) P_m(\alpha_3) d\alpha_3 = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ \dfrac{2h}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

Для побудови наближеного розв'язку задачі застосуємо схему першого способу поліноміального наближення функції та її похідної. Вихідна система рівнянь містить три невідомі функції U_1, U_2, U_3 (переміщення), яким відповідають напруження $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$, що визначаються через похідні по α_3 від цих функцій $\dfrac{\partial U_i}{\partial \alpha_3}$ $(i = 1, 2, 3)$, а також – похідні за іншими координатами $\left(\dfrac{\partial U_i}{\partial \alpha_1}, \dfrac{\partial U_i}{\partial \alpha_2}\right)$. Поліноміальне наближення n-го порядку розв'язку задачі визначимо такими частинними сумами рядів для переміщень

$$U_i = \sum_{k=0}^{n} U_i^k(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3) \quad (i = 1, \ 2), \tag{2.17}$$

$$U_3 = \sum_{k=0}^{n-1} U_3^k(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3).$$

Для напружень $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ відповідно до схеми першого способу маємо поліноміальні наближення

$$\sigma_{i3} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} N_{i3}^k(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3), & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h \qquad (i = 1, 2), \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2k+1}{2} N_{33}^k(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3), & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h. \end{cases}$$

Інші компоненти тензора напружень, компоненти вектора об'ємної сили і функцію температури, враховуючи апроксимаційні вирази (2.17), подаємо у вигляді таких частинних сумам

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} N_{ij}^{k}(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3) \quad (i, j = 1, 2),$$

$$F_i = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} F_i^{k}(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3) \quad (i = 1, 2); \tag{2.19}$$

$$F_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} F_3^{k}(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3),$$

$$T = \sum_{k=0}^{n} T^{k}(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3),$$

де $F_i^k = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} F_i P_k d\alpha_3$; $T^k = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h} T\, P_k d\alpha_3$. Решта коефіцієнтів у рядах, які не вказані у формулах (2.17)–(2.19), дорівнюють нулеві.

Температурні доданки напружень $\sigma_{ii}^T \quad (i = 1, 2, 3)$ відповідно до апроксимаційних виразів (2.18), (2.19) для напружень $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ наближуємо такими поліномами

$$\sigma_{ii}^T = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} N_{ij}^{Tk}(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3) \quad (i = 1, 2),$$

$$\sigma_{33}^T = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2k+1}{2} N_{33}^{Tk}(\alpha_1, \alpha_2, t) P_k(\alpha_3). \tag{2.20}$$

Усереднюємо з вагою $P_k(\alpha_3)$ рівняння руху (1.18). При цьому, враховуючи формулу інтегрування за частинами

$$\int_{-h}^{h} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_3} P_k(\alpha_3) d\alpha_3 = \left[\sigma_{i3} P_k(\alpha_3)\right]_{-h}^{h} - \int_{-h}^{h} \frac{\partial P_k(\alpha_3)}{\partial \alpha_3} \sigma_{i3} d\alpha_3 =$$

$$= \begin{cases} \sigma_{i3}^{+} - \sigma_{i3}^{+} - \sum\limits_{r=1,3,\dots}^{k-1} (2r+1) N_{i3}^{r}, & k = 2, 4, \dots, \\ \sigma_{i3}^{+} + \sigma_{i3}^{-} - \sum\limits_{r=0,2,\dots}^{k-1} (2r+1) N_{i3}^{r}, & k = 1, 3, \dots, \end{cases}$$

формули (2.16), (2.18) і (2,19), отримаємо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j N_{ii}^k\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i N_{ij}^k\right) - N_{jj}^k \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + N_{ji}^k \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} + k_i A_i A_j N_{3i}^k +$$

$$+\left[2\sigma_i^- - \sum_{r=1,3,\ldots}^{k-1}(2r+1)N_{i3}^r\right]\frac{A_iA_j}{h} + A_iA_j\left(F_i^k - \rho\frac{\partial^2 U_i^k}{\partial t^2}\right) = 0 \qquad (k = 0, 2, \ldots, n_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(A_jN_{ii}^k\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(A_iN_{ij}^k\right) - N_{jj}^k\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i} + N_{ji}^k\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j} + k_iA_iA_jN_{3i}^k +$$

$$+\left[2\sigma_i^+ - \sum_{r=0,2,\ldots}^{k-1}(2r+1)N_{i3}^r\right]\frac{A_iA_j}{h} + A_iA_j\left(F_i^k - \rho\frac{\partial^2 U_i^k}{\partial t^2}\right) = 0 \tag{2.21}$$

$$(k = 1, 3, \ldots, n_1), \ (i, j = 1, 2, \quad i \neq j),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2N_{31}^k\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1N_{32}^k\right) - \left(k_1N_{11}^k + k_2N_{22}^k\right)A_1A_2 +$$

$$+\left[2\sigma_3^- - \sum_{r=1,3,\ldots}^{k-1}(2r+1)N_{33}^r\right]\frac{A_1A_2}{h} + A_1A_2\left(F_3^k - \rho\frac{\partial^2 U_3^k}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (k = 0, 2, \ldots, n_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2N_{31}^k\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1N_{32}^k\right) - \left(k_1N_{11}^k + k_2N_{22}^k\right)A_1A_2 +$$

$$+\left[2\sigma_3^+ - \sum_{r=0,2,\ldots}^{k-1}(2r+1)N_{33}^r\right]\frac{A_1A_2}{h} + A_1A_2\left(F_3^k - \rho\frac{\partial^2 U_3^k}{\partial t^2}\right) = 0 \quad (k = 1, 3, \ldots, n_1),$$

де $\sigma_i^\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma_{i3}^+ \pm \sigma_{i3}^-\right)$; $\sigma_{i3}^\pm = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ – компоненти заданих поверхневих напружень; $n_0 = n$, $n_1 = n-1$, якщо n – парне число, і $n_1 = n$, $n_0 = n-1$, якщо n – непарне число.

Усереднюючи з вагою $P_k(\alpha_3)$ рівняння (1.19) і (1.20) з урахуванням співвідношень (1.21), (2.16)–(2.20), отримаємо залежні від двох змінних фізичні співвідношення

$$N_{ii}^k = \frac{2E_0}{2k+1}\left(e_{ii}^k + \nu e_{jj}^k\right) + \lambda' N_{33}^k - N_{ii}^{Tk},$$

$$N_{ij}^k = \frac{2G}{2k+1}e_{ij}^k \qquad \left(k = \overline{0, n}\right);$$

$$N_{i3}^k = \frac{2G'}{2k+1}e_{i3}^k \qquad \left(k = \overline{0, n-1}\right), \tag{2.22}$$

$$N_{33}^k = \frac{2E_0'}{2k+1}\left[e_{33}^k + \lambda'\left(e_{11}^k + e_{22}^k\right)\right] - N_{33}^{Tk} \qquad \left(k = \overline{0, n-2}\right),$$

де

$$e_{ij}^k = \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^{h} e_{ij} P_k(\alpha_3) d\alpha_3 \quad (i, j = 1, 2);$$

геометричні рівняння, які пов'язують компоненти вектора переміщень та тензора деформації

$$e_{ii}^k = \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial U_i^k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \frac{U_j^k}{A_j} + k_i A_i U_3^k \right),$$

$$e_{33}^k = \frac{2k+1}{h} \left(U_3^{k+1} + U_3^{k+3} + \ldots \right),$$

$$e_{ij}^k = \frac{1}{A_j} \left(\frac{\partial U_i^k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \frac{U_j^k}{A_i} \right) + \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial U_j^k}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \frac{U_i^k}{A_j} \right), \tag{2.23}$$

$$e_{i3}^k = \frac{2k+1}{h} \left(U_i^{k+1} + U_i^{k+3} + \ldots \right) + \frac{1}{A_i} \left(\frac{\partial U_3^k}{\partial \alpha_i} - k_i A_i U_i^k \right) \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j)$$

і вирази для температурних складових у напруженнях x

$$N_{ii}^{Tk} = \frac{2E\alpha_T}{(2k+1)(1-\nu)} T^k \quad \left(k = \overline{0, n} \right),$$

$$N_{33}^{Tk} = \frac{2E_0'(2\lambda'\alpha_T + \alpha_T')}{2k+1} T^k \qquad \left(k = \overline{0, n-2} \right). \tag{2.24}$$

Тут, внаслідок симетричності тензорів деформацій і напружень, справджуються рівності $e_{ij}^k = e_{ji}^k$, $N_{ij}^k = N_{ji}^k$.

Граничні та початкові умови для усереднених величин отримаємо шляхом інтегрування з вагою $P_k(\alpha_3)$ умов (1.15), (1.16). При одержанні рівнянь (2.21) враховано умови (1.13) на лицевих поверхнях. Позначимо через L_u і L_σ сліди поверхонь S_u і S_σ у серединній поверхні оболонки S. Тоді матимемо

$$N_i^k = \overline{N}_i^k \quad \left(k = \overline{0, n}, \quad i = 1,2 \right), \ N_{3s}^k = \overline{N}_{3s}^k \quad \left(k = \overline{0, n-1} \right) \text{ на } L_\sigma,$$

$$U_n^k = \overline{u}_n^k, \quad U_\tau^k = \overline{u}_\tau^k \quad \left(k = \overline{0, n} \right), \quad U_3^k = \overline{u}_3^k \quad \left(k = \overline{0, n-1} \right) \text{ на } L_u, \tag{2.25}$$

$$U_n^k = \mu_n^k(\alpha_1, \alpha_2), \quad U_\tau^k = \mu_\tau^k(\alpha_1, \alpha_2), \quad U_3^k = \mu_3^k(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\frac{\partial U_n^k}{\partial t} = \eta_n^k(\alpha_1, \alpha_2), \quad \frac{\partial U_\tau^k}{\partial t} = \eta_\tau^k(\alpha_1, \alpha_2), \quad \frac{\partial U_3^k}{\partial t} = \eta_3^k(\alpha_1, \alpha_2) \text{ при } t = 0,$$

де $N_i^k = N_{i1}^k s_1 + N_{i2}^k s_2$; $\quad N_{3s}^k = N_{13}^k s_1 + N_{23}^k s_2$;

$$\overline{N}_i^k = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\overline{p}_i P_k(\alpha_3)d\alpha_3, \quad \mu_i^k = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\mu_i P_k(\alpha_3)d\alpha_3, \quad \eta_i^k = \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\eta_i P_k(\alpha_3)d\alpha_3,$$

$\overline{u}_i^k = \dfrac{2k+1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h}\overline{u}_i P_k(\alpha_3)d\alpha_3$ – коефіцієнти розвинень заданих функцій.

Зауважимо, що для апроксимації напружень σ_{i3} $(i=1,2,3)$ у межах побудованої математичної моделі можуть бути використані поліноми [110], на два порядки вищі від поліноів, які задаються співвідношеннями (2.18). При цьому усуваємо розриви напружень при наближенні до лицевої поверхні ізсередини шару.

2.3. ДРУГИЙ ВАРІАНТ РЕДУКЦІЇ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДО ДВОВИМІРНИХ

Розглянемо криволінійний шар, який є тонкий у розумінні відношення товщини до найменшого радіуса кривини серединної поверхні. Нехай напружено-деформований стан шару описується рівняннями (1.18)–(1.20). На лицевих та бічних поверхнях шару задані довільні граничні умови, наприклад, умови (1.13), (1.15) або (1.14), (1.15). Початкові умови мають вигляд (1.16). Наближення порядку n розв’язку цієї задачі визначаємо такими поліномами

$$U_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} U_i^k P_k(\alpha_3), & |\alpha_3| < h, \\ u_i^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \qquad U_3 = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_3^k P_k(\alpha_3), & |\alpha_3| < h, \\ u_3^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h; \end{cases} \tag{2.26}$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}N_{ij}^k P_k(\alpha_3); \tag{2.27}$$

$$\sigma_{i3} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{2k+1}{2}N_{i3}^k P_k(\alpha_3) \quad (i,\, j=1,2), \tag{2.28}$$

$$\sigma_{33} = \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}N_{33}^k P_k(\alpha_3).$$

Тут апроксимаційні вирази для переміщень (2.26) містять порівняно з формулами (2.17) граничні переміщення $u_i^{\pm}$, а апроксимаційні вирази (2.28) для напружень σ_{i3} $(i=1,2,3)$ доповнено у порівнянні з (2.18) двома доданками.

У роботах [70–72], з метою апроксимації переміщень поліномами, що змінюються неперервно (аж до лицевих поверхонь), апроксимаційні поліноми (2.26) при $|\alpha_3| < h$ доповнено доданками $U_i^{n+1}P_{n+1}(\alpha_3) + U_i^{n+2}P_{n+2}(\alpha_3)$ і $U_3^n P_n(\alpha_3) + U_3^{n+1}P_{n+1}(\alpha_3)$, які визначаються через граничні переміщення $u_1^{\pm}$. Однак, побудова замкнутої системи двовимірних рівнянь n-го наближення за такою схемою вимагає прийняття додаткових гіпотез про нехтовну малість коефіцієнтів U_i^{n+1}, U_i^{n+2}, U_3^n, U_3^{n+1} $(i=1,2)$ у відповідних двовимірних геометричних рівняннях. Подання апроксимаційних виразів для переміщень у вигляді (2.26) дозволяє безпосередньо одержати замкнуту систему рівнянь відповідного варіанта теорії оболонок.

Компоненти об'ємної сили і функцію температури апроксимуємо, як і у першому варіанті наближення, многочленами (2.19). Для температурних складових напружень маємо такі наближення:

$$\sigma_{ii}^T = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} N_{ii}^{Tk}(\alpha_1, \alpha_2) P_k(\alpha_3) \quad (i=1,2,3). \tag{2.29}$$

У співвідношеннях (2.26)-(2.28) незалежними є коефіцієнти u_i^k, u_3^k, N_{ij}^k $\left(k=\overline{0,n}, \;\; i,j=1,2\right)$, перші $(n-1)$ коефіцієнтів N_{i3}^k $(i=1,2)$ і перші $(n-2)$ коефіцієнтів N_{33}^k. Коефіцієнти $u_i^{\pm}$, $u_3^{\pm}$, N_{i3}^n, N_{i3}^{n+1}, N_{33}^{n-1}, N_{33}^n визначаються з лінійних недиференціальних рівнянь, які будуть одержані нижче.

Нехай поверхневі напруження $\sigma_{i3}^{\pm}$ є відомими величинами. Вимагаючи неперервності напружень σ_{i3} при $\alpha_3 \to \pm h$, одержимо з формул (2.28) рівняння для визначення коефіцієнтів $N_{i3}^n, N_{i3}^{n+1}, N_{33}^{n-1}, N_{33}^n$

$$\begin{gathered} \sigma_{i3}^{\pm} = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{2k+1}{2} N_{i3}^k \quad (i=1,2), \\ \sigma_{33}^{\pm} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2k+1}{2} N_{33}^k. \end{gathered} \tag{2.30}$$

Запишемо формули (2.28) з урахуванням залежностей (2.30) у такому вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} = {} & \sum_{k=0,2,\ldots}^{n_1-1} \frac{2k+1}{2} N_{i3}^k \left(P_k - P_{n_1+1}\right) + \sigma_i^+ P_{n_1+1} + \\ & + \sum_{k=1,3,\ldots}^{n_0-1} \frac{2k+1}{2} N_{i3}^k \left(P_k - P_{n_0+1}\right) + \sigma_i^- P_{n_0+1}, \qquad (i=1,2), \\ \sigma_{33} = {} & \sum_{k=0,2,\ldots}^{n_0-2} \frac{2k+1}{2} N_{33}^k \left(P_k - P_{n_0}\right) + \sigma_3^+ P_{n_0} + \\ & + \sum_{k=1,3,\ldots}^{n_1-2} \frac{2k+1}{2} N_{33}^k \left(P_k - P_{n_1}\right) + \sigma_3^- P_{n_1}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

де $\sigma_i^{\pm} = \dfrac{\sigma_{i3}^+ \pm \sigma_{i3}^-}{2}$ $(i=1,2,3)$; $n_0 = n$, $n_1 = n-1$, якщо n парне число, і $n_1 = n$, $n_0 = n-1$, якщо n – непарне число.

Редукцію рівнянь рівноваги (1.12) проводимо за аналогією до першого варіанта наближення. Вони мають вигляд (2.21). Ідентичними до першого варіанта наближення також є рівняння закону Гука, які встановлюють залежності між коефіцієнтами розвинень величин $\sigma_{ij}, e_{ij}\ (i, j = 1, 2,\ \ i \neq j)$

$$N_{ii}^k = \frac{2E_0}{2k+1}\left(e_{ii}^k + \nu e_{jj}^k\right) + \lambda' N_{33}^k - N_{ii}^{Tk},$$
$$N_{ij}^k = \frac{2G}{2k+1} e_{ij}^k \qquad \left(k = \overline{0, n}\right), \tag{2.32}$$

де

$$N_{ii}^{Tk} = \frac{2E\alpha_T}{(2k+1)(1-\nu)} T^k; \quad e_{ij}^k = \int_{-h}^{h} e_{ij} P_k(\alpha_3) d\alpha_3. \tag{2.33}$$

Відповідні геометричні рівняння одержимо аналогічно (2.23) з перших двох рівнянь (1.19)

$$e_{ii}^k = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_i^k}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{U_j^k}{A_j} + k_i A_i U_3^k\right),$$
$$e_{ij}^k = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial U_i^k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{U_j^k}{A_i}\right) + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_j^k}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_i^k}{A_j}\right) \qquad (i, j = 1, 2). \tag{2.34}$$

Решта рівнянь закону Гука, які встановлюють залежність між коефіцієнтами розвинень функцій σ_{i3} і e_{i3} $(i = 1, 2.3)$, шукаємо з використанням другого способу наближення та умов (2.30) (неперервності напружень σ_{i3} при $\alpha_3 \to \pm h$). Якщо усереднити з вагою $P_k(\alpha_3)$ вирази (1.19) для деформацій e_{13}, e_{23}, e_{33} та використати формулу інтегрування за частинами, то одержимо такі залежності для коефіцієнтів розвинень цих деформацій від коефіцієнтів розвинень переміщень та граничних значень переміщень

$$e_{i3}^k = \frac{2k+1}{h}\left(\frac{u_i^+ - u_i^-}{2} - \sum_{r=1,3,\ldots}^{k-1} U_i^r\right) + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_3^k}{\partial \alpha_i} - k_i A_i U_i^k\right) \qquad (i = 1, 2,\ \ k = 0, 2, \ldots),$$

$$e_{33}^k = \frac{2k+1}{h}\left(\frac{u_3^+ - u_3^-}{2} - \sum_{r=1,3,\ldots}^{k-1} U_3^r\right),$$

$$e_{i3}^k = \frac{2k+1}{h}\left(\frac{u_i^+ - u_i^-}{2} - \sum_{r=0,2,\ldots}^{k-1} U_i^r\right) + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_3^k}{\partial \alpha_i} - k_i A_i U_i^k\right),$$

$$e_{33}^{k}=\frac{2k+1}{h}\left(\frac{u_3^{+}-u_3^{-}}{2}-\sum_{r=0,2,\ldots}^{k-1}U_3^{r}\right)\quad (k=1,3,\ldots),\tag{2.35}$$

де $e_{i3}^{k}=\int\limits_{-h}^{h}e_{i3}P_k(\alpha_3)d\alpha_3$.

Усереднюємо з вагою $P_k(\alpha_3)$ рівняння закону Гука (1.20). З одержаних виразів для коефіцієнтів N_{i3}^{k} формуємо (віднімаючи від попереднього наступний) рівняння, що не містять граничних значень переміщень $u_i^{\pm}$. Якщо до них приєднати рівняння (2.30), то отримаємо замкнену систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно величин N_{i3}^{k} [72]

$$N_{i3}^{0}-N_{i3}^{2}=2G'\left(e_{i3}^{0}-\frac{e_{i3}^{2}}{5}\right),$$

$$N_{i3}^{2}-N_{i3}^{4}=2G'\left(\frac{e_{i3}^{2}}{5}-\frac{e_{i3}^{4}}{9}\right),\ldots,$$

$$N_{i3}^{n_1-1}-N_{i3}^{n_1+1}=2G'\left(\frac{e_{i3}^{n_1-1}}{2n_1-1}-\frac{e_{i3}^{n_1+1}}{2n_1+3}\right),$$

$$\sum_{k=0,2,\ldots}^{n_1+1}\frac{2k+1}{2}N_{i3}^{k}=\sigma_i^{+}\quad (i=1,2);$$

$$N_{i3}^{1}-N_{i3}^{3}=2G'\left(\frac{e_{i3}^{1}}{3}-\frac{e_{i3}^{3}}{7}\right),$$

$$N_{i3}^{3}-N_{i3}^{5}=2G'\left(\frac{e_{i3}^{3}}{7}-\frac{e_{i3}^{5}}{11}\right),\ldots,$$

$$N_{i3}^{n_0-1}-N_{i3}^{n_0+1}=2G'\left(\frac{e_{i3}^{n_0-1}}{2n_0-1}-\frac{e_{i3}^{n_0+1}}{2n_0+3}\right),$$

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{n_0+1}\frac{2k+1}{2}N_{i3}^{k}=\sigma_i^{-}\quad (i=1,2);\tag{2.36}$$

$$N_{33}^{0}-N_{33}^{2}=2E_0'\left[e_{33}^{0}-\frac{e_{33}^{2}}{5}+\lambda'\left(e_{11}^{0}+e_{22}^{0}-\frac{e_{11}^{2}+e_{22}^{2}}{5}\right)\right]-\left(N_{33}^{T0}-N_{33}^{T2}\right),\ldots,$$

$$N_{33}^{n_0-2}-N_{33}^{n_0}=2E_0'\left[\frac{e_{33}^{n_0-2}}{2n_0-3}-\frac{e_{33}^{n_0}}{2n_0+1}+\lambda'\left(\frac{e_{11}^{n_0-2}+e_{22}^{n_0-2}}{2n_0-3}-\frac{e_{11}^{n_0}+e_{22}^{n_0}}{2n_0+1}\right)\right]-\left(N_{33}^{Tn_0-2}-N_{33}^{Tn_0}\right),$$

$$\sum_{k=0,2,\ldots}^{n_0}\frac{2k+1}{2}N_{33}^{0}-\sigma_3^{+}=0;$$

$$N_{33}^{1}-N_{33}^{3}=2E_0'\left[\frac{e_{33}^{1}}{3}-\frac{e_{33}^{3}}{7}+\lambda'\left(\frac{e_{11}^{1}+e_{22}^{1}}{3}-\frac{e_{11}^{3}+e_{22}^{3}}{7}\right)\right]-\left(N_{33}^{T1}-N_{33}^{T3}\right),\ldots,$$

$$N_{33}^{n_1-2}-N_{33}^{n_1}=2E_0'\left[\frac{e_{33}^{n_1-2}}{2n_1-3}-\frac{e_{33}^{n_1}}{2n_1+1}+\lambda'\left(\frac{e_{11}^{n_1-2}+e_{22}^{n_1-2}}{2n_1-3}-\frac{e_{11}^{n_1}+e_{22}^{n_1}}{2n_1+1}\right)\right]-\left(N_{33}^{Tn_1-2}-N_{33}^{Tn_1}\right),$$

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{n_1}\frac{2k+1}{2}N_{33}^{1}-\sigma_3^{-}=0;$$

де

$$N_{33}^{Tk}=\frac{2E_0'\left(2\lambda'\alpha_T+\alpha_T'\right)}{2k+1}T^k\quad\left(k=\overline{0,n}\right). \tag{2.37}$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.36) відносно коефіцієнтів N_{i3}^{k}, одержимо відповідні фізичні рівняння.

Формули для граничних переміщень знайдемо з співвідношень (2.35) або з рівнянь, одержаних шляхом усереднення насамперед з вагою $P_0(\alpha_3)$, а потім – з вагою $P_1(\alpha_3)$ та наступного інтегрування за частинами рівнянь $\sigma_{33}=E_0'\left[\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_3}+\lambda'(e_{11}+e_{22})\right]-\sigma_{33}^{T}$, $\sigma_{i3}=G'\left(\frac{\partial U_i}{\partial\alpha_3}+\frac{1}{A_i}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_i}-k_iA_iU_i\right)$. Вони мають вигляд:

$$\frac{w_i^-}{h}=\frac{N_{i3}^0}{2G'}-\frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial U_3^0}{\partial\alpha_i}-k_iA_iU_i^0\right),$$

$$\frac{w_i^+}{h}=\frac{N_{i3}^1}{2G'}+\frac{U_i^0}{h}-\frac{1}{3A_i}\left(\frac{\partial U_3^1}{\partial\alpha_i}-k_iA_iU_i^1\right)\ (i=1,2), \tag{2.38}$$

$$\frac{w_3^-}{h}=\frac{N_{33}^0}{2E_0'}-\lambda'\left(e_{11}^0+e_{22}^0\right)+\frac{N_{33}^{T0}}{2E_0'},$$

$$\frac{w_3^+}{h} = \frac{U_3^0}{h} + \frac{N_{33}^1}{2E_0'} - \frac{\lambda'}{3}\left(e_{11}^1 + e_{22}^1\right) + \frac{N_{33}^{T1}}{2E_0'},$$

де $w_i^\pm = \frac{1}{2}\left(u_i^+ \pm u_i^-\right) \quad (i = 1, 2, 3)$.

Граничні та початкові умови записуються аналогічно до (2.25). Задаються (як і для першого варіанта наближення) усереднені напруження і переміщення на границі L серединної поверхні шару S.

При формулюванні граничних умов на лицевих поверхнях переміщення задаються згідно формул (2.38). Ці формули містять доданки, пропорційні поверхневим напруженням, і є природною регуляризацією розв'язків некоректно поставлених крайових задач [103]. У межах побудованої математичної моделі шару коректною є постановка контактних задач і задач спряження по лицевих поверхнях для тонкостінних тіл [50, 68, 69, 70, 72, 96], у яких на лицевих поверхнях задаються переміщення, а невідомими є напруження.

Для побудови не суперечних (у розумінні неперервності) виразів для переміщень у співвідношення (2.26) слід додати по два доданки, які визначаємо з умов неперервності переміщень.

2.4. РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

Співвідношення та рівняння першого наближення розв'язку тривимірної задачі для криволінійного шару, одержані першим способом, визначають математичну модель Тимошенка деформування оболонки. Використавши прийняті у теорії оболонок та пластин позначення, з (2.17)–(2.19) при $n = 1$ знайдемо формули для переміщень та напружень

$$U_i = u_i + \gamma_i \alpha_3, \quad U_3 = w,$$

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3, \quad \left(-h \le \alpha_3 \le h\right)$$

$$\sigma_{i3} = \begin{cases} \frac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^\pm, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases} \qquad \left(i, j = 1, 2, \ i \ne j\right), \tag{2.39}$$

$$\sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^\pm, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$

де $u_i = U_i^0$, $w = U_3^0$ – узагальнені переміщення серединної поверхні; $\gamma_i = U_i^1 / h$ – узагальнені кути повороту нормалі до серединної поверхні; $N_{ij} = hN_{ij}^0$, $Q_i = hN_{i3}^0$ – нормальна та зрізувальна сили; $M_{ij} = h^2 N_{ij}^1$ – моменти.

Компоненти масової сили, температуру і температурні складові напружень згідно до (2.19) і (2.20) наближуємо такими поліномами

$$F_i = \frac{1}{2} F_i^0 + \frac{3}{2} F_i^1 \frac{\alpha_3}{h}, \quad F_3 = \frac{1}{2} F_3^0,$$

$$T = T^0 + T^1 \frac{\alpha_3}{h}, \tag{2.40}$$

$$\sigma_{ii}^T = \frac{1}{2h} N_{ii}^T + \frac{3}{2h^2} M_{ii}^T \frac{\alpha_3}{h} \ (i = 1, 2), \quad \sigma_{33}^T = 0.$$

Врахувавши прийняті у (2.39) позначення, з (2.21) при $n = 1$ одержимо рівняння руху

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j M_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i M_{ij}\right) - M_{jj} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + M_{ji} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} - A_i A_j Q_i =$$
$$= -A_i A_j h \left(2\sigma_i^+ + hF_i^1 - h^2 \rho \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j M_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i M_{ij}\right) - M_{jj} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + M_{ji} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} - A_i A_j Q_i =$$
$$= -A_i A_j h \left(2\sigma_i^+ + hF_i^1 - h^2 \rho \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2} \right), \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2 Q_1\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A_1 Q_2\right) - A_1 A_2 \left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) =$$
$$= -A_1 A_2 \left(2\sigma_3^- + hF_3^0 - h\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right) \quad (i, j = 1,2, \quad i \neq j),$$

де $\sigma_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{i3}^+ \pm \sigma_{i3}^-\right)$.

Фізичні співвідношення (2.22) набудуть вигляду

$$N_{ii} = B\left(\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj}\right) - N_{ii}^T, \qquad N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2} \varepsilon_{ij},$$

$$M_{ii} = D\left(\kappa_{ii} + \nu \kappa_{jj}\right) - M_{ii}^T, \qquad M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2} \kappa_{ij}, \tag{2.42}$$

$$Q_i = \Lambda \varepsilon_{i3} \quad \left(i, j = 1, 2, \quad i \neq j\right).$$

Тут $B = \dfrac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \dfrac{2h^3 E}{3\left(1-\nu^2\right)}$; $\Lambda = 2hG'$.

Для коефіцієнтів температурних складових напружень з (2.24) одержимо такі формули

$$N_{ii}^T = \frac{2hE\alpha_T T^0}{1-\nu}; \; M_{ii}^T = \frac{2h^2 E\alpha_T T^1}{3(1-\nu)}.$$

Геометричні рівняння (2.23) набудуть вигляду

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right), \tag{2.43}$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right),$$

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right) \quad (i, j = 1, 2, \quad i \ne j).$$

Система рівнянь (2.41)–(2.43) містить 21 невідомих функцій N_{ij}, M_{ij}, Q_i, ε_{ij}, κ_{ij}, u_i, w, γ_i. Її можна звести до системи п’яти рівнянь відносно п’яти функцій u_i, γ_i, w $(i = 1, 2)$. Граничними змінними для цієї системи рівнянь є проекції на осі координат усереднених переміщень точок границі L і проекції усереднених зусиль, які діють вздовж L,

$$u_i, \quad w, \quad \gamma_i,$$

$$N_i = N_{i1}s_1 + N_{i2}s_2, \quad M_i = M_{i1}s_1 + M_{i2}s_2 \quad (i = 1, 2), \tag{2.44}$$

$$Q_s = Q_1 s_1 + Q_2 s_2,$$

або нормальні і тангенціальні компоненти переміщень і зусиль

$$u_s = u_1 s_1 + u_2 s_2, \quad u_\tau = u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2, \quad w,$$

$$\gamma_s = \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2, \quad \gamma_\tau = \gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2,$$

$$N_s = N_1 s_1 + N_2 s_2, \quad N_\tau = N_1 \tau_1 + N_2 \tau_2,$$

$$M_s = M_1 s_1 + M_2 s_2, \quad M_\tau = M_1 \tau_1 + M_2 \tau_2, \quad Q_s = Q_1 s_1 + Q_2 s_2.$$

Тут $\vec{n} = \{s_1, s_2\}$ і $\vec{\tau} = \{\tau_1, \tau_2\}$ – нормальний (що лежить в дотичній площині до серединної поверхні) і тангенціальний до кривої L $(\tau_1 = -s_2, \tau_2 = s_1)$ одиничні вектори.

Граничні та початкові умови (2.25) для оболонки набудуть вигляду

$$u_n = \overline{u}_n,\ u_\tau = \overline{u}_\tau,\ \ w = \overline{w},\ \ \gamma_n = \overline{\gamma}_n \ \ \ \gamma_\tau = \overline{\gamma}_\tau \text{ на } L_u;$$

$$N_i = \overline{N}_i,\ \ M_i = \overline{M}_i\ \ (i = 1{,}2),\ \ Q_s = \overline{Q}_s \text{ на } L_\sigma;$$

$$u_i = \mu_i^0(\alpha_1, \alpha_2)\ \ (i = n, \tau),\ \ w = \mu_3^0(\alpha_1, \alpha_2), \tag{2.45}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{h}\mu_i^1\ \ (i = n, \tau),\ \ \frac{\partial u_s}{\partial t} = \eta_s^0\ \ (i = n, \tau),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \eta_3^0,\ \ \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = \frac{1}{h}\eta_i^1\ \ (i = n, \tau) \text{ при } t = 0.$$

2.4.1. Рівняння теорії пологих оболонок. Рівняння теорії пологих оболонок можна одержати з рівнянь (2.39)–(2.45) якщо додатково прийняти такі гіпотези [3, 15, 63, 102, 112, 113]:

а) геометрія серединної поверхні оболонки, незалежно від гауссової кривини $K = k_1 k_2$, співпадає з геометрією площини, тобто перше рівняння Гаусса-Кодацці замінюється наближеним рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\right) = 0;$$

б) нехтуємо доданками $k_1 A_1 A_2 Q_1$, $k_2 A_2 A_1 Q_2$ у рівняннях рівноваги (2.41);

в) нехтуємо доданками $k_1 A_1 u_1$, $k_2 A_2 u_2$ у виразах (2.43) деформацій ε_{i3}.

За прийнятих гіпотез рівняння рівноваги (2.41) будуть мати вигляд

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j N_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i N_{ij}\right) - N_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + N_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} = -A_i A_j\left(2\sigma_i^- + hF_i^0 - h\delta\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j M_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i M_{ij}\right) - M_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + M_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} - A_i A_j Q_i =$$

$$= -A_i A_j h\left(2\sigma_i^+ + hF_i^1 - h^2\delta\frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2}\right), \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2 Q_1\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A_1 Q_2\right) - A_1 A_2\left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) =$$

$$= -A_1 A_2\left(2\sigma_3^- + hF_3^0 - h\ \delta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\ \ (i, j = 1, 2,\ \ i \neq j),$$

де $\sigma_i^{\pm} = \dfrac{\sigma_{i3}^{+} \pm \sigma_{i3}^{-}}{2}$.

Фізичні рівняння будуть мати вигляд (2.42), а геометричні співвідношення (2.43) стануть такими

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right),\\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right),\\
\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right),\\
\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right),\\
\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \qquad (i, j = 1, 2, \quad i \neq j).
\end{gathered}
\tag{2.47}
$$

Граничними змінними для системи рівнянь (2.42), (2.46), (2.47) є функції (2.44), а граничні та початкові умови можуть бути сформульовані у вигляді (2.45).

2.4.2. Рівняння теорії сильно пологих оболонок. У теорії сильно пологих оболонок, окрім гіпотез, прийнятих у теорії пологих оболонок, приймають, що похідні від коефіцієнтів першої квадратичної форми серединної поверхні A_2, A_2 і її головних кривин k_1, k_2 дорівнюють нулеві.

Основні рівняння теорії сильно пологих оболонок запишемо для випадку відсутності температурного поля, стаціонарності навантажень і виконання рівностей $A_1 = A_2 = 1$. При цьому рівняння рівноваги (2.46) набудуть вигляду

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -\left(q_i - 2h\delta \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right),\\
\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -\left(m_i - 2h^2\delta \frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2}\right) \quad (i = 1, 2),\\
\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -\left(q_3 - 2h\delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right),
\end{gathered}
\tag{2.48}
$$

де $q_i = 2\sigma_i^- + hF_i^0$, $m_i = h\left(2\sigma_i^+ + hF_i^1\right)$ $(i = 1, 2)$; $q_3 = 2\sigma_3^- + hF_3^0$.

Геометричні рівняння (2.47) будуть такими

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i w, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}, \quad \varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i},$$
$$\kappa_{ii} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j}, \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j). \tag{2.49}$$

Рівняння стану (2.42) не змінюються. Запишемо їх із урахуванням співвідношень (2.49) у розгорнутій формі

$$N_{11} = B\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \nu(k_1 + \nu k_2)w\right],$$
$$N_{22} = B\left[\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \nu\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + (k_2 + \nu k_1)w\right],$$
$$N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}\right),$$
$$Q_1 = \Lambda\left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right), \quad Q_2 = \Lambda\left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}\right), \tag{2.50}$$
$$M_{11} = D\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \nu\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}\right), \ M_{22} = D\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \nu\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}\right),$$
$$M_{12} = M_{21} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}\right).$$

Граничні умови для системи (2.48), (2.50) записуються у вигляді (2.45).

Систему рівнянь (2.48), (2.50) можна звести до системи трьох ключових рівнянь. Розглянемо випадок навантаження оболонки нормальними поверхневими зусиллями q_3 $(q_1 = 0, \ q_2 = 0, \ m_1 = 0, \ m_2 = 0)$. Перші два рівняння рівноваги (2.48) задовольнимо, записавши мембранні сили через допоміжну функцію $\varphi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ [12, 17, 36, 89, 90, 102],

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}, \quad N_{12} = N_{21} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \tag{2.51}$$

Фізичні співвідношення (2.50) для мембранних сил запишемо з урахуванням подання (2.51) у такій формі

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}=\frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}-\nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}\right)-k_1 w,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}=\frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}-\nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}\right)-k_2 w, \qquad (2.52)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}=-\frac{2}{B(1-\nu)}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}.$$

Виключивши звідси переміщення u_1, u_2, знайдемо рівняння сумісності (перше ключове рівняння)

$$\frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\Delta\Delta\varphi=\Delta^0 w, \qquad (2.53)$$

Тут $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}, \quad \Delta^0=k_2\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}+k_1\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}.$

Якщо врахувати (2.50) і ввести функції $\varphi_1=\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2}, \quad \varphi_2=\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1}-\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}$, то останні три рівняння рівноваги запишемо так

$$D\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}+\frac{D(1-\nu)}{2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_2}-\Lambda\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}+\gamma_1\right)=0, \qquad (2.54)$$

$$D\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_2}-\frac{D(1-\nu)}{2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_1}-\Lambda\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2}+\gamma_2\right)=0,$$

$$\Lambda\left(\Delta w+\varphi_1\right)-\Delta^0\varphi=-q_3.$$

Перші два рівняння цієї системи зведуться до таких рівнянь

$$D\Delta\varphi_1-\Lambda\left(\Delta w+\varphi_1\right)=0, \quad \frac{D(1-\nu)}{2}\Delta\varphi_2+\Lambda\varphi_2=0. \qquad (2.55)$$

Виключивши з третього рівняння (2.54) і першого рівняння (2.55) функцію φ_1, отримаємо друге ключове рівняння

$$D\Delta\Delta w+\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)\Delta^0\varphi=\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)q_3.$$

Третім ключовим рівнянням є останнє рівняння системи (2.55).

Таким чином систему ключових рівнянь розглянутої моделі сильно пологої оболонки складають рівняння

$$\frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\Delta\Delta\varphi=\Delta^0 w,$$

$$D\Delta\Delta w+\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)\Delta^0\varphi=\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)q_3, \tag{2.56}$$

$$\frac{D(1-\nu)}{2}\Delta\varphi_2+\Lambda\varphi_2=0.$$

Функції φ_1, γ_1, γ_2 визначають з рівнянь (2.54), а функції u_1, u_2 знаходять з точністю до переміщень оболонки як жорсткого тіла з рівнянь (2.52).

2.5. РІВНЯННЯ МОДИФІКОВАНОЇ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

Рівняння для першого наближення розв’язку задачі для криволінійного шару, знайдені за другим способом наближення, визначають модифіковану теорію оболонок Тимошенка. Використовуючи прийняті у попередньому параграфі позначення, зі співвідношень (2.26)–(2.29), (2.31) при $n=1$ отримаємо такі наближення

$$U_i=\begin{cases}u_i+\gamma_i\alpha_3, & |\alpha_3|<h,\\ u_i^{\pm}, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}\qquad U_3=\begin{cases}w, & |\alpha_3|<h,\\ u_3^{\pm}, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}$$

$$F_i=\frac{F_i^0}{2}+\frac{3F_i^1}{2}\alpha_3,\quad F_3=\frac{F_3^0}{2},\quad T=T^0+\frac{T^1}{h}\alpha_3, \tag{2.57}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{N_{ij}}{2h}+\frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3,\quad \sigma_{33}=\sigma_3^{+}+\sigma_3^{-}\frac{\alpha_3}{h},$$

$$\sigma_{i3}=\frac{3Q_i}{4h}\left(1-\frac{\alpha_3^2}{h^2}\right)+\frac{\sigma_i^{+}}{2}\left(\frac{3\alpha_3^2}{h^2}-1\right)+\sigma_i^{-}\frac{\alpha_3}{h},$$

$$\sigma_{ii}^{T}=\frac{N_{ii}^{T}}{2h}+\frac{3M_{ii}^{T}}{2h^2}\alpha_3\quad (i=1,2),$$

де $N_{ij}=hN_{ij}^0$; $M_{ij}=h^2N_{ij}^1$; $Q_i=hN_{i3}^0$; $u_i=u_i^0$; $\gamma_i=u_i^1/h$;

$$\sigma_i^{\pm}=\frac{\sigma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,h)\pm\sigma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,-h)}{2}\quad (i=1,2,3).$$

Першу групу фізичних рівнянь визначаємо з системи (2.36)

$$\begin{cases} N_{i3}^0 - N_{i3}^2 = 2G'\left(e_{i3}^0 - \dfrac{e_{i3}^2}{5}\right), \\ N_{i3}^0 + 5N_{i3}^2 = 2\sigma_i^+, \end{cases} \tag{2.58}$$

$$3N_{i3}^1 = 2\sigma_i^-, \quad N_{33}^0 = 2\sigma_3^+, \quad 3N_{33}^1 = 2\sigma_3^-,$$

де $e_{i3}^0 - \dfrac{e_{i3}^2}{5} = \dfrac{u_i^1}{h} + \dfrac{1}{A_i}\left(\dfrac{\partial u_3^0}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i^0\right)$.

З рівнянь (2.58) з урахуванням прийнятих у (2.57) позначень знайдемо вирази для зрізувальних сил $Q_i = \Lambda'\left[\gamma_i + \dfrac{1}{A_i}\left(\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right)\right] + \dfrac{h\sigma_i^+}{3}$ або

$$Q_i = \Lambda' \varepsilon_{i3} + \frac{h\sigma_i^+}{3} \quad (i = 1, 2), \tag{2.59}$$

де $\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \dfrac{1}{A_i}\left(\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right)$; $\Lambda' = \dfrac{5hG'}{3}$.

Другу групу фізичних рівнянь знайдемо з (2.32), урахувавши останні два рівняння системи (2.58)

$$\begin{aligned} N_{ii} &= B\left(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}\right) + 2h\lambda'\sigma_3^+ - N_{ii}^T, \\ M_{ii} &= D\left(\kappa_{ii} + \nu\kappa_{jj}\right) + \frac{2h^2\lambda'}{3}\sigma_3^- - M_{ii}^T, \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{ij}, \quad M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2}\kappa_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j).$$

Відповідні геометричні рівняння і коефіцієнти при температурних доданках напружень знайдемо з (2.33), (2.34). Вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right), \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right), \end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right);$$

$$N_{ii}^T = \frac{2hE\alpha_T T^0}{1-\nu}, \ M_{11}^T = \frac{2h^2 E\alpha_T T^1}{3(1-\nu)}. \qquad (2.62)$$

Рівняння руху (2.21) при $n=1$, одержані на основі другого способу наближення, на відміну від одержаних згідно першого способу, містять ненульові складові $N_{i3}^1 = \frac{2}{3}k_i A_1 A_2 \sigma_i^-$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j N_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i N_{ij}\right) - N_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + N_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} + k_i A_i A_j Q_i =$$
$$= -A_i A_j\left(2\sigma_i^- + hF_i^0 - h\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j M_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i M_{ij}\right) - M_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + M_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} - A_i A_j Q_i =$$
$$= -A_i A_j h\left(2\sigma_i^+ + \frac{2hk_i}{3}\sigma_i^- + hF_i^1 - h^2\rho\frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2}\right), \qquad (2.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2 Q_1\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A_1 Q_2\right) - A_1 A_2\left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) =$$
$$= -A_1 A_2\left(2\sigma_3^- + hF_3^0 - h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \qquad (i, j = 1, 2, \ i \neq j).$$

Для визначення переміщень лицевих поверхонь з (2.38) отримаємо такі формули

$$\frac{w_i^-}{h} = \gamma_i - \frac{1}{6}\varepsilon_{i3} + \frac{5h\sigma_i^+}{18\Lambda'},$$

$$\frac{w_i^+}{h} = \frac{u_i}{h} + \frac{k_i h}{3}\gamma_i + \frac{5h\sigma_i^-}{9\Lambda'},$$

$$\frac{w_3^-}{h} = -\lambda'\left(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}\right) + \frac{\sigma_3^+}{E_0'} + \left(2\lambda'\alpha_T + \alpha_T'\right)T^0, \qquad (2.64)$$

$$\frac{w_3^+}{h} = \frac{w}{h} - \frac{h\lambda'}{3}\left(\kappa_{11} + \kappa_{22}\right) + \frac{\sigma_3^-}{3E_0'} + \frac{\left(2\lambda'\alpha_T + \alpha_T'\right)}{3}T^1,$$

де $w_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(u_i^{+} \pm u_i^{-}\right) \quad \left(i = 1, 2, 3\right).$

Система диференціальних рівнянь (2.59)–(2.63) зводиться, як і у випадку теорії оболонок Тимошенка, до системи п'яти рівнянь другого порядку відносно функцій $u_i, \gamma_i, w \quad \left(i = 1, 2\right)$. Граничні умови формулюються аналогічно задачам теорії оболонок Тимошенка. Граничними змінними є функції (2.44).

Якщо на лицевих поверхнях оболонки задаються переміщення, наприклад, у випадку контактних задач, то співвідношення (2.64) використовуються для визначення поверхневих напружень.

Зазначимо, що за відсутності поверхневих напружень $\sigma_i^{\pm} = 0, \; \left(i = 1, 2, 3\right)$ основні модифіковані рівняння теорії оболонок Тимошенка і рівняння теорії оболонок Тимошенка співпадають.

РОЗДІЛ 3

ПОСЛІДОВНІСНО-ГІПОТЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ДВОВИМІРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ПРУЖНИХ ТІЛ

У межах крайових задач теорії пружності і, зокрема, теорії оболонок можуть бути побудовані спрощені математичні моделі деформування тонкостінних тіл [21, 32, 58, 64, 101]. В основу методу побудови цих моделей закладено ідею гіпотетичного методу (прийняття гіпотез) з наступною її реалізацією послідовнісним методом (наближенням розв’язків відповідних крайових задач послідовностями частинних сум рядів за малими параметрами).

У багатьох задачах теорії оболонок із фізичних міркувань випливає, що деякі компоненти тензора деформацій набувають значень значно менших від значень інших компонент, тобто ці задачі неявно містять малі параметри. Для таких задач можуть бути сформульовані спрощені математичні моделі деформування оболонок, які будуються наступним чином [94, 98]. Лінійні комбінації компонент тензора деформацій (або окремі його компоненти), які є малими порівняно з іншими компонентами, будемо називати нехтовно малими деформаціями. Природно, що зміна у фізичних рівняннях значень пружних сталих, які є коефіцієнтами біля нехтовно малих деформацій, не суттєво впливає на значення визначальних деформацій та напружень в оболонці. Вважаємо ці пружні сталі великими параметрами. Виокремимо доданки, які є лінійними комбінаціями добутків нехтовно малих деформацій і великих параметрів та врахуємо, що добуток малої величини на велику може бути і немалою величиною. Далі введемо додаткові функції, які дорівнюють цим добуткам, і запишемо на них окремі рівняння.

Таким чином, у випадку крайової задачі, що неявно містить малі параметри, відповідну їй систему рівнянь можна звести до системи, яку складають рівняння руху, геометричні та видозмінені фізичні рівняння, які включають додаткові співвідношення (залежності додаткових напружень від добутків малих деформацій і великих параметрів) та граничні умови. Ввівши у додаткові рівняння замість великих параметрів обернені до них величини – малі параметри, зведемо вихідну крайову задачу до крайової задачі з малими параметрами. Апроксимуючи невідомі величини цієї задачі послідовностями частинних сум рядів за малими параметрами, одержимо спрощені математичні моделі деформування оболонок.

Вироджена система рівнянь крайової задачі (за нульових значень малих параметрів) є також спрощеною математичною моделлю деформування оболонки.

Зауважимо, що якщо малими деформаціями є відповідні комбінації компонент тензора деформацій, додаткові функції можуть співпадати з компонентами тензора напружень. Зокрема, такий випадок реалізується при побудові класичної теорії оболонок з використанням теорії оболонок Тимошенка.

Можливе і подальше спрощення математичних моделей деформування оболонок. Якщо прийняти певні обмеження (гіпотези) стосовно розподілу напружень, зокрема, додаткових функцій, то можна одержати нові спрощені математичні моделі деформування оболонок.

Введення малих параметрів у рівняння відповідної крайової задачі і побудова вироджених рівнянь є реалізацією кінематичних гіпотез. Припущення, які стосуються розподілу напружень, – статичними гіпотезами.

Можна відзначити широкий клас задач теорії оболонок, для яких малими є жорсткі повороти відносно нормалі до серединної поверхні. До таких належать задачі про навантаження оболонок нормальними до серединної поверхні зусиллями. За такого навантаження в оболонці виникають мембранні дотичні напруження, які складають близько 60% від мембранних осьових напружень [21]. Докладний аналіз окремих доданків у виразах для компонент зсувних деформацій у серединній поверхні оболонки та еквідистантних до неї площадках показує, що значення кутів повороту взаємно перпендикулярних сторін прямокутного елемента оболонки практично не відрізняються, тобто, жорсткі повороти елемента оболонки відносно нормалі до її серединної поверхні є нехтовно малими порівняно з окремими доданками у виразах для цих поворотів.

Для крайових задачах теорії оболонок Тимошенка досліджено коректність прийняття гіпотез про нехтовну малість жорстких поворотів щодо нормалі до серединної поверхні.

3.1. ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА З НЕЗМІННИМИ ЗА ТОВЩИНОЮ НОРМАЛЬНИМИ ЖОРСТКИМИ ПОВОРОТАМИ

3.1.1. Математична модель деформування оболонки. Розглянемо трансверсально-ізотропну оболонку, напружено-деформований стан якої описується рівняннями і співвідношеннями (2.39)–(2.45). Нехай жорсткі повороти елемента оболонки відносно нормалі до серединної поверхні незначно змінюються за товщиною. Тоді можна прийняти гіпотезу про незалежність жорстких поворотів від координати α_3 [98].

Кут повороту елемента оболонки навколо нормалі до серединної поверхні у довільній точці визначається за формулою $\omega_3 = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2U_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1U_1)}{\partial\alpha_2}\right]$. Врахувавши тут формули для переміщень (2.39), знайдемо

$$\omega_3 = \omega_{3u} + \alpha_3\omega_{3\gamma}, \qquad (3.1)$$

де $\omega_{3u} = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2u_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1u_1)}{\partial\alpha_2}\right]$, $\omega_{3\gamma} = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\gamma_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1\gamma_1)}{\partial\alpha_2}\right]$.

Якщо жорсткий поворот елемента відносно нормалі до серединної поверхні не залежить від товщинної координати, то величина $\omega_{3\gamma}$ є малою порівняно з першим доданком виразу (3.1). Однак, окремі складові у виразі для $\omega_{3\gamma}$ можуть бути і немалими величинами. Виокремимо у виразах (2.43) для кутових деформацій κ_{12}, κ_{21} доданок $\omega_{3\gamma}$

$$\kappa_{12} = 2\tilde{\kappa}_{12} + \omega_{3\gamma}, \quad \kappa_{21} = 2\tilde{\kappa}_{21} - \omega_{3\gamma},$$

де

$$\tilde{\kappa}_{12} = \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\gamma_2}{A_1}\right), \quad \tilde{\kappa}_{21} = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\gamma_1}{A_2}\right).$$

Тоді співвідношення для скрутних моментів (2.42) запишемо у вигляді

$$M_{12} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{12} + \frac{D(1-\nu)}{2}\omega_{3\gamma},$$

$$M_{21} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{21} - \frac{D(1-\nu)}{2}\omega_{3\gamma}.$$

За умовою $\omega_{3\gamma}$ – нехтовно мала величина. Тоді можна прийняти, що $D(1-\nu)/2$ – великий параметр і, відповідно, $\alpha = 2/[D(1-\nu)]$ – малий параметр. Якщо ввести додаткові функції $H_{12} = -H_{21}$, то для скрутних моментів одержимо такі вирази

$$M_{12} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{12} + H_{12}, \quad M_{21} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{21} + H_{21},$$

$$\alpha H_{12} = \omega_{3\gamma}, \quad H_{12} = -H_{21}. \tag{3.2}$$

Система (2.41)–(2.43) при заміні у ній рівнянь для моментів M_{12}, M_{21} співвідношеннями (3.2) разом із граничними умовами, що забезпечують однозначність напружено-деформованого стану оболонки, є системою з малим параметром.

Відповідна вироджена система рівнянь (при $\alpha = 0$) є спрощеною математичною моделлю деформування оболонки, в якій жорсткі повороти відносно нормалі до серединної поверхні не залежать від товщинної координати. Третє рівняння системи (3.2) при $\alpha = 0$ відповідає умові потенціальності поля кутів повороту нормалі. Ввівши потенціальну функцію $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$, запишемо вирази для кутів повороту

$$\gamma_1 = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_2}. \tag{3.3}$$

Таким чином, припущення про незмінність за товщиною жорстких поворотів навколо осі Ox_3 дозволяє ввести потенціал поля кутів повороту нормалі до серединної площини.

Запишемо основні рівняння розглядуваної математичної моделі деформування оболонки у разі відсутності температурного поля:
фізичні рівняння

$$N_{ii} = B(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}), \quad N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{ij}, \quad Q_i = \Lambda\varepsilon_{3i}, \tag{3.4}$$

$$M_{ij} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{ij} + H_{ij}, \quad H_{ij} = -H_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j);$$

геометричні рівняння

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right),$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right), \quad \tilde{\kappa}_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right), \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right) \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j);$$

рівняння рівноваги зберігаються у формі (2.41).

Граничними змінними для системи рівнянь (2.41), (3.4), (3.5) є: нормальні та тангенціальні компоненти векторів сил, моментів та переміщень; нормальна компонента кута повороту нормалі до серединної поверхні; прогин.

Тангенціальна компонента кута повороту нормалі до серединної поверхні не може задаватися довільним чином. Знайдемо обмеження, яке накладається на цю компоненту. Нехай Ω – довільна однозв'язна область у серединній поверхні оболонки з гладким граничним контуром Γ. Застосуємо формулу Стокса до відповідної компоненти жорсткого повороту і перетворимо її з урахуванням формули $A_i d\alpha_i = \tau_i dl$ ($\vec{\tau} = \{\tau_1; \tau_2\}$ – тангенціальний вектор до Γ; dl – довжина елемента контура);

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial(A_2\gamma_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1\gamma_1)}{\partial\alpha_2}\right]ds = \int_{\Gamma}\gamma_1 A_1 d\alpha_1 + \gamma_2 A_2 d\alpha_2 = \int_{\Gamma}(\gamma_1\tau_1 + \gamma_2\tau_2)dl.$$

Звідси, врахувавши формули (3.3), одержимо рівність

$$\int_{\Gamma}(\gamma_1\tau_1 + \gamma_2\tau_2)dl = 0. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) справедлива і для випадку, коли Γ є границею серединної поверхні оболонки, тобто, *якщо жорсткі повороти відносно нормалі до серединної поверхні оболонки незмінні за товщиною, то сумарне значення тангенціальної компоненти кута повороту нормалі до серединної поверхні вздовж границі оболонки дорівнює нулеві.*

Зазначимо, що стосовно одновимірних задач (осесиметричної і плоскої) рівняння (2.41), (3.4), (3.5) співпадають з відповідними вихідними рівняннями. Окремі випадки крайових задач згину прямокутної пластинки і прямокутної у плані сферичної оболонки (розглянуті у межах теорії оболонок Тимошенка) також зводяться до відповідних крайових задач спрощеної теорії оболонок.

3.1.2. Пологa оболонка. За аналогією до теорії пологих оболонок Тимошенка геометрію серединної поверхні оболонки ототожнюємо з геометрією площини, нехтуємо доданками $k_1 A_1 A_2 Q_1$, $k_2 A_2 A_1 Q_2$ у рівняннях рівноваги і доданками $k_1 A_1 u_1$, $k_2 A_2 u_2$ у співвідношеннях для деформацій ε_{13}, ε_{23}.

Рівняння рівноваги (як і у теорії пологих оболонок Тимошенка) записуються у вигляді (2.46), фізичні рівняння зберігаються у формі (3.4), а геометричні рівняння, за нехтування в останніх двох рівняннях (3.5) зазначеними доданками, набудуть вигляду

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\frac{u_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right),$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right),$$

$$\tilde{\kappa}_{ij} = \tilde{\kappa}_{ji} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right), \tag{3.7}$$

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j),$$

де $\gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}$.

Граничні умови формулюються аналогічно граничним умовам задач вихідної математичної моделі оболонки.

Зауважимо, що у класичній теорії пологих оболонок, згідно з якою вирази для кутів повороту задаються формулою $\gamma_i = -1/A_i\, \partial w/\partial \alpha_i$ і, відповідно, $\gamma = w$, жорсткий поворот відносно нормалі до серединної поверхні також дорівнює нулеві, $2\omega_{3\gamma} = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial (A_2\gamma_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial (A_1\gamma_1)}{\partial \alpha_2}\right] = 0$. Таким чином, розглянута математична модель узагальнює класичну модель деформування пологої оболонки, оскільки вона враховує поперечні зсувні деформації.

3.1.3. Сильно полога оболонка. Рівняння, що описують деформування сильно пологої оболонки одержимо з рівнянь попереднього підрозділу, прийнявши додатково рівності $A_i = 1,\ k_i = const\ (i = 1, 2)$. Рівняння рівноваги мають вигляд (2.48). Фізичні рівняння (3.4) після підстановки в них співвідношень (3.7) і урахування зроблених припущень набудуть вигляду

$$N_{11} = B\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 w + \nu\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + k_2 w\right)\right],$$

$$N_{22} = B\left[\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + k_2 w + \nu\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 w\right)\right],$$

$$N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}\right), \tag{3.8}$$

$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_1^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_2^2}\right),\ M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_2^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_1^2}\right),$$

$$M_{12}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+H_{12},\quad M_{21}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-H_{12},$$

$$Q_1=\Lambda\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(w-\gamma),\quad Q_2=\Lambda\frac{\partial}{\partial\alpha_2}(w-\gamma).$$

Система рівнянь (2.48), (3.8) може бути зведена (за аналогією з системою рівнянь теорії оболонок Тимошенка) до простішої системи ключових рівнянь.

Ключові рівняння. Розглянемо систему (2.48), (3.8) у разі дії нормального навантаження на оболонку $q_3\neq 0$ ($q_1=0,\ q_2=0,\ \ m_1=0,\ m_2=0$). Подамо сили, які діють у серединній поверхні, і тангенціальні переміщення через допоміжну функцію $\varphi=\varphi(\alpha_1,\alpha_2)$ у вигляді (2.51) і (2.52). Підставивши формули (2.51) і (3.8) в останнє рівняння (2.48), а також виключивши у рівняннях (2.52) переміщення, отримаємо

$$\Lambda\Delta(w-\gamma)-\Delta^0\varphi=-q_3,$$

$$\frac{1}{B(1-\nu^2)}\Delta\Delta\varphi-\Delta^0 w=0, \tag{3.9}$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2};\quad \Delta^0=k_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+k_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}$.

Ще два рівняння одержимо підстановкою виразів для зусиль (3.8) у передостанні два рівняння системи (2.48)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[D\Delta\Delta\gamma+\Lambda(w-\gamma)\right]-\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[D\Delta\Delta\gamma+\Lambda(w-\gamma)\right]+\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_1}=0.$$

Якщо ввести гармонічну функцію $\phi=\phi(\alpha_1,\alpha_2)$, то прийдемо до таких рівнянь

$$D\Delta\Delta\gamma+\Lambda(w-\gamma)=-\frac{\partial\phi}{\partial\alpha_1},\quad H_{12}=\frac{\partial\phi}{\partial\alpha_2}. \tag{3.10}$$

За допомогою першого рівняння системи (3.9) виключимо з (3.10) функцію γ і приєднаємо до одержаного рівняння друге рівняння (3.9) та гармонічне рівняння відносно функції ϕ. У підсумку одержимо таку систему ключових рівнянь

$$D\Delta\Delta w+\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)\Delta^0\varphi=\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)q_3, \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{B(1-\nu^2)}\Delta\Delta\varphi-\Delta^0 w=0,\qquad \Delta\phi=0.$$

Для визначення функції γ одержимо з перших рівнянь систем (3.9), (3.10) отримаємо таку формулу

$$\Lambda\gamma = D\Delta w + \Lambda w + \frac{\partial\phi}{\partial\alpha_1} - \frac{D}{\Lambda}\Delta^0\varphi + \frac{D}{\Lambda}q_3.$$

Зусилля та переміщення визначаються із співвідношень (2.51), (2.52), (3.8).

Потенціальні комплексні функції теорії згину пластин за відсутності нормальних жорстких поворотів. Для випадку чистого згину пластин рівняння (2.48), (3.8) набудуть вигляду [51]

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial x_2} - Q_i = -m_i, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}_{\,i} = -q_{03},$$

$$M_{ii} = -D\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_i^2} + \nu\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_j^2}\right), \quad M_{ij} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2\gamma}{\partial x_i \partial x_j} + H_{ij},$$

$$Q_i = \Lambda'\frac{\partial}{\partial x_i}w - \gamma, \quad H_{ij} = -H_{ji} = -H \quad \left(i, j = 1, 2,\ i \neq j\right).$$

Однорідна система рівнянь, що відповідає цій системі, еквівалентна одному бігармонічному і одному гармонічному рівнянням. Розв’язок однорідної системи рівнянь можна подати через три аналітичні функції $\varphi(z), \chi(z)$ і $g(z)$ комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$ $\left(\bar{z} = x_1 - ix_2\right)$

$$\gamma = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right], \quad w = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z) - \frac{4D}{\Lambda'}g'(z)\right],$$

Для розв’язування граничних задач у межах цієї моделі можна застосувати математичний апарат функцій комплексної змінної [40, 81, 89, 101, 109].

3.2. ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА ЗА ВІДСУТНОСТІ НОРМАЛЬНИХ ЖОРСТКИХ ПОВОРОТІВ

3.2.1. Математична модель. Приймаємо, що базовими при побудові спрощеної моделі оболонки є рівняння (2.39)–(2.45) теорії оболонок Тимошенка. Нехай жорсткий поворот елемента оболонки, що задається формулою (3.1), і, відповідно, величини $\omega_{3u}, \omega_{3\gamma}$ є малими порівняно з окремими доданками у виразах для цих величин. Такий стан оболонки реалізується, наприклад, у разі дії на оболонку зовнішніх сил, рівнодійний момент яких відносно нормалі до серединної поверхні (у будь якій її точці) достатньо малий або дорівнює нулеві. У відповідні рівняння стану оболонки (2.42) вводимо малі параметри $\alpha = 2/[B(1-\nu)]$, $\beta = 2/[D(1-\nu)]$ і додаткові функції $T_{12} = -T_{21}$, $H_{12} = -H_{21}$

$$N_{12} = \frac{B(1-\nu)}{A_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{u_2}{A_1}\right) + T_{12},$$

$$M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{A_2}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\gamma_2}{A_1}\right) + H_{12},$$

$$\alpha T_{12} = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial (A_2 u_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial (A_1 u_1)}{\partial \alpha_2}\right], \quad (3.11)$$

$$\beta H_{12} = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial (A_2 \gamma_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial (A_1 \gamma_1)}{\partial \alpha_2}\right].$$

Ще чотири формули одержимо з системи (3.11) заміною індексів 1 на 2 і 2 на 1.

Система рівнянь (2.39)–(2.45) при заміні співвідношень для скрутних моментів і зсувних сил у серединній поверхні на співвідношення (3.11), разом із граничними умовами, що забезпечують однозначність напружено-деформованого стану оболонки, є системою з малими параметрами α, β.

З цієї системи рівнянь за нульових значень параметрів одержимо відповідну спрощену математичну модель деформування оболонки. У рамках цієї моделі прямокутний елемент оболонки змінює свою форму, однак не повертається навколо осі $O\alpha_3$. Якщо ввести згідно з двома останніми рівняннями (3.11) при $\alpha = 0$ і $\beta = 0$ потенціальні функції $u = u(\alpha_1, \alpha_1)$, $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_1)$, то вирази для переміщень і кутів повороту запишемо у вигляді

$$u_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}, \quad \gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}. \quad (3.12)$$

Рівняння закону Гука і геометричні рівняння (2.42), (2.43) за урахування введених у (3.11) функцій запишемо для випадку відсутності температурних доданків

$$N_{ii} = B(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}), \quad M_{ii} = D(\kappa_{ii} + \nu\kappa_{jj}), \quad Q_i = \Lambda\varepsilon_{3i},$$

$$N_{ij} = B(1-\nu)\tilde{\varepsilon}_{ij} + T_{ij}, \quad T_{ij} = -T_{ji},$$

$$M_{ij} = D(1-\nu)\tilde{\varepsilon}_{ij} + H_{ij}, \quad H_{ij} = -H_{ji} \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j); \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right), \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right),$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right), \quad \widetilde{\kappa}_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right), \tag{3.14}$$

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right) \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j).$$

Формули (3.13), (3.14) разом із рівняннями рівноваги (2.41) складають повну систему рівнянь напружено-деформованого стану оболонки. Граничними змінними для цієї системи є тангенціальні і нормальні компоненти сил та моментів, нормальні компоненти переміщень і кутів повороту, зрізувальна сила і прогин.

Тангенціальні компоненти переміщень і кутів повороту границі оболонки задовольняють рівнянням аналогічним до (3.6). Розглянувши криволінійний інтеграл від вектора переміщень з компонентами $U_i = u_i + \alpha_3\gamma_i\ (i = 1, 2)$ вздовж замкненої кривої Γ – границі області Ω, що належить серединній поверхні оболонки, знайдемо

$$\iint_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[A_2(u_2 + \alpha_3\gamma_2)\right] - \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[A_1(u_1 + \alpha_3\gamma_1)\right]\right\}ds =$$
$$= \int_{\Gamma}\left[(u_1\tau_1 + u_2\tau_2) + \alpha_3(\gamma_1\tau_1 + \gamma_2\tau_2)\right]dl,$$

де $\vec{\tau} = \{\tau_1; \tau_2\}$ – тангенціальний вектор до кривої Γ. Звідси, врахувавши існування потенціальних функцій поля переміщень, одержимо

$$\int_{\Gamma}(u_1\tau_1 + u_2\tau_2)dl = 0, \quad \int_{\Gamma}(\gamma_1\tau_1 + \gamma_2\tau_2)dl = 0.$$

Ці залежності справджуються також для граничної кривої L, тобто справедливе таке твердження (необхідна умова): *якщо в оболонці відсутні жорсткі повороти відносно нормалі до серединної поверхні, то сумарні значення тангенціальних компонент вектора переміщень і вектора кутів повороту вздовж границі серединної поверхні дорівнюють нулеві.*

3.2.2. Сильно полога оболонка. Відповідну систему рівнянь одержимо з рівнянь (2.41), (3.13), (3.14) при реалізації трьох гіпотез (стосовно геометрії серединної поверхні, статичної і кінематичної), а також умови незмінності коефіцієнтів першої квадратичної форми і головних кривин ($A_i = 1,\ k_i = const$).

Знехтувавши у перших двох рівняннях (2.41) доданками $k_i Q_i$ і в останніх двох рівняннях (3.14) – складовими $k_i u$, одержимо:

рівняння рівноваги

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -q_3,$$
$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -q_i, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i \quad (i = 1, 2); \tag{3.15}$$

геометричні рівняння

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} + k_i w, \quad \kappa_{ii} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i^2}, \quad \varepsilon_{i3} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(w - \gamma) \quad (i = 1, 2),$$
$$\tilde{\varepsilon}_{12} = \tilde{\varepsilon}_{21} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \tilde{\kappa}_{12} = \tilde{\kappa}_{21} = -\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}; \tag{3.16}$$

фізичні рівняння зберігаються у формі (3.13).

Підставимо співвідношення (3.13) з урахуванням (3.16) у рівняння (3.15). У підсумку одержимо систему п’яти рівнянь

$$B\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\Delta u - (k_1 + \nu k_2)w\right] - \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} = q_1,$$
$$B\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\Delta u - (k_2 + \nu k_1)w\right] - \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} = q_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[D\Delta\gamma - \Lambda(\gamma - w)\right] - \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2} = m_1,$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[D\Delta\gamma - \Lambda(\gamma - w)\right] - \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_1} = m_2,$$
$$\Lambda\Delta(\gamma - w) - B\left(\Delta^\nu u - k_0^2 w\right) = q_3,$$

де $\Delta^\nu = (k_1 + \nu k_2)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + (k_2 + \nu k_1)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$, $k_0^2 = k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2$.

