Анотація

Локазюк О.В. Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Інститут математики НАН України, Київ, 2022.

Основою дисертаційного дослідження є дві наступні задачі: групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона і групова класифікація нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних. Незважаючи на те, що ці задачі мають дуже довгу історію досліджень, у роботі отримано нові результати у рамках алгебраїчного підходу після детального вивчення трансформаційних властивостей розглядуваних класів та їх підкласів. Об'єднуючим інструментом в обох цих задачах стало ефективне використання класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. Запропоновані у дисертації методи і підходи дали змогу не лише значно покращити попередні результати щодо ліївських симетрій рівнянь із цих класів, а й істотно спростити доведення класифікаційних результатів і перевірку їх достовірності.

У розділі 1 проведено повну групову класифікацію класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона

$$u_{tx} = f(t, x, u) \quad \text{з} \quad f_{uu} \neq 0, \tag{1}$$

з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності. Як суттєве узагальнення результатів Лі у параграфі 1.1 доведено, що групоїд контактної еквівалентності класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона є

продовженням першого порядку групоїда точкової еквівалентності цього класу (лема 1.2). Таким чином, проблему дослідження структури контактних перетворень для рівнянь із даного класу зведено до дослідження відповідних точкових перетворень. У лемі 1.4 доведено, що клас (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона є нормалізованим (відносно точкових перетворень), і побудовано його групу еквівалентності $G^{\sim}$ та відповідну алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$. Вигляд векторних полів ліївських симетрій та відповідне класифікаційне рівняння представлено у твердженні 1.9. Оскільки клас є нормалізованим, а його група еквівалентності має специфічну структуру, то для його повної групової класифікації використано алгебраїчний метод у поєднанні з ефективним залученням класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. У класі (1) виокремлено рівняння Ліувілля як рівняння з нескінченновимірними алгебрами ліївської інваріантності та досліджено властивості скінченновимірних придатних підалгебр проєкції $\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim}$ алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір із координатами (t,x,u). У лемі 1.12 доведено, що $\dim\mathfrak{g}_f=\dim\pi_*^{t,x}\mathfrak{g}_f$, і показано, що $\dim\mathfrak{g}_f\leqslant 4$, якщо рівняння з класу допускає скінченновимірну алгебру ліївської інваріантності. У теоремі 1.14 параграфу 1.2 представлено основний результат групової класифікації у вигляді повного списку $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1). У параграфі 1.3 наведено повне доведення теореми 1.14. Також у цьому ж параграфі знайдено низку $G^{\sim}$-інваріантних цілочисельних характеристик підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$, які дозволяють повністю ідентифікувати $G^{\sim}$-нееквівалентні випадки розширень ліївської симетрії у класі (1). Ці характеристики використано у параграфі 1.4 для розрізнення, з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності, послідовних розширень ліївської симетрії серед знайдених у теоремі 1.14. Таким чином, вичерпно описано структуру частково впорядкованої множини $G^{\sim}$-нееквівалентних розширень ліївської симетрії у класі (1), яку представлено на рисунку 1.1 у вигляді діаграми Хассе. Також проаналізовано можливі шляхи для групової класифікації підкласів класу (1). Як приклад, у параграфі 1.5 розглянуто повну групову класифікацію важливого підкласу $\mathcal{K}_2$, що виокремлено умовою $f_x + f_t = 0$, з точністю до еквівалентності, породженою групою еквівалентності $G_2^{\sim}$ цього підкласу.

У розділі 2 досліджено клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{2}$$

