АНОТАЦІЯ

Афанасьєв Є. В. Застосування грасманового інтегрування в задачах теорії випадкових матриць. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика». — Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Харків, 2020.

У **вступі** обґрунтовано актуальність досліджуваних задач, наведено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Сформульовано мету, задачі та методи дослідження. Визначено наукову новизну і значення отриманих результатів. Надано відомості про публікації, особистий внесок здобувача та апробацію результатів дисертації.

Перший розділ присвячений огляду та аналізу літератури. У **підрозділі 1.1** дано визначення основним спектральним характеристикам, які досліджуються в теорії випадкових матриць, а саме: нормованій рахуючій мірі власних значень, лінійній статистиці власних значень, спектральним кореляційним функціям та кореляційним функціям характеристичних поліномів. Також наведено головні попередні результати про ці спектральні характеристики.

У **підрозділі 1.2** описано метод грасманового інтегрування та наведено історію його застосування в теорії випадкових матриць.

У роботі ми досліджуємо два ансамблі випадкових матриць: ансамбль розріджених ермітових матриць та ансамбль матриць з незалежними елементами. У **підрозділах 1.3** та **1.4** наведено ключові результати по вищезгаданих ансамблях.

Ансамбль розріджених ермітових випадкових матриць досить добре досліджено в глобальному режимі. Так, відомо, що нормована рахуюча міра власних значень слабко збігається до невипадкової міри, причому для слабко розріджених матриць гранична міра є напівкруговим законом. Також доведено Центральну граничну теорему для лінійної статистики. У локальному режимі обчислено асимптотичну поведінку спектральних кореляційних функцій у випадку слабкого розрідження. Якщо ж матриці сильно розріджені, то асимптотична поведінка спектральних кореляційних функцій невідома.

Ансамбль випадкових матриць з незалежними елементами також добре досліджено в глобальному режимі як у комплексному, так і у дійсному випадку. Відомо, що нормована рахуюча міра власних значень слабко збігається до кругового закону. Також доведено Центральну граничну теорему для лінійної статистики. У локальному режимі обчислено асимптотичну поведінку спектральних кореляційних функцій на межі спектра в загальному випадку, а всередині спектра — з деякими обмеженнями на моменти спільного розподілу ймовірностей елементів матриць.

Другий розділ присвячений дослідженню ансамблю розріджених ермітових випадкових матриць розміром $n \times n$ виду

$$M_n = (d_{jk} w_{jk})_{j,k=1}^n$$

де

$$d_{jk} = p^{-1/2} \begin{cases} 1 \text{ з ймовірністю } \dfrac{p}{n}; \\ 0 \text{ з ймовірністю } 1 - \dfrac{p}{n}; \end{cases}$$

$$w_{jk} = w_{jk}^{(1)} + i w_{jk}^{(2)},\ j \neq k$$

та $\{w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll} : 1 \leq j < k \leq n, 1 \leq l \leq n\}$ є такими незалежними однаково розподіленими (н. о. р.) дійсними нормальними випадковими величинами із нульовим середнім, що

$$2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(1)}|^2\} = 2\mathbf{E}\{|w_{jk}^{(2)}|^2\} = \mathbf{E}\{|w_{ll}|^2\} = 1, \quad j \neq k.$$

Тут і всюди нижче $\mathbf{E}$ позначає математичне сподівання по всім випадковим величинам. Випадкові величини $\{d_{jk} : j \leq k\}$ також незалежні одна від одної та від величин $w_{jk}^{(1)}, w_{jk}^{(2)}, w_{ll}$.

Означення. Кореляційною функцією характеристичних поліномів називається

$$\mathsf{f}_m(Y) = \mathbf{E}\left\{ \prod_{j=1}^{m} \det\left(M_n^* - y_j\right)\left(M_n - y_{m+j}\right) \right\},$$

де $Y = \operatorname{diag}\{y_1, \ldots, y_{2m}\}$, причому $y_1, \ldots, y_{2m}$ — дійсні або комплексні параметри, що можуть залежати від n.

У **підрозділі 2.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів розріджених ермітових випадкових матриць. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 2.6.

У **підрозділі 2.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для другої кореляційної функції характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.1.

Теорема 2.1. *Нехай* $p = \mathrm{const}$, $\lambda_*(p) = \sqrt{\max\left(4 - \dfrac{8}{p}, 0\right)}$, $\lambda_j = \lambda_0 + \dfrac{x_j}{n}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. *Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) при $\lambda_0 \in (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\sin\left((x_1 - x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2}/2\right)}{(x_1 - x_2)\sqrt{\lambda_*(p)^2 - \lambda_0^2}/2};$$

(ii) при $\lambda_0 \notin (-\lambda_*(p), \lambda_*(p))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1.$$

У **підрозділі 2.3** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для всіх кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.3.

