

АНОТАЦІЯ

Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з аналітичними символами. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. — Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Міністерство освіти і науки України, Чернівці, 2020.

Дисертація складається із анотації, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню коректної розв'язності та властивостей розв'язків нелокальної багатоточної за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь в просторах типу S та W .

У розділі 1 наведено огляд праць, які стосуються результатів, наведених у дисертації, є близькими за змістом та методами досліджень, зокрема, аналізуються результати, пов'язані з нелокальними задачами для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними.

У другому розділі дано огляд результатів дисертації та описано методи, якими вони отримуються.

У розділі 3, який складається з чотирьох підрозділів, досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за символами, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини (клас таких операторів містить і оператори Бесселя дробового диференціювання). Наведено допоміжні факти, які стосуються топологічної структури просторів типу S та основних операцій у таких просторах, а також основні означення та твердження, що стосуються відображень із значеннями в лінійному топологічному просторі або об'єднанні таких просторів (підрозділи 3.1, 3.2). Досліджено властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточної за часом задачі для еволюційного рівняння з псевдодиференціальним

оператором, який діє в просторах типу S (підрозділ 3.3). Доведено коректну розв'язність зазначеної задачі у випадку, коли початкова функція є узагальненою функцією типу розподілів, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією, встановлено, що розв'язок володіє властивістю локалізації — властивістю локального покращення збіжності (підрозділ 3.4): якщо узагальнена початкова функція на деякій відкритій множині збігається з неперервною функцією, то відповідна нелокальна умова задовольняється не в слабкому сенсі (тобто в просторі узагальнених функцій типу ультрарозподілів), а в сенсі рівномірної збіжності на кожному компактї, який міститься в заданій області.

У розділі 4 досліджено еволюційне рівняння з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора. Наведено основні означення та твердження, які стосуються просторів основних та узагальнених елементів, пов'язаних з невід'ємним самоспряженим оператором в гільбертовому просторі, даються основні відомості, які стосуються функцій Ерміта та формальних рядів Фур'є-Ерміта (підрозділи 4.1, 4.2). У підрозділі 4.3 наведено елементи операційного числення, пов'язаного з невід'ємним самоспряженим оператором, спектр якого є суто дискретним. У просторі узагальнених функцій типу ультрарозподілів, які ототожнюються з формальними рядами Фур'є-Ерміта, визначається абстрактна операція згортки, за допомогою якої невід'ємні самоспряжені оператори із суто дискретними спектрами трактуються як оператори згортки. За допомогою такого підходу у підрозділі 4.4 доведено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора у випадку, коли початкова функція є узагальненою функцією і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта. Досліджено властивості фундаментального розв'язку, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією.

У розділі 5 досліджено еволюційні рівняння з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку, які діють в просторах типу W . Наведено основні відомості, що стосуються просторів типу W та просторів, топологічно спряжених з ними (підрозділи 5.1, 5.2). Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі з псевдодиференці-

альним оператором, який будується за сталим символом за допомогою перетворення Фур'є і трактується як оператор диференціювання нескінченного порядку; початкова функція є елементом простору узагальнених функцій типу W' (підрозділ 5.3). При цьому попередньо досліджено властивості фундаментального розв'язку зазначеної задачі, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з початковою функцією. У підрозділі 5.4 аналогічні результати одержано у випадку, коли псевдодиференціальний оператор будується за допомогою перетворення Бесселя і трактується як оператор Бесселя нескінченного порядку. Досліджено еволюційне рівняння з псевдодиференціальним оператором, побудованим за змінним символом. Дано означення фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для такого еволюційного рівняння та досліджено властивості фундаментального розв'язку. Доведено розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі в класі обмежених неперервних на \mathbb{R} функцій (підрозділ 5.5).

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть знайти застосування у подальшому розвитку теорії параболічних псевдодиференціальних рівнянь, сингулярних параболічних рівнянь, рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку, теорії узагальнених функцій.

Ключові слова: еволюційне рівняння, псевдодиференціальний оператор, невід'ємний самоспряжений оператор, формальний ряд Фур'є, узагальнена функція.

ABSTRACT

Shyrokovskiykh A. O. Nonlocal multipoint in time problem for evolutionary pseudodifferential equations with analytic symbols. — Manuscript.