Виключивши тут функції $T_{12} = -T_{21}$, $H_{12} = -H_{21}$, прийдемо до системи трьох рівнянь

$$B\left(\Delta\Delta u - \Delta^\nu w\right) = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2}, \quad D\Delta\Delta\gamma - \Lambda\Delta(\gamma - w) = \frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2},$$
$$B\left(\Delta\Delta u - \Delta^\nu w\right) = \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2},$$

або

$$\Delta\Delta u - \Delta^\nu w = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_2}\right), \quad \Delta(\gamma - w) + \frac{Bk_0^2}{\Lambda}w - \frac{B}{\Lambda}\Delta^\nu u = \frac{1}{\Lambda}q_3,$$
$$\Delta\Delta w + \frac{Bk_0^2}{D}\left(1 - \frac{D}{\Lambda}\Delta\right)w - \frac{B}{D}\left(1 - \frac{D}{\Lambda}\Delta\right)\Delta^\nu u =$$
$$= \frac{1}{D}\left(1 - \frac{D}{\Lambda}\Delta\right)q_3 + \frac{1}{D}\left(\frac{\partial m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha_2}\right). \tag{3.17}$$

Граничними змінними для цієї системи рівнянь є нормальні компоненти векторів переміщень у серединній поверхні та кутів повороту нормалі, нормальні та тангенціальні компоненти мембранних сил та моментів, зрізувальна сила і прогин.

3.3. КЛАСИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ОБОЛОНКИ

У межах математичної моделі Тимошенка, що задається рівняннями (2.39) (2.45), розглянемо стаціонарну задачу про визначення напружено-деформованого стану оболонки за відсутності поперечних зсувних деформацій. Співвідношення (2.42) для зрізувальних сил, внаслідок нехтовної малості зсувних деформацій ε_{i3} $(i=1{,}2)$ і обмеженості сил Q_i, перепишемо у вигляді

$$\alpha Q_1 = \varepsilon_{13}, \quad \alpha Q_2 = \varepsilon_{23}, \tag{3.18}$$

де $\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \dfrac{1}{A_i}\left(\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right)$; $\alpha = \dfrac{1}{\Lambda}$ – малий параметр; Q_1, Q_2 – зрізувальні сили (додаткові функції).

Система рівнянь (2.41)–(2.43) за урахування перетворень (3.18) і виконання відповідних граничних умов є системою з малим параметром.

Відповідна вироджена система рівнянь (при $\alpha = 0$) визначає математичну модель деформування оболонки, яка характеризується нехтовно малими поперечними зсувними деформаціями (або великою жорсткістю при поперечному зсуві). Запишемо основні рівняння цієї моделі у разі відсутності температурного поля:
рівняння рівноваги

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j N_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i N_{ij}\right) - N_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + N_{ji}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_i A_i A_j Q_i = -A_i A_j q_1, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(A_j M_{ii}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left(A_i M_{ij}\right) - M_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + M_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} - A_i A_j Q_i = -A_i A_j m_1, \\
\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2 Q_1\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A_1 Q_2\right) - A_1 A_2\left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) = -A_1 A_2 q_3 \\
(i, j = 1, 2, \quad i \neq j);
\end{gathered} \tag{3.19}$$

фізичні рівняння

$$\begin{gathered}
N_{ii} = B\left(\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj}\right), \quad N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{ij}, \\
M_{ii} = D\left(\kappa_{ii} + \nu \kappa_{jj}\right), \quad M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2}\kappa_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j);
\end{gathered} \tag{3.20}$$

геометричні рівняння

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right),$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right),$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_i}{A_j}\right) + \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right). \tag{3.21}$$

Із співвідношень (3.18) при $\alpha = 0$, враховуючи вирази для величини ε_{i3}, одержимо формули для кутів повороту нормалі

$$\gamma_i = -\frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right) \quad (i = 1, 2). \tag{3.22}$$

Системі рівнянь (3.19)–(3.22) відповідає вісім граничних змінних. Для їх визначення [64, 78] розглянемо роботу усереднених зусиль на відповідних усереднених переміщеннях вздовж границі L, яку вважаємо гладкою кривою, $A = \int_L (N_s u_s + + N_\tau u_\tau + M_s \gamma_s + M_\tau \gamma_\tau + Q_s w) dl$. Перетворимо цей інтеграл з урахуванням формули інтегрування за частинами і формул

$$\gamma_s = \gamma_1 s_1 + \gamma_2 s_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial s} - k_s u_s + k_{s\tau} u_\tau\right), \tag{3.23}$$

$$\gamma_\tau = \gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + k_{s\tau} u_s - k_\tau u_\tau\right),$$

де $k_s = k_1 s_1^2 + k_2 s_2^2$; $k_\tau = k_1 \tau_1^2 + k_1 \tau_2^2$; $k_{s\tau} = s_1 s_2 (k_1 - k_2)$; $\dfrac{\partial}{\partial s} = s_1 \dfrac{\partial}{A_1 \partial \alpha_1} + s_2 \dfrac{\partial}{A_2 \partial \alpha_2}$;

$\dfrac{\partial}{\partial \tau} = \tau_1 \dfrac{\partial}{A_1 \partial \alpha_1} + \tau_2 \dfrac{\partial}{A_2 \partial \alpha_2}$; $\vec{n} = \{s_1; s_2\}$, $\vec{\tau} = \{\tau_1; \tau_2\}$ – одиничні нормальний (який лежить у дотичній площині до серединної поверхні) і тангенціальний вектори до кривої L $(\tau_1 = -s_2,\ \tau_2 = s_1)$. В результаті одержимо

$$A=\int_L\left[\left(N_s-k_{s\tau}M_\tau\right)u_s+\left(N_\tau+k_\tau M_\tau\right)u_\tau+M_s\gamma_s+Q_s w-M_\tau\frac{\partial w}{\partial\tau}\right]dl=$$

$$=\int_L\left[\left(N_s-k_{s\tau}M_\tau\right)u_s+\left(N_\tau+k_\tau M_\tau\right)u_\tau+M_s\gamma_s+\left(Q_s+\frac{\partial M_\tau}{\partial\tau}\right)w\right]dl.$$

Таким чином граничними є такі змінні

$$N_s^*=N_s-k_{s\tau}M_\tau,\ \ N_\tau^*=N_\tau+k_\tau M_\tau,\ \ M_s^*=M_s,$$

$$Q_s^*=Q_s+\frac{\partial M_\tau}{\partial\tau},\ \ u_s^*=u_s,\ \ u_\tau^*=u_\tau,\ \ \gamma_s^*=\gamma_s,\ \ w^*=w. \qquad (3.24)$$

Розподіли напружень і переміщень за товщиною оболонки задаються формулами (2.39).

3.3.1. Полога оболонка. Рівняння класичної математичної моделі деформування пологої оболонки одержимо з рівнянь (3.19)–(3.22), (3.24) шляхом прийняття базових у теорії пологих оболонок Тимошенка гіпотез. Вважаємо, що геометрія серединної поверхні оболонки близька до геометрії площини, нехтуємо доданками $k_1A_1A_2Q_1$, $k_2A_2A_1Q_2$ у рівняннях рівноваги (3.19) і складовими $k_1A_1u_1$, $k_2A_2u_2$ у виразах (3.22) для кутів повороту.

Таким чином рівняння рівноваги (3.19) набудуть вигляду

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(A_jN_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(A_iN_{ij}\right)-N_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}+N_{ji}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}=-A_iA_jq_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(A_jM_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(A_iM_{ij}\right)-M_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}+M_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}-A_iA_jQ_i=-A_iA_jm_1, \qquad (3.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2Q_1\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1Q_2\right)-A_1A_2\left(k_1N_{11}+k_2N_{22}\right)=-A_1A_2q_3\quad(i,j=1,2,\quad i\neq j).$$

Фізичні та геометричні рівняння зберігаються у формі (3.20), (3.21), в яких кути повороту нормалі визначаються за формулою (3.22) при $k_iA_iu_i=0.$ Тоді

$$\gamma_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}. \qquad (3.26)$$

Для граничних змінних маємо вигляд (3.24) за врахування подання (3.26), тобто

$$N_s^*=N_s,\quad N_\tau^*=N_\tau,\quad M_s^*=M_s, \qquad (3.27)$$

$$Q_s^*=Q_s+\frac{\partial M_\tau}{\partial\tau},\ \ u_s^*=u_s,\ \ u_\tau^*=u_\tau,\ \ \gamma_s^*=-\frac{\partial w}{\partial s},\ \ w^*=w.$$

3.3.2. Сильно полога оболонка. Опираючись на рівняння класичної теорії пологих оболонок, припускаємо, що коефіцієнти першої квадратичної форми і головні кривини серединної поверхні оболонки є сталими величинами ($A_i = 1, \quad k_i = const$). Тоді з системи рівнянь (3.20), (3.21), (3.25) за урахування (3.26) отримаємо: рівняння рівноваги

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -q_i, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i, \quad (i = 1, 2),$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -q_3; \tag{3.28}$$

та фізичні рівняння у розгорнутому вигляді

$$N_{11} = B\left[\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \nu \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + (k_1 + \nu k_2) w\right],$$
$$N_{22} = B\left[\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \nu \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + (k_2 + \nu k_1) w\right],$$
$$N_{12} = N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}\right); \tag{3.29}$$
$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2}\right), \quad M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2}\right),$$
$$M_{12} = M_{21} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \alpha_2}.$$

Система рівнянь (3.28), (3.29) може бути зведена до двох рівнянь відносно функцій $w = w(\alpha_1, \alpha_2)$ і $\varphi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2)$. Розглянемо випадок дії тільки нормального навантаження, $q_3 \neq 0$ ($q_1 = 0, \ q_2 = 0, \ m_1 = 0, \ m_2 = 0$). Подамо мембранні сили за аналогією до теорії оболонок Тимошенка у вигляді

$$N_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}, \quad N_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}, \quad N_{12} = N_{21} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \tag{3.30}$$

За такого подання перші два рівняння системи (3.28) задовольняються тотожньо.

З другого рівняння (3.28) при $i = 1, 2$ та урахування виразів для моментів (3.29) знайдемо формули для зрізувальних сил

$$Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\Delta w, \quad Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\Delta w. \tag{3.31}$$

Підставимо формули (3.30), (3.31) в останнє рівняння системи (3.28). Таким чином знайдемо перше ключове рівняння $D\Delta\Delta w + \Delta^0 \varphi = q_3$, де $\Delta^0 = k_2\, \partial^2 / \partial \alpha_1^2 + k_1\, \partial^2 / \partial \alpha_2^2$.

Друге ключове рівняння шукаємо за аналогією до теорії оболонок Тимошенка. Виразимо з формул (3.29) тангенціальні переміщення через мембранні сили, а потім за допомогою формул (3.30) через функції w, φ. Виключивши переміщення, одержимо рівняння сумісності $\Delta\Delta\varphi = B\left(1-\nu^2\right)\Delta^0 w$.

Отже система ключових рівнянь має вигляд

$$D\Delta\Delta w + \Delta^0\varphi = q_3, \quad \frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\Delta\Delta\varphi = \Delta^0 w. \tag{3.32}$$

Сили і моменти визначаються за відповідними формулами (3.29)–(3.31). Тангенціальні до серединної поверхні оболонки переміщення визначаємо (з точністю до переміщень оболонки як жорсткого тіла) з формул (2.52). Граничні умови записуємо на величини (3.27).

3.4. КЛАСИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ОБОЛОНКИ ЗА ВІДСУТНОСТІ НОРМАЛЬНИХ ЖОРСТКИХ ПОВОРОТІВ

3.4.1. Математична модель деформування оболонки. Жорсткий поворот відносно осі $O\alpha_3$ елемента оболонки задається формулою (3.1), яка містить два незалежні доданки. У межах класичних рівнянь (3.19)–(3.21) уже встановлені обмеження стосовно жорстких поворотів; кути повороту нормалі до серединної поверхні визначаються за формулами (3.22). Тому можна реалізовувати тільки гіпотезу про нехтовну малість жорстких поворотів у серединній поверхні, тобто, умову про нехтовну малість першого доданка ω_{3u} у співвідношенні (3.1). Введем у відповідні рівняння закону Гука (3.20), записані у розгорнутій формі, малий параметр $\alpha = 2/\left[B(1-\nu)\right]$ і додаткові функції T_{12} і T_{21}. У результаті одержимо

$$N_{12} = \frac{B(1-\nu)}{A_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2}{A_1}\right) + T_{12},$$
$$N_{21} = \frac{B(1-\nu)}{A_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_1}{A_2}\right) + T_{21}, \tag{3.33}$$
$$T_{12} = -T_{21}, \quad \alpha T_{12} = \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 u_2\right)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial\left(A_1 u_1\right)}{\partial\alpha_2}\right].$$

Система рівнянь (3.19)–(3.21) з урахуванням формул (3.33) і граничних умова містить малий параметр. Відповідна вироджена система рівнянь задає класичну математичну модель деформування оболонки при нульових жорстких поворотах відносно нормалі до серединної поверхні.

Останнє рівняння системи (3.33) при $\alpha = 0$ є умовою потенціальності поля переміщень. Якщо ввести потенціальну функцію $u = u(\alpha_1, \alpha_2)$ і врахувати формули (3.22), то прийдемо до таких формул для переміщень і кутів повороту

$$u_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}, \quad \gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(w + k_i u) \quad (i = 1, 2). \tag{3.34}$$

Фізичні і геометричні рівняння (3.20), (3.21) перепишемо з урахуванням перших двох співвідношень системи (3.33) у вигляді

$$N_{ii} = B(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}), \quad N_{ij} = B(1-\nu)\tilde{\varepsilon}_{ij} + T_{ij}, \quad T_{ij} = -T_{ji},$$

$$M_{ii} = D(\kappa_{ii} + \nu\kappa_{jj}), \; M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2}\kappa_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \; i \neq j); \tag{3.35}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right), \; \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right),$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right), \tag{3.36}$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right) + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_i}{A_j}\right) \quad (i, j = 1, 2, \; i \neq j).$$

Рівняння рівноваги зберігаються у формі (3.19). Розподіли напружень і переміщень за товщиною оболонки задаються формулами (2.39).

Граничними змінними є величини (3.24) за винятком змінної u_τ.

3.4.2. Сильно полога оболонка. Ґрунтуючись на системі рівнянь (3.25), (3.34)–(3.36), реалізуємо умови пологості оболонки (сформульовані у теорії класичних оболонок і теорії оболонок Тимошенка). Приймаємо гіпотезу про незмінність параметрів серединної поверхні $(A_i = 1, \; k_i = const)$. При цьому рівняння рівноваги набудуть вигляду (3.28). Фізичні рівняння зберігаються у формі (3.35). Геометричні рівняння (3.36) з урахуванням залежностей $u_i = -\partial u / \partial \alpha_i$ та $\gamma_i = -\partial \gamma / \partial \alpha_i$ запишемо так

$$\varepsilon_{ii} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} + k_i w, \quad \kappa_{ii} = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i^2}, \tag{3.37}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, \quad \kappa_{ij} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \quad (i, j = 1, 2, \; i \neq j).$$

Подамо вирази для сил і моментів у розгорнутій формі. Підставивши співвідношення (3.37) у формули (3.35), знайдемо

$$N_{11}=-B\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2^2}-(k_1+\nu k_2)w\right],$$

$$N_{22}=-B\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_2^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}-(k_2+\nu k_1)w\right], \tag{3.38}$$

$$N_{12}=-B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+T_{12},\quad N_{21}=-B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}-T_{12},$$

$$M_{11}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}\right),\quad M_{22}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}\right),$$

$$M_{12}=M_{21}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}.$$

З другого рівняння (3.28) при $i=1,2$, з урахуванням співвідношень (3.38), одержимо вирази для зрізувальних сил

$$Q_1=m_1-D\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\Delta w,\quad Q_2=m_2-D\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\Delta w. \tag{3.39}$$

Підставивши формули для мембранних і зрізувальних сил (3.38) і (3.39) у відповідні рівняння (3.28), одержимо

$$B\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\Delta u-(k_1+\nu k_2)w\right]-\frac{\partial T_{12}}{\partial\alpha_2}=q_1,$$

$$B\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\Delta u-(k_2+\nu k_1)w\right]+\frac{\partial T_{12}}{\partial\alpha_1}=q_2,$$

$$D\Delta\Delta w-B\left(\Delta^\nu u-k_0^2 w\right)=q_3+\frac{\partial m_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial m_2}{\partial\alpha_2},$$

де $\Delta^\nu=(k_1+\nu k_2)\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+(k_2+\nu k_1)\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}$, $\quad k_0^2=k_1^2+2\nu k_1k_2+k_2^2$.

Якщо виключимо функцію T_{12}, то одержимо систему ключових рівнянь

$$B\left(\Delta\Delta u-\Delta^\nu w\right)=\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial q_1}{\partial\alpha_2},$$

$$D\Delta\Delta w-B\left(\Delta^\nu u-k_0^2 w\right)=q_3+\frac{\partial m_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial m_2}{\partial\alpha_2}. \tag{3.40}$$

Зауважимо, що рівняння (3.40) співпадають з відповідними рівняннями для математичної моделі сильно пологої оболонки (3.17) при $1/\Lambda=0$.

3.5. МОДИФІКОВАНА ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА ЗА ВІДСУТНОСТІ НОРМАЛЬНИХ ЖОРСТКИХ ПОВОРОТІВ

3.5.1. Математична модель деформування оболонки. Розглянемо трансверсально-ізотропну оболонку, що перебуває під дією стаціонарних температурного поля, поверхневих та об'ємних сил. Напружено-деформований стан оболонки описується співвідношеннями і рівняннями (2.57)–(2.64). Приймемо, що жорсткий поворот відносно осі Ox_3, який задається формулою (3.1), є нехтовно малою величиною. Введем малі параметри $\alpha = 1/[B(1-\nu)]$ і $\beta = 1/[D(1-\nu)]$, а також додаткові функції $T_{12} = -T_{21}$, $H_{12} = -H_{21}$, які відповідають нехтовно малим величинам

$$\omega_{3u} = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2u_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1u_1)}{\partial\alpha_2}\right],$$

$$\omega_{3\gamma} = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\gamma_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1\gamma_1)}{\partial\alpha_2}\right].$$

Тоді фізичні рівняння (2.60) запишемо у вигляді

$$\begin{gathered} N_{ii} = B(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}) + 2h\lambda'\sigma_3^+ - N_{ii}^t, \\ M_{ii} = D(\kappa_{ii} + \nu\kappa_{jj}) + \frac{2h^2\lambda'}{3}\sigma_3^- - M_{ii}^t, \\ N_{ij} = B(1-\nu)\tilde{\varepsilon}_{ij} + T_{ij}, \quad T_{12} = -T_{21}, \\ M_{ij} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{ij} + H_{ij}, \quad H_{12} = -H_{21} \quad (i, j=1,\ 2,\quad i \neq j); \end{gathered} \tag{3.41}$$

$$\begin{gathered} \alpha T_{12} = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2u_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1u_1)}{\partial\alpha_2}\right], \\ \beta H_{12} = \frac{1}{2A_1A_2}\left[\frac{\partial(A_2\gamma_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1\gamma_1)}{\partial\alpha_2}\right], \end{gathered} \tag{3.42}$$

де $\sigma_i^{\pm} = \frac{1}{2}[\sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, h) \pm \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, -h)]$; $N_{ii}^t = \frac{2hE\alpha_t}{1-\nu}T^0$; $M_{ii}^t = \frac{2h^2E\alpha_t}{3(1-\nu)}T^1$;

$T = T^0 + T^1\frac{\alpha_3}{h}$.

Система рівнянь (2.59), (2.61), (2.63), (3.41) і (3.42) за відповідних граничних умов є системою з малими параметрами.

Вироджена система рівнянь, яка відповідає побудованій системі, визначає спрощену модифіковану математичну модель деформування оболонки. При цьому рівняння (3.42) при $\alpha = 0,\ \beta = 0$ задовольнимо точно, ввівши потенціали $u = u(\alpha_1, \alpha_2)$, $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$

$$u_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}, \quad \gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2) \tag{3.43}$$

Таким чином, рівняння (2.59), (2.61), (2.63), (3.41) і (3.43) складають повну систему ключових рівнянь для визначення напружено-деформованого стану оболонки за відсутності локальних поворотів відносно нормалі до серединної поверхні [96]. Переміщення точок лицевих поверхонь визначаються за формулами (2.64), а залежності переміщень та напружень від нормальної координати задаються формулами (2.57).

Граничними змінними є компоненти векторів сил і моментів, нормальні компоненти векторів переміщень і кутів повороту нормалі, а також прогин.

3.5.2. Модифікована теорія сильно пологих оболонок. За аналогією до теорії сильно пологих оболонок Тимошенка приймаємо гіпотезу про близькість геометрії серединної поверхні оболонки з геометрією площини і, відповідно, $A_i = 1,\ k_i = const\ \ (i = 1, 2)$. Нехтуємо також доданками, що містять кривини, у рівняннях руху (2.63) стосовно мембранних сил і формулах (2.59) для зрізувальних сил.

У результаті врахування цих припущень одержимо:
рівняння рівноваги

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -q_i, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i, \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -q_3 \quad (i = 1,\ 2);$$

фізичні співвідношення (у розгорнутому вигляді)

$$N_{ii} = -B\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_j^2} - (k_i + \nu k_j)w\right] + 2h\lambda'\sigma_3^+ - N_{ii}^t,$$

$$M_{ii} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_j^2}\right) + \frac{2h^2\lambda'}{3}\sigma_3^- - M_{ii}^t, \tag{3.45}$$

$$N_{ij} = B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + T_{ij}, \qquad M_{ij} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + H_{ij}$$

$$Q_i = \Lambda'\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(w - \gamma) + \frac{h\sigma_i^+}{3},\ T_{21} = -T_{12},\ H_{21} = -H_{12} \qquad (i, j = 1, 2, i \neq j),$$

де $q_i = 2\sigma_i^- + hF_i^0, \quad m_i = h\left(2\sigma_i^+ + hF_i^1\right) \quad (i = 1, 2); \quad q_3 = 2\sigma_3^- + hF_3^0; \quad N_{ii}^t = \dfrac{2hE\alpha_t T^0}{1-\nu};$

$M_{11}^t = \dfrac{2h^2 E\alpha_t T^1}{3(1-\nu)}.$

Знехтувавши доданками, що безпосередньо містять кривини у виразах (2.64) для переміщень точок лицевих поверхонь, одержимо

$$\frac{w_i^-}{h} = \frac{5}{6}\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{6}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + \frac{5h}{18\Lambda'}\sigma_i^+, \qquad \frac{w_i^+}{h} = -\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial\alpha_i} + \frac{5h\sigma_i^-}{9\Lambda'} \quad (i = 1,\ 2),$$

$$\frac{w_3^-}{h} = \frac{\sigma_3^+}{E_0'} + \lambda'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_3^2}\right) + \left(2\lambda'\alpha_t + \alpha_t'\right)T^0, \tag{3.46}$$

$$\frac{w_3^+}{h} = \frac{w}{h} + \frac{\sigma_3^-}{3E_0'} + \frac{h\lambda'}{3}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha_2^2} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\alpha_3^2}\right) + \frac{\left(2\lambda'\alpha_t + \alpha_t'\right)}{3}T^1,$$

де $w_i^{\pm} = \dfrac{u_i^+ \pm u_i^-}{2} \quad (i = 1, 2, 3).$

Граничні умови формулюються на нормальні і тангенціальні компоненти мембранної сили та моменту, зрізувальної сили, нормальні компоненти кута повороту нормалі до серединної поверхні та переміщення, а також прогин.

3.6. ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗИ ПРО НЕХТОВНУ МАЛІСТЬ НОРМАЛЬНИХ ЖОРСТКИХ ПОВОРОТІВ

3.6.1. Локальне навантаження пологої оболонки. Розглянемо прямокутну у плані пологу оболонку, напружено-деформований стан якої описується рівняннями теорії оболонок Тимошенка (2.48), (2.50). Нехай краї оболонки шарнірно оперті при $\alpha_1 = 0, \alpha_1 = l_1$, $\alpha_2 = 0, \alpha_2 = l_2$, а зовнішні зусилля, що діють на оболонку, задовольняють умови існування узагальненого розв'язку Фур'є у сенсі рівномірної збіжності й існують потенціальні функції $q = q(\alpha_1, \alpha_2)$, $m = m(\alpha_1, \alpha_2)$

$$q_i = -\frac{\partial q}{\partial\alpha_i}, \quad m_i = -\frac{\partial m}{\partial\alpha_i}, \tag{3.47}$$

тобто, справджуються умови $\dfrac{\partial q_2}{\partial\alpha_1} - \dfrac{\partial q_1}{\partial\alpha_2} = 0$, $\dfrac{\partial m_2}{\partial\alpha_1} - \dfrac{\partial m_1}{\partial\alpha_2} = 0$.

Якщо виключити зусилля і врахувати співвідношення (3.47), то систему рівнянь

(2.48), (2.50) приведемо до такого вигляду

$$B\left[\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}\right)+\Delta^{\nu}w\right]=\Delta q,$$

$$D\Delta\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}\right)-\Lambda\left[\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}\right)+\Delta w\right]=\Delta m,$$

$$\Lambda\left[\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}\right)+\Delta w\right]-B\left[\left((k_1+\nu k_2)\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+(k_2+\nu k_1)\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}\right)+k_0^2 w\right]=-q_3,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}\right)-2(k_1-k_2)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=0, \tag{3.48}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{\Lambda}{D}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}\right)=0,$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}$; $\Delta^{\nu}=(k_1+\nu k_2)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+(k_2+\nu k_1)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}$; $k_0^2=k_1^2+2\nu k_1k_2+k_2^2$.

З цієї системи знайдемо диференціальне рівняння відносно прогину оболонки

$$(\Delta)^4 w+\frac{B}{D}\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)\left[k_0^2\Delta\Delta-\left(\Delta^{\nu}\right)^2-2(1-\nu)(k_1-k_2)^2\frac{\partial^4}{\partial\alpha_1^2\partial\alpha_2^2}\right]w=$$
$$=\frac{1}{D}\left(1-\frac{D}{\Lambda}\Delta\right)\left[(\Delta)^2 q_3-\Delta^{\nu}\Delta q\right]-\frac{1}{D}(\Delta)^3 m. \tag{3.49}$$

Інші компоненти вектора переміщень визначаємо з відповідних диференціальних рівнянь системи (3.48).

Розв’язок вихідної системи рівнянь, що задовольняє умови шарнірного опирання оболонки

$$\begin{gathered}
w(0,\alpha_2)=0,\quad w(l_1,\alpha_2)=0,\ w(\alpha_1,0)=0,\ w(\alpha_1,l_2)=0,\\
u_2(0,\alpha_2)=0,\quad u_2(l_1,\alpha_2)=0,\ u_1(\alpha_1,0)=0,\ u_1(\alpha_1,l_2)=0,\\
\gamma_2(0,\alpha_2)=0,\quad \gamma_2(l_1,\alpha_2)=0,\ \gamma_1(\alpha_1,0)=0,\ \gamma_1(\alpha_1,l_2)=0,\\
N_{11}(0,\alpha_2)=0,\quad N_{11}(l_1,\alpha_2)=0,\ N_{22}(\alpha_1,0)=0,\quad N_{22}(\alpha_1,l_2)=0,\\
M_{11}(0,\alpha_2)=0,\quad M_{11}(l_1,\alpha_2)=0,\ M_{22}(\alpha_1,0)=0,\quad M_{22}(\alpha_1,l_2)=0,
\end{gathered} \tag{3.50}$$

шукаємо у вигляді рядів

$$\left\{\begin{matrix} w \\ N_{ii} \\ M_{ii} \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} w_{km} \\ N_{iikm} \\ M_{iikm} \end{matrix}\right\}\Phi_{km}(\alpha),$$

$$\left\{\begin{matrix} u_1 \\ \gamma_1 \\ Q_1 \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} u_{1km} \\ \gamma_{1km} \\ Q_{1km} \end{matrix}\right\}\Phi^1_{km}(\alpha), \tag{3.51}$$

$$\left\{\begin{matrix} u_2 \\ \gamma_2 \\ Q_2 \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} u_{2km} \\ \gamma_{21km} \\ Q_{2km} \end{matrix}\right\}\Phi^2_{km}(\alpha),$$

$$\left\{\begin{matrix} N_{12} \\ M_{12} \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} N_{12km} \\ M_{12km} \end{matrix}\right\}\Phi^0_{km}(\alpha),$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\Phi^1_{km}(\alpha) = \cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$;

$\Phi^2_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\Phi^0_{km}(\alpha) = \cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\lambda_{k1} = \dfrac{k\pi}{l_1}$, $\lambda_{m2} = \dfrac{m\pi}{l_2}$.

Розвинемо праві частини системи рівнянь (3.48) також у ряди

$$\left\{\begin{matrix} q \\ q_3 \\ m \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} q_{km} \\ q_{3km} \\ m_{km} \end{matrix}\right\}\Phi_{km}(\alpha) \tag{3.52}$$

і підставимо їх разом з поданнями (3.51) у рівняння (3.48). Таким чином знайдемо вирази для коефіцієнтів шуканих функцій. Для коефіцієнтів розвинення прогину маємо формулу

$$D\,w_{km} = \frac{\Delta^1_{km}\left[(\Delta_{km})^2 q_{3km} - \Delta^{\nu}_{km}\Delta_{km}q_{km}\right] + (\Delta_{km})^3 m_{km}}{(\Delta_{km})^4 + \dfrac{B\Delta^1_{km}}{D}\left[k_0^2(\Delta_{km})^2 - (\Delta^{\nu}_{km})^2 - 2(k_1-k_2)^2(1-\nu)(\lambda_{k1})^2(\lambda_{m2})^2\right]}, \tag{3.53}$$

де $\Delta^1_{km} = 1 + \dfrac{D}{\Lambda}\Delta_{km}$.

Визначемо також коефіцієнти розвинень в ряди складових жорсткого повороту елемента оболонки відносно нормалі до серединної поверхні

$$\left\{\begin{matrix} \omega_{3u} \\ \omega_{3\gamma} \end{matrix}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix} \omega_{3ukm} \\ \omega_{3\gamma km} \end{matrix}\right\}\Phi_{km}(\alpha).$$

З останніх двох рівнянь системи (3.48) отримаємо такі вирази для складових жорсткого повороту відносно нормалі до серединної поверхні

$$\omega_{3ukm} = -\frac{(k_1 - k_2)\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\Delta_{km}} w_{km}, \qquad \omega_{3\gamma km} = 0.$$

Таким чином можна стверджувати: а) деформований стан шарнірно опертої пологої оболонки з однаковими кривинами ($k_1 = k_2$), навантаженої зусиллями, що задовольняють умови (3.47), характеризується відсутністю жорстких поворотів відносно нормалі до серединної поверхні оболонки; б) для шарнірно опертої пологої оболонки з різними кривинами ($k_1 \neq k_2$), навантаженої зусиллями, що задовольняють умови (3.47), жорсткі повороти відносно нормалі до серединної поверхні оболонки не залежать від нормальної координати.

3.6.2. Локальне навантаження оболонки за відсутності нормальних жорстких поворотів. Знайдемо розв'язок сформульованої вище задачі з використанням рівнянь (3.13), (3.15), (3.16), які не враховують жорсткі повороти елемента оболонки відносно нормалі до серединної поверхні. При цьому приймаємо, що зовнішні зусилля задовольняють співвідношення (3.47) і справджуються умови шарнірного закріплення країв оболонки (3.50).

Виключивши зусилля і деформації, вихідну систему рівнянь зведемо до системи (3.17). Звідси, виключивши потенціал тангенціальних переміщень, одержимо таке рівняння відносно прогину

$$\begin{gathered}(\Delta)^4 w + \frac{B}{D}\Delta^1_{km}\left[k_0^2\Delta\Delta - \left(\Delta^{\nu}\right)^2\right]w = \\ = \frac{1}{D}\Delta^1_{km}\left[(\Delta)^2 q_3 - \Delta^{\nu}\Delta q\right] - \frac{1}{D}(\Delta)^3 m.\end{gathered} \tag{3.54}$$

Розв'язок задачі (3.13), (3.15), (3.16), (3.50) за умови існування потенціальних функцій (див. формули (3.47)) шукаємо у вигляді рядів (3.51). Зокрема, для визначення коефіцієнтів розвинення прогину з рівняння (3.54) одержимо таку формулу

$$w_{km} = \frac{1}{D}\frac{\Delta^1_{km}\left[(\Delta_{km})^2 q_{3km} - \Delta^{\nu}_{km}\Delta_{km}q_{km}\right] + (\Delta_{km})^3 m_{km}}{(\Delta_{km})^4 + \frac{B}{D}\Delta^1_{km}\left[k_0^2(\Delta_{km})^2 - \left(\Delta^{\nu}_{km}\right)^2\right]}. \tag{3.55}$$

Ключові рівняння (3.49) і (3.54), як і вирази (3.53) і (3.55) для коефіцієнтів розвинень відповідних функцій, співпадають між собою за рівності головних кривин серединної поверхні оболонки. Проаналізуємо вплив величини $k_1 - k_2$ на прогин та інші характеристики оболонки.

3.6.3. Локальне навантаження циліндричної панелі. Розглянемо задачу про локальне навантаження нормальними силами шарнірно опертої циліндричної панелі ($k_1 = 0$) для випадку найбільших значень величини $|k_1 - k_2|$. Локальне нормальне навантаження моделюємо за допомогою дельтоподібної фінітної функції [100]

$$q_3 = P\delta\left(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon\right)\delta\left(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon\right) = P\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}(\alpha), \tag{3.56}$$

де P – рівнодійна нормальних напружень, а $\delta\left(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{\left|\alpha_i - \alpha_i^0\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\alpha_i - \alpha_i^0\right| \le \varepsilon, \\ 0, & \left|\alpha_i - \alpha_i^0\right| > \varepsilon; \end{cases}$

$$g(t) = 2(1-t);\; c_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon),\quad \varepsilon \ne 0;\quad \varphi(\lambda\varepsilon) = \int_0^1 (1-t)\cos(\lambda\varepsilon t)\,dt = \left[\frac{\sin(\lambda\varepsilon/2)}{\lambda\varepsilon/2}\right]^2;$$

Записавши співвідношення (3.52), (3.55) з урахуванням рівностей $k_1 = 0$, $q_{3km} = Pc_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)$ і подання (3.51), знайдемо відповідно вирази для прогину панелі з використанням рівнянь теорії оболонок Тимошенка та теорії оболонок Тимошенка за умови відсутності нормальних жорстких поворотів

$$w = \frac{P}{D}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\Delta_{km}^1\left(\Delta_{km}\right)^2\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}(\alpha)}{\left(\Delta_{km}\right)^4 + \dfrac{B\left(1-\nu^2\right)k_2^2}{D}\Delta_{km}^1\left(\lambda_{k1}\right)^4}, \tag{3.57}$$

$$w = \frac{P}{D}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\Delta_{km}^1\left(\Delta_{km}\right)^2\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}(\alpha)}{\left(\Delta_{km}\right)^4 + \dfrac{Bk_2^2}{D}\Delta_{km}^1\left[\left(1-\nu^2\right)\left(\lambda_{k1}\right)^4 + 2(1-\nu)\left(\lambda_{k1}\right)^2\left(\lambda_{m2}\right)^2\right]}. \tag{3.58}$$

Підставимо значення $D/\Lambda = 0$ у формулу (3.57). Таким чином отримаємо вираз для визначення прогину циліндричної панелі згідно класичної теорії оболонок Кірхгофа-Лява

$$w = \frac{P}{D}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\left(\Delta_{km}\right)^2\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}(\alpha)}{\left(\Delta_{km}\right)^4 + \dfrac{B\left(1-\nu^2\right)k_2^2}{D}\left(\lambda_{k1}\right)^4}. \tag{3.58}$$

З формули (3.58) можна одержати вираз для прогину панелі, що відповідає класичній теорії оболонок за відсутності нормальних жорстких поворотів.

Криві на рис. 3.1 ілюструють залежність функції $\overline{w} = 10^2 wD/\left(R^2 P\right)$ від параметра $\alpha_2 = l_2/2$ для $l_1 = l_2 = R = 1$, $\varepsilon = h$, $\nu = 0{,}3$ та значень параметра $h/R = 0{,}1$ (рис. 3.1 a), $h/R = 0{,}05$ (рис.3.1 b). Криві 1, 2, 3 відповідають розв'язкам, одержаним за допомогою рівнянь теорії оболонок Тимошенка, класичної теорії оболонок і спрощеної теорії оболонок (за нехтування нормальними жорсткими поворотами). Як видно з графіків похибки при визначенні прогину циліндричної згідно рівнянь класичної теорії оболонок і спрощеної теорії оболонок співмірні.

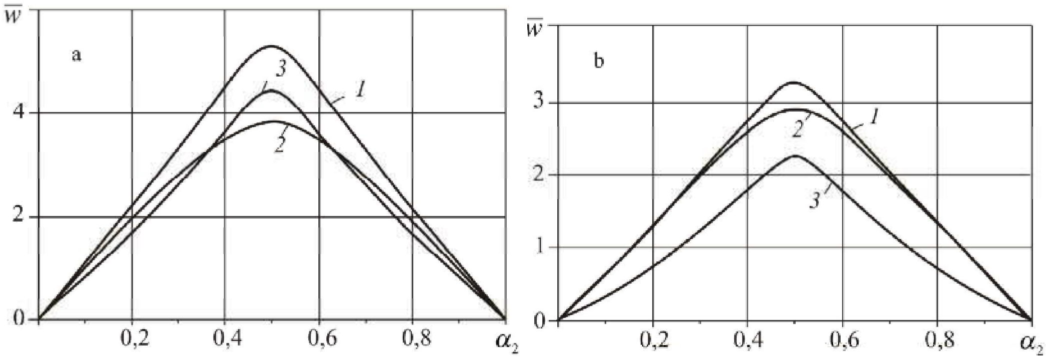

Рис. 3.1. Прогини локально навантажених циліндричних панелей різної товщини (a – $h/R = 0{,}1$, b – $h/R = 0{,}05$)

На рис. 3.2 показано залежність функції $\overline{w} = 10^2 wD/\left(R^2 P\right)$ від координати α_2 для циліндричної панелі з низькою зсувною жорсткістю $G/G' = 5$ при $l_1 = l_2 = R = 1$, $\varepsilon = h$, $\nu = 0{,}3$, $h/R = 0{,}1$. Криві 1, 2, 3 відповідають розв'язкам, які одержані за допомогою рівнянь теорії оболонок Тимошенка, класичної теорії оболонок і спрощеної теорії оболонок. Бачимо, що припущення про відсутність нормальних жорстких поворотів при моделюванні напружено-деформованого стану тонкостінних елементів із низькою зсувною жорсткістю приводить до значно менших похибок, ніж гіпотеза про відсутність поперечних зсувів.

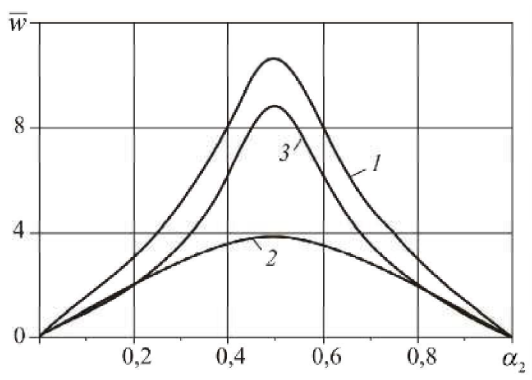

Рис. 3.2. Прогин оболонки з низькою зсувною жорсткістю

РОЗДІЛ 4

ВАРІАЦІЙНІ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Варіаційні методи теорії пружності однаково ефективно використовуються як для побудови математичних моделей деформування пружних тіл, зокрема, для формулювання співвідношень та рівнянь теорій оболонок, так і для розробки наближених методів розв’язування та побудови числових розв’язків крайових задач [6, 12, 50, 54, 55, 62, 66, 71, 86, 101, 119].

У розділі гіпотетичним методом із використанням варіаційних принципів побудовано різні варіанти рівнянь теорії оболонок. Сформульовано відомі у теорії пружності взаємодвоїсті узагальнені варіаційні принципи (стаціонарності потенціальної енергії і стаціонарності додаткової енергії) теорії пружності у криволінійних координатах [12] і основні варіаційні принципи теорії оболонок, які доповнено відповідними варіаційними принципами модифікованої теорії оболонок Тимошенка [67, 72]. У межах теорії оболонок Тимошенка сформульовано узагальнений варіаційний принцип стаціонарності потенціальної енергії, а у межах модифікованої теорії оболонок Тимошенка – узагальнений варіаційний принцип стаціонарності додаткової енергії (Хеллінгера-Рейснера). Спрощені (у межах теорій оболонок Тимошенка) математичні моделі деформування оболонок одержано гіпотетичним методом із використанням узагальнених варіаційних принципів теорії оболонок і методу множників Лагранжа. Зауважимо, що у попередньому розділі побудова спрощених теорій оболонок ґрунтувалася на реалізації гіпотез послідовнісним методом – наближенням шуканих величин послідовностями частинних сум рядів за введеними малими параметрами.

4.1. ВАРІАЦІЙНІ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТОНКОГО КРИВОЛІНІЙНОГО ШАРУ

Розглянемо стаціонарну крайову задачу для системи рівнянь (1.18)–(1.20). Вважаємо, що тонкий (у розумінні виконання умов (1.17)) криволінійний трансверсально-ізотропний шар навантажено об'ємними силами $F_i\ (i=1,2,3)$. Задані також напруження $\sigma_{i3}^{\pm}=\sigma_{i3}(\alpha_1,\alpha_2,\pm h)$ на лицевих поверхнях і напруження $\overline{p}_i=\overline{\sigma}_{i1}s_1+\overline{\sigma}_{i2}s_2\ (i=1,2)$ на частині S_σ бічної поверхні; на іншій частині S_u бічної поверхні задані переміщення $\overline{u}_i\ (i=1,2,3)$, тобто виконуються граничні умови (1.13), (1.15).

Питома потенціальна енергія A_p і питома додаткова енергія A_d деформації трансверсально-ізотропного шару задаються формулами [12]

$$2A_P=E_0\left(e_{11}^2+2\nu e_{11}e_{22}+e_{22}^2\right)+E_0'\left[\lambda'\left(e_{11}+e_{22}\right)+e_{33}\right]^2+ \\ +Ge_{12}^2+G'\left(e_{13}^2+e_{23}^2\right), \tag{4.1}$$

$$2A_{\text{D}}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2\right)+\frac{1}{E'}\sigma_{33}^2-\frac{2\nu}{E}\sigma_{11}\sigma_{22}-\frac{2\nu'}{E'}\sigma_{33}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)+ \\ +\frac{1}{G}\sigma_{12}^2+\frac{1}{G'}\left(\sigma_{13}^2+\sigma_{23}^2\right). \tag{4.2}$$

Узагальнений функціонал потенціальної енергії має вигляд

$$J_P=\iiint\limits_V\left\{A_{\text{P}}-\left(F_1U_1+F_2U_2+F_3U_3\right)-\sigma_{11}\left[e_{11}-\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{U_2}{A_2}+k_1A_1U_3\right)\right]-\sigma_{22}\left[e_{22}-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{U_1}{A_1}+k_2A_2U_3\right)\right]-$$

$$-\sigma_{12}\left[e_{12}-\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_1}-\frac{U_1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2}-\frac{U_2}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\right]-$$

$$-\sigma_{33}\left(e_{33}-\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_3}\right)-\sigma_{13}\left[e_{13}-\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_1}-k_1A_1U_1\right)-\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_3}\right]- \tag{4.3}$$

$$\left.-\sigma_{23}\left[e_{23}-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_2}-k_2A_2U_2\right)-\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_3}\right]\right\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3-$$

$$-\iint_{S_\sigma}\left(\bar{p}_1 U_1+\bar{p}_2 U_2+\bar{p}_3 U_3\right)ds-\iint_{S_u}\left[p_1\left(U_1-\bar{u}_1\right)+p_2\left(U_2-\bar{u}_2\right)+\right.$$

$$\left.-p_3\left(U_3-\bar{u}_3\right)\right]ds-\iint_{S^\pm}\left(\sigma_{13}^\pm U_1+\sigma_{23}^\pm U_2+\sigma_{33}^\pm U_3\right)ds,$$

де $p_i=\sigma_{i1}s_1+\sigma_{i2}s_2$; $\vec{n}=\{s_1,s_2,0\}$ – одиничний нормальний вектор до бічної поверхні $S_u \bigcup S_\sigma$.

Незалежними змінними функціоналу (4.3) є вісімнадцять величин $U_i, e_{ij}=e_{ji}, \sigma_{ij}=\sigma_{ji}, p_i \;\; (i, j=1, 2, 3)$.

Узагальнений функціонал додаткової енергії (Хеллінгера-Рейснера) отримаємо з функціоналу (4.3), прийнявши деформації e_{ij} залежними величинами і виключивши їх з допомогою рівнянь (1.19),

$$\begin{aligned}J_{\mathrm{D}}=\iiint_V\Bigg\{&\frac{\sigma_{11}}{A_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{U_2}{A_2}+k_1A_1U_3\right)+\frac{\sigma_{22}}{A_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{U_1}{A_1}+\right.\\&\left.+k_2A_2U_3\right)+\sigma_{12}\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_1}-\frac{U_1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2}-\frac{U_2}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\right]+\\&+\sigma_{33}\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_3}+\sigma_{13}\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_1}-k_1A_1U_1\right)+\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_3}\right]+\sigma_{23}\left[\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_2}-\right.\right.\\&\left.\left.-k_2A_2U_2\right)+\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_3}\right]-A_{\mathrm{D}}-\left(F_1U_1+F_2U_2+F_3U_3\right)\Bigg\}A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3-\\&-\iint_{S_\sigma}\left(\bar{p}_1U_1+\bar{p}_2U_2+\bar{p}_3U_3\right)ds-\iint_{S^\pm}\left(\sigma_{13}^\pm U_1+\sigma_{23}^\pm U_2+\sigma_{33}^\pm U_3\right)ds-\\&-\iint_{S_u}\left[p_1\left(U_1-\bar{u}_1\right)+p_2\left(U_2-\bar{u}_2\right)+p_3\left(U_3-\bar{u}_3\right)\right]ds.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Функціонал (4.4) містить дванадцять незалежних величин $U_i, \sigma_{ij}=\sigma_{ji}, p_i$ $(i, j=1, 2, 3)$.

Функціонали (4.3) і (4.4) закладено в основу варіаційних формулювань крайових задач теорії пружності [12, 56, 60, 78, 86] і побудови математичних моделей деформування тонкостінних пружних тіл.

Твердження 4.1. (*узагальнений варіаційний принцип стаціонарності потенціальної енергії*). Дійсний розв'язок задачі (1.13), (1.15), (1.18)–(1.20) надає функціоналу (4.3) стаціонарного значення.

Твердження 4.2. (*узагальнений варіаційний принцип стаціонарності додаткової енергії*). Дійсний розв’язок задачі (1.13), (1.15), (1.18)–(1.20) надає функціоналу (4.4) стаціонарного значення.

Відповідні рівняння задач теорії пружності для шару випливають з необхідних умов стаціонарності функціоналів (рівності нулю перших варіацій функціоналів).

Знайдемо першу варіацію функціонала (4.3)

$$
\delta J_P = \iiint_V \left\{ \left(\frac{\partial A_P}{\partial e_{11}} - \sigma_{11} \right) \delta e_{11} + \left(\frac{\partial A_P}{\partial e_{12}} - \sigma_{12} \right) \delta e_{12} + \left(\frac{\partial A_P}{\partial e_{13}} - \sigma_{13} \right) \delta e_{13} + \right.
$$

$$
+ \left(\frac{\partial A_P}{\partial e_{22}} - \sigma_{22} \right) \delta e_{22} + \left(\frac{\partial A_P}{\partial e_{23}} - \sigma_{23} \right) \delta e_{23} + \left(\frac{\partial A_P}{\partial e_{33}} - \sigma_{33} \right) \delta e -
$$

$$
\left[e_{11} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{U_2}{A_2} + k_1 A_1 U_3 \right) \right] \delta \sigma_{11} - \left[e_{12} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} - \frac{U_1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) - \right.
$$

$$
\left. - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} - \frac{U_2}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \right] \delta \sigma_{12} - \left[e_{13} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} - k_1 A_1 U_1 \right) - \frac{\partial U_1}{\partial \alpha_3} \right] \delta \sigma_{13} -
$$

$$
- \left[e_{22} - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{U_1}{A_1} + k_2 A_2 U_3 \right) \right] \delta \sigma_{22} - \left[e_{23} - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} - \right. \right.
$$

$$
\left. \left. - k_2 A_2 U_2 \right) - \frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} \right] \delta \sigma_{23} - \left(e_{33} - \frac{\partial U_3}{\partial \alpha_3} \right) \sigma_{33} \Bigg\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 +
$$

$$
+ \iiint_V \left\{ \frac{\sigma_{11}}{A_1} \delta \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\sigma_{22}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta U_1 + \sigma_{12} \left[\frac{1}{A_2} \delta \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_2} \right) - \right. \right.
$$

$$
\left. - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta U_1 \right] + \sigma_{13} \left[\delta \left(\frac{\partial U_1}{\partial \alpha_3} \right) - k_1 \delta U_1 \right] + \frac{\sigma_{11}}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta U_2 +
$$

$$
+ \sigma_{12} \left[\frac{1}{A_2} \delta \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_1} \right) - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta U_2 \right] + \frac{\sigma_{22}}{A_2} \delta \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_2} \right) +
$$

$$
+ \sigma_{23} \left[\delta \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} \right) - k_2 \delta U_2 \right] + \frac{\sigma_{13}}{A_1} \delta \left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\sigma_{23}}{A_2} \delta \left(\frac{\partial U_3}{\partial \alpha_2} \right) +
$$

$$
+ \sigma_{33} \delta \left(\frac{\partial U_2}{\partial \alpha_3} \right) + \left(k_1 \sigma_{11} + k_2 \sigma_{22} \right) \delta U_3 - \left(F_1 \delta U_1 + F_2 \delta U_2 + \right.
$$

$$+F_3\delta U_3\big)\Big\}A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3-\iint\limits_{S_\sigma}\left(\overline{p}_1\delta U_1+\overline{p}_2\delta U_2+\overline{p}_3\delta U_3\right)ds-$$

$$-\iint\limits_{S_u}\left[\left(U_1-\overline{u}_1\right)\delta p_1+\left(U_2-\overline{u}_2\right)\delta p_2+\left(U_3-\overline{u}_3\right)\delta p_3\right]ds-$$

$$-\iint\limits_{S_u}\left[p_1\delta U_1+p_2\delta U_2+p_3\delta U_3\right]ds-\iint\limits_{S^\pm}\left(\sigma_{13}^\pm\delta U_1+\sigma_{23}^\pm\delta U_2+\sigma_{33}^\pm\delta U_3\right)ds.$$

Провівши тут перетворення з урахуванням формули інтегрування за частинами

$$\iiint\limits_V\sigma\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\delta U\right)A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3=$$

$$=-\iiint\limits_V\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha_i}\left(\delta U\right)A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3+\iint\limits_S\sigma l\delta U ds,$$

де $l=\cos\left(n\hat{\alpha}_i\right)$, одержимо

$$\delta J_P=\iiint\limits_V\left\{\left(\frac{\partial A_\text{P}}{\partial e_{11}}-\sigma_{11}\right)\delta e_{11}+\left(\frac{\partial A_\text{P}}{\partial e_{12}}-\sigma_{12}\right)\delta e_{12}+\left(\frac{\partial A_\text{P}}{\partial e_{13}}-\sigma_{13}\right)\delta e_{13}+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial A_\text{P}}{\partial e_{22}}-\sigma_{22}\right)\delta e_{22}+\left(\frac{\partial A_\text{P}}{\partial e_{23}}-\sigma_{23}\right)\delta e_{23}+\left(\frac{\partial A_\text{P}}{\partial e_{33}}-\sigma_{33}\right)\delta e-\Big[e_{11}-$$

$$-\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{U_2}{A_2}+k_1A_1U_3\right)\Bigg]\delta\sigma_{11}-\left[e_{12}-\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_1}-\frac{U_1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_2}-\frac{U_2}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)\right]\delta\sigma_{12}-\left[e_{13}-\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_1}-k_1A_1U_1\right)-\frac{\partial U_1}{\partial\alpha_3}\right]\delta\sigma_{13}-$$

$$-\left[e_{22}-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{U_1}{A_1}+k_2A_2U_3\right)\right]\delta\sigma_{22}-$$

$$-\left[e_{23}-\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_2}-k_2A_2U_2\right)-\frac{\partial U_2}{\partial\alpha_3}\right]\delta\sigma_{23}-$$

$$\left.-\left(e_{33}-\frac{\partial U_3}{\partial\alpha_3}\right)\sigma_{33}\right\}A_1A_2d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3-\iiint\limits_V\left\langle\left\{\frac{\partial\left(A_1\sigma_{11}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}+\right.\right.$$

$$+\frac{\partial(A_1\sigma_{12})}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}+A_1A_2\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_3}+A_1A_2k_1\sigma_{13}+A_1A_2F_1\Big\}\delta U_1+$$

$$+\left\{-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}+\frac{\partial(A_1\sigma_{12})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{12}+\frac{\partial(A_1\sigma_{22})}{\partial\alpha_2}+A_1A_2\frac{\partial(\sigma_{23})}{\partial\alpha_3}+\right.$$

$$+A_1A_2k_2\sigma_{23}+A_1A_2F_2\Big\}\delta U_2+\left\{\frac{\partial(A_2\sigma_{13})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(A_1\sigma_{23})}{\partial\alpha_2}+A_1A_2\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\alpha_2}-\right.$$

$$-A_1A_2(k_1\sigma_{11}+k_2\sigma_{22})+A_1A_2F_3\Big\}\delta U_3\Big\rangle d\alpha_1d\alpha_2d\alpha_3-$$

$$-\iint_{S_\sigma}\left[(\bar{p}_1-p_1)\delta U_1+(\bar{p}_2-p_2)\delta U_2+(\bar{p}_3-p_3)\delta U_3\right]ds-$$

$$-\iint_{S_u}\left[(U_1-\bar{u}_1)\delta p_1+(U_2-\bar{u}_2)\delta p_2+(U_3-\bar{u}_3)\delta p_3\right]ds-$$

$$-\iint_{S^\pm}\left[\left(\sigma_{13}^\pm-\sigma_{13}\right)\delta U_1+\left(\sigma_{13}^\pm-\sigma_{13}\right)\delta U_2+\left(\sigma_{13}^\pm-\sigma_{13}\right)\delta U_3\right]ds.$$

З умови рівності нулю першої варіації функціонала ($\delta J_P=0$) одержимо рівняння (1.18)–(1.20) і граничні умови (1.13), (1.15). Стаціонарність функціонала на дійсному розв'язку задачі випливає з додатної визначеності квадратичної форми (4.1).

4.2. ВАРІАЦІЙНІ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

Сформулюємо узагальнений варіаційний принцип стаціонарності потенціальної енергії для першого наближення розв'язку задачі про визначення напружено-деформованого стану криволінійного шару (за ізотермічного наближення та відсутності інерційних сил), що відповідає математичній моделі Тимошенка. У межах цього наближення переміщення, деформації, напруження та об'ємні сили задаються формулами

$$U_i=u_i(\alpha_1,\alpha_2)+\gamma_i(\alpha_1,\alpha_2)\alpha_3,\quad U_3=w(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$e_{ij}=\varepsilon_{ij}+\kappa_{ij}\alpha_3,\quad e_{i3}=\varepsilon_{i3},\quad e_{33}=0,$$
$$\sigma_{ij}=\frac{N_{ij}}{2h}+\frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3,$$
$$\sigma_{i3}=\begin{cases}\dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3|<h,\\ \sigma_{i3}^\pm, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}\qquad \sigma_{33}=\begin{cases}0, & |\alpha_3|<h,\\ \sigma_{33}^\pm, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}\tag{4.5}$$

$$p_i = \frac{N_i}{2h} + \frac{3M_i}{2h^3}\alpha_3, \quad p_3 = \frac{Q_s}{2h} \qquad (i, j = 1, 2),$$

де $N_i = N_{i1}s_1 + N_{i2}s_2$, $M_i = M_{i1}s_1 + M_{i2}s_2$, $Q_s = Q_1 s_1 + Q_2 s_2$.

Нехай оболонка навантажена об’ємними силами $F_i = \frac{F_i^0}{2} + \frac{3F_i^1}{2h}\alpha_3 \quad (i = 1, 2)$, $F_3 = \frac{F_3^0}{2}$. Заданими є також напруження $\sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ на поверхнях $S^{\pm}$ і $\overline{p}_i = \frac{\overline{N}_i}{2h} + \frac{3\overline{M}_i}{2h^3}\alpha_3$, $\overline{p}_3 = \frac{\overline{Q}_s}{2h}$ на частині S_σ бічної поверхні. На іншій частині S_u бічної поверхні задані переміщення $\overline{u}_i = \overline{u}_i(\alpha_1, \alpha_2) + \overline{\gamma}_i(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3$, $\overline{u}_3 = \overline{w}(\alpha_1, \alpha_2)$. Якщо підставити формули (4.5) у вирази функціоналів (4.3), (4.4) і привести об’ємні та поверхневі інтеграли до серединної поверхні S з урахуванням наближеної формули $\iint\limits_{S^{\pm}} U_i \sigma_{3i}^{\pm} ds = \iint\limits_{S} (u_i \pm h\gamma_i)\sigma_{3i}^{\pm} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, то одержимо

$$J_P^0 = \iint\limits_S \Big\{ A_P^0 - \left[F_1^0 u_1 + F_2^0 u_2 + F_2^0 w - h\left(F_1^1\gamma_1 + F_2^1\gamma_2\right)\right] -$$

$$- \left\langle N_{11}\left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{u_2}{A_2} + k_1 A_1 w\right)\right] + M_{11}\left[\kappa_{11} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\gamma_2}{A_2}\right)\right]\right\rangle -$$

$$- \left\langle N_{22}\left[\varepsilon_{22} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{u_1}{A_1} + k_1 A_2 w\right)\right] + M_{22}\left[\kappa_{22} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\gamma_1}{A_1}\right)\right]\right\rangle -$$

$$- \Big\langle N_{12}\left[\varepsilon_{12} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{u_1}{A_2}\right) - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{u_2}{A_1}\right)\right] +$$

$$+ M_{12}\left[\kappa_{12} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{\gamma_1}{A_2}\right) - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\frac{\gamma_2}{A_1}\right)\right]\Big\rangle -$$

$$- \Big\langle Q_1\left[\varepsilon_{13} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - k_1 A_1 u_1\right) - \gamma_1\right] +$$

$$+ Q_2\left[\varepsilon_{23} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_2 A_2 u_2\right) - \gamma_2\right]\Big\rangle \Big\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$
\begin{gathered}
-\int_{L_\sigma}\left(\overline{N}_1 u_1+\overline{N}_2 u_2+\overline{Q}_s w+\overline{M}_1\gamma_1+\overline{M}_2\gamma_2\right)dl- \\
-\int_{L_u}\left[N_1\left(u_1-\overline{u}_1\right)+N_2\left(u_2-\overline{u}_2\right)+Q_s\left(w-\overline{w}\right)+M_1\left(\gamma_1-\overline{\gamma}_1\right)+\right. \\
\left.+M_2\left(\gamma_2-\overline{\gamma}_2\right)\right]dl-\iint_S\left[\left(\sigma_{13}^{+}+\sigma_{13}^{-}\right)u_1+\left(\sigma_{23}^{+}+\sigma_{23}^{-}\right)u_2+\left(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-}\right)w+\right. \\
\left.+\left(\sigma_{13}^{+}-\sigma_{13}^{-}\right)h\gamma_1+\left(\sigma_{23}^{+}-\sigma_{23}^{-}\right)h\gamma_2\right]A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2,
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{gathered}
J_D^0=\iint_S\left\{\left\langle N_{11}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_2}{A_2}+k_1A_1w\right)+\right.\right. \\
\left.+M_{11}\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\gamma_2}{A_2}\right)\right\rangle+\left\langle N_{22}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_1}{A_1}+k_1A_2w\right)+\right. \\
\left.+M_{22}\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\gamma_1}{A_1}\right)\right\rangle+\left\langle N_{12}\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_1}{A_2}\right)+\right.\right. \\
\left.+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2}{A_1}\right)\right]+M_{12}\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\gamma_1}{A_2}\right)+\right. \\
\left.\left.+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\gamma_2}{A_1}\right)\right]\right\rangle+\left\langle Q_1\left[\gamma_1+\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-k_1A_1u_1\right)\right]+\right. \\
\left.+Q_2\left[\gamma_2+\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-k_2A_2u_2\right)\right]\right\rangle-\left[F_1^0u_1+F_2^0u_2+F_2^0w-\right. \\
\left.\left.-h\left(F_1^1\gamma_1+F_2^1\gamma_2\right)\right]-A_D^0\right\}A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2-\int_{L_\sigma}\left(\overline{N}_1u_1+\overline{N}_2u_2+\overline{Q}_sw+\overline{M}_1\gamma_1+\overline{M}_2\gamma_2\right)dl- \\
-\int_{L_u}\left[N_1\left(u_1-\overline{u}_1\right)+N_2\left(u_2-\overline{u}_2\right)+Q_s\left(w-\overline{w}\right)+\right. \\
\left.+M_1\left(\gamma_1-\overline{\gamma}_1\right)+M_2\left(\gamma_2-\overline{\gamma}_2\right)\right]dl-\iint_S\left[\left(\sigma_{13}^{+}+\sigma_{13}^{-}\right)u_1+\left(\sigma_{23}^{+}+\sigma_{23}^{-}\right)u_2+\right. \\
\left.+\left(\sigma_{33}^{+}+\sigma_{33}^{-}\right)w+\left(\sigma_{13}^{+}-\sigma_{13}^{-}\right)h\gamma_1+\left(\sigma_{23}^{+}-\sigma_{23}^{-}\right)h\gamma_2\right]A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

Тут

$$2A_P^0 = B\left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2\right) + D\left(\kappa_{11}^2 + 2\nu\kappa_{11}\kappa_{22} + \kappa_{22}^2\right) +$$
$$+ \frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{12}^2 + \frac{D(1-\nu)}{2}\kappa_{12}^2 + \Lambda\left(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2\right), \qquad (4.8)$$

$$2A_D^0 = \frac{1}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{B}\left(N_{11}^2 + N_{22}^2\right) + \frac{1}{D}\left(M_{11}^2 + M_{11}^2\right) - 2\nu\left(\frac{1}{B}N_{11}N_{22} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{D}M_{11}M_{22}\right) + 2(1+\nu)\left(\frac{1}{B}N_{12}^2 + \frac{1}{D}M_{12}^2\right)\right] + \frac{1}{\Lambda}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right),$$

A_p^0 та A_d^0 – питомі потенціальна енергія і додаткова енергія деформації оболонки; S – серединна поверхня оболонки; $L = L_u \cup L_\sigma$ – границя серединної поверхні; $\overline{u}_i, \overline{\gamma}_i, \overline{w}, \overline{N}_i, \overline{M}_i, \overline{Q}_i$ – коефіцієнти розвинень величин, заданих на бічній поверхні шару.

Обчислимо першу варіацію функціонала (4.6), що має двадцять шість незалежних параметрів u_i, w, γ_i, N_{ii}, M_{ii}, ε_{ii}, κ_{ii}, $N_{12} = N_{21}$, Q_i, $M_{12} = M_{21}$ $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, ε_{i3}, $\kappa_{12} = \kappa_{21}$, N_i, M_i, Q_s $(i = 1, 2)$. Використавши при цьому формулу інтегрування за частинами, отримаємо

$$\delta J_P^0 = \iint_S \left\{\left(\frac{\partial A_P^0}{\partial \varepsilon_{11}} - N_{11}\right)\delta\varepsilon_{11} + \ldots + \left(\frac{\partial A_P^0}{\partial \varepsilon_{32}} - Q_2\right)\delta\varepsilon_{32} -\right.$$
$$-\left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\frac{u_2}{A_2} + k_1 A_1 w\right)\right]\delta N_{11} - \ldots -$$
$$\left.-\left[\varepsilon_{23} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_1 A_2 u_2\right) - \gamma_2\right]\delta Q_2\right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 -$$
$$-\iint_S \left\{\left[\frac{\partial(A_2 N_{11})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{12})}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}N_{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}N_{21} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+ k_1 A_1 A_2 Q_1 + A_1 A_2\left(F_1^0 + \sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-\right)\right]\delta u_1\right\} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$
$$-\int_{L_\sigma}\left[\left(\overline{N}_1 - N_1\right)\delta u_1 + \left(\overline{N}_2 - N_2\right)\delta u_2 + \left(Q_s - \overline{Q}_s\right)\delta w +\right.$$
$$\left.+\left(\overline{M}_1 - M_1\right)\delta\gamma_1 + \left(\overline{M}_2 - M_2\right)\delta\gamma_2\right]dl - \int_{L_u}\left[\left(u_1 - \overline{u}_1\right)\delta N_1 + \left(u_2 - \overline{u}_2\right)\delta N_2 +\right.$$

$$+\left(w-\overline{w}\right)\delta Q_s+\left(\gamma_1-\overline{\gamma}_1\right)\delta M_1+\left(\gamma_2-\overline{\gamma}_2\right)\delta M_2\,\Big]dl.$$

З умови рівності нулю першої варіації функціонала J_P^0 ($\delta J_P^0=0$) одержимо рівняння (2.41)–(2.43) і граничні умови

$$u_n=\overline{u}_n,\ u_\tau=\overline{u}_\tau,\ \ w=\overline{w},\ \ \gamma_n=\overline{\gamma}_n\quad \gamma_\tau=\overline{\gamma}_\tau \text{ на } L_u\,;$$

$$N_i=\overline{N}_i,\ \ M_i=\overline{M}_i\ \ (i=1,2),\ \ Q_s=\overline{Q}_s \text{ на } L_\sigma\,. \tag{4.9}$$

Стаціонарність функціонала на дійсному розв'язку задачі випливає з додатної визначеності квадратичної форми (4.8).

Таким чином доведено узагальнений варіаційний принцип потенціальної енергії деформації для оболонки Тимошенка [28, 60].

Твердження 4.3. Розв'язок задачі (2.41)–(2.43), (4.9) забезпечує функціоналу (4.6) стаціонарне значення.

Опираючись на розширений функціонал додаткової енергії (4.7), можна довести наступне твердження:

Твердження 4.4. Розв'язок задачі (2.41)–(2.43), (4.9) забезпечує функціоналу (4.7) стаціонарне значення.

Формулювання і доведення узагальнених принципів для *n*-го наближення розв'язку задачі про визначення напружено-деформованого стану криволінійного шару проводиться аналогічно.

4.3. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП СТАЦІОНАРНОСТІ ДОДАТКОВОЇ ЕНЕРГІЇ. МОДИФІКОВАНА ТЕОРІЯ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

Сформулюємо узагальнений варіаційний принцип стаціонарності додаткової енергії за використання модифікованої теорії оболонок Тимошенка. Об'єктом дослідження є криволінійний шар. При розгляді відповідних задач теорії пружності знехтуємо силами інерції та обмежимось ізотермічним наближенням. За таких припущень переміщення та напруження для першого наближення розв'язку задачі, одержаного другим способом (при $n=1$), задаються формулами (2.57). Запишемо їх у вигляді [72]

$$U_i=\begin{cases}u_i^0+u_i^1\dfrac{\alpha_3}{h}, & |\alpha_3|<h,\\ u_i^{\pm}, & \alpha_3=\pm h,\end{cases}\qquad U_3=\begin{cases}u_3^0, & |\alpha_3|<h,\\ u_3^{\pm}, & \alpha_3=\pm h;\end{cases}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{N_{ij}^0}{2}+\frac{3N_{ij}^1}{2}\frac{\alpha_3}{h},$$

$$\sigma_{i3}=\frac{N_{i3}^0}{2}+\frac{3N_{i3}^1}{2}\frac{\alpha_3}{h}+\frac{5}{4}N_{i3}^2\left(\frac{3\alpha_3^2}{h^2}-1\right),$$

$$\sigma_{33} = \frac{N_{33}^0}{2} + \frac{3N_{33}^1}{2}\frac{\alpha_3}{h}, \tag{4.10}$$

$$p_i = \frac{N_i^0}{2} + \frac{3N_i^1}{2}\frac{\alpha_3}{h}, \quad p_3 = \frac{N_{3s}^0}{2} \quad (i, j = 1, 2),$$

де $N_i^0 = N_{i1}^0 s_1 + N_{i2}^0 s_2$, $N_i^1 = N_{i1}^1 s_1 + N_{i2}^1 s_2$, $N_{3s}^0 = N_{31}^0 s_1 + N_{32}^0 s_2$.

Розглянемо випадок навантаження оболонки об'ємними силами $F_i = \frac{F_i^0}{2} + \frac{3F_i^1}{2} \cdot \frac{\alpha_3}{h}$ $(i = 1, 2)$, $F_3 = \frac{F_3^0}{2}$. Вважаємо також, що задані напруження $\sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ $(i = 1, 2)$ на лицевих поверхнях $S^{\pm}$ і $\bar{p}_i = \frac{\bar{N}_i^0}{2} + \frac{3\bar{N}_i^1}{2} \cdot \frac{\alpha_3}{h}$ $(i = 1, 2)$, $\bar{p}_3 = \frac{\bar{N}_{3s}^0}{2}$, $|\alpha_3| < h$, на частині S_σ бічної поверхні S; а на частині S_u бічної поверхні – переміщення $\bar{u}_i = \bar{u}_i^0 + \bar{u}_i^1 \cdot \frac{\alpha_3}{h}$ $(i = 1, 2)$, $\bar{u}_3 = \bar{u}_3^0$, $|\alpha_3| < h$.

