


Національна академія наук України
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного

Чорна Ольга Сергіївна



УДК 519.85

**МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ НА
ЦИКЛІЧНИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Харків – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник – доктор технічних наук, професор
Гребеннік Ігор Валерійович,
Харківський національний університет радіоелектроніки,
завідувач кафедри системотехніки.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
Комяк Валентина Михайлівна,
Національний університет цивільного захисту України
ДСНС України,
професор кафедри фізико-математичних дисциплін.

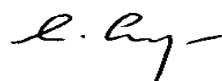
доктор фізико-математичних наук, старший науковий
співробітник
Семенова Наталія Володимирівна,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України,
провідний науковий співробітник відділу методів
дискретної оптимізації, математичного моделювання та
аналізу складних систем.

Захист відбудеться «29» квітня 2021 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01 при Інституті проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України за адресою: 61046, м. Харків, вул. Пожарського, 2/10.

Автореферат розісланий «26» березня 2021 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 64.180.01
д.т.н., проф.



О.О. Стрельнікова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. На даний момент жодна галузь людської діяльності не обходиться без постійного і повсюдного використання обчислювальної техніки. Для опису і розв'язання багатьох задач проектування, планування, розміщення, класифікації, управління створено та успішно застосовується широкий спектр різних моделей комбінаторної оптимізації, яка є одним з активно досліджуваних напрямків. Оптимізаційним комбінаторним задачам присвячено праці відомих зарубіжних вчених S. Ropke, C.H. Papadimitriou, P. Toth, D. Vigo, F. Bergeron, P. Flajolet, M. Vona, I. Melamed та вітчизняних дослідників, серед яких І. В. Сергієнко, Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев, Н.В. Семенова, О.О. Ємець, І.В. Гребеннік, В.П. Шило, Л.Ф. Гуляницький, П.І. Стецюк, Г.О. Донець.

Під керівництвом Ю.Г. Стояна функціонує наукова школа, один із напрямів якої присвячено розв'язанню оптимізаційних комбінаторних задач геометричного проектування. В цьому напрямі в рамках школи відзначимо результати Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, М.І. Гіля, В.М. Комяк, О.О. Ємця, Т.Є. Романової, І.В. Гребенніка, О.В. Панкратова, О.С. Пічугіної.

Математичні моделі багатьох комбінаторних оптимізаційних задач мають складні комбінаторні властивості. Одним з найбільш досліджених і широко використовуваних класів комбінаторних конфігурацій є перестановки різних елементів. Множина перестановок використовується як для моделювання реальних об'єктів і систем, так і при розробці методів розв'язання комбінаторних задач. Однією з фундаментальних властивостей перестановок є їх циклічна структура. Дослідженню циклічної структури перестановок присвячено велику кількість робіт. Окремий клас перестановок складають перестановки, циклічна структура яких складається з єдиного циклу, тобто циклічні перестановки, які є підмножиною множини перестановок. Циклічні перестановки досліджуються в роботах R. Stanley, M. Vona, В.О. Ємелічева, Ch.A. Charalambides, О.М. Ісаченко, S. Elizalde.

Серед класів комбінаторних конфігурацій особливе місце займають евклідові комбінаторні множини. Важливим інструментом дослідження евклідових комбінаторних множин є їх відображення в арифметичний евклідовий простір. Основи теорії евклідової комбінаторної оптимізації були закладені Ю.Г. Стояном і розвинені в роботах С.В. Яковлева, О.А. Ємця та їх учнів. Перестановочний багатогранник є одним із найбільш досліджених комбінаторних багатогранників. Дослідження підмножин вершин перестановочного багатогранника, які відповідають певним підмножинам множини перестановок, зокрема, циклічним перестановкам, є одним з перспективних підходів для дослідження властивостей деяких перестановок.

Множина циклічних перестановок, її елементи та їх властивості можуть бути використані при розробці нових і модифікації існуючих методів комбінаторної оптимізації. Серед комбінаторних методів пошуку в околі виділяються методи, що використовують циклічні трансфери, введені в роботі

P.M. Thompson, J.B. Orlin. Методи на основі циклічних трансферів успішно застосовуються для розв'язання широкого спектра задач про призначення, маршрутизації, складання розкладів і т.д. Основні результати теорії циклічних трансферів спираються на циклічні перестановки. Застосування властивостей циклічних перестановок в теорії циклічних трансферів є актуальним напрямком.

