

Анотація

Аветісян Д. А. Параметричне оцінювання у стохастичних диференціальних рівняннях з частинними похідними і дробовими шумами.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю «112 — статистика» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2023.

Дисертаційне дослідження присвячене стохастичним рівнянням з частинними похідними, керованим вінерівським процесом, дробовим броунівським рухом, або їхньою лінійною комбінацією. Головною метою дослідження є розробка методів одночасного оцінювання невідомих параметрів шуму на основі дискретних спостережень розв'язків таких рівнянь. Також вивчаються асимптотичні властивості побудованих оцінок. Значну увагу приділено вивченню властивостей розв'язків згаданих рівнянь, таких як стаціонарність та ергодичність, оскільки на них базується побудова та подальше дослідження статистичних оцінок.

Стрімкий розвиток теорії стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними триває вже чотири десятиліття. Ця теорія об'єднує елементи теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та стохастичного аналізу. Вона знаходить застосування у багатьох наукових галузях, таких як фізика, біологія, геофізика та фінанси. Такі рівняння моделюють процеси дифузії, фазові переходи та властивості матеріалів. Вони також застосовуються у фінансах для ціноутворення опціонів, управління ризиками та моделювання стохастичної волатильності. Оскільки стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними відіграють важливу роль у багатьох наукових галузях, то дослідження властивостей та розвиток статистичних методів для них є актуальним завданням сучасних досліджень.

З особливою увагою в дисертаційному дослідженні вивчаються стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними, які містять дробовий броунівський рух. Такі рівняння дозволяють описувати процеси з довгостроковою та короткостроковою залежністю, що має значення для фізичних систем, радіоелектронних приладів, комп'ютерних мереж та фінансових ринків. Додатково, дане дослідження охоплює більш складні моделі з поєднанням білого і дробового

шумів. Це дозволяє, зокрема, точніше моделювати процеси на фінансових ринках, де існують різні джерела випадковості.

У дисертації вивчається стохастичне рівняння теплопровідності, кероване одним із трьох типів випадкового шуму: 1) білим; 2) дробовим броунівським; 3) змішаним дробовим броунівським (тобто, лінійною комбінацією перших двох).

Спочатку для кожного з трьох згаданих стохастичних рівнянь введено поняття м'якого розв'язку та досліджено його аналітичні властивості. Зокрема, виведено формули для обчислення дисперсії та коваріаційної функції, досліджено їхню граничну поведінку, побудовано оцінки зверху. Встановлено стаціонарність та ергодичність розв'язку. Перелічені властивості відіграють ключову роль при побудові статистичних оцінок та дослідженні їхніх асимптотичних властивостей.

Основну частину дослідження присвячено розробці статистичних методів для оцінювання параметрів згаданих стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При цьому припускається, що розв'язок відповідного рівняння спостерігається у дискретних точках простору для фіксованих моментів часу.

Для багатовимірного стохастичного рівняння теплопровідності з білим шумом побудовано оцінку параметра дифузії σ на основі ергодичної теореми. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність отриманої оцінки, для чого використано теорему Нуаларта – Пеккаті про четвертий момент.

Для стохастичного рівняння теплопровідності з дробовим броунівським шумом спочатку побудовано оцінку параметра дифузії σ за припущення, що параметр Хюрста H є відомим. Доведено строгу консистентність та асимптотичну нормальність одержаної оцінки. Далі досліджено задачу одночасного оцінювання параметра дифузії та параметра Хюрста. Побудовано строгу консистентні оцінки та доведено їхню спільну асимптотичну нормальність для $H \in (0, \frac{3}{4})$.

Для стохастичного рівняння теплопровідності зі змішаним дробовим броунівським шумом (який є лінійною комбінацією дробового броунівського руху з індексом Хюрста H та незалежного від нього вінерівського процесу) побудовано оцінку параметра Хюрста H , яка не залежить від інших параметрів рівняння.

Доведено її строгу консистентність для $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ та асимптотичну нормальність для $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Після цього одержано оцінки параметрів для коефіцієнтів при дробовому броунівському русі та при вінерівському процесі (σ, κ) , за припущення, що параметр Хюрста H відомий. Доведено строгу консистентність побудованих оцінок для $H \neq 1/2$ та їхню спільну асимптотичну нормальність для $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Виконано комп'ютерне моделювання запропонованих у роботі оцінок параметрів. Отримані числові результати підтверджують теоретичні висновки щодо їхньої консистентності та асимптотичної нормальності.