Теорема 2.3. *Нехай* $p \to \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \dfrac{x_j}{n}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, 2m$. *Тоді кореляційні функції характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_m(\Lambda)$ *для* $\lambda_0 \in (-2, 2)$ *задовольняють асимптотичні співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_m(\Lambda)}{\left(\prod_{j=1}^{2m} \mathsf{f}_m(\lambda_j I)\right)^{1/2m}} = \frac{\hat{s}_{2m}(X)}{\hat{s}_{2m}(I)},$$

де $X = \mathrm{diag}\{x_1, \ldots, x_{2m}\}$ *та*

$$\hat{s}_{2m}(X) = \frac{\det\left\{\dfrac{\sin\left((x_j - x_{m+k})\sqrt{4 - \lambda_0^2}/2\right)}{(x_j - x_{m+k})\sqrt{4 - \lambda_0^2}/2}\right\}_{j,k=1}^{m}}{\triangle(x_1, \ldots, x_m)\triangle(x_{m+1}, \ldots, x_{2m})},$$

а також $\triangle(y_1, \ldots, y_m)$ *— визначник Вандермонда чисел* $y_1, \ldots, y_m$.

У **підрозділі 2.4** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для другої кореляційної функції характеристичних поліномів на межі спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 2.4.

Теорема 2.4. *Нехай* $p \to \infty$, $\lambda_j = \lambda_0 + \dfrac{x_j}{n^{2/3}}$, $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$, $\lambda_0 = 2$. *Тоді кореляційна функція двох характеристичних поліномів* $\mathsf{f}_1(\Lambda)$ *задовольняє асимптотичні співвідношення*

(i) Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \to \infty$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = 1;$$

(ii) Якщо $\frac{n^{2/3}}{p} \to c$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{f}_1(\Lambda)}{\sqrt{\mathsf{f}_1(\lambda_1 I)\mathsf{f}_1(\lambda_2 I)}} = \frac{\mathbb{A}(x_1+2c, x_2+2c)}{\sqrt{\mathbb{A}(x_1+2c, x_1+2c)\mathbb{A}(x_2+2c, x_2+2c)}},$$

де $\mathbb{A}(x,y)$ *— ядро Ейрі. Для* $\lambda_0 = -2$ *справджуються аналогічні твердження.*

У **третьому розділі** ми вивчаємо комплексні випадкові матриці з незалежними елементами виду

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}} X = \frac{1}{\sqrt{n}} (x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

де x_{jk} — такі н. о. р. комплексні випадкові величини, що

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 0, \quad \mathbf{E}\{\left|x_{jk}\right|^2\} = 1.$$

У **підрозділі 3.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів комплексних неермітових випадкових матриць з незалежними елементами. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 3.3.

У **підрозділі 3.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 3.1.

Теорема 3.1. *Нехай перші* $2m$ *абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць* M_n *є скінченними, і* $z_j = z_0 + \dfrac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$, $|z_0| < 1$. *Тоді* *(i)* *m-та кореляційна функція характеристичних поліномів $\mathsf{f}_m(\check{Z})$ задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{m^2-m}{2}} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1, z_1)\cdots \mathsf{f}_1(\bar{z}_m, z_m)} = e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2 \kappa_{2,2}} \frac{\det(K_{\mathbb{C}}(\zeta_j,\zeta_k))_{j,k=1}^m}{|\triangle(\mathscr{Z})|^2},$$

де $\check{Z} = \mathrm{diag}\{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_m, z_1,\ldots,z_m\}$, $\kappa_{2,2} = \mathbf{E}\{|x_{11}|^4\} - 2$*;* $\mathscr{Z} = \mathrm{diag}\{\zeta_1,\ldots,\zeta_m\}$ *та*

$$K_{\mathbb{C}}(z,w) = e^{-|z|^2/2-|w|^2/2+z\overline{w}}.$$

(ii) *у окремому випадку* $\zeta_1 = \cdots = \zeta_m = 0$ *ми маємо*

$$\mathbf{E}\left\{|\det(M_n - z_0)|^{2m}\right\} = (2\pi)^{m/2}\left(\prod_{j=1}^{m-1} j!\right)^{-1} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-|z_0|^2\right)^2\kappa_{2,2}} n^{\frac{m^2}{2}} e^{mn(|z_0|^2-1)}(1+o(1)).$$

У **четвертому розділі** ми вивчаємо дійсні випадкові матриці з незалежними елементами виду

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}X = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_{jk})_{j,k=1}^n,$$

де x_{jk} — такі н. о. р. дійсні випадкові величини, що

$$\mathbf{E}\{x_{jk}\} = 0 \quad \text{та} \quad \mathbf{E}\{x_{jk}^2\} = 1.$$

У **підрозділі 4.1** отримано інтегральне представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів дійсних випадкових матриць з незалежними елементами. Основним результатом цього підрозділу є Пропозиція 4.3.