Велику кількість публікацій присвячено задачам транспортної маршрутизації (Vehicle Routing Problem, VRP), зокрема, роботи P. Toth, D. Vigo, S. Ropke, C. Rego, I.I. Меламеда, А.В. Панішева, Л.Ф. Гуляницького і багатьох інших. До класу VRP належать задачі вивозу і доставки (Pick-up and Delivery Problem, PDP), в яких для виконання перевезень будуються кільцеві (замкнені, циклічні) маршрути, при їх моделюванні застосовуються, зокрема, циклічні перестановки.

Таким чином, *актуальним* є дослідження наукових та прикладних задач, які описуються моделями на основі циклічних перестановок, серед яких — задачі транспортної маршрутизації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в період з 2012 по 2020 рр. на кафедрі системотехніки Харківського національного університету радіоелектроніки, зокрема, в рамках розділу №293–2 «Генерація комбінаторних конфігурацій в задачах математичного моделювання стійкого розвитку соціально–економічних систем» науково дослідної роботи «Розробка методології і математичних моделей соціально–економічних систем при реалізації концепції їх стійкого розвитку» (ДР № 0115U001522), в розробці якої автор брав участь як виконавець.

Мета та задачі дослідження. Метою роботи є розвиток моделей і методів комбінаторної оптимізації, що використовують властивості множини циклічних перестановок та їх застосування для розв'язання наукових і прикладних задач, зокрема, задач транспортної маршрутизації.

Для досягнення цієї мети в роботі поставлено наступні задачі:

1. Дослідження властивостей циклічних перестановок для використання їх в методах комбінаторної оптимізації.
2. Розробка нових і адаптація існуючих методів комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок.
3. Покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, на основі теорії циклічних трансферів з використанням специфічних властивостей циклічних перестановок і властивостей конкретного класу задач.

Об'єкт дослідження – комбінаторна природа технічних об'єктів.

Предмет дослідження – математичне та комп'ютерне моделювання наукових і прикладних задач оптимізації на циклічних перестановках та методи їх розв'язання.

Методи дослідження. В роботі застосовано методи комбінаторики для дослідження особливостей циклічної структури перестановок, властивостей циклічних перестановок та транспозицій суміжності; комбінаторна теорія

багатогранників для дослідження властивостей вершин перестановочного багатогранника, що відповідають циклічним перестановкам; методи комбінаторної оптимізації, зокрема, метод гілок та меж, евристичні методи, метод випадкового пошуку для розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок при наявності та відсутності додаткових обмежень; метод на основі теорії циклічних трансферів для побудови стратегії покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в такому:

1. Отримали подальший розвиток методи дослідження спеціального класу транспозицій для перестановок, що відповідають суміжним вершинам перестановочного багатогранника (транспозицій суміжності) в частині:

- їх впливу на циклічну структуру перестановок;
- аналізу циклічних властивостей суміжних перестановок;
- їх застосування для генерації циклічних перестановок;

це дозволяє дослідити циклічну структуру суміжних вершин перестановочного багатогранника, розробити нові та адаптувати існуючі методи комбінаторної оптимізації; знизити надлишковість при генерації циклічних перестановок за допомогою транспозицій суміжності.

2. Вперше для циклічних перестановок при їх відображенні в евклідов простір, отримано такі результати:

- запропоновано класифікацію циклічних перестановок в залежності від послідовності елементів у циклі, що дозволяє генерувати циклічні перестановки та оцінити складність їх генерації за допомогою транспозицій суміжності.
- побудовано циклічні перестановки за допомогою транспозицій суміжності та їх композицій, які можуть бути використані в методах комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках;
- досліджено взаємне розташування вершин, що відповідають циклічним перестановкам у перестановочному багатограннику, що дозволяє підвищити ефективність методів розв'язання задач комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках;

3. Отримали подальший розвиток методи розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок за рахунок використання властивостей транспозицій суміжності, що дозволяє підвищити ефективність відомих методів (гілок та меж, випадкового пошуку) при розв'язанні задач на циклічних перестановках.