Якщо апроксимаційні вирази (4.10) підставити у функціонал (4.4), проінтегрувавши його по нормальній координаті і застосувавши формулу інтегрування за частинами, то у підсумку отримаємо

$$J_{\mathrm{D}}^0 = \iint_S \left\{ \frac{N_{11}^0}{A_1}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_2^0}{A_2} + k_1 A_1 u_3^0\right) + \frac{N_{22}^0}{A_2}\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_1^0}{A_1} + k_2 A_2 u_3^0\right) + \right.$$

$$+ N_{12}^0\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial\alpha_1} - \frac{u_1^0}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right) - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2^0}{A_1}\right)\right] +$$

$$+ \frac{N_{11}^1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_2^1}{A_2}\right) + \frac{N_{22}^1}{A_2}\left(\frac{\partial u_2^1}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_1^1}{A_1}\right) +$$

$$+ N_{12}^1\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2^1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_1^1}{A_2}\right) + \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2^1}{A_1}\right)\right] +$$

$$+ N_{33}^0\frac{w_3^-}{h} + 3N_{33}^1\frac{w_3^+ - u_3^0}{h} + N_{13}^0\left[\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial\alpha_1} - k_1 A_1 u_1^0\right) + \frac{w_1^-}{h}\right] +$$

$$+3N_{13}^{1}\left(-k_1u_1^1+\frac{w_1^+-u_1^0}{h}\right)+5N_{13}^{2}\,\frac{w_1^--u_1^1}{h}+N_{23}^{0}\left[\frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial\alpha_2}-k_2A_2u_2^0\right)+\frac{w_2^-}{h}\right]+$$

$$+3N_{23}^{1}\left(-k_1u_2^1+\frac{w_2^+-u_2^0}{h}\right)+5N_{23}^{2}\,\frac{w_2^--u_2^1}{h}-\left(F_1^0u_1^0+F_2^0u_2^0+\right.$$

$$\left.+F_3^0u_3^0+F_1^1u_1^1+F_2^1u_2^1\right)-A_{\mathrm{D}}^0\Big\}h\,A_1A_2d\alpha_1d\alpha_2- \qquad (4.11)$$

$$-\int_{L_\sigma}\left(\overline{N}_1^0u_1^0+\overline{N}_2^0u_2^0+\overline{N}_{3S}^0u_3^0+\overline{N}_1^1u_1^1+\overline{N}_2^1u_2^1\right)hdl-$$

$$-\int_{L_u}\left[N_1^0\left(u_1^0-\overline{u}_1^0\right)+N_2^0\left(u_2^0-\overline{u}_2^0\right)+N_3^0\left(u_3^0-\overline{u}_3^0\right)+N_1^1\left(u_1^1-\overline{u}_1^1\right)+N_2^1\left(u_2^1-\overline{u}_2^1\right)\right]hdl-$$

$$-2\iint_S\left(\sigma_1^-w_1^++\sigma_1^+w_1^-+\sigma_2^-w_2^++\sigma_2^+w_2^-+\sigma_3^-w_3^++\sigma_3^+w_3^-\right)ds,$$

де $w_i^\pm=\dfrac{1}{2}\left(u_i^+\pm u_i^-\right)$; $\sigma_i^\pm=\dfrac{1}{2}\left(\sigma_{i3}^+\pm\sigma_{i3}^-\right)$;

$$2A_{\mathrm{D}}^0=\frac{1}{2E}\left[\left(N_{11}^0\right)^2+\left(N_{22}^0\right)^2+3\left(N_{11}^1\right)^2+3\left(N_{22}^1\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2E'}\left[\left(N_{33}^0\right)^2+3\left(N_{33}^1\right)^2\right]-\frac{\nu}{E}\left(N_{11}^0N_{22}^0+3N_{11}^1N_{22}^1\right)-$$

$$-\frac{\nu'}{E'}\left[N_{33}^0\left(N_{11}^0+N_{22}^0\right)+3N_{33}^1\left(N_{11}^1+N_{22}^1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{2G}\left[\left(N_{12}^0\right)^2+3\left(N_{12}^1\right)^2\right]+\frac{1}{2G'}\left[\left(N_{13}^0\right)^2+\left(N_{23}^0\right)^2+\right.$$

$$\left.+3\left(N_{13}^1\right)^2+3\left(N_{23}^1\right)^2+5\left(N_{13}^2\right)^2+5\left(N_{23}^2\right)^2\right].$$

Зазначимо, що при формулюванні функціоналу (4.11) інтеграли по поверхнях $S^\pm$ замінено відповідними інтегралами по поверхні S.

Незалежними у функціоналі (4.11) є двадцять вісім величин: u_i^0, u_i^1, u_3^0, $w_i^\pm$, $w_3^\pm$, N_{ii}^0, N_{ii}^1, $N_{12}^0=N_{21}^0$, $N_{12}^1=N_{21}^1$, N_{i3}^1, N_{i3}^2, N_{33}^0, N_{33}^1, N_i^0, N_i^1, N_{3S}^0, $(i=1,2)$.

Обчислимо першу варіацію функціонала (4.11). При обчисленні поверхневих інтегралів, застосуємо інтегрування за частинами. В результаті одержимо

$$\delta J_{\mathrm{D}}^{0} = \iint_{S} \left\{ \left[\frac{\partial A_{\mathrm{D}}^{0}}{\partial N_{11}^{0}} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{u_2^0}{A_2} + k_1 A_1 u_3^0 \right) \right] \delta N_{11}^{0} + \cdots \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial A_{\mathrm{D}}^{0}}{\partial N_{23}^{0}} - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial u_3^0}{\partial \alpha_2} - k_2 A_2 u_2^0 \right) - \frac{w_2^-}{h} \right] \delta N_{23}^{2} + \left[\frac{\partial A_{\mathrm{D}}^{0}}{\partial N_{23}^{1}} + k_1 u_2^1 - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{h} \left(w_2^+ - u_2^0 \right) \right] \delta N_{13}^{1} + \left[\frac{\partial A_{\mathrm{D}}^{0}}{\partial N_{23}^{2}} - \frac{5}{h} \left(w_2^- - u_2^1 \right) \right] \delta N_{23}^{2} + \left(\frac{\partial A_{\mathrm{D}}^{0}}{\partial N_{33}^{0}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{w_3^-}{h} \right) \delta N_{33}^{0} + \left[\frac{\partial A_{\mathrm{D}}^{0}}{\partial N_{33}^{1}} - \frac{1}{h} \left(w_3^+ - u_3^0 \right) \right] \delta N_{33}^{1} \right\} h A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \iint_{S} \left\{ \left[\frac{\partial \left(A_2 N_{11}^{0} \right)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{22}^{0} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{21}^{0} + \frac{\partial \left(A_1 N_{12}^{0} \right)}{\partial \alpha_2} + \right. \right.$$

$$\left. + k_1 A_1 A_2 N_{13}^{0} + A_1 A_2 \left(F_1^0 + \frac{3}{h} N_{13}^{1} \right) \right] \delta u_1^0 + \left[\frac{\partial \left(A_2 N_{11}^{1} \right)}{\partial \alpha_1} - \right.$$

$$- \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{22}^{1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{21}^{1} + \frac{\partial \left(A_1 N_{12}^{1} \right)}{\partial \alpha_2} + k_1 A_1 A_2 N_{13}^{1} +$$

$$\left. + A_1 A_2 \left(F_1^1 + \frac{5}{h} N_{23}^{2} \right) \right] \delta u_1^1 + \cdots + \left[\frac{\partial \left(A_2 N_{13}^{0} \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(A_1 N_{23}^{0} \right)}{\partial \alpha_2} - \right.$$

$$\left. \left. - A_1 A_2 \left(k_1 N_{11}^{0} + k_2 N_{22}^{0} \right) + A_1 A_2 \left(F_3^0 + \frac{A_1 A_2}{h} N_{33}^{1} \right) \right] \delta u_3^0 \right\} h d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \int_{L_\sigma} \left[\left(N_1^0 - \overline{N}_1^0 \right) \delta u_1^0 + \left(N_2^0 - \overline{N}_2^0 \right) \delta u_2^0 + \left(N_{3n}^0 - \overline{N}_{3S}^0 \right) \delta u_3^0 + \right.$$

$$\left. + \left(N_1^1 - \overline{N}_1^1 \right) \delta u_1^1 + \left(N_2^1 - \overline{N}_2^1 \right) \delta u_2^1 \right] h dl +$$

$$+ \int_{L_u} \left[\left(u_1^0 - \overline{u}_1^0 \right) \delta N_1^0 + \left(u_2^0 - \overline{u}_2^0 \right) \delta N_2^0 + \left(u_3^0 - \overline{u}_3^0 \right) \delta N_{3S}^0 + \right.$$

$$\left. + \left(u_1^1 - \overline{u}_1^1 \right) \delta N_1^1 + \left(u_2^1 - \overline{u}_2^1 \right) \delta N_2^1 \right] h dl -$$

$$-\iint_S \Big[\left(N_{31}^0 + 5N_{31}^2 - 2\overline{\sigma}_1^+\right)\delta w_1^- + \left(3N_{31}^1 - 2\overline{\sigma}_1^-\right)\delta w_1^+ + \left(N_{32}^0 + 5N_{32}^2 - 2\overline{\sigma}_2^+\right)\delta w_2^- +$$

$$+\left(3N_{32}^- - 2\overline{\sigma}_2^-\right)\delta w_2^+ + \left(N_{33}^0 - 2\overline{\sigma}_3^+\right)\delta w_3^- + \left(3N_{33}^1 - 2\overline{\sigma}_3^-\right)\delta w_3^+\Big]\, d\alpha_1 d\alpha_2 .$$

Прирівнюємо до нуля коефіцієнти біля варіацій незалежних величин. Таким чином одержимо рівняння першого наближення розв'язку задачі для шару, а саме: рівняння рівноваги

$$\frac{\partial\left(A_2 N_{11}^0\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{21}^0 + \frac{\partial\left(A_1 N_{12}^0\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{22}^0 + k_1 A_1 A_2 N_{13}^0 + A_1 A_2\left(F_1^0 + \frac{3}{h}N_{13}^1\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\left(A_2 N_{11}^1\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{21}^1 + \frac{\partial\left(A_1 N_{12}^1\right)}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{22}^1 +$$

$$+ k_1 A_1 A_2 N_{13}^1 + A_1 A_2\left(F_1^1 + \frac{5}{h}N_{13}^2\right) = 0, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial\left(A_2 N_{13}^0\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 N_{23}^0\right)}{\partial\alpha_2} - A_1 A_2\left(k_1 N_{11}^0 + k_2 N_{22}^0\right) + A_1 A_2\left(F_3^0 + \frac{3}{h}N_{33}^1\right) = 0,$$

ще два рівняння одержимо з перших двох рівнянь системи (4.12) заміною індексів 1 на 2 і 2 на 1;
фізичні співвідношення

$$\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_2^0}{A_2} + k_1 A_1 u_3^0\right) = \frac{N_{11}^0 - \nu N_{22}^0}{2E} - \frac{\nu' N_{33}^0}{2E'},$$

$$\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_2^1}{A_2}\right) = \frac{3\left(N_{11}^1 - \nu N_{22}^1\right)}{2E} - \frac{3\nu' N_{33}^1}{2E'},$$

$$\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_1^0}{A_2}\right) + \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2^0}{A_1}\right) = \frac{1}{2G}N_{12}^0, \tag{4.13}$$

$$\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2^1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_1^1}{A_2}\right) + \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1^1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2^1}{A_1}\right) = \frac{3}{2G}N_{12}^1;$$

$$\frac{w_3^-}{h} = \frac{1}{2E'}\left[N_{33}^0 - \nu'\left(N_{11}^0 + N_{22}^0\right)\right], \quad \frac{w_3^+ - u_3^0}{h} = \frac{3}{2E'}\left[N_{33}^1 - \nu'\left(N_{11}^1 + N_{22}^1\right)\right],$$

$$\frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_3^0}{\partial\alpha_1} - kA_1 u_1^0\right) - \frac{w_1^-}{h} = \frac{1}{2G'}N_{13}^0, \tag{4.14}$$

$$\frac{w_1^+ - u_1^0}{h} - \frac{k_1 u_1^1}{3} = \frac{1}{2G'}N_{13}^1, \quad \frac{w_1^- - u_1^1}{h} = \frac{1}{2G'}N_{13}^2,$$

ще п'ять рівнянь одержимо з перших двох рівнянь системи (4.13) а також третього, четвертого і п'ятого рівнянь (4.14) заміною індексів 1 на 2 і 2 на 1;

Граничні умови на поверхнях $\alpha_3 = \pm h$ (залежності між коефіцієнтами напружень, що діють на площадках з нормаллю α_3)

$$N_{i3}^0 + 5N_{i3}^2 = 2\sigma_1^+, \ 3N_{i3}^1 = 2\sigma_1^- \ (i=1,2),$$
$$N_{33}^0 = 2\sigma_3^+, \ 3N_{33}^1 = 2\sigma_3^-; \tag{4.15}$$

граничні умови на границі серединної поверхні

$$N_i^0 = \overline{N}_i^0, \quad N_i^1 = \overline{N}_i^1 \ (i=1,2), \quad N_{3s}^0 = \overline{N}_{3s}^0 \text{ на } L_\sigma \tag{4.16}$$

$$u_i^0 = \overline{u}_i^0, \ u_i^1 = \overline{u}_i^1 \ (i=1,2), \ u_3^0 = \overline{u}_3^0 \text{ на } L_u .$$

Якщо з формул (4.12), (4.13) з допомогою співвідношень (4.15) виключити величини N_{i3}^j, N_{33}^k $(i,j=1,2;\ k=0,1)$, то отримаємо рівняння, які співпадають з (2.59)–(2.61), (2.63). Зауважимо, що закон Гука (4.13) записано у формі залежностей деформацій від напружень.

Стаціонарність функціонала на дійсному розв'язку задачі, випливає з умови додатної визначеності відповідної квадратичної форми. Таким чином доведено узагальнений варіаційний принцип стаціонарності додаткової енергії [218].

Твердження 4.5. Дійсний розв'язок задачі (2.59)–(2.61), (2.63), (4.16) надає функціоналу (4.11) стаціонарного значення.

4.4. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП СТАЦІОНАРНОСТІ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ

4.4.1. Теорія оболонок за відсутності нормальних жорстких поворотів. Розглянемо трансверсально-ізотропну оболонку Тимошенка за відсутності інерційних сил та ізотермічного наближення. Нехай деформований стан оболонки характеризується нехтовно малими жорсткими поворотами відносно нормалі до серединної поверхні

$$\frac{\partial(A_2 u_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1 u_1)}{\partial\alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial(A_2 \gamma_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1 \gamma_1)}{\partial\alpha_2} = 0. \tag{4.17}$$

Серединну поверхню оболонки позначимо через S, її границю – L і одиничну нормаль до бічної поверхні – $\vec{n} = \{s_1, s_2, 0\}$. Приймаємо, що задані об'ємні сили $F_i = \dfrac{F_i^0}{2} + \dfrac{3F_i^1}{2}\dfrac{\alpha_3}{h}$ $(i=1,2)$, $F_3 = \dfrac{F_3^0}{2}$, напруження $\sigma_{i3}^\pm = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ на лицевих поверхнях $S^\pm$ і $\overline{p}_i = \dfrac{\overline{N}_i}{2h} + \dfrac{3\overline{M}_i}{2h^3}\alpha_3$, $\overline{p}_3 = \dfrac{Q_s}{2h}$ на бічній поверхні S_σ.

Ввівши у вирази для мембранних зсувних сил і скрутних моментів доданки $\widetilde{N}_{ij} = \widetilde{N}_{ji}$, $\widetilde{M}_{ij} = \widetilde{M}_{ji}$ за формулами

$$N_{ij} = \widetilde{N}_{ij} + T_{ij}, \quad M_{ij} = \widetilde{M}_{ij} + H_{ij},$$
$$T_{21} = -T_{12}, \quad H_{12} = -H_{21}, \tag{4.18}$$

запишемо закон Гука і геометричні рівняння (2.42), (2.43) у вигляді

$$N_{ii} = B(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj}), \quad M_{ii} = D(\kappa_{ii} + \nu\kappa_{jj}), \quad Q_i = \Lambda\varepsilon_{i3},$$

$$\widetilde{N}_{ij} = B(1-\nu)\widetilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \widetilde{N}_{ij} = D(1-\nu)\widetilde{\kappa}_{ij};$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{u_j}{A_j} + k_i A_i w\right), \quad \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\frac{\gamma_j}{A_j}\right), \tag{4.19}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{u_j}{A_i}\right), \quad \widetilde{\kappa}_{ij} = \frac{1}{A_j}\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}\frac{\gamma_j}{A_i}\right),$$

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{1}{A_i}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i A_i u_i\right).$$

Рівняння рівноваги одержимо з рівнянь руху (2.41), знехтувавши інерційними складовими,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(A_j N_{ii}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(A_i N_{ij}) - N_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + N_{ji}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} +$$
$$+ k_i A_i A_j Q_i = -A_i A_j\left(2\sigma_i^- + hF_i^0\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(A_j M_{ii}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(A_i M_{ij}) - M_{jj}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} + M_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} -$$
$$- A_i A_j Q_i = -A_i A_j h\left(2\sigma_i^+ + hF_i^1\right), \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(A_2 Q_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}(A_1 Q_2) - A_1 A_2(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -A_1 A_2\left(2\sigma_3^- + hF_3^0\right) \quad (i, j = 1, 2, \quad i \neq j),$$

де $\sigma_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{i3}^+ \pm \sigma_{i3}^-\right)$.

Задаємо граничні умови першої граничної задачі

$$N_i = \overline{N}_i, \quad M_i = \overline{M}_i \quad (i = 1,2), \quad Q_s = \overline{Q}_s \text{ на } L. \tag{4.21}$$

Вираз для питомої потенціальної енергії деформації одержимо з (4.8), прийнявши до уваги рівняння (4.17) і рівності $\varepsilon_{12}^2 = 2\left(\tilde{\varepsilon}_{12}^2 + \tilde{\varepsilon}_{21}^2\right)$, $\kappa_{12}^2 = 2\left(\tilde{\kappa}_{12}^2 + \tilde{\kappa}_{21}^2\right)$. Тоді

$$2A_P^1 = B\left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2\right) + D\left(\kappa_{11}^2 + 2\nu\kappa_{11}\kappa_{22} + \kappa_{22}^2\right) + \\ + B(1-\nu)\left(\tilde{\varepsilon}_{12}^2 + \tilde{\varepsilon}_{21}^2\right) + D(1-\nu)\left(\tilde{\kappa}_{12}^2 + \tilde{\kappa}_{21}^2\right) + \Lambda\left(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2\right). \tag{4.22}$$

Запишемо розширений функціонал задачі. Для цього у функціоналі (4.6) замінимо доданки, які відповідають величинам $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\kappa_{12} = \kappa_{21}$, а також введемо додаткові умови (4.17) із множниками Лагранжа T_{12}, H_{12} [12]. У підсумку отримаємо

$$J_P^1 = \iint_S \Big\{ A_P^1 - \left[F_1^0 u_1 + F_2^0 u_2 + F_2^0 w - h\left(F_1^1\gamma_1 + F_2^1\gamma_2\right)\right] -$$

$$-\left\langle N_{11}\left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_2}{A_2} + k_1 A_1 w\right)\right] + M_{11}\left[\kappa_{11} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\gamma_2}{A_2}\right)\right]\right\rangle -$$

$$-\left\langle N_{22}\left[\varepsilon_{22} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_1}{A_1} + k_1 A_2 w\right)\right] + M_{22}\left[\kappa_{22} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\gamma_1}{A_1}\right)\right]\right\rangle -$$

$$-\left\langle \tilde{N}_{12}\left[\tilde{\varepsilon}_{12} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{u_2}{A_1}\right)\right] + \tilde{N}_{21}\left[\tilde{\varepsilon}_{21} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{u_1}{A_2}\right)\right] + \right. \tag{4.23}$$

$$\left. + \tilde{M}_{12}\left[\tilde{\kappa}_{12} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\gamma_2}{A_1}\right)\right] + \tilde{M}_{21}\left[\tilde{\kappa}_{21} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\gamma_1}{A_2}\right)\right]\right\rangle -$$

$$- Q_1\left[\varepsilon_{13} - \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - k_1 A_1 u_1\right) - \gamma_1\right] - Q_2\left[\varepsilon_{23} - \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} - k_2 A_2 u_2\right) - \gamma_2\right]\Big\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \iint_S \left\{ T_{12}\left[\frac{\partial(A_2 u_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1 u_1)}{\partial\alpha_2}\right] + H_{12}\left[\frac{\partial(A_2\gamma_2)}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial(A_1\gamma_1)}{\partial\alpha_2}\right]\right\} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \int_L \left(\overline{N}_1 u_1 + \overline{N}_2 u_2 + \overline{Q}_s w + \overline{M}_1\gamma_1 + \overline{M}_2\gamma_2\right) dl - \iint_S \Big[\left(\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^-\right)u_1 + \left(\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^-\right)u_2 +$$

$$+ \left(\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-\right)w + \left(\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^-\right)h\gamma_1 + \left(\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^-\right)h\gamma_2\Big]\, A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 .$$

Сформулюємо узагальнений варіаційний принцип стаціонарності потенціальної енергії для математичної моделі деформування оболонки, поданої рівняннями (4.17)–(4.21).

Твердження 4.6. Серед усіх допустимих переміщень, деформацій, напружень та додаткових напружень теорії оболонок Тимошенка за нехтування нормальними жорсткими поворотами дійсні переміщення, деформації, напруження та додаткові напруження надають функціоналу (4.23) стаціонарного значення.

Доведення. Оскільки квадратична форма (4.22) є додатно визначеною функцією, функціонал (4.23) має стаціонарне значення. Незалежними змінними функціонала є двадцять п'ять величин $u_i, \gamma_i, w, \varepsilon_{ii}, \kappa_{ii}, \tilde{\varepsilon}_{12}, \tilde{\varepsilon}_{21}, \tilde{\kappa}_{12}, \tilde{\kappa}_{21}, N_{ii}, M_{ii}, \tilde{N}_{12}, \tilde{N}_{21}, \tilde{M}_{12}, \tilde{M}_{21}, Q_i, T_{12}, H_{12}\ (i=1,2)$. Для першої варіації функціонала із використанням формули інтегрування за частинами одержимо

$$\delta J_P^1 = \iint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial A_P^1}{\partial \varepsilon_{11}} - N_{11} \right) \delta\varepsilon_{11} + \cdots + \left(\frac{\partial A_P^1}{\partial \varepsilon_{23}} - Q_2 \right) \delta\varepsilon_{23} + \left(\frac{\partial A_P^1}{\partial \tilde{\varepsilon}_{12}} - \tilde{N}_{12} \right) \delta\tilde{\varepsilon}_{12} + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial A_P^1}{\partial \tilde{\varepsilon}_{21}} - \tilde{N}_{21} \right) \delta\tilde{\varepsilon}_{21} + \left(\frac{\partial A_P^1}{\partial \tilde{\kappa}_{12}} - \tilde{M}_{12} \right) \delta\tilde{\kappa}_{12} + \left(\frac{\partial A_P^1}{\partial \tilde{\kappa}_{21}} - \tilde{M}_{21} \right) \delta\tilde{\kappa}_{21} -$$

$$- \left[\varepsilon_{11} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{u_2}{A_2} + k_1 A_1 w \right) \right] \delta N_{11} - \cdots$$

$$- \left[\varepsilon_{23} - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - k_1 A_2 u_2 - \gamma_2 \right) \right] \delta Q_2 - \left[\tilde{\varepsilon}_{12} - \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{u_2}{A_1} \right) \right] \delta \tilde{N}_{12} -$$

$$- \left[\tilde{\varepsilon}_{21} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{u_1}{A_2} \right) \right] \delta \tilde{N}_{21} - \left[\tilde{\kappa}_{12} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\gamma_2}{A_1} \right) \right] \delta \tilde{M}_{12} -$$

$$\left. - \left[\tilde{\kappa}_{21} - \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\gamma_1}{A_2} \right) \right] \delta \tilde{M}_{21} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \iint\limits_S \left\{ \left[\frac{\partial (A_2 N_{11})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{12})}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_{22} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_{21} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + k_1 A_1 A_2 Q_1 + A_1 A_2 \left(F_1^0 + \sigma_{13}^{+} + \sigma_{13}^{-} \right) \right] \delta u_1 + \cdots \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \iint\limits_S \left\{ \left[\frac{\partial (A_2 u_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial (A_1 u_1)}{\partial \alpha_2} \right] \delta T_{12} + \left[\frac{\partial (A_2 \gamma_2)}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial (A_1 \gamma_1)}{\partial \alpha_2} \right] \delta H_{12} \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 .$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти біля варіацій змінних, отримаємо рівняння (4.16)–(4.21).

4.4.2. Теорія оболонок Тимошенка з незмінними за товщиною нормальними жорсткими поворотами. Розглянемо трансверсально-ізотропну пологу оболонку зі сталими характеристиками серединної поверхні, $A_i = 1,\ k_i = const$. Приймаємо, що характерним для деформованого стану оболонки є незалежність від товщинної координати жорстких поворотів відносно нормалі до серединної поверхні, тобто

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} = 0. \tag{4.24}$$

Відповідна математична модель деформування оболонки подана у підрозділі 3.1 і задається:
рівняннями рівноваги

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -\left(\sigma_{3i}^{+} - \sigma_{i3}^{-} + hF_i^0\right),\\ \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -h\left(\sigma_{3i}^{+} + \sigma_{i3}^{-} + hF_i^1\right) \quad (i = 1, 2),\\ \frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - \left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) = -\left(\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-} + hF_3^0\right);\end{gathered} \tag{4.25}$$

геометричними рівняннями

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + k_i w, \quad \kappa_{ii} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i}, \quad \varepsilon_{i3} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \gamma_1 \quad (i = 1, 2),\\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}, \quad \tilde{\kappa}_{12} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2}, \quad \tilde{\kappa}_{21} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1};\end{gathered} \tag{4.26}$$

фізичними співвідношеннями

$$\begin{gathered}N_{ii} = B\left(\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{ii}\right), \quad N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{ij}, \ N_{ij} = N_{ji},\\ M_{ii} = -D\left(\kappa_{ii} + \nu \kappa_{jj}\right), \ \tilde{M}_{ij} = D(1-\nu)\tilde{\kappa}_{ij},\\ Q_i = \Lambda \varepsilon_{i3} \qquad (i, j = 1, 2, \ i \neq j).\end{gathered} \tag{4.27}$$

Скрутні моменти визначимо за формулами

$$M_{ij} = \tilde{M}_{ij} + H_{ij}, \quad H_{21} = -H_{12}. \tag{4.28}$$

Граничні умови формулюємо на границі L серединної поверхні S оболонки

$$N_i = \overline{N}_i, \quad M_i = \overline{M}_i \ (i = 1, 2), \quad Q_s = \overline{Q}_s \ \text{на } L. \tag{4.29}$$

Узагальнений функціонал енергії деформації одержимо з функціонала (4.6) шляхом введення додаткової умови (4.24) і врахування рівності нулю відповідних складових у формулі (4.8) для питомої потенціальної енергії деформації. В результаті отримаємо

$$J_P^2 = \iint_S \Big\{ A_P^2 - \left[F_1^0 u_1 + F_2^0 u_2 + F_2^0 w - h\left(F_1^1 \gamma_1 + F_2^1 \gamma_2 \right) \right] -$$

$$-\Big\langle N_{11}\left[\varepsilon_{11} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 w \right) \right] + M_{11}\left(\kappa_{11} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} \right) + N_{22}\left[\varepsilon_{22} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + k_1 w \right) \right] +$$

$$+ M_{22}\left(\kappa_{22} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} \right) + N_{12}\left[\varepsilon_{12} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right) \right] + Q_1\left[\varepsilon_{13} - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \gamma_1 \right) \right] + \tag{4.30}$$

$$+ Q_2\left[\varepsilon_{23} - \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \gamma_2 \right) \right] + \widetilde{M}_{12}\left(\widetilde{\kappa}_{12} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} \right) + + \widetilde{M}_{21}\left(\widetilde{\kappa}_{21} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} \right) \Big\rangle \Big\} d\alpha_1 d\alpha_2 -$$

$$- \iint_S H_{12}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 - \int_L \left(\overline{N}_1 u_1 + \overline{N}_2 u_2 + \overline{Q}_s w + \overline{M}_1 \gamma_1 + \overline{M}_2 \gamma_2 \right) dl -$$

$$- \iint_S \left[\left(\sigma_{13}^+ + \sigma_{13}^- \right) u_1 + \left(\sigma_{23}^+ + \sigma_{23}^- \right) u_2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^- \right) w + \left(\sigma_{13}^+ - \sigma_{13}^- \right) h\gamma_1 + \left(\sigma_{23}^+ - \sigma_{23}^- \right) h\gamma_2 \right] d\alpha_1 d\alpha_2 ,$$

де

$$\begin{aligned} 2A_P^2 = {} & B\left(\varepsilon_{11}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 \right) + \frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{12} + \Lambda\left(\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 \right) + \\ & + D\left(\kappa_{11}^2 + 2\nu\kappa_{11}\kappa_{22} + \kappa_{22}^2 \right) + D(1-\nu)\left(\widetilde{\kappa}_{12}^2 + \widetilde{\kappa}_{21}^2 \right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Незалежними змінними функціонала (4.30) є дванадцять величин $u_i, \gamma_i, w,$ $\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21},\ \kappa_{ii},\ \widetilde{\kappa}_{12}, \widetilde{\kappa}_{21},\ N_{ii}, M_{ii}, N_{12} = N_{21},\ \widetilde{M}_{12}, \widetilde{M}_{21}, Q_i,\ H_{12}\ \ (i = 1, 2)$. Внаслідок додатної визначеності квадратичної форми (4.31) можна стверджувати, що функціонал (4.30) має стаціонарне значення. Із необхідної умови стаціонарності функціонала випливають рівняння (4.24)–(4.27), (4.29), тобто справедливе наступне твердження.

Твердження 4.7. Серед усіх допустимих переміщень, деформацій, напружень та додаткових напружень, які відповідають теорію оболонок Тимошенка з незмінними нормальними жорсткими поворотами, дійсні переміщення, деформації, напруження і додаткові напруження надають стаціонарного значення функціоналу (4.30).

4.4.3. Класична теорія оболонок за відсутності нормальних жорстких поворотів. Розглянемо сильно пологу оболонку ($A_i = 1,\ k_i = const$), навантажену об'ємними силами $F_i = 0 \ \ (i = 1, 2)$, $F_3 = \dfrac{F_3^0}{2}$. Приймаємо ізотермічне наближення та нехтуємо інерційними силами. Нехай на лицевих поверхнях $S^{\pm}$ задані напруження $\sigma_{i3}^{\pm} = 0 \ \ (i = 1, 2)$, $\sigma_{33}^{\pm} = \sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$, а на бічній поверхні S_σ – напруження $\overline{p}_i = \dfrac{\overline{N}_i}{2h} + \dfrac{3\overline{M}_i}{2h^3}\alpha_3$, $\overline{p}_3 = \dfrac{\overline{Q}_s}{2h}$.

Для класичної математичної моделі деформування оболонки за відсутності жорстких поворотів відносно серединної поверхні справджуються рівняння підрозділу 3.4. Базові кінематичні гіпотези для сильно пологої оболонки запишуться у вигляді

$$\varepsilon_{i3} = \gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2), \quad \omega_{3u} = \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} = 0. \tag{4.32}$$

Рівняння рівноваги є такими

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = 0 \ \ (i = 1, 2), \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -\left(\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-} + hF_3^0\right).$$

Фізичні співвідношення (3.35) запишемо з урахуванням другої гіпотези (4.32) у такій формі

$$N_{ii} = B\left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + (k_i + \nu k_j)w\right], \quad \widetilde{N}_{ij} = B(1-\nu)\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j},$$

$$M_{ii} = -D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_j^2}\right), \tag{4.34}$$

$$M_{ij} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ i \neq j)$$

Мембранні зрізувальні сили та величини $\widetilde{N}_{ij}$ і T_{ij} пов'язані співвідношенням

$$N_{ij} = \widetilde{N}_{ij} + T_{ij}, \quad T_{12} = -T_{21}. \tag{4.35}$$

Поперечні зрізувальні сили визначаються з другого рівняння системи (4.33).

Граничні умови формулюємо у вигляді

$$N_i = \overline{N}_i \ (i = 1, 2), \quad M_s = \overline{M}_s,$$

$$Q_s + \frac{\partial M_\tau}{\partial \tau} = \overline{Q}_s \ \text{ на } L, \tag{4.36}$$

де $N_i = N_{i1}s_1 + N_{i2}s_2$; $Q_s = Q_1 s_1 + Q_2 s_2$; $M_i = M_{i1}s_1 + M_{i2}s_2$; $M_s = M_1 s_1 + M_2 s_2$;

$M_\tau = M_1\tau_1 + M_2\tau_2$; $\dfrac{\partial}{\partial\tau} = \tau_1\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1} + \tau_2\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}$; $\vec{n} = \{s_1; s_2; 0\}$, $\vec{\tau} = \{\tau_1; \tau_2; 0\}$ – одиничні нормальний і тангенціальний вектори до бічної поверхні $(\tau_1 = -s_2,\ \tau_2 = s_1)$.

Тоді для питомої додаткової енергії деформації (4.8) з урахуванням формул (4.32) отримаємо

$$2A_D^3 = \frac{1}{B(1-\nu^2)}\left(N_{11}^2 + N_{22}^2 - 2\nu N_{11}N_{22}\right) + \frac{1}{B(1-\nu)}\left(\tilde{N}_{12}^2 + \tilde{N}_{21}^2\right) + \\ + \frac{1}{D(1-\nu^2)}\left(M_{11}^2 - 2\nu M_{11}M_{22} + M_{11}^2\right) + \frac{2}{D(1-\nu)}M_{12}^2. \tag{4.37}$$

Розширений функціонал додаткової енергії одержимо з функціонала (4.7) шляхом виключення з допомогою першої умови (4.32) кутів повороту нормалі і введення у функціонал другої умови (4.32) із використанням множників Лагранжа. Тоді

$$J_D^3 = \iint_S \Bigg[-M_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2} - M_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_2^2} - 2M_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + \\ + N_{11}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \nu\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + k_1 w + \nu k_2 w\right) + N_{22}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + k_2 w + \nu k_1 w\right) + \\ + \tilde{N}_{12}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} + \tilde{N}_{21}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - T_{12}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}\right) - F_3^0 w - A_D^3 - \left(\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-\right)w \Bigg] d\alpha_1 d\alpha_2 - \\ - \int_L \left(\overline{N}_1 u_1 + \overline{N}_2 u_2 + \overline{Q}_s w - \overline{M}_1\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - \overline{M}_2\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right) dl, \tag{4.38}$$

де $\dfrac{\partial}{\partial s} = s_1\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1} + s_2\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}$; $\dfrac{\partial}{\partial\tau} = \tau_1\dfrac{\partial}{\partial\alpha_1} + \tau_2\dfrac{\partial}{\partial\alpha_2}$.

Незалежними змінними функціонала (4.38) є тринадцять величин $u_i, w, \dfrac{\partial w}{\partial\alpha_i}$, $M_{ii}, M_{12}, N_{ii}, \tilde{N}_{12}, \tilde{N}_{21}, T_{12}$ $(i = 1, 2)$. Внаслідок додатної визначеності квадратичної форми (4.37), функціонал (4.38) має стаціонарне значення і тому справедливе таке твердження.

Твердження 4.8. Розв’язок задачі (4.33)–(4.36) надає функціоналу (4.38) стаціонарного значення.

Доведення. Обчислимо першу варіацію функціонала (4.38). Провівши відповідні перетворення інтегралів з використанням формули інтегрування за частинами, матимемо

$$\delta J_D^3 = -\iint_S \left\{ \left[\frac{1}{D\left(1-\nu^2\right)}\left(M_{11} - \nu M_{22}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} \right] \delta M_{11} + \right.$$

$$+ \left[\frac{1}{D\left(1-\nu^2\right)}\left(M_{22} - \nu M_{11}\right) + + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} \right] \delta M_{22} + \left[\frac{2}{D(1-\nu)} M_{12} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right] \delta M_{12} +$$

$$+ \left[\frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\left(N_{11} - \nu N_{22}\right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + k_1 w \right) \right] \delta N_{11} + \left[\frac{1}{B\left(1-\nu^2\right)}\left(N_{22} - \nu N_{11}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + k_2 w \right) \right] \delta N_{22} + \left[\frac{1}{B(1-\nu)} \tilde{N}_{12} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right] \delta \tilde{N}_{12} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} \right) \delta T_{12} +$$

$$+ \left[\frac{1}{B(1-\nu)} \tilde{N}_{21} - \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} \right] \delta \tilde{N}_{21} + \left(\frac{\partial N_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial \alpha_2} \right) \delta u_1 + \left(\frac{\partial N_{21}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial \alpha_2} \right) \delta u_2 +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - \left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) + F_3^0 + \left(\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-\right) \right] \delta w \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 + \tag{4.39}$$

$$+ \int_L \left[\left(N_1 - \overline{N}_1\right) \delta u_1 + \left(N_2 - \overline{N}_2\right) \delta u_2 \right] dl +$$

$$+ \int_L \left[\left(Q_s - \overline{Q}_s\right) \delta w - \left(M_1 - \overline{M}_1\right) \delta \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \left(M_2 - \overline{M}_2\right) \delta \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right] dl.$$

Тут $Q_i = \dfrac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \dfrac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2}$, $Q_s = Q_1 s_1 + Q_2 s_2$, $N_i = N_{i1} s_1 + N_{i2} s_2$, $N_{12} = \tilde{N}_{12} + T_{12}$, $N_{21} = \tilde{N}_{21} - T_{12}$.

Останній інтеграл у виразі (4.39) з урахуванням співвідношень $\dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} = \dfrac{\partial}{\partial s} s_1 - \dfrac{\partial}{\partial \tau} s_2$, $\dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} = \dfrac{\partial}{\partial s} s_2 + \dfrac{\partial}{\partial \tau} s_1$ і формули інтегрування за частинами, запишемо у вигляді

$$\int_L \left[\left(Q_s - \overline{Q}_s\right) \delta w - \left(M_1 - \overline{M}_1\right) \delta \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \left(M_2 - \overline{M}_2\right) \delta \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right] dl =$$

$$= \int_L \left[\left(Q_s + \frac{\partial M_\tau}{\partial \tau} - \overline{Q}_s - \frac{\partial \overline{M}_\tau}{\partial \tau} \right) \delta w + \left(M_s - \overline{M}_s\right) \delta \frac{\partial w}{\partial s} \right] dl. \tag{4.40}$$

Прирівняємо до нуля першу варіацію функціонала (4.39). Враховуючи перетворення (4.40) і приймаючи рівними нулю коефіцієнти біля варіацій незалежних змінних, одержимо рівняння (4.33)–(4.36).

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Для розв'язування широкого класу задач теорії пружності ефективно використовується метод Фур'є [3, 15, 17, 26, 27, 30, 55, 57, 64, 102, 106]. Поширення його на задачі про локальне навантаження оболонок, зокрема про дію на оболонку зусиль, зосереджених у точках, пов'язане з проблемою підсумовування розбіжних рядів. Оскільки такі задачі є некоректними (у розумінні існування розв'язку Фур'є), їх узагальнені розв'язки шукають шляхом виділення сингулярних доданків рядів, застосування узагальнених методів підсумовування рядів та інших методів регуляризації [23, 32, 33, 38, 47, 48, 57, 84, 93, 103, 114].

У розділі сформульовано умови стосовно вільних членів диференціальних рівнянь теорії оболонок Тимошенка, за яких існують розв'язки Фур'є відповідних крайових задач (у вигляді рівномірно збіжних рядів із рівномірно збіжними рядами їх похідних, які входять у рівняння). На цій основі побудовано математичні моделі локальних навантажень з використанням дельтоподібних фінітних функцій із заданими властивостями гладкості та дельтоподібних послідовностей узагальнених частинних сум рядів Фур'є. При формулюванні задач про навантаження оболонок зусиллями, розподіленими на площадках, локальна дія моделюється дельтоподібними фінітними функціями. Границі розв'язків Фур'є задач про локальне навантаження оболонок, для яких область локалізації стягується в точку, є узагальненими (у розумінні слабкої збіжності) розв'язками задач про дію на оболонку зосереджених сил.

Досліджено точний і наближений розв'язки Фур'є задач про локальне навантаження оболонки і тонкого шару. На цій основі встановлено межі зміни параметрів, за яких забезпечується відповідність розв'язку (одержаного з використанням рівнянь теорії оболонок) реальному стану тонкостінного тіла (оцінюваного з допомогою рівнянь теорії пружності).

5.1. СЛАБКО ЗБІЖНІ ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА РЯДИ

5.1.1. Рівномірно збіжні та слабко збіжні функціональні послідовності. Розглянемо функціональну послідовність $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}, x \in D_1$, де $D_1 = \{x : a_1 < x < b_1\}$ – скінченний або нескінченний проміжок. Множина $D = \{x : a < x < b\}$ точок збіжності цієї послідовності називається її областю збіжності, $D \subset D_1$.

Означення 5.1. Функціональна послідовність $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається в області *D,* якщо для довільно малого $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число n_0, що для будь-яких чисел $m, n > n_0$ справджується нерівність

$$|u_m(x) - u_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in D.$$

Функція $u(x)$, $x \in D$, така, що $u(x) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(x)$ називається граничною функцією послідовності $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Розглянемо L і M – дві множини функцій, визначених в області D, $f(x)$ – функцію з L і $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – функціональну послідовність, $u_n(x) \in M$. Нехай існують скінченні інтеграли (Рімана)

$$\int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

*Означення 5.2. Ф*ункціональна послідовність $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ називається слабко збіжною відносно множини *L* в області *D*, якщо для довільно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число n_0 таке, що для будь-яких двох чисел $m, n > n_0$ справджується нерівність

$$\left| \int_a^b f(x) [u_n(x) - u_m(x)] dx \right| < \varepsilon.$$

Для слабко збіжної послідовності вводиться поняття граничного елемента. Для послідовності неперервних функцій на проміжку $[a; b]$ можна стверджувати, що у випадку рівномірної збіжності граничний елемент цієї послідовності є неперервною функцією. Аналогічне твердження не завжди справджується для слабко збіжної послідовності.

Вводячи граничний елемент $u(x)$ слабко збіжної послідовності, під інтегралом від добутку граничного елемента $u(x)$ і функції $f(x)$ розуміємо границю

$$\int_a^b f(x)u(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)u_n(x)dx.$$

Розглянемо слабко збіжну функціональну послідовність $\{\delta_n(x,x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, де $\delta_n(x,x_0)$ – функція двох змінних $x,x_0 \in \left]a;b\right[$.

Означення 5.3. Якщо граничний елемент $\delta(x,x_0)$ послідовності $\{u_n = \delta_n(x,x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ у кожній точці неперервності функції $f(x)$ задовольняє умову

$$\int_a^b f(x)\delta(x_0,x)dx = f(x_0), \tag{5.1}$$

то $\delta(x,x_0)$ називається дельта-функцією відносно множини L, а послідовність $\{\delta_n(x,x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ називається дельтоподібною послідовністю функцій відносно множини L.

Загальний член дельтоподібних функціональних послідовностей можна задавати наступним чином [85, 95, 100]:

$$\delta_n(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon_n} g_1\left(\dfrac{|x-x_0|}{\varepsilon_n}\right), & |x-x_0| \le \varepsilon_n, \\ 0, & |x-x_0| > \varepsilon_n, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\delta_n(x,x_0) = \frac{1}{2\varepsilon_n} g_2\left(\frac{|x-x_0|}{\varepsilon_n}\right), \quad x,x_0 \in \left]-\infty;\infty\right[, \tag{5.3}$$

де $\varepsilon_n = \varepsilon(n)$ – нескінченно мала послідовність; $g_1(t)$ $(0 \le t \le 1)$, $g_2(t)$ $(0 \le t < \infty)$ – кусково-неперервні функції (базові функції), що задовольняють умови: $|g_2(t)| \le \dfrac{A}{1+t^{\alpha}}$, $A = \text{const}$, $\alpha > 1$;

$$\int_0^1 g_1(t)dt = 1, \quad \int_0^{\infty} g_2(t)dt = 1. \tag{5.4}$$

Введемо функції $G_1(t)$ та $G_2(t)$

$$G_1(t) = \begin{cases} g_1(|t|), & |t| \le 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad G_2(t) = g_2(|t|),$$

що продовжують функції $g_1(t)$ і $g_2(t)$ на дійсну вісь і мають похідні q-го порядку $(q \ge 0)$, що задовольняють умови Діріхле [108].

Функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле на проміжку $[a;b]$, якщо вона кусково-неперервна на цьому проміжку і його можна розбити на скінченну кількість проміжків, на кожному з яких функція $f(x)$ монотонна.

Функція $f(x)$ є кусково-неперервною на проміжку $]a;b[$, якщо вона неперервна скрізь на цьому проміжку, хіба-що за винятком скінченної кількості точок, які є точками розривів 1-го роду, а також існують скінченні граничні значення функції на кінцях проміжку.

Загальні члени дельтоподібних функціональних послідовностей, внаслідок виконання рівностей (5.4), задовольняють умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x,x_0)dx = 1.$$

Справді, для функції (5.2), зробивши заміну $x - x_0 = \varepsilon_n t$, одержимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x,x_0)dx = \frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{x_0-\varepsilon_n}^{x_0+\varepsilon_n} g_1\left(\frac{|x-x_0|}{n}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_1(|t|)dt = \int_{0}^{1} g_1(t)dt = 1.$$

У разі задання загального члена дельтоподібних функціональних послідовностей (5.3), матимемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x,x_0)dx = \frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{-\infty}^{\infty} g_2\left(\frac{|x-x_0|}{\varepsilon_n}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(|t|)dt = \int_{0}^{\infty} g_2(t)dt = 1.$$

Справедливе наступне твердження.

Твердження 5.1 (наслідок теореми Бохнера). Якщо $f(x) \in L$, де L – множина абсолютно інтегрованих функцій на дійсній осі, і $\{\delta_n(x,x_0)\}$ – послідовності із загальним членом вигляду (5.2) або (5.3), то в кожній точці неперервності функції $f(x)$ справджується аналогічна до (5.1) рівність

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x,x_0)f(x)dx = f(x_0).$$

Послідовності функцій, які задаються формулами (5.2) і (5.3) називаються відповідно дельтоподібними функціональними послідовностями 1-го та 2-го типів.

Дельтоподібні послідовності 1-го типу є дельтоподібними послідовностями фінітних функцій, оскільки фінітною при фіксованому значенні ε_n є функція (5.2).

Зазначимо, що фінітною є функція, тотожньо рівна нулю зовні деякого скінченного проміжку.

Для прикладу розглянемо функцію $g_1(t) = 2(1-t), t \in [0;1]$. Тоді відповідна дельтоподібна послідовність функцій 1-го типу має вигляд

$$\delta_n(x,x_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_n}\left(1 - \dfrac{|x-x_0|}{\varepsilon_n}\right), & |x-x_0| \le \varepsilon_n, \\ 0, & |x-x_0| > \varepsilon_n. \end{cases}$$

Функція $g_2(t) = e^{-t}$, $t \in [0;\infty[$, породжує дельтоподібну функціональну послідовність 2-го типу

$$\delta_n(x, x_0) = \frac{1}{2\varepsilon_n} e^{-\frac{|x - x_0|}{\varepsilon_n}}, \quad x \in]-\infty; \infty[.$$

У табл. 1 і 2 наведено деякі базові функції, які породжують дельтоподібні послідовності функцій.

Таблиця 1

Базові функції фінітних дельтовидних послідовностей

№	Базові функції, $t \in [0, 1]$	Методи підсумовування
1.	$g_1(t) = 2(1-t)$	$\varphi_1(kr) = \left(\frac{\sin(kr/2)}{kr/2}\right)^2$
2.	$g_1(t) = 3(1-t)^2$	$\varphi_1(kr) = \frac{6}{(kr)^2}\left(1 - \frac{\sin kr}{kr}\right)$
3.	$g_1(t) = \frac{3}{2}(1-t^2)$	$\varphi_1(kr) = \frac{3}{(kr)^2}\left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right)$
4.	$g_1(t) = \frac{\pi^2}{2}(1-t)\cos \pi t$	$\varphi_1(kr) = \frac{1 + (kr/\pi)^2}{(1 + kr/\pi)^2}\left(\frac{\cos(kr/2)}{1 - kr/\pi}\right)^2$
5.	$g_1(t) = \frac{2^m (m!)^2}{(2m)!}(1 + \cos \pi t)^m$	$\varphi_1(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \prod_{i=1}^{m} \left[1 - \left(\frac{kr}{i\pi}\right)^2\right]^{-1}$
6.	$g_1(t) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}(1 + \cos \pi t)^n$	$\varphi_{nk} = \begin{cases} \frac{(n!)^2}{(n+k)!(n-k)!}, & k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad r = \pi$

Таблиця 2

Базові функції дельтовидних послідовностей

№	Базові функції, $t \in [0, \infty[$	Методи підсумовування
1.	$g_2(t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$	$\varphi_2(kr) = \left(e^{-r}\right)^k \equiv r_0^k, \quad r_0 = e^{-r}$

Продовження таблиці 2

№	Базові функції, $t \in [0, \infty[$	Методи підсумовування
2.	$g_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2/4}$	$\varphi_2(kr) = e^{-r^2 k^2} \equiv r_0^{k^2}, r_0 = e^{-r^2}$
3.	$g_2(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}\pi(\mathrm{t}/2)}$	$\varphi_2(kr) = \frac{1}{\mathrm{ch} kr}$
4.	$g_2(t) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}^2(\pi t/2)}$	$\varphi_2(kr) = \frac{kr}{\mathrm{sh}\, kr}$
5.	$g_2(t) = e^{-t}$	$\varphi_2(kr) = \frac{1}{1+(kr)^2}$
6.	$g_2(t) = 2e^{-t}\cos t$	$\varphi_2(kr) = \frac{1+(kr/\sqrt{2})^2}{1+(kr/\sqrt{2})^4}$
7.	$g_2(t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$	$\varphi_{nk} = \begin{cases} 1-k/n, & 1 \le k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases} \quad r = \frac{1}{n}$

5.1.2. Класична та узагальнена суми функціонального ряду. Розглянемо функціональну послідовність $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{5.5}$$

називається функціональним рядом. Розглянемо послідовність $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ частинних сум цього ряду

$$\begin{aligned} &S_1(x) = u_1(x), \\ &S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \\ &\ldots \\ &S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), \ldots \end{aligned}$$

Означення 5.4. Якщо послідовність частинних сум $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ у точці $x \in D$ має скінченну границю, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, то $S(x)$ називається сумою або класичною сумою ряду (5.5) і ряд називається збіжним у цій точці.

Множина D цих точок називається областю збіжності ряду.

Введемо також послідовність $\left\{S_n^*(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ узагальнених частинних сум функціонального ряду (5.5)

$$\begin{aligned}
&S_1^*(x)=\varphi_{11}\,u_1(x),\\
&S_2^*(x)=\varphi_{21}\,u_1(x)+\varphi_{22}u_2(x),\\
&\dots\\
&S_n^*(x)=\varphi_{n1}\,u_1(x)+\varphi_{n2}u_2(x)+\ldots+\varphi_{nn}u_n(x),\ldots,
\end{aligned}$$

де $\{\varphi_{nk}\},\ n=\overline{1,\infty},\ k=\overline{1,n}$ – числова послідовність, яка визначає вагу членів ряду (5.5) в узагальнених частинних сумах.

Означення 5.5. Скінченна границя $S^*(x)$ послідовності узагальнених частинних сум $\left\{S_n^*(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ у точці $x\in D^*$ називається узагальненою сумою ряду (5.5), якщо $S^*(x)=S(x)$ для всіх $x\in D$ і $D\subset D^*$.

При цьому ряд (5.5) називається слабко збіжним в області D^* (або збіжним у розумінні узагальненого підсумовування), а метод, який полягає у застосуванні послідовності $\{\varphi_{nk}\}$ називається регулярним.

Зокрема, регулярними є метод підсумовування середніми, який задається послідовністю $\left\{\varphi_{nk}=1-\dfrac{k}{n}\right\}$ або метод Рісса, за якого $\left\{\varphi_{nk}=\left[1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right]^{N-\frac{1}{2}}\right\}$, $N\ge 1$.

Узагальнені методи підсумовування рядів також характеризуються послідовностями функцій $\{\varphi_k(\varepsilon)\}_{k=0}^{\infty}$, які залежать від неперервного параметра $\varepsilon\in E$, де E – числова множина з точкою згущення $\overline{\varepsilon}$. Тоді узагальнена сума ряду (5.5) визначається як границя

$$S^*(x)=\lim_{\varepsilon\to\overline{\varepsilon}}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(\varepsilon)\,u_k(x). \tag{5.6}$$

Такими, наприклад, є метод Рімана за якого $\left\{\varphi_k(\varepsilon)=\left(\dfrac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon}\right)^2\right\}$ при $\overline{\varepsilon}=+0$ чи метод $\left\{\varphi_k(\varepsilon)=\varepsilon^{k^2}\right\}$ і метод Пуассона – $\left\{\varphi_k(\varepsilon)=\varepsilon^k\right\}$ при $\overline{\varepsilon}=1-0$.

Якщо ввести монотонну числову послідовність $\{\varepsilon_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n = \bar{\varepsilon}$, то граничну рівність (5.6) можна записати у термінах означення узагальненої суми (як границю послідовності узагальнених частинних сум)

$$S^*(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\varphi_{nk}u_k(x),$$

де $\varphi_{nk} = \varphi_k(\varepsilon_n)$, $n = \overline{1,\infty}$, $k = \overline{1,n}$. Для множин з граничними точками $\bar{\varepsilon} = +0$ і $\bar{\varepsilon} = 1-0$ вводимо відповідно числові послідовності $\left\{\varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_0}{n^\gamma}\right\}$ і $\left\{\varepsilon_n = 1-\dfrac{\varepsilon_0}{n^\gamma}\right\}$, де $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$, $0<\gamma<1$.

Тоді, узагальнену суму ряду (5.5) за методом Пуассона визначимо так

$$S^*(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon_n)^k u_k(x).$$

У табл.1 і 2 наведено також деякі послідовності, які відповідають узагальненим методам підсумовування рядів.

5.1.3. Рівномірно збіжні ряди. Необхідною умовою існування класичної суми ряду (5.5) у точці x_0 є прямування до нуля загального члена ряду при необмеженому зростанні його порядкового номера

$$\lim_{k\to\infty}u_k(x_0) = 0.$$

Звідси маємо достатню умову розбіжності ряду (5.5) (у класичному розумінні суми): якщо загальний член ряду в точці x_0 не прямує до нуля за необмеженого зростання його номера *k*, то ряд розбігається в цій точці.

Щодо узагальненої суми ряду (5.5), то важливо відзначити, що задача відшукання узагальненої суми стосується, зазвичай, ряду, загальний член якого не прямує до нуля за необмеженого зростання його порядкового номера.

Однак, слід також мати на увазі, що розбіжний у класичному розумінні ряд із додатними членами не має скінченної узагальненої суми.

Спільним математичним апаратом, на основі якого встановлюються достатні ознаки існування як класичної, так і узагальненої сум ряду, є теорія функціональних послідовностей.

Функціональний ряд (5.5) є рівномірно збіжним в області *D*, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається в *D*.

Якщо послідовність $\{S_n{}^*(x)\}_{n=1}^{\infty}$ узагальнених частинних сум рівномірно збігається в області *D**, то ряд (5.5) підсумовується відповідним узагальненим методом в *D**.

5.1.4. Тригонометричні ряди. Тригонометричний ряд має вигляд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right], \tag{5.7}$$

де a_k, b_k – коефіцієнти ряду.

Якщо ряд (5.7) рівномірно збігається (у класичному розумінні суми), то його сума $f(x)$,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right], \tag{5.8}$$

є 2π-періодичною неперервною функцією. Ряд (5.8) є розвиненням функції $f(x)$ за системою тригонометричних функцій

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(kx), \sin(kx), \ldots,$$

ортогональних на проміжку $[-\pi;\pi]$. Він називається рядом Фур'є функції $f(x)$, а коефіцієнти $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(kx)dx$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(kx)dx$ є коефіцієнтами Фур'є цієї функції.

Інтеграли у виразах для коефіцієнтів існують, якщо $f(x)$ – абсолютно інтегровна функція на проміжку $[-\pi;\pi]$.

Частинною сумою ряду (5.7) є

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]. \tag{5.9}$$

Сформулюємо основні достатні ознаки збіжності і рівномірної збіжності послідовності частинних сум $\{S_n(x)\}$ і, відповідно, ряду (5.7) [14, 85, 108].

Твердження 5.2. Ряд Фур'є абсолютно інтегровної на проміжку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ збігається до значення $f(x)$ у кожній точці неперервності цієї функції, в якій існує її похідна. У кожній точці розриву, в якій функція $f(x)$ має праву та ліву похідні, ряд Фур'є збігається до значення $[f(x+0)+f(x-0)]/2$.

Твердження 5.3. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле на проміжку $[-\pi;\pi]$, то її ряд Фур'є збігається для довільних x до значення $[f(x+0)+f(x-0)]/2$.

Твердження 5.4. Якщо неперервна на проміжку $[-\pi;\pi]$ функція $f(x)$ має кусково-неперервну похідну на цьому проміжку і $f(\pi-0)=f(-\pi+0)$, то її ряд Фур'є збігається рівномірно для всіх значень *x*.

Твердження 5.5. Якщо функція $f(x)$ неперервна і задовольняє умови Діріхле на проміжку $[-\pi;\pi]$, а також $f(\pi-0)=f(-\pi+0)$, то ряд Фур'є цієї функції збігається рівномірно для всіх значень *x*.

Для коефіцієнтів Фур'є справедливі такі оцінки:

Т*вердження 5.6.* Коефіцієнти Фур'є абсолютно інтегровної на проміжку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ справджують граничні рівності

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

*Твердження 5.7. Я*кщо 2π-періодична функція $f(x)$ має неперервні похідні до *m*-го $(m \geq 0)$ порядку включно на проміжку $[-\pi;\pi]$ і $(m+1)$-та похідна є кусково-неперервною функцією, то для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ виконуються рівності

$$\lim_{n\to\infty} n^{m+1} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} n^{m+1} b_n = 0$$

і ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^i \left(|a_n| + |b_n|\right), \quad i = \overline{0,m},$$

є збіжними.

Твердження 5.8. Якщо 2π-періодична функція $f(x)$ має скінченну похідну *m*-го порядку $(m > 0)$ на проміжку $[-\pi;\pi]$, що задовольняє умови Діріхле, то справедливі такі оцінки

$$|a_n| \leq \frac{A}{n^{m+1}}, \quad |b_n| \leq \frac{A}{n^{m+1}}, \quad A = \text{const}. \tag{5.10}$$

Частинні суми (5.9) ряду Фур'є періодичної абсолютно інтегровної на проміжку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ можна подати у вигляді інтеграла Діріхле

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{5.11}$$

Справді, підставивши вирази коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$ у формулу (5.9), одержимо

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos(kx)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)dt+\sin(kx)\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)\right]}{\sin\frac{x-t}{2}}f(t)dt.$$

Якщо в останньому виразі врахувати періодичність підінтегральних функцій, то отримаємо формулу (5.11).

Функцію $D_n(t)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left[(n+1/2)t\right]}{\sin(t/2)}$ називають ядром Діріхле.

Можна стверджувати, що якщо L – множина функцій що задовольняє умови Діріхле на проміжку $[-\pi;\pi]$ (достатня ознака 5.3), то за формулою (5.1) у кожній точці неперервності функції $f(x)\in L$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt=f(x), \qquad (5.12)$$

або з урахуванням періодичності підінтегральної функцій

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x-t)f(t)dt=f(x).$$

Отже, $\{D_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – дельтоподібна послідовність функцій на проміжку $[-\pi;\pi]$ відносно множини L.

5.1.5. Узагальнене підсумовування тригонометричних рядів. Розглянемо ряд (5.7), однак жодних припущень стосовно його коефіцієнтів приймати не будемо. Може реалізуватися випадок, коли інтеграли у формулах для коефіцієнтів не існують. Тоді ряд (5.7) не буде рядом Фур'є. Зокрема, ряд, одержаний почленним диференціюванням ряду Фур'є абсолютно інтегрованої функції, не є рядом Фур'є.

Нехай ряд (5.7) підсумовується методом, який характеризується послідовністю $\{\varphi_{nk}\}$, $k=\overline{1,n}$, $n=\overline{1,\infty}$, до функції $f(x)$ у точці x. Тоді, якщо

$$S_n^*(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\varphi_{nk}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right] \qquad (5.13)$$

є узагальненою частинною сумою цього ряду, де a_k, b_k – коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) = f(x). \tag{5.14}$$

Враховуючи формули для коефіцієнтів Фур'є функції $f(x)$, узагальнену частинну суму (5.13) аналогічно до (5.11) подамо у формі

$$S_n^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\varphi_{nk}\cos k(x-t)\right]f(t)dt. \tag{5.15}$$

Узагальнену частинну суму (5.15) запишемо ще так:

$$S_n^*(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^*(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} K_n^*(x-t)f(t)dt,$$

де

$$K_n^*(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\varphi_{nk}\cos(kt)\right). \tag{5.16}$$

З урахуванням цього подання з рівності (5.14) одержимо

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} K_n^*(x-t)f(t)dt. \tag{5.17}$$

Отже, послідовність $\{K_n^*(x-t)\}_{n=1}^{\infty}$, загальний член якої визначається формулою (5.16), є дельтоподібною функціональною послідовністю відносно функцій, що розвиваються у ряди Фур'є.

Формула (5.17) встановлює взаємозв'язок функції $f(x)$ і дельтоподібної послідовності функцій з послідовністю узагальнених частинних сум ряду Фур'є функції $f(x)$. Це обґрунтовує назву слабко збіжного ряду, прийняту для довільного (збіжного чи розбіжного в класичному розумінні суми) тригонометричного ряду зі скінченою узагальненою сумою.

Встановимо взаємозв'язок між послідовностями, які характеризують узагальнені методи підсумовування рядів, і дельтоподібними послідовностями функцій, які задаються формулами (5.2), (5.3). Розвиваючи функцію (5.2), що визначає дельтоподібну послідовність функцій 1-го типу, в ряд Фур'є при достатньо малому $\varepsilon_n > 0$ і $x - x_0 = t$, знайдемо

$$\delta_n(x, x_0) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k\varepsilon_n)\cos k(x-x_0)\right],$$

де

$$\varphi_1(k\varepsilon_n) = \frac{1}{2r_n}\int_{-\varepsilon_n}^{\varepsilon_n} g_1\left(\frac{|t|}{\varepsilon_n}\right)\cos(kt)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} g_1(|t|)\cos(k\varepsilon_n t)dt = \int_{0}^{1} g_1(t)\cos(k\varepsilon_n t)dt.$$

Порівнюючи одержану формулу із співвідношенням (5.16) для коефіцієнтів розвинення, доходимо висновку, що коефіцієнти Фур'є дельтоподібної послідовності функцій 1-го типу визначають (з точністю до множника $1/\pi$) узагальнений метод підсумовування $\{\varphi_{nk}\}$,

$$\varphi_{nk} = \varphi_1(k\varepsilon_n) = \int_0^1 g_1(t)\cos(k\varepsilon_n t)dt.$$

Наприклад, базовій функції $g_1(t) = 2(1-t)$ $(0 \le t \le 1)$ дельтоподібної послідовності функцій

$$\delta_n(x,x_0) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k\varepsilon_n)\cos k(x-x_0)\right] =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_n}\left[1 - \dfrac{|x-x_0|}{\varepsilon_n}\right], & |x-x_0| \le \varepsilon_n, \\ 0, & |x-x_0| > \varepsilon_n, \end{cases}$$

відповідає метод Рімана,

$$\varphi(k\varepsilon_n) = \int_0^1 g_1(t)\cos(k\varepsilon_n t)dt = \left[\frac{\sin(k\varepsilon_n/2)}{k\varepsilon_n/2}\right]^2.$$

Аналогічне твердження справедливе для послідовності (5.3). Дельтоподібна послідовність функцій 2-го типу визначає узагальнений метод підсумовування $\{\varphi_{nk}\}$, де

$$\varphi_{nk} = \varphi_2(k\varepsilon_n) = \int_0^{\infty} g_2(t)\cos(k\varepsilon_n t)dt.$$

Якщо підставити розвинення

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right]$$

в інтегральне подання функції $f(x)$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\varepsilon_n}\int_{-\infty}^{\infty} g_2\left(\frac{|x-t|}{\varepsilon_n}\right)f(t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x+\varepsilon_n t) + f(x-\varepsilon_n t)}{2}g_2(t)dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]\int_0^{\infty} g_2(t)\cos(k\varepsilon_n t)dt\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_2(k\varepsilon_n)\left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right]\right].$$

Звідси і одержуємо формулу узагальненого підсумовування ряду.

Для прикладу розглянемо дельтоподібну послідовність функцій, яка задається базовою функцією (ядром Фейєра) $g_2(t) = \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$. При $\varepsilon_n = 2/n$ знайдемо [85]

$$\varphi_{nk} = \varphi_2\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cos\left(\frac{2k}{n}t\right)dt = 1 - \frac{k}{n},$$

$$k = \overline{1,n};\; n = \overline{1,\infty}.$$

Таким чином, ми отримали формулу для визначення загального члену послідовності, який характеризує метод підсумовування середніми.

Для узагальненої частинної суми ряду, із застосуванням цього методу, за формулою (5.15) отримаємо

$$S_n^*(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^*(t)dt,$$

де $K_n^*(x) = \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)\cos(kt)\right] = \dfrac{1}{2\pi n}\left[\dfrac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2$.

При формулюванні достатніх ознак збіжності рядів, порівняно з класичним методом, суттєво послаблюються умови щодо застосовності узагальнених методів підсумовування тригонометричних рядів.

Твердження 5.9. Ряд Фур’є абсолютно інтегровної на проміжку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ підсумовується узагальненим методом $\{\varphi_{nk}\}$ до значення $f(x)$ у кожній точці її неперервності і значення $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ у точках розривів першого роду.

Твердження 5.10. Ряд Фур’є абсолютно інтегровної на проміжку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$ рівномірно підсумовується методом $\{\varphi_{nk}\}$ до $f(x)$ на кожному проміжку $[a;b]$, строго внутрішньому до проміжку неперервності цієї функції.

Твердження 5.11. Якщо абсолютно інтегровна на проміжку $[-\pi;\pi]$ функція $f(x)$ має в точці x неперервну похідну $f^{(m)}(x)$, то ряд Фур’є функції $f(x)$, почленно продиференційований m раз, підсумовується до значення $f^{(m)}(x)$ у цій точці методом $\{\varphi(k\varepsilon)\}$ із порядком регулярності $p \geq m+2$.

Порядок регулярності p методу визначається як порядок оцінки $|\varphi(k\varepsilon)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^p}\right)$ при великих значеннях k і фіксованому r. Порядок регулярності безпосередньо визначається через порядок найбільшої похідної, яка задовольняє умови Діріхле, від продовження відповідної базової функції

$$G_1(t) = \begin{cases} g_1(|t|), & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad G_2(t) = g_2(|t|), \quad t \in]-\infty;\infty[\,.$$

Наприклад, для загального члена послідовності, який характеризує метод Рімана $\left\{\varphi(k\varepsilon) = \left(\frac{\sin(k\varepsilon)}{k\varepsilon}\right)^2\right\}$ при фіксованому значенні ε і великому k маємо оцінку $\varphi(k\varepsilon) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, а тому $p=2$. Цьому методу відповідає ядро $g_1(t) = 2(1-t)$ і його продовження на дійсну вісь

$$G_1(t) = \begin{cases} 2(1-|t|), & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

Оскільки перша похідна $\frac{d}{dt}G(t)$ є кусково-сталою функцією, то для її коефіцієнтів Фур'є маємо оцінку (5.10), згідно з якою $p=2$.

Аналогічно для узагальненого методу підсумовування (див. табл. 1), який характеризується послідовністю

$$\left\{\varphi(k\varepsilon) = \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon} \prod_{i=1}^{s} \left(1 - \left(\frac{k\varepsilon}{i\pi}\right)^2\right)^{-1}\right\} \tag{5.18}$$

маємо $|\varphi(k\varepsilon)| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^{2s+1}}\right)$ і тому його порядок регулярності $p = 2s+1$. Цьому методу відповідає базова функція $g_1(t) = \frac{2^s (s!)^2}{(2s)!}(1+\cos \pi t)^s$ $(0 \leq t \leq 1)$ і її продовження на дійсну вісь $G_1(t) = \begin{cases} g_1(t), & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$ Ця функція має кусково-гладку похідну $(2s+1)$- го порядку.