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є внеском у теорію та статистику стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Методи, запропоновані в дисертації, можуть бути корисними при дослідженні математичних моделей випадкових явищ зі складною поведінкою, зокрема тих, які характеризуються довгостроковою або короткостроковою залежністю.

Ключові слова: Дробовий броунівський рух, стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними, стаціонарні процеси, ергодичні процеси, строга консистентність, асимптотична нормальність, м'який розв'язок.

Summary

Avetisian D. A. Parameter estimation in stochastic partial differential equations with fractional noises. — Manuscript.

Doctor's of Philosophy, specialty "112 — Statistics" — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2023.

The thesis is devoted to fractional stochastic partial differential equations driven by Wiener process, fractional Brownian motion or their linear combination. The main goal of the research is the development of statistical methods for simultaneous noise parameters estimation based on discrete observations of the solutions. Also asymptotic properties of estimators have been investigated. Special attention is given to the properties of solutions such as stationarity and ergodicity since they are crucial for the construction and further investigation of statistical estimators.

The rapid development of the theory of partial differential equations is in progress for the last four decades. This theory combines the elements of stochastic partial differential equations theory and stochastic analysis. It can be applied in many scientific areas such as physics, biology, geophysics and finances. Such equations are used to model the diffusion processes, phase transitions and material properties. They also can be applied in finance for option pricing, risk management and stochastic volatility modeling. The investigation of the stochastic partial differential equations properties and development of the statistical methods for them are important problems for modern studies as they are playing a crucial role in many scientific fields.

The special attention in this thesis is devoted to stochastic partial differential equations driven by fractional Brownian noise. Such type of equations can be used to describe the processes with long-term and short-term dependencies which are important for physical systems, radio-electronic devices, computer networks and financial markets. In addition, this research covers more complex models with combination of white and fractional Brownian noises. This allows us, in particular, to model financial market processes more accurately when different sources of randomness exist.

In this thesis stochastic differential heat equation with one of three types of random noise: 1) white; 2) fractional Brownian; 3) mixed fractional Brownian (which is a linear combination of first two types) has been studied.

First, for each type of stochastic equations specified above the definition of mild solution was introduced and its analytic properties were investigated. In particular, the exact formulas for the variance and the covariance functions were derived, its limit behavior was investigated, upper bounds were constructed. The stationarity and ergodicity of the solution were proved for each case. The above mentioned properties play a crucial role for statistical estimators construction and their asymptotic properties investigation.

The main part of this research is devoted to statistical methods development for parameter estimation of stochastic partial differential equations specified above. At the same time the solutions of corresponding equations are observed at discrete spatial points for fixed time moments.

The diffusion parameter σ estimator has been constructed for multidimensional stochastic heat equation with white noise based on the ergodic theorem. Strong consistency and asymptotic normality of this estimator have been proved using the

Nualart–Peccati fourth moment theorem.

For stochastic heat equation with fractional Brownian noise the diffusion parameter σ estimator has been constructed assuming that Hurst index H is known. Strong consistency and asymptotic normality of created estimator have been proved. Then the problem of joint diffusion parameter and Hurst parameter estimation has been studied. Strongly consistent joint estimator has been constructed and its asymptotic normality has been proved for $H \in (0, \frac{3}{4})$.

The Hurst parameter H estimator which does not depend on other parameters has been constructed for stochastic heat equation with mixed fractional Brownian noise (a linear combination of fractional Brownian noise with Hurst index H and independent Wiener process). Strong consistency of constructed estimator has been proved for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ and its asymptotic normality has been proved for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Then assuming the parameter H to be known, joint estimator of the coefficients in front of Wiener process and in front of fractional Brownian motion (σ, κ) has been constructed. Strong consistency of this estimator has been proved for $H \neq 1/2$ and its joint asymptotic normality has been proved for $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.

Computer simulation has been performed for all considered parameter estimators. The numerical results confirm the theoretical conclusions regarding their consistency and asymptotic normality.

The thesis is mostly theoretical. The results obtained contribute to the theory and statistics of stochastic partial differential equations. The methods proposed in the thesis can be useful in research of mathematical models of random phenomena with complex behavior, in particular the one which is characterized by long-term or short-term dependence.

Keywords: Fractional Brownian motion, stochastic partial differential equation, stationary process, ergodic process, strong consistency, asymptotic normality, mild solution.