4. Отримав подальший розвиток метод циклічних трансферів для покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, в частині генерації циклічних трансферів від'ємної вартості, що дозволяє розширити клас розв'язуваних задач, для яких неможливо побудувати допоміжний граф (auxiliary graph).

Практичне значення отриманих результатів. Практичне значення результатів роботи підтверджується актами про використання методів

розв'язання задач комбінаторної оптимізації в держбюджетному науковому дослідженні ДР № 0115U001522; програмного забезпечення для покращення розв'язку задачі вивозу та доставки вантажів, отриманого за допомогою евристики, в ПП «Латона» для розв'язання задач, пов'язаних з перевезенням вантажів. Результати дисертаційної роботи впроваджені в навчальний процес у Харківському національному університеті радіоелектроніки у курсі «Комбінаторні моделі і методи в проектуванні». Запропоновані методи та програмне забезпечення для розв'язання задач вивозу і доставки можуть бути використані для підвищення ефективності діяльності транспортних компаній.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати дисертаційного дослідження отримані автором самостійно. У роботах, написаних у співавторстві, автору належать: [1, 10–11] – доведення твердження про часткову перестановку та її використання у методі гілок та меж для розв'язання задачі оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок без додаткових обмежень та результати обчислювальних експериментів; [2, 3, 4, 6, 12, 14–16, 18] – дослідження властивостей множини циклічних перестановок, введення та дослідження транспозицій суміжності, дослідження їх впливу на перестановки, метод генерації циклічних перестановок та метод оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок за допомогою транспозицій суміжності; [5, 7, 13, 17, 19] – розв'язання допоміжної задачі при оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок з додатковими обмеженнями. Застосування для цього методу гілок та меж, евристики с використанням методу гілок та меж, паралельних обчислень, методу за допомогою транспозицій суміжності та розробка відповідної частини програмного забезпечення; [8, 9, 20] – метод покращення розв'язків задач комбінаторної оптимізації, отриманих за допомогою евристики, на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів за допомогою властивостей множини циклічних перестановок. Застосування циклічних трансферів для покращення розв'язків задачі PDP, отриманих за допомогою евристики, та розробка відповідної частини програмного забезпечення.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися та дістали схвалення на 14-й всеукраїнській (9 міжнародній) студентській науковій конференції з прикладної математики та інформатики (Львів, Україна, 2011 р.); 18-ому міжнародному молодіжному форумі «Радіоелектроніка і молодь в ХХІ столітті» (Харків, Україна, 2014 рр.); ХХ, ХХІІ, ХХV міжнародних конференціях «Problems of decision making under uncertainties (PDMU)» (Крим, Східниця, Україна, Брно, Чехія, 2012, 2013, 2015 рр.); 4-й міжнародній конференції «International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE)» (Софія, Болгарія, 2014 р.); міжнародній конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (APAMCS)» (Львів, Україна, 2015 р.); міжнародних науково-практичних конференціях «Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та

бізнесі» (Київ, Україна, 2016, 2019 р.); на конференції молодих вчених та спеціалістів «Сучасні проблеми машинобудування» Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (Харків, Україна, 2016 р.); на семінарах відділу математичного моделювання і оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України (м. Харків, 2020 р.).

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 20 наукових праць, в тому числі: 6 статей у спеціалізованих виданнях, затверджених ДАК МОН України [1, 2, 3, 6, 7, 8], 2 з яких індексуються у базі SCOPUS [3, 6]; 3 статті у закордонних виданнях [4, 5, 9] (всі праці входять до міжнародних наукометричних баз), 1 з яких індексується у базі SCOPUS [9]; 11 тез доповідей на міжнародних і молодіжних наукових конференціях [10–20].