The dissertation for obtaining the Doctor Philosophy Degree (Ph.D.) on the speciality 111 Mathematics. — Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, MES of Ukraine, Chernivtsy, 2020.

The dissertation consists of an abstract, introduction, five sections, conclusions, and a list of sources used. The introduction substantiates the relevance of the research topic, formulates the purpose, task, subject, object and methods of the research, presents the scientific novelty, the practical significance of the results obtained, the relationship of work with scientific themes and the personal contribution of the applicant, and also indicates where the main results of the dissertation were tested and published.

The dissertation is devoted to investigate correct solvability and properties of the solutions of a nonlocal multipoint in time problem for evolutionary pseudodifferential equations in the spaces of S and W type.

In section 1, the review of the literature related to the topic of the dissertation and similar in content and research methods, in particular, analyzes the results associated with nonlocal problems for differential operator equations and equations with partial derivatives.

The second section gives an overview of the results of the dissertation and describes the methods they are obtained by.

In section 3, which consists of four subsections, a nonlocal multipoint in time problem is investigated for evolution equations with pseudodifferential operators constructed by symbols that allow an analytic extension to a definite area of the complex plane (the class of such operators contains also Bessel operators of fractional differentiation). There are auxiliary facts concerning the topological structure of spaces of S type and the basic operations in such spaces. We give the basic definitions and assertions concerning mappings with values in a linear topological space or combining such spaces (subsections 3.1, 3.2). The properties of the fundamental solution of a nonlocal multipoint in time problem for an evolution equation with a pseudodifferential operator that operates in spaces of S type are investigated (subsection 3.3). The correct solvability of the indicated problem

in the case when the initial function is a generalized function of distribution type is proved; a solution in the form of a convolution of a fundamental solution with an initial function is found. It has been established that the solution has the property of localization - the property of local improvement of convergence (subsection 3.4): if the generalized initial function on some open set coincides with a continuous function, then the corresponding nonlocal condition is satisfied not in the weak sense (that is, in the space of generalized functions of the type of ultra-distributions), but in the sense of uniform convergence on every compact set contained in a given area.

In section 4, an evolution equation with a harmonic oscillator and functions of such an operator are investigated. It contains the basic definitions and assertions concerning the spaces of the main and generalized elements associated with an integral self-directed operator in a Hilbert space; the basic information about Hermite functions and Fourier-Hermite formal series (subsections 4.1, 4.2). In subsection 4.3, there are elements of an operating calculus associated with an integral self-directed operator whose spectrum is purely discrete. In the space of generalized functions of the type of ultra-distributions, which are identified with Fourier-Hermite formal series, an abstract convolution operation is defined, by which integral self-directed operators with purely discrete spectra are treated as convolution operators. Using this approach in subsection 4.4, the correct solvability of a nonlocal multipoint in time problem for an evolution equation with a harmonic oscillator and functions of such an operator in the case when the initial function is a generalized function and is identified with a certain formal Fourier-Hermite series is proved. The properties of the fundamental solution are investigated, a solution in the form of a convolution of a fundamental solution with an initial function is found.

In section 5, we study the evolution equations with differentiation operators and Bessel operators of infinite order that operate in spaces of W type. The basic information concerning spaces of type W and spaces topologically conjugate to them is given (subsections 5.1, 5.2). The correct solvability of a nonlocal multipoint problem with a pseudodifferential operator is constructed, which is constructed by a constant symbol using the Fourier transform and is treated as an operator of differentiation of infinite order; the initial function is an element of the space of

generalized functions such as W' (subsection 5.3). In this case, the properties of the fundamental solution of this problem were investigated in advance, the solution in the form of a convolution of a fundamental solution with an initial function is found. In subsection 5.4, similar results are obtained in the case where a pseudodifferential operator is constructed using the Bessel transform and is treated as a Bessel operator of infinite order. An evolution equation with a pseudodifferential operator constructed by a variable symbol is investigated. The definition of the fundamental solution of a nonlocal multipoint in time problem for this evolution equation is given, and the properties of the fundamental solution are investigated. The solvability of a nonlocal multipoint for a time problem in a class of bounded continuous on \mathbb{R} is proved (subsection 5.5).