5.1.6. Узагальнене підсумовування ряду за системою тригонометричних функцій, ортогональних на довільному проміжку. Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна функція на проміжку $[-l;\ l]$. Введемо нову змінну $z = \pi x/l$ і розглянемо функцію $\varphi(z) = f\left(\dfrac{l}{\pi}z\right)$, $z \in [-\pi; \pi]$, яку розвинемо в ряд Фур'є

$$\varphi(z) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(kz) + b_k \sin(kz)\right],$$

де a_k, b_k – коефіцієнт Фур'є функції $\varphi(z)$. Повертаючись до попередньої змінної, одержимо

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(\lambda_k x) + b_k \sin(\lambda_k x)\right],$$

де $a_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos(\lambda_k x)dx;\ b_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin(\lambda_k x)dx;\ \lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}.$

Для узагальненої частинної суми цього ряду маємо

$$S_n^*(z) = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(z+t)K_n^*(t)dt.$$

Переходячи тут до змінних $x = \dfrac{l}{\pi}z$ і $u = \dfrac{l}{\pi}t,$ матимемо

$$S_n^*\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{\pi}{l}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(\frac{\pi}{l}(x+u)\right)K_n^*\left(\frac{\pi}{l}u\right)du$$

або

$$S_n^*\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \ \widehat{S}_n^*(x) = \int_{-l}^{l} f(x+u)\widehat{K}_n^*(u)du,$$

де

$$\widehat{K}_n^*(u) = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\varphi_{nk}\cos(\lambda_k u)\right).$$

Отже, послідовність $\{\varphi_{nk}\}$, яка характеризує метод підсумовування тригонометричного ряду не змінює вигляду при зміні проміжку розвинення, тобто, якщо в точці $x \in [-l;\ l]$, функція $f(x)$ – неперервна, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\varphi_{nk}\left[a_k \cos(\lambda_k x) + b_k \sin(\lambda_k x)\right]\right\}.$$

5.1.7. Підсумовування подвійних тригонометричних рядів. Нехай функція $f(x,y)$ абсолютно інтегровна у прямокутнику $\Pi=\{(x;y):-l_1<x<l_1,-l_2<y<l_2\}$. Тоді в області П ортогональною є система тригонометричних функцій

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\cos(\lambda_{m1}x),\quad \frac{1}{2}\sin(\lambda_{m1}x),\quad \frac{1}{2}\cos(\lambda_{n2}y),\quad \frac{1}{2}\sin(\lambda_{n2}y),\ldots,$$
$$\cos(\lambda_{m1}x)\cdot\cos(\lambda_{n2}y),\quad \sin(\lambda_{m1}x)\cdot\sin(\lambda_{n2}y),$$
$$\cos(\lambda_{m1}x)\cdot\sin(\lambda_{n2}y),\quad \sin(\lambda_{m1}x)\cdot\cos(\lambda_{m2}x),\ldots,$$

де $\lambda_{m1}=\dfrac{m\pi}{l_1},\ \lambda_{n2}=\dfrac{n\pi}{l_2},\ m=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots,$.

Коефіцієнти Фур'є функції $f(x,y)$ визначаються за формулами

$$A_{mn}=\varepsilon_{mn}a_{mn},\quad B_{mn}=\varepsilon_{mn}b_{mn},\quad C_{mn}=\varepsilon_{mn}c_{mn},\quad D_{mn}=\varepsilon_{mn}d_{mn},$$

де

$$a_{mn}=\iint_{\Pi} f(x,y)\cos(\lambda_{m1}x)\cos(\lambda_{n2}y)dxdy,$$
$$b_{mn}=\iint_{\Pi} f(x,y)\sin(\lambda_{m1}x)\sin(\lambda_{n2}y)dxdy,$$
$$c_{mn}=\iint_{\Pi} f(x,y)\cos(\lambda_{m1}x)\sin(\lambda_{n2}y)dxdy,$$
$$d_{mn}=\iint_{\Pi} f(x,y)\sin(\lambda_{m1}x)\cos(\lambda_{n2}y)dxdy,$$

$$\varepsilon_{mn}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, \text{ якщо} & m=n=0,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ якщо} & m>0, n=0 \text{ або } m=0,\ n>0,\\ 1, \text{ якщо} & m>0,\ n>0.\end{cases}$$

Тоді ряд Фур'є функції $f(x,y)$, $(x,y)\in\Pi$, запишеться у формі

$$f(x,y)\sim\sum_{m,n=0}^{\infty}\varepsilon_{mn}\big[a_{mn}\cos(\lambda_{m1}x)\cos(\lambda_{n2}y)+b_{mn}\sin(\lambda_{m1}x)\sin(\lambda_{n2}y)+$$
$$+c_{mn}\cos(\lambda_{m1}x)\sin(\lambda_{n2}y)+d_{mn}\sin(\lambda_{m1}x)\cos(\lambda_{n2}y)\big]. \tag{5.19}$$

Для частинної суми цього ряду аналогічно до (5.11) одержимо інтегральне подання

$$S_{MN}(x,y)=\iint_{\Pi} f(x+u,y+v)D_M(u)D_N(v)dudv.$$

Тут $D_M(u), D_N(v)$ – ядра Діріхле.

Сформулюємо деякі достатні ознаки збіжності ряду (5.19).

Твердження 5.12. Якщо періодична функція за обома змінними $f(x,y)$ має обмежені частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ і в околі деякої точки має неперервну змішану похідну $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, то в цій точці ряд (5.19) збігається до значення $f(x,y)$.

Твердження 5.13. Якщо періодична за обома змінними функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні порядку $s+2$ $(s \geq 0)$, то збіжними є числові ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} k^{\omega} m^{s-\omega}\left(|a_{km}|+|b_{km}|+|c_{km}|+|d_{km}|\right)<\infty \quad (0 \leq \omega \leq s). \tag{5.20}$$

Узагальнена частинна сума ряду (5.19) і його узагальнена сума визначаються за такими формулами

$$S^{*}_{MN}(x,y)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}\varphi_{Mm}\varphi_{Nn}\varepsilon_{mn}\left[a_{mn}\cos(\lambda_{m1}x)\cos(\lambda_{n2}y)+\right.$$

$$\left.+b_{mn}\sin(\lambda_{m1}x)\sin(\lambda_{n2})+c_{mn}\cos(\lambda_{m1}x)\sin(\lambda_{n2}y)+d_{mn}\sin(\lambda_{m1}x)\cos(\lambda_{n2}y)\right],$$

$$f(x,y)=\lim_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}} S^{*}_{MN}(x,y),$$

де $\{\varphi_{Mm}\}$, $\{\varphi_{Nn}\}$ – послідовності, які характеризують узагальнені методи підсумовування рядів (див. табл. 1).

Для частинної узагальненої суми ряду (5.19) справедлива формула

$$S^{*}_{MN}(x,y)=\iint\limits_{\Pi} f(x+u,y+v)K^{*}_{M}(u)K^{*}_{N}(v)\,du\,dv,$$

де $K^{*}_{M}(u)$, $K^{*}_{N}(v)$ – ядра, означені згідно співвідношення (5.16).

Виходячи із інтегрального подання частинних сум ряду (5.19) встановимо достатні ознаки збіжності послідовності узагальнених частинних сум цього ряду.

Твердження 5.14. Нехай абсолютно інтегровна у прямокутнику П функція $f(x,y)$ є неперервною в області $D \subset \Pi$. Тоді ряд (5.19) рівномірно підсумовується методом $\{\varphi_{Mm}\varphi_{Nn}\}$ з показником регулярності $p \geq 2$ до $f(x,y)$ у будь-якій області, строго внутрішній до області *D*.

Твердження 5.15. Нехай абсолютно інтегровна у прямокутнику П функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial^m f}{\partial x^s \partial y^{m-s}}$, $m \geq 0$, у точці *x*. Тоді ряд, одержаний почленним диференціюванням ряду (5.19) s разів по x і m-s разів по y, підсумовується до значення $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^s \partial y^{m-s}}$ у точці x методом $\{\varphi_{Mm}\varphi_{Nn}\}$ із показником регулярності $p \ge 2 + \max\{s, m-s\}$.

5.2. РОЗВ'ЯЗКИ ФУР'Є КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

Розв'язування крайових задач теорії оболонок методом Фур'є з використанням систем тригонометричних функцій ґрунтується на узагальненому принципі суперпозиції [104]. При цьому вимагається щоби тригонометричні ряди, через які подається розв'язок задачі та його частинні похідні (що входять у рівняння задачі), рівномірно збігалися.

Умови існування таких розв'язків накладають досить жорсткі вимоги стосовно гладкості правих частин диференціальних рівнянь, початкових і межових умов. Встановимо умови існування розв'язків Фур'є крайових задач теорії оболонок.

5.2.1. Розв'язки Фур'є крайових задач для неоднорідної системи рівнянь теорії оболонок Тимошенка. Розглянемо шарнірно оперту трансверсально-ізотропну оболонку з серединною поверхнею $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ 0 < \alpha_1 < l_1, 0 < \alpha_2 < l_2\}$ і сталими геометричними параметрами, $A_i = 1,\ k_i = const\ (i = 1,\ 2)$. Оболонка перебуває під дією приведених до серединної поверхні сил і моментів $q_i = q_i(\alpha_1, \alpha_2)\ (i = 1, 2, 3)$, $m_i = m_i(\alpha_1, \alpha_2)\ (i = 1, 2)$.

Напружено-деформований стан оболонки описується рівняннями (2.39)–(2.43). Запишемо їх у вигляді

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i = -q_i, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -q_3; \tag{5.21}$$

$$N_{ii} = B\left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + (k_i + \nu k_j)w\right],\ N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}\right),$$

$$M_{ii} = D\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j}\right),\ M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j}\right),$$

$$Q_i = \Lambda\left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i\right) \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j). \tag{5.22}$$

Шарнірному опертю оболонки відповідають такі граничні умови

$$w(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad N_n(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad u_\tau(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \tag{5.23}$$
$$M_n(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad \gamma_\tau(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad (\alpha_{10}, \alpha_{20}) \in \partial\Pi,$$

де

$$N_n = N_{11}s_1^2 + N_{22}s_2^2 + 2N_{12}s_1 s_2;$$
$$M_n = M_{11}s_1^2 + M_{22}s_2^2 + 2M_{12}s_1 s_2;$$
$$u_\tau = -u_1 s_2 + u_2 s_1; \quad \gamma_\tau = -\gamma_1 s_2 + \gamma_2 s_1;$$

$\vec{n} = \{s_1, s_2\}$ – одиничний вектор, нормальний до границі оболонки.

Таким чином задача про визначення напружено-деформованого стану оболонки зводиться до такої крайової задачі: знайти періодичні функції $u_i, w, \gamma_i, N_{ij}, Q_i, M_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ які задовольняють рівняння (5.21), (5.22) в області П і умови (5.23) на границі цієї області.

Розв'язок цієї задачі шукаємо методом Фур'є (методом відокремлення змінних) із використанням систем тригонометричних функцій.

Знайдемо умови, які накладаються на функції $q_i = q_i(\alpha_1, \alpha_2)$ $(i = 1, 2, 3)$, $m_i = m_i(\alpha_1, \alpha_2)$ $(i = 1, 2)$, і забезпечують існування розв'язку Фур'є задачі (5.21)–(5.23). Насамперед запишемо формальний розв'язок задачі. Зведемо систему рівнянь (5.21), (5.22) до системи п'яти рівнянь відносно усереднених переміщень

$$[L]\{U\} = -\{P\}, \tag{5.24}$$

де $[L]$ – матриця, елементи якої є диференціальними операторами

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \frac{k_1^2 \Lambda}{\underline{B}}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$L_{13} = -L_{31} = \left[k_1\left(1 + \frac{\Lambda}{\underline{B}}\right) + \nu k_2\right]\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad L_{14} = L_{41} = \frac{k_1 \Lambda}{\underline{B}},$$

$$L_{15} = L_{51} = 0, \ L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} - \frac{k_2^2 \Lambda}{\underline{B}},$$

$$L_{23} = -L_{32} = \left[k_2\left(1 + \frac{\Lambda}{\underline{B}}\right) + \nu k_1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad L_{24} = L_{42} = 0,$$

$$L_{25} = L_{52} = \underline{\frac{k_2 \Lambda}{B}}, \quad L_{33} = \frac{\Lambda}{B}\Delta - \left(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2\right),$$

$$L_{34} = -L_{43} = \frac{\Lambda}{B}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad L_{35} = -L_{53} = \frac{\Lambda}{B}\frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$L_{45} = L_{54} = \frac{D(1+\nu)}{2B}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad L_{44} = \frac{D}{B}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}\right) - \frac{\Lambda}{B},$$

$$L_{55} = \frac{D}{B}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}\right) - \frac{\Lambda}{B};$$

$$\{U\}^T = \{u_1 \;\; u_2 \;\; w \;\; \gamma_1 \;\; \gamma_2\}; \quad \{P\}^T = \left\{\frac{q_1}{B} \;\; \frac{q_2}{B} \;\; \frac{q_3}{B} \;\; \frac{m_1}{B} \;\; \frac{m_2}{B}\right\}.$$

Підкресленням виділено доданки, які відсутні в аналогічних поданнях рівнянь теорії пологих оболонок.

Формальний розв'язок Фур'є задачі (5.21)–(5.23) шукаємо у вигляді сум рядів

$$\begin{Bmatrix} w \\ N_{ii} \\ M_{ii} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} w_{km} \\ N_{iikm} \\ M_{iikm} \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha), \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{1km} \\ \gamma_{1km} \\ Q_{1km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^1(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \gamma_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{2km} \\ \gamma_{2km} \\ Q_{2km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^2(\alpha), \quad \begin{Bmatrix} N_{12} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} N_{12km} \\ M_{12km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^0(\alpha), \qquad (5.25)$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\Phi_{km}^1(\alpha) = \cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$;

$\Phi_{km}^2(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\Phi_{km}^0(\alpha) = \cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$;

$\lambda_{k1} = k\pi/l_1$, $\lambda_{m2} = m\pi/l_2$.

Враховуючи рівності $s_1 = \pm 1,\ s_2 = 0$ на лінії $\alpha_1 = const$ і $s_2 = \pm 1,\ s_1 = 0$ на лінії $\alpha_2 = const$ серединної поверхні $(\vec{n} = \{s_1, s_2\})$, переконуємося, що співвідношення (5.25) задовольняють граничні умови (5.23).

Праві частини рівнянь (5.21) також подамо у вигляді рядів

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ m_1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} q_{1km} \\ m_{1km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^1(\alpha), \quad \begin{Bmatrix} q_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} q_{2km} \\ m_{2km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^2(\alpha), \quad q_3 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q_{3km}\Phi_{km}(\alpha). \qquad (5.26)$$

Підставивши формули (5.25), (5.26) у рівняння (5.24), одержимо систему п’яти лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів (5.25)

$$[L_{km}]\{U_{km}\} = -\{P_{km}\}, \tag{5.27}$$

де

$$\{U_{km}\}^T = \{u_{1km}\ \ u_{2km}\ \ w_{km}\ \ \gamma_{1km}\ \ \gamma_{2km}\};$$

$$\{P_{km}\}^T = \left\{\frac{q_{1km}}{B}\ \ \frac{q_{2km}}{B}\ \ \frac{q_{3km}}{B}\ \ \frac{m_{1km}}{B}\ \ \frac{m_{2km}}{B}\right\};$$

$[L_{km}]$ – матриця з елементами $L_{11km} = -\lambda_{k1}^2 - \frac{1-\nu}{2}\lambda_{m2}^2 - \frac{k_1^2\Lambda}{\underline{B}}$,

$$L_{12km} = L_{21km} = -\frac{1+\nu}{2}\lambda_{k1}\lambda_{m2},$$

$$L_{13km} = L_{31} = \left[k_1\left(1+\frac{\Lambda}{\underline{B}}\right) + \nu k_2\right]\lambda_{k1},\quad L_{14km} = L_{41km} = \frac{k_1\Lambda}{\underline{B}},$$

$$L_{15km} = L_{52km} = 0,\quad L_{22km} = -\lambda_{m2}^2 - \frac{1-\nu}{2}\lambda_{k1}^2 - \frac{k_2^2\Lambda}{\underline{B}},$$

$$L_{23km} = L_{32km} = \left[k_2\left(1+\frac{\Lambda}{\underline{B}}\right) + \nu k_1\right]\lambda_{m2},\quad L_{24km} = L_{42km} = 0,$$

$$L_{25km} = L_{52km} = \frac{k_2\Lambda}{\underline{B}},\quad L_{33km} = -\frac{\Lambda}{B}\Delta_{km}^2 - \left(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2\right),$$

$$L_{34km} = L_{43km} = -\frac{\Lambda}{B}\lambda_{k1},\quad L_{35km} = L_{53km} = -\frac{\Lambda}{B}\lambda_{m2},$$

$$L_{44km} = -\frac{D}{B}\left(\lambda_{k1}^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda_{m2}^2\right) - \frac{\Lambda}{B},\quad L_{45km} = L_{54km} = -\frac{D(1+\nu)}{2B}\lambda_{k1}\lambda_{m2}$$

$$L_{55km} = -\frac{D}{B}\left(\lambda_{m2}^2 + \frac{1-\nu}{2}\lambda_{k1}^2\right) - \frac{\Lambda}{B};$$

$$\Delta_{km}^2 = \lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2;\quad \lambda_{k1}^2 = (\lambda_{k1})^2,\ \lambda_{m2}^2 = (\lambda_{m2})^2.$$

Розв’язавши систему рівнянь (5.27) відносно коефіцієнтів $w_{km}, u_{1km}, u_{2km}, \ldots, M_{12km}$, вирази для переміщень і зусиль отримаємо з формул (5.25) з використанням співвідношень (5.22).

Визначемо умови, за виконання яких співвідношення (5.25) є розв’язком Фур’є розглянутої задачі.

Оскільки рівняння (5.24) містять другі похідні від переміщень, то співвідношення (5.25) будуть розв’язком Фур’є задачі (5.21)–(5.23), якщо ряди, отримані дворазовим почленним диференціюванням по α_1 і α_2 розвинень (5.25), рівномірно збігаються.

Отримаємо оцінки для коефіцієнтів розвинень переміщень. Якщо записавти формули Крамера для системи (5.27), розкрити відповідні визначники (за стовпцями, що містять вільні члени) і врахувати при цьому нерівності $\Delta_{km}^2 \geq 2\lambda_{k1}\lambda_{m2}$, $(\lambda_{k1})^2 \leq \Delta_{km}^2$ і $(\lambda_{m2})^2 \leq \Delta_{km}^2$, то одержимо такі оцінки

$$\begin{Bmatrix} |u_{1km}| \\ |u_{2km}| \\ |w_{km}| \\ |\gamma_{1km}| \\ |\gamma_{2km}| \end{Bmatrix} \leq A \begin{bmatrix} \frac{1}{km} & \frac{1}{km} & \frac{1}{km^2} & \frac{1}{k^2m^2} & \frac{1}{k^2m^2} \\ \frac{1}{km} & \frac{1}{km} & \frac{1}{k^2m} & \frac{1}{k^2m^2} & \frac{1}{k^2m^2} \\ \frac{1}{km^2} & \frac{1}{k^2m} & \frac{1}{km} & \frac{1}{km^2} & \frac{1}{k^2m} \\ \frac{1}{k^2m^2} & \frac{1}{k^2m^2} & \frac{1}{km^2} & \frac{1}{km} & \frac{1}{km} \\ \frac{1}{k^2m^2} & \frac{1}{k^2m^2} & \frac{1}{k^2m} & \frac{1}{km} & \frac{1}{km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |q_{1km}| \\ |q_{2km}| \\ |q_{3km}| \\ |m_{1km}| \\ |m_{2km}| \end{Bmatrix}, \tag{5.28}$$

де A – стала величина.

Зауважимо, що за достатньою умовою 5.13, якщо періодична функція за обома змінними $f(\alpha_1, \alpha_2)$ має неперервні частинні похідні порядку $s+2$, $(s \geq 0)$, то збіжними є числові ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k^{\omega} m^{s-\omega}\left(|a_{km}| + |b_{km}|\right) < \infty \quad (0 \leq \omega \leq s), \tag{5.29}$$

де a_{km}, b_{km} – коефіцієнти Фур’є функції $f(\alpha_1, \alpha_2)$.

Оскільки другі частинні похідні від переміщень, які подаються рядами (5.25), повинні бути неперервними функціями, коефіцієнти цих рядів мають задовольняти нерівності (5.29) при $s = 2$. Тоді коефіцієнти розвинень зовнішнього навантаження, згідно з оцінками (5.28), справджують такі умови

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k^{\omega} m^{2-\omega} \frac{|q_{ikm}|}{km} < \infty, \tag{5.30}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k^{\omega} m^{2-\omega} \frac{|m_{ikm}|}{km} < \infty \quad (0 \leq \omega \leq 2).$$

Отже, якщо періодичні за обома змінними функції q_1, q_2, q_3, m_1, m_2 мають неперервні частинні похідні третього порядку, то для їх коефіцієнтів Фур’є справедливі оцінки (5.30) і таке твердження.

Твердження 5.16. Якщо праві частини рівнянь (5.21) – періодичні функції з неперервними частинними похідними третього порядку, то (5.25) – розв'язок Фур'є задачі (5.21)–(5.23).

5.2.2. Розв'язки Фур'є крайових задач за наявності у рівняннях вільних членів з відокремленими змінними. Розглянемо попередню крайову задачу прийнявши додатково, що вільні члени у рівняннях подаються у вигляді добутку двох функцій, кожна з яких є функцією однієї змінної,

$$q_i = q_i'(\alpha_1) q_i''(\alpha_2) \ (i = 1, 2, 3), \quad m_i = m_i'(\alpha_1) m_i''(\alpha_2) \ (i = 1, 2). \tag{5.31}$$

Згідно з достатньою умовою 5.8, якщо періодичні функції $q_i'(\alpha_1)$, $q_i''(\alpha_2)$, $m_i'(\alpha_1)$, $m_i''(\alpha_2)$ є неперервними, а також мають похідні порядку p, що задовольняють умови Діріхле, то для коефіцієнтів Фур'є цих функцій справедливі такі оцінки

$$|q_{ik}'|, \ |m_{ik}'| = \frac{A'}{k^{p+1}}, \quad |q_{im}''|, \ |m_{im}''| = \frac{A''}{m^{p+1}} \quad (A', A'' = const). \tag{5.32}$$

Оцінивши ряди для частинних похідних другого порядку від переміщень з врахуванням оцінок (5.30) і (5.32), одержимо

$$A'A''\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k^{\omega} m^{2-\omega} \frac{1}{k^{p+2} m^{p+2}} < \infty,$$

$$A'A''\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k^{\omega} m^{2-\omega} \frac{1}{k^{p+2} m^{p+2}} < \infty \quad (0 \le \omega \le 2).$$

Ці нерівності виконуються при $p = 2$, тобто другі похідні задовольняють умови Діріхле і тому справедливе наступне твердження.

Твердження 5.17. Якщо праві частини рівнянь (5.21) подаються як добуток двох функцій (5.31), кожна з яких є періодичною неперервною функцією з другими похідними, які задовольняють умови Діріхле, то (5.25) є розв'язком Фур'є задачі (5.21)–(5.23).

5.3. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

У математичній фізиці розглядають також крайові задачі, в яких умови існування розв'язків не задовольняються. Для таких задач вводять поняття узагальненого розв'язку [92]. Узагальненим розв'язком крайової задачі називають границю послідовності розв'язків допоміжних крайових задач, одержаних із вихідної задачі заміною правих частин рівнянь загальними членами послідовностей, які збігаються до правих частин рівномірно або в середньому, або слабко.

Відповідно до цього при розв'язуванні крайових задач методом Фур'є розрізняють узагальнені розв'язки в розумінні рівномірної збіжності, збіжності в середньому, або слабкої збіжності.

Узагальнений розв’язок у розумінні рівномірної збіжності подається рівномірно збіжним рядом, однак похідні від розв’язку, які входять у рівняння задачі, не обов’язково є рівномірно збіжними рядами.

Узагальнений розв’язок у розумінні збіжності в середньому подається збіжною в середньому послідовністю частинних сум ряду, а у розумінні слабкої збіжності подається у вигляді збіжної послідовності узагальнених частинних сум ряду.

Таким чином, формальний розв’язок (5.25) є узагальненим розв’язком Фур’є (у розумінні рівномірної збіжності) задачі (5.21)–(5.23), якщо ряди для переміщень і зусиль рівномірно збігаються. Оскільки сили і моменти визначаються через перші частинні похідні від переміщень, рівномірно збіжними є ряди для цих частинних похідних від переміщень, тобто для коефіцієнтів розвинень переміщень і зовнішнього навантаження справджуються відповідно оцінки (5.29) і (5.30) при $s = 1$. Таким чином, якщо праві частини рівнянь (5.21) – періодичні функції з неперервними частинними похідними другого порядку, то (5.25) є розв’язком Фур’є задачі (5.21)–(5.23).

Для випадку задачі з правими частинами рівнянь у вигляді функцій з відокремленими змінними справедливе таке твердження.

Твердження 5.18. Якщо праві частини рівнянь (5.21) подаються у вигляді добутків двох функцій (5.31), кожна з яких є періодичною неперервною функцією з першими похідними, які задовольняють умови Діріхле, то (5.25) є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв’язком Фур’є задачі (5.21)–(5.23).

Цьому твердженню задовольняють, наприклад, такі вільні члени рівнянь

$$q_i = \delta_n\left(\alpha_1, \alpha_1^0\right)\delta_n\left(\alpha_2, \alpha_2^0\right) \ (i = 1, 2, 3),$$
$$m_i = \delta_n\left(\alpha_1, \alpha_1^0\right)\delta_n\left(\alpha_2, \alpha_2^0\right) \ (i = 1, 2),$$

де $\delta_n\left(\alpha_i, \alpha_i^0\right)$ – періодична дельтоподібна послідовність функцій з базовою функцією $g_1(t) = 2(1 - t)$, $0 \le t \le 1$.

5.4. РОЗВ’ЯЗКИ ФУР’Є ЗАДАЧІ ПРО ЛОКАЛЬНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ОБОЛОНКИ

Розглянемо задачу про локальне навантаження (приведеними до серединної поверхні силами і моментами) шарнірно опертої оболонки. Напружено-деформований стан оболонки описується системою рівнянь у переміщеннях і зусиллях (5.21), (5.22). Граничні умови задаються у формі (5.23).

5.4.1. Математичні моделі локального навантаження. Нехай навантаження, яке діє на оболонку, локалізоване в області $\Pi^0 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2);\ \left|\alpha_1 - \alpha_1^0\right| \le \varepsilon,\ \left|\alpha_2 - \alpha_2^0\right| \le \varepsilon\right\}$, $\Pi^0 \subset \Pi$, і задається у вигляді добутку симетричних дельтоподібних фінітних функцій [9, 96]

$$q_1 = T_1^0 \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon), \quad q_2 = T_2^0 \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon),$$
$$q_3 = T_3^0 \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon), \quad m_1 = T_4^0 \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon), \tag{5.33}$$
$$m_2 = T_5^0 \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon),$$

де

$$\delta(\alpha, \alpha^0, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{\left|\alpha - \alpha^0\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\alpha - \alpha^0\right| \le \varepsilon, \\ 0, & \left|\alpha - \alpha^0\right| > \varepsilon, \end{cases} \tag{5.34}$$

$\{\varepsilon = \varepsilon(n)\}_1^\infty$ – нескінченно мала числова послідовність; $g(t) = g_1(t)$ – базова функція 1-го типу; $T_i \left(i = \overline{1,5}\right)$ – рівнодійні навантажень.

Справді, з першої рівності (5.4) випливають такі рівності

$$\iint_{\Pi} \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon) d\alpha_1 d\alpha_2 = \iint_{\Pi_0} \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon) d\alpha_1 d\alpha_2 =$$
$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon) d\alpha_1 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon) d\alpha_2 = \int_0^1 g(t)dt \int_0^1 g(t)dt = 1.$$

Виходячи із подання для компонент зовнішнього навантаження (5.33) у вигляді добутку двох дельтоподібних функцій (5.34) і опираючись на твердженнях 5.13 і 5.14, матимемо

Твердження 5.19. Якщо дельтоподібні функції $\delta(\alpha_i, \alpha_i^0, \varepsilon)$ $(\varepsilon \ne 0,\, i = 1, 2)$ мають похідні s-го порядку по α_i $(s \ge 1)$, що задовольняють умови Діріхле, і $\left[\alpha_i^0 - \varepsilon;\, \alpha_i^0 + \varepsilon\right] \subset [0; l_i]$, то формальний розв'язок задачі (5.21)–(5.23) з правими частинами рівнянь у вигляді (5.33) є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язком Фур'є при $s = 1$ і розв'язком Фур'є при $s > 1$.

Очевидно, узагальненим у розумінні рівномірної збіжності є розв'язк задачі з правими частинами рівнянь у вигляді (5.33), де базовою є функція $g(t) = 2(1 - t)$, $0 \le t \le 1$.

5.4.2. Побудова узагальненого (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язку Фур'є. Узагальнений (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язок системи рівнянь (5.21)–(5.23) з правими частинами рівнянь у вигляді (5.33) існує згідно з твердженням 5.19, якщо дельтоподібні функції у формулах (5.33) мають перші похідні, що задовольняють умови Діріхле $(s \ge 1)$ і $\varepsilon \ne 0$. Зведемо систему рівнянь (5.21), (5.22) до системи п'яти рівнянь відносно переміщень

$$[L]\{U(\alpha, \alpha^0, \varepsilon)\} = -\{P^0\}, \tag{5.35}$$

де $\left\{P^0\right\}^T = \dfrac{1}{B}\left\{T_1^0 \quad T_2^0 \quad T_3^0 \quad T_4^0 \quad T_5^0\right\}\delta\left(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon\right)\delta\left(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon\right);$

$$\left\{U\left(\alpha, \alpha^0, \varepsilon\right)\right\}^T = \left\{u_1\left(\alpha, \alpha^0, \varepsilon\right) \; u_2\left(\alpha, \alpha^0, \varepsilon\right) \; w\left(\alpha, \alpha^0, \varepsilon\right) \; \gamma_1\left(\alpha, \alpha^0, \varepsilon\right) \; \gamma_2\left(\alpha, \alpha^0, \varepsilon\right)\right\};$$

$[L]$ – операторна матриця системи рівнянь (5.27).

Шукаємо узагальнений (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язок Фур'є системи рівнянь (5.21)–(5.23) з правими частинами (5.33) у вигляді сум рядів

$$w = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} w_{km}^0 \Phi_{km}(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{1km}^0 \\ \gamma_{1km}^0 \end{Bmatrix} \Phi_{km}^1(\alpha), \tag{5.36}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{2km}^0 \\ \gamma_{2kim}^0 \end{Bmatrix} \Phi_{km}^2(\alpha).$$

Враховуючи тригонометричні розвинення дельтоподібних функцій

$$\delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon) = \frac{2}{l_1}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\sin\left(\lambda_{k1}\alpha_1^0\right)\sin\left(\lambda_{k1}\alpha_1\right), \tag{5.37}$$

$$\delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon) = \frac{2}{l_1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\cos\left(\lambda_{k1}\alpha_1^0\right)\cos\left(\lambda_{k1}\alpha_1\right)\right],$$

праві частини системи рівнянь (5.35) запишемо так

$$\begin{Bmatrix} P_1^0 \\ P_4^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}\begin{Bmatrix} T_1^0 \\ T_4^0 \end{Bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^1\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^1(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix} P_2^0 \\ P_5^0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}\begin{Bmatrix} T_2^0 \\ T_5^0 \end{Bmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^2\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}^2(\alpha), \tag{5.38}$$

$$P_3^0 = \frac{1}{B}T_3^0\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}(\alpha),$$

де $c_{km}(\varepsilon) = 1/l_1 l_2$, якщо $k = 0$ і $m = 0$, $c_{km}(\varepsilon) = 2/l_1 l_2\, \varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)$, якщо $k \geq 1$ і $m = 0$, $c_{km}(\varepsilon) = 2/l_1 l_2\, \varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)$, якщо $k = 0$ і $m \geq 1$, $c_{km}(\varepsilon) = 4/l_1 l_2\, \varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)$, якщо $k \geq 1$ і $m \geq 1$.

Якщо розвинення (5.36) і (5.38) підставити у систему рівнянь (5.35), то одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розвинення для переміщень

$$[L_{km}]\left\{U_{km}^{0}\right\}=-\left\{P_{km}^{0}\right\},$$

де $\left\{U_{km}^{0}\right\}^{T}=\left\{u_{1km}^{0}\;\; u_{2km}^{0}\;\; w_{km}^{0}\;\; \gamma_{1km}^{0}\;\; \gamma_{2km}^{0}\right\}$; $\begin{Bmatrix} P_{1km}^{0} \\ P_{4km}^{0} \end{Bmatrix}=\dfrac{1}{B}\begin{Bmatrix} T_{1}^{0} \\ T_{4}^{0} \end{Bmatrix}c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}^{1}\left(\alpha^{0}\right)$;

$$\begin{Bmatrix} P_{2km}^{0} \\ P_{5km}^{0} \end{Bmatrix}=\frac{1}{B}\begin{Bmatrix} T_{2}^{0} \\ T_{5}^{0} \end{Bmatrix}c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}^{2}\left(\alpha^{0}\right);\quad P_{3km}^{0}=\frac{1}{B}T_{3}^{0}c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}\left(\alpha^{0}\right).$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, запишемо вирази для коефіцієнтів розвинень переміщень (5.36) у матричній формі

$$\left\{U_{km}^{0}\right\}=\frac{c_{km}(\varepsilon)}{B}\left[\widehat{U}_{km}\right]\left[E_{km}\left(\alpha^{0}\right)\right]\left\{T^{0}\right\}, \tag{5.39}$$

де
$$\left[E_{km}\left(\alpha^{0}\right)\right]=\begin{bmatrix} \Phi_{km}^{1}\left(\alpha^{0}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{1}\left(\alpha^{0}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}\left(\alpha^{0}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{2}\left(\alpha^{0}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{2}\left(\alpha^{0}\right) \end{bmatrix};$$

$$\left[\widehat{U}_{km}\right]=\begin{bmatrix} u_{1km}^{1} & u_{1km}^{2} & u_{1km}^{3} & u_{1km}^{4} & u_{1km}^{5} \\ u_{2km}^{1} & u_{2km}^{2} & u_{2km}^{3} & u_{2km}^{4} & u_{2km}^{5} \\ w_{km}^{1} & w_{km}^{2} & w_{km}^{3} & w_{km}^{4} & w_{km}^{5} \\ \gamma_{1km}^{1} & \gamma_{1km}^{2} & \gamma_{1km}^{3} & \gamma_{1km}^{4} & \gamma_{1km}^{5} \\ \gamma_{2km}^{1} & \gamma_{2km}^{2} & \gamma_{2km}^{3} & \gamma_{2km}^{4} & \gamma_{2km}^{5} \end{bmatrix};$$

$\left\{T^{0}\right\}^{T}=\left\{T_{1}^{0}\;\; T_{2}^{0}\;\; T_{3}^{0}\;\; T_{4}^{0}\;\; T_{5}^{0}\right\}$; u_{ikm}^{j}, w_{km}^{j}, γ_{ikm}^{j} – множники коефіцієнтів розвинень переміщень, залежні тільки від параметрів k, m .

Вирази для переміщень подамо також у матричній формі

$$\left\{U\left(\alpha,\alpha^{0},\varepsilon\right)\right\}=\frac{1}{B}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\left[E_{km}(\alpha)\right]\left[\widehat{U}_{km}\right]\left[E_{km}\left(\alpha^{0}\right)\right]\left\{T^{0}\right\}. \tag{5.40}$$

Подання для сил і моментів знайдемо шляхом підстановки співвідношень (5.36) у формули (5.22). У підсумку отримаємо ряди, які згідно сформульованого вище твердження будуть рівномірно збігаються при $\varepsilon > 0$. Ряди, які відповідають першим частинним похідним від зусиль можуть не збігатися рівномірно.

Знайдені таким чином вирази для переміщень і зусиль визначають розв'язок задачі про локальне навантаження оболонки і є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язком Фур'є задачі (5.21)–(5.23) з правими частинами на взірець (5.33).

5.4.3. Узагальнений розв'язок (у розумінні слабкої збіжності) задачі про навантаження оболонки зосередженими силами та моментами. Границі при $\varepsilon \to 0$ від дельтоподібних функцій (5.33) моделюють дію на оболонку зосереджених сил і моментів.

Переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ у виразах (5.40) для зусиль і переміщень, одержимо узагальнений розв'язок Фур'є (у розумінні слабкої збіжності) задачі про навантаження оболонки зосередженими силами і моментами. Зокрема, для переміщень маємо

$$\left\{U\left(\alpha,\alpha^0\right)\right\}=\frac{1}{B}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\left[E_{km}(\alpha)\right]\left[\hat{U}_{km}\right]\left[E_{km}\left(\alpha^0\right)\right]\left\{T^0\right\}$$

або у термінах узагальнених частинних сум

$$\left\{U\left(\alpha,\alpha^0\right)\right\}=\frac{1}{B}\lim_{K\to\infty}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{K}c_{km}(\varepsilon)\left[E_{km}(\alpha)\right]\left[\hat{U}_{km}\right]\left[E_{km}\left(\alpha^0\right)\right]\left\{T^0\right\}\quad\left(K\varepsilon >> 1\right), \tag{5.41}$$

де $\varepsilon=\varepsilon(K)$ – нескінченно мала послідовність.

Узагальнений (у розумінні слабкої збіжності) розв'язок (5.41) є функцією Гріна задачі (5.21)–(5.23).

У разі навантаження оболонки силами і моментами $\left\{T\left(\alpha^0\right)\right\}^T=\left\{T_1\left(\alpha^0\right)\ T_2\left(\alpha^0\right)\ T_3\left(\alpha^0\right)\ T_4\left(\alpha^0\right)\ T_5\left(\alpha^0\right)\right\}$, розподіленими вздовж кривої Г, або силами і моментами $\left\{P\left(\alpha^0\right)\right\}^T=\left\{q_1\left(\alpha^0\right)\ q_2\left(\alpha^0\right)\ q_3\left(\alpha^0\right)\ m_1\left(\alpha^0\right)\ m_2\left(\alpha^0\right)\right\}$, розподіленими в області $S\subset\Pi$, для переміщень оболонки одержимо такі вирази

$$\left\{U(\alpha)\right\}=\frac{1}{B}\lim_{K\to\infty}\int_{\Gamma}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{K}c_{km}(\varepsilon)\left[E_{km}(\alpha)\right]\left[\hat{U}_{km}\right]\left[E_{km}\left(\alpha^0\right)\right]\left\{T\left(\alpha^0\right)\right\}dl\left(\alpha^0\right),$$

$$\left\{U(\alpha)\right\}=\frac{1}{B}\lim_{K\to\infty}\iint_{S}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{K}c_{km}(\varepsilon)\left[E_{km}(\alpha)\right]\left[\hat{U}_{km}\right]\left[E_{km}\left(\alpha^r\right)\right]\left\{P\left(\alpha^0\right)\right\}ds\left(\alpha^0\right)\quad\left(K\varepsilon >> 1\right), \tag{5.42}$$

де $dl\left(\alpha^0\right)$ і $ds\left(\alpha^0\right)$ – довжина елемента кривої і площа елемента області.

Подання для переміщень у вигляді границь (5.42) і аналогічні подання для сил і моментів є узагальненими (у розумінні слабкої збіжності) розв'язками відповідних крайових задач теорії оболонок. Подвійні ряди й інтеграли у формулах (5.42) рівномірно збігаються, а існування границь (5.42) забезпечується виконанням відповідних достатніх умов теорії послідовностей.

5.5. ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ФУР'Є КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МОДИФІКОВАНОЇ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ТИМОШЕНКА

Розглянемо шарнірно оперту оболонку, що за відсутності об'ємних сил перебуває під дією поверхневих навантажень $\sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)(i = 1, 2, 3)$. Напружено-деформований стан оболонки моделюємо рівняннями модифікованої теорії оболонок Тимошенка (2.57)–(2.64), які для ізотермічного наближення за сталих геометричних характеристик мають вигляд

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i = -\left(\sigma_{i3}^{+} - \sigma_{i3}^{-}\right),$$

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -h\left(\sigma_{i3}^{+} + \sigma_{i3}^{-}\right), \tag{5.43}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - \left(k_1 N_{11} + k_2 N_{22}\right) = -\left(\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-}\right);$$

$$N_{ii} = B\left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \left(k_i + \nu k_j\right) w\right] + 2\lambda h\left(\sigma_{33}^{+} + \sigma_{33}^{-}\right),$$

$$M_{ii} = D\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j}\right) + \frac{\lambda h^2}{3}\left(\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-}\right), \tag{5.44}$$

$$N_{ij} = \frac{B(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j}\right), \quad M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j}\right),$$

$$Q_i = \Lambda\left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i\right) + \frac{h}{6}\left(\sigma_{i3}^{+} + \sigma_{i3}^{-}\right) \quad \left(i, j = 1,2,\ i \neq j\right).$$

Таким чином, крайова задача полягає у відшуканні розв'язку системи рівнянь (5.43), (5.44) в області $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2): 0 < \alpha_1 < l_1,\ 0 < \alpha_2 < l_2\}$ за виконання граничних умов

$$w(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad N_n(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad u_\tau(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0,$$

$$M_n(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad \gamma_\tau(\alpha_{10}, \alpha_{20}) = 0, \quad \alpha_0(\alpha_{10}, \alpha_{20}) \in \partial\Pi, \tag{5.45}$$

де $N_n = N_{11}s_1^2 + N_{22}s_2^2 + 2N_{12}s_1s_2$; $M_n = M_{11}s_1^2 + M_{22}s_2^2 + 2M_{12}s_1s_2$; $u_\tau = -u_1 s_2 + u_2 s_1$; $\gamma_\tau = -\gamma_1 s_2 + \gamma_2 s_1$; $\vec{n} = \{s_1, s_2\}$ – одиничний вектор, нормальний до границі оболонки.

Визначимо умови, за виконання яких крайова задача (5.43)–(5.45) має розв'язок Фур'є і узагальнений (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язок Фур'є.

Насамперед знайдемо формальний розв'язок задачі. Систему рівнянь (5.43), (5.44) зведемо за аналогією до відповідної задачі теорії оболонок Тимошенка до такої системи п'яти рівнянь відносно переміщень

$$[L]\{U\} = -\{P_\sigma\}, \tag{5.46}$$

де $\{U\}^T = \{u_1 \;\; u_2 \;\; w \;\; \gamma_1 \;\; \gamma_2\}$; $\{P_\sigma\}^T = \left\{\dfrac{q_{1\sigma}}{B} \;\; \dfrac{q_{2\sigma}}{B} \;\; \dfrac{q_{3\sigma}}{B} \;\; \dfrac{m_{1\sigma}}{B} \;\; \dfrac{m_{2\sigma}}{B}\right\}$;

$$q_{i\sigma} = \sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^- + \lambda' h\left(\frac{\partial\sigma_{33}^+}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\sigma_{33}^-}{\partial\alpha_i}\right);\;\; q_{3\sigma} = \sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^- + \frac{h}{6}\left(\frac{\partial\sigma_{13}^+}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\sigma_{13}^-}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{h}{6}\left(\frac{\partial\sigma_{23}^+}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial\sigma_{23}^-}{\partial\alpha_2}\right);$$

$m_{i\sigma} = \dfrac{5h}{6}\left(\sigma_{i3}^+ + \sigma_{i3}^-\right) + \dfrac{\lambda' h^2}{3}\left(\dfrac{\partial\sigma_{33}^+}{\partial\alpha_i} - \dfrac{\partial\sigma_{33}^-}{\partial\alpha_i}\right)$ $(i = 1, 2)$; $[L]$ – операторна матриця системи рівнянь (5.24). У виразах для правих частин системи (5.46) нехтуємо доданками hk_i порівняно з одиницею.

Формальний розв'язок задачі (5.43)–(5.45) шукаємо у вигляді рядів (5.25). Для поверхневих напружень приймемо такі подання

$$\sigma_{13}^{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{13km}^{\pm}\Phi_{km}^{1}(\alpha), \quad \sigma_{23}^{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{23km}^{\pm}\Phi_{km}^{2}(\alpha), \tag{5.47}$$

$$\sigma_{33}^{\pm} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sigma_{33km}^{\pm}\Phi_{km}(\alpha).$$

Підставивши ряди (5.25), (5.47) у систему (5.46), прийдемо до такої системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$[L_{km}]\{U_{km}\} = -\{P_{\sigma km}\}, \tag{5.48}$$

де $\{P_{\sigma km}\}^T = \left\{\dfrac{q_{1\sigma km}}{B} \;\; \dfrac{q_{2\sigma km}}{B} \;\; \dfrac{q_{3\sigma km}}{B} \;\; \dfrac{m_{1\sigma km}}{B} \;\; \dfrac{m_{2\sigma km}}{B}\right\}$; $[L_{km}]$ – матриця системи рівнянь (5.27);

$$q_{1\sigma km} = \sigma_{13km}^+ - \sigma_{13km}^- + h\lambda'\lambda_{k1}\left(\sigma_{33km}^+ + \sigma_{33km}^-\right),$$
$$q_{2\sigma km} = \sigma_{23km}^+ - \sigma_{23km}^- + h\lambda'\lambda_{m2}\left(\sigma_{33km}^+ + \sigma_{33km}^-\right),$$
$$q_{3\sigma km} = \sigma_{33km}^+ - \sigma_{33km}^- - \frac{h}{6}\lambda_{k1}\left(\sigma_{13km}^+ + \sigma_{13km}^-\right) - \frac{h}{6}\lambda_{m2}\left(\sigma_{23km}^+ + \sigma_{23km}^-\right), \tag{5.49}$$
$$m_{1\sigma km} = \frac{5h}{6}\left(\sigma_{13km}^+ + \sigma_{13km}^-\right) + \frac{h^2\lambda'}{3}\lambda_{k1}\left(\sigma_{33km}^+ - \sigma_{33km}^-\right),$$

$$m_{2\sigma km} = \frac{5h}{6}\left(\sigma^{+}_{23km} + \sigma^{-}_{23km}\right) + \frac{h^2\lambda'}{3}\lambda_{m2}\left(\sigma^{+}_{33km} - \sigma^{-}_{33km}\right).$$

Розв'язавши систему рівнянь (5.48), переміщення та зусилля визначимо за формулами (5.25), (5.44).

Ряди (5.25) будуть:

а) розв'язком Фур'є задачі (5.43)–(5.45), якщо другі похідні від переміщень є рівномірно збіжними рядами;

б) узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язком Фур'є задачі (5.43)–(5.45), якщо перші похідні від переміщень є рівномірно збіжними рядами.

Розглянемо задачу, для якої вільні члени рівнянь допускають відокремлення змінних. Якщо напруження можна подати у вигляді добутків функцій, залежних від однієї координати, $\sigma^{\pm}_{ij} = \overline{\sigma}^{\pm}_{ij}(\alpha_1)\overline{\overline{\sigma}}^{\pm}_{ij}(\alpha_2)$, кожна з яких є періодичною неперервною функцією, а їх другі похідні задовольняють умови Діріхле, то для коефіцієнтів Фур'є цих функцій справедливі оцінки $\left|\overline{\sigma}^{\pm}_{ijk}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^3}\right)$, $\left|\overline{\overline{\sigma}}^{\pm}_{ijm}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{m^3}\right)$ і, відповідно, для коефіцієнтів (5.49) вільних членів рівнянь системи (5.46) $\left|q^{\sigma}_{1km}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2m^3}\right)$, $\left|q^{\sigma}_{2km}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^3m^2}\right)$, $\left|q^{\sigma}_{3km}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2m^2}\right)$, $\left|m^{\sigma}_{1km}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2m^3}\right)$, $\left|m^{\sigma}_{2km}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^3m^2}\right)$. Врахувавши ці оцінки разом з оцінками (5.28) у розвиненнях (5.25) для переміщень, переконуємося, що перші частинні похідні від переміщень і, відповідно, сили та моменти подаються у вигляді рівномірно збіжних рядів. Отже ряди (5.25) є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язком задачі (5.43)–(5.45).

Очевидно, що якщо періодичні функції $\overline{\sigma}^{\pm}_{ij}(\alpha_1)$, $\overline{\overline{\sigma}}^{\pm}_{ij}(\alpha_2)$ неперервні, а їх треті похідні задовольняють умови Діріхле, то другі частинні похідні від переміщень подаються рівномірно збіжними рядами і, відповідно, (5.25) є розв'язком Фур'є задачі. Отже, справедливе таке твердження.

Твердження 5.20. Нехай зовнішні поверхневі навантаження задаються у вигляді добутків двох функцій, кожна з яких є періодичною неперервною функцією. Тоді (5.25) є:

а) розв'язком Фур'є задачі (5.43)–(5.45), якщо похідні третього порядку від цих функцій задовольняють умови Діріхле;

б) узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язком Фур'є задачі (5.43)–(5.45), якщо похідні другого порядку від цих функцій задовольняють умови Діріхле.

5.6. ЛОКАЛЬНЕ НАВАНТАЖЕННЯ ТОНКОГО ШАРУ

Розглянемо ізотропний шар, що перебуває під дією локального поверхневого навантаження і взаємодіє з абсолютно жорсткою основою за умов ідеального контакту.

Напружено-деформований стан шару описується рівняннями теорії пружності у прямокутній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2$

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial \alpha_3} = 0,$$

$$\sigma_{ii} = 2G \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_3} \right), \tag{5.50}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = G \left(\frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3, \ i \neq j).$$

Шар має сталу товщину $2h$ і $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : 0 < \alpha_i < l_i ; \ \alpha_3 = 0\} \ (i = 1, 2)$ – його серединна поверхня. Вважаємо, що шар взаємодіє з жорсткою основою уздовж поверхні $\alpha_3 = -h$ і $2h << l_i$ (рис. 5.1).

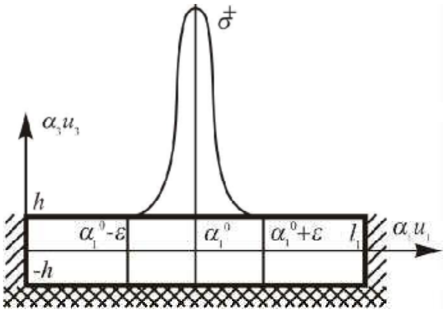

Рис. 5.1. Локальне навантаження шару

Згідно умов ідеального контакту

$$u_i(\alpha_1, \alpha_2, -h) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5.51}$$

На поверхні $\alpha_3 = h$ задані нормальні напруження і відсутні дотичні напруження, тобто

$$\sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_1, h) = \sigma^+(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{3i}(\alpha_1, \alpha_2, h) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{5.52}$$

Поверхневі нормальні напруження локалізовані у квадраті $\Pi_0 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) :$ $\left| \alpha_i - \alpha_i^0 \right| < \varepsilon, \ \alpha_3 = h \}$ $\left(\varepsilon << \frac{l_i}{2}, \ i = 1, 2 \right)$ і описуються дельтоподібною фінітною функцією

$$\sigma^+(\alpha_1, \alpha_2) = \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon) \delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon),$$

де

$$\delta\left(\alpha_i,\alpha_i^0,\varepsilon\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}g\left(\dfrac{\left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|\le\varepsilon,\\ 0, & \left|\alpha_i-\alpha_i^0\right|>\varepsilon;\end{cases}$$

$$g(t)=1+\cos(\pi t).$$

На бічних поверхнях шару задані однорідні умови

$$\begin{gathered}
u_1(\alpha_1,0,\alpha_3)=0, \quad u_1(\alpha_1,l_2,\alpha_3)=0,\\
u_2(0,\alpha_2,\alpha_3)=0, \quad u_2(l_1,\alpha_2,\alpha_3)=0,\\
u_3(0,\alpha_2,\alpha_3)=0, \quad u_3(l_1,\alpha_2,\alpha_3)=0,\\
u_3(\alpha_1,0,\alpha_3)=0, \quad u_3(\alpha_1,l_2,\alpha_3)=0,\\
\sigma_{11}(0,\alpha_2,\alpha_3)=0, \quad \sigma_{11}(l_1,\alpha_2,\alpha_3)=0,\\
\sigma_{22}(\alpha_1,0,\alpha_3)=0, \quad \sigma_{22}(\alpha_1,l_2,\alpha_3)=0.
\end{gathered}\tag{5.53}$$

Задача полягає у визначенні напружено-деформованого стану шару, зокрема, контактних напружень $\sigma_{33}(\alpha_1,\alpha_2,-h)=\sigma^-(\alpha_1,\alpha_2)$, $\sigma_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,-h)=\tau_i^-(\alpha_1,\alpha_2)$ $(i=1,2)$.

5.6.1. Побудова точного розв'язку задачі методом Фур'є. Задача відшукання розв'язку однорідної системи рівнянь (5.50) в області $\Pi^*=\Pi\times(-h<\alpha_3<h)$ за крайових умов (5.51)–(5.53) допускає відокремлення змінних за методом Фур'є [66].

Формальний розвязок задачі шукаємо у вигляді подвійних рядів за системами тригонометричних функцій

$$\begin{gathered}
\begin{Bmatrix}u_1\\ \sigma_{13}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}u_{1km}(\alpha_3)\\ \sigma_{13km}(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^1(\alpha),\\
\begin{Bmatrix}u_2\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}u_{2km}(\alpha_3)\\ \sigma_{23km}(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^2(\alpha),\\
\begin{Bmatrix}u_3\\ \sigma_{33}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}u_{3km}(\alpha_3)\\ \sigma_{33km}(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}(\alpha),\\
\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\end{Bmatrix}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{Bmatrix}\sigma_{11km}(\alpha_3)\\ \sigma_{22km}(\alpha_3)\end{Bmatrix}\Phi_{km}(\alpha),\\
\sigma_{12}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{12km}(\alpha_3)\Phi_{km}^0(\alpha),
\end{gathered}\tag{5.54}$$

де $\Phi_{km}(\alpha)=\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\Phi^0_{km}(\alpha)=\cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$;

$\Phi^1_{km}(\alpha)=\cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\Phi^2_{km}(\alpha)=\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$;

$\lambda_{k1}=k\pi/l_1$; $\lambda_{m2}=m\pi/l_2$.

За такого подання розв'язку умови (5.53) на бічних поверхнях шару задовольняються точно.

Для дельтоподібної функції у виразі (5.52) використаємо таке розвинення

$$\delta\left(\alpha_1,\alpha_1^0,\varepsilon\right)=\frac{2}{l_1}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\sin\left(\lambda_{k1}\alpha_1^0\right)\sin(\lambda_{k1}\alpha_1),$$

де $\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)=\int\limits_0^1 g(t)\cos(\lambda_{k1}\varepsilon t)dt=\dfrac{\sin(\lambda_{k1}\varepsilon)}{\lambda_{k1}\varepsilon}\left(1-\left(\dfrac{\lambda_{k1}\varepsilon}{\pi}\right)^2\right)^{-1}$; $g(t)=1+\cos(\pi t)$.

Цей ряд, приймаючи до уваги оцінку $\left|\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\right|=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$, рівномірно збігається при $\varepsilon\neq 0$. Поверхневе нормальне навантаження (5.52) з урахуванням такого розвинення для дельтоподібної функції набуде вигляду

$$\sigma^+=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}\left(\alpha^0\right)\Phi_{km}(\alpha), \tag{5.55}$$

де $c_{km}(\varepsilon)=4\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)/(l_1 l_2)$.

Підставивши формули (5.54) і (5.55) у рівняння системи (5.50), після деяких перетворень прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів (5.54). З цієї системи знайдемо

$$u_{1km}(\alpha_3)=c_{1km}\left(\lambda_{k1}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{1k}}{\Delta_{km}}ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$

$$+c_{2km}\left(\lambda_{k1}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{1k}}{\Delta_{km}}sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+c_{3km}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+c_{4km}sh(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$u_{2km}(\alpha_3)=c_{1km}\left(\lambda_{m2}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$

$$+c_{2km}\left(\lambda_{m2}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+c_{5km}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+c_{6km}sh(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$u_{3km}(\alpha_3)=c_{1km}\Delta_{km}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)+c_{2km}\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)+$$
$$+\frac{1}{\Delta_{km}}(c_{3km}\lambda_{k1}+c_{5km}\lambda_{m2})sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\frac{1}{\Delta_{km}}(c_{4km}\lambda_{k1}+c_{6km}\lambda_{m2})ch(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$-\frac{\sigma_{11km}(\alpha_3)}{2G}=\frac{c_{1km}}{\Delta_{km}}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+G}\Delta_{km}^2+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\lambda_{k1}^2\right)ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\right. \tag{5.56}$$
$$\left.+\lambda_{k1}^2\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right]+\frac{c_{2km}}{\Delta_{km}}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+G}\Delta_{km}^2+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\lambda_{k1}^2\right)sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\right.$$
$$\left.+\lambda_{k1}^2\Delta_{km}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right]+c_{3km}\lambda_{k1}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+c_{4km}\lambda_{k1}sh(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$-\frac{\sigma_{22km}(\alpha_3)}{2G}=\frac{c_{1km}}{\Delta_{km}}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+G}\Delta_{km}^2+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\lambda_{m2}^2\right)ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\right.$$
$$\left.+\lambda_{m2}^2\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right]+\frac{c_{2km}}{\Delta_{km}}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda+G}\Delta_{km}^2+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\lambda_{m2}^2\right)sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\right.$$
$$\left.+\lambda_{m2}^2\lambda_{km}\alpha_3 ch(\lambda_{km}\alpha_3)\right]+c_{5km}\lambda_{m2}ch(\lambda_{km}\alpha_3)+c_{6km}\lambda_{m2}sh(\lambda_{km}\alpha_3),$$

$$\frac{\sigma_{33km}(\alpha_3)}{2G}=c_{1km}\Delta_{km}\left(\frac{G}{\lambda+G}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$
$$+c_{2km}\Delta_{km}\left(\frac{G}{\lambda+G}sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$
$$+(c_{3km}\lambda_{k1}+c_{5km}\lambda_{m2})ch(\Delta_{km}\alpha_3)+(c_{4km}\lambda_{k1}+c_{6km}\lambda_{m2})sh(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$\frac{\sigma_{12km}(\alpha_3)}{2G}=c_{1km}\frac{\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}\left(\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$
$$+c_{21km}\frac{\lambda_{k1}\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}\left(\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$
$$+2(c_{3km}\lambda_{m2}+c_{5km}\lambda_{k1})ch(\Delta_{km}\alpha_3)+2(c_{4km}\lambda_{m2}+c_{6km}\lambda_{k1})sh(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$\frac{\sigma_{13km}(\alpha_3)}{2G}=c_{1km}\lambda_{k1}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$

$$+c_{2km}\lambda_{k1}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$

$$+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{3km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{k1}^2\right)+c_{5km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]sh(\Delta_{km}\alpha_3)+$$

$$+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{4km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{k1}^2\right)+c_{6km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]ch(\Delta_{km}\alpha_3),$$

$$\frac{\sigma_{23km}(\alpha_3)}{2G}=c_{1km}\lambda_{m2}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}sh(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 ch(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$

$$+c_{2km}\lambda_{m2}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}ch(\Delta_{km}\alpha_3)+\Delta_{km}\alpha_3 sh(\Delta_{km}\alpha_3)\right)+$$

$$+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{5km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{m2}^2\right)+c_{3km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]sh(\Delta_{km}\alpha_3)+$$

$$+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{6km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{m2}^2\right)+c_{4km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]ch(\Delta_{km}\alpha_3).$$

Тут $\Delta_{km}=\sqrt{\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2}$; $\lambda_{k1}^2=(\lambda_{k1})^2$, $\lambda_{m2}^2=(\lambda_{m2})^2$; c_{ikm} $\left(i=\overline{1,6}\right)$ – сталі інтегрування.

Для визначення сталих інтегрування маємо умови контакту (5.51) і навантаження у формі (5.52). Підставивши у ці умови формули (5.54), з урахуванням формул (5.56) одержимо послідовність систем шести лінійних алгебраїчних рівнянь

$$c_{1km}\left(\lambda_{k1}h\, th(\Delta_{km}h)+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{1k}}{\Delta_{km}}\right)-$$

$$-c_{2km}\left(\lambda_{k1}h+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{1k}}{\Delta_{km}}th(\Delta_{km}h)\right)+c_{3km}-c_{4km}th(\Delta_{km}h)=0,$$

$$c_{1km}\left(\lambda_{m2}h\, th(\Delta_{km}h)+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}\right)-$$

$$-c_{2km}\left(\lambda_{m2}h+\frac{\lambda+3G}{\lambda+G}\frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}th(\Delta_{km}h)\right)+c_{5km}-c_{6km}th(\Delta_{km}h)=0,$$

$$-c_{1km}\Delta_{km}h+c_{2km}\Delta_{km}h\, th(\Delta_{km}h)-$$

$$-\frac{1}{\Delta_{km}}\left(c_{3km}\lambda_{k1}+c_{5km}\lambda_{m2}\right)th(\Delta_{km}h)+\frac{1}{\Delta_{km}}\left(c_{4km}\lambda_{k1}+c_{6km}\lambda_{m2}\right)=0,$$

$$
\begin{gathered}
c_{1km}\lambda_{k1}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}th(\lambda_{km}h)+\lambda_{km}h\right)+c_{2km}\lambda_{k1}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}+\Delta_{km}h\,th(\Delta_{km}h)\right)+\\
+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{3km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{k1}^2\right)+c_{5km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]th(\Delta_{km}h)+\\
+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{4km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{k1}^2\right)+c_{6km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]=0,\\
c_{1km}\lambda_{m2}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}th(\Delta_{km}h)+\Delta_{km}h\right)+\\
+c_{2km}\lambda_{m2}\left(\frac{\lambda+2G}{\lambda+G}+\Delta_{km}h\,th(\Delta_{km}h)\right)+\\
+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{5km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{m2}^2\right)+c_{3km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]th(\Delta_{km}h)+\\
+\frac{2}{\Delta_{km}}\left[c_{6km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{m2}^2\right)+c_{4km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]=0,\\
c_{1km}\left(\frac{G}{\lambda+G}+\Delta_{km}h\,th(\Delta_{km}h)\right)+c_{2km}\left(\frac{G}{\lambda+G}th(\Delta_{km}h)+\Delta_{km}h\right)+\\
+\frac{2}{\lambda_{km}}\left[c_{6km}\left(\Delta_{km}^2+\lambda_{m2}^2\right)+c_{4km}\lambda_{k1}\lambda_{m2}\right]th(\Delta_{km}h)+c_{3km}\frac{\lambda_{k1}}{\Delta_{km}}+c_{5km}\frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}+\\
+\left(c_{4km}\frac{\lambda_{k1}}{\Delta_{km}}+c_{6km}\frac{\lambda_{m2}}{\Delta_{km}}\right)th(\Delta_{km}h)=\frac{\sigma_{33km}(h)}{2G\,\Delta_{km}ch(\Delta_{km}h)},
\end{gathered}
\tag{5.57}
$$

де $\sigma_{33km}(h)=c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^0)$.

Підставивши знайдені значення для сталих у формули (5.56) та (5.54), матимемо формальний розв'язок задачі.

Встановимо умови, за яких існує розв'язок Фур'є задачі (5.50)–(5.53) при $\varepsilon \neq 0$. Ряд (5.55) рівномірно збігається, оскільки згідно подання (5.18) за великих значень параметрів для його коефіцієнтів справджується оцінка

$$|c_{km}(\varepsilon)|=\frac{4}{l_1 l_2}|\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)||\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)|=\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^3 m^3}\right).$$

Приймаючи до уваги цю оцінку і порядок росту функцій $\dfrac{sh(\Delta_{km}\alpha_3)}{ch(\Delta_{km}h)}$, $\dfrac{ch(\Delta_{km}\alpha_3)}{ch(\Delta_{km}h)}$ $(|\alpha_3|<h)$ бачимо, що ряди (5.54) і ряди, одержані їх почленним диференціюванням

(відповідно до рівнянь (5.50)), рівномірно збігаються в області Π^*. Рівномірна збіжність рядів (5.54) у точках границі цієї області згідно з умовами (5.51), (5.53) також випливає із рівномірної збіжності розвинення (5.55).

Таким чином, якщо поверхневе навантаження можна подати у вигляді (5.52), то (5.54) є розв'язком Фур'є задачі (5.50)–(5.53).

Зауважимо, що розв'язок задачі у вигляді рядів (5.54) буде розв'язком Фур'є і за менш жорстких умов стосовно поверхневого навантаження, зокрема, якщо поверхневе навантаження моделюється дельтоподібною послідовністю з базовою функцією $g(t) = 2(1-t)$, для коефіцієнтів Фур'є якої справедлива оцінка $\left|c_{km}(\varepsilon)\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2 m^2}\right)$.

Границя при $\varepsilon \to 0$ сум рядів (5.54) є узагальненим розв'язком задачі про навантаження шару нормальною одиничною силою, зосередженою у точці,

$$\begin{gathered}
\begin{Bmatrix} u_1^* \\ \sigma_{13}^* \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} \begin{Bmatrix} u_{1km}(\alpha_3) \\ \sigma_{13km}(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^1(\alpha), \\
\begin{Bmatrix} u_2^* \\ \sigma_{23}^* \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} \begin{Bmatrix} u_{2km}(\alpha_3) \\ \sigma_{23km}(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^2(\alpha), \\
\begin{Bmatrix} u_3^* \\ \sigma_{33}^* \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} \begin{Bmatrix} u_{3km}(\alpha_3 \\ \sigma_{33km}(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha), \qquad (5.58) \\
\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{22}^* \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} \begin{Bmatrix} \sigma_{11km}(\alpha_3) \\ \sigma_{22km}(\alpha_3) \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha), \\
\sigma_{12}^* = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k=1}^{K}\sum_{m=1}^{K} \sigma_{12km}(\alpha_3)\,\Phi_{km}^0(\alpha) \quad (K\varepsilon >> 1).
\end{gathered}$$

Границі функцій (5.58) існують у замкнутій області Π^* за винятком точки $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$.

5.6.2. Побудова наближеного розв'язку задачі. Знайдемо наближений розв'язок сформульованої задачі про локальне навантаження шару. Нехай напружено-деформований стан шару описується системою диференціальних рівнянь (2.63), (2.64). Враховуючи рівності $k_i = 0,\ A_i = 1$ і приймаючи $\sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, -h) = \tau^-(\alpha_1, \alpha_2)$, $\sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h) = \sigma^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$, одержимо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = \tau_i^-, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -h\tau_i^-,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2}=-\sigma^{+}+\sigma^{-},$$

$$N_{ii}=-B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_j^2}\right)+h\lambda'\left(\sigma^{+}+\sigma^{-}\right),$$

$$N_{ij}=-B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+T_{ij}\,, \tag{5.59}$$

$$M_{ii}=-D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i^2}+\nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_j^2}\right)+\frac{h^2\lambda'}{3}\left(\sigma^{+}-\sigma^{-}\right),$$

$$M_{ij}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+H_{ij}\,,$$

$$Q_i=\Lambda'\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(w-\gamma)+\frac{h}{6}\tau_i^{-}\,,$$

$$T_{21}=-T_{12},\;\; H_{21}=-H_{12} \quad (i,j=1,2,\; i\neq j).$$

Для переміщень точок поверхні $\alpha_3=-h$ з (2.65) отримаємо такі формули

$$\frac{u_i(\alpha_1,\alpha_2,-h)}{h}=-\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}+\frac{1}{6}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}+\frac{5}{6}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}-\frac{5h}{12\Lambda'}\tau_i^{-}\,, \tag{5.60}$$

$$\frac{u_3(\alpha_1,\alpha_2,-h)}{h}=\frac{w}{h}-\lambda'\Delta u+\frac{h\lambda'}{3}\Delta\gamma-\frac{1}{3E_0'}\sigma^{+}-\frac{2}{3E_0'}\sigma^{-}\,,$$

де $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$.

Тангенціальні переміщення і кути повороту серединної поверхні визначаються за формулами $u_i=-\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_i}$, $\gamma_i=-\dfrac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}$ $(i=1,2)$. Приймаємо також, що існує потенціальна функція $\tau^{-}=\tau^{-}(\alpha_1,\alpha_2)$ для поля тангенціальних контактних напружень $\tau_i^{-}=-\dfrac{\partial \tau^{-}}{\partial \alpha_i}$ $(i=1,2)$.

Система п'ятнадцяти диференціальних рівнянь (5.59) містить сімнадцять невідомих функцій $u, w, \gamma, N_{ij}, M_{ij}, Q_i, T_{12}, H_{12}, \sigma^{-}, \tau^{-}$. Ще два рівняння одержимо шляхом підстановки формул (5.60) для переміщень в умови взаємодії шару з жорсткою основою (5.51)

$$
\Delta w - \frac{6}{h}\Delta u + 5\Delta\gamma + \frac{5h}{2\Lambda'}\Delta\tau^{-} = 0,
$$
$$
\frac{w}{h} - \lambda'\Delta u + \frac{h\lambda'}{3}\Delta\gamma - \frac{1}{3E_0'}\sigma^{+} - \frac{2}{3E_0'}\sigma^{-} = 0. \tag{5.61}
$$

Граничні умови для системи рівнянь (5.59), (5.61) одержимо із співвідношень (5.53) з урахуванням формул (2.57)

$$
u_2\big|_{\alpha_1=0} = 0,\ u_2\big|_{\alpha_1=l_1} = 0,\quad w\big|_{\alpha_1=0} = 0,\ w\big|_{\alpha_1=l_1} = 0,
$$
$$
N_{11}\big|_{\alpha_1=0} = 0,\ N_{11}\big|_{\alpha_1=l} = 0,\ M_{11}\big|_{\alpha_1=0} = 0,\ M_{11}\big|_{\alpha_1=l} = 0, \tag{5.62}
$$

$$
u_1\big|_{\alpha_2=0} = 0,\ u_1\big|_{\alpha_2=l_2} = 0,\quad w\big|_{\alpha_2=0} = 0,\ w\big|_{\alpha_2=l_2} = 0,
$$
$$
N_{22}\big|_{\alpha_2=0} = 0,\ N_{22}\big|_{\alpha_2=l_2} = 0,\ M_{22}\big|_{\alpha_2=0} = 0,\ M_{22}\big|_{\alpha_2=l_2} = 0.
$$

Таким чином задача полягає у розв’язанні неоднорідної системи рівнянь у частинних похідних (5.59), (5.61) за однорідних граничних умовах (5.62).