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота містить вступ, п'ять розділів, висновки по роботі, список використаних джерел зі 236 найменувань на 23 сторінках та 2 додатки на 7 сторінках. Повний обсяг дисертації становить 199 сторінки, з них 162 сторінки основного тексту, включаючи 40 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтована актуальність обраної теми, сформульовано мету і задачі, вказано об'єкт, предмет і методи дослідження, визначено наукову новизну і практичну значущість отриманих результатів, наведено відомості про публікації за темою дисертаційної роботи і апробацію результатів дослідження.

Перший розділ дисертації присвячено огляду публікацій за темою роботи і визначенню напрямів дослідження.

Проведено аналіз публікацій М.Вона, F. Bergeron, P. Flajolet, Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, О.А. Ємця, І.В. Гребенніка, Н.В. Семенової, Л.Ф. Гуляницького, В.П. Шила, Г.О. Донця, присвячених властивостям комбінаторних конфігурацій, зокрема, перестановок, що використовуються при побудові математичних моделей комбінаторних оптимізаційних задач.

Однією з фундаментальних властивостей перестановок є їх циклічна структура. Перестановку π представляють як об'єднання циклів, що не перетинаються, записуючи у вигляді $\pi = C_1 C_2 \dots C_k$. Окремий клас перестановок складають перестановки, циклічна структура яких складається з єдиного циклу – циклічні перестановки. Циклічною є така перестановка π з n елементів, яка містить єдиний цикл довжини n , тобто $\pi^n(a_i) = a_i, \forall i \in J_n$. Такі перестановки будемо позначати π_C , а множину таких перестановок — P_n^C . Властивості циклічних перестановок та особливості циклічної структури довільних перестановок досліджуються в роботах Р. Стенлі, М. Вона, В.О. Ємелічева, Ch.A. Charalambides, О.М. Ісаченка, S. Elizalde.

Приведено аналіз основних результатів в області евклідової комбінаторної оптимізації відомих вчених Ю.Г. Стояна, С.В. Яковлева, О.А. Ємця, Т.Є. Романової, І.В. Гребенніка, О.С. Пічугіної та їх учнів. Проведено огляд досліджень застосування методів поліедральної комбінаторики для розв'язання задач евклідової комбінаторної оптимізації, зокрема, у роботах В.О. Ємелічева, М.М. Ковальова, М.К. Кравцова, О.М. Ісаченка.

У класі комбінаторних задач, зокрема, пов'язаних з побудовою циклічних маршрутів, виділено задачі транспортної маршрутизації. У зарубіжних публікаціях¹ широко досліджено задачі транспортної маршрутизації, що позначаються як VRP (Vehicle Routing Problem) та PDP (Pick-up and Delivery Problem) (рис. 1).

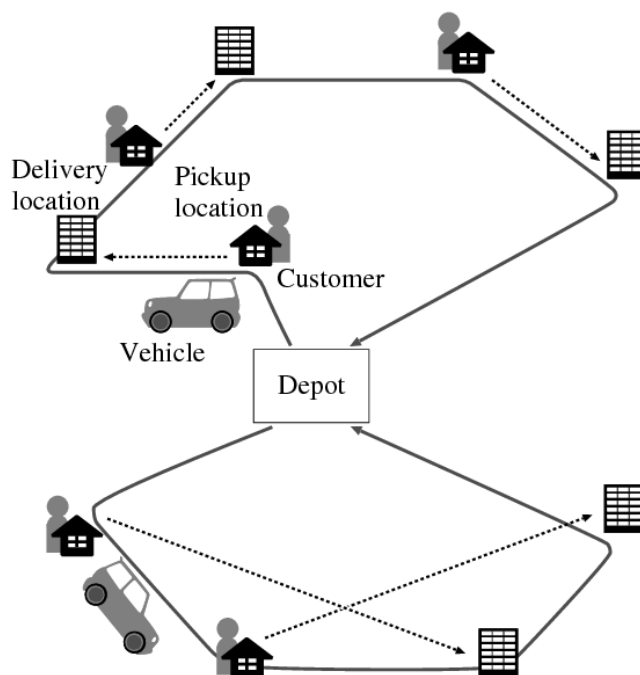


Рисунок 1. Приклад побудови маршрутів для розв'язання задачі PDP

Для розв'язання задач транспортної маршрутизації існує ряд точних, наближених, евристичних і метаевристичних підходів. Проаналізовано роботи щодо задач транспортної маршрутизації авторів P. Toth, D. Vigo, S. Ropke, C. Rego, А.В. Панішева.