з n невідомими функціями $x^1, \ldots, x^n$, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \ldots, x^n(t)\big)^{\mathsf{T}}$, $n \geqslant 2$. Набір $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворено довільними (достатньо гладкими) $n \times n$ матричнозначними функціями A та B змінної t і довільною (достатньо гладкою) векторнозначною функцією $\boldsymbol{f}$ змінної t. На початку розділу наведено детальний огляд відомих результатів щодо трансформаційних властивостей звичайних диференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. У параграфі 2.1 побудовано групи еквівалентності та групоїди еквівалентності класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його вкладених підкласів, що отримані за допомогою калібрування набору довільних елементів $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ із використанням перетворень еквівалентності. У результаті отримано ланцюжок класів $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$. Доведено, що вищенаведені класи напівнормалізовані у звичайному сенсі, орбіта елементарної системи $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ у кожному з них під дією відповідної групи еквівалентності є сингулярною частиною цього класу, і є доповненням до орбіти, яку вважаємо регулярною частиною класу, і яка має кращі властивості нормалізації, ніж весь цей клас. Алгебри еквівалентності всіх класів, їх сингулярних і регулярних частин обчислено у параграфі 2.2 як інфінітезимальні аналоги відповідних груп еквівалентності. У параграфі 2.3 показано, що групові класифікації класу $\bar{\mathcal{L}}$ та каліброваних підкласів можна розділити на групові класифікації їх сингулярних і регулярних частин. Задачі групової класифікації сингулярних частин є тривіальними, оскільки їх розв'язання визначено елементарною системою $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ та її максимальною алгеброю ліївської інваріантності. Отримано системи визначальних рівнянь для ліївських симетрій систем із регулярних частин класу і показано, що задачі групової класифікації для цих частин можна звести до класифікації суттєвих розширень ліївської симетрії цих регулярних підкласів. Також обчислено ядро групи точкових симетрій для всіх класів, що виникають у цьому розгляді. Властивості можливих суттєвих розширень ліївської симетрії у регулярних частинах класу досліджено в параграфі 2.4. Використовуючи отримані властивості, запропоновано два шляхи класифікації таких розширень у рамках алгебраїчного підходу в залежності від їх структури. Необхідні та достатні умови еквівалентності систем, що допускають векторні поля ліївської симетрії зі сталими t-компонентами, представлено в параграфі 2.5. Отримані властивості суттєвих ліївських розширень у регулярних частинах класу дозволили знайти максимальну розмірність максимальних алгебр ліївської інваріантності систем, яка є підмаксимальною для всього класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його каліброваних підкласів, див. параграф 2.6. У цьому параграфі детально описано структуру суттєвих алгебр ліївської інваріантності систем із регулярних частин класу та охарактеризовано максимальні алгебри ліївської інваріантності систем із сингулярних частин класу. У параграфі 2.7 доведено твердження щодо пониження порядку для нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку та їх інтегрування із використанням відомих ліївських симетрій або перетворень еквівалентності між ними. Методи, які розроблено в параграфі 2.4, використано в параграфі 2.8 для вичерпного розв'язання задачі групової класифікації нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку для найнижчого частинного значення $n=2$.

У додатку A досліджено нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння другого порядку та знайдено явний вигляд перетворень, що пов'язують такі рівняння з максимальними семивимірними алгебрами ліївських симетрій. Додаток Б містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Ключові слова: групова класифікація диференціальних рівнянь, нелінійні рівняння Клейна–Ґордона, системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, ліївські симетрії, група еквівалентності, групоїд еквівалентності, алгебра еквівалентності, алгебраїчний метод групової класифікації, реалізації алгебр Лі векторними полями, максимальна алгебра інваріантності.

Abstract

Lokaziuk O.V. Realizations of Lie algebras on line and group classification of differential equations. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, speciality 111 Mathematics. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2022.

The foundation of the dissertation research is the following two problems: group classification (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations and group classification of normal linear systems of ordinary second-order differential equations. Despite the fact that these problems have a very long history of research, new results have been obtained in the framework of the algebraic approach after a detailed study of the transformational properties of the considered classes and their subclasses. The unifying tool in both of these problems was the efficient use of the classical Lie theorem on the realization of finite-dimensional Lie algebras by vector fields on the line. The methods and approaches proposed in the dissertation allowed us not only to essentially improve the previous results on Lie symmetries of equations from these classes, but also to significantly simplify the proof of classification results and verification their correctness.