Знайдемо розв’язок Фур’є і узагальнений розв’язок Фур’є задачі (5.59), (5.61), (5.62). Шукаємо формальний розв’язок задачі у вигляді рядів, які задовольняють граничні умови (5.62),

$$
\begin{Bmatrix} N_{ii} \\ M_{ii} \\ \sigma^{-} \\ \tau^{-} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} N_{iikm} \\ M_{iikm} \\ \sigma_{km}^{-} \\ \tau_{km}^{-} \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha),\quad \begin{Bmatrix} N_{ij} \\ M_{ij} \\ T_{ij} \\ H_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} N_{ijkm} \\ M_{ijkm} \\ T_{ijkm} \\ H_{ijkm} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^{0}(\alpha), \tag{5.63}
$$

$$
\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha),\quad Q_i = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} Q_{ikm}\Phi_{km}^{i}(\alpha)\ \ (i, j = 1, 2,\ i \neq j).
$$

Введемо потенціал поля дотичних контактних напружень $\tau^{-} = \tau^{-}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\tau_i^{-} = -\dfrac{\partial\tau^{-}}{\partial\alpha_i}$. Тоді, виключивши зусилля, систему рівнянь (5.59), (5.61) зведемо до системи пяти рівнянь

$$
B\Delta\Delta u = \Delta\tau^{-} + h\lambda'\Delta\left(\sigma^{+} + \sigma^{-}\right),
$$
$$
D\Delta\Delta\gamma = \left(\sigma^{+} - \sigma^{-}\right) + \frac{h^2\lambda'}{3}\Delta\left(\sigma^{+} - \sigma^{-}\right) - h\Delta\tau^{-},
$$

$$D\Delta\Delta w = -h\left(1-\frac{D}{6\Lambda'}\Delta\right)\Delta\tau^{-} + \left(1-\frac{D}{\Lambda'}\Delta\right)\left(\sigma^{+}-\sigma^{-}\right), \tag{5.64}$$

$$\Delta w - \frac{6}{h}\Delta u + 5\Delta\gamma + \frac{5h}{2\Lambda'}\Delta\tau^{-} = 0,$$

$$w - h\lambda'\Delta u + \frac{h^2\lambda'}{3}\Delta\gamma - \frac{h}{3E_0'}\left(\sigma^{+}-\sigma^{-}\right) = 0,$$

яку зведемо до системи двох рівнянь

$$\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{D}{\Lambda'}-4\lambda' h^2\right)\Delta\right]\sigma^{-} - \frac{4}{3}\left(1-\frac{2D}{3\Lambda'}\Delta\right)h\Delta\tau^{-} = -\left(1-\frac{D}{6\Lambda'}\Delta\right)\sigma^{+},$$

$$\left[1-\left(\frac{D}{\Lambda}-\frac{2h^2\lambda'}{3}\right)\Delta + \left(\frac{4h^4(\lambda')^2}{9}+\frac{2hD}{3E_0'}\right)\Delta\Delta\right]\sigma^{-} + \left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{D}{\Lambda'}-4h^2\lambda'\right)\Delta\right]h\Delta\tau^{-} =$$

$$= \left[1-\left(\frac{D}{\Lambda}-\frac{2h^2\lambda'}{3}\right)\Delta - \left(\frac{2h^4(\lambda')^2}{9}+\frac{hD}{3E_0'}\right)\Delta\Delta\right]\sigma^{+}.$$

Далі, підставивши відповідні розвинення (5.63) у ці рівняння, приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів цих розвинень

$$\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{D}{\Lambda'}-4\lambda' h^2\right)\Delta_{km}^2\right]\sigma_{km}^{-} + \frac{4}{3}\left(1+\frac{2D}{3\Lambda'}\Delta_{km}\right)\Delta_{km}^2 h\tau_{km}^{-} = -\left(1+\frac{D}{6\Lambda'}\Delta_{km}^2\right)\sigma_{km}^{+},$$

$$\left[1+\left(\frac{D}{\Lambda}-\frac{2h^2\lambda'}{3}\right)\Delta_{km}^2 + \left(\frac{4h^4(\lambda')^2}{9}+\frac{2hD}{3E_0'}\right)\left(\Delta_{km}^2\right)^2\right]\sigma_{km}^{-} +$$

$$+\left[1+\frac{1}{6}\left(\frac{D}{\Lambda'}-4h^2\lambda'\right)\Delta_{km}^2\right]\Delta_{km}^2 h\tau_{km}^{-} = \tag{5.65}$$

$$= \left[1+\left(\frac{D}{\Lambda}-\frac{2h^2\lambda'}{3}\right)\Delta_{km}^2 - \left(\frac{2h^4(\lambda')^2}{9}+\frac{hD}{3E_0'}\right)\left(\Delta_{km}^2\right)^2\right]\sigma_{km}^{+},$$

де $\Delta_{km}^2 = (\lambda_{k1})^2 + (\lambda_{m2})^2$, $\sigma_{km}^{+} = c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^0)$, $c_{km}(\varepsilon) = 4\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)/(l_1 l_2)$.

Враховуючи оримані значення коефіцієнтів σ_{km}^{-}, τ_{km}^{-} з використанням формул (5.59), (5.63), (5.64) визначаємо коефіцієнти розвинень інших невідомих функцій. Зокрема, для коефіцієнтів розвинень потенціальних функцій і прогину маємо такі формули

$$u_{km} = -\frac{1}{B\Delta_{km}^2}\left[\tau_{km}^- + h\lambda'\left(\sigma_{km}^+ + \sigma_{km}^-\right)\right],$$

$$\gamma_{km} = \frac{1}{D\left(\Delta_{km}^2\right)^2}\left[h\Delta_{km}^2\tau_{km}^- + \left(1 - \frac{h^2\lambda'}{3}\Delta_{km}^2\right)\left(\sigma_{km}^+ - \sigma_{km}^-\right)\right],$$

$$w_{km} = \frac{1}{D\left(\Delta_{km}^2\right)^2}\left[h\left(1 + \frac{D}{6\Lambda'}\Delta_{km}^2\right)\Delta_{km}^2\tau_{km}^- + \left(1 + \frac{D}{\Lambda'}\Delta_{km}^2\right)\left(\sigma_{km}^+ - \sigma_{km}^-\right)\right].$$

Отже формальний розв’язок задачі у формі (5.63) знайдено.

Встановимо умови існування розв’язку Фур’є і узагальненого розв’язку Фур’є розглянутої задачі. Враховуючи нерівність $\Delta_{km}^2 \geq 2\lambda_{k1}\lambda_{m2}$, з системи рівнянь (5.65) отримаємо оцінки для коефіцієнтів $\sigma_{km}^-, \tau_{km}^-$ при великих значеннях параметрів k, m, а з використанням формул (5.59), (5.53) – оцінки для коефіцієнтів розвинень інших функцій. У підсумку отримаємо

$$w_{km} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{km}\right)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad \gamma_{km} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{km}\right)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad u_{km} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{km}\right)\left|\sigma_{km}^+\right|,$$

$$\sigma_{km}^- = \mathrm{O}(1)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad \tau_{km}^- = \mathrm{O}\left(\frac{1}{km}\right)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad Q_{1km} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{m}\right)\left|\sigma_{km}^+\right|,$$

$$Q_{2km} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k}\right)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad N_{11km} = \mathrm{O}(1)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad M_{11km} = \mathrm{O}(1)\left|\sigma_{km}^+\right|,$$

$$N_{12km} = \mathrm{O}(1)\left|\sigma_{km}^+\right|, \quad M_{12km} = \mathrm{O}(1)\left|\sigma_{km}^+\right|.$$

Звідси випливають *твердження*:

а) подання (5.63) при $\varepsilon > 0$ є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв’язком Фур’є задачі (5.59), (5.61), (5.62), якщо коефіцієнти ряду σ_{km}^+ функції $\sigma^+(\alpha_1, \alpha_2)$ задовольняють оцінку $\sigma_{km}^+ = \mathrm{O}\left(1/\left(k^s m^s\right)\right)$ і $s = 2$;

б) ряди (5.63) при $\varepsilon > 0$ є розв’язками Фур’є задачі (5.59), (5.61), (5.62), якщо для коефіцієнтів ряду функції (5.55) справедлива оцінка $\sigma_{km}^+ = \mathrm{O}\left(1/\left(k^s m^s\right)\right)$ і $s > 2$.

Для прикладу, якщо $\sigma_{km}^+ = \mathrm{O}\left(1/\left(k^s m^s\right)\right)$ і $s > 2$, то ряди шуканих функцій і їх частинних похідних, що входять у рівняннях системи (5.59), мажоруються збіжними числовими рядами і, відповідно, рівномірно збігаються. Зокрема, для розвинення функції $\partial N_{11}/\partial\alpha_1$ за урахування формул (5.59), (5.65) одержимо мажорантний ряд

$$\left|\frac{\partial N_{11}}{\partial \alpha_1}\right| \le \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{k1}N_{11km}\Phi_{km}^{1}(\alpha)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{k1}\left|N_{11km}\right|\left|\Phi_{km}^{1}(\alpha)\right| \le$$

$$\le A\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sigma_{km}^{+}\right|\lambda_{k1} \le A_0\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{k^{s-1}m^{s}},$$

де A, A_0 – сталі величини. Оскільки останній ряд у цій нерівності збігається при $s > 2$, то ряд функції $\partial N_{11}/\partial\alpha_1$ є рівномірно збіжним. Аналогічні оцінки можна отримати для інших невідомих функцій системи рівнянь (5.59).

Ґрунтуючись на цих твердженнях, і враховуючи, що для коефіцієнтів Фур'є поверхневого навантаження справедлива оцінка $\sigma_{km}^{+} = O\left(1/\left(k^s m^s\right)\right)$ $(s \ge 3)$, доходимо до висновку, що ряди (5.63) при $\varepsilon \ne 0$ є розв'язками Фур'є задачі (5.59), (5.61), (5.62).

Границі сум рядів (5.63) при $\varepsilon \to 0$ є узагальненими (у розумінні слабкої збіжності) розв'язками Фур'є задачі про дію на шар одиничної сили, прикладеної у точці $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^0, h\right)$, якщо для коефіцієнтів ряду функції (5.55) справедлива оцінка $\sigma_{km}^{+} = O\left(1/\left(k^s m^s\right)\right)$ і $s \ge 2$.

Зауважимо, що границі при $\varepsilon \to 0$ сум рядів (5.63) розбігаються у точках відрізка $\alpha_1 = \alpha_1^0, \alpha_2 = \alpha_2^0, -h \le \alpha_3 \le h$.

5.6.3. Дослідження числових розв'язків. Знайдено точний і наближений числовий розв'язки плоскої задачі для ізотропного шару ($\nu = 0{,}3$). На рис. 5.2 показано розподіли приведених контактних нормальних $\sigma = \sigma^{-}/(2G)$ (симетричні криві) та дотичних напружень $\tau = \tau^{-}/(2G)$ (несиметричні криві), які одержані з використанням рівнянь теорії пружності для $l/h = 20$ і $\varepsilon/h = 0{,}1;\ 1;\ 1{,}5$, $\alpha = \alpha_1/h$. Зазначимо, що параметр ε/h характеризує ширину області локалізації навантаження.

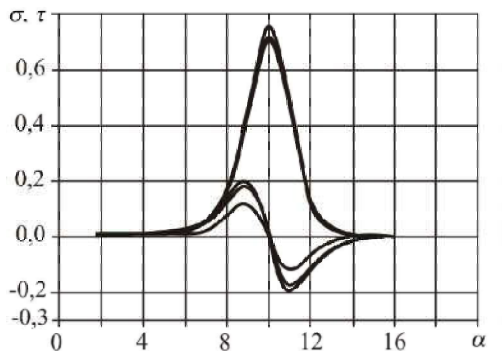

Рис.5.2. Контактні напруження для різних областей локалізації

Аналіз точного розв'язку задачі показує, що розподіл контактних напружень на поверхні контакту (на відстані $2h$ від області локалізації зовнішнього навантаження), практично не залежить від закону розподілу нормального навантаження в області локалізації, якщо тільки її ширина менша від товщини шару ($\varepsilon < h$).

Криві на рис. 5.3 ілюструють розподіл приведених контактних напружень $\sigma = \sigma^{-}/(2G)$ і $\tau = \tau^{-}/(2G)$ $(\alpha = \alpha_1/h)$ при $l/h = 20$ та $\varepsilon/h = 1{,}5$. Криві 2 та 4 відповідають нормальним та дотичним напруженням, обчисленим з використанням розв'язку задачі теорії пружності, а криві 1 та 3 – нормальним та дотичним напруженням, обчисленим на основі розв'язку задачі теорії оболонок.

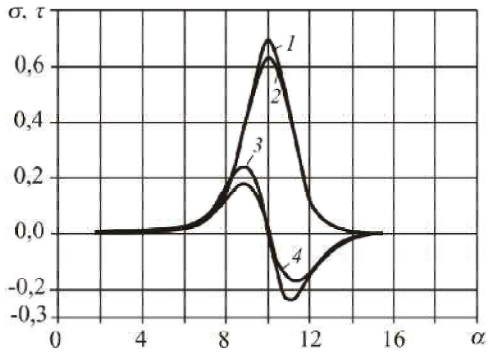

Рис.5.3. Контактні напруження (2, 4 – точний і 1, 3 – наближений розв'язки)

Одержаний у межах теорії оболонок розв'язок задачі про локальне навантаження шару є достатньо точним (із максимальною похибкою 5%), якщо локальна дія описується неперервною функцією з кусково-гладкою другою похідною і віддаль між найближчими точками границі області локалізації більша від товщини оболонки $(\varepsilon > h)$.

5.7. ТОНКЕ ПОКРИТТЯ ЗА ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВУ

Розглянемо задачу про локальний нагрів тонкого трансверсально-ізотропного покриття (криволінійного шару) постійної товщини $2h$, що взаємодіє за умов ідеального контакту з абсолютно твердим тілом. Покриття нагрівається внутрішніми джерелами, локалізованими в області і перебуває в умовах конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем. При цьому напруження, які виникають у покритті, мають локальний характер і згасають при наближенні до краю покриття [96].

5.7.1. Математична модель деформування покриття. Внаслідок ізотропності покриття у тангенціальних до серединної поверхні напрямках і за відсутності безпосереднього впливу температури на кутові деформації, приймаємо гіпотезу про нехтовну малість жорсткого повороту елемента покриття відносно нормалі до серединної поверхні. Тому для опису напружено-деформованого стану покриття скористаємось рівняннями узагальненої теорії оболонок Тимошенка за відсутності жорстких поворотів відносно нормалі до серединної поверхні (3.44)–(3.46).

Рівняння (3.44), (3.45) з урахуванням відсутності об'ємних сил і напружень на поверхні $\alpha_3 = h$, а також за умови потенціальності поля тангенціальних напружень на поверхні $\alpha_3 = -h$,

$$\sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, -h) = -\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_i} \quad \left(i = \overline{1, 2}\right), \tag{5.66}$$

мають вигляд

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_i},$$

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = h\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2), \tag{5.67}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = \sigma;$$

$$N_{ii} = -B\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_j^2} - (k_i + \nu k_j)w\right] + h\lambda'\sigma - B(1+\nu)\alpha_t T,$$

$$N_{ij} = -B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + T_{ij}, \quad T_{ij} = -T_{ji},$$

$$M_{ii} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_j^2}\right) - \frac{h^2\lambda'\sigma}{3},$$

$$M_{ij} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + H_{ij}, \quad H_{ij} = H_{ji}, \tag{5.68}$$

$$Q_i = -\Lambda'\frac{\partial}{\partial \alpha_i}(w - \gamma) - \frac{h}{6}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha_i} \quad (i, j = 1, 2, \ i \neq j),$$

Тут $\sigma = \sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_2, -h)$; $B = \dfrac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \dfrac{h^2 B}{3}$; $\Lambda' = \dfrac{5hG'}{3}$; $\lambda' = \dfrac{\nu' E}{(1-\nu)E'}$; $T = T(\alpha_1, \alpha_2)$ – температура; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення в серединній поверхні.

Переміщення точок серединної поверхні, кути повороту нормалі та переміщення лицевих поверхонь $\alpha_3 = \pm h$ визначаються за формулами

$$u_i = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_i}, \quad \gamma_i = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}; \tag{5.69}$$

$$\frac{w_i^-}{h} = \frac{5\tau_i}{36\Lambda'} - \frac{1}{6}\frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{5}{6}\gamma_i, \qquad \frac{w_i^+}{h} = -\frac{1}{h}\frac{\partial u}{\partial \alpha_i} - \frac{5h\tau_i}{18\Lambda'}, \tag{5.70}$$

$$\frac{w_3^-}{h} = \frac{\sigma}{2E_0'} + \lambda'\left[\Delta u - (k_1 + k_2)w\right] + (2\lambda'\alpha_t + \alpha_t')T,$$

$$\frac{w_3^+}{h} = \frac{w}{h} - \frac{\sigma}{6E_0'} + \frac{h\lambda'}{3}\Delta\gamma,$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $w_i^{\pm} = \dfrac{1}{2}\left[u_i(\alpha_1, \alpha_2, h) \pm u_i(\alpha_1, \alpha_2, -h)\right]$; $E_0' = \dfrac{(1-\nu)E'}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}$; α_t' – коефіцієнт теплового розширення у перпендикулярних до серединної поверхні напрямках.

Якщо співвідношення (5.68) підставити у рівняння (5.67) і врахувати формули (5.66) та (5.69), то отримаємо таку систему ключових рівнянь

$$B\left(-\Delta\Delta u + \Delta^{\nu} w\right) = \Delta N^t + \Delta\tau - h\lambda'\Delta\sigma,$$

$$D\Delta\Delta\gamma + \Lambda'\Delta(w - \gamma) = -\frac{5h}{6}\Delta\tau - \frac{h^3\lambda'}{3}\Delta\sigma, \tag{5.71}$$

$$\Lambda'\Delta(w-\gamma) + B\Delta^{\nu}u - Bk_0^2 w = -2\tilde{k}N^t + \left[1 + 2\tilde{k}h\lambda'\right]\sigma + \frac{h}{6}\Delta\sigma,$$

де $\Delta^{\nu} = (k_1 + \nu k_2)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + (k_2 + \nu k_1)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $\tilde{k} = (k_1 + k_2)/2$; $N^t = B(1+\nu)\alpha_t T$.

Для переміщень точок лицевих поверхонь із співвідношень (5.70) з урахуванням виразів (5.66) і (5.69) для напружень і переміщень отримаємо такі формули

$$\frac{w_i^-}{h} = -\frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(5\gamma + w + \frac{5h}{6\Lambda'}\tau\right), \quad \frac{w_i^+}{h} = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\frac{u}{h} - \frac{5h}{18\Lambda'}\tau\right),$$

$$\frac{w_3^-}{h} = \lambda'\left[\Delta u - 2\tilde{k}w\right] + \frac{1}{2E_0'}\sigma + (2\lambda'\alpha_t + \alpha_t')T \quad (i = 1, 2), \tag{5.72}$$

$$\frac{w_3^+}{h} = \frac{w}{h} + \frac{h\lambda'}{3}\Delta\gamma - \frac{1}{6E_0'}\sigma.$$

5.7.2. Математичне моделювання локальної теплової дії. Приймаємо, що температура не змінюється за товщинною координатою покриття. Для визначення температури $T = T(\alpha_1, \alpha_2)$ скористаємося спрощеною моделлю, яка описує процес теплопровідності у тонкостінному тілі [42]

$$\Delta T - \frac{\mu}{2h^2}(T - \theta) - \frac{2\tilde{k}}{h} T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\lambda_q}\Re, \tag{5.73}$$

де $\mu = \dfrac{h}{\lambda_q}\left(\alpha^+ - \alpha^-\right)$; $\theta = \dfrac{\alpha^+\theta^+ + \alpha^-\theta^-}{\alpha^+ + \alpha^-}$; $\alpha^\pm$, $\theta^\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі й температура середовища на зовнішніх поверхнях; λ_q – коефіцієнт теплопровідності; a – коефіцієнт температуропровідності; $\Re = \Re(\alpha_1, \alpha_2, t)$ – густина внутрішніх джерел.

Покриття нагрівається джерелами тепла, локалізованими в області $\Pi^r = \{(\alpha_1, \alpha_2):$ $\left|\alpha_1 - \alpha_1^r\right| \le \varepsilon,\ \left|\alpha_1 - \alpha_1^r\right| \le \varepsilon\}$. При цьому густина джерел задається формулою

$$\Re = I^r(t, \varepsilon_0)\delta(\alpha_1, \alpha_1^r, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^r, \varepsilon), \tag{5.74}$$

де

$$\delta(\alpha_i, \alpha_i^r, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon} g\left(\dfrac{\left|\alpha_i - \alpha_i^r\right|}{\varepsilon}\right), & \left|\alpha_i - \alpha_i^r\right| \le \varepsilon, \\ 0, & \left|\alpha_i - \alpha_i^r\right| > \varepsilon \end{cases} \tag{5.75}$$

– дельтоподібна функція; $g(t) = 1 + \cos(\pi t)$; ε – величина, яка співмірна з товщиною покриття і характеризує область локалізації навантаження; $I^r(t, \varepsilon_0)$ – функція, що характеризує залежність інтенсивності температурного джерела від часу t, $0 \le t < \infty$.

Функцію $I^r(t, \varepsilon_0) = I^r \delta(t, \varepsilon_0)$ означимо з допомогою не симетричної дельтоподібної функції

$$\delta(t, \varepsilon_0) = \frac{1}{\varepsilon_0\, m!}\left(\frac{t}{\varepsilon_0}\right)^m \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_0}\right) \tag{5.76}$$

або стрибкоподібної функції

$$S(t, \varepsilon_0) = \int_0^t \delta(\tau, \varepsilon_0) d\tau = 1 - \left[1 + \frac{1}{1!}\frac{t}{\varepsilon_0} + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\frac{t}{\varepsilon_0}\right)^m\right] \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_0}\right), \tag{5.77}$$

де I^r – задана величина; ε_0 – характеристика локалізації джерела із плином часу; m – натуральне число.

Відзначимо основні властивості функцій $\delta(t,\varepsilon_0)$ та $S(t,\varepsilon_0)$.

1. Якщо $f(x)$ – оригінал [100] і неперервна функція справа у точці $x=0$, то

$$\lim_{\varepsilon_0\to 0}\int_0^\infty f(t)\,\delta(t,\varepsilon_0)\,dt = f(+0),$$

тобто $\delta(t,\varepsilon_0)$ – дельтоподібна функція.

2. Максимальне значення функції (5.76) досягається у точці $t_0 = m\varepsilon_0$ і дорівнює

$$\delta(t_0,\varepsilon_0) = \frac{1}{m!\varepsilon_0} m^m \exp(-m).$$

3. Границею при $\varepsilon_0 \to 0$ функції $S(t,\varepsilon_0)$ є функція Хевісайда

$$\lim_{\varepsilon_0\to 0} S(t,\varepsilon_0) = S_+(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

4. Функції (5.76), (5.77) при $\varepsilon_0 \ne 0$ є нескінченно диференційованими функціями на проміжку $(0,\infty)$.

5.7.3. Локальний нагрів покриття. Розглянемо задачу про локальний нагрів покриття джерелами тепла густини (5.74) за умови рівності коефіцієнтів тепловіддачі через зовнішні поверхні $(\mu = 0)$.

Відповідну крайову задачу формулюємо в області $\Pi \times \mathrm{Z}$, де $\Pi = \{(\alpha_1,\alpha_2):\ 0<\alpha_1<l_1,\ 0<\alpha_2<l_2\}$, $\mathrm{Z} = \{t:\ 0<t<\infty\}$, для достатньо великих значень параметрів l_1, l_2. Сформульовану таким чином задачу можна розв'язати у два етапа.

На першому етапі, виходячи із рівняння (5.73), розглядаємо крайову задачу теплопровідності. За відомого розподілу температури на другому етапі розв'язуємо крайову задачу теорії оболонок.

Для визначення поля температури маємо

$$\Delta T - \frac{2\tilde{k}}{h}T - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda_q}\Re,\ \ T=0 \text{ при } t=0,\ T=0 \text{ на } \partial\Pi. \tag{5.78}$$

Для визначення напружено-деформованого стану покриття маємо систему рівнянь (5.67), (5.68), умови контакту

$$u_i(\alpha_1,\alpha_2,-h,t) = 0\ (i=1,2,3),\ \ (\alpha_1,\alpha_2)\in\Pi \tag{5.79}$$

і граничні умови

$$w=0,\ u=0,\ \gamma=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}=0,\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2}=0 \text{ на } \partial\Pi. \tag{5.80}$$

Тут $\partial/\partial n$ – похідна за напрямком нормалі до $\partial\Pi$. Зазначимо, що невідомі функції, які входять у систему рівнянь (5.67), (5.68), від часу залежать параметрично.

Умови контакту (5.79) з урахуванням формул (5.72) у розгорнутому вигляді є такими

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{u}{h}+\frac{w}{6}+\frac{5\gamma}{6}+\frac{5h\tau}{12\Lambda'}\right)=0,$$

$$\left(1+2h\lambda'\right)\frac{w}{h}-\lambda'\Delta u+\frac{h\lambda'}{3}\Delta\gamma-\frac{2\sigma}{3E_0'}=\left(2\lambda'\alpha_t+\alpha_t'\right)T. \tag{5.81}$$

Формальний розв'язок крайової задачі (5.78) шукаємо у вигляді ряду

$$T(\alpha_1,\alpha_2,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}T_{km}(t)\,\Phi_{km}(\alpha), \tag{5.82}$$

де $\left\{\Phi_{km}(\alpha)=\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)\right\}_{k,m=1}^{\infty}$; $\lambda_{k1}=k\pi/l_1$, $\lambda_{m2}=m\pi/l_2$. Зауважимо, що за такого подання температура задовольняє однорідні граничні умови (5.80).

Густину джерел розвинемо за системою функцій $\left\{\Phi_{km}(\alpha)\right\}_{k,m=1}^{\infty}$. Співвідношення (5.74) з урахуванням формул (5.37) для дельтоподібних функцій запишемо у вигляді

$$\Re=I^r(t)\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\,\Phi_{km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha), \tag{5.83}$$

де $c_{km}(\varepsilon)=\dfrac{4}{l_1l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)$; $\varphi(\lambda)=\dfrac{\sin\lambda}{\lambda}\left(1-\left(\dfrac{\lambda}{\pi}\right)^2\right)^{-1}$.

Підставивши розвинення (5.82), (5.83) у рівняння (5.78), отримаємо формулу для визначення шуканих коефіцієнтів T_{km}

$$T_{km}(t)=\frac{aI^r c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^r)}{\lambda_q\left(a\varepsilon_0\Delta_{km}^h-1\right)}\left[\exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_0}\right)-\exp\left(-a\Delta_{km}^h t\right)\right]. \tag{5.84}$$

Тут $\Delta_{km}^2=\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2$; $\lambda_{k1}^2=(\lambda_{k1})^2$, $\lambda_{m2}^2=(\lambda_{m2})^2$; $\Delta_{km}^h=\Delta_{km}^2+2\tilde{k}/h$.

Співвідношення (5.82) для температури з урахуванням виразу (5.84) запишемо так

$$T=I^r\sum_{k,m=1}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\,\hat{T}_{km}(t,\varepsilon_0)\Phi_{km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha), \tag{5.85}$$

де $\hat{T}_{km}(t,\varepsilon_0)=\dfrac{a}{\lambda_q}\dfrac{\exp\left(-\dfrac{t}{\varepsilon_0}\right)-\exp\left(-a\Delta_{km}^h t\right)}{a\varepsilon_0\Delta_{km}^h-1}$.

Отримаємо оцінки для коефіцієнтів T_{km} у розвиненні температури при великих значеннях параметрів k, m. Якщо у співвідношенні (5.84) врахувати, що $\left|c_{km}(\varepsilon)\right| = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^3 m^3}\right)$, то для T_{km} матимемо

$$\left|T_{km}\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4 m^4}\right). \tag{5.86}$$

На основі цієї оцінки можемо стверджувати, що ряд (5.85), його частинні похідні другого порядку по α_i $(i = 1, 2)$, а також його перша похідна по t мажоруються збіжними числовими рядами і тому рівномірно збігаються в області $\Pi \times Z$. В силу цієї ж оцінки, ряд (5.85) є рівномірно збіжним при $t \to 0$ і у точках границі $\partial\Pi$.

Таким чином, можна стверджувати, що сума ряду (5.85) при $\varepsilon \neq 0, \varepsilon_0 \neq 0$ є розв'язком Фур'є задачі (5.78).

Для знаходження розв'язку крайової задачі (5.67), (5.68), (5.80) та (5.81) скористаємось ключевою системою рівнянь (5.71). Формальний розв'язок задачі (5.71), (5.80), (5.81) шукаємо у вигляді

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \\ \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = I^r \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \\ \sigma_{km} \\ \tau_{km} \end{Bmatrix} c_{km}(\varepsilon) \widehat{T}_{km}(t, \varepsilon_0)\, \Phi_{km}(\alpha^r)\, \Phi_{km}(\alpha), \tag{5.87}$$

Для визначення коефіцієнтів розвинень (5.87) одержимо таку систему лінійних рівнянь

$$\begin{gathered} B\left[\left(\Delta_{km}^2\right)^2 u_{km} + \Delta_{km}^{\nu} w_{km}\right] + h\lambda' \Delta_{km}^2 \sigma_{km} + \Delta_{km}^2 \tau_{km} = (1+\nu) B \alpha_t \Delta_{km}^2 \widehat{T}_{km}(t, \varepsilon_0), \\ D\left(\Delta_{km}^2\right)^2 \gamma_{km} - \Lambda' \Delta_{km}^2 (w_{km} - \gamma_{km}) - \frac{h^2 \lambda'}{3} \Delta_{km}^2 \sigma_{km} - \frac{5h}{6} \Delta_{km}^2 \tau_{km} = 0, \\ \Lambda' \Delta_{km}^2 (w_{km} - \gamma_{km}) + B\left(\Delta_{km}^{\nu} u_{km} + k_0^2 w_{km}\right) + \left(1 + 2\widetilde{k} h \lambda'\right) \sigma_{km} - \\ - \frac{h}{6} \Delta_{km}^2 \tau_{km} = 2\widetilde{k} (1+\nu) B \alpha_t \widehat{T}_{km}(t, \varepsilon_0), \\ \left(1 + 2\widetilde{k} h \lambda'\right) \frac{w_{km}}{h} + \lambda' \Delta_{km}^2 u_{km} - \frac{h\lambda'}{3} \Delta_{km}^2 \gamma_{km} - \frac{2}{3E_0'} \sigma_{km} = \left(2\lambda' \alpha_t + \alpha_t'\right) \widehat{T}_{km}(t, \varepsilon_0), \\ w_{km} - 6\frac{u_{km}}{h} + 5\gamma_{km} + \frac{5h}{2\Lambda'} \sigma_{km} = 0, \end{gathered} \tag{5.88}$$

де $\Delta_{km}^{\nu} = (k_1 + \nu k_2)\lambda_{k1}^2 + (k_2 + \nu k_1)\lambda_{m2}^2$.

Якщо одержані з системи рівнянь (5.88) вирази для коефіцієнтів підставити у формули (5.87), то отримаємо формальний розв'язок задачі. Покажемо, що у разі подання коефіцієнтів розкладу у ряд температури у вигляді (5.85) ряди (5.83) є розв'язками Фур'є задачі (5.67), (5.68), (5.80), (5.81). Для коефіцієнтів системи (5.88) маємо оцінки

$$|u_{km}| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{km}\right)|T_{km}|,\ |\gamma_{km}| = \mathrm{O}\left(\left(\frac{1}{km}\right)\right)|T_{km}|,$$

$$|w_{km}| = \mathrm{O}(1)|T_{km}|,\ |\sigma_{km}| = \mathrm{O}(1)|T_{km}|,\ |\tau_{km}| = \mathrm{O}(1)|T_{km}|,$$

або з урахуванням (5.87)

$$|u_{km}| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^5 m^5}\right),\quad |\gamma_{km}| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^5 m^5}\right),\quad |w_{km}| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4 m^4}\right),$$

$$|\sigma_{km}| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4 m^4}\right),\quad |\tau_{km}| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^4 m^4}\right). \tag{5.89}$$

Згідно з узагальненим принципом суперпозиції формули (5.87) задають розв'язок Фур'є задачі (5.67), (5.68), (5.80), (5.81), якщо тричі почленно продиференційовані по $\alpha_i\ (i = 1, 2)$ розвинення функцій u, γ, w рівномірно збігаються в області Π. З перших трьох оцінок (5.89) випливає, що функціональні ряди для частинних похідних третього порядку від функцій u, γ, w мажоруються збіжними рядами $A\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} 1\big/\left(k^{5-l} m^{5-s}\right)$ в області $\Pi \times [0, \infty)$, де $A -$ стала величина; $l, s -$ порядок похідних по α_1, α_2 відповідно. Таким чином, ряди (5.85), (5.87) при $\varepsilon \neq 0,\ \varepsilon_0 \neq 0$ задають розв'язок Фур'є крайової задачі (5.67), (5.68), (5.80), (5.81).

5.7.4. Локальний нагрів плоского покриття. Для плоского покриття $(k_1 = k_2 = 0)$ система рівнянь (5.88) зводиться до системи двох рівнянь

$$a_{11}\tau_{km} + a_{12} h\sigma_{km} = -(1+\nu)\alpha_t B\widehat{T}_{km}(t, \varepsilon_0),$$

$$a_{21}\tau_{km} + a_{22} h\sigma_{km} = [(1-\nu)\lambda'\alpha_t + \alpha_t']B\widehat{T}_{km}(t, \varepsilon_0), \tag{5.90}$$

де $a_{11} = -4\left(1 + \dfrac{h^2 B}{9\Lambda'}\Delta_{km}^2\right),\ a_{12} = a_{21} = \dfrac{B}{6\Lambda'} - 2\lambda' + \dfrac{3}{h^2}\dfrac{1}{\Delta_{km}^2},$

$$a_{22} = -\left\{\frac{3}{\left(h^2\Delta_{km}^2\right)^2} + \left(\frac{B}{\Lambda'} - 2\lambda'\right)\frac{1}{h^2\Delta_{km}^2} + \frac{4}{3}\left[(\lambda')^2 + \frac{B}{2hE_0'}\right]\right\}.$$

Розв'зком цієї системи є

$$\tau_{km} = -\frac{a_{22}(1+\nu)\alpha_t + a_{12}\left[(1-\nu)\lambda'\alpha_t + \alpha_t'\right]}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} B\widehat{T}_{km}(t,\varepsilon_0),$$

$$\sigma_{km} = \frac{a_{21}(1+\nu)\alpha_t + a_{11}\left[(1-\nu)\alpha_t + \alpha_t'\right]}{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})h} B\widehat{T}_{km}(t,\varepsilon_0).$$

При цьому для контактних напружень маємо такі вирази

$$\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,-h) = -\sum_{k,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\lambda_{k1}\tau_{km}\widehat{T}_{km}(t,\varepsilon_0)\Phi_{km}(\alpha^r)\cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2),$$

$$\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,-h) = -\sum_{k,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\lambda_{2m}\tau_{km}\widehat{T}_{km}(t,\varepsilon_0)\Phi_{km}(\alpha^r)\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2),$$

$$\sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,-h) = \sum_{k,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\sigma_{km}\widehat{T}_{km}(t,\varepsilon_0)\Phi_{km}(\alpha^r)\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2).$$

Знайдено та проаналізовано числовий розв'язок задачі про локальний нагрів плоского ізотропного $(\nu = 0{,}3)$ покриття джерелами тепла, локалізованими в області $\Pi_0 = \{(\alpha_1,\alpha_2)\colon |\alpha_1 - l_1/2| < \varepsilon,\ |\alpha_2 - l_2/2| < \varepsilon\}$.

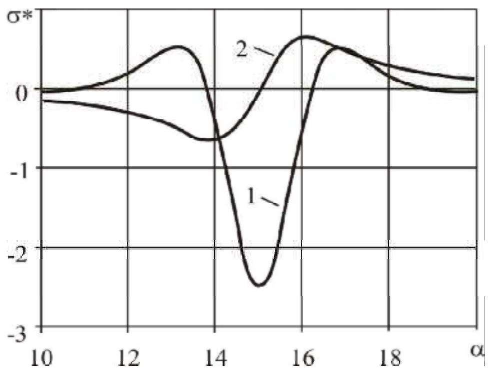

Рис. 5.4. Контактні напруження за локального нагріву шару

На рис. 5.4 показані приведені контактні нормальні (крива 1) $\sigma_3^* = \dfrac{hl_1l_2\lambda_q\sigma_3}{4BI_0a(1+\nu)\alpha_t}$ і тангенціальні (крива 2) $\sigma_2^* = \dfrac{hl_1l_2\lambda_q\sigma_2}{4BI_0a(1+\nu)\alpha_t}$ напруження залежно від координати $\alpha = \alpha_2$ при $\alpha_1 = l_1/2$ і $t/\varepsilon_0 = 0{,}09$. Криві на рис. 5.5 ілюструють залежність приведених нормальних і тангенціальних напружень від часової координати $\tau = t/\varepsilon_0$ у точках $(15h;15h)$ (крива 1) і $(15h;16h)$ (крива 2). Максимальних значень нормальні й тангенціальні напруження досягають в околі границі області локалізації навантаження. Зі зміною діаметра області локалізації характер розподілу напружень не змінюється.

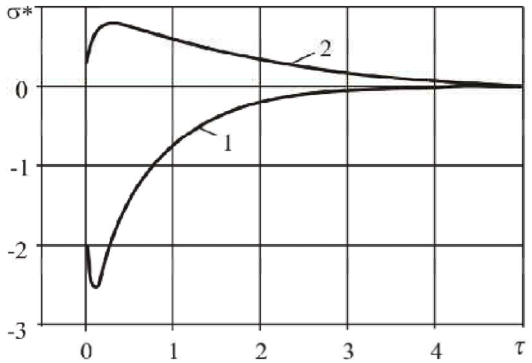

Рис. 5.5. Залежність контактних напружень від часу

Проведені у підрозділі 5.6 числові дослідження, показали, що побудована математична модель покриття є ефективною і достатньо точною у практичних застосуваннях, якщо справджується умова $\varepsilon > h$. Однак, згідно з послідовнісним підходом до моделювання напружено-деформованого стану локально-навантажених тонкостінних елементі, якщо джерела тепла лінійно розподілені за товщиною шару, то запропонована модель покриття може бути використана і за умови $\varepsilon \le h$.

РОЗДІЛ 6

ГРАНИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Важливою умовою ефективного застосування методу граничних інтегральних рівнянь до розв’язування крайових задач теорії оболонок є зображення в явному вигляді сингулярних розв’язків відповідних диференціальних рівнянь. Розвиткові цього методу присвячені роботи [4, 18, 40, 44, 46, 88, 105], в яких сформульовано граничні інтегральні рівняння і одержано числові розв’язки низки задач теорії пружності. Дослідженню розв’язків задач для багатозв’язних оболонок присвячені роботи [5, 45, 55, 109, 114, 120], в яких використовуються сингулярні розв’язки відповідних варіантів рівнянь теорії оболонок.

У даному розділі, виходячи із послідовнісного подання сингулярних розв’язків рівнянь теорії пологих оболонок Тимошенка, метод інтегральних рівнянь застосовано до розв’язування крайових задач про власні та вимушені коливання одно- та двозв’язних оболонок. Прийнята у цій теорії гіпотеза про нехтовну малість жорстких поворотів (відносно нормалі до серединної поверхні) еквівалентна гіпотезі (прийнятою у теорії оболонок [21, 63]) про домінуючий вплив на основні форми і частоти коливань інерційності елемента оболонки (у напрямку нормалі до серединної поверхні) порівняно з інерційністю у тангенціальних напрямках та кутовою інерційністю. Відповідна вихідна система рівнянь зводиться до системи трьох ключових рівнянь відносно прогину і двох потенціалів поля тангенціальних (до серединної поверхні) узагальнених переміщень. Крайові задачі для однозв’язної області у межах цієї теорії зводяться до системи трьох інтегральних рівнянь. Числові розв’язки інтегральних рівнянь будуються методом колокацій з використанням лінійної дискретизації границі і густин. Розглядаються також числові схеми методу колокацій для інтегральних рівнянь крайових задач з використанням рівнянь класичної теорії оболонок за умови нехтування нормальними жорсткими поворотами.

6.1. КОЛИВАННЯ МЕМБРАНИ

Розглянемо задачу про усталені коливання мембрани. Рівняння коливань мембрани запишемо у вигляді системи рівнянь першого роду

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2}+\theta^2 u=-f_0(\alpha),$$

$$Q_1=\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, \quad Q_2=\frac{\partial u}{\partial \alpha_2}, \tag{6.1}$$

де $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in D$; D – обмежена область з границею L (див. рис.6.1); θ – приведена частота вимушених коливань; u, Q_1, Q_2 – амплітуди прогину мембрани і приведених мембранних сил; $f_0(\alpha)$ – амплітуда коливань поперечної сили.

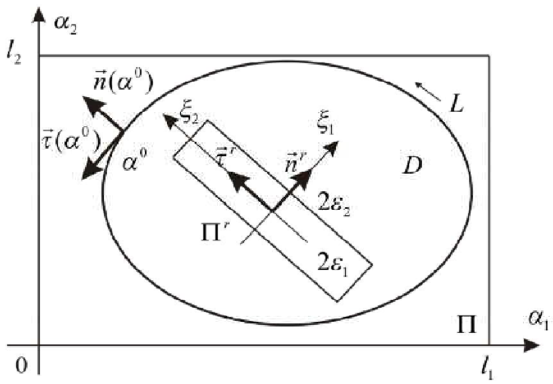

Рис.6.1. Геометрія області

Граничні умови формулюємо у змішаній формі

$$u=f_1(\alpha^0), \quad \alpha^0\in L_1,$$

$$Q_n=f_2(\alpha^0), \quad \alpha^0\in L_2, \tag{6.2}$$

де $Q_n=\dfrac{\partial u}{\partial n}=\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_1}n_1+\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_2}n_2$; L_1, L_2 – дві взаємно доповнюючі частини кривої L; $\vec{n}=\{n_1,n_2\}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до L; $f_1(\alpha^0)$, $f_2(\alpha^0)$ – амплітуди коливань заданих на границі величин.

Зауважимо, що крайова задача (6.1), (6.2) також описує поперечний зсув пластини. При цьому величини Q_i є амплітудами приведених зрізувальних сил.

6.1.1. Функція Гріна рівняння коливань для прямокутника. Нехай $\Pi = \{(\alpha_1;\alpha_2): 0 < \alpha_1 < l_1,\ 0 < \alpha_2 < l_2\}\ (0 < l_i < \infty)$ – прямокутник (див. рис. 6.1), що містить область $D, D \subset \Pi$.

Розглянемо систему рівнянь (6.1) з правою частиною першого рівняння у вигляді дельтоподібної фінітної функції двох змінних

$$f_0 = \delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} g_1\left(\dfrac{|\xi_1|}{\varepsilon_1}\right) g_2\left(\dfrac{|\xi_2|}{\varepsilon_2}\right), & \alpha \in \Pi^r, \\ 0, & \alpha \notin \Pi^r. \end{cases} \tag{6.3}$$

Тут $\alpha_1 = \alpha_1^r + \xi_1 n_1^r + \xi_2 \tau_1^r$, $\alpha_2 = \alpha_2^r + \xi_1 n_2^r + \xi_2 \tau_2^r$ – формули переходу до локальної системи координат; $\Pi^r\ (\Pi^r \subset \Pi)$ – прямокутник з центром у точці $\alpha^r = (\alpha_1^r;\alpha_2^r)$ і сторонами $2\varepsilon_1 \neq 0,\ 2\varepsilon_2 \neq 0$, орієнтованими за взаємно ортогональними одиничними векторами $\vec{n} = \{n_1^r, n_2^r\}$, $\vec{\tau} = \{\tau_1^r, \tau_2^r\}$ $(\tau_1 = -n_2, \tau_2 = n_1)$; $g_1(\alpha)$, $g_2(\alpha)$ – базові функції дельтоподібних функцій (5.3) – функції, що визначають закон розподілу навантаження за відповідними напрямками.

Рівнодійна сила навантаження (6.3), внаслідок умови (5.4) дорівнює одиниці,

$$\iint_{\Pi^r} \delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) ds(\alpha) = \int_0^1 g_1(t)dt \int_0^1 g_2(t)dt = 1.$$

Формальний розв'язок системи рівнянь (6.1) з правою частиною (6.3), що задовольняє однорідні граничні умови

$$u(\alpha) = 0, \quad \alpha \in \partial\Pi, \tag{6.4}$$

шукаємо у вигляді рядів за системою тригонометричних функцій, ортогональних у прямокутнику Π,

$$\{\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)\}_{k,m=1}^{\infty}, \tag{6.5}$$

де $\lambda_{k1} = \dfrac{k\pi}{l_1};\ \lambda_{m2} = \dfrac{m\pi}{l_2}.$

Функцію (6.3) при $\varepsilon \neq 0$ подамо у вигляді подвійного ряду Фур'є

$$\delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \Psi_{km}(\alpha^r, \varepsilon) \Phi_{km}(\alpha), \tag{6.6}$$

де

$$\Psi_{km}(\alpha^r, \varepsilon) = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\{\varphi_1[\varepsilon_1(\lambda_{k1}n_1^r - \lambda_{m2}n_2^r)]\varphi_2[\varepsilon_2(\lambda_{k1}\tau_1^r - \lambda_{m2}\tau_2^r)]\cos(\lambda_{k1}\alpha_1 - \lambda_{m2}\alpha_2) - \tag{6.7}$$

$$- \varphi_1[\varepsilon_1(\lambda_{k1}n_1^r + \lambda_{m2}n_2^r]\varphi_2[\varepsilon_2(\lambda_{k1}\tau_1^r + \lambda_{m2}\tau_2^r)]\cos(\lambda_{k1}\alpha_1 + \lambda_{m2}\alpha_2)\};$$

$\varphi_i(t)$ – функції, що визначаються через базові функції за формулою $\varphi_i(t) = \int\limits_0^1 g_i(\xi)\cos(\xi t)d\xi$.

Зокрема, якщо $g_i(\xi) = 2(1-\xi)$ $(0 \le \xi \le 1)$, то $\varphi_i(t) = \left[\dfrac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2$.

Невідомі функції задачі (6.1), (6.3) (6.4) ровинемо за системою (6.5)

$$U^*(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \sum_{k,m=1}^{\infty} U^*_{km}(\alpha^r, \varepsilon)\Phi_{km}(\alpha),$$

$$Q^*_i(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \sum_{k,m=1}^{\infty} U^*_{km}(\alpha^r, \varepsilon)\frac{\partial \Phi_{km}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2). \tag{6.8}$$

Підставивши вирази (6.6) і (6.8) у рівняння (6.1), визначимо (за умови $\lambda^2_{k1} + \lambda^2_{m2} \ne \theta^2_0$) коефіцієнти розвинень невідомих функцій і, відповідно, самі функції

$$U^*(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{km}(\alpha^r, \varepsilon)}{\lambda^2_{k1} + \lambda^2_{m2} - \theta^2}\Phi_{km}(\alpha), \tag{6.9}$$

$$Q^*_i(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{km}(\alpha^r, \varepsilon)}{\lambda^2_{k1} + \lambda^2_{m2} - \theta^2}\frac{\partial \Phi_{km}}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, 2).$$

Отже формальний розв’язок задачі (6.1), (6.3), (6.4) має вигляд (6.9). Для похідної від функції $U^*(\alpha, \alpha^r, \varepsilon)$ за напрямком нормалі $\vec{n} = \{n_1(\alpha), n_2(\alpha)\}$ до деякої гладкої кривої C у точці $\alpha \in C$ маємо

$$Q^*_n(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{km}(\alpha^r, \varepsilon)}{\lambda^2_{k1} + \lambda^2_{m2} - \theta^2}\frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}, \tag{6.10}$$

де $\dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} = \dfrac{1}{2}\{[\lambda_{k1}n_1(\alpha) + \lambda_{m2}n_2(\alpha)]\sin(\lambda_{k1}\alpha_1 + \lambda_{m2}\alpha_2) - [\lambda_{k1}n_1(\alpha) - \lambda_{m2}n_2(\alpha)] \times$
$\times \sin(\lambda_{k1}\alpha_1 - \lambda_{m2}\alpha_2)\}$.

Важливим є частковий випадок розглянутої задачі, коли Π^r – квадрат, орієнтований за осями координат. Тоді $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $n^r_1 = n_1(\alpha^r) = 1,$ $n^r_2 = n_2(\alpha^r) = 0$, $\tau^r_1 = \tau_1(\alpha^r) = 0,$ $\tau^r_2 = \tau_2(\alpha^r) = 1$. Підставивши значення цих величин у формули (6.6), (6.9) і (6.10), одержимо

$$\delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon) = \sum_{k,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha); \tag{6.11}$$

$$U^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha)}{\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2-\theta^2},$$

$$Q_n^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^r)}{\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2-\theta^2}\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}, \qquad (6.12)$$

де $c_{km}(\varepsilon)=4\varphi_1(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi_2(\lambda_{m2}\varepsilon)/l_1l_2$.

Приймемо, що базові функції $g_1(t)$, $g_2(t)$ дельтоподібних функцій задовольняють умови $|c_{km}(\varepsilon)|=\mathrm{O}\left(1/\left(k^q m^q\right)\right)$, $\varepsilon\neq 0$, $q\geq 2$. В силу цієї оцінки і того, що $|\Phi_{km}(\alpha)|=\mathrm{O}(1)$, $\left|\frac{\partial\Phi_{km}}{\partial\alpha_1}\right|=\mathrm{O}(k)$, $\left|\frac{\partial\Phi_{km}}{\partial\alpha_2}\right|=\mathrm{O}(m)$, із врахуванням нерівності $\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2-\theta^2\geq Akm$, $0<A<\infty$, яка справджується для великих значень k,m і обмеженої приведеної вимушеної частоти θ^2, ряди (6.12) мажоруються збіжними числовими рядами і, відповідно, збігаються рівномірно. Другі частинні похідні від функції $U^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)$, які входять у рівняння (6.1), є неперервними функціями за умови $q>2$.

Отже можна стверджувати:

а) ряди (6.12) є розв’язками Фур’є задачі (6.1), (6.4) в області П, якщо вільний член першого рівняння (6.1) є періодичною дельтоподібною функцією (6.11) і справедлива оцінка $|c_{km}(\varepsilon)|=\mathrm{O}\left(1/\left(k^q m^q\right)\right)$, $q>2$;

б) ряди (6.12) є узагальненим (у розумінні рівномірної збіжності) розв’язком Фур’є задачі (6.1), (6.4) в області П, якщо вільний член першого рівняння (6.1) є періодичною дельтоподібною функцією (6.11) і справедлива оцінка $|c_{km}(\varepsilon)|=\mathrm{O}\left(1/\left(k^2 m^2\right)\right)$.

Граничні функції

$$U(\alpha,\alpha^r)=\lim_{\varepsilon\to 0}U^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon),\quad Q(\alpha,\alpha^r)=\lim_{\varepsilon\to 0}Q^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon) \qquad (6.13)$$

існують в усіх точках області П за винятком точки $\alpha\neq\alpha^r$.

Функція $U(\alpha,\alpha^r)$ є функцією Гріна системи рівнянь (6.1) у прямокутнику. Функції $U^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)$ і $Q^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)$ є відповідно операторами згладжування функції Гріна $U(\alpha,\alpha^r)$ і її похідної $Q(\alpha,\alpha^r)$.

Слід відзначити, що формули (6.13) визначають узагальнене підсумовування розбіжних (у класичному розумінні суми) рядів

$$U(\alpha,\alpha^r)\sim\frac{4}{l_1l_2}\sum_{k,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_{km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha)}{\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2-\theta^2},$$

$$Q(\alpha,\alpha^r) \sim \frac{4}{l_1 l_2} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\Phi_{km}(\alpha^r)}{\lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \theta^2} \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n},$$

які є формальним розв'язком задачі (6.1), (6.4) з правою частиною першого рівняння системи (6.1) у вигляді дельта-функції.

Криві на рис.6.2 ілюструють залежність функції $U^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)$ (оператора згладжування функції $U(\alpha,\alpha^r)$) від координати $\alpha_2 \in [0;\pi]$ у разі використання послідовностей функцій $\left\{\varphi_1(\lambda_{k1}\varepsilon) = \left[\frac{\sin(\lambda_{k1}\varepsilon/2)}{(\lambda_{k1}\varepsilon/2)}\right]^2\right\}$, $\left\{\varphi_2(\lambda_{m2}\varepsilon) = \left[\frac{\sin(\lambda_{m2}\varepsilon/2)}{(\lambda_{m2}\varepsilon/2)}\right]^2\right\}$.

При обчисленнях приймали $l_1 = l_2 = \pi$, $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_1^r = \pi/2$, $\alpha_2^r = \pi/2$, а також $\varepsilon = 0{,}03925;\ 0{,}0785;\ 0{,}157.$

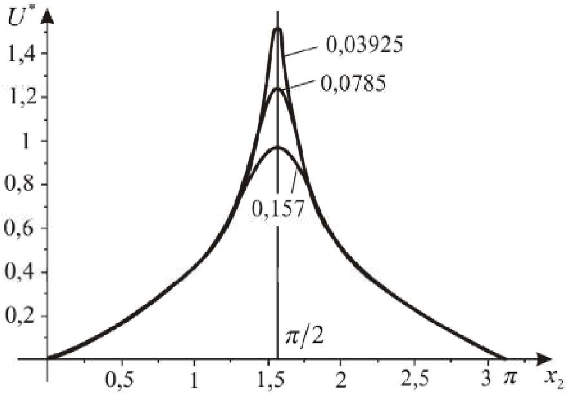

Рис. 6.2. Залежність розв'язку задачі від величини області локалізації навантаження

Бачимо, що значення функцій $U^*(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)$ та $U(\alpha,\alpha^r,\varepsilon)$ суттєво відрізняються тільки в $\varepsilon-$околі сингулярної точки $(\pi/2, \pi/2)$ і практично співдадають поза межами цього околу.

6.1.2. Інтегральні рівняння задачі. Запишемо узагальнений (у розумінні слабкої збіжності) розв'язок системи рівнянь (6.1) у прямокутнику. Приймаємо, що праву частиною першого рівняння можна подати у вигляді суми двох функцій

$$f(\alpha) = f_0(\alpha) + s(\alpha). \tag{6.14}$$

Нехай перша з цих функцій розвивається у рівномірно збіжний ряд Фур'є за системою (6.5)

$$f_0(\alpha) = \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{0km} \Phi_{km}(\alpha), \tag{6.15}$$

а друга є узагальненою (у розумінні слабкої збіжності) функцією

$$s(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L \delta(\alpha, \alpha_0, \varepsilon) p(\alpha_0) dl(\alpha_0), \tag{6.16}$$

де $f_{0km} = \dfrac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} f_0(\alpha) \Phi_{km}(\alpha) d\alpha_1 d\alpha_2$; $\delta(\alpha, \alpha_0, \varepsilon)$ – дельтоподібна функція на взірець (6.11); $p(\alpha_0)$ – кусково-неперервна функція ($\alpha_0 \in L$).

Скориставшись формулами (6.13) і (6.16), запишемо

$$u(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L U^*(\alpha, \alpha_0, \varepsilon) p(\alpha_0) dl(\alpha_0) + u_0(\alpha), \tag{6.17}$$

де $u_0(\alpha) = \sum\limits_{k,m=1}^{\infty} \dfrac{f_{0km} \Phi_{km}(\alpha)}{\lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \theta^2}$.

Обчислимо також похідну від функції (6.17). Оскільки при переході через криву L (у напрямку нормалі з області D в область $\Pi \setminus D$) похідна від функції $u_0(\alpha)$ має розрив першого роду [14, 79], то

$$\begin{gathered} Q_n(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L Q_n^*(\alpha, \alpha_0, \varepsilon) p(\alpha_0) dl(\alpha_0) + Q_{n0}(\alpha), \quad (\alpha \in \Pi, \ \alpha \notin L), \\ Q_n^{\pm}(\alpha_0) = \pm \frac{1}{2} p(\alpha_0) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L Q_n^*(\alpha_0, \xi, \varepsilon) p(\xi) dl(\xi) + Q_{n0}(\alpha_0), \ (\alpha_0 \in L). \end{gathered} \tag{6.18}$$

Тут $Q_{n0}(\alpha_0) = \sum\limits_{k,m=1}^{\infty} \dfrac{f_{0km}}{\lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \theta^2} \dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha_0)}{\partial n}$; $Q_n^{\pm}(\alpha_0)$ – значення функції $Q(\alpha)$ відповідно на правому і лівому “берегах” лінії L.

Використаємо тепер співвідношення (6.17) та (6.18) для формулювання інтегральних рівнянь задачі (6.1), (6.2). Якщо підставити вирази (6.17) і (6.18) у рівняння (6.2) і прийнявши, що густина $p(\alpha)$ є невідомою функцією, то одержимо такі граничні інтегральні рівняння

$$\begin{gathered} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L U^*(\alpha_0, \xi, \varepsilon) p(\xi) dl(\xi) = f_1(\alpha_0) - u_0(\alpha_0), \quad (\alpha_0 \in L_1), \\ -\frac{1}{2} p(\alpha_0) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L Q_n^*(\alpha_0, \xi, \varepsilon) p(\xi) dl(\xi) = f_2(\alpha_0) - Q_{n0}(\alpha_0), \ (\alpha_0 \in L_2). \end{gathered} \tag{6.19}$$

Зауважимо, що інтеграли у рівняннях (6.19) при $\varepsilon \neq 0$ існують як інтеграли Рімана, оскільки неперервними є функції $U^*(\alpha_0, \xi, \varepsilon)$, $Q_n^*(\alpha_0, \xi, \varepsilon)$ як суми рівномірно збіжних рядів.

6.1.3. Метод колокацій. У випадку другої крайової задачі ($L = L_2$) інтегральні рівняння (6.19) зводяться до одного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, для числового розв'язання якого ефективним є метод колокацій. Перша крайова задача ($L = L_1$) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду. Якщо точками колокацій є точки розбиття границі, то стійкі числові розв'язки інтегрального рівняння першого роду (з логарифмічною особливістю) також можна одержати цим методом [35]. Розглянемо числову схему методу колокацій для інтегральних рівнянь (6.19). Густину $p(\alpha_0)$ шукаємо у вигляді функції, яка залежить від координат точки $\alpha_0 \in L$ і невідомих параметрів $P^r (r = \overline{1, N})$,

$$p(\alpha_0) = \sum_{r=1}^{N} P^r g^r(\alpha_0), \tag{6.20}$$

де $g^r(\alpha_0)$ – базові функції.

Введення базових функцій пов'язано з дискретизацією границі L. Криву L розбиваємо на N граничних елементів L^r ($r = \overline{1, N}$) так, що $L^r \in L_1$, якщо $r = \overline{1, N_1}$ і $L^r \in L_2$, якщо $r = \overline{N_1 + 1, N}$. Приймаємо також, що граничні елементи є прямолінійними відрізками, кожний з яких визначається середньою точкою $\alpha_0^r = (\alpha_{10}^r, \alpha_{20}^r)$, довжиною $2l^r$ і напрямним одиничним вектором $\vec{\tau}^r = \{\tau_{10}^r, \tau_{20}^r\}$. Однією з можливих систем базових функцій є система функцій загальним членом якої є

$$g^r(\alpha_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{2l^r} g\left(\dfrac{|\xi_2|}{l^r}\right), & \alpha_0 \in L^r, \\ 0, & \alpha_0 \notin L^r, \end{cases} \tag{6.21}$$

де ξ_1, ξ_2 – локальна система координат, $\xi_1 = (\alpha_{10} - \alpha_{10}^r) n_{10}^r + (\alpha_{20} - \alpha_{20}^r) n_{20}^r$, $\xi_2 = (\alpha_{10} - \alpha_{10}^r)\tau_{10}^r + (\alpha_{20} - \alpha_{20}^r)\tau_{20}^r$ $(n_{10}^r = \tau_{20}^r,\ n_{20}^r = -\tau_{10}^r)$; $g(t)$ – базова функція дельтоподібної функції.

Для визначення параметрів $P^r (r = \overline{1, N})$ використаємо умови рівності нулю нев'язки наближеного розв'язку у заданій системі точок $\hat{\alpha}_0^q$ $(q = \overline{1, N})$ – точок колокацій. Насамперед дискретизуємо інтегральні співвідношення (6.17), (6.18).

Підставивши співвідношення (6.20) та (6.21) у (6.17) і першу формулу (6.18), одержимо

$$u(\alpha)=\sum_{r=1}^{N}A^r(\alpha)P^r+u_0(\alpha)\quad(\alpha\in\Pi),\tag{6.22}$$

$$Q_n(\alpha)=\sum_{r=1}^{N}B^r(\alpha)P^r+Q_{n0}(\alpha)\quad(\alpha\in\Pi,\ \alpha\notin L).$$

Вирази для коефіцієнтів $A^r(\alpha)$ та $B^r(\alpha)$ отримаємо у результаті розбиття кривої L і визначення інтегралів вздовж граничних елементів. Ці інтеграли можна обчислити з допомогою формул (6.7), (6.9) і (6.10) при $\varepsilon_1\to 0$ і $\varepsilon_2=l^r$. У підсумку матимемо

$$\begin{aligned}A^r(\alpha)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L^r}U^*(\alpha,\alpha_0,\varepsilon)\frac{1}{2l^r}g\left[\frac{|\xi_2|}{l^r}\right]dl(\alpha_0)=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K}\frac{c_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha)}{\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2-\theta^2},\end{aligned}\tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}B^r(\alpha)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{L^r}Q_n^*(\alpha,\alpha_0,\varepsilon)\frac{1}{2l^r}g\left[\frac{|\xi_2|}{l^r}\right]dl(\alpha_0)=\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K}\frac{c_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}(\alpha^r)}{\lambda_{k1}^2+\lambda_{m2}^2-\theta^2}\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n},\end{aligned}$$

де $\Psi_{0km}(\alpha^r)=-\dfrac{1}{2}\{\varphi[l^r(\lambda_{k1}\tau_1^r+\lambda_{m2}\tau_2^r)]\cos(\lambda_{k1}\alpha_1^r+\lambda_{m2}\alpha_2^r)-\varphi[l^r(\lambda_{k1}\tau_1^r-\lambda_{m2}\tau_2^r)]\times$

$\times\cos(\lambda_{k1}\alpha_1^r-\lambda_{m2}\alpha_2^r)\};\quad K\varepsilon>>1.$

Наступним кроком при побудові наближеного розв'язку задачі є дискретизація рівнянь (6.19). При обчисленні інтегралів у цих рівняннях проводимо аналогічні до (6.23) перетворення і справджуємо рівняння тільки у точках колокацій. При цьому значення густини у точках колокацій $\widehat{\alpha}_0^q$ приймаємо рівними її середнім значенням $P^q/2l^q$ на відрізках L^q. У результаті цих перетворень одержимо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{N}A^r(\widehat{\alpha}_0^q)P^r=f_1(\widehat{\alpha}_0^q)-u_0(\widehat{\alpha}_0^q)\quad(q=\overline{1,N_1}),\tag{6.24}$$

$$\sum_{r=1}^{n}B^r(\widehat{\alpha}_0^q)P^r-\frac{1}{4l^q}P^q=f_2(\widehat{\alpha}_0^q)-Q_{n0}(\widehat{\alpha}_0^q)\quad(q=\overline{N_1+1,N}).$$

Коефіцієнти системи (6.24) визначаються за формулами (6.23). Для граничних функцій застосовуємо розвинення у ряд при достатньо малих значеннях параметра $\varepsilon \neq 0$, а суми рядів, внаслідок їх рівномірної збіжності, наближуємо частинними сумами рядів.

Вирази для параметрів $P^r (r = \overline{1,N})$ отримуємо із иситеми рівнянь (6.24). Тоді, на основі формул (6.22) за відомих $P^r (r = \overline{1,N})$ визначаємо значення функції $u(\alpha)$ та її похідної у довільній точці області D.

Зауважимо, що аналогічним чином будується числовий розв'язок задачі для двозв'язної області $\Pi \setminus D$: знайти розвязок системи рівнянь (6.1) в області $\Pi \setminus D$ за умов (6.2) на внутрішньому контурі і нульових умов на зовнішньому контурі $\partial\Pi$.

6.1.4. Метод фіктивного контура. Розглянемо ще один підхід [8, 54] до формування алгебраїчної системи рівнянь відносно невідомих величин апроксимаційного виразу (6.20). Для граничних функцій $u(\alpha)$ і $Q_n(\alpha)$, які задаються формулами (6.17), (6.18), приймаємо такі наближення (при $\varepsilon \neq 0$)

$$u(\alpha,\varepsilon) = \int\limits_L U^*(\alpha,\alpha_0,\varepsilon)p(\alpha_0)dl(\alpha_0) + u_0(\alpha), \tag{6.25}$$

$$Q_n(\alpha,\varepsilon) = \int\limits_L Q_n^*(\alpha,\alpha_0,\varepsilon)p(\alpha_0)dl(\alpha_0) + Q_{n0}(\alpha).$$

Дискретизуючи інтегральні вирази у формулах (6.25), з урахуванням співвідношення (6.20) отримаємо такі наближені формули

$$u(\alpha,\varepsilon) = \sum_{r=1}^{N} A^r(\alpha,\varepsilon)P^r + u_0(\alpha),$$

$$Q_n(\alpha,\varepsilon) = \sum_{r=1}^{N} B^r(\alpha,\varepsilon)P^r + Q_{n0}(\alpha), \quad (\alpha \in \Pi,\ \varepsilon \neq 0), \tag{6.26}$$

де $A^r(\alpha,\varepsilon) = \sum\limits_{k,m=1}^{K} \dfrac{c_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}^r \Phi_{km}(\alpha)}{\lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \theta^2}$; $B^r(\alpha,\varepsilon) = \sum\limits_{k,m=1}^{K} \dfrac{c_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}^r}{\lambda_{k1}^2 + \lambda_{m2}^2 - \theta^2} \dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}$, $K\varepsilon >> 1$.

Інтегральні складові у формулах (6.25) описують прогин і кут повороту мембрани, що перебуває під дією сил, розподілених уздовж деякої смуги. Ширина смуги є змінною величиною. Її мінімальне (при $n_1 = 0$ або $n_2 = 0$) і максимальне (при $n_1 = \pm n_2$) значення відповідно дорівнюють 2ε і $2\sqrt{2}\varepsilon$, де $\vec{n} = \{n_1; n_2\}$ – нормальний вектор до серединної лінії смуги L. В той час, як функція $Q_n(\alpha)$ терпить розрив при переході через лінію L, функція $Q_n(\alpha,\varepsilon)$, яка визначається другою формулою співвідношень (6.25), при переході через цю смугу змінюється неперервно.

Тому при формулюванні дискретних аналогів інтегральних рівнянь вимагаємо виконання граничних умов (6.2) у точках $\widehat{\alpha}_0^q \ (q=\overline{1,N})$, які належать області D і розташовані на відстані $\varepsilon_0 \approx \varepsilon$ від середніх точок.

Таким чином, підставивши наближені вирази шуканих функцій (6.26) в умови (6.2), одержимо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{N} A^r(\widehat{\alpha}_0^q,\varepsilon)P^r = f_1(\widehat{\alpha}_0^q) - u_0(\widehat{\alpha}_0^q) \quad (q=\overline{1,N_1}),$$

$$\sum_{r=1}^{N} B^r(\widehat{\alpha}_0^q,\varepsilon)P^r = f_2(\widehat{\alpha}_0^q) - Q_{n0}(\widehat{\alpha}_0^q) \quad (q=\overline{N_1+1,N}). \tag{6.27}$$

Із урахуванням з (6.27) значень P^r прогин і кут повороту нормалі в будь-якій точці мембрани визначаємо за формулами (6.26).

6.1.5. Коливання мембрани з отвором. Розглянемо задачу про вимушені коливання прямокутної мембрани з центральним круглим отвором радіуса R. Нехай вздовж краю L отвору на мембрану діють сили, які змінюються за гармонічним законом $f_2(\alpha_0)\sin(\theta t)$ $(\alpha_0 \in L)$, де $f_2(\alpha_0)$ – амплітуда збурюючої сили, θ – її частота.