Існує широкий клас алгоритмів пошуку кращого розв'язку в деякому околі вихідного розв'язку, серед яких виділяються методи, що використовують циклічні трансфери. Методи з використанням циклічних трансферів застосовано для розв'язання широкого спектру задач комбінаторної оптимізації, зокрема, загальної і квадратичної задачі про призначення, проблеми маршрутизації транспортних засобів, задачі про мінімальне кістякове дерево, задачі формування розкладу. Циклічні перестановки лежать в основі загального підходу до покращення розв'язків

¹ Sakakibara, K., H. Tamaki and I. Nishikawa. "Autonomous distributed approaches for pickup and delivery problems with time windows." *SICE Annual Conference 2007* (2007): 2639-2642.

задач в теорії циклічних трансферів. Наведено огляд основних результатів, присвячених застосуванню теорії циклічних трансферів, у роботах Р.М. Thompson, J.B Orlin, H.N. Psaraftis, R.K. Ahuja, F.W. Glover.

На основі проведеного аналізу публікацій сформульовано задачу дослідження дисертаційної роботи: дослідження властивостей множини циклічних перестановок, створення та розвиток математичних моделей і методів комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках для розв'язання наукових і прикладних задач, зокрема, задач транспортної маршрутизації. Як математична модель досліджуваних в роботі комбінаторних оптимізаційних задач використовується модель вигляду

$$K(a) \rightarrow \text{extr},$$

$$a \in A \subseteq P_n^C,$$

де K – відображення, яке задано на підмножині A множини циклічних перестановок P_n^C n різних елементів.

Другий розділ присвячено задачам оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок. Досліджуються властивості множини циклічних перестановок, властивості транспозицій суміжності та їх вплив на перестановки.

Побудовано математичні моделі задач комбінаторної оптимізації на множині циклічних перестановок $P_n^C \subset P_n$, що породжена множиною $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

$$L(p) = \sum_{j=1}^n c_j p_j \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C \subset P_n, \quad (2)$$

де $c_j \in R$, $j \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ – перестановка елементів породжуючої множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Послідовність (i_1, i_2, \dots, i_n) є впорядкуванням елементів індексної множини J_n .

Здійснимо відображення множини P_n^C в арифметичний евклідов простір R^n у вигляді

$$f: P_n^C \rightarrow R^n, \quad (3)$$

$\forall p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C$, $x = f(p) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C \subset R^n$, $x_i = p_i$, $i \in J_n$.

В результаті занурення f множині P_n^C поставимо у відповідність множину $E_n^C = f(P_n^C)$ та сформулюємо еквівалентну (1) – (2) задачу оптимізації лінійної функції в просторі R^n

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min ; \quad (4)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C, \quad (5)$$

де $c_j \in R, j \in J_n$.

Множина E_n^C має усі комбінаторні властивості множини P_n^C , отже, подальші викладки справедливі як для задачі (1) – (2), так і для (4) – (5).

Задача комбінаторної оптимізації з додатковими лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок $P_n^C \subset P_n$, що породжена множиною $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, a_1 < a_2 < \dots < a_n$, має наступний вигляд:

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i p_i \rightarrow \min ; \quad (6)$$

$$Cp \leq d ; \quad (7)$$

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C, \quad (8)$$

де $C = [C_{ji}]_{m \times n}, d \in R^n, c_j \in R, p = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ – перестановка елементів породжуючої множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Послідовність (i_1, i_2, \dots, i_n) є упорядкуванням елементів індексної множини J_n .

Використовуючи занурення комбінаторної множини P_n^C в евклідов простір, сформулюємо задачу оптимізації, еквівалентну задачі (6) – (8)

$$L(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min ; \quad (9)$$

$$Cx \leq d ; \quad (10)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n^C, \quad (11)$$

де $C = [C_{ji}]_{m \times n}, d \in R^n, c_i \in R, x_i \geq 0, j \in J_n$.