In Chapter 1 we carried out the complete group classification of class of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations

$$u_{tx} = f(t,x,u) \quad \text{with} \quad f_{uu} \neq 0, \tag{1'}$$

up to the $G^{\sim}$-equivalence. Essentially generalizing Lie's results, we prove that the contact equivalence groupoid of the class of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations is the first-order prolongation of its point equivalence groupoid (Lemma 1.2). Thus, the problem of studying the structure of contact transformations for equations of this class reduced to

the study of the corresponding point transformations. In Lemma 1.4, we prove that (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations is normalized (with respect to point transformations), and constructed its equivalence group $G^{\sim}$ and corresponding equivalence algebra $\mathfrak{g}^{\sim}$. The form of the vector fields of Lie symmetries and the corresponding classification equation are presented in Proposition 1.9. Since the class is normalized, and its equivalence group has the specific structure, so for complete group classification we used the algebraic method combined with effective application of the classical Lie theorem on realizations of finite-dimensional Lie algebras by vector fields on the line. In the class ($1'$) we singled out the Liouville equations as equations with infinite-dimensional Lie invariance algebras and investigated the properties of finite-dimensional appropriate subalgebras of projection $\varpi_*\mathfrak{g}^{\sim}$ of algebra $\mathfrak{g}^{\sim}$ on space with coordinates (t, x, u). In Lemma 1.12, we proved that $\dim \mathfrak{g}_f = \dim \pi_*^{t,x}\mathfrak{g}_f$, and shew that $\dim \mathfrak{g}_f \leqslant 4$ if the class equation admits the finite-dimensional Lie invariance algebra. In Theorem 1.14, we presented the main result of the group classification as the complete list of $G^{\sim}$-inequivalent Lie-symmetry extensions within the class ($1'$). We found the number of $G^{\sim}$-invariant integer characteristics of subalgebras of algebra $\mathfrak{g}^{\sim}$ that allowed us to completely identify $G^{\sim}$-inequivalent cases of Lie-symmetry extensions within the class ($1'$). We used these characteristics to distinguish, modulo the $G^{\sim}$-equivalence, successive Lie-symmetry extensions among the found ones in Theorem 1.14. Thus, we exhaustively described the structure of partially ordered set of $G^{\sim}$-inequivalent Lie-symmetry extensions within the class ($1'$), that is represented as the Hasse diagram in Figure 1.1. Possible ways for the group classifications of subclasses of the class ($1'$) are also analyzed. As an example, we considered the group classification of the important subclass $\mathcal{K}_2$ associated with the constraint $f_x + f_t = 0$ up to the equivalence generated by the equivalence group $G_2^{\sim}$ of this subclass.

In Chapter 2, we studied the class $\bar{\mathcal{L}}$ of normal linear systems of second-order ordinary differential equations:

$$\boldsymbol{x}_{tt} = A(t)\boldsymbol{x}_t + B(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \tag{2'}$$

with the n unknown functions $x^1, \dots, x^n$, $\boldsymbol{x}(t) = \big(x^1(t), \dots, x^n(t)\big)^\mathsf{T}$, where $n \geqslant 2$. The tuple $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ of arbitrary elements of the class $\bar{\mathcal{L}}$ consists of arbitrary (sufficiently smooth) $n \times n$ matrix-valued functions A and B of t and arbitrary (sufficiently smooth) vector-valued function $\boldsymbol{f}$ of t. At the beginning of the chapter, the detailed review is made of the known results on the transformational properties of ordinary differential equations and systems of such equations. Section 2.1 is devoted to the construction of the equivalence groups and the equivalence groupoids of the class $\bar{\mathcal{L}}$ and its nested subclasses obtained by gauging of the arbitrary-element tuple $\theta = (A, B, \boldsymbol{f})$ by equivalence transformations. As results we obtained the chain of classes $\bar{\mathcal{L}} \hookleftarrow \mathcal{L} \hookleftarrow \mathcal{L}' \supset \mathcal{L}''$. We proved that the above classes are semi-normalized in the usual sense, the orbit of the elementary system $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ in each of them under action of the corresponding equivalence group is the singular part of this class, and the complement to the orbit, which is assumed as the regular class part, has better normalization properties than this entire class. The equivalence algebras of all the classes and their singular and regular parts are computed in Section 2.2 as the infinitesimal counterparts of the respective equivalence groups. In Section 2.3, we shew that the group classifications of the class $\bar{\mathcal{L}}$ and the gauged subclasses split into the group classifications of their singular and regular parts. The group classification problems for the singular parts are trivial since their solutions are given by the elementary system $\boldsymbol{x}_{tt} = \boldsymbol{0}$ and its maximal Lie invariance algebra. We derived the systems of determining equations for Lie symmetries of the systems from the regular class parts and shew that the group classification problems for these parts reduce to the classifications of essential Lie-symmetry extensions within them. We also computed the kernel point symmetry groups for all the classes arising in this consideration. Properties of possible essential Lie-symmetry extensions within the regular class parts are studied in Section 2.4. Using the obtained properties, we suggested two ways for classifying such extensions within the framework of the algebraic approach depending on their structure. Necessary and sufficient conditions for the similarity of systems possessing Lie-symmetry vector fields with constant t-components are presented in Section 2.5. The obtained properties of essential Lie-symmetry extensions within the regular class parts allowed us to find the maximum dimension of the maximal Lie invariance algebras of systems from these parts, which is submaximum within the entire class $\bar{\mathcal{L}}$ and its gauged subclasses, see Section 2.6. Therein, we more thoroughly described the structure of the essential Lie invariance algebras of systems from the regular class parts and characterized the maximal Lie invariance algebras of systems from the singular class parts. In Section 2.7, we proved several assertions on order reduction for normal linear systems of second-order ordinary differential equations and their integration using their known Lie symmetries or equivalence transformations between them. The techniques developed in Section 2.4 are applied in Section 2.8 to exhaustively solving the problem of group classification of normal linear systems of second-order ordinary differential equations for the lowest particular value $n = 2$.