Задача зводиться до відшукання розв'язку системи рівнянь (6.1) при $f(\alpha) \equiv 0$ в області П \ D, за таких умов $u(\alpha_0) = 0$, $(\alpha_0 \in \partial\Pi)$ і $Q_n(\alpha_0) = f_2(\alpha_0)$ ($\alpha_0 \in L$), де

$$D = \left\{ (\alpha_1;\alpha_2) \colon \left(\alpha_1 - \frac{l_1}{2}\right)^2 + \left(\alpha_2 - \frac{l_2}{2}\right)^2 < R^2 \right\}.$$

Наближений розв’язок задачі шукаємо методом граничних інтегральних рівнянь з використанням “фіктивного” контуру. Приймаючи до уваги симетричність задачі, співвідношення (6.26) і (6.27) запишемо у вигляді

$$u(\alpha) = \sum_{r=1}^{N} \overline{A}^r(x,\varepsilon)P^r, \quad Q_n(\alpha) = \frac{1}{l}\sum_{r=1}^{N} \overline{B}^r(\alpha,\varepsilon); \tag{6.28}$$

$$\sum_{r=1}^{N} \overline{B}^r(\widehat{\alpha}_0^q,\varepsilon) = lf_2(\widehat{\alpha}_0^q) \quad (q=\overline{1,N}), \tag{6.29}$$

де $\overline{A}^r(\alpha,\varepsilon) = \sum\limits_{k,m=1,3,}^{K} \dfrac{\overline{c}_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha)}{\left(\overline{\lambda}_{k1}\right)^2 + \left(\overline{\lambda}_{k1}\right)^2 - \overline{\theta}^2}; \quad \overline{\lambda}_{k1} = \dfrac{k\pi l}{l_1}; \quad \overline{\lambda}_{m2} = \dfrac{m\pi l}{l_2};$

$$\overline{B}^r(\alpha,\varepsilon) = \sum_{k,m=1,3,}^{K} \frac{\overline{c}_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}(\alpha^r)}{\left(\overline{\lambda}_{k1}\right)^2 + \left(\overline{\lambda}_{k1}\right)^2 - \overline{\theta}^2} \frac{\partial\overline{\Phi}_{km}(\alpha)}{\partial n}; \quad \overline{c}_{km}(\varepsilon) = \frac{16 l^2}{l_1 l_2}\varphi_1(\overline{\lambda}_{k1}\overline{\varepsilon})\varphi_2(\overline{\lambda}_{m2}\overline{\varepsilon});$$

$\varphi_i(t) = \left[\dfrac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2$; $\dfrac{\partial\overline{\Phi}_{km}(\alpha)}{\partial n} = l\dfrac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}$; $\overline{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{l}$; $\overline{\theta}^2 = (\theta l)^2$; $K\varepsilon >> 1$; l – довільний параметр.

Поділимо коло L на $4N$ частин і розглянемо, враховуючи симетричність задачі, лише частину, що належить області $\Pi_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2): \ 0 < \alpha_1 < l_1/2; \ 0 < \alpha_2 < l_2/2\}$. Функція Гріна симетричної задачі одержується з (6.12) заміною коефіцієнтів $c_{km}(\varepsilon)$ на $4c_{km}(\varepsilon)$ і підсумовуванням рядів за непарними значеннями індексів. Тоді згідно з методом колокацій параметри відрізків розбиття будуть такими

$$\alpha_{10}^r = \frac{l_1}{2} - R\cos t^r, \ \alpha_{20}^r = \frac{l_2}{2} - R\sin t^r, \ t^r = \frac{(2r-1)\pi}{4N}, \ (r = \overline{1, N}),$$

$$n_1^r = \tau_2^r = -\cos t^r, \ n_2^r = -\tau_1^r = -\sin t^r, \ l^r = \frac{\pi R}{4N}. \qquad (6.30)$$

Для координат точок колокацій маємо формули: $\widehat{\alpha}_{10}^q = l_1/2 - (R+\varepsilon)\cos t^q$, $\widehat{\alpha}_{20}^q = l_2/2 - (R+\varepsilon)\sin t^q$, $(q = \overline{1, N})$. Компоненти нормального та тангенціального векторів визначаються за формулами (6.30).

Таким чином задача про коливання мембрани з отвором зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6.29). Власні частоти коливань мембрани з отвором визначаються з умови існування розв’язку однорідної системи рівнянь (рівності нулю визначника системи), що відповідає системі (6.29).

У табл. 6.1 приведені значення основних власних частот $\theta_0 l$ коливання квадратної мембрани $(l_1 = l_2 = l)$ з круглим отвором для різних значень параметра $2R/l$, визначені з використанням різних методик: *А* – методом інтегральних рівнянь; *Б* – методом скінчених елементів; *В* – методом Рітца [43, 82].

Таблиця 6.1

Частоти власних коливань мембрани з отвором

2*R*/*l*	*А*	*Б*	*В*
0,1	6,06	6,07	6,40
0,2	6,88	6,88	7,07
0,3	7,79	7,80	7,94

Значення частот, одержаних із застосуванням методу граничних інтегральних рівнянь (*А*), практично співпадають із обчисленими значеннями частот за методом (*Б*). Частоти, отримані із використанням методу (*В*), завжди є завищеними [94].

6.1.6. Коливання мембрани з вирізами. Розглянемо задачу про усталені коливання мембрани з вирізом (див. рис. 6.3). Задача полягає у відшуканні розв’язку системи рівнянь (6.1) в області D (многокутнику *OACEF*) за однорідних граничних умов

$$u(\alpha)=0, \quad \alpha\in L_1, \qquad u(\alpha)=0, \quad \alpha\in L,$$

та $f_0=\text{const}$. Тут L_1 – ламана *CEFOA*; *L* – відрізок *AC*.

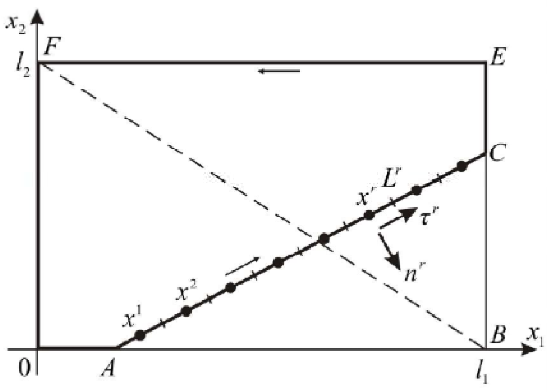

Рис. 6.3. Геометрія полігональної області

Наближений розв’язок задачі шукаємо у вигляді (6.26). Ввівши безрозмірні коефіцієнти, одержимо

$$u(\alpha)=\sum_{r=1}^{N}\overline{A}^r(\alpha)P^r+u_0(\alpha),$$

$$lQ_n(\alpha)=\sum_{r=1}^{N}\overline{B}^r(\alpha)P^r+lQ_{n0}(\alpha), \quad \alpha\in D,$$

де

$$\overline{A}^r(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K}\frac{\overline{c}_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}(\alpha^r)\Phi_{km}(\alpha)}{(\overline{\lambda}_{k1})^2+(\overline{\lambda}_{m2})^2-\overline{\theta}^2},$$

$$\overline{B}^r(\alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K}\frac{\overline{c}_{km}(\varepsilon)\Psi_{0km}(\alpha^r)}{(\overline{\lambda}_{k1})^2+(\overline{\lambda}_{m2})^2-\overline{\theta}^2}\frac{\partial\overline{\Phi}_{km}(\alpha)}{\partial n},$$

$$u_0(\alpha)=\frac{16f_0l^2}{l_1l_2}\sum_{k,m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\Phi_{km}(\alpha)}{\overline{\lambda}_{k1}\overline{\lambda}_{m2}[(\overline{\lambda}_{k1})^2+(\overline{\lambda}_{m2})^2-\overline{\theta}^2]},$$

$$lQ_{n0}(\alpha)=\frac{16p_0l^2}{l_1l_2}\sum_{k,m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{\overline{\lambda}_{k1}\overline{\lambda}_{m2}[(\overline{\lambda}_{k1})^2+(\overline{\lambda}_{m2})^2-\overline{\theta}^2]}\frac{\partial\overline{\Phi}_{km}(\alpha)}{\partial n},$$

$$\frac{\partial\overline{\Phi}_{km}(\alpha)}{\partial n}=\frac{1}{2}\Big\{[\overline{\lambda}_{k1}n_1(\alpha)+\overline{\lambda}_{m2}n_2(\alpha)]\sin(\overline{\lambda}_{k1}\overline{\alpha}_1+\overline{\lambda}_{m2}\overline{\alpha}_2)-$$
$$-[\overline{\lambda}_{k1}n_1(\alpha)-\overline{\lambda}_{m2}n_2(\alpha)]\sin(\overline{\lambda}_{k1}\overline{\alpha}_1-\overline{\lambda}_{m2}\overline{\alpha}_2)\Big\},$$

$$\Psi_{0km}\left(x^r\right) = -\frac{1}{2}\left\{\varphi[\bar{l}^r(\bar{\lambda}_{k1}\tau_1^r + \bar{\lambda}_{m2}\tau_2^r)]\cos(\bar{\lambda}_{k1}\bar{\alpha}_1^r + \bar{\lambda}_{m2}\bar{\alpha}_2^r) - \right.$$
$$\left. - \varphi[\bar{l}^r(\bar{\lambda}_{k1}\tau_1^r - \bar{\lambda}_{m2}\tau_2^r)]\cos(\bar{\lambda}_{k1}\bar{\alpha}_1^r - \bar{\lambda}_{m2}\bar{\alpha}_2^r)\right\},$$

$$\bar{c}_{km}(\varepsilon) = \frac{4l^2}{l_1 l_2}\varphi_1(\bar{\lambda}_{k1}\bar{\varepsilon})\varphi_2(\bar{\lambda}_{m2}\bar{\varepsilon});\ \varphi(t) = \left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2,\ \frac{\partial\bar{\Phi}_{km}(\alpha)}{\partial n} = l\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n},$$

$$\bar{\lambda}_{k1} = \frac{k\pi l}{l_1},\ \bar{\lambda}_{m2} = \frac{m\pi l}{l_2},\ K\varepsilon >> 1,\ \bar{\alpha}_1 = \frac{\alpha_1}{l}, \bar{\alpha}_2 = \frac{\alpha_2}{l},\ \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{l},\ \bar{\theta}^2 = (\theta l)^2,$$

l – довільний параметр.

Цій задачі відповідає інтегральне рівняння першого роду, яке зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{N}\bar{A}^r(\hat{\alpha}_0^q)P^r = -u_0(\hat{\alpha}_0^q), \quad q = \overline{1,N}. \tag{6.31}$$

При дискретизації інтегрального рівняння лінію L розбиваємо на N відрізків однакової довжини $2l^r$. Вважаємо, що середні точки відрізків розбиття $\bar{\alpha}_0^r = \left(\bar{\alpha}_{10}^r, \bar{\alpha}_{20}^r\right)$ і точки колокацій $\hat{\alpha}_0^q = \left(\hat{\alpha}_{10}^q, \hat{\alpha}_{20}^q\right)$ співпадають. Координати цих точок та інші параметри лінії L визначаються формулами

$$\begin{cases}\bar{\alpha}_1^r = \left[a + (l_1 - a)t^r\right]/l, \\ \bar{\alpha}_2^r = bt^r/l,\end{cases} \quad \vec{\tau}^r = \left\{\frac{l_1 - a}{l_0};\ \frac{b}{l_0}\right\}, \quad \vec{n}^r = \left\{\frac{b}{l_0};\ -\frac{l_1 - a}{l_0}\right\},$$

$$l_0 = \sqrt{(l_1 - a)^2 + b^2},\quad \bar{l}^r = \frac{l_0}{2Nl},\ t^r = \frac{2r-1}{2N} \quad \left(r = \overline{1,N}\right).$$

Числові результати одержано для мембрани, що має форму трикутника OEF. Криві на рис. 6.4 ілюструють залежність функції $\bar{Q}_n = lQ_n/f_0$ вздовж лінії FB від координати α_1. Наближені значення функції $\bar{Q}_n(\alpha)$ обчислено при таких значеннях параметрів: $l_1 = l_2 = b = l = 1,\ a = 0,\ K = M = 400$ (довжини відрізків частинних сум рядів), $\theta = 0,\ \bar{\varepsilon} = 0{,}025;\ 0{,}0125$.

Бачимо, що точність обчислення значень функції $\bar{Q}_n(\alpha)$ за формулою (6.31) порушується лише в ε-околі лінії L. Значення цієї функції на лінії L оцінюються наближеними її значеннями на межі ε-околу лінії L.

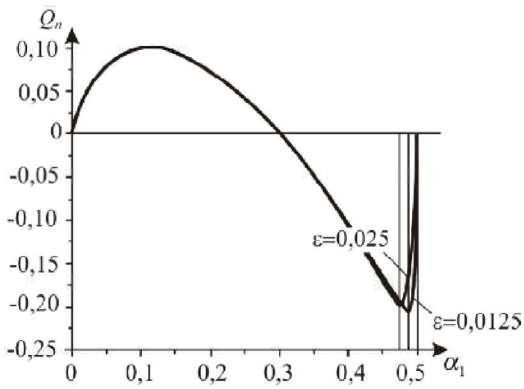

Рис. 6.4. Залежність функції $\overline{Q}_n$ від параметра ε

Щодо наближеного розв'язування основних крайових задач математичної фізики, то метод колокацій дає стійкі розв'язки відповідних систем алгебраїчних рівнянь (залежно від кількості чи довжини відрізків розбиття границі). Використані у числових схемах (6.28), (6.31) наближення для коефіцієнтів систем алгебраїчних рівнянь узагальненими частинними сумами рядів (за фіксованого значення параметра ε) не погіршують стійкості розв'язків. Вони не суттєво впливають на величину похибки наближених розв'язків крайових задач, оскільки значення параметра ε завжди можна вибрати значно меншими, від довжини відрізків розбиття границі.

6.2. ФУНКЦІЯ ГРІНА ДЛЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

6.2.1. Прогин локально навантаженої оболонки. Розглянемо шарнірно оперту пологу трансверсально-ізотропну оболонку, яка у плані є прямокутником $\Pi = \{(\alpha_1;\alpha_2):\ 0<\alpha_1<l_1,\ 0<\alpha_2<l_2\}$. У квадраті $\Pi^r = \{(\alpha_1;\alpha_2):\ \left|\alpha_1-\alpha_1^r\right|\le\varepsilon,\ \left|\alpha_2-\alpha_2^r\right|\le\varepsilon\}$ на оболонку діють сили і моменти, розподілені згідно законів [11, 37, 87, 97]

$$q_i = T^r n_i^r \delta(\alpha_1,\alpha_1^r,\varepsilon)\ \delta(\alpha_2,\alpha_2^r,\varepsilon)\sin(\theta_0 t),$$

$$m_i = M^i n_i^r \delta(\alpha_1,\alpha_1^r,\varepsilon)\ \delta(\alpha_2,\alpha_2^r,\varepsilon)\sin(\theta_0 t)\ \ (i=1,2), \tag{6.32}$$

$$q_3 = P^r \delta(\alpha_1,\alpha_1^r,\varepsilon)\ \delta(\alpha_2,\alpha_2^r,\varepsilon)\sin(\theta_0 t).$$

Тут $\delta(\alpha_i,\alpha_i^r,\varepsilon)$ – дельтоподібна функція; θ_0 – частота коливань. Амплітуди рівнодійних мембранних сил T^r і моментів M^r орієнтовані за напрямком заданого одиничного вектора $\vec{n}^r = \{n_1^r, n_2^r\}$.

Узагальнений (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язок Фур'є (при $q = 2$) і розв'язок Фур'є (при $q > 2$) задачі про усталені коливання оболонки шукаємо у межах моделі оболонки Тимошенка за нехтування малими жорсткими поворотами відносно нормалі до серединної поверхні (3.13)–(3.15), (3.17). При цьому враховуємо тільки нормальну компоненту інерційної сили. Умови шарнірного опертя краю оболонки задаємо у вигляді

$$\begin{aligned} &w = 0,\ u_2 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ N_{11} = 0,\ M_{11} = 0 \text{ при } \alpha_1 = 0 \text{ і } \alpha_1 = l_1, \\ &w = 0,\ u_1 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ N_{22} = 0,\ M_{22} = 0 \text{ при } \alpha_2 = 0 \text{ і } \alpha_2 = l_2. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Система ключових рівнянь (2.39) для випадку динамічної задачі є такою

$$\begin{aligned} &B\frac{\partial}{\partial \alpha_1}[\Delta u - (k_1 + \nu k_2)w] - \frac{\partial T_{12}}{\partial \alpha_2} = q_1, \\ &B\frac{\partial}{\partial \alpha_2}[\Delta u - (k_2 + \nu k_1)w] - \frac{\partial T_{21}}{\partial \alpha_1} = q_2, \\ &D\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left[\Delta\gamma - \frac{\Lambda}{D}(\gamma - w)\right] - \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2} = m_1, \\ &D\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[\Delta\gamma - \frac{\Lambda}{D}(\gamma - w)\right] - \frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_1} = m_2, \\ &\Lambda\Delta(\gamma - w) - B(\Delta^\nu u - k_0^2 w) + 2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_3, \end{aligned} \tag{6.34}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $\Delta^\nu = (k_1 + \nu k_2)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + (k_2 + \nu k_1)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $k_0^2 = k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2$; ρ – густина матеріалу.

Для переміщень і зусиль з (3.12), (3.13) одержимо формули

$$\begin{aligned} &u_1 = -\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}, \quad \gamma_1 = -\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_1}, \\ &N_{11} = -B\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2} - (k_1 + \nu k_2)w\right], \quad N_{12} = -B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + T_{12}, \\ &M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_1^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_2^2}\right), \quad M_{12} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + H_{12}, \\ &Q_1 = -\Lambda\frac{\partial}{\partial \alpha_1}(\gamma - w). \end{aligned} \tag{6.35}$$

Ще шість формул отримаємо з (6.35) заміною індексів 1 на 2 і 2 на 1.

Формули для визначення нормальних і тангенціальних компонент переміщень та зусиль уздовж деякої кривої $C \subset \Pi$ (з одиничними нормальним і тангенціальним векторами у серединній поверхні $\vec{n}(\alpha) = \{n_1(\alpha), n_2(\alpha)\}$, $\vec{\tau}(\alpha) = \{\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha)\}$ $(\tau_1 = -n_2, \tau_2 = n_1)$) мають вигляд

$$u_n = u_1 n_1 + u_2 n_2 = -\frac{\partial u}{\partial n}, \quad u_\tau = u_1 \tau_1 + u_2 \tau_2 = -\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$\gamma_n = \gamma_1 n_1 + \gamma_2 n_2 = -\frac{\partial \gamma}{\partial n}, \quad \gamma_\tau = \gamma_1 \tau_1 + \gamma_2 \tau_2 = -\frac{\partial \gamma}{\partial \tau},$$

$$N_n = (N_{11} n_1 + N_{12} n_2) n_1 + (N_{21} n_1 + N_{22} n_2) n_2 = -B\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right) - k_n^\nu w\right],$$

$$N_\tau = (N_{11} n_1 + N_{12} n_2)\tau_1 + (N_{21} n_1 + N_{22} n_2)\tau_2 =$$

$$= -B(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n \partial \tau} + k_{n\tau} w\right) - n_1^2 T_{12} + n_2^2 T_{21},$$

$$Q_n = -\Lambda \frac{\partial}{\partial n}(\gamma - w), \tag{6.36}$$

$$M_n = (M_{11} n_1 + M_{12} n_2) + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2) n_2 = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2}\right),$$

$$M_\tau = (M_{11} n_1 + M_{12} n_2)\tau_1 + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2)\tau_2 = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 \gamma}{\partial n \partial \tau} - n_1^2 H_{12} + n_2^2 H_{12},$$

Тут $k_n = k_1 n_1^2 + k_2 n_2^2$; $k_\tau = k_1 \tau_1^2 + k_2 \tau_2^2$; $k_n^\nu = k_n + \nu k_\tau$; $k_{n\tau} = n_1 n_2 (k_1 - k_2)$.

Невідомі функції подаємо у вигляді добутків функції від часу і розвинень за системами тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} &\{\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)\}_{k,m=1}^\infty, \\ &\{\Phi_{km}^0(\alpha) = \cos(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)\}_{k,m=0}^\infty, \end{aligned} \tag{6.37}$$

де $\lambda_{k1} = k\pi / l_1$; $\lambda_{m2} = m\pi / l_2$.

Таким чином для невідомих функцій системи рівнянь (6.34) маємо розвинення

$$\begin{Bmatrix} T(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t) \\ H(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t) \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} T_{km}(\alpha^r,\varepsilon) \\ H_{km}(\alpha^r,\varepsilon) \end{Bmatrix} \Phi_{km}^0(\alpha)\sin(\theta_0 t),$$

$$\begin{Bmatrix} u(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t) \\ w(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t) \\ \gamma(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t) \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}(\alpha^r,\varepsilon) \\ w_{km}(\alpha^r,\varepsilon) \\ \gamma_{km}(\alpha^r,\varepsilon) \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha)\sin(\theta_0 t) \tag{6.38}$$

Функції $\Phi_{km}(\alpha)$, $\Phi_{km}^0(\alpha)$ та їх похідні запишемо ще наступним чином

$$\Phi_{km}(\alpha) = -\frac{1}{2}\left[\cos(z_{km}(\alpha)) - \cos(\bar{z}_{km}(\alpha))\right],$$

$$\Phi_{km}^0(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\cos(z_{km}(\alpha)) + \cos(\bar{z}_{km}(\alpha))\right] = \cos\lambda_{1k}\alpha_1 \cos\lambda_{2m}\alpha,$$

$$\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} = \frac{1}{2}\left[a_{km}(\alpha)\sin(z_{km}(\alpha)) - \bar{a}_{km}(\alpha)\sin(\bar{z}_{km}(\alpha))\right], \tag{6.39}$$

$$\frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left[b_{km}(\alpha)\sin(z_{km}(\alpha)) - \bar{b}_{km}(\alpha)\sin(\bar{z}_{km}(\alpha))\right],$$

$$\frac{\partial\Phi_{km}^0(\alpha)}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left[b_{km}(\alpha)\sin(z_{km}(\alpha)) + \bar{b}_{km}(\alpha)\sin(\bar{z}_{km}(\alpha))\right],$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial^2\Phi_{km}(\alpha)}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2}\left\langle\left\{[a_{km}(\alpha)]^2 + \nu[b_{km}(\alpha)]^2\right\}\cos(z_{km}(\alpha)) - \right.$$

$$\left. - \left\{[\bar{a}_{km}(\alpha)]^2 + \nu[\bar{b}_{km}(\alpha)]^2\right\}\cos(\bar{z}_{km}(\alpha))\right\rangle,$$

де $z_{km}(\alpha) = \lambda_{k1}\alpha_1 + \lambda_{m2}\alpha_2$, $\quad \bar{z}_{km}(\alpha) = \lambda_{k1}\alpha_1 - \lambda_{m2}\alpha_2$,

$a_{km}(\alpha) = \lambda_{k1}n_1(\alpha) + \lambda_{m2}n_2(\alpha)$, $\quad \bar{a}_{km}(\alpha) = \lambda_{k1}n_1(\alpha) - \lambda_{m2}n_2(\alpha)$,

$b_{km}(\alpha) = \lambda_{k1}\tau_1(\alpha) + \lambda_{m2}\tau_2(\alpha)$, $\quad \bar{b}_{km}(\alpha) = \lambda_{k1}\tau_1(\alpha) - \lambda_{m2}\tau_2(\alpha)$.

Подамо дельтоподібні функції у виразах (6.32) у вигляді рядів

$$\delta_\varepsilon(x,x^r,\varepsilon) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\lambda_k\varepsilon)\sin(\lambda_k x)\sin(\lambda_k x^r),$$

$$\delta(x,x^r,\varepsilon) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(\lambda_k\varepsilon)\cos(\lambda_k x)\cos(\lambda_k x^r), \tag{6.40}$$

де $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$; $\varphi(\lambda_k\varepsilon) = \int\limits_0^1 g(t)\cos(\lambda_k\varepsilon t)dt$. Якщо прийняти $g(t) = 2(1-t)$ $(0 \le t \le 1)$ або $g(t) = 1 + \cos(\pi t)$ $(0 \le t \le 1)$, то, відповідно, $\varphi(\lambda_k\varepsilon) = \left[\dfrac{\sin(\lambda_k\varepsilon/2)}{\lambda_k\varepsilon/2}\right]^2$ або $\varphi(\lambda_k\varepsilon) = \dfrac{\sin(\lambda_k\varepsilon/2)}{\lambda_k\varepsilon/2}\left(1 - \dfrac{(\lambda_k\varepsilon)^2}{\pi}\right)^{-1}$.

Якщо підставити вирази (6.40) для дельтоподібних функцій та розвинення (6.38) шуканих функцій у рівняння (6.34), то прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів цих функцій

$$
\begin{gathered}
(\Delta_{km}^2)^2 u_{km}^{r\varepsilon} + \Delta_{km}^{\nu} w_{km}^{r\varepsilon} = -c_{km}(\varepsilon)\frac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n}\frac{T^r}{B}, \\
\left[(\Delta_{km}^2)^2 + \left(\frac{Bk_0^2}{D} - \widehat{\theta}_0^2\right)\Delta_{km}^1\right] w_{km}^{r\varepsilon} + \frac{B}{D}\Delta_{km}^1 \Delta_{km}^{\nu} u_{km}^{r\varepsilon} = \\
= c_{km}(\varepsilon)\left[\Delta_{km}^1 \Phi_{km}(\alpha^r)\frac{P^r}{D} - \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha^r)}{\partial n}\frac{M^r}{D}\right], \\
\frac{B}{\Lambda}\Delta_{km}^{\nu} u_{km}^{r\varepsilon} + \left(\Delta_{km}^2 + \frac{Bk_0^2}{\Lambda} - \frac{D}{\Lambda}\widehat{\theta}_0^2\right) w_{km}^{r\varepsilon} - \Delta_{km}^2 \gamma_{km}^{r\varepsilon} = c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^r)\frac{P^r}{\Lambda}, \\
\Delta_{km}^2 T_{km}^{r\varepsilon} - B(1-\nu)(k_1 - k_2) w_{km}^{r\varepsilon} = c_{km}(\varepsilon)\frac{\partial \Phi_{km}^0(\alpha^r)}{\partial \tau} T^r, \qquad (6.41) \\
\Delta_{km}^2 H_{km}^{r\varepsilon} = c_{km}(\varepsilon)\lambda_{1k}\lambda_{2m}\frac{\partial \Phi_{km}^0(\alpha^r)}{\partial \tau} M^r, \\
\Delta_{0m} T_{0m}^{r\varepsilon} = \frac{c_{0m}(\varepsilon)}{2}\frac{\partial \Phi_{0m}^0(\alpha^r)}{\partial \tau} T^r, \quad \Delta_{k0} T_{k0}^{r\varepsilon} = \frac{c_{k0}(\varepsilon)}{2}\frac{\partial \Phi_{k0}^0(\alpha^r)}{\partial \tau} T^r, \\
\Delta_{0m}^2 H_{0m}^{r\varepsilon} = \frac{c_{km}(\varepsilon)}{2}\frac{\partial \Phi_{0m}^0(\alpha^r)}{\partial \tau} M^r, \quad \Delta_{k0}^2 H_{k0}^{r\varepsilon} = \frac{c_{km}(\varepsilon)}{2}\frac{\partial \Phi_{k0}^0(\alpha^r)}{\partial \tau}, \quad (k, m = \overline{1,\infty}),
\end{gathered}
$$

де $\Delta_{km}^2 = (\lambda_{k1})^2 + (\lambda_{m2})^2$; $\Delta_{km}^{\nu} = (k_1 + \nu k_2)(\lambda_{k1})^2 + (k_2 + \nu k_1)(\lambda_{m2})^2$; $\Delta_{km}^1 = 1 + \dfrac{D}{\Lambda}\Delta_{km}^2$;

$\widehat{\theta}_0^2 = \dfrac{2h\rho\theta_0^2}{D}$; $c_{km}(\varepsilon) = \dfrac{4}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)$; $u_{km}^{r\varepsilon} = u_{km}(\alpha^r, \varepsilon)$; $w_{km}^{r\varepsilon} = w_{km}(\alpha^r, \varepsilon)$;

$\gamma_{km}^{r\varepsilon} = \gamma_{km}(\alpha^r, \varepsilon)$; $T_{km}^{r\varepsilon} = T_{km}(\alpha^r, \varepsilon)$; $H_{km}^{r\varepsilon} = H_{km}(\alpha^r, \varepsilon)$.

Розв'язавши систему (6.41), отримаємо коефіцієнти розвинень невідомих функцій. Для ключових функцій маємо такі формули

$$\begin{Bmatrix} u_{km}^{r\varepsilon} \\ w_{km}^{r\varepsilon} \\ \gamma_{km}^{r\varepsilon} \end{Bmatrix} = \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B}[U_{km}][\Theta_{km}(\alpha^r)]\begin{Bmatrix} T^r \\ P^r \\ M^r \end{Bmatrix}, \tag{6.42}$$

де

$$[U_{km}] = \begin{bmatrix} u_{1km} & u_{2km} & u_{3km} \\ w_{1km} & w_{2km} & w_{3km} \\ \gamma_{1km} & \gamma_{2km} & \gamma_{3km} \end{bmatrix}; \qquad [\Theta_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} \partial/\partial n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial n \end{bmatrix} \Phi_{km}(\alpha^r);$$

$$u_{1km} = \frac{-1}{\omega_{km}(\theta)}\left[(\Delta_{km}^2)^2 + \left(\frac{Bk_0^2}{D} - \widehat{\theta}_0^2\right)\Delta_{km}^1\right];$$

$$u_{2km} = -w_{1km} = \frac{-B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^1\Delta_{km}^\nu; \qquad u_{3km} = \gamma_{1km} = \frac{B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^\nu; \tag{6.43}$$

$$w_{2km} = \frac{B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^1(\Delta_{km}^2)^2; \qquad w_{3km} = -\gamma_{2km} = -\frac{B}{D\omega_{km}(\theta)}(\Delta_{km}^2)^2;$$

$$\gamma_{3km} = \frac{-B}{D\omega_{km}(\theta)\Delta_{km}^1}\left[(\Delta_{km}^2)^2 + \frac{D\omega_{km}(\theta)}{\Lambda\Delta_{km}^2}\right];$$

$$\omega_{km}(\theta) = (\Delta_{km}^2)^4 + \frac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^\nu)^2] - \widehat{\theta}_0^2\Delta_{km}^1(\Delta_{km}^2)^2.$$

Ряди (6.38) з урахуванням оцінок $|c_{km}(\varepsilon)| = \mathrm{O}\left(1/\left(k^{q+1}m^{q+1}\right)\right)$, $\varepsilon \neq 0$, $|\Phi_{km}(\alpha)| = \mathrm{O}(1)$, $\left|\frac{\partial \Phi_{km}}{\partial \alpha_1}\right| = \mathrm{O}(k)$, $\left|\frac{\partial \Phi_{km}}{\partial \alpha_2}\right| = \mathrm{O}(m)$ у формулах (6.41)–(6.43) визначають при $q = 1$ узагальнений (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язок Фур'є і при $q \geq 2$ – розв'язок Фур'є задачі про усталені коливання шарнірно опертої пологої оболонки локально навантаженої, симетрично розподіленими у квадраті Π^r силами і моментами (6.33), що змінюються за гармонічним законом.

Зокрема, якщо $\varphi(t) = \left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2$, то $|c_{km}(\varepsilon)| = \mathrm{O}\left(1/\left(k^2m^2\right)\right)$.

Границі при $\varepsilon \to 0$ сум рядів (6.38) є сингулярним розв'язком рівнянь теорії оболонок Тимошенка за нехтування жорсткими поворотами відносно нормалі до серединної поверхні.

6.2.2. Власні коливання прямокутної у плані оболонки. Розглянемо власні коливання шарнірно опертої прямокутної у плані пологої оболонки. З умови існування ненульового розв'язку однорідної системи рівнянь, що відповідає системі (6.41), отримаємо таке характеристичне рівняння

$$\omega_{km}(\theta) = (\Delta_{km}^2)^4 + \frac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^\nu)^2] - \widehat{\theta}_0^2\Delta_{km}^1(\Delta_{km}^2)^2 = 0.$$

Звідси, для частити власних коливань θ_{km} знайдемо

$$\frac{2h\rho}{D}\theta_{km}^2 = \frac{(\Delta_{km}^2)^4 + \frac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^\nu)^2]}{\Delta_{km}^1(\Delta_{km}^2)^2}.$$

Приймаючи тут припущення про відсутність поперечних зсувів $(D/\Lambda \to 0)$, яке характерне для класичної моделі оболонки, одержимо

$$\frac{2h\rho}{D}\theta_{km}^2 = \frac{1}{(\Delta_{km}^2)^2}\left\{(\Delta_{km}^2)^4 + \frac{B}{D}\left[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^\nu)^2\right]\right\}.$$

З цієї формули для сферичної (при $k_1 = k_2 = k$) і циліндричної (при $k_1 = 0$) оболонок відповідно маємо формули

$$\frac{2h\rho}{D}\theta_{km}^2 = (\Delta_{km}^2)^2 + \frac{B(1-\nu^2)k^2}{D}, \tag{6.44}$$

$$\frac{2h\rho}{D}\theta_{km}^2 = \frac{1}{(\Delta_{km}^2)^2}\left\{(\Delta_{km}^2)^4 + \frac{B(1-\nu)k_2^2}{D}\left[(1+\nu)(\lambda_{k1})^4 + 2(\lambda_{k1})^2(\lambda_{m2})^2\right]\right\}. \tag{6.45}$$

У межах класичної теорії оболонок одержимо ідентичну до (6.44) формулу для шарнірно опертої пологої сферичної оболонки. Для пологої циліндричної оболонки отримаємо таке співвідношення

$$\frac{2h\rho}{D}\theta_{km}^2 = \frac{1}{(\Delta_{km}^2)^2}\left\{(\Delta_{km}^2)^4 + \frac{B(1-\nu)k_2^2}{D}(\lambda_{k1})^4\right\}. \tag{6.46}$$

Таким чином, обмеження стосовно повороту елемента оболонки навколо нормалі до серединної поверхні не впливає на власні частоти поперечних коливань шарнірно опертої сферичної оболонки (або пластини). Значення низьких частот власних коливань циліндричної панелі, обчислені за формулою (6.45), є більшими від значень відповідних частот, обчислених за формулою (6.46). Вони (значення низьких частот власних коливань) є близькими між собою для коротких циліндричних панелей ($l_1 < l_2$).

6.3. ЗАДАЧА ПРО НАВАНТАЖЕННЯ ОБОЛОНКИ ВЗДОВЖ ЛІНІЇ

6.3.1. Навантаження оболонки вздовж кривої. Сингулярний розв'язок крайової задачі, отриманий у попередньому підрозділі, використаємо для побудови узагальнених розв'зків задач про навантаження оболонки у довільних областях. Розглянемо задачу про усталені коливання шарнірно опертої прямокутної у плані пологої оболонки, навантаженої вздовж лінії Ляпунова силами і моментами, які з плином часу змінюються за гармонічним законом. Густини сил і моменту задаємо у вигляді $\widetilde{T} = T(\xi)\sin(\theta_0 t)$, $\widetilde{P} = P(\xi)\sin(\theta_0 t)$, $\widetilde{M} = M(\xi)\sin(\theta_0 t)$, де $T(\xi), P(\xi), M(\xi)$ – кусково-неперервні функції точки $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in L$; θ_0 – частота. Вважаємо, що напрямки мембранної сили (яка діє у дотичній площині до серединної поверхні) і моменту орієнтовані за нормальним вектором до кривої L (див. рис. 6.5).

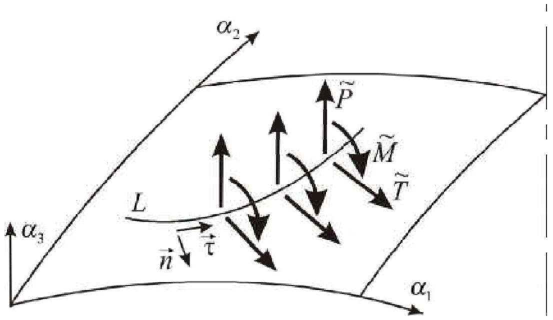

Рис.6.5. Навантаження оболонки вздовж лінії

Для зовнішнього навантаження на оболонку приймемо таке подання

$$\begin{Bmatrix} q_i(\alpha,t) \\ m_i(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \delta(\alpha,\xi,\varepsilon)\begin{Bmatrix} T(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} n_i(\xi)dl(\xi)\sin(\theta_0 t) \ \ (i=1,2),$$

$$q_3(\alpha,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \delta(\alpha,\xi,\varepsilon)P(\xi)dl(\xi)\sin(\theta_0 t). \qquad (6.47)$$

Тут $\delta(\alpha,\xi,\varepsilon) = \delta(\alpha_1,\xi_1,\varepsilon)\delta(\alpha_2,\xi_2,\varepsilon)$ – двовимірна дельтоподібна функція; $n_i(\xi)$ $(i=1,2)$ – компоненти одиничного нормального до L вектора.

Напружено-деформований стан оболонки описується рівняннями (6.34)–(6.36) з вільними членами рівнянь у формі (6.47). Узагальнений розв'язок задачі, що задовольняє умови (6.33), шукаємо у вигляді рядів (6.38).

Подамо дельтоподібні функції в (6.47) у вигляді рядів (6.40). Тоді ключові функції визначемо у формі інтегральних згорток узагальненого сингулярного розв'язку (6.38) і густин $T(\xi)$, $P(\xi)$, $M(\xi)$

$$\begin{Bmatrix} u(\alpha,t) \\ w(\alpha,t) \\ \gamma(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}(\xi,\varepsilon) \\ w_{km}(\xi,\varepsilon) \\ \gamma_{km}(\xi,\varepsilon) \end{Bmatrix} \Phi_{km}(\alpha)dl(\xi)\sin(\theta_0 t), \quad (\alpha\in\Pi), \tag{6.48}$$

де

$$\begin{Bmatrix} u_{km}(\xi,\varepsilon) \\ w_{km}(\xi,\varepsilon) \\ \gamma_{km}(\xi,\varepsilon) \end{Bmatrix} = \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B}[U_{km}][\Theta_{km}(\xi)] \begin{Bmatrix} T(\xi) \\ P(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix}, \tag{6.49}$$

$$c_{km}(\varepsilon) = \frac{4}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon), \quad \varphi(t) = \left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2.$$

Для нормальних компонент вектора переміщень та зусиль уздовж деякої кривої C, ґрунтуючись на поданнях (6.36), (6.48), маємо такі вирази

$$\begin{Bmatrix} u_n(\alpha,t) \\ \gamma_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{K} \begin{Bmatrix} u_{km}(\xi,\varepsilon) \\ \gamma_{km}(\xi,\varepsilon) \end{Bmatrix} \frac{\partial\Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} dl(\xi)\sin(\theta_0 t) \quad (\alpha\in\Pi), \tag{6.50}$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)[L_{km}(\alpha)][U_{km}][\Theta_{km}(\xi)] \begin{Bmatrix} T(\xi) \\ P(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} dl(\xi)\sin(\theta_0 t)$$

$$(\alpha\in\Pi, \quad \alpha\notin L, \quad K\varepsilon >> 1).$$

Тут $[L_{km}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} & -k_n^{\nu}(\alpha) & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial n} & -\dfrac{\partial}{\partial n} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} \end{bmatrix} \Phi_{km}(\alpha)$.

Функції N_n, Q_n, M_n є розривними при переході через криву L. Тому значення цих функцій на лівому і правому “берегах” кривої при переході через L у напрямку її нормалі визначаються за формулами $(\alpha\in L)$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \mp\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} T(\alpha) \\ P(\alpha) \\ M(\alpha) \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t) - \tag{6.51}$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\left[L_{km}(\alpha)\right]\left[U_{km}\right]\left[\Theta_{km}(\xi)\right]\begin{Bmatrix} T(\xi) \\ P(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} dl(\xi)\sin(\theta_0 t).$$

6.3.2. Навантаження оболонки вздовж прямолінійного відрізка. Позначимо через L^r відрізок, який характеризується довжиною $2l^r$, середньою точкою $\xi^r = (\xi_1^r, \xi_2^r)$ і напрямним одиничним вектором $\vec{\tau}^r = \{\tau_1^r, \tau_2^r\}$, де $\tau_1^r = \tau_1(\xi^r)$, $\tau_2^r = \tau_2(\xi^r)$. Нехай вздовж відрізка на оболонку діють рівномірно розподілені по його довжині сили та момент, які змінюються за гармонічним законом за часовою координатою

$$T(\alpha,t) = \frac{T_1^r}{2l^r}\sin(\theta_0 t), \qquad P(\alpha,t) = \frac{T_2^r}{2l^r}\sin(\theta_0 t), \tag{6.52}$$

$$M(\alpha,t) = \frac{T_3^r}{2l^r}\sin(\theta_0 t),$$

де $T_i^r = const \ (i = \overline{1,3})$ – амплітуди рівнодійних зовнішніх зусиль.

Обчисливши інтеграли у формулах (6.48) і (6.50) з урахуванням співвідношень (6.52), одержимо

$$\begin{Bmatrix} u(\alpha,t) \\ w(\alpha,t) \\ \gamma(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}\sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} U_1^r(\alpha) & U_2^r(\alpha) & U_3^r(\alpha) \\ W_1^r(\alpha) & W_2^r(\alpha) & W_3^r(\alpha) \\ \Gamma_1^r(\alpha) & \Gamma_2^r(\alpha) & \Gamma_3^r(\alpha) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix}\sin(\theta_0 t),$$

$$\begin{Bmatrix} u_n(\alpha,t) \\ \gamma_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \frac{-1}{B}\sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} U_{n1}^r(\alpha) & U_{n2}^r(\alpha) & U_{n3}^r(\alpha) \\ \Gamma_{n1}^r(\alpha) & \Gamma_{n2}^r(\alpha) & \Gamma_{n3}^r(\alpha) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix}\sin(\theta_0 t) \quad (\alpha \in \Pi), \tag{6.53}$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\sum_{r=1}^{N}\begin{bmatrix} N_{n1}^r(\alpha) & N_{n2}^r(\alpha) & N_{n3}^r(\alpha) \\ Q_{n1}^r(\alpha) & Q_{n2}^r(\alpha) & Q_{n3}^r(\alpha) \\ M_{n1}^r(\alpha) & M_{n2}^r(\alpha) & M_{n3}^r(\alpha) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix}\sin(\theta_0 t) \quad (\alpha \in \Pi, \alpha \notin L^r).$$

Тут прийняті такі позначення

$$\begin{Bmatrix} U_i^r(\alpha) \\ W_i^r(\alpha) \\ \Gamma_i^r(\alpha) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix} u_{ikm} \\ w_{ikm} \\ \gamma_{ikm} \end{Bmatrix}\Psi_{ikm}^r \Phi_{km}(\alpha),$$

$$\left\{\begin{matrix} U_{ni}^r(\alpha) \\ \Gamma_{ni}^r(\alpha) \end{matrix}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \left\{\begin{matrix} u_{ikm} \\ \gamma_{ikm} \end{matrix}\right\} \Psi_{ikm}^r \frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n}, \tag{6.54}$$

$$\left\{\begin{matrix} N_{ni}^r(\alpha) \\ Q_{ni}^r(\alpha) \\ M_{ni}^r(\alpha) \end{matrix}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \left\{\begin{matrix} u_{ikm}\Phi_{2km}(\alpha) - w_{ikm}\Phi_{1km}(\alpha) \\ \frac{\Lambda}{B}(\gamma_{ikm} - w_{ikm})\frac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} \\ \frac{D}{B}\gamma_{ikm}\Phi_{2km}(\alpha) \end{matrix}\right\} \Psi_{ikm}^r \quad \left(K\varepsilon >> 1\right),$$

$$\Psi_{1km}^r = \Psi_{3km}^r = \frac{1}{2l^r}\int_{L^r} \frac{\partial \Phi_{km}(\xi)}{\partial n} dl(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2}[a_{km}^r \varphi(l^r b_{km}^r)\sin z_{km}^r - \overline{a}_{km}^r \varphi(l^r \overline{b}_{km}^r)\sin \overline{z}_{km}^r], \tag{6.55}$$

$$\Psi_{2km}^r = \frac{1}{2l^r}\int_{L^r} \Phi_{km}(\xi) dl(\xi) = -\frac{1}{2}[\varphi(l^r b_{km}^r)\cos z_{km}^r - \varphi(l^r \overline{b}_{km}^r)\cos \overline{z}_{km}^r];$$

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z}; \quad a_{km}^r = a_{km}(\alpha^r), \ \overline{a}_{km}^r = \overline{a}_{km}(\alpha^r), \ b_{km}^r = b_{km}(\alpha^r), \ \overline{b}_{km}^r = \overline{b}_{km}(\alpha^r).$$

$a_{km}, \overline{a}_{km}, b_{km}, \overline{b}_{km}$, $\Phi_{1km}(\alpha) = k_n^v \cdot \Phi_{km}(\alpha)$, $\Phi_{2km}(\alpha) = \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + v\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\Phi_{km}(\alpha) -$ функції, означені у (6.39).

Для нормальних компонент зусиль на лівому і правому “берегах” відрізка L^r (у внутрішніх його точках) з (6.51) отримаємо формули

$$\left\{\begin{matrix} N_n(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \end{matrix}\right\} = \mp \frac{1}{4l^r} \left\{\begin{matrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{matrix}\right\} \sin(\theta_0 t) - \tag{6.56}$$

$$- \begin{bmatrix} N_{n1}^r(\alpha) & N_{n2}^r(\alpha) & N_{n3}^r(\alpha) \\ Q_{n1}^r(\alpha) & Q_{n2}^r(\alpha) & Q_{n3}^r(\alpha) \\ M_{n1}^r(\alpha) & M_{n2}^r(\alpha) & M_{n3}^r(\alpha) \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{matrix}\right\} \sin(\theta_0 t) \quad (\alpha \in L).$$

Зауважимо, що граничні (при $l^r \to 0$) функції у (6.53) співпадають з відповідними функціями сингулярного розв’язку.

6.4. ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК З ОТВОРАМИ І ВИРІЗАМИ

6.4.1. Граничні інтегральні рівняння. Розглянемо задачу про вимушені коливання шарнірно опертої пологої оболонки з отвором [87, 97]. Серединна поверхня оболонки – двозв'язна область $\Pi \setminus D$ на координатній поверхні $\alpha_3 = 0$, де $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ 0 < \alpha_1 < l_1, 0 < \alpha_2 < l_2\}$, D – область, границя L якої не має спільних точок з границею області П. Оболонка шарнірно оперта вздовж зовнішнього краю $\partial\Pi$, тобто виконуються умови (6.33). На внутрішньому контурі L задані нормальні компоненти зусиль, які змінюються за гармонічним законом від часової координати

$$N_n(\alpha,t) = N_{n0}(\alpha)\sin(\theta_0 t),\ \ Q_n(\alpha,t) = Q_{n0}(\alpha)\sin(\theta_0 t),$$
$$M_n(\alpha,t) = M_{n0}(\alpha)\sin(\theta_0 t)\ \ (\alpha \in L), \tag{6.57}$$

або – переміщення

$$u_n(\alpha,t) = 0,\ \ w(\alpha,t) = w_0(\alpha)\sin(\theta_0 t),\ \ \gamma_n(\alpha,t) = 0\ \ (\alpha \in L),$$

де $N_{n0}(\alpha),\ Q_{n0}(\alpha),\ M_{n0}(\alpha),\ w_0(\alpha_0)$ – задані кусково-неперервні функції.

Вважаємо, що жорсткий поворот елемента оболонки навколо нормалі до серединної поверхні є малим порівняно з іншими кутовими деформаціями. Тому для розв'язання задачі скористаємося спрощеною моделлю оболонки Тимошенка. Окрім того, безпосередньо не враховуємо тангенціальних компонент зусиль на контурі L.

Відповідно до запропонованої раніше схеми (див. підрозділ 6.1) насамперед розглянемо допоміжну задачу про коливання шарнірно опертої оболонки (прямокутної у плані), навантаженої вздовж лінії L зусиллями $T(\alpha,t),\ P(\alpha,t),\ M(\alpha,t)$ величина яких невідома. Узагальнений розв'язок цієї задачі подамо у вигляді інтегральних згорток (6.48), (6.50) і (6.51). Далі, підставивши співвідношення (6.51) у першу групу умов (6.57), зведемо задачу до системи трьох граничних інтегральних рівнянь

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} T(\alpha) \\ P(\alpha) \\ M(\alpha) \end{Bmatrix} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\left[L_{km}(\alpha)\right]\left[U_{km}\right]\left[\Theta_{km}(\xi)\right]\begin{Bmatrix} T(\xi) \\ P(\xi) \\ M(\xi) \end{Bmatrix} dl(\xi) =$$
$$= \begin{Bmatrix} N_{n0}(\alpha) \\ Q_{n0}(\alpha) \\ M_{n0}(\alpha) \end{Bmatrix} \qquad (\alpha \in L,\quad K\varepsilon >> 1)\,, \tag{6.58}$$

де $\left[L_{km}(\alpha)\right], \left[U_{km}\right], \left[\Theta_{km}(\xi)\right]$ – матриці, визначені формулами (6.42), (6.50).

Дискретизація інтегральних співвідношень (6.48), (6.50) та рівнянь (6.58) ґрунтується на наближенні лінії L ламаною лінією, яка складається з N прямолінійних відрізків L^r $(r = \overline{1,N})$, а також припущенні про рівномірний розподіл густин (6.52) вздовж кожного з відрізків і наближенні границь сум тригонометричних рядів (при $\varepsilon \to 0$) відповідними частинними сумами при достатньо малому значенні $\varepsilon \neq 0$.

Таким чином для невідомих густин рівнянь (6.58) маємо такі вирази

$$T(\xi) = \sum_{r=1}^{N} T_1^r g^r(\xi), \quad P(\xi) = \sum_{r=1}^{N} T_2^r g^r(\xi), \quad M(\xi) = \sum_{r=1}^{N} T_3^r g^r(\xi), \tag{6.59}$$

де $g^r(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2l^r}, \xi \in L^r, \\ 0, \quad \xi \notin L^r. \end{cases}$

Відрізок L^r визначаємо його середньою точкою $\xi^r = (\xi_1^r,\ \xi_2^r)$, довжиною $2l^r$ і напрямним одиничним вектором $\vec{\tau}^r = \{\tau_1^r,\ \tau_2^r\}$ або нормальним вектором $\vec{n}^r = \{n_1^r,\ n_2^r\}$ $(n_1^r = \tau_2^r, n_2^r = -\tau_1^r)$. Скориставшись узагальненим розв'язком (6.53) задачі про навантаження оболонки вздовж прямолінійного відрізка, із співвідношень (6.48) і (6.50) з урахуванням (6.59) одержимо дискретні аналоги для нормальних (відносно деякої лінії *C*) компонент переміщень та зусиль

$$\begin{Bmatrix} u_n(\alpha,t) \\ w(\alpha,t) \\ \gamma_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\frac{1}{B}\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} U_{n1}^r(\alpha) & U_{n2}^r(\alpha) & U_{n3}^r(\alpha) \\ -W_1^r(\alpha) & -W_2^r(\alpha) & -W_3^r(\alpha) \\ \Gamma_{n1}^r(\alpha) & \Gamma_{n2}^r(\alpha) & \Gamma_{n3}^r(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t),$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} N_{n1}^r(\alpha) & N_{n2}^r(\alpha) & N_{n3}^r(\alpha) \\ Q_{n1}^r(\alpha) & Q_{n2}^r(\alpha) & Q_{n3}^r(\alpha) \\ M_{n1}^r(\alpha) & M_{n2}^r(\alpha) & M_{n3}^r(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t). \tag{6.60}$$

Тут величини $U_{ni}^r(\alpha),\ldots,M_{ni}^r(\alpha)$ задаються формулами (6.54).

Задовольнивши рівняння (6.58) у контрольних точках $\hat{\xi}^q = (\hat{\xi}_1^q, \hat{\xi}_2^q)$ $(q = \overline{1,N})$, одержимо такі дискретні аналоги цих рівнянь

$$\frac{1}{4l^q}\begin{Bmatrix} T_1^q \\ T_2^q \\ T_3^q \end{Bmatrix} - \sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} N_{n1}^r(\xi^q) & N_{n2}^r(\xi^q) & N_{n3}^r(\xi^q) \\ Q_{n1}^r(\xi^q) & Q_{n2}^r(\xi^q) & Q_{n3}^r(\xi^q) \\ M_{n1}^r(\xi^q) & M_{n2}^r(\xi^q) & M_{n3}^r(\xi^q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{n0}(\xi^q) \\ Q_{n0}(\xi^q) \\ M_{n0}(\xi^q) \end{Bmatrix}. \tag{6.61}$$

При обчисленні елементів матриць у співвідношеннях (6.60) і (6.61) використовуємо формули (6.54), в яких границі при $\varepsilon \to 0$ сум рядів наближуємо їх частинними сумами при достатньо малому значенні $\varepsilon \neq 0$ і $K\varepsilon >> 1$.

За таких спрощень можна знайти наближений розв'язок задачі і за другим способом дискретизації інтегральних рівнянь (див. підрозділ 6.4.1), коли контрольними є точки $\hat{\xi}^q = (\hat{\xi}_1^q,\ \hat{\xi}_2^q)$, які розташовані на віддалі ε від контуру L. У цьому випадку рівняння (6.58) зводяться до такої системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} N_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & N_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & N_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \\ Q_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & Q_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & Q_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \\ M_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & M_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & M_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} N_{n0}(\hat{\xi}^q) \\ Q_{n0}(\hat{\xi}^q) \\ M_{n0}(\hat{\xi}^q) \end{Bmatrix}.$$

або для другої групи умов (6.57)

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} u_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & u_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & u_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \\ w_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & w_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & w_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \\ \gamma_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & \gamma_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & \gamma_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ w_{n0}(\hat{\xi}^q) \\ 0 \end{Bmatrix}. \qquad (6.62)$$

6.4.2. Коливання пластинки з круговим отвором. Розглянемо задачу про власні коливання шарнірно опертої квадратної пластини $(l_1 = l_2 = l)$ з центральним круговим отвором радіуса R. Рівняння кола L подамо у параметричному вигляді і застосуємо до нього рівномірну дискретизацію: $\alpha_1^r = l_1/2 - R\cos t^r$, $\alpha_2^r = l_2/2 - R\sin t^r$, $n_1^r = \tau_2^r = -\cos t^r$, $n_2^r = \tau_1^r = \sin t^r$, $l^r = \pi R/N$, $t^r = \pi R(2r-1)/N$ $\left(r = \overline{1,N}\right)$. Координати точок колокацій задаємо у вигляді: $\alpha_1^q = l_1/2 - R^*\cos t^q$, $\alpha_2^r = l_2/2 - R^*\sin t^q$ $\left(q = \overline{1,N}\right)$, де $R^* = R + \varepsilon$.

Таблиця 6.2

Частоти власних коливань пластини з отвором

R/l	$2h/l$			[43]
	0,1	0,05	0,01	
0,1	19,03	19,42	19,53	19,52
0,2	18,84	19,21	19,32	19,29
0,3	19,18	19,48	19,57	19,50

Знайдено основні частоти власних коливань $\overline{\theta} = \theta_0 l^2 \sqrt{2h\rho/D}$ квадратної пластинки з вільним від навантаження круговим отвором. У табл. 6.2 наведені значення частот для різних значень параметрів $2h/l,\ R/l$, а також $K = M = 451$ (довжин відрізків рядів), $\nu = 0{,}3$, $\varepsilon/l = 0{,}003$, $N = 48$. У таблиці для порівняння наведені також значення частот, одержаних у роботі [43] на основі рівнянь класичної теорії пластинок. Вплив деформацій поперечного зсуву на частоти коливань суттєво проявляється лише для пластинок з відносною товщиною $2h/l < 0{,}1$.

6.4.3. Коливання пластинки з підкріпленим квадратним отвором. Розглянемо прямокутну пластинку з центральним квадратним отвором, край якого підкріплений і допускається його переміщення як цілого ($2R$ – довжина сторін квадрата). Внаслідок дії на підкріплення рівномірно розподіленого нормального навантаження, підкріплення переміщається (у нормальному до пластинки напрямі) на відстань $w_0 = const$. Задача зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (6.62). Приймаючи до уваги симетричність задачі розглянемо лише ту частину пластинки, яка займає область $\Pi^1 = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ 0 < \alpha_1 < l_1/2;\ 0 < \alpha_2 < l_2/2\}$. При цьому параметри відрізків розбиття границі та координати контрольних точок визначаємо за формулами

$$x_1^r = \begin{cases} \dfrac{l_1}{2} - R, & 0 < t^r < \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{l_1}{2} - R\,\mathrm{ctg}\, t^r, & \dfrac{\pi}{4} < t^r < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad x_{21}^r = \begin{cases} \dfrac{l_2}{2} - R\,\mathrm{tg}\, t^r, & 0 < t^r < \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{l_2}{2} - R, & \dfrac{\pi}{4} < t^r < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$n_1^r = -\tau_2^r = \begin{cases} 1, & 0 < t^r < \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{4} < t^r < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad n_2^r = \tau_1^r = \begin{cases} 0, & 0 < t^r < \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{4} < t^r < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad t^r = \frac{(2r-1)\pi}{4N}, \quad r = \overline{1, N},$$

$$x_1^q = \begin{cases} \dfrac{l_1}{2} - R^*, & 0 < t^q < \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{l_1}{2} - R^*\,\mathrm{ctg}\, t^q, & \dfrac{\pi}{4} < t^q < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad x_{21}^q = \begin{cases} \dfrac{l_2}{2} - R^*\,\mathrm{tg}\, t^q, & 0 < t^q < \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{l_2}{2} - R^*, & \dfrac{\pi}{4} < t^q < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$n_1^q = -\tau_2^q = \begin{cases} 1, & 0 < t^q < \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{4} < t^q < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad n_2^q = \tau_1^q = \begin{cases} 0, & 0 < t^q < \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{4} < t^q < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad R^* = R + \varepsilon, \quad q = \overline{1, N}.$$

На рис. 6.6 наведені графіки приведених згинаючих моментів ($\widehat{M}_n = M_n w_0 / D$) на площадках з нормаллю $\vec{n} = \{1,\ 0\}$ вздовж лінії $\alpha_2 = l_2/2$ ($0 < \alpha_1 < l_1/2 - R$) (найменшого поперечного перерізу). Криві 1–4 відповідають моментам у пластинках з отворами, довжини півсторін яких дорівнюють 0,35; 0,3; 0,2; 0,15.

При розрахунках решта параметрів обиралися такими: $K = M = 400$ (кількість членів ряду); $\theta = 0$; $\nu = 0{,}3$; $N = 80$; $\varepsilon / l = 0{,}0025$. Бачимо, що максимальними є значення згинаючих моментів біля підкріплень.

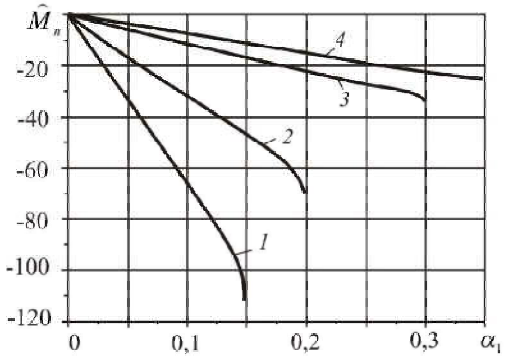

Рис. 6.6. Згинаючі моменти

6.4.4. Коливання оболонки з вирізами. Співвідношення (6.60) можна трактувати як "загальний" наближений розв'язок системи диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка залежить від 3N сталих величин T_1^r, T_2^r, T_3^r. Ці величини визначаються з граничних умов відповідної крайової задачі теорії оболонок, що задаються на "фіктивній" границі оболонки. Точність побудованого таким чином наближеного розв'язку залежить від параметрів K, ε, N, де $K\varepsilon >> 1$, K – довжина відрізків узагальнених частинних сум рядів.

Розглянемо задачу про відшукання власних частот коливань шарнірно опертої пологої оболонки, яка у плані має форму прямокутника з круговими вирізами радіуса R (див. рис. 6.7). Приймаємо, що краї вирізів оболонки вільні від навантаження, тобто виконуються умови

$$N_n(\alpha,t)=0, \quad Q_n(\alpha,t)=0, \quad N_n(\alpha,t)=0, \quad \alpha(\alpha_1,\alpha_2)\in L,$$

де L – частина границі серединної поверхні оболонки, яка складається з дуг кіл.

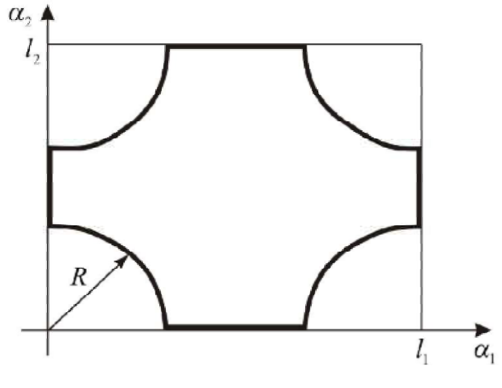

Рис. 6.7. Геометрія оболонки з вирізами

Для задачі з симетрично розташованими однаковими вирізами, наближено задовольнивши сформульовані граничні умови у контрольних точках $\widehat{\xi}^q = \left(\widehat{\xi}_1^q, \widehat{\xi}_2^q\right)$, $q = \overline{1,N}$, і врахувавши для зусиль апроксимаційні вирази (6.60), прийдемо до такої системи рівнянь відносно невідомих T_1^r, T_2^r, T_3^r:

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} N_{n1}^r(\widehat{\xi}^q) & N_{n2}^r(\widehat{\xi}^q) & N_{n3}^r(\widehat{\xi}^q) \\ Q_{n1}^r(\widehat{\xi}^q) & Q_{n2}^r(\widehat{\xi}^q) & Q_{n3}^r(\widehat{\xi}^q) \\ M_{n1}^r(\widehat{\xi}^q) & M_{n2}^r(\widehat{\xi}^q) & M_{n3}^r(\widehat{\xi}^{1q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \left(q = \overline{1,N}\right).$$

Тут $\alpha_1^r = R\cos t^r$, $\alpha_2^r = R\sin t^r$, $t^r = \dfrac{(2r-1)\pi}{4N}$, $n_1^r = \tau_2^r = -\cos t^r$, $n_2^r = -\tau_1^r = -\sin t^r$,

$l^r = \dfrac{\pi R}{4N}$ ($r = \overline{1,N}$); $\widehat{\xi}_1^q = (R+\varepsilon)\cos t^q$, $\widehat{\xi}_2^q = (R+\varepsilon)\sin t^q$, $t^q = \dfrac{(2q-1)\pi}{4N}$, $n_1^q = \tau_2^q = -\cos t^q$,

$n_2^q = -\tau_1^q = -\sin t^q$ ($q = \overline{1,N}$); $N_{ni}^r(\widehat{\xi}^q), M_{n1}^r(\widehat{\xi}^q), Q_{ni}^r(\widehat{\xi}^q), M_{ni}^r(\widehat{\xi}^q)$ – коефіцієнти, які обчислюємо за формулами (6.60) з урахуванням симетричності задачі.

Рівняння для визначення власних частот коливань оболонки з вирізами одержимо з умови існування ненульових розв'язків сформульованої системи рівнянь.

Крива на рис. 6.8 ілюструє залежність приведених основних власних частот коливань ізотропної ($\nu = 0{,}3$) квадратної пластинки ($\overline{\theta} = \theta_0 l^2 \sqrt{2h\rho/D}$) від приведеного радіуса вирізу $\overline{R} = R/l$. Наближені значення коефіцієнтів системи рівнянь обчислено при $\varepsilon/l = 0{,}002$, $K = 700$, $h/l = 0{,}05$.

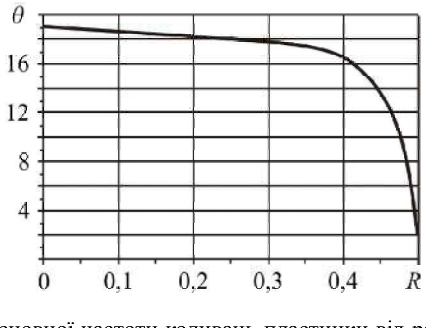

Рис. 6.8. Залежність основної частоти коливань пластинки від радіуса кругових вирізів

Аналіз отриманих результатів засвідчив, що наявність кругових вирізів у вершинах пластинки не суттєво впливає на значення основних власних частот її коливань. Тільки при великих вирізах ($\overline{R} > 0{,}3$) основні власні частоти коливань різко зменшуються.

6.5. ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНКИ З МАСИВНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Одержані у підрозділі 6.3 співвідношення застосуємо для відшукання розв'язку задачі про вимушені коливання шарнірно опертої прямокутної у плані пологої оболонки з абсолютно жорстким включенням масою m_0 (див. рис. 6.9). Вважаємо, що серединна поверхня D включення, симетрична відносно площин симетрії області П і є продовженням серединної поверхні оболонки. Центр маси включення співпадає з центром області D. На включення діє сила, що змінюється за гармонічним законом від часової координати з частотою θ_0, тобто $P(t) = P_0 \sin(\theta_0 t)$. Приймаємо також, що включення коливається тільки у поперечному до оболонки напрямі (тангенціальними до серединної поверхні і кутовими коливаннями включення нехтуємо).

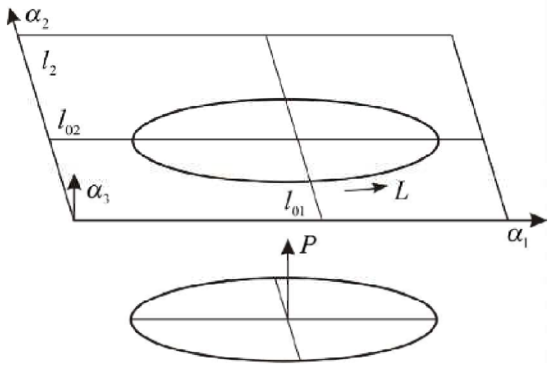

Рис. 6.9. Геометрія прямокутної пластинки з масивним включенням

Розглянемо два варіанти з'єднання включення з оболонкою – шарнірне і жорстке. При шарнірному з'єднанні задаємо прогин оболонки, нормальні до лінії L компоненти згинаючого моменту і переміщення у серединній поверхні (перша умова на L)

$$w(\alpha,t) = w_0 \sin(\theta_0 t),\ M_n(\alpha,t) = 0,\ u_n(\alpha,t) = 0,\ \alpha \in L, \tag{6.64}$$

де $w_0 = const$ – амплітуда коливань включення (невідома величина).

У разі жорсткого з'єднання задаємо такі величини (друга умова на L)

$$w(\alpha,t) = w_0 \sin(\theta_0 t),\ \gamma_n(\alpha,t) = 0,\ u_n(\alpha,t) = 0,\ \alpha \in L. \tag{6.65}$$

На контурі $\partial\Pi$ оболонки задаємо умови шарнірного опирання (6.33).

Таким чином задача полягає у відшуканні амплітуди w_0, частот власних коливань системи оболонка-включення, контактних і внутрішніх зусиль в оболонці.

6.5.1. Формування системи алгебраїчних рівнянь. Наближений розв'язок задачі шукаємо у вигляді співвідношень (6.59) і (6.60), у яких невідомими величинами є T_i^r $(i = \overline{1,\ 3},\ r = \overline{1,\ N})$. Для їх визначення скористаємось спрощеною схемою розв'язування

інтегральних рівнянь, яка була докладно описана у підрозділі 6.1.4. Задовольнивши умови (6.64), (6.65) у контрольних точках $\hat{\xi}^q = \left(\hat{\xi}_1^q, \hat{\xi}_2^q\right), (q = \overline{1, N})$, що лежать на нормалях до граничних елементів (усередині області $\Pi \setminus D$) на відстані ε від їх середніх точок, одержимо такі системи рівнянь у разі задання:
першої умови на L

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} W_1^r(\hat{\xi}^q) & W_2^r(\hat{\xi}^q) & W_3^r(\hat{\xi}^q) \\ M_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & M_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & M_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \\ U_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & U_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & U_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \tag{6.66}$$

другої умови на L

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} W_1^r(\hat{\xi}^q) & W_2^r(\hat{\xi}^q) & W_3^r(\hat{\xi}^q) \\ \Gamma_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & \Gamma_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & \Gamma_{n2}^r(\hat{\xi}^q) \\ U_{n1}^r(\hat{\xi}^q) & U_{n2}^r(\hat{\xi}^q) & U_{n3}^r(\hat{\xi}^q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_2^r \\ T_3^r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{6.67}$$

Тут функції $W_i^r(\xi),...,U_{ni}^r(\xi)$ визначаються за формулами (6.54).

Рівняння руху включення має вигляд

$$m_0 \frac{\partial^2 w(\alpha,t)}{\partial t^2} = P_0 \sin(\theta_0 t) - \int_{\hat{L}} p(\xi,t) dl(\xi) \quad (\alpha \in \hat{L}), \tag{6.68}$$

де $p(\xi,t)$ – сили взаємодії між включенням і оболонкою; $\hat{L}$ – лінія, що лежить в області $\Pi \setminus D$ на віддалі ε від лінії L.