Введено визначення суміжних перестановок, як таких, для яких відповідні вершини перестановочного багатогранника є суміжними.

На множині перестановок введено відображення $\sigma_i : P_n \rightarrow P_n$

$$\sigma_i(p) = \sigma_i(p_1, \dots, p_j, \dots, p_k, \dots, p_n) = (p_1, \dots, p_k, \dots, p_j, \dots, p_n), \quad (12)$$

де $i \in J_{n-1}$, $j, k \in J_n$, $j \neq k$, $\{p_j, p_k\} = \{a_i, a_{i+1}\}$.

Відображення, задане таким чином, є бієктивним і являє собою транспозицію елементів $\{a_i, a_{i+1}\} \subset A$.

Транспозиції виду (12) названо транспозиціями суміжності, оскільки застосування будь-якої транспозиції виду (12) до довільної перестановки дозволяє отримати суміжну перестановку.

Використовуючи наведені визначення, запропоновано підхід до розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на циклічних перестановках (4) – (5) і (9) – (11), заснований на переборі вершин перестановочного багатогранника за допомогою транспозицій суміжності та на комбінаторних властивостях циклічних перестановок, з урахуванням обмежень на змінні вихідної задачі.

Підрозділи 2.2 та 2.3 присвячено дослідженню циклічної структури перестановок і властивостей транспозицій суміжності.

Наведено опис наступних понять.

Частковою перестановкою для перестановки $p \in P_n^C$, або $y^k = (a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k})$, назвемо таку послідовність породжуючих елементів $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, що k з них ($k < n$) $a_{l_1}, a_{l_2}, \dots, a_{l_k}$ визначають перші k елементів в деякій перестановці $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P_n^C$, $p_j = a_{l_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $k < n$, $\{l_1, l_2, \dots, l_k\} \subset J_n$.

Для довільної перестановки частину одного циклу, а саме, відповідну впорядковану послідовність породжуючих елементів, назвемо ланцюжком.

Доведено два твердження про залежність циклічної структури часткової перестановки від індексу позиції, на якій фіксується новий елемент часткової перестановки. Досліджено циклічну структуру перестановок, зокрема, особливості розташування довільних породжуючих елементів в циклічних перестановках. Продемонстровано, що чотири довільних породжуючих елементи a_i, a_{i+1} і a_j, a_{j+1} , $i, j \in J_{n-1}$, $j \neq i$ можуть бути розташовані у циклі одним з шести варіантів, відповідно до $3!$ варіантів перестановок з елементів a_{i+1}, a_j, a_{j+1} . Наприклад, у випадку, якщо елементи зустрічаються у циклі у послідовності $a_i, a_j, a_{i+1}, a_{j+1}$, відповідний ланцюжок виглядає наступним

чином:
$$\left(\begin{array}{cccc} x & \pi^\alpha(a_i) & \pi^\beta(a_j) & \pi^\gamma(a_{i+1}) \\ \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \nearrow & \downarrow \\ a_i & a_j & a_{i+1} & a_{j+1} \end{array} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, n-2\}. \quad \text{Таке}$$

розташування елементів названо типом I. Послідовність $a_i, a_{j+1}, a_{i+1}, a_j$ – типом II, $a_i, a_{i+1}, a_j, a_{j+1}$ – типом III, $a_i, a_{j+1}, a_j, a_{i+1}$ – типом IV, $a_i, a_{i+1}, a_{j+1}, a_j$ – типом V, $a_i, a_j, a_{j+1}, a_{i+1}$ – типом VI.