The practical significance of the results obtained. The results of the thesis have theoretical significance and can be used to further develop the theory of parabolic pseudodifferential equations, singular parabolic equations, partial differential equations, and generalized functions theory.

Keywords: evolution equation, pseudodifferential operator, integral self-directed operator, Fourier formal series, generalized function.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Городецький В. В., Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь. *Доповіді НАН України*. 2012. № 7. С. 14-19.
URI: <http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/84291>
ISSN: 1025-6415
2. Городецький В. В., Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з аналітичними символами. *Буковинський математичний журнал*. 2013. Т. 1, № 1-2. С. 36-49.
URL: <http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/29>
ISSN: 2309-4001
3. Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя дробового диференціювання. *Буковинський математичний журнал*. 2016. Т. 4, № 1-2. С. 152-161.
URL: <http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/198>
ISSN: 2309-4001
4. Колісник Р. С., Шевчук Н. М, Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу диференціально-операторних рівнянь. *Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування* : матеріали 14 міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, м. Київ, 19-21 квіт. 2012 р. Київ : НТУУ «КПІ». 2012. С. 231.
5. Широковських А. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь. *Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях* : сборник матер. XIII междунар. науч. конф. для мол. ученых. Харьков : ХНУ имени В. Н. Каразина. 2018. С. 13-15.
6. Городецький В. В., Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором. *Буковинський математичний журнал*. 2015. Т. 3, № 1. С. 30-44.

URL: <http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/161>

ISSN: 2309-4001

7. Широковських А. Про одну нелокальну задачу для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором. *Сучасні проблеми механіки та математики: збірник наукових праць у 3-х т. : матеріали міжнар. наук. конф., м. Львів, 22-25 трав. 2018 р. Львів, 2018. Т. 3. С. 181-182.*
8. Городецький В. В., Мартинюк О. В., Широковських А. О. Про одне узагальнення задачі Коші для сингулярних еволюційних рівнянь параболічного типу. *Нелінійні коливання*. 2016. Т. 19, № 4. С. 435-457.
(Переклад: Horodets'kyi V. V., Martynyuk A. O., Shyrokovs'kykh A. O. On One Generalization of the Cauchy Problem for Singular Evolutionary Equations of the Parabolic Type. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. Volume 228. P. 181–206.)
(Scopus: DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3615-x>
Electronic ISSN: 1573-8795, Print ISSN: 1072-3374, SJR 2018 = 0,284 (Q3))
9. Городецкий В. В., Широковских А. А. Нелокальная многоточечная по времени задача для одного класса эволюционных псевдодифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 2017. Т. 53, № 5. С. 637-652.
(Переклад: Gorodetskii V. V., Shirokovskikh A. A. Nonlocal time-multipoint problem for a class of evolution pseudodifferential equations. *Differential Equations*. 2017. Volume 53, Issue 5. P. 630-645.)
(Scopus: DOI: <https://doi.org/10.1134/S001226611705007X>
Electronic ISSN: 1608-3083, Print ISSN: 0012-2661, SJR 2017 = 0,376 (Q3))
10. V. V. Gorodetsky, A. A. Shyrokovskykh. Nonlocal in time problem for evolution pseudodifferential equations with analytic symbols. *Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences*. 2020 July. VIII(28), Issue 233. P. 26-33.
DOI: <https://doi.org/10.31174/SEND-NT2020-233VIII28-06>
p-ISSN: 2308-5258, e-ISSN: 2308-1996, Угорщина

11. Широковських А. О. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь. *Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки Д. І. Мартинюка (1942-1996)* : матеріали конф., м. Кам'янець-Подільський, 19-21 трав. 2017 р. Кам'янець-Подільський : Аксіома. 2017. С. 125-127.
12. Городецький В., Широковських А. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь зі змінними символами. *Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування* : матеріали XVIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, м. Київ, 7-10 жовт. 2017 р. Київ : НТУУ «КПІ». 2017. С. 48-52.
13. Широковських А. О. Нелокальна задача для одного класу еволюційних рівнянь. *Нелінійні проблеми аналізу: VI Всеукраїнська наукова конференція імені Б. В. Василюшина* : тези доповідей, м. Івано-Франківськ—м. Микуличин, 26-28 вер. 2018 р. Івано-Франківськ : Голіней, 2018. С. 66-67.