У **підрозділі 4.2** проводиться асимптотичний аналіз отриманого інтегрального представлення для кореляційних функцій характеристичних поліномів всередині спектра. Основним результатом цього підрозділу є Теорема 4.2.

Теорема 4.2. *Нехай перші* $2m$ *абсолютних моментів спільного розподілу елементів матриць* M_n *є скінченними, і* $z_j = z_0 + \frac{\zeta_j}{\sqrt{n}}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\ldots,m$, $z_0 \in (-1,1)$. *Тоді* *(i) m-та кореляційна функція характеристичних поліномів $\mathsf{f}_m(\check{Z})$ задовольняє асимптотичне співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-m^2+m} \frac{\mathsf{f}_m(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1,z_1)\cdots\mathsf{f}_1(\bar{z}_m,z_m)} = C_{m,z_0} e^{\frac{m^2-m}{2}\left(1-z_0^2\right)^2\kappa_4}$$
$$\times \int\limits_{V=V^R\in U(2m)} \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}V\check{\mathscr{Z}}^R V^* - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\check{\mathscr{Z}}\check{\mathscr{Z}}^R\right\} d\mu_s(V),$$

де $\check{Z} = \operatorname{diag}\{\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_m,z_1,\ldots,z_m\}$, C_{m,z_0} *— деяка константа, яка не залежить ані від спільного розподілу елементів матриці, ані від* ζ_1, …, ζ_m*;* $\kappa_4 = \mathbf{E}\{x_{11}^4\}-3$*,*

$$A^R = -\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} A^T \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

$U(k)$ *— унітарна група, ймовірнісна міра* $d\mu_s(V)$ *відповідає диференціальній формі*

$$\det{}^{-m+1/2} V \bigwedge_{j,k\le m} dv_{jk} \bigwedge_{j<k\le m} dv_{j,k+m}\wedge dv_{k+m,j}$$

та

$$\check{\mathscr{Z}} = \operatorname{diag}\{\overline{\zeta}_1,\ldots,\overline{\zeta}_m,\zeta_1,\ldots,\zeta_m\}.$$

(ii) в окремому випадку $m=2$ інтеграл по самодуальним унітарним матрицям можна обчислити, і ми маємо

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2} \frac{\mathsf{f}_2(\check{Z})}{\mathsf{f}_1(\bar{z}_1,z_1)\mathsf{f}_1(\bar{z}_2,z_2)} = C_{2,z_0} e^{\left(1-|z_0|^2\right)^2\kappa_4} \frac{\operatorname{Pf}(K_{\mathbb{R}}(\zeta_j,\zeta_k))_{j,k=1}^2}{\triangle(\zeta_1,\zeta_2,\overline{\zeta}_1,\overline{\zeta}_2)},$$

де

$$K_{\mathbb{R}}(\zeta_j,\zeta_k) = e^{-\frac{|\zeta_j|^2}{2}-\frac{|\zeta_k|^2}{2}} \begin{pmatrix} (\zeta_j-\zeta_k)e^{\zeta_j\zeta_k} & (\zeta_j-\overline{\zeta}_k)e^{\zeta_j\overline{\zeta}_k} \\ (\overline{\zeta}_j-\zeta_k)e^{\overline{\zeta}_j\zeta_k} & (\overline{\zeta}_j-\overline{\zeta}_k)e^{\overline{\zeta}_j\overline{\zeta}_k} \end{pmatrix}.$$

У **п'ятому розділі** ми коротко описуємо метод грасманового інтегрування, а також доводимо деякі допоміжні властивості зовнішнього добутку лінійних операторів.

Ключові слова: грасманові змінні, суперсиметрія, теорія випадкових матриць, розріджені випадкові матриці, матриці суміжності випадкових графів, випадкові матриці з незалежними елементами, ансамбль Жинібра, кореляційні функції характеристичних поліномів, моменти характеристичних поліномів.