При застосуванні відображення $\sigma_i(p) = p_i$, $p, p_i \in P_n$ перестановка-аргумент і перестановка-результат застосування відображення σ_i , відрізняються порядком елементів $\{a_i, a_{i+1}\}$. Між множиною породжуючих елементів $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ і множиною їх індексів $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ існує взаємооднозначна відповідність, тому далі, без втрати спільності, використовується множина перестановок P_n , що породжена множиною $\{1, 2, \dots, n\}$, тобто $A = J_n$. Тоді множина елементів $\{i, i+1\}$ відповідає транспозиції σ_i . Спираючись на теоретико-множинну відповідність транспозиції та підмножини елементів, введено поняття транспозицій, що перетинаються, не перетинаються та є кратними. Введено композицію транспозицій, для якої описано аналогічні поняття та додано вкладеність транспозиції по відношенню до композиції. Крім того введено поняття комутативності транспозицій.

Досліджено вплив транспозицій суміжності на циклічну структуру довільної перестановки. Наведено визначення транспозицій суміжності «з'єднання» та «розриву», відповідно до впливу на циклічну структуру. Доведено твердження та наведено приклади щодо впливу транспозицій суміжності на циклічну структуру перестановок, які відповідають суміжним вершинам перестановочного багатогранника. Доведено властивість про максимальну кількість транспозицій суміжності «з'єднання», які можуть бути застосовані до перестановки. Доведено твердження про кількість транспозицій суміжності «з'єднання» і «розриву», які можливо зробити для деякого циклу, якщо стартова перестановка $p \in P_n$ містить кілька циклів різної довжини.

Досліджено зміни циклічної структури перестановки при застосуванні до неї композицій транспозицій суміжності.

Твердження 1. Якщо до деякої перестановки $p \in P_n^C$ застосувати послідовно дві транспозиції σ_i, σ_j , що не перетинаються, з елементів $\{i, i+1\}$

і $\{j, j+1\}$, $i, j \in J_{n-1}, j \neq i$, то отримана при цьому перестановка $p_{ij} \in P_n$, буде циклічною, якщо елементи i, j у вихідній перестановці $p \in P_n^C$ розташовані в послідовності, відповідно до I або II типу.

Твердження 2. Якщо до деякої перестановки $p \in P_n^C$ застосувати послідовно дві транспозиції суміжності, що перетинаються, тобто $i_1 + 1 = i_2, \forall i_1 \in J_{n-2}$, буде отримано дві перестановки $p_{i_1 i_2} \neq p_{i_2 i_1}$, тільки одна з яких буде циклічною.

Твердження 3. Якщо в довільній циклічній перестановці $p \in P_n^C$ послідовно здійснити три транспозиції суміжності, з використанням будь-яких елементів, то всі перестановки, отримані в результаті, не будуть циклічними незалежно від послідовності виконання транспозицій.

Підрозділ 2.4 присвячено впливу композицій транспозицій суміжності на довільну перестановку. Доведено лему про комутативність композиції транспозицій, що не перетинаються. Доведено наслідки, що впливають з тверджень та лем, про кількість елементів множини породжуваних перестановок в залежності від композиції застосованих транспозицій суміжності.

У третьому розділі описано розробку методів та алгоритмів розв'язання комбінаторних оптимізаційних задач на множині циклічних перестановок. У підрозділі 3.1 досліджено вплив транспозицій суміжності, застосованих до перестановки-аргументу лінійної функції, на значення функції цілі. Доведено твердження про оцінку мінімуму лінійної функції на циклічних перестановках.

Підрозділ 3.2 описує модифікації існуючих та нові методи оптимізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. Для знаходження точного розв'язку задачі (4) – (5) пропонується метод гілок та меж. Описано правило розгалуження і правило вибору – основні складові методу гілок та меж. Для зниження витрат обчислювальних ресурсів при використанні методу гілок та меж, запропоновано комбінацію методу гілок та меж з евристикою. Наведено декілька можливих евристик, вибір з яких має бути обґрунтований особливостями розв'язуваної задачі та обчислювальними можливостями.

Базуючись на твердженнях щодо властивостей транспозицій суміжності, запропоновано метод розв'язання задачі (4) – (5).