За усталених коливань системи оболонка-включення маємо $p(\xi,t) = p(\xi)\sin(\theta_0 t)$. Врахувавши у рівняннях (6.68) відповідні умови (6.64), (6.65), одержимо

$$-m_0 \theta_0 w_0 = P_0 - \int_{\hat{L}} p(\xi) dl(\xi).$$

Дискретизуючи його з урахуванням рівності $p(\xi) = -Q_n(\xi)$ на лінії $\hat{L}$, матимемо

$$-m_0 \theta_0 w_0 = P_0 + \sum_{q=1}^{N} \int_{\hat{L}^q} Q_n(\xi) dl(\xi)$$

або з урахуванням співвідношень (6.60)

$$\frac{m_0 \theta_0}{2l^q} w_0 = \sum_{r=1}^{N} (\Omega_{n1}^r T_1^r + \Omega_{n2}^r T_2^r + \Omega_{n3}^r T_3^r) - \frac{P_0}{2l^q}, \tag{6.69}$$

де $\Omega_{ni}^r = \sum_{q=1}^{N} \hat{Q}_{ni}^{rq}$; $\hat{Q}_{ni}^{rq} = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \frac{\Lambda}{B} (\gamma_{ikm} - w_{ikm}) \Psi_{1km}(\hat{\xi}^q) \Psi_{ikm}^r$, $(K\varepsilon >> 1)$;

$$\Psi_{1km}(\hat{\xi}^q)=\frac{1}{2}\left\langle\left\{[a_{km}(\hat{\xi}^q)]^2+\nu[b_{km}(\hat{\xi}^q)]^2\right\}\varphi[l^q b_{km}(\hat{\xi}^q)]\cos z_{km}(\hat{\xi}^q)-\right.$$

$$\left.-\left\{[\overline{a}_{km}(\hat{\xi}^q)]^2+\nu[\overline{b}_{km}(\hat{\xi}^q)]^2\right\}\varphi[l^q\overline{b}(\hat{\xi}^q)]\cos\overline{z}_{km}(\hat{\xi}^q)\right\rangle.$$

За знайденими з систем рівнянь (6.66), (6.67), (6.69) значеннями величин T_i^r $(i=1,2;\ r=\overline{1,N})$ переміщення та напруження у будь-якій внутрішній точці оболонки визначаємо із співвідношень (6.60).

Частковий випадок розглянутої задачі при $m_0=0$ відповідає задачі про підкріплення краю отвору жорстким кільцем.

6.5.2. Коливання прямокутної пластинки з круговим включенням. Розглянемо симетричну задачу ($l_{01}=l_1/2$; $l_{02}=l_2/2$) про коливання прямокутної пластинки з круговим масивним включенням радіуса R (див. рис.6.9). Рівняння контура L задаємо у вигляді $\alpha_1=l_{01}-R\cos t$, $\alpha_2=l_{02}-R\sin t$, $0\le t<2\pi$. Контур розбито на N елементів довжини $2l^r=2\pi R/N$, з центральними точками $\alpha^r=(\alpha_1^r,\alpha_2^r)$ і напрямними векторами $\vec{\tau}=\{\sin t^r,-\cos t^r\}$, де $\alpha_1^r=l_1/2-R\cos t^r$, $\alpha_2^r=l_2/2-R\sin t^r$, $t^r=\pi(2r-1)/N$, $r=\overline{1,N}$. Наближені значення коефіцієнтів алгебраїчної системи рівнянь обчислено при $K=551$, $\varepsilon/l=0{,}004$ і $N=24$.

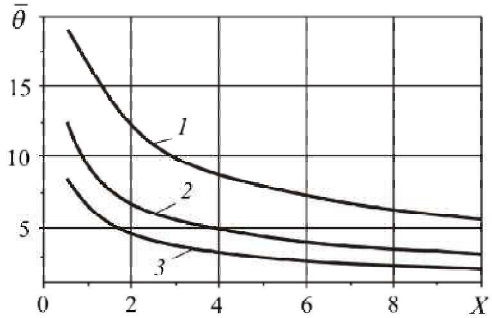

Рис. 6.10. Частоти власних коливань пластини з масивним включенням

Криві на рис.6.10 ілюструють залежність приведених основних власних частот коливань $\overline{\theta}=l^2\theta_0\sqrt{2h\rho/D}$ квадратної ізотропної $(l_1=l_2=l,\nu=0{,}3)$ пластинки від відношення маси включення до маси пластинки $X=m_0/(2hl^2\rho)$ для різних значень радіуса включення (криві 1–3 відповідають $R=0{,}35;\ 0{,}25;\ 0{,}15$). Зі зменшенням маси включення власні частоти коливань пластинки наближаються до значення $Y=19{,}21$, яке відповідає частоті власних коливань пластинки з підкріпленим отвором. Для граничного випадку задачі (при зменшенні радіуса кругового включення) одержані значення частот співпадають з частотами коливань пластинки із зосередженою масою.

6.6. ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ДВОЗВ'ЯЗНОЇ ОБОЛОНКИ

В основу досліджень напружено-деформованого стану оболонки закладено класичну теорію пологих оболонок за умови нехтування жорсткими поворотами відносно нормалі до серединної поверхні. Рівняння (3.28), (3.37), (3.38) з урахуванням нормальної до серединної поверхні компоненти інерційної сили мають вигляд

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2}=-q_i,\quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2}-Q_i=-m_i,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2}-\left(k_1N_{11}+k_2N_{22}\right)-2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q_3; \tag{6.70}$$

$$N_{ii}=-B\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_j^2}-\left(k_i+\nu k_j\right)w\right],\quad N_{ij}=-B(1-\nu)\frac{\partial u}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}+T_{ij},$$

$$M_{ii}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_i^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_j^2}\right),\quad M_{ij}=-D(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}\quad (i,j=1,2,\ i\neq j).$$

Нормальні і тангенціальні компоненти переміщень та напружень у точці $\alpha=\left(\alpha_1,\alpha_2\right)$ деякої гладкої кривої C з одиничними нормальним $\vec{n}(\alpha)=\{n_1(\alpha),\ n_2(\alpha)\}$ і тангенціальним $\vec{\tau}(\alpha)=\{\tau_2(\alpha),\ \tau_2(\alpha)\}$ векторами $\left(\tau_1=-n_2,\tau_2=n_1\right)$ визначаються за формулами

$$u_n=-\frac{\partial u}{\partial n},\quad u_\tau=-\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$\gamma_n=-\left(\frac{\partial w}{\partial n}-k_n u_n+k_{n\tau}u_\tau\right),\ \gamma_\tau=-\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}+k_{n\tau}u_n-k_\tau u_\tau\right),$$

$$N_n=-B\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)-\left(k_n+\nu k_\tau\right)w\right],$$

$$N_\tau=-B(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial n\partial \tau}+k_{n\tau}w\right]-T_{12}, \tag{6.71}$$

$$M_n=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right),\quad M_\tau=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial \tau},$$

$$Q_n^* = -D\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right] + (m_1 n_1 + m_2 n_1),$$

де $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1} n_1 + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2} n_2$; $\dfrac{\partial}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_1}\tau_1 + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_2}\tau_2$; $k_n = k_1 n_1^2 + k_2 n_2^2$; $k_\tau = k_1\tau_1^2 + k_1\tau_2^2$; $k_{n\tau} = n_1 n_2 (k_1 - k_2)$; Q_n^* – гранична зрізувальна сила.

Розглянемо задачу без початкових умов: знайти розв'язок системи рівнянь (6.70) в області $\Pi \setminus S \times]-\infty < t < \infty[$, де $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ 0 < \alpha_i < l_i\}\ (i = 1, 2)$; S – деяка область серединної поверхні оболонки, обмежена замкнутою кривою Ляпунова L. На зовнішньому контурі оболонки $\partial\Pi$ задано однорідні умови, які відповідають шарнірному закріпленню оболонки, а на контурі L – спрощені граничні умови (задаються три нормальні компоненти зусиль або переміщень). Зокрема, для навантаженого зусиллями краю

$$N_n = N_{n0}(\xi)\sin(\theta_0 t),\quad Q_n^* = Q_{n0}^*(\xi)\sin(\theta_0 t),$$
$$M_n = M_{n0}(\xi)\sin(\theta_0 t)\quad (\xi \in L); \tag{6.72}$$

шарнірно закріпленого рухомого краю

$$N_n = 0,\quad w = w_0(\xi)\sin(\theta_0 t),\quad M_n = 0\quad (\xi \in L); \tag{6.73}$$

рухомого підкріплення краю отвору

$$u_n = 0,\quad w = w_0(\xi)\sin(\theta_0 t),\quad \gamma_n = 0\quad (\xi \in L); \tag{6.74}$$

де $N_{n0}(\xi), Q_{n0}^*(\xi), w_0(\xi), M_{n0}(\xi)$ – задані функції; θ_0 – частота вимушених коливань.

Зауважимо, що тангенціальні компоненти зусиль уздовж кривої L визначаються відповідними співвідношеннями (6.71) і відповідають напружено-деформованому стану шарнірно опертої суцільної оболонки, навантаженої заданими зусиллями.

6.6.1. Функція Гріна для прямокутної області за використання спрощеної системи рівнянь класичної теорії оболонок. Знайдемо гармонічно залежний від часової координати формальний розв'язок Фур'є системи рівнянь (6.70) в області П за однорідних умов на її границі (що відповідають шарнірному опертю оболонки).

В області $\Pi^r = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ |\alpha_i - \alpha_i^r| \le \varepsilon\}\ (i = 1, 2)$, $\Pi^r \subset \Pi$, тіло навантажене силами і моментами

$$\begin{Bmatrix} q_i \\ m_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_1^r s_i^r \\ e_3^r s_i^r \end{Bmatrix} \delta(\alpha_1, \alpha_1^r, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^r, \varepsilon)\sin(\theta_0 t),$$
$$q_3 = e_2^r \delta(\alpha_1, \alpha_1^r, \varepsilon)\delta(\alpha_2, \alpha_2^r, \varepsilon)\sin(\theta_0 t), \tag{6.75}$$

де $\delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon)$ – дельтоподібна функція; e_1^r, e_2^r, e_3^r – амплітуди рівнодійних сил і моментів, які орієнтовані за напрямком одиничного вектора $\vec{s}^{\,r} = \{s_1^r,\ s_2^r\}$ серединної поверхні.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді подвійних тригонометричних рядів з урахуванням розвинень дельтоподібної функції за системами тригонометричних функцій (6.11). Для ключових функцій маємо розвинення

$$\begin{Bmatrix} u_\varepsilon \\ w_\varepsilon \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_{km}(\alpha^r) \\ w_{km}(\alpha^r) \end{Bmatrix} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha)\sin(\theta_0 t), \tag{6.76}$$

де $c_{km}(\varepsilon) = 4\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)/l_1 l_2$; $\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\lambda_{k1} = k\pi/l_1$; $\lambda_{m2} = m\pi/l_2$;

$$\varphi(t) = \left[\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2.$$

Підставивши формули (6.75), (6.76), (6.40) у рівняння (6.70), прийдемо до систем алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів невідомих функцій, звідки знайдемо

$$\begin{Bmatrix} u_{km}(\alpha^r) \\ w_{km}(\alpha^r) \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}[U_{km}][\Omega_{km}(\alpha^r)]\{E^r\}. \tag{6.77}$$

Тут

$$[U_{km}] = \begin{bmatrix} u_{1km} & u_{2km} & u_{3km} \\ w_{1km} & w_{2km} & w_{3km} \end{bmatrix}; \; \{E^r\}^T = \{e_1^r \quad e_1^r \quad e_1^r\};$$

$$[\Omega_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} \partial\Phi_{km}(\alpha^r)/\partial s & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & \partial\Phi_{km}(\alpha^r)/\partial s \end{bmatrix};$$

$$u_{1km} = \frac{1}{\omega_{km}(\theta)}\left[\Delta_{km}^2 + \frac{Bk_0^2}{D} - \widehat{\theta}_0^2\right]; \; u_{2km} = w_{1km} = \frac{-B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^{\nu};$$

$$u_{3km} = \frac{-B}{D\omega_{km}(\theta)}\Delta_{km}^{\nu}; \; w_{2km} = \frac{B}{D\omega_{km}(\theta)}\left(\Delta_{km}^2\right)^2; \; w_{3km} = \frac{B}{D\omega_{km}(\theta)}\left(\Delta_{km}^2\right)^2;$$

$$\Delta_{km}^{\nu} = (k_1 + \nu k_2)(\lambda_{k1})^2 + (k_2 + \nu k_1)(\lambda_{m2})^2; \; k_0^2 = k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2; \; \widehat{\theta}_0^2 = \frac{2h\rho}{D}\theta_0^2;$$

$$\Delta_{km}^2 = (\lambda_{k1})^2 + (\lambda_{m2})^2; \; \omega_{km}(\theta) = \left(\Delta_{km}^2\right)^4 + \frac{B}{D}\left[k_0^2\left(\Delta_{km}^2\right)^2 - \left(\Delta_{km}^{\nu}\right)^2\right] - \widehat{\theta}_0^2\left(\Delta_{km}^2\right)^2.$$

Нехай, для коефіцієнтів Фур'є функції $\delta(\alpha, \alpha^r, \varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ справедлива оцінка $\left|\varphi(\lambda_q \varepsilon)\right| = O\left(1/q^p\right)$ ($p \geq 2$). Тоді, якщо $p = 2$, то ряди, що задають переміщення та зусилля, рівномірно збігаються і, відповідно, співвідношення (6.76) задають ключові функції узагальненого (у розумінні рівномірної збіжності) розв'язку Фур'є розглянутої задачі. Якщо $p > 2$, то співвідношення (6.76) є розв'язком Фур'є задачі, оскільки рівномірно збігаються ряди, які задають переміщення, зусилля і похідні від зусиль.

Якщо у виразах (6.76) перейти до границі при $\varepsilon \to 0$, то одержимо функцію Гріна крайової задачі для системи рівнянь (6.70) в області П. Відповідні узагальнені суми рядів існують в усіх точках $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ області П, окрім точки $\alpha = \alpha^r$.

Співвідношення для визначення компонент приведених векторів переміщень і зусиль уздовж довільної кривої одержимо з допомогою формул (6.71).

6.6.2. Граничні інтегральні рівняння задачі про коливання оболонки з отвором. Сингулярний розв'язок системи рівнянь (6.70) в області П застосуємо для формулювання граничних інтегральних рівнянь задачі про усталені коливання прямокутної у плані шарнірно опертої оболонки з отвором. Позначимо через $T_i(\xi)\sin(\theta_0 t)$ $(i = 1, 2, 3)$ невідомі зусилля, розподілені вздовж лінії L $(\xi \in L)$ і орієнтовані за напрямом нормалі $\vec{n}(\xi) = \{n_1(\xi),\ n_2(\xi)\}$ до L.

Для основних ключових функцій маємо інтегральні подання

$$\begin{Bmatrix} u(\alpha,t) \\ w(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{K} \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B} [U_{km}] [\Omega_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} \times$$

$$\times \Phi_{km}(\alpha) dl(\xi) \sin(\theta_0 t) \qquad (\alpha \in \Pi,\ K\varepsilon >> 1), \tag{6.78}$$

де $\{T(\xi)\}^T = \{T_1(\xi) \quad T_2(\xi) \quad T_3(\xi)\}$.

Інтегральні подання для узагальнених переміщень і зусиль одержимо шляхом підстановки формул (6.78) у співвідношення (6.72).

Переходячи у формулах для зусиль до границі при $\alpha \to \alpha_0$ $(\alpha_0 \in L)$, запишемо інтегральні співвідношення для зусиль на границі. Підставивши ці інтегральні співвідношення в умови (6.73) або (6.74), одержимо систему трьох інтегральних рівнянь відносно невідомих величин. За умов (6.73) маємо

$$\frac{1}{2}\{T(\alpha)\} - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) [L_{km}(\alpha)] [U_{km}] [\Omega_{km}(\xi)] \times$$

$$\times \{T(\xi)\} dl(\xi) = \{N_0(\alpha)\} \qquad (\alpha \in L), \tag{6.79}$$

де

$$\{N_0(\alpha)\}^T = \{N_{n0}(\alpha) \quad Q_{n0}(\alpha) - T_3(\alpha) \quad M_{n0}(\alpha)\};$$

$$[L_{km}(\alpha)] = \begin{bmatrix} L_{km}^{11} & L_{km}^{12} \\ L_{km}^{21} & L_{km}^{22} \\ L_{km}^{31} & L_{km}^{32} \end{bmatrix} \Phi_{km}(\alpha);\ L_{km}^{11} = B\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right);\ L_{km}^{32} = D\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right);$$

$$L_{km}^{12} = -B\left[k_n(\alpha) + \nu k_\tau(\alpha)\right];\; L_{km}^{21} = L_{km}^{31} = 0;\; L_{km}^{22} = D\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right).$$

Наближений розв'язок системи рівнянь (6.79) шукаємо методом, що ґрунтується на поєднанні методів колокацій і апроксимації функцій послідовностями узагальнених частинних сум рядів (довжини K, за достатньо малого значення параметра $\varepsilon \neq 0$ і $K\varepsilon >> 1$). Лінію L наближаємо ламаною лінією $\widetilde{L}$, яка складається з N граничних елементів (прямолінійних відрізків) L^r $\left(r = \overline{1,N}\right)$, кожний з яких визначається середньою точкою $\xi^r = \left(\xi_1^r, \xi_2^r\right)$, довжиною $2l^r$ та напрямним одиничним вектором $\vec{\tau} = \left\{\tau_1^r, \tau_2^r\right\}$. Вважаємо, що зусилля, які діють на елемент, рівномірно розподілені, а їх рівнодійні $T_i^r\left(i = 1, 2, 3\right)$ (мембранна сила і момент) орієнтовані за напрямком нормального вектора $\vec{n} = \left\{n_1^r, n_2^r\right\}$ $\left(n_1^r = \tau_2^r, n_2^r = -\tau_1^r\right)$. Провівши перетворення у співвідношеннях (6.78) з урахуванням дискретизації кривої і зусиль, отримаємо

$$\begin{Bmatrix} u(\alpha,t) \\ w(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N}\begin{Bmatrix} U_i^r(\alpha) \\ W_i^r(\alpha) \end{Bmatrix}\frac{T_i^r}{B}\sin(\theta_0 t) \quad (\alpha \in \Pi), \tag{6.80}$$

де

$$\begin{Bmatrix} U_i^r(\alpha) \\ W_i^r(\alpha) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon \to 0}\sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix} u_{ikm} \\ w_{ikm} \end{Bmatrix}\Psi_{ikm}^r \Phi_{km}(\alpha), \quad K\varepsilon >> 1 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{6.81}$$

Коефіцієнти Ψ_{ikm}^r задаються формулами (6.55).

Суми рядів (6.81) наближаємо їх частинними сумами при $\varepsilon \neq 0$. Таким чином для коефіцієнтів функцій (6.80) з (6.81) одержимо такі апроксимаційні вирази

$$\begin{Bmatrix} U_i^r(\alpha) \\ W_i^r(\alpha) \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix} u_{ikm} \\ w_{ikm} \end{Bmatrix}\Psi_{ikm}^r \Phi_{km}(\alpha). \tag{6.82}$$

Підставивши формули (6.80) та (6.82) у співвідношення (6.72), отримаємо апроксимаційні вирази для нормальних (відносно кривої C) компонент векторів переміщень, сил та моментів у точці $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha \in C$, $\alpha \notin \widetilde{L}$,

$$\begin{Bmatrix} U_n(\alpha,t) \\ W\,(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N}\begin{Bmatrix} U_{ni}^r(\alpha) \\ W_i^r(\alpha) \end{Bmatrix}\frac{T_i^r}{B}\sin(\theta_0 t),$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N}\begin{Bmatrix} N_{ni}^r(\alpha) \\ Q_{ni}^r(\alpha) \\ M_{ni}^r(\alpha) \end{Bmatrix}\frac{T_i^r}{B}\sin(\theta_0 t), \tag{6.83}$$

де

$$\begin{Bmatrix} N_{ni}^r(\alpha) \\ Q_{ni}^r(\alpha) \\ M_{ni}^r(\alpha) \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} B\left[u_{ikm}\Phi_{2km}(\alpha) - w_{ikm}\Phi_{1km}(\alpha)\right] \\ Dw_{ikm}\Phi_{3km}(\alpha) \\ Dw_{ikm}\Phi_{2km}(\alpha) \end{Bmatrix} \Psi_{ikm}^r, \tag{6.84}$$

$$\begin{Bmatrix} U_{ni}^r(\alpha) \\ W_i^r(\alpha) \end{Bmatrix} = \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{ikm}\Phi_{km}(\alpha) \\ w_{ikm}\Phi_{km}(\alpha) \end{Bmatrix} \Psi_{ikm}^r,$$

$$\Phi_{1km}(\alpha) = \left\{(k_1 + \nu k_2)[n_1(\alpha)]^2 + (k_2 + \nu k_1)[n_2(\alpha)]^2\right\}\Phi_{km}(\alpha),$$

$$\Phi_{2km}(\alpha) = \frac{1}{2}\left\{[a_{km}(\alpha)]^2 + \nu[b_{km}(\alpha)]^2\right\}\cos(z_{km}(\alpha)) -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{[\bar{a}_{km}(\alpha)]^2 + \nu\left[\bar{b}_{km}(\alpha)\right]^2\right\}\cos(\bar{z}_{km}(\alpha)),$$

$$\Phi_{3km}(\alpha) = -\frac{1}{2}\Big\langle a_{km}(\alpha)\left\{[a_{km}(\alpha)]^2 + (2-\nu)[b_{km}(\alpha)]^2\right\}\sin(z_{km}(\alpha)) -$$

$$-\bar{a}_{km}(\alpha)\left\{[\bar{a}_{km}(\alpha)]^2 + (2-\nu)\left[\bar{b}_{km}(\alpha)\right]^2\right\}\sin(\bar{z}_{km}(\alpha))\Big\rangle.$$

Слід відзначити, що наближення функцій тригонометричними поліномами при $\varepsilon \neq 0$ відповідає розв'язку задачі про навантаження оболонки у смузі S_ε із серединною лінією $\widetilde{L}$ і шириною приблизно рівною 2ε.

При формулюванні системи алгебраїчних рівнянь (дискретних аналогів відповідних інтегральних рівнянь) задовольняємо граничні умови у точках тієї частини границі смуги, яка належить серединній поверхні оболонки. Оскільки функції у виразах (6.80) залежать від $3N$ невідомих параметрів T_i^r $\left(i = \overline{1,3},\ r = \overline{1,N}\right)$, справджуємо три умови у N точках колокацій $\widehat{\alpha}^p = \left(\widehat{\alpha}_1^p; \widehat{\alpha}_2^p\right)$ $\left(p = \overline{1,N}\right)$ – точках, які розташовані на віддалі ε_0 від середин цих елементів. Таким чином, сформульованій задачі відповідає така система алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N} \begin{Bmatrix} N_{ni}^r\left(\widehat{\alpha}^p\right) \\ Q_i^{*r}\left(\widehat{\alpha}^p\right) \\ M_{ni}^r\left(\widehat{\alpha}^p\right) \end{Bmatrix} \frac{T_i^r}{B} = \begin{Bmatrix} N_{n0}\left(\widehat{\alpha}^p\right) \\ Q_{n0}^*\left(\widehat{\alpha}^p\right) \\ M_{n0}\left(\widehat{\alpha}^p\right) \end{Bmatrix}. \tag{6.85}$$

Для задач з граничними умовами (6.73) і (6.74) маємо, відповідно, такі системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N}\begin{Bmatrix} N_{ni}^{r}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right) \\ W_{i}^{*r}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right) \\ M_{ni}^{r}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right)\end{Bmatrix}\frac{T_{i}^{r}}{B}=\begin{Bmatrix} 0 \\ w_{0}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right) \\ 0\end{Bmatrix}; \tag{6.86}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{r=1}^{N}\begin{Bmatrix} u_{ni}^{r}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right) \\ w_{i}^{r}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right) \\ \gamma_{ni}^{r}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right)\end{Bmatrix}\frac{T_{i}^{r}}{B}=\begin{Bmatrix} 0 \\ w_{0}\left(\widehat{\alpha}^{p}\right) \\ 0\end{Bmatrix}. \tag{6.87}$$

За знайденими з рівнянь (6.85), (6.86) чи (6.87) значеннями величин T_i^r переміщення і зусилля в оболонці визначаємо за формулами (6.82), (6.83). Власні частоти коливань оболонки визначаємо з умови існування нетривіальних розв'язків цих систем рівнянь (рівності нулю їх визначників).

Отримано та проаналізовано числовий розв'язок задачі для шарнірно закріпленої квадратної пластинки з центральним круговим отвором радіуса R [85]. Приймалось, що на краю отвору справджуються граничні умови (6.73) і $w_0(\xi) = w_0 = const$.

Враховуючи симетричність задачі, коефіцієнти рівнянь (6.86) набудуть вигляду

$$\begin{Bmatrix} N_{ni}^{r}(\alpha) \\ W_{ni}^{r}(\alpha) \\ M_{ni}^{r}(\alpha)\end{Bmatrix}=\sum_{k,m=1,3,...}^{K}\widehat{c}_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix} B\left[u_{ikm}\Phi_{2km}(\alpha)-w_{ikm}\Phi_{1km}(\alpha)\right] \\ Dw_{ikm}\Phi_{3km}(\alpha) \\ Dw_{ikm}\Phi_{2km}(\alpha)\end{Bmatrix}\Psi_{ikm}^{r},$$

де $\widehat{c}_{km}(\varepsilon)=\dfrac{16}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)$; $\varphi(t)=\left[\dfrac{\sin(t/2)}{t/2}\right]^2$. При цьому приймали до уваги відрізки та контрольні точки дуги кривої L, які належать області $\Pi^1 = \{(\alpha_1,\alpha_2)$: $0<\alpha_1<l_1/2;\ 0<\alpha_2<l_2/2\}$.

Координати точок розбиття та інших параметрів границі отримано із формул $\alpha_1^r = l_1/2 - R\cos t^r$, $\alpha_2^r = l_2/2 - R\sin t^r$, $n_1^r=\tau_2^r=-\cos t^r$, $n_2^r=\tau_1^r=\sin t^r$, $l^r=\pi R/N$, $t^r=\pi R(2r-1)/N$ $\left(r=\overline{1,N}\right)$. Для визначення координат контрольних точок маємо $\alpha_1^q = l_1/2-(R+\varepsilon)\cos t^q$, $\alpha_2^r = l_2/2-(R+\varepsilon)\sin t^q$ $\left(q=\overline{1,N}\right)$.

Табл. 6.3 містить наближені значення густин $\widetilde{T}_2^r = T_2^r/\left(2l^r\right)$, $\widetilde{T}_3^r = T_3^r/\left(2l^r\right)$ уздовж дуги ($0<\varphi<\pi/4$) кола L у разі задання граничних умов (6.73) на внутрішньому контурі і $l_1=l_2=1$, $R=0{,}2$, $\theta=0$, $w_0=1$, $D=1$. Послідовності наближених розв'язків, які залежать від параметрів ε, N, K, де K – довжини відрізків узагальнених частинних сум рядів, збігаються за умови $K\varepsilon >> 1$. Дані, приведені у таблиці, засвідчують, що числова схема (6.86) є стійкою і, відповідно, графіки розв'язку, побудовані за різної кількості елементів розбиття границі, практично не відрізняються.

Таблиця 6.3

Наближені розв'язки системи інтегральних рівнянь

$\widetilde{T}_{2r}$			$\widetilde{T}_{3r}$		
$N = 80$, $\varepsilon = 0{,}0015$ $K = 1500$	$N = 80$, $\varepsilon = 0{,}002$ $K = 1000$	$N = 40$, $\varepsilon = 0{,}002$ $K = 1000$	$N = 80$, $\varepsilon = 0{,}0015$ $K = 1500$	$N = 80$, $\varepsilon = 0{,}002$ $K = 1000$	$N = 40$, $\varepsilon = 0{,}002$ $K = 1000$
170,75	172,96		28,00	28,30	
160,14	162,14	169,66	27,56	27,84	28,16
139,95	141,57		26,71	26,95	
112,24	113,31	128,56	25,55	25,73	26,45
79,71	80,17		24,17	24,30	
45,59	45,39	62,33	22,72	22,78	23,67
13,18	12,38		21,34	21,33	
-14,35	-15,67	-3,64	20,16	20,10	20,88
-34,36	-36,04		19,30	19,20	
-44,87	-46,77	-44,36	18,84	18,73	19,15

На рис. 6.11 наведені графіки приведених згинних моментів $(l_1 = l_2 = l)$ в ізотропній квадратній пластинці ($\nu^1 = \nu^2 = 0{,}3$) з круговим отвором у разі задання граничних умов (6.74). Криві 1–5 відповідають розподілу згинних моментів у пластинках з отворами $R = 0{,}4$; 0,35; 0,3; 0,2; 0,15. Бачимо, що максимальні значення згинних моментів досягаються у точках підкріпленого краю пластинки.

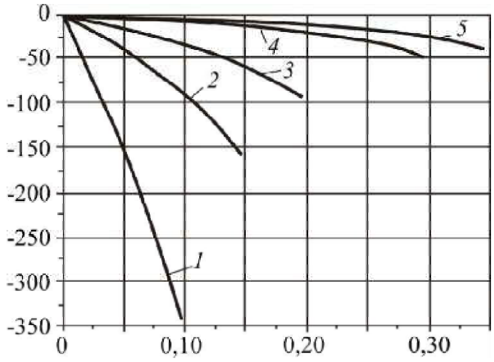

Рис. 6.11. Згинні моменти у квадратних пластинках із підкріпленим отвором

6.7. ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК

6.7.1. Наближення розв'язків для однорідних частин оболонки. Розглянемо задачу про коливання шарнірно опертої кусково-однорідної пологої оболонки, серединна поверхня якої $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2): \ 0 < \alpha_1 < l_1, \ 0 < \alpha_2 < l_2\}$. Оболонка складається з J частин (підобластей) із серединними поверхнями S^j $\left(j = \overline{1, J}\right)$, L^{ij} $\left(i, j = \overline{1, J}, \ i \neq j\right)$ – їх спільні границі $\sum_{j=1}^{J} S^j = \Pi$ (див. рис. 6.12). Вважаємо, що напрямки зовнішніх нормалей до кривих L^{ij} і L^{ji} протилежні. Зовнішні навантаження, що діють на оболонку, змінюються за гармонічним законом з частотою θ_0 від часової координати.

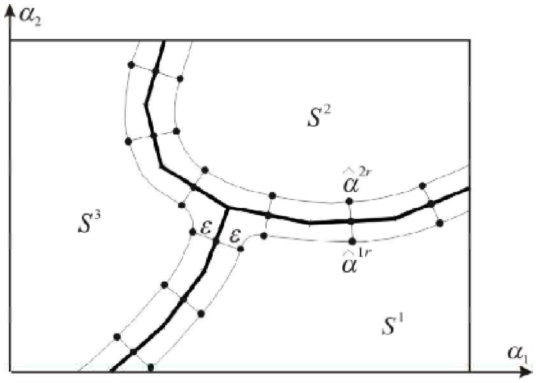

Рис.6.12. Геометрія неоднорідної пологої оболонки

Нехай напружено-деформований стан окремих частин оболонки описується рівняннями теорії оболонок Тимошенка за умови нехтування нормальними до серединної поверхні жорсткими поворотами. Переміщення і напруження кожної з цих частин подаємо в інтегральній формі. Вводячи невідомі зусилля $T^j(\xi)\sin(\theta_0 t)$, $P^j(\xi)\sin(\theta_0 t)$, $M^j(\xi)\sin(\theta_0 t)$ $\left(j = \overline{1, J}\right)$, які діють вздовж кривої L^j і орієнтовані за зовнішньою нормаллю до L^j, для виділених частин оболонки за аналогією з (6.51) отримаємо такі розв'язки

$$\begin{Bmatrix} u^j(\alpha,t) \\ w^j(\alpha,t) \\ \gamma^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{L^j} \sum_{k,m=1}^{K} \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B^i} \Phi_{km}(\alpha)\left[U_{km}^j\right]\left[\Theta_{km}(\xi)\right] \begin{Bmatrix} T^j(\xi) \\ P^j(\xi) \\ M^j(\xi) \end{Bmatrix} \times$$

$$\times\, dl(\xi)\sin(\theta_0 t) + \begin{Bmatrix} u_0^j(\alpha,t) \\ w_0^j(\alpha,t) \\ \gamma_0^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} \quad (\alpha \in S^j, \quad K\varepsilon >> 1), \tag{6.88}$$

де $\begin{Bmatrix} u_{0n}^j(\alpha,t) \\ w_0(\alpha,t) \\ \gamma_{0n}^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0n}^j(\alpha) \\ w_0(\alpha) \\ \gamma_{0n}^j(\alpha) \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t)$ – розв'язок Фур'є задачі про дію заданих навантажень на прямокутну в плані оболонку; $\left[U_{km}^j\right]$, $\left[\Theta_{km}(\xi)\right]$ – матриці, означені формулами (6.43); L^j – частина границі області S^j, яка не містить точок границі області П. Пружні характеристики j-ої частини оболонки позначено через B^j, Λ^j, D^j.

Виходячи із співвідношень (6.36) та (6.50), для визначення нормальних компонент переміщень і зусиль уздовж деякої кривої $C \subset S^j$ маємо такі вирази

$$\begin{Bmatrix} u_n^j(\alpha,t) \\ w^j(\alpha,t) \\ \gamma_n^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{L^j} \sum_{k,m=1}^{K} \frac{c_{km}(\varepsilon)}{B^j} \left[\Theta_{km}(\alpha)\right]\left[U_{km}^j\right]\left[\Theta_{km}(\xi)\right] \begin{Bmatrix} T^j(\xi) \\ P^j(\xi) \\ M^j(\xi) \end{Bmatrix} \times$$

$$\times dl(\xi)\sin(\theta_0 t) + \begin{Bmatrix} u_{0n}^j(\alpha,t) \\ w_0^j(\alpha,t) \\ \gamma_{0n}^j(\alpha,t) \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} N_n^j(\alpha,t) \\ Q_n^j(\alpha,t) \\ M_n^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{L^j} \sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\left[L_{km}(\alpha)\right]\left[U_{km}^j\right]\left[\Theta_{km}(\xi)\right] \times \qquad (6.89)$$

$$\times \begin{Bmatrix} T^j(\xi) \\ P^j(\xi) \\ M^j(\xi) \end{Bmatrix} dl(\xi)\sin(\theta_0 t) \quad + \begin{Bmatrix} N_{0n}^j(\alpha,t) \\ Q_{0n}^j(\alpha,t) \\ M_{0n}^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} \quad (\alpha \in S^j, \quad K\varepsilon >> 1).$$

Відповідно до схеми методу колокацій, насамперед дискретизуємо інтегральні співвідношення (6.89): криві L^j, що складаються з внутрішніх відрізків границі області S^j, наближуємо ламаними лініями $\widetilde{L}^j$, складеними з N^j прямолінійних відрізків $\widetilde{L}^{jr}$, які визначаються довжиною $2l^{jr}$, центральними точками $\alpha^{jr} = \left(\alpha_1^{jr}, \alpha_2^{jr}\right)$ та одиничними векторами $\vec{n}^{jr} = \left\{n_1^{jr},\ n_2^{jr}\right\}$ зовнішньої нормалі до $\widetilde{L}^j$; приймаємо рівномірний закон розподілу густин зусиль для всіх ділянок розбиття, $T^j(\xi) = T^{jr} / \left(2l^{jr}\right)$,

$P^j(\xi) = P^{jr} / (2l^{jr})$, $M^j(\xi) = M^{jr} / (2l^{jr})$ $(j = \overline{1,J})$; обчислюємо інтеграли у формулах (6.89) з урахуванням прийнятих наближень для кривих і густин

$$\begin{Bmatrix} u_n^j(\alpha,t) \\ w^j(\alpha,t) \\ \gamma_n^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \frac{-1}{B}\sum_{r=1}^{N^j} \begin{bmatrix} U_{n1}^{jr}(\alpha) & U_{n2}^{jr}(\alpha) & U_{n3}^{jr}(\alpha) \\ -W_1^{jr}(\alpha) & -W_2^{jr}(\alpha) & -W_3^{jr}(\alpha) \\ \Gamma_{n1}^{jr}(\alpha) & \Gamma_{n2}^{jr}(\alpha) & \Gamma_{n3}^{r}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{jr} \\ T_2^{jr} \\ T_3^{jr} \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t) + \begin{Bmatrix} u_{0n}^j(\alpha,t) \\ w_0(\alpha,t) \\ \gamma_{0n}^j(\alpha,t) \end{Bmatrix},$$

(6.90)

$$\begin{Bmatrix} N_n^j(\alpha,t) \\ Q_n^j(\alpha,t) \\ M_n^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} = -\sum_{r=1}^{N^j} \begin{bmatrix} N_{n1}^{jr}(\alpha) & N_{n2}^{jr}(\alpha) & N_{n3}^{jr}(\alpha) \\ Q_{n1}^{jr}(\alpha) & Q_{n2}^{jr}(\alpha) & Q_{n3}^{jr}(\alpha) \\ M_{n1}^{jr}(\alpha) & M_{n2}^{jr}(\alpha) & M_{n3}^{jr}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{jr} \\ T_2^{jr} \\ T_3^{jr} \end{Bmatrix} \sin(\theta_0 t) + \begin{Bmatrix} N_{0n}^j(\alpha,t) \\ Q_{0n}^j(\alpha,t) \\ M_{0n}^j(\alpha,t) \end{Bmatrix} \quad (\alpha \in S^j).$$

Тут

$$\begin{Bmatrix} U_{ni}^{jr}(\alpha) \\ W_i^{jr}(\alpha) \\ \Gamma_{ni}^{jr}(\alpha) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{ikm}^j \dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} \\ w_{ikm}^j \Phi_{km}(\alpha) \\ \gamma_{ikm}^j \dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} \end{Bmatrix} \Psi_{ikm}^{jr},$$

$$\begin{Bmatrix} N_{ni}^{jr}(\alpha) \\ Q_{ni}^{jr}(\alpha) \\ M_{ni}^{jr}(\alpha) \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{ikm}^j \Phi_{2km}(\alpha) - w_{ikm}^j \Phi_{1km}(\alpha) \\ \dfrac{\Lambda^j}{B^j}(\gamma_{ikm}^j - w_{ikm}^j)\dfrac{\partial \Phi_{km}(\alpha)}{\partial n} \\ \dfrac{D^j}{B^j}\gamma_{ikm\,ikm}^j \Phi_{2km}(\alpha) \end{Bmatrix} \Psi_{ikm}^{jr}.$$

Співвідношення (6.90) визначають напружено-деформований стан j-ої частини оболонки. Ці формули містять $3N^j$ невідомих величин $T_1^{jr}, T_2^{jr}, T_3^{jr}$ ($r = \overline{1, N^j}$).

6.7.2. Зведення до системи алгебраїчних рівнянь. Дискретні аналоги (6.90) інтегральних співвідношень (6.89) використаємо для формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно величин $T_1^{jr}, T_2^{jr}, T_3^{jr}$ ($r = \overline{1, N^j}$, $j = \overline{1,J}$). Приймаємо, що неперервно змінюються нормальні компоненти переміщень і напружень при переході через спільні ділянки границь однорідних частин оболонки. Ці умови задовольняємо наближено у контрольних точках $\hat{\xi}^{jq} = (\hat{\xi}_1^{jq}, \hat{\xi}_2^{jq})$ ($q = \overline{1, N^j}$), які розташовані всередині областей на відстані ε від середніх точок відрізків апроксимації границі. У результаті цих перетворень одержимо систему $3\sum_{j=1}^{J} N^j$ алгебраїчних рівнянь відносно такої ж кількості невідомих $T_1^{jr}, T_2^{jr}, T_3^{jr}$.

6.7.3. Коливання неоднорідної оболонки, складеної з двох частин. Розглянемо задачу про усталені коливання прямокутної пластинки, яка складається з двох однорідних частин із пружними характеристиками B^1, Λ^1, D^1, B^2, Λ^2, D^2 і серединними поверхнями $S^1 = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ 0 < \alpha_1 < a;\ 0 < \alpha_2 < l_2\}$, і $S^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ a < \alpha_1 < l_1;\ \ 0 < \alpha_2 < l_2\}$, ($0 < a < l_2$). На відрізку $L^1 = L^{12}$ границі області S^1 визначаємо одиничні нормальний і тангенціальний вектори $\vec{n}^1 = \{1, 0\}$, $\vec{\tau}^1 = \{0, 1\}$, а на відрізку $L^2 = L^{21}$ границі області S^2 маємо такі вектори: $\vec{n}^2 = \{-1, 0\}$, $\vec{\tau}^2 = \{0, -1\}$.

Для визначення невідомих величин $T_1^{1r}, T_2^{1r}, T_3^{1r}, T_1^{2r}, T_2^{2r}, T_3^{2r}$ ($r = \overline{1, N}$) у співвідношеннях (6.90) використаємо умови рівності нормальних до ліній L^1, L^2 компонент вектора переміщень і напружень у точках колокацій $\hat{\xi}^{1q} = \left(\hat{\xi}_1^{1q}, \hat{\xi}_2^{1q}\right)$, $\hat{\xi}^{2q} = \left(\hat{\xi}_1^{2q}, \hat{\xi}_2^{2q}\right)$ ($q = \overline{1, N}$), де $\hat{\xi}_1^{1q} = \hat{\xi}_1^{q} - \varepsilon$, $\hat{\xi}_2^{1q} = \hat{\xi}_2^{q}$; $\hat{\xi}_1^{2q} = \hat{\xi}_1^{q} + \varepsilon$, $\hat{\xi}_2^{2q} = \hat{\xi}_2^{q}$; ($q = \overline{1, N}$), $\hat{\xi}^{q} = \left(\hat{\xi}_1^{q}, \hat{\xi}_2^{q}\right)$ – середні точки відрізків розбиття ліній L^{12} і L^{21}. Відповідна система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} u_{n1}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & u_{n2}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & u_{n3}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) \\ w_1^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & w_2^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & w_3^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) \\ \gamma_{n1}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & \gamma_{n2}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & \gamma_{n3}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{1r} \\ T_2^{1r} \\ T_3^{1r} \end{Bmatrix} -$$

$$-\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} u_{n1}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & u_{n2}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & u_{n3}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) \\ w_1^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & w_2^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & w_3^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) \\ \gamma_{n1}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & \gamma_{n2}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & \gamma_{n3}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{2r} \\ T_2^{2r} \\ T_3^{2r} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} u_{n0}(\hat{\xi}^{q}) \\ w_0(\hat{\xi}^{q}) \\ \gamma_{n0}(\hat{\xi}^{q}) \end{Bmatrix}, \tag{6.92}$$

$$\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} N_{n1}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & N_{n2}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & N_{n3}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) \\ Q_{n1}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & Q_{n2}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & Q_{n3}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) \\ M_{n1}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & M_{n2}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) & M_{n3}^{1r}(\hat{\xi}^{1q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{1r} \\ T_2^{1r} \\ T_3^{1r} \end{Bmatrix} -$$

$$-\sum_{r=1}^{N} \begin{bmatrix} N_{n1}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & N_{n2}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & N_{n3}^{2r}(\hat{\xi}^{1q}) \\ Q_{n1}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & Q_{n2}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & Q_{n3}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) \\ M_{n1}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & M_{n2}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) & M_{n3}^{2r}(\hat{\xi}^{2q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{2r} \\ T_2^{2r} \\ T_3^{2r} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} N_{n0}(\hat{\xi}^{q}) \\ Q_{n0}(\hat{\xi}^{q}) \\ M_{n0}(\hat{\xi}^{q}) \end{Bmatrix} \quad \left(q = \overline{1, N}\right),$$

де $u_{n0}(\hat{\xi}^q)$, $w_0(\hat{\xi}^q)$, $\gamma_{n0}(\hat{\xi}^q)$, $N_{n0}(\hat{\xi}^q)$, $Q_{n0}(\hat{\xi}^q)$, $M_{n0}(\hat{\xi}^q)$ – амплітуди коливань переміщень і напружень однорідних оболонок за сумарної дії відомих зовнішніх навантажень.

Отримано та проаналізовано числовий розв'язок задачі про основні власні частоти коливань неоднорідної квадратної пластинки $(l_1 = l_2 = l)$, складеної з ізотропних пластинок ($\nu^1 = \nu^2 = 0{,}3$; $D^1 = D^2$, $B^1 = B^2$, $\Lambda^1 = \Lambda^2$) з різною густиною матеріалів. На рис. 6.13 показано залежність приведеної основної власної частоти $\theta = \theta_0^2 l^2 \sqrt{2h\rho^1 / D^1}$ від відношення густин частин пластинки $d = \sqrt{\rho^2/\rho^1}$ для $a/l_1 = 0{,}5; 0{,}4; 0{,}3$ (криві 1–3 відповідно).

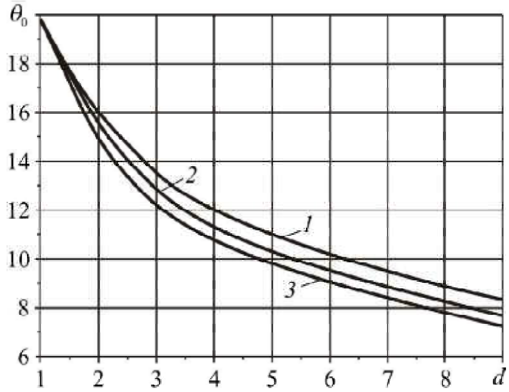

Рис. 6.13. Залежність приведених основних частот коливань неоднорідної пластинки від відношення густин її частин

Бачимо, що різке зменшення основних власних частот коливань пластинки спостерігається вже за незначного збільшення густини однієї з частин пластинки. Характер розподілу густини пластинки (при незмінній її масі) також суттєво впливає на значення власних частот коливань. Наприклад, для однорідної квадратної пластинки, яка має однакову з неоднорідною пластинкою масу при $a/l_1 = 0{,}3$ і $d = 4$, отримаємо основну власну частоту $\overline{\theta}_0 = 2\pi^2 \Big/ \sqrt{a/l + (1 - a/l)d^2} = 5{,}898$. Водночас основна власна частота неоднорідної пластинки дорівнює $\overline{\theta}_0 = 10{,}645$.

РОЗДІЛ 7

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Контактні задачі теорії пружності для тонкостінних тіл, сформульовані в межах просторових рівнянь теорії пружності, є погано обумовленими крайовими задачами, внаслідок наявності малих параметрів (відношень товщини до інших лінійних вимірів). Використання рівнянь теорій оболонок при дослідженні контактної взаємодії тонкостінних тіл дозволяє суттєво спростити побудову розв'язків відповідних контактних задач. Однак, у межах цих теорій не можуть бути сформульовані реальні умови взаємодії тонкостінних тіл і, зокрема, умови взаємодії у пригpаничних зонах областей контакту (ширина яких співмірна з товщиною оболонки). До того ж, контактні задачі теорії оболонок є некоректно поставленими в сенсі існування класичних розв'язків (у класі неперервних функцій).

Узагальнені розв'язки широкого класу контактних задач теорії пружності з використанням сингулярних розв'язків у явному вигляді отримано у роботах [1, 18, 20, 30, 65, 84, 116, 118]. Формулювання і побудова розв'язків окремих класів контактних задач для тонкостінних тіл із використанням сингулярних розв'язків відповідних систем диференціальних рівнянь запропоновані у роботах [23, 50, 57, 65, 72]. Коректність постановки задач про локальне навантаження тонкостінних тіл із використанням рівнянь теорій оболонок досліджено у роботах [10, 20, 96, 99, 116]. Однак лише середні значення напружень, віднесені до області, діаметр якої співмірний з товщиною оболонки, є реальними і співпадають з середніми значеннями напружень, отриманими на основі просторових рівнянь теорії пружності.

У даному розділі метод інтегральних рівнянь застосовується до розв'язування контактних задач теорії оболонок із використанням послідовнісного подання сингулярних розв'язків відповідних диференціальних рівнянь [95, 96, 99, 100]. Вибір параметрів дискретизації області контакту узгоджений зі значеннями параметрів апроксимації невідомих функцій (послідовностями частинних сум рядів) та умовами коректності застосування рівнянь теорії оболонок. Розглядаються задачі про взаємодію оболонок із гладкими жорсткими тілами та взаємодію оболонок з жорсткими тілами через лінійно та нелінійно пружні шари.

7.1. ВЗАЄМОДІЯ ОБОЛОНКИ І ЖОРСТКОГО ТІЛА ЧЕРЕЗ НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИЙ ШАР

Розглянемо тонку трансверсально-ізотропну оболонку, серединна поверхня якої займає область $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2): 0 < \alpha_1 < l_1;\ 0 < \alpha_2 < l_2\}$. Оболонка перебуває під дією заданого нормального навантаження $p_0 = p_0(\alpha)$, $\alpha = (\alpha_1; \alpha_2) \subset \Pi$, приведеного до серединної поверхні. Вона взаємодіє без відшарування через нелінійно пружний шар з абсолютно твердим тілом (ложементом) в області, що проектується на область $S \subseteq \Pi$ серединної поверхні (див. рис. 7.1).

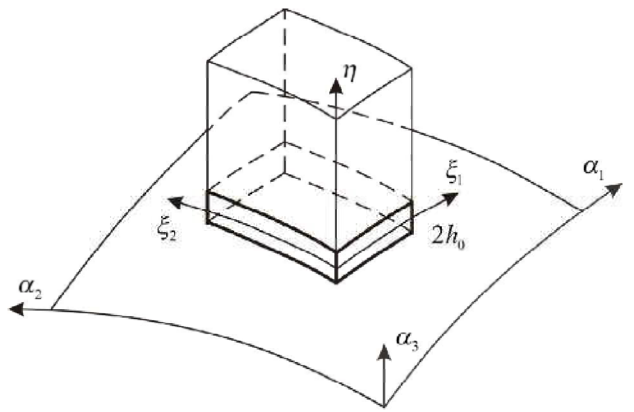

Рис.7.1. Взаємодія тіла і оболонки

Приймаємо, що в області взаємодії шару і оболонки, яка також є областю контакту шару з твердим тілом, відсутні дотичні напруження. Контактні нормальні напруження, приведені до серединної поверхні оболонки, позначимо через $p = p(\alpha^0)$, $\alpha^0 = (\alpha_1^0, \alpha_2^0) \in S$. Нормальні (до серединної поверхні оболонки) переміщення поверхні ложемента, що взаємодіє з проміжним шаром, вважаємо також заданими.

7.1.1. Математична модель деформування пружного шару. Для проміжкових шарів (при взаємодії тіл) формулюють різні спрощені математичні моделі деформування [1, 2, 10, 16, 20, 52, 57, 69, 81, 103]. Розглянемо криволінійний пружний шар товщини $2h_0$, що взаємодіє по лицевих поверхнях (у напрямку нормалі до серединної поверхні) з твердими тілами. За вихідні приймаємо рівняння теорії пружності, які описують напружено-деформований стан пружного шару в ортогональній системі координат ξ_1, ξ_2, η, де ξ_1, ξ_2 – криволінійні координати у серединній поверхні шару; η – прямолінійна координата, нормальна до серединної поверхні.

Вважаємо, що напруження, симетричні відносно серединної поверхні, переважають інші напруження і є сталими по товщині. Внаслідок цих припущень, переміщення точок шару можна подати у вигляді

$$u_1 = u_1^0(\xi_1, \xi_2), \quad u_2 = u_2^0(\xi_1, \xi_2),$$
$$u_3 = u_3^0(\xi_1, \xi_2) + e_3(\xi_1, \xi_2)\eta, \qquad -h_0 \le \eta \le h_0, \tag{7.1}$$

де u_1^0, u_2^0, u_3^0 – переміщення серединної поверхні шару; e_3 – деформація шару в напрямку осі $O\eta$.

Для ненульових компонент тензора напружень за урахування формул (7.1) маємо такі співвідношення

$$\sigma_{11}^0 = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1} + \nu \frac{\partial u_2^0}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33}^0,$$

$$\sigma_{22}^0 = \frac{E}{(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial \xi_2} + \nu \frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33}^0,$$

$$\sigma_{12}^0 = \sigma_{21}^0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial \zeta_1}\right), \tag{7.2}$$

$$\sigma_{33}^0 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}e_3 + \lambda\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial u_2^0}{\partial \xi_2}\right).$$

Рівняння рівноваги (проекції сил на координатні напрямки) є такими

$$\frac{\partial \sigma_{11}^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{12}^0}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{22}^0}{\partial \xi_2} = 0, \tag{7.3}$$
$$\sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, h_0) - \sigma_{33}(\xi_1, \xi_2, -h_0) = 0.$$

При формулюванні задач про взаємодію шару з іншими тілами задаємо нормальні переміщення лицевих поверхонь шару $u_3^- = u_3(\xi_1, \xi_2, -h_0)$, $u_3^+ = u_3(\xi_1, \xi_2, h_0)$ або контактний тиск $p = \sigma_{33}^0(\xi_1, \xi_2)$, де $\sigma_{33}^0(\xi_1, \xi_2) = \sigma(\xi_1, \xi_2, -h_0) = \sigma(\xi_1, \xi_2, h_0)$. У першому випадку переміщення серединної поверхні визначаємо за формулою $u_3^0 = \dfrac{u_3^+ + u_3^-}{2}$, а з останнього співвідношення системи (7.1) для поперечної деформації отримаємо

$$e_3 = \frac{u_3^+ - u_3^-}{2h_0}. \tag{7.4}$$

Таким чином, для визначення напружено-деформованого стану шару як у першому, так і в другому випадках, одержимо замкнуту систему рівнянь (7.2)–(7.4).

Для дослідження деформування шару, здебільшого, використовують спрощені математичні моделі. У формулах (7.2) для компоненти напружень σ_{33}^0 нехтують її осьовою складовою у серединній поверхні шару. За такого припущення одержують досить простий взаємозв'язок між нормальними напруженнями і поперечною деформацією шару (модель Вінклера)

$$\sigma_{33}^0 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} e_3.$$

Розглянемо нелінійну математичну модель деформування шару [10, 115]

$$\sigma_{33}^0 = \frac{\kappa_0 e_3}{\left(1+\dfrac{e_3}{e_3'}\right)\left(1-\dfrac{e_3}{e_3''}\right)} =$$

$$= \kappa_0 e_3 \left[1 + \left(\frac{1}{e_3''} - \frac{1}{e_3'}\right) e_3 + \left(\frac{1}{(e_3'')^2} + \frac{1}{(e_3')^2} - \frac{1}{e_3'' e_3'}\right) e_3^2 + \ldots\right]. \tag{7.5}$$

Тут κ_0 – приведена поперечна жорсткість шару; e_3', e_3'' – граничні значення поперечної деформації.

Функціональну залежність (7.5) можна записати у формі оберненої залежності, зокрема, якщо $e_3' = e_3'' = 1$, то одержимо

$$e_3 = \frac{2\sigma_{33}^0}{\kappa_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2\sigma_{33}^0}{\kappa_0}\right)^2} + 1\right]^{-1}$$

або

$$e_3 = \frac{\sigma_{33}^0}{\kappa_0} \left[1 + f\left(\frac{\sigma_{33}^0}{\kappa_0}\right)\right], \tag{7.6}$$

де $f(t) = (2t)^2 \left[\sqrt{1+(2t)^2} + 1\right]^{-2} = t^2(1 - 2t^2 + 10t^4 - 14t^6 + \cdots).$

7.1.2. Інтегральне подання для прогину оболонки. Нехай напружено-деформований стан оболонки описується рівняннями (6.34), тобто рівняннями теорії пологих оболонок Тимошенка за умови нехтування нормальними до серединної поверхні жорсткими поворотами. Краї оболонки шарнірно оперті. Прогин оболонки, яка перебуває під дією заданого навантаження $p_0(\alpha)$, $(\alpha = (\alpha_1; \alpha_2) \in \Pi)$ і контактного тиску $p(\alpha^0)$, $(\alpha^0 \in S)$, задаємо у вигляді

$$w(\alpha) = \iint\limits_S K_w(\alpha, \alpha^0) p(\alpha^0) ds(\alpha^0) + w_0(\alpha), \tag{7.7}$$

де $w_0(\alpha)$ – прогин оболонки, який відповідає навантаженню $p_0(\alpha)$; $K_w(\alpha, \alpha^0)$ – складова функції Гріна відповідної крайової задачі.

Визначимо функцію Гріна. Систему рівнянь (6.34) зведемо до такої системи ключових рівнянь відносно потенціальних функцій $u = u(\alpha)$, $\gamma = \gamma(\alpha)$ $\left(u_i = -\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_i},\ \gamma_i = -\dfrac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}\right)$ і прогину $w = w(\alpha)$:

$$\Delta\Delta u - \Delta^\nu w = 0, \quad \Delta\Delta\gamma - \frac{\Lambda}{D}\Delta(\gamma - w)] = 0, \tag{7.8}$$

$$\Lambda\Delta(\gamma - w) - B(\Delta^\nu u - k_0^2 w) = q_3,$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $\Delta^\nu = (k_1 + \nu k_2)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + (k_2 + \nu k_1)\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $k_0^2 = k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2$.

Умовам шарнірного опертя країв оболонки відповідають такі граничні умови

$$w(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = 0} = 0, \quad w(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = l_1} = 0,$$

$$u(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = 0} = 0, \quad u(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = l_1} = 0, \tag{7.9}$$

$$\gamma(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = 0} = 0, \quad \gamma(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = l_1} = 0.$$

Насамперед розглянемо задачу про дію на оболонку локалізованого у прямокутнику $\Pi_\varepsilon = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ |\alpha_i - \alpha_i^0| \le \varepsilon\}$, $\Pi_\varepsilon \subset \Pi$, нормального навантаження $q_3 = \delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)\,\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon)$, $\varepsilon \ne 0$, де $\delta(\alpha_1, \alpha_1^0, \varepsilon)$, $\delta(\alpha_2, \alpha_2^0, \varepsilon)$ – дельтоподібні функції (6.11). Розв’язок Фур’є задачі (7.8), (7.9) в області П одержимо за виконання оцінки $|\varphi(\lambda_k \varepsilon)| = O\left(\dfrac{1}{k^q}\right)$, $q \ge 2$, для коефіцієнтів Фур’є дельтоподібних функцій. Якщо дельтоподібні та шукані функції розвинути у ряди Фур’є

$$q_3 = \sum_{k,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}(\alpha^0)\Phi_{km}(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix} u_\varepsilon \\ w_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon \end{Bmatrix} = \frac{1}{D}\sum_{k,m=1}^{\infty} c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \end{Bmatrix}\Phi_{km}(\alpha^0)\Phi_{km}(\alpha), \tag{7.10}$$

то рівняння (7.8) зведемо до такої системи трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів рядів (7.10)

$$\left(\Delta_{km}^2\right)^2 u_{km} + \Delta_{km}^{\nu} w_{km} = 0, \quad \Delta_{km}^2 \gamma_{km} + \frac{\Lambda}{D}\left(\gamma_{km} - w_{km}\right) = 0\,,$$

$$\Lambda \Delta_{km}(\gamma_{km} - w_{km}) - B(\Delta_{km}^{\nu} u + k_0^2 w_{km}) = -1,$$

де $\Phi_{km}(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\sin(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $c_{km}(\varepsilon) = 4\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)/(l_1 l_2)$; $\lambda_{k1} = k\pi/l_1$; $\lambda_{m2} = m\pi/l_2$; $\Delta_{km}^2 = (\lambda_{k1})^2 + (\lambda_{m2})^2$. Вважаємо, що $g_1(t) = 2(1-t), 0 \le t \le 1$, – базова функція відповідної дельтоподібної послідовності функцій і $\varphi(\lambda) = \left[\dfrac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2$.

З цієї системи рівнянь визначимо коефіцієнти рядів невідомих функцій. Зокрема, для коефіцієнтів розвинення функції w маємо таку формулу

$$w_{km} = \frac{(\Delta_{km}^2)^2 \Delta_{km}^1}{(\Delta_{km}^2)^4 + \dfrac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^{\nu})^2]}, \tag{7.11}$$

де $\Delta_{km}^1 = 1 + \dfrac{D}{\Lambda}\Delta_{km}^2$.

Тепер функцію Гріна розглядуваної задачі запишемо як границю сум рядів (7.10)

$$\begin{Bmatrix} K_u \\ K_w \\ K_\gamma \end{Bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{Bmatrix} u_\varepsilon \\ w_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon \end{Bmatrix} = \frac{1}{D}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K} c_{km}(\varepsilon)\begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \end{Bmatrix}\Phi_{km}(\alpha^0)\Phi_{km}(\alpha) \quad (K\varepsilon >> 1).$$

Ядро інтегральної згортки (7.7) для функції прогину з коефіцієнтами, визначиними згідно формули (7.11), є таким

$$K_w(\alpha,\alpha^0) = \frac{1}{D}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k,m=1}^{K}\frac{c_{km}(\varepsilon)(\Delta_{km}^2)^2\Delta_{km}^1}{(\Delta_{km}^2)^4 + \dfrac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^{\nu})^2]}\times$$
$$\times\Phi_{km}(\alpha^0)\Phi_{km}(\alpha) \qquad (K\varepsilon >> 1). \tag{7.12}$$

Прогин оболонки, яка перебуває під дією заданого навантаження і невідомого контактного тиску, можна також визначити з використанням формули (7.7).

7.1.3. Інтегральне рівняння задачі. Побудова числового розв'язку. Розглядаючи взаємодію оболонки з абсолютно твердим тілом через проміжний шар, залежність між поперечними напруженнями і переміщеннями шару задаємо формулою (7.6). Для визначення контактного тиску і переміщень точок поверхні, яка взаємодіє з оболонкою, використовуємо співвідношення (7.7) і умову спряження оболонки і шару.

Оскільки шар щільно прилягає до оболонки в області контакту, то рівними будуть нормальні переміщення точок відповідних поверхонь оболонки і шару,

$$w(\xi) = u_3(\xi, -h_0), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in S, \tag{7.13}$$

де $u_3(\xi, h_0) -$ задані нормальні переміщення точок поверхні шару, що взаємодіє з ложементом.

Підставимо формули (7.7) в умову контакту (7.13). Враховуючи співвідношення (7.6), одержимо таке інтегральне рівняння відносно функції $p(\alpha^0)$

$$\begin{gathered} \frac{2h_0(\xi)p(\xi)}{\kappa_0}\left[1 + f\left(\frac{p(\xi)}{\kappa_0}\right)\right] + \iint_S K_w(\xi, \alpha^0)p(\alpha^0)ds(\alpha^0) = \\ = u_3(\xi, h_0) - w_0(\xi), \qquad \xi \in S. \end{gathered} \tag{7.14}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (7.14) шукаємо методом послідовних наближень у поєднанні з методом колокацій. При цьому область S апроксимуємо системою прямокутників Π^r, $r = \overline{1, N}$, з центральними точками $\alpha_0^r = (\alpha_{10}^r; \alpha_{20}^r)$ і сторонами $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$, паралельними до координатних осей. Вважаємо, що контактні напруження є сталими на кожному з прямокутників, а невідомими є рівнодійні P^r цих напружень,

$$p^r(\alpha_0, \varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{P^r}{4\varepsilon_1\varepsilon_2}, \alpha \in \Pi^r, \\ 0, \qquad \alpha \notin \Pi^r. \end{cases} \tag{7.15}$$

Враховуючи співвідношення (7.15) та (7.7) отримаємо таку наближену формулу для визначення прогину оболонки

$$w(\alpha) = \sum_{r=1}^{N} K^r(\alpha)P^r + w_0(\alpha), \tag{7.16}$$

де

$$K^r(\alpha) = \frac{1}{4\varepsilon_1\varepsilon_2}\iint_{\Pi^r} K_w(\alpha, \alpha_0)ds(\alpha_0) =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K_w((\alpha_1, \alpha_2); (\alpha_{10}^r + \varepsilon_1 t_1, \alpha_{20}^r + \varepsilon_2 t_2))\, dt_1 dt_2 = \tag{7.17}$$

$$= \frac{1}{D}\lim_{\varepsilon \to 0}\sum_{k,m=1}^{K} \frac{c_{km}(\varepsilon)(\Delta_{km}^2)^2 \Delta_{km}^1 \varphi_0(\lambda_{1k}\varepsilon_1)\varphi_0(\lambda_{2m}\varepsilon_2)}{(\Delta_{km}^2)^4 + \dfrac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km}^2)^2 - (\Delta_{km}^\nu)^2]}\Phi_{km}(\alpha^0)\Phi_{km}(\alpha), \; (K\varepsilon >> 1); \; \varphi_0(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Оскільки прогин оболонки, поданий у вигляді (7.16), залежить від N коефіцієнтів, то інтегральне рівняння (7.14) можемо задовольнити тільки в N контрольних точках $\widehat{\alpha}^q = (\widehat{\alpha}_1^q, \widehat{\alpha}_2^q)$, $q = \overline{1, N}$, якими можуть бути центральні точки прямокутників Π^q. Дискретизуючи інтеграл у рівнянні (7.14) з урахуванням співвідношень (7.15), (7.16), прийдемо до такої системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{h_0 P^q}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_0}\left[1 + f\left(\frac{P^q}{4\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_0}\right)\right] + \sum_{r=1}^{N} K^r(\widehat{\alpha}^q)P^r = u_3(\widehat{\alpha}^q, h_0) - w_0(\widehat{\alpha}^q), \quad q = \overline{1, N}.$$

Наближений розв’язок цієї системи рівнянь шукаємо методом простої ітерації. Для визначення нульового і n-го наближень розв’язку маємо такі системи лінійних рівнянь:

$$\frac{h_0 P_0^q}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_0} + \sum_{r=1}^{N} K^r(\widehat{\alpha}^q)P_0^r = u_3(\widehat{\alpha}^q, h_0) - w(\widehat{\alpha}^q),$$

$$\frac{h_0 P_n^q}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_0} + \sum_{r=1}^{N} K^r(\widehat{\alpha}^q)P_n^r = u_3(\widehat{\alpha}^q, h_0) - w(\widehat{\alpha}^q) - \frac{h_0 P_{n-1}^q}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_0} f\left(\frac{h_0 P_{n-1}^q}{4\varepsilon_1\varepsilon_2\kappa_0}\right), \quad q = \overline{1, N}.$$

Для обчислення коефіцієнтів $K^r(\alpha^q)$ використаємо наближену формулу, одержану із співвідношення (7.17) заміною границі суми подвійного тригонометричного ряду (при $\varepsilon \to 0$) відповідною його узагальненою частинною сумою при достатньо малому значенні параметра $\varepsilon \neq 0$. Якщо вибрати значення параметра $\varepsilon \approx h$, то похибки при обчисленні величин, що визначають напружено-деформований стан оболонки, не перевищують похибок, які виникають внаслідок використання рівнянь теорії оболонок.

7.2. ВЗАЄМОДІЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА З ЖОРСТКИМИ ОПОРАМИ ЧЕРЕЗ НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИЙ ШАР

7.2.1. Взаємодія циліндричного резервуара з жорсткими опорами. Розглянемо контактну задачу про взаємодію циліндричного резервуара з двома опорами через нелінійно-пружний шар (прокладку) [10] (див. рис. 7.2). Резервуар заповнено рідиною під тиском.

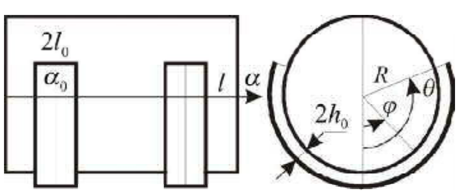

Рис. 7.2. Геометрія резервуара

Взаємозв'язок поперечних напружень і деформацій проміжкового шару описується залежністю (7.6). Вважаємо, що спосіб з'єднання країв оболонки і днищ резервуара, а також жорсткість днищ не впливають на розподіл контактних напружень в опорах. Тому резервуар розглядаємо як замкнуту циліндричну оболонку з шарнірно опертими краями. Серединну поверхню оболонки віднесемо до циліндричної системи координат α_1, α_2 $(\alpha_2 = R\varphi)$. Нехай l_1 і R – довжина і радіус оболонки, $R + 2h_0$ – радіус внутрішніх циліндричних поверхонь опор. Оболонка взаємодіє з двома симетрично розташованими опорами через нелінійно-пружні шари вздовж смуг $S_1 = \left\{(\alpha_1, \varphi):\ \left|\alpha_1 - \overline{\alpha}_1^0\right| < l_0;\ |\varphi| < \theta\right\}$ і $S_2 = \left\{(\alpha_1, \varphi):\ \left|\alpha_1 - l_1 + \overline{\alpha}_1^0\right| < l_0;\ \ |\varphi < \theta|\right\}$, де $2h_0, 2l_0$ – товщина і ширина шарів; $\overline{\alpha}_1^0, l_1 - \overline{\alpha}_1^0$ – віддаль від початку координат до середин опор.

Дію на оболонку рідини і додаткового тиску p_0 моделюємо такою функцією

$$\sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_2, -h) = p_0(\alpha_1, \alpha_2) = p_0 + R\rho\left(1 + \cos\frac{\alpha_2}{R}\right),$$

де ρ – питома вага рідини.

Приймаємо, що контактні напруження не змінюються по ширині опор і шукаємо їх у вигляді

$$\sigma_{33}(\alpha_1, \alpha_2, +h) = p(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{cases} p_1(\alpha_2), & (\alpha_1, \alpha_2) \in S_1, \\ p_2(\alpha_2), & (\alpha_1, \alpha_2) \in S_2, \\ 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \notin S_1 \cup S_2. \end{cases} \tag{7.18}$$

Для опису напружено-деформованого стану оболонки скористаємось системою рівнянь (2.41), (3.12)–(3.14), яка для випадку сталих геометричних параметрів оболонки прийме вигляд

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i = -2\sigma_i^-, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -2h\sigma_i^+,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{22} + k_2 N_{22}) = -2\sigma_3^- \quad (i = 1,\ 2),$$

$$N_{ii} = -B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_j^2} - (k_i + \nu k_j)w\right),$$

$$M_{ii} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i^2} + \nu\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_j^2}\right), \tag{7.19}$$

$$N_{12} = -B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + T, \quad N_{21} = -B(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} - T,$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} + H, \quad M_{21} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} - H,$$

$$Q_i = \Lambda'\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(w-\gamma+k_i u) \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j),$$

де $\Lambda' = \dfrac{5hG'}{3}$; $B = \dfrac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \dfrac{2h^3E}{3(1-\nu^2)}$; $u_i = -\dfrac{\partial u}{\partial\alpha_i}$; $\gamma_i = -\dfrac{\partial\gamma}{\partial\alpha_i}$; $2\sigma_i^{\pm} = (\sigma_{i3}^{+} \pm \sigma_{i3}^{-})$ $(i = 1, 2, 3)$; $\sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ – поверхневі напруження; $k_1 = 0,\ k_2 = 1/R$ – головні кривини серединної поверхні циліндричної оболонки.