In Appendix A, the nonlinear (1+1)-dimensional evolution equations of the second order are investigated and an explicit form of transformations is found that connects such equations with maximal seven-dimensional Lie symmetries algebras. Appendix Б is contained the list of publications and information on approbation of the results.

Key words: group classification of differential equations, nonlinear Klein–Gordon equations, linear systems of second-order ordinary differential equations, Lie symmetries, equivalence group, equivalence groupoid, equivalence algebra, algebraic method of group classification, realizations of Lie algebras by vector fields, maximal Lie invariance algebra.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Бойко В.М., Локазюк О.В., (1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями, *Збірник праць Ін-ту мат. НАН України* **16** (2019), № 1, 16–21, http://trim.imath.kiev.ua/index.php/trim/article/view/364.

2. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations, *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 127, 38 pp., https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z, arXiv:2008.05460. (SJR – Q2, Scopus – Q1, WoS – Q1).

3. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, *Доп. НАН України* (2021), № 5, 3–11, https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003.

4. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O., Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, arXiv:2105.05139, 2021, 49 pp.

5. Локазюк О.В., Групова класифікація та точні розв'язки рівнянь типу нелінійної теплопровідності, Тези доповідей Міжнародного семінару до 40-річчя від створення відділу прикладних досліджень, Київ, Інститут математики НАН України, 2018, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2018/Lokazyuk_ua.html.

6. Локазюк О.В., Нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з алгебрами ліївських симетрій максимальної розмірності, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2019, С. 62.

7. Локазюк О.В., Контактні перетворення нелінійних еволюційних рівнянь з максимальними ліївськими симетріями, Тези доповідей

V Міжнародної науково-практичної конференції “Інформаційні технології в освіті, науці і техніці” ІТОНТ, Черкаси, Черкаський державний технологічний університет, 2020, С. 100–102.

8. Локазюк О.В., Ліївські симетрії лінійних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку з залежними від часу коефіцієнтами, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2021”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Lokazyuk.pdf.

9. Локазюк О.В., Групова класифікація (1+1)-вимірних нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, С. 68, https://www.imath.kiev.ua/~young/youngconf2021/Abstracts_2021.pdf.

10. Бойко В.М., Локазюк О.В., Попович Р.О., Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Ґордона, Тези доповідей Міжнародного онлайн-семінару з нагоди 85-ї річниці від народження Вільгельма Фущича, Київ, Інститут математики НАН України, 2021, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2021/Lokaziuk.html.

11. Локазюк О.В., Групи еквівалентності лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих вчених “Підстригачівські читання – 2022”, Львів, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2022, http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Lokaziuk.pdf.

12. Локазюк О.В., Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого поряд-

ку, Тези доповідей Міжнародної наукової конференції “Прикладна математика та інформаційні технології – 2022”, Чернівці, Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, 2022, С. 70–71, http://www.amit60.fmi.org.ua/?page=materials.