Напруження і переміщення визначаємо за такими формулами

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3, \quad \sigma_{33} = \sigma_3^{+} + \sigma_3^{-}\frac{\alpha_3}{h}, \tag{7.20}$$

$$\sigma_{3i} = \frac{3Q_i}{4h}\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{h^2}\right) + \frac{\sigma_i^{+}}{2}\left(\frac{3\alpha_3^2}{h^2} - 1\right) + \sigma_i^{-}\frac{\alpha_3}{h}, \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j),$$

$$U_i = -\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[u(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3\right], \quad U_3 = w(\alpha_1, \alpha_2).$$

З урахуванням прийнятих позначень для зовнішнього навантаження, систему рівнянь (7.19) зведемо до трьох рівнянь відносно ключових функцій

$$\begin{gathered} L_{11}(u) + L_{12}(w) + L_{13}(\gamma) = 0, \\ L_{21}(u) + L_{22}(w) + L_{23}(\gamma) = -\frac{1}{B}\left[p_0(\alpha_1, \alpha_2) + p(\alpha_1, \alpha_2)\right], \\ L_{31}(u) + L_{32}(w) + L_{33}(\gamma) = 0, \end{gathered} \tag{7.21}$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}; \ \Delta_1 = k_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + k_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}; \ \Delta_2 = k_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + k_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2};$$

$$\Delta_{11} = k_1^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2} + k_2^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}; \ L_{11} = -\left(\Delta\Delta - \frac{\Lambda'}{B}\Delta_{11}\right);$$

$$L_{12} = L_{21} = \nu\Delta_2 + \left(1 + \frac{\Lambda'}{B}\right)\Delta_1; \ L_{22} = \frac{\Lambda'}{B}\Delta - \left(k_1^2 + k_2^2\right);$$

$$L_{23} = L_{32} = -\frac{\Lambda'}{B}\Delta\,;\; L_{13} = L_{31} = -\frac{\Lambda'}{B}\Delta_1\,;\; L_{33} = -\frac{D}{B}\left(\Delta\Delta - \frac{\Lambda'}{D}\Delta\right).$$

Узагальнений розв'язок цієї системи рівнянь, що задовольняє однорідні умови на краях $\alpha_1 = 0$ і $\alpha_1 = l_1$ (шарнірного опертя країв оболонки), шукаємо методом Фур'є. Зовнішні навантаження і контактний тиск (7.18), як і у попередній задачі, подамо у вигляді узагальнених сум тригонометричних рядів

$$p_0(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{4R\delta}{l_1}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{m=0}^{1}\frac{\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)a_m}{\lambda_{k1}}\Phi_{km}^2(\alpha),$$

$$p(\alpha_1,\alpha_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\bar S_1}\delta(\alpha_1,\alpha_1^0,\varepsilon)\delta(\alpha_2,\alpha_2^0,\varepsilon)p_1(\alpha_1^0)ds(\alpha_1^0,\alpha_2^0), \tag{7.22}$$

де

$$\delta(\alpha_1,\alpha_1^0,\varepsilon)\delta(\alpha_2,\alpha_2^0,\varepsilon) = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m\Phi_{km}^2(\alpha^0)\Phi_{km}^2(\alpha);\Phi_{km}^2(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$$

$$c_{km}(\varepsilon) = \frac{8}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)\,;\; \varphi(\lambda) = \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2;\; \varepsilon_0 = \frac{1}{2} \text{ і } \varepsilon_m = 1, \text{ якщо } m = \overline{1,\infty};$$

$$\lambda_{k1} = k\pi/l_1\,;\lambda_{m2} = m\pi/l_2\,;\; l_2 = \pi R\,;\; a_0 = p_0/R\gamma + 1,\; a_1 = 1\,;$$

$$\bar S_1 = \{(\alpha_1,\varphi):\; |\alpha_1 - \bar\alpha_1^0| < l_0,\; 0 \le \varphi < \theta\}.$$

У формулах враховано симетричність зовнішнього навантаження відносно площини $\alpha_1 = l_1/2$ і осьової площини $\varphi = 0$.

Ключові функції системи рівнянь (7.21) шукаємо у вигляді

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \iint_{\bar S_1}\begin{Bmatrix} K_u(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^0,\alpha_2^0) \\ K_w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^0,\alpha_2^0) \\ K_\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^0,\alpha_2^0) \end{Bmatrix} p(\alpha_1^0,\alpha_2^0)ds(\alpha_1^0,\alpha_2^0) + \begin{Bmatrix} u_0(\alpha_1,\alpha_2) \\ w_0(\alpha_1,\alpha_2) \\ \gamma_0(\alpha_1,\alpha_2) \end{Bmatrix}, \tag{7.23}$$

де

$$\begin{Bmatrix} K_u(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^0,\alpha_2^0) \\ K_w(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^0,\alpha_2^0) \\ K_\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1^0,\alpha_2^0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m\begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \end{Bmatrix}\Phi_{km}^2(\alpha^0)\Phi_{km}^2(\alpha)$$

– функція Гріна задачі; $\{u_0(\alpha_1,\alpha_2)\quad w_0(\alpha_1,\alpha_2)\quad \gamma_0(\alpha_1,\alpha_2)\}^T$ – розв'язок системи рівнянь (7.21) з правою частиною другого рівняння у вигляді $-p_0(\alpha_1,\alpha_2)/B$.

Коефіцієнти рядів функції Гріна визначаємо з системи рівнянь

$$L_{11km}u_{km} + L_{12km}w_{km} + L_{13km}\gamma_{km} = 0,$$
$$L_{21km}u_{km} + L_{22km}w_{km} + L_{23km}\gamma_{km} = -1,$$
$$L_{31km}u_{km} + L_{32km}w_{km} + L_{33km}\gamma_{km} = 0,$$

де

$$\Delta^2_{km} = (\lambda_{k1})^2 + (\lambda_{m2})^2;\ \Delta^2_{1km} = k_1(\lambda_{k1})^2 + k_2(\lambda_{m2})^2;$$

$$\Delta^2_{2km} = k_2(\lambda_{k1})^2 + k_1(\lambda_{m2})^2;\ \Delta^2_{11km} = k_1^2(\lambda_{k1})^2 + k_2^2(\lambda_{m2})^2;$$

$$L_{11km} = -\left(\Delta^2_{km}\Delta^2_{km} + \frac{\Lambda'}{B}\Delta^2_{11km}\right);\ L_{12km} = L_{21km} = -\nu\Delta^2_{2km} - \left(1+\frac{\Lambda'}{B}\right)\Delta^2_{1km};$$

$$L_{22km} = -\frac{\Lambda'}{B}\Delta^2_{km} - \left(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2\right);\ L_{23km} = L_{32km} = \frac{\Lambda'}{B}\Delta^2_{km};$$

$$L_{13km} = L_{31km} = \frac{\Lambda'}{B}\Delta^2_{1km};\ L_{33km} = -\frac{\Lambda'}{B}\Delta^2_{km}\left(\frac{D}{\Lambda'}\Delta^2_{km} + 1\right).$$

Розв'язок цієї системи рівнянь запишемо наступним чином:

$$u_{km} = \frac{\Omega_{1km}}{\Omega_{km}},\quad w_{km} = \frac{\Omega_{2km}}{\Omega_{km}},\quad \gamma_{km} = \frac{\Omega_{3km}}{\Omega_{km}}, \tag{7.24}$$

Тут $\Omega_{km} = L_{11km}L_{22km}L_{33km} + L_{12km}L_{23km}L_{31km} + L_{21km}L_{32km}L_{13km} - L_{13km}L_{22km}L_{31km} - L_{12km}L_{21km}L_{33km} - L_{11km}L_{23km}L_{32km}$; $\Omega_{1km} = L_{23km}L_{32km} - L_{22km}L_{33km}$; $\Omega_{2km} = L_{13km}L_{31km} - L_{11km}L_{33km}$; $\Omega_{3km} = L_{21km}L_{12km} - L_{11km}L_{33km}$.

З формул (7.23) з урахуванням незмінності контактного тиску по ширині опор для прогину оболонки маємо

$$w(\alpha_1,\alpha_2) = \int\limits_{\overline{L}_1} K_w^0\left(\alpha_1,\alpha_2,\overline{\alpha}_1^0,\alpha_2^0\right)p_1\left(\alpha_2^0\right)dl\left(\alpha_2^0\right) + w_0(\alpha_1,\alpha_2), \tag{7.25}$$

де $K_w^0\left(\alpha_1,\alpha_2,\overline{\alpha}_1^0,\alpha_2^0\right) = \dfrac{2l_0}{B}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m c_{km}(\varepsilon)w_{km}\varphi_0(\lambda_{k1}l_0)\sin\left(\lambda_{k1}\overline{\alpha}_1^0\right)\cos\left(\lambda_{m2}\alpha_2^0\right)\Phi^2_{km}(\alpha)$;

$\varphi_0(t) = \sin t/t$; $\overline{L}_1$ – серединна лінія смуги $\overline{S}_1$.

Прогин оболонки під дією заданого навантаження знайдемо з системи рівнянь (7.21) у вигляді

$$w_0(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{4R\delta}{l_1 B}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{m=0}^{1}\frac{a_m w_{km}}{\lambda_{k1}}\Phi^2_{km}(\alpha).$$

Сформулюємо умови спряження оболонки та шару. Враховуючи припущення про сталість контактного тиску по ширині опор, умови спряження формулюємо вздовж середніх ліній областей контакту

$$w(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2^0) = u_3(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2^0, -h_0), \ \alpha_2^0 \in L_1 \cup L_2, \quad 0 < \varphi < \theta, \tag{7.26}$$

де $u_3(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2^0, -h_0)$ – переміщення точок поверхні спряження шару з оболонкою.

Підставивши формули (7.6) і (7.25) в умову (7.26), прийдемо до такого інтегрального рівняння

$$\begin{gathered}\frac{2h_0 p_1(\alpha_2)}{\kappa_0}\left[1 - f\left(\frac{p_1}{\kappa_0}\right)\right] + \int\limits_{\overline{L}_1} K_w^0\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2, \overline{\alpha}_1^0, \xi\right) p_1(\xi) d\xi = \\ = u_3\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2, -h_0\right) - w_0\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2\right), \ \alpha_2 \in \overline{L}_1, 0 \le \varphi < \theta.\end{gathered} \tag{7.27}$$

Тут $u_3\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2, -h_0\right) = Rc_0 \cos\varphi -$ переміщення опор як абсолютно твердого тіла, c_0 – стала величина для визначення якої використаємо умову рівності нулю рівнодійної сил, що діють на резервуар,

$$\pi R^2 l_1 \delta + 8 l_0 \int\limits_{\overline{L}_1} p_1(\alpha_2) \cos\varphi \, dl(\alpha_2) = 0. \tag{7.28}$$

Таким чином для визначення контактного тиску і сталої c_0 маємо систему рівнянь (7.27) і (7.28). Наближений розв'язок цієї системи шукаємо методом колокацій. Дугу $\overline{L}_1$ розбиваємо на N відрізків (дуг) L^r, $r = \overline{1, N}$, кожний з яких визначається середньою точкою $\alpha_2^r = R\varphi^r$ і довжиною $2l^r = 2R\theta^r$. Вважаємо також, що контактні напруження сталі на кожному з відрізків, $p_1(\alpha_2) = p_1\left(\alpha_2^r\right) \equiv p^r$, $\alpha_2^r \in L^r$. Для визначення невідомих величин c_0 і p^r використаємо рівняння (7.28) і умову рівності нулю нев'язки наближеного розв'язку рівняння (7.27) у N контрольних точках $\left(\overline{\alpha}_1^0, \widehat{\alpha}_2^q\right) \in L^q$, $q = \overline{1, N}$. При цьому одержимо таку систему нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{2h_0 p^q}{\kappa_0}\left[1 - f\left(\frac{p^q}{\kappa_0}\right)\right] + \sum_{r=1}^{N} K_0^r\left(\widehat{\alpha}_2^q\right) p^q - R c^0 \cos\frac{\widehat{\alpha}_2^q}{R} = w_0(\overline{\alpha}_1^0, \widehat{\alpha}_2^q), \quad q = 1, N, \tag{7.29}$$

$$\sum_{r=1}^{N} 4 l_0 l^r \varphi_0\left(\theta^r\right) \cos\frac{\alpha_2^r}{R} \cdot p^r = -\frac{\pi R^2 l_1 \rho}{4},$$

де $K_0^r(\widehat{\alpha}_2^q) = \int\limits_{L^r} K_w^0\left(\overline{\alpha}_1^0, \widehat{\alpha}_2^q, \overline{\alpha}_1^0, \xi\right) d\xi = \dfrac{4 l_0 l^r}{D} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sum\limits_{k=1,3,\dots}^{K} \sum\limits_{m=0}^{M} c_{km}(\varepsilon) \varepsilon_m w_{km} \varphi_0\left(\lambda_{k1} l_0\right) \varphi_0\left(\lambda_{m2} l^r\right) \times$
$\times \sin^2\left(\lambda_{k1} \overline{\alpha}_1^0\right) \cos\left(\lambda_{m2} \alpha_2^r\right) \cos\left(\lambda_{m2} \widehat{\alpha}_2^q\right)$; $K\varepsilon >> 1$, $M\varepsilon >> 1$.

Наближений розв'язок цієї системи рівнянь шукаємо методом простої ітерації. Для побудови нульового і n-го наближень розв'язку маємо такі системи лінійних рівнянь

$$\mu \overline{p}_0^q + \sum_{r=1}^{N} \overline{K}_0^r\left(\widehat{\alpha}_2^q\right)\overline{p}_0^r - c_0^0 \cos\frac{\widehat{\alpha}_2^q}{R} = -\Gamma\, \overline{w}_0\left(\widehat{\alpha}_2^q\right), \quad q = \overline{1,N},$$

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{4l_0 l^r}{r^2}\varphi_0\left(\theta^r\right)\cos\left(\frac{\alpha_2^r}{R}\overline{p}_0^r\right) = -\frac{\pi l_1}{4l_2}\Gamma,$$

$$\mu \overline{p}_n^q + \sum_{r=1}^{N} \overline{K}_0^r\left(\widehat{\alpha}_2^q\right)\overline{p}_n^r - c_n^0 \cos\frac{\widehat{\alpha}_2^q}{R} = -\Gamma\, \overline{w}_0\left(\widehat{\alpha}_2^q\right) + \mu\, \overline{p}_{n-1}^q\, f\left(\frac{R\mu\, \overline{p}_{n-1}^q}{2h_0}\right), \quad q = \overline{1,N},$$

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{4l_0 l^r}{R^2}\varphi_0\left(\theta^r\right)\cos\frac{\widehat{\alpha}_2^r}{R}\overline{p}_n^r = -\frac{\pi l_1}{4l_2}\Gamma,$$

де $\overline{K}_0^r(\widehat{\alpha}_2^q) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_{k=1,3,\ldots}^{K}\sum\limits_{m=0}^{M}\overline{c}_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m \overline{w}_{km}\varphi_0(\lambda_{k1}l_0)\varphi_0\left(\lambda_{m2}l^r\right)\sin^2\left(\lambda_{k1}\overline{\alpha}_1^0\right)\cos\left(\lambda_{m2}\alpha_2^r\right)\cos\left(\lambda_{m2}\widehat{\alpha}_2^q\right);$

$$\overline{w}_0\left(\widehat{\alpha}_2^q\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1,3,\ldots}^{K}\sum_{m=0}^{1}\frac{a_m \overline{w}_{km}}{\left(R\lambda_{k1}\right)}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\sin\left(\lambda_{k1}\overline{\alpha}_1^0\right)\cos\left(\lambda_{m2}\alpha_2^q\right); \quad \overline{w}_{km} = R^{-4}w_{km}; \quad \mu = \frac{Dl_1 l_2 h_0}{2R^6\kappa_0},$$

$\Gamma = \dfrac{4R^5\rho}{Dl_1}$ і $\overline{p}^r = \dfrac{4R^5}{Dl_1 l_2}p^r$ – приведені коефіцієнти пружності прошарку, питома вага рідини і контактний тиск.

Знайдено числовий розв'язок задачі про взаємодію резервуара з опорами через прокладку при таких значеннях пружних і геометричних параметрів: $l/R = 4$; $h/R = 0{,}04$; $l_0/R = 0{,}1$; $\alpha_0 = R$; $\Gamma = 1$; $\theta = 0{,}8$; $\mu = 0{,}001$. На рис. 7.3 показано розподіл приведеного контактного тиску $\overline{p} = 8R^2 p/\pi l D$ уздовж опор залежно від товщини шару. Криві 1 та 2 відповідають $h_0/R = 0{,}1$ та $h_0/R = 0{,}01$.

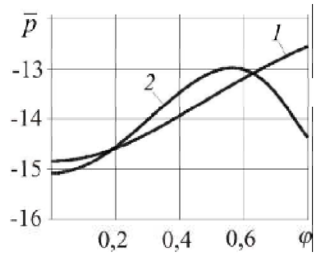

Рис.7.3. Контактний тиск в опорах

Зміна товщини шару не має суттєвого впливу на контактний тиск у середній зоні області контакту. Однак тиск різко зростає біля країв цієї області при зменшенні товщини шару. Таким чином для оптимізації розподілу контактного тиску вздовж опор доцільно використовувати шари змінної жорсткості.

7.2.2. Взаємодія циліндричного резервуара з жорсткими опорами через шар змінної товщини. Для визначення сталого контактного тиску ($p_1 = const$) з рівняння (7.28) одержимо таке співвідношення $p_1 = -\dfrac{\pi R l_1 \delta}{8 l_0 \sin\theta}$. Вважаючи змінною товщину прокладки, а контактний тиск – сталою величиною, рівняння (7.27) запишемо у вигляді

$$\frac{2h_0(\alpha_2)p_1}{\kappa_0} + p_1 K_w^*\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2\right) = Rc_0 \cos\frac{\alpha_2}{R} - \overline{w}_0\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2\right), \quad \alpha_2 \in \overline{L}_1 \quad (0 \le \varphi < \theta),$$

де $K_w^*\left(\overline{\alpha}_1^0, \alpha_2\right) = \dfrac{2l_0 R\theta}{D} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sum\limits_{k=1,3,\ldots}^{K} \sum\limits_{m=0}^{M} c_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m w_{km} \times \varphi_0(\lambda_{k1} l_0)\varphi_0(\lambda_{m2} R\theta)\sin^2\left(\lambda_{k1}\overline{\alpha}_1^0\right)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$.

Звідси, отримаємо такий закон зміни товщини шару

$$\frac{2}{\kappa_0}\left[h_0(R\varphi) - h_0(0)\cos\varphi\right] =$$

$$= -K_w^*\left(\overline{\alpha}_1^0, R\varphi\right) + K_w^*\left(\overline{\alpha}_1^0, 0\right)\cos\varphi + w_0^*\left(\overline{\alpha}_1^0, R\varphi\right) - w_0^*\left(\overline{\alpha}_1^0, 0\right)\cos\varphi,$$

де $w_0^*\left(\overline{\alpha}_1^0, R\varphi\right) = \dfrac{32 l_0 \sin\theta}{\pi l_1^2 D} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sum\limits_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \sum\limits_{m=0}^{1} \dfrac{a_m w_{km}}{\lambda_{k1}} \varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\sin\left(\lambda_{k1}\overline{\alpha}_1^0\right)\cos(m\varphi)$.

7.3. ВЗАЄМОДІЯ ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗЕРВУАРА З ПРУЖНИМИ ОПОРАМИ

7.3.1. Постановка задачі. За умов попередньої задачі вважаємо, що замкнута циліндрична оболонок з шарнірно опертими краями взаємодіє вздовж смуг $S_1 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2):\ \left|\alpha_1 - \alpha_1^0\right| < l_0;\ |\alpha_2| < s\right\}$ і $S_2 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2):\ \left|\alpha_1 - \left(l_1 - \alpha_1^0\right)\right| < l_0;\ |\alpha_2| < s\right\}$ з двома однаковими циліндричними тонкостінними елементами такого ж радіуса (підсилюючими елементами), де $2l_0, 2s$ – ширина і довжина елементів $\left(2l_0 < l_1/2,\ s < l_2 = \pi R\right)$; l_1 і R – довжина і радіус оболонки.

Нехай задані поверхневі напруження

$$\sigma_{33}^- = p_0(\alpha_1, \alpha_2),\ (\alpha_1, \alpha_2) \in S,$$

$$\sigma_{33}^{+} = \begin{cases} p\left(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2\right), & (\alpha_1, \alpha_2) \in S_1, \\ p\left(\alpha_1 - \left(l_1 - \alpha_1^0\right), \alpha_2\right), & (\alpha_1, \alpha_2) \in S_2, \\ 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \notin S_1 \cup S_2, \end{cases} \tag{7.30}$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{23}^{\pm} = 0,$$

де $p_0(\alpha_1, \alpha_2)$ – задане навантаження на оболонку; $p(\alpha_1, \alpha_2)$ – контактний тиск між оболонкою і підсиленнями. При цьому приймаємо, що контактний тиск рівномірно розподілений по ширині підкріплень, а по довжині змінюється за законом

$$p(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{P_0}{4RI(Ra_2, 1)} \operatorname{ch}(a_2 \alpha_2), \quad |\alpha_1| < l_2, \ |\alpha_2| < s, \tag{7.31}$$

де $P_0 = 4\int\limits_0^s \int\limits_0^{l_0} q(\alpha_1, \alpha_2) \cos\varphi \, d\alpha_2 \, d\alpha_1$ – рівнодійна контактного тиску на одному з підкріплень $(\alpha_2 = R\varphi, s = R\varphi_0)$; a_2 – задана величина,

$$I(a, m) = \int\limits_0^{\varphi_0} \operatorname{ch}(a\varphi) \cos(m\varphi) d\varphi =$$
$$= \frac{\operatorname{mch}(a\varphi_0)\sin(m\varphi_0) + a \operatorname{sh}(a\varphi_0)\cos(m\varphi_0)}{\left(a^2 + m^2\right)}. \tag{7.32}$$

Напружено-деформований стан оболонки описуємо рівняннями (7.19), (7.20). Граничні умови, які відповідають шарнірному опертю країв оболонки, мають вигляд

$$w(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = 0} = 0, \quad w(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = l_1} = 0,$$

$$N_{11}(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = 0} = 0, \quad N_{11}(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = l_1} = 0, \tag{7.33}$$

$$M_{11}(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = 0} = 0, \quad M_{11}(\alpha_1, \alpha_2)\big|_{\alpha_1 = l_1} = 0.$$

Умови контакту формулюємо на серединних лініях L_1, L_2 областей контакту. Задаємо рівність нормальних переміщень оболонки і підсилюючих елементів

$$w\left(\alpha_1^0, \alpha_2\right) = w_0(\alpha_2), \ \left(\alpha_1^0, \alpha_2\right) \in L_1, \tag{7.34}$$
$$w\left(l_1 - \alpha_1^0, \alpha_2\right) = w_0(\alpha_2), \ \left(l_1 - \alpha_1^0, \alpha_2\right) \in L_2,$$

де $w_0 = w_0(\alpha_2)$ – нормальні (до серединної поверхні оболонки) переміщення точок серединних ліній елементів.

Задача полягає у відшуканні змінної товщини $2h_0 = 2h_0(\alpha_2)$ підсилюючих елементів, за якої контактні напруження є сталими по ширині елементів, а по їх довжині розподілені за законом (7.31).

7.3.2. Деформування підсилюючих елементів. Приймаємо, що зусилля у підсилюючих елементах приведені до ліній L_1, L_2. Рівняння, які описують напружено-деформований стан елементів, одержимо з рівнянь (7.19), (7.20), нехтуючи силами і моментами у напрямку осьової координати α_1, а також поперечними зсувними та мембранними деформаціями. За відсутності тангенціальних навантажень ці рівняння набудуть вигляду

$$\frac{dN_0}{d\alpha_2} + k_2 Q_0 = 0, \quad \frac{dQ_0}{d\alpha_2} - k_2 N_0 = -2l_0 p\left(\alpha_1^0, \alpha_2\right),$$

$$\frac{dM_0}{d\alpha_2} - Q_0 = 0, \quad M_0 = -\frac{l_0 h_0^3 E_0}{6}\left(\frac{d^2 w_0}{d\alpha_2^2} + k_2^2 w_0\right), \tag{7.35}$$

де $\alpha_2 = R\varphi$; $k_2 = 1/R$; $h_0(-\alpha_2) = h_0(\alpha_2)$; N_0, Q_0, M_0 – зусилля в елементах, приведені до серединних ліній L_1, L_2; E_0 – модуль Юнга; w_0 – прогин підкріплень.

З урахуванням симетричності задачі та відсутності зусиль на кінцях опор, $N_0(s) = 0$, $Q_0(s) = 0$, $M_0(s) = 0$, із перших трьох рівнянь системи (7.35) отримаємо

$$Q_0 = 2l_0 R \int_{\varphi}^{\varphi_0} \cos(t - \varphi)\, p\left(\alpha_1^0, t\right) dt, \tag{7.36}$$

$$M_0 = -2l_0 R^2 \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sin(t - \varphi)\, p\left(\alpha_1^0, t\right) dt, \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0.$$

З останніх співвідношень систем (7.35) та (7.36), приймаючи до уваги умови контакту (7.34), одержимо формулу для визначення товщини опор

$$h_0^3(\varphi) = \frac{12R^4}{E_0}\left[\int_{\varphi}^{\varphi_0} \sin(t - \varphi)\, p\left(\alpha_1^0, t\right) dt\right]\left(\frac{d^2 w^0}{d\varphi^2} + w^0\right)^{-1}$$

або з урахуванням виразу (7.31) для контактного тиску

$$h_i^3(\varphi) = \frac{3R^3 P_0}{E_i\left(a_2^2 + 1\right) l_0\, I(Ra_2, 1)}\left[a_2 \operatorname{sh}(a_2\varphi_0)\sin(\varphi_0 - \varphi) + \right. \tag{7.37}$$

$$\left. + \operatorname{ch}(a_2\varphi) - \operatorname{ch}(a_2\varphi_0)\cos(\varphi_0 - \varphi)\right]\left(\frac{d^2 w^0}{d\varphi^2} + w^0\right)^{-1},$$

де $w^0 = w\left(\alpha_1^0, R\varphi\right)$ – прогин оболонки у точках серединних ліній підсилюючих елементів.

За сталого тиску $p = const$ $\left(P_0 = 4Rl_0 q \sin\varphi_0\right)$ одержимо таку залежність товщини елементів від прогину оболонки

$$h_0^3(\varphi)=\frac{3R^3P_0}{E_0l_0}\;\frac{1-\cos(\varphi_0-\varphi)}{\left(\dfrac{d^2w^0}{d\varphi^2}+w^0\right)\sin\varphi_0}.$$

7.3.3. Побудова узагальненого розв'язку допоміжної задачі. Функції (7.30), які описують взаємодію оболонки з підсилюючими елементами, є кусково-неперервними функціями і, тому, крайова задача (7.19), (7.30), (7.33) є некоректною у розумінні існування розв'язку Фур'є. Знайдемо узагальнений розв'язок цієї задачі. Ґрунтуючись на послідовнісному підході до побудови узагальнених розв'зків крайових задач, зовнішнє навантаження на оболонку і контактний тиск (7.30) подамо у вигляді границь слабко збіжних послідовностей функцій

$$\sigma_{33}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)=\lim_{K\to\infty}p_{0K}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\sigma_{33}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)=\lim_{K\to\infty}\sigma_K^{+}(\alpha_1,\alpha_2) \tag{7.38}$$

де $p_{0K}=\sum\limits_{\substack{k=1,3,...\\ m=0,1,...}}^{K}c_{km}^0(\varepsilon)p_{km}\Phi_{km}^2(\alpha)$, $\sigma_K^{+}=P_0\sum\limits_{\substack{k=1,3,...\\ m=0,1,...}}^{K}c_{km}^0(\varepsilon)\sigma_{km}^{+}\Phi_{km}^2(\alpha)$, $(K\varepsilon>>1)$ – узагальнені частинні суми відповідних рядів Фур'є; $c_{km}^0(\varepsilon)=\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon)$; $\Phi_{km}^2(\alpha_1,\alpha_2)=$ $=\sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2)$; $\lambda_{k1}=\dfrac{k\pi}{l_1}$; $\lambda_{m2}=\dfrac{m\pi}{l_2}$; $\varphi(\lambda)=\left[\dfrac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2$; p_{km} – коефіцієнти Фур'є функції $p(\alpha_1,\alpha_2)$; $\sigma_{km}^{+}=\dfrac{4P_0}{\pi Rl_0l_1}\dfrac{I(Ra_2,m)\delta_m\sin(\lambda_{k1}l_0)\sin(\lambda_{k1}\alpha_1^0)}{\lambda_{k1}I(Ra_2,1)}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\sigma_{33}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)$; $\delta_0=\dfrac{1}{2}$; $\delta_m=1$, якщо $m=1,2,\ldots$.

Невідомі функції системи рівнянь (7.21) подамо згідно з (7.38) у вигляді послідовностей таких узагальнених частинних сум

$$\begin{Bmatrix}u_K\\ w_K\\ \gamma_K\end{Bmatrix}=\frac{1}{B}\sum_{\substack{k=1,3,...\\ m=0,1,...}}^{K}c_{km}^0(\varepsilon)\begin{Bmatrix}u_{km}\\ w_{km}\\ \gamma_{km}\end{Bmatrix}\left(P_0\sigma_{km}^{+}-p_{0km}\right)\Phi_{km}^2(\alpha). \tag{7.39}$$

Зауважимо, що члени цих послідовностей функцій, а також їх граничні елементи задовольняють граничні умови (7.33).

Підставивши співвідношення (7.38), (7.39) у рівняння (7.21), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів u_{km}, w_{km}, γ_{km}

$$
\begin{aligned}
L_{11km}u_{km} + L_{12km}w_{km} + L_{13km}\gamma_{km} &= 0,\\
L_{21km}u_{km} + L_{22km}w_{km} + L_{23km}\gamma_{km} &= -1,\\
L_{31km}u_{km} + L_{32km}w_{km} + L_{33km}\gamma_{km} &= 0,
\end{aligned}
\tag{7.40}
$$

де

$$
\Delta_{km}^2 = \left(\lambda_{k1}\right)^2 + \left(\lambda_{m2}\right)^2, \quad \Delta_{1km}^2 = k_1\left(\lambda_{k1}\right)^2 + k_2\left(\lambda_{m2}\right)^2,
$$

$$
\Delta_{2km}^2 = k_2\left(\lambda_{k1}\right)^2 + k_1\left(\lambda_{m2}\right)^2, \quad \Delta_{11km}^2 = k_1^2\left(\lambda_{k1}\right)^2 + k_2^2\left(\lambda_{m2}\right)^2,
$$

$$
L_{11km} = -\left(\Delta_{km}^2\Delta_{km}^2 + \frac{\Lambda'}{B}\Delta_{11km}^2\right), \quad L_{12km} = L_{21km} = -\nu\,\Delta_{2km}^2 - \left(1 + \frac{\Lambda'}{B}\right)\Delta_{1km}^2,
$$

$$
L_{22km} = -\frac{\Lambda'}{B}\Delta_{km}^2 - \left(k_1^2 + 2\nu k_1 k_2 + k_2^2\right), \quad L_{23km} = L_{32km} = \frac{\Lambda'}{B}\Delta_{km}^2,
$$

$$
L_{13km} = L_{31km} = \frac{\Lambda'}{B}\Delta_{1km}^2, \quad L_{33km} = -\frac{\Lambda'}{B}\Delta_{km}^2\left(\frac{D}{\Lambda'}\Delta_{km}^2 + 1\right).
$$

Розв'язок системи рівнянь (7.40) запишемо у вигляді

$$
u_{km} = \frac{\Omega_{1km}}{\Omega_{km}}, \quad w_{km} = \frac{\Omega_{2km}}{\Omega_{km}}, \quad \gamma_{km} = \frac{\Omega_{3km}}{\Omega_{km}},
\tag{7.41}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\Omega_{km} = {} & L_{11km}L_{22km}L_{33km} + L_{12km}L_{23km}L_{31km} + L_{21km}L_{32km}L_{13km} - \\
& - L_{13km}L_{22km}L_{31km} - L_{12km}L_{21km}L_{33km} - L_{11km}L_{23km}L_{32km},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega_{1km} &= L_{23km}L_{32km} - L_{22km}L_{33km},\\
\Omega_{2km} &= L_{13km}L_{31km} - L_{11km}L_{33km},\\
\Omega_{3km} &= L_{21km}L_{12km} - L_{11km}L_{33km}.
\end{aligned}
$$

Підставимо формули (7.41) у (7.39) та врахуємо розвинення (7.38). Тоді, перейшовши до границі при $K \to \infty$, одержимо узагальнений розв'язок задачі (7.19), (7.30), (7.33)

$$
\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}\lim_{K\to\infty}\sum_{\substack{k=1,3,\ldots\\ m=0,1,\ldots}}^{K} c_{km}^0(\varepsilon)\begin{Bmatrix} \Omega_{1km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{2km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{3km}/\Omega_{km} \end{Bmatrix}\left(P_0\sigma_{km}^+ - p_{0km}\right)\Phi_{km}(\alpha).
\tag{7.42}
$$

7.3.4. Побудова розв'язку контактної задачі. Відшукання числових значень розв'язку (7.42) ґрунтується на наближенні відповідних узагальнених сум рядів їх частинними сумами. Якщо у розвиненнях (7.39) зафіксувати параметр $\varepsilon \approx h$, де $2h$ – товщина оболонки, і прийняти, що K – достатньо велике, то згідно з дослідженнями, проведеними у роботі [99], одержаний наближений розв'язок є ближчим до точного розв'язку, знайденого з використанням просторових рівнянь теорії пружності, ніж узагальнений розв'язок (7.39). При цьому достатньо висока точність числових результатів забезпечується умовою $K >> l_i/(\pi\varepsilon)$. Зазначимо також, що наближення функції послідовностями узагальнених частинних сум тригонометричних рядів ототожнюється з усередненням цих функцій на відрізку довжини 2ε [85].

Таким чином, якщо $\varepsilon \approx h$, $K >> l_i/(\pi\varepsilon)$, то частинні суми

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} \approx \frac{1}{B} \sum_{\substack{k=1,3,\dots \\ m=0,1,\dots}}^{K} c_{km}^0(\varepsilon) \begin{Bmatrix} \Omega_{1km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{2km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{3km}/\Omega_{km} \end{Bmatrix} \left(P_0\sigma_{km}^{+} - p_{km}\right)\Phi_{km}(\alpha) \tag{7.43}$$

є достатньо точним наближенням розв'язку задачі (7.19), (7.30), (7.33). Цей розв'язок є коректним з міркувань відповідності навантаження реальним умовам, застосування рівнянь теорії оболонок та збіжності рядів.

Підставивши вираз (7.43) для прогину оболонки при $\alpha_1 = \alpha_1^0$ у формулу (7.37), одержимо співвідношення, яке характеризує залежність товщини підсилюючих елементів від параметрів, що описують закон розподілу контактного тиску (7.31). Визначальним серед них є параметр a_2, який характеризує відхилення значень контактного тиску в середній і приграничних зонах області контакту. Приймаючи гіпотезу про сталий контактний тиск, отримаємо $a_2 = 0$.

7.4. КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ ПІДСИЛЕННІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЖОРСТКИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

7.4.1. Постановка задачі. Розглянемо замкнену циліндричну оболонку з шарнірно опертими краями. Серединну поверхню оболонки позначимо через $\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2):\ 0 < \alpha_1 < l_1,\ -\pi < \varphi \le \pi\}$, де $\alpha_2 = R\varphi$; l_1, R − довжина та радіус оболонки (див. рис. 7.4).

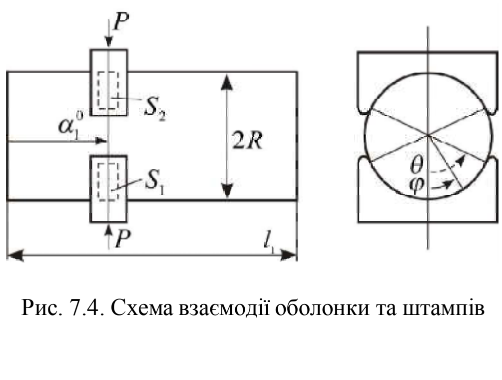

Рис. 7.4. Схема взаємодії оболонки та штампів

Оболонка навантажена приведеними до серединної поверхні нормальними зусиллями p_0 і взаємодіє без відшарування (у напрямку нормалі до серединної поверхні) вздовж смуг S_1, S_2 з двома однаковими абсолютно жорсткими штампами. Смуги задаються серединними лініями $L_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon\ \alpha_1 = \alpha_1^0, |\varphi| \le \theta\}$, $L_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2)\colon$ $\alpha_1 = \alpha_1^0;\ \pi - \theta \le \varphi \le -\pi + \theta\}$ та характеризуються постійною шириною $2l_0$ і довжиною $2R\theta$, де α_1^0 – віддаль від краю оболонки до середини опор. Приймемо, що контактні напруження $p_1(\alpha_1, \alpha_2)$ та $p_2(\alpha_1, \alpha_2)$є сталими по ширині смуг S_1, S_2. Вважаємо також, що кромки штампів гладкі та мають однакові кривини. Кривину кромок штампів вздовж ліній L_1 і L_2 позначимо через $k^0 = 1/R_0$, де $k^0 = k^0(\alpha_2)$ – кусково-гладка парна функція. Таким чином, навантаження на оболонку подамо у вигляді

$$p(\alpha_1, \alpha_2) = p_0 + \begin{cases} p_1(\alpha_1, \alpha_2), & (\alpha_1, \alpha_2) \in S_1, \\ p_2(\alpha_1, \alpha_2), & (\alpha_1, \alpha_2) \in S_2, \\ 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \notin S_1 \cup S_2. \end{cases} \qquad (7.44)$$

Задача полягає у знаходженні контактних напружень q_1, q_2 і величини області контакту (параметра θ).

7.4.2. Інтегральне подання для прогину циліндричної оболонки. Нехай напружено-деформований стан оболонки характеризується нехтовно малими жорсткими поворотами відносно нормалі до серединної поверхні і описується рівняннями (7.19). Невідомі функції системи рівнянь (7.21) шукаємо у вигляді розвинень за системами тригонометричних функцій. Якщо врахувати симетричність стану оболонки (відносно двох центральних площин і площини $\alpha_1 = \alpha_1^0$) і задовольнити умови шарнірного опертя країв (7.33), то навантаження (7.44) та невідомі функції системи (7.21) можна подати у вигляді

$$p = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\bar{S}_1} \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=0,2,\dots}^{M} c_{km}(\varepsilon) \Phi_{km}^2(\xi) \Phi_{km}^2(\alpha) p_1(\xi_1, \xi_2) ds(\xi_1, \xi_2) +$$

$$+ \frac{4p_0}{l_1} \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1,3,\dots}^{K} \frac{\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)}{\lambda_{k1}} \Phi_{km}^2(\alpha) \quad (K\varepsilon >> 1,\ M\varepsilon >> 1),$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \iint\limits_{\bar{S}_1} \begin{Bmatrix} K_u(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2) \\ K_w(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2) \\ K_\gamma(\alpha_1, \alpha_2, \xi_1, \xi_2) \end{Bmatrix} p_1(\xi_2) ds(\xi_1, \xi_2) + \begin{Bmatrix} u_0(\alpha_1, \alpha_2) \\ w_0(\alpha_1, \alpha_2) \\ \gamma_0(\alpha_1, \alpha_2) \end{Bmatrix}. \qquad (7.45)$$

Тут

$$\begin{Bmatrix} K_u(\alpha_1,\alpha_2,\xi_1,\xi_2) \\ K_w(\alpha_1,\alpha_2,\xi_1,\xi_2) \\ K_\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\xi_1,\xi_2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{D}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=0}^{M} c_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m \begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \end{Bmatrix} \Phi_{km}^2(\xi)\,\Phi_{km}^2(\alpha),$$

$$\begin{Bmatrix} u_0(\alpha_1,\alpha_2) \\ w_0(\alpha_1,\alpha_2) \\ \gamma_0(\alpha_1,\alpha_2) \end{Bmatrix} = \frac{4q_0}{Dl_1}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1,3,\ldots}^{K}\frac{\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)}{\lambda_{k1}} \begin{Bmatrix} u_{k0} \\ w_{k0} \\ \gamma_{k0} \end{Bmatrix} \sin(\lambda_{k1}\alpha_1),$$

$$p_0 = const,\ \overline{S}_1 = \{(\alpha_1,\alpha_2):\ |\alpha_1-\alpha_1^0| < l_0;\ 0<\varphi<\theta\},\ \lambda_{k1} = \frac{k\pi}{l_1},\ \lambda_{m2} = \frac{m\pi}{l_2},\ l_2 = \pi R,$$

$$\Phi_{km}^2(\alpha) = \sin(\lambda_{k1}\alpha_1)\cos(\lambda_{m2}\alpha_2),\ c_{km}(\varepsilon) = \frac{8}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon),\ \varphi(\lambda) = \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} \text{ і } \varepsilon_m = 1, \text{ якщо } m = \overline{1,\infty}.$$

Спростимо вираз для прогину (7.45) з урахуванням відокремлення змінних у формулі (7.44) для контактного тиску

$$w(\alpha) = \frac{2l_0}{D}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{L}}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=0,2,\ldots}^{M} c_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m w_{km}\varphi_0(\lambda_{m1}l_0)\times$$
$$\times\Phi_{km}^2(\alpha^0)\Phi_{km}^2(\alpha)p_1(\alpha_2^0)dl(\alpha_2^0) + w_0(\alpha), \tag{7.46}$$

де $w_{km} = \dfrac{(\Delta_{km})^2\Delta_{km}^1}{(\Delta_{km})^4 + \dfrac{B}{D}\Delta_{km}^1[k_0^2(\Delta_{km})^2 - (\Delta_{km}^\nu)^2]}$; $\Delta_{km}^\nu = (k_1+\nu k_2)(\lambda_{k1})^2 + (k_2+\nu k_1)(\lambda_{m2})^2$;

$\Delta_{km} = (\lambda_{k1})^2 + (\lambda_{m2})^2$; $\Delta_{km}^1 = 1 + \dfrac{D}{\Lambda}\Delta_{km}$; $\varphi_0(t) = \displaystyle\int_0^1 g_0(l_0\xi)\cos(t\xi)\,d\xi$; $\varphi_0(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, якщо $g_0(t) = 1$; $\overline{L}_1$ – серединна лінія смуги $\overline{S}_1$.

7.4.3. Взаємодія оболонки з штампами постійної кривини. Розглянемо випадок, коли кривини кромок штампів вздовж ліній L_1, L_2 справджують умову $k_0 = \dfrac{1}{R_0} < \dfrac{1}{R}$, $R_0 = const$, а штампи перебувають під дією двох сил інтенсивності *P*. Оболонка навантажена внутрішнім тиском інтенсивності p_0.

Зміна кривини оболонки після її деформування вздовж ліній L_1, L_2 є такою $\kappa_0 = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}$. Якщо кривину оболонки в точках цих ліній виразити через функцію прогину оболонки $\kappa_0 = 1/R^2 \left(\partial^2 w / \partial\varphi^2 + w\right)$, то одержимо таку умову контакту

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + w = R^2 \kappa_0, \tag{7.47}$$

де $w = w\left(\alpha_1^0, R\varphi\right)$ – прогин оболонки в точках ліній L_1, L_2.

Підставимо співвідношення (7.46) для переміщення оболонки в умову (7.47). Враховуючи умови симетрії, у підсумку прийдемо до такого інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\begin{gathered}\frac{2l_0}{D}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overline{L}}\sum_{k=1}^{K}\sum_{m=0,2,\ldots}^{M} c_{km}(\varepsilon)\varepsilon_m w_{km}\left(1-m^2\right)\varphi_0(\lambda_{m1}l_0)\Phi_{km}^2\left(\alpha^0\right)\times \\ \times\Phi_{km}^2(\alpha)p_1\left(\alpha_2^0\right)dl\left(\alpha^0\right) = R^2\kappa_0 - w_0(\alpha), \quad \alpha\in\overline{L}_1, \quad \left(K\varepsilon >> 1,\ M\varepsilon >> 1\right).\end{gathered} \tag{7.48}$$

Приєднавши до цього рівняння умову рівноваги штампів

$$4l_0 R\int_0^{\theta}\cos\varphi\ p_1(R\varphi)\,d\varphi = P, \tag{7.49}$$

одержимо повну систему рівнянь щодо функції $p_1(\alpha_2)$ і параметра θ.

Система рівнянь (7.48), (7.49) є нелінійною щодо параметра θ. Якщо невідомою величиною є параметр P, а θ – задаване, то матимемо систему лінійних рівнянь (7.48), (7.49) відносно функції $q_1(\alpha_2)$ і сили P. Наближений розв’язок інтегрального рівняння (7.48) шукаємо методом колокацій. Розбиваємо дугу L_1 на N дуг L^r, $r = \overline{1, N}$, довжини $2l^r = 2R\theta^r$ з центральними точками $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^r\right)$, $\alpha_2^r = R\varphi_0^r$. Приймаємо, що контактний тиск сталий на кожній з дуг L^r і дорівнює q^r. Задовольнивши рівняння (7.48) у контрольних точках $\left(\alpha_1^0, \alpha_2^s\right)$, $\alpha_2^s = R\varphi_0^s$, $s = \overline{1, N}$, запишемо дискретний аналог цього рівняння у вигляді

$$\sum_{r=1}^{N}\overline{A}^{rs}(\varepsilon)\overline{q}^r = -\overline{w}_0\,\overline{q}_0 + \overline{\kappa}_0, \quad s = \overline{1, N}, \tag{7.50}$$

де

$$\overline{w}_0 = \frac{4}{l_1}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1,3,\ldots}^{K}\frac{\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)}{\lambda_{k1}}\overline{w}_{km}\sin\left(\lambda_{k1}\alpha_1^0\right),\ \overline{\kappa}_0 = R\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right),$$

$$\overline{A}^{rs}(\varepsilon)=\frac{4l^r l_0}{R^2}\sum_{k=1,3,...}^{K}\sum_{m=0,2,...}^{M}\overline{c}_{km}(\varepsilon)\overline{w}_{km}\left(1-m^2\right)\varphi_0\left(\lambda_{k1}l_0\right)\varphi_0\left(\lambda_{m2}l^r\right)\times$$

$$\times\sin^2\left(\lambda_{k1}\alpha_1^0\right)\cos\left(m\varphi_0^r\right)\cos\left(m\varphi_0^s\right),\quad \overline{c}_{km}(\varepsilon)=\frac{8R^2}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon),$$

$$\varphi(\lambda)=\left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2,\ \lambda_{k1}=\frac{k\pi}{l_1},\ \lambda_{m2}=\frac{m}{R},\ l_2=\pi R,\ \overline{w}_{km}=\frac{w_{km}}{R^4},\ \overline{q}^r=\frac{R^3}{D}p^r,$$

$$\overline{q}_0=\frac{R^3}{D}p_0,\ l^r=R\Delta\theta=\frac{R\theta}{2N},\ \varphi_0^r=\frac{(2r-1)\theta}{2N}.$$

При цьому рівняння (7.49) набуде вигляду

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{4l_0 l^r}{R^2}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}\cos\varphi_0^r\,\overline{q}^r=\overline{P}, \tag{7.51}$$

де $\overline{P}=PR/D$.

Таким чином, система $N+1$ алгебраїчних рівнянь (7.50), (7.51) є нелінійною (з невідомими $\overline{q}^r$, $r=\overline{1,N}$, θ), якщо величина $\overline{P}$ задана, і є лінійною (з невідомими $\overline{q}^r$, $r=\overline{1,N}$, $\overline{P}$), якщо задано параметр θ.

Знайдено числовий розв'язок задачі при таких значеннях параметрів: $l_1/R=4$; $R/R_0=0{,}95$; $h/R=0{,}05$; $l_0/R=0{,}1$, $\nu=0{,}3$; $\varepsilon=0.005$; $\theta=2\pi/5$.

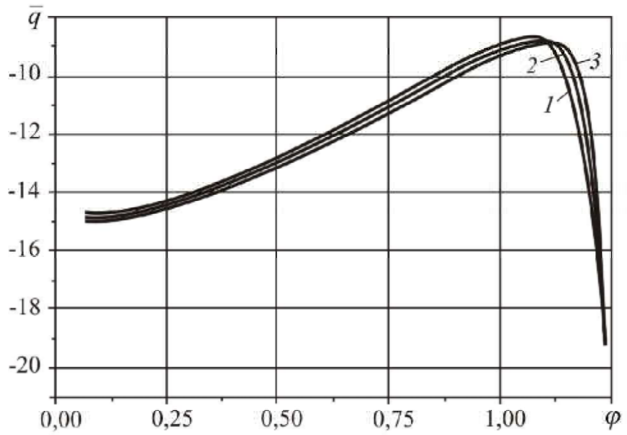

Рис.7.5. Контактні напруження

Криві на рис. 7.5 ілюструють закономірності розподілу безрозмірного контактного тиску $\bar{q} = p_0 R^3 / D$ вздовж координати $\varphi = \alpha_2 / R$, $0 \le \varphi \le \theta$, для різної кількості відрізків розбиття лінії $\overline{L}$ ($N = 10$; 15; 30 криві 1–3 відповідно). При обчисленні коефіцієнтів системи рівнянь (7.50) суми тригонометричних рядів заміняємо відповідними їх частинними сумами довжини $K = M = 400$. Відхилення наближених значень контактних напружень від точних у приграничній зоні області контакту пояснюється недосконалістю математичної моделі деформування оболонки і є наслідком усереднення на різних відрізках (які відповідають різним значенням параметра N) суттєво градієнтних (в околі граничних точок) контанктних напружень.

7.4.4. Взаємодія циліндричної оболонки з штампами змінної кривини. Розглянемо випадок задачі, коли кривини кромок штампів уздовж серединних ліній L_1, L_2 змінюються, зокрема, є кусково-сталими

$$k_0 = \frac{1}{R_0} = \begin{cases} \dfrac{1}{R_{01}}, & (\alpha_1^0, \alpha_2) \in \overline{L_1'} \quad (0 \le \varphi \le \theta_1), \\ \dfrac{1}{R_{02}}, & (\alpha_1^0, \alpha_2) \in \overline{L_1''} \quad (\theta_1 < \varphi < \theta), \end{cases} \tag{7.52}$$

де $\overline{L_1'}, \overline{L_1''}$– взаємно доповнюючі частини лінії $\overline{L_1}$; R_{01}, R_{02} – радіуси кривин складових серединних ліній кромок штампів.

Умови контакту (7.47) приведені до ліній $\overline{L_1}$ $(0 \le \varphi < \theta)$, набудуть вигляду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w = R\bar{\kappa}_0 = \begin{cases} R\bar{\kappa}_{01}, \ \overline{L_1'}(0 \le \varphi \le \theta_1), \\ R\bar{\kappa}_{02}, \ \overline{L_1''}(\theta_1 < \varphi < \theta). \end{cases} \tag{7.53}$$

Тут $\bar{\kappa}_{01} = R\left(\dfrac{1}{R_{01}} - \dfrac{1}{R}\right) = \dfrac{R}{R_{01}} - 1$, $\quad \bar{\kappa}_{02} = R\left(\dfrac{1}{R_{02}} - \dfrac{1}{R}\right) = \dfrac{R}{R_{02}} - 1$; $w = w(\alpha_1^0, R\varphi)$– прогин оболонки, який задається формулою (7.46).

Якщо вираз для прогину оболонки підставити в умову контакту (7.53), то одержимо таке інтегральне рівняння відносно контактного тиску $p_1(R\varphi)$

$$\frac{2 l_0 R}{D} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\theta} \sum_{k=1}^{K} \sum_{m=0,2,\ldots}^{M} c_{km}(\varepsilon) \varepsilon_m w_{km} (1 - m^2) \varphi_0(\lambda_{m1} l_0) \Phi_{km}^2(\alpha^0) \times$$
$$\times \Phi_{km}^2(\alpha) p_1(R\varphi) d\varphi = -w_0(\alpha) + R\bar{\kappa}_0, \quad 0 \le \varphi < \theta \qquad (K\varepsilon >> 1, \ M\varepsilon >> 1). \tag{7.54}$$

Наближений числовий розв’язок рівняння (7.54) шукаємо аналогічно до розв’язку (7.48). Дугу $\overline{L_1}$ розбиваємо на N елементарних дуг L^r, $r = \overline{1, N}$, з центральними точками (α_1^0, α_2^r), $\alpha_2^r = R\varphi^r$, і довжинами $2l^r = 2R\theta^r$. При цьому контактний тиск приймаємо сталою величиною, яка дорівнює p^r на кожному з відрізків L^r. Дискретним аналогом рівняння (7.54) є

$$\sum_{r=1}^{N} \overline{A}^{rs}(\varepsilon)\overline{q}^r = -\overline{w}_0\,\overline{q}_0 + \overline{\kappa}_{01}, \quad s = \overline{1, N_1},$$

$$\sum_{r=1}^{N} \overline{A}^{rs}(\varepsilon)\overline{q}^r = -\overline{w}_0\,\overline{q}_0 + \overline{\kappa}_{02}, \quad s = \overline{N_1 + 1, N}, \tag{7.55}$$

де $N_1, N - N_1$ – кількість елементарних дуг, на які розбиваються дуги $\overline{L_1'}, \overline{L_1''}$ відповідно, а

$$\overline{A}^{rs}(\varepsilon) = \frac{4l^r l_0}{R^2} \sum_{k=1,3,\ldots}^{K} \sum_{m=0,2,\ldots}^{M} \overline{c}_{km}(\varepsilon)\overline{w}_{km}\, \varphi_0(\lambda_{k1} l_0)\varphi_0(\lambda_{m2} l^r)\sin^2(\lambda_{k1}\alpha_1^0)\cos(m\varphi_0^r)\cos(m\varphi_0^s),$$

$$\overline{c}_{km}(\varepsilon) = \frac{4R^2}{l_1 l_2}\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)\varphi(\lambda_{m2}\varepsilon),\ \varphi(\lambda) = \left[\frac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2,\ \lambda_{k1} = \frac{k\pi}{l_1},\ \lambda_{m2} = \frac{2m}{R},\ l_2 = \frac{\pi R}{2},$$

$$\overline{w}_0 = \frac{4}{l_1}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_{k1}\varepsilon)}{\lambda_{k1}}\overline{w}_{km}\sin(\lambda_{k1}\alpha_1^0),$$

$$\overline{w}_{km} = \frac{w_{km}}{R^4},\ \overline{q}^r = \frac{R^3}{D}p^r,\ \overline{q}_0 = \frac{R^3}{D}q_0,\ l^r = \frac{R\theta}{2N},\ \varphi_0^r = \frac{(2r-1)\theta}{2N}.$$

7.4.5. Підсилення оболонки жорсткими елементами вздовж напрямної. Розглянемо задачу про взаємодію оболонки з жорстким замкнутим штампом (шпангоутом) змінної кривини. Нехай внаслідок підсилення оболонки круговий штамп частково змінив свою форму і серединна лінія кромки штампа набула овальної форми – плоскої гладкої замкнутої кривої (симетричної відносно двох взаємно перпендикулярних прямих), складеної з двох пар дуг різної кривини $k_{01} = 1/R_1$, $k_{02} = 1/R_2$ $(R_1 \ge R \ge R_2)$. З умови гладкості овалу (неперервності дотичних), задаючи його довжину $l = 2\pi R_0 = 2R_2\phi + 2R_1(\pi - \phi)$, де ϕ – центральний кут дуги кола меншого радіуса, R_0 – радіус кола, однакової з овалом довжини $(R_2 \le R_0 \le R)$, одержимо формулу для визначення відношення довжини дуги меншої кривини k_{01} до довжини дуги більшої кривини k_{02}, $\eta = \dfrac{2R_1(\pi - \phi)}{2R_2\phi} = \left(\dfrac{1}{R_0} - \dfrac{1}{R_2}\right)\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_0}\right)^{-1}$ або

$$\eta = -\frac{\kappa_2 - \delta}{\kappa_1 - \delta}, \tag{7.56}$$

де $\kappa_1 = \dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R}$; $\kappa_2 = \dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R}$; $\delta = \dfrac{1}{R_0} - \dfrac{1}{R}$.

Якщо $\kappa_1 = -\kappa_2$, то з (7.56) одержимо таку формулу

$$\kappa_2 = -\kappa_1 = \delta \frac{1+\eta}{1-\eta}.$$

Умова контакту оболонки і бандажа записується у вигляді формули (7.53), в якій приймається $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ і $\eta = \dfrac{2\theta_1}{\pi - 2\theta_1}$ або $\theta_1 = \dfrac{\pi\eta}{2(1+\eta)}$.

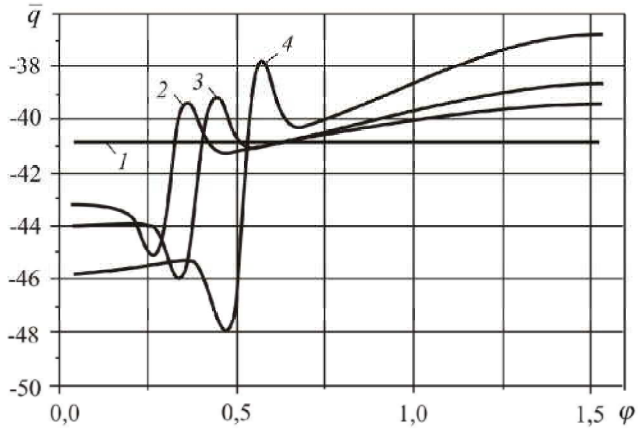

Рис. 7.6. Контактні напруження у підкріпленні

Криві на рис. 7.6 ілюструють залежність приведених контактних напружень $\bar{q} = p_0 R^3 / D$, від форми овала при $\alpha_1^0 = l_1/2$, $l_1 / R = 4$, $l_0 / R = 0{,}1$, $\nu = 0{,}3$, $R/h = 20$, $\delta = 0{,}005$, $\varepsilon / R = 0{,}01$, $N = 24$, $K = M = 300$ (довжини відрізків частинних сум рядів). Криві 1–4 відповідають значенням параметра η: 0; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{4}$. Бачимо, що різка зміна кривини кромки бандажа, навіть за умови гладкості (неперервності дотичної), приводить до концентрації контактних напружень в зоні зміни кривин.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
3. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
4. Андрейкив А.Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 346 с.
5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
6. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. Львів: “Світ”, 1994. – 560 с.
7. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных елементов, –М.: Мир, 1987. – 524 с.
9. Бурак Я.Й., Рудавський Ю.К., Сухорольський М.А. Узагальнені розв’язки Фур’є крайових задач теорії оболонок // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №4. – С. 57-62.
10. Бурак Я.Й., Сухорольський М.А. Взаємодія пружної оболонки і жорсткого тіла через нелінійно-пружний шар // Машинознавство. – 2001. – № 10. – С. 10-13.
11. Бурак Я.Й., Сухорольський М.А. Коливання кусково-однорідних оболонок і пластин// Машинознавство. – 2002. – № 12. – С. 3-8.
12. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
13. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
15. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
16. Власов В.З., Леонтьев Н.И. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 491 с.
17. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
18. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.– М.: Наука, 1974. – 456 с.
19. Галимов Ш.К. Уточненные теории пластин и оболочек. Саратов: Саратов. ун-т, 1990. – 134 с.
20. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат. – 1963. – 264 с.
21. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
22. Григолюк Э. И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
23. Григолюк Э,И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
24. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
25. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
26. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.

27. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.

28. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы /под общ. ред. А.Н.Гузя. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности. В 6-ти т.; Т. 3).

29. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1998, - Т. 41, № 1. – С. 12-34.

30. Гузь А.Н., Кубенко В.Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с. (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т. 5).

31. Гузь А.Н., Луговой П.З., Шульга Н.А. Конические оболочки, ослабленные отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 164 с.

32. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.

33. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.

34. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 523 с.

35. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в электродинамике. – М.: МГУ, 1987. – 167 с.

36. Донелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 567 с.

37. Зашкильняк И.М., Костенко И. С., Сухорольский М.А. Исследование изгибных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с отверстием методом граничных элементов // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 152-158.

38. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. –Киев: Наук. думка, 1980. – 165 с.

39. Кильчевский Н.А. Лекции по аналитической механике оболочек. – Киев: Вища шк., 1974. – 231 с.

40. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 229 с.

41. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.

42. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.

43. Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем: Сб. 21 научн. ст. – М.: Мир, 1984. –312 с.

44. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища шк., 1975. – 228 с.

45. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. –М.: Мир, 1987. – 328 с.

46. Купрадзе В.Д. Метод потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.

47. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: НАН України, ІППММ ім. Я.С. Підстригача. Вид-во "Сполом". – 2003. – 320 с.

48. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

49. Лурье А.И. Статика упругих тонкостенных оболочек. – М.: Гостехиздат, 1947. – 252 с.

50. Максимук О.В., Махніцький Р.М., Щербина Н.М. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій. – Львів: НАН України, ІППММ ім. Я.С. Підстригача. Вид-во "Сполом", 2005. – 396 с.

51. Мартинович Т.Л., Сухорольський М.А. Комплексні функції напружень для задач згину пластинок тимошенківського типу //Крайові задачі термомеханіки. Частина 2. – Київ: Ін-т математики НАН України. –1996. – С. 18-22.

52. Марчук М.В., Хом'як М.М. Змішана схема методу скінчених елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. Львів: НАН України, ІППММ ім. Я.С. Підстригача. Вид-во "Сполом", 2003. – 216 с.

53. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1968. – 167 с.

54. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. – М.: Мир, 1978. – 168 с.

55. Методы расчета оболочек : В 5 т. / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – Киев: Наук. думка, 1980. – Т. 1: Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – 636. с.

56. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Гостехиздат, 1957. – 476 с.

57. Моссаковский В.И., Гудрамович В.С., Макеев Е.М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1988. – 288 с.

58. Назаров С.А. Введение в асимптотические методы теории упругости. – Л.: Наука, 1983. – 117 с.

59. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. –М.: "Наука", 1984.– 344 с.

60. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. –872 с.

61. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. –432 с.

62. Образцов И.Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1973. – 391 с.

63. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Пластинки и оболочки. – М.: МГУ, 1969.– 695 с.

64. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. - 224 с.

65. Панасюк В.В., Теплий М.Й. Деякі контактні задачі теорії пружності. – Киев: Наук. думка, 1975. – 196 с.

66. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

67. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.

68. Пелех Б.Л., Лазько В.А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.

69. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 267 с.

70. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. О приближенных представлениях разрешающих уравнений теории пологих оболочек применительно к решению контактных задач // Доклады АН УССР. Серія А. – 1975. – №4. – С. 352-355.

71. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Обобщение теории термоупругости трансверсально-изотропных пластин // Мат. методы и физ.-мат. поля. – 1976. - №3. – С. 88-93.

72. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.

73. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках. Киев: Наук. думка, 1975. – 198 с.

74. Підстригач Я.С., Ярема С.Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 364 с.

75. Піскунов В.Г., Присяжнюк В.К. Опір матеріалів з основами пружності й пластичності: У 2 ч., 3 кн. – Ч. 1, кн. 1. Загальні основи курсу: Підручник. – Київ: Вища шк., 1994. – 204 с.

76. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.

77. Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С.54-59.

78. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.

79. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964. – С. 560.

80. Понятовский В.В. Уточненная теория трансверсально-изотропных пластин // Исследования по упругости и пластичности. –1967. – В. 6. – С. 72-92.

81. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

82. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. – М: Машиностроение, 1981. – 191 с.

83. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: Гостехиздат, 1950. – 360 с.

84. Рвачев В.Л., Проценко В.С. Контактные задачи для неклассических областей. – Киев: Наук. думка, 1977. – 235 с.

85. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв’язки крайових задач / Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Сухорольський М.А., Зашкільняк І.М., Колісник В.М., Микитюк О.А., Мусій Р.С. – Львів: Національний ун-т “Львівська політехніка”, 2002. – 226 с.

86. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: ЛГУ, 1978. – 310 с.

87. Рудавський Ю.К., Микитюк О.А., Сухорольський М.А. Метод Фур’є стосовно до динамічних задач для оболонок з отворами // Машинознавство. –2002. – №12. – С.15 – 19.

88. Рябенький В.С. Метод разностных потенциалов для некоторых задач механики сплошных сред. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

89. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 887 с.

90. Савула Я.Г., Флейшман Н.П. Расчет и оптимизация оболочек с резными срединными поверхностями. – Львов: Вища шк., 1989. – 172 с.

91. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.

92. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1954. – 444 с.

93. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 286 с.

94. Сухорольський М.А. Про штучне введення малих параметрів в задачах теорії пружності // Вісник держ. ун-ту “Львівська політехніка”. Диф. рівняння та їх застосування. – 1990. - № 242. – С. 93-94.

95. Сухорольський М.А. Про порядок локального наближення функцій тригонометричними поліномами – частинними сумами операторів усереднення // Укр. мат. журн. – 1997. – № 5. – С. 706–714.

96. Сухорольський М.А. Тонке покриття під локальним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – Том 36, № 6. – С. 33-38.

97. Сухорольський М.А. Метод граничних елементів розв’язування динамічних задач для оболонки з отвором // Машинознавство. – 2000. – № 3. – С. 27-32.

98. Сухорольський М.А. Неявні малі параметри в граничних задачах теорії оболонок // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2000. –Том 42, № 3. – С. 126-130.

99. Сухорольский М.А., Костенко И.С. Секвенциальное представление решений контактных задач теории оболочек // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 108-115.

100. Сухорольський М.А., Костенко І.С., Микитюк О.А., Зашкільняк І. М. Послідовнісний підхід до моделювання локальних збурень фізичних полів // Вісн. Запорізького держ. ун-ту. – 2002. – №1. – С. 106-110.

101. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов, Вик.Н.Чехов, К.И. Шнеренко. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчетв оболочек: В 5 т.; Т. 1).

102. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.

103. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1986. – 288 с.

104. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М: “Наука”, 1977. – 736 с.

105. Угодников А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого тела. – Казань: Казан. ун-т, 1986. – 296 с.

106. Улитко А.Т. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Київ: “Академпериодика”, 2002. – 342 с.

107. Филлипов А.П., Кохманюк С.С., Янютин Е.Г. Деформирование элементов конструкций при действии ударных и импульсных нагрузок, – Киев: Наук. думка, 1978. – 184 с.

108. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. – М: Наука, 1969. –800 с.

109. Хижняк В.К., Шевченко В.П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: ДонГУ, 1979. – 179 с.

110. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.

111. Чепига В.Е. Применение полиномов Лежандра для построения теории многослойных оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – № 5. – С. 190.

112. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: ЛГУ, 1962. – Т. 1. – 274 с.

113. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Л.: ЛГУ, 1964. – Т. 2. – 395 с.

114. Шевченко В.П., Цванг В.А. Граничные интегральные уравнения в теории пластин и оболочек. – Донецк: ДонГУ, 1986. – 100 с.

115. Шопа В.М., Сухорольский М.А., Полевой Б.Н. Математическая модель нелинейной механической системы с упорами // Прикл. механика. – 1990. – Т. 26, № 4. - С. 109–113.

116. Штаерман И.Я. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

117. Flugge W. Stresses in shells. – Berlin (Heiderberg), New York: Springer – Verlag, 1967. – 499 p.

118. Gradwell G. Contact problems in the classical theory of elasticity. – Alp hen an den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. – 310 p.

119. Oden J.T., Reddy I.N. Varitional Method in Theoretical Mechanics. – Berlin: Springer- Verlag, 1976. – 302 p.

120. Zielinski A. P. Metoda szeregow brzegowych w zastosowa do plyt i powlok o krzywoliniowym konturze. – Krakov: Copyright by Politechnika Krakovska, 1990. – 70 s.

Бурак Ярослав Йосипович
Рудавський Юрій Кирилович
Сухорольський Михайло Антонович

АНАЛІТИЧНА МЕХАНІКА ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНИХ ОБОЛОНОК

Відповідальний редактор А. Ф. БАРВІНСЬКИЙ
Літературний редактор О. Р. ГРИЦИНА
Комп'ютерне верстання С. В. ТИМОШЕНКА

Підписано до друку 22.02.2007 р. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$.
Папір офсетний. Друк офсетний. Облік.-вид. арк. 19,85.
Умовн. друк. арк. 19,05. Умовн. фарб.-відбит. 19,68. Зам.

Видання здійснено за участю
Інституту післядипломної освіти
Національного університету "Львівська політехніка"
Видавництво "Інтелект-Захід"

Віддруковано з діапозитивів у Жовківській книжковій друкарні
видавництва Отців Василіян "Місіонер"
79310, м. Жовква, Львівської обл., вул. Василіянська, 8