Підрозділ 3.3 присвячено розв'язанню задачі оптимізації (9) – (11) лінійної функції з лінійними обмеженнями на множині циклічних перестановок. Запропоновано метод, заснований на ідеології випадкового пошуку, використанні властивостей циклічних перестановок і аналітичному розв'язанні систем лінійних нерівностей як обмежень на змінні. Розроблено реалізацію методу із застосуванням властивостей циклічних перестановок, зокрема, для отримання розв'язку допоміжної задачі виду (4) – (5), що виникає багато разів в рамках розв'язання однієї задачі виду (9) – (11). Для розв'язання допоміжної задачі використано методи, описані у підрозділі 3.2, та паралельні обчислення. Наведено оцінку отриманого прискорення від розпаралелювання згідно законів Амдала і Густафсона.

Грунтуючись на досліджених властивостях циклічних перестановок і на доведених в розділі 2 твердженнях, описано кроки, за допомогою яких для довільної стартової циклічної перестановки реалізовано генерацію всіх

циклічних перестановок, які знаходяться від стартової перестановки в околі, що визначається дворазовим застосуванням транспозицій суміжності. Використання властивостей транспозицій суміжності дозволило генерувати циклічні перестановки без надлишковості.

У четвертому розділі досліджено використання циклічних перестановок в методах комбінаторної оптимізації на основі теорії циклічних трансферів (рис. 2).

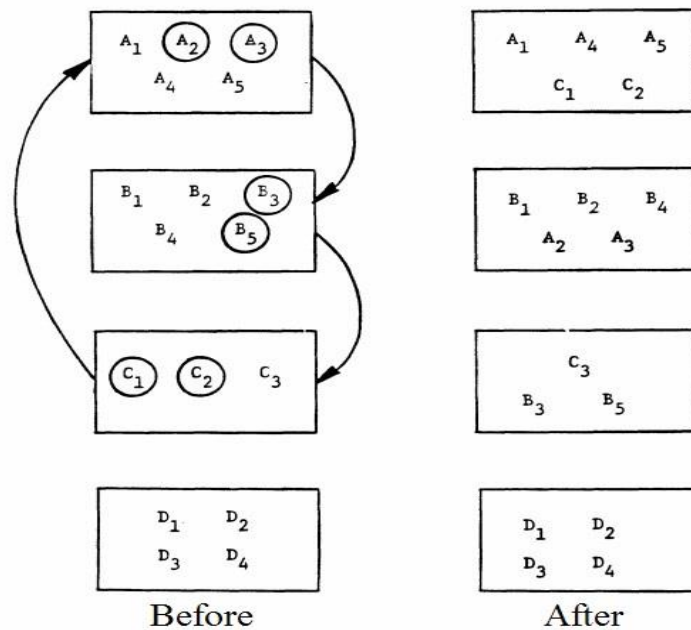


Рисунок 2. Загальна схема застосування циклічних трансферів

Дано огляд основних результатів з теорії циклічних трансферів, відповідно до робіт² Р.М. Thompson, J.B Orlin, H.N. Psaraftis. Описано клас задач комбінаторної оптимізації, для покращення розв'язків яких можливо використання циклічних трансферів. Цей клас задач характеризується тим, що для їх розв'язання використовується розбиття комбінаторної множини на кластери, що не перетинаються, і для отримання розв'язків на цих кластерах застосовуються відомі методи комбінаторної оптимізації. Проаналізовано дві основні стадії отримання розв'язку – отримання стартового розв'язку на стартовій кластеризації та покращення стартового розв'язку за допомогою циклічних трансферів від'ємної вартості. Описано циклічний трансфер як циклічну перестановку обраних елементів між кластерами. У роботах Р.М. Thompson, J.B Orlin, H.N. Psaraftis для отримання циклічних трансферів від'ємної вартості застосовується допоміжний граф, але його побудова іноді неможлива через властивості задачі, що розв'язується. У таких випадках пропонується альтернативна побудова циклічних трансферів з використанням множини циклічних перестановок та її властивостей для отримання циклічних трансферів від'ємної вартості. Для отримання циклічних трансферів від'ємної

² Thompson P.M., Orlin J.B The theory of cyclic transfers. *Massachusetts Institute of Technology, Operations Research Center*. 1989.

вартості з використанням циклічних перестановок сформульовано задачу комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках

$$F(x|E^k(p_i)) \rightarrow \min_{p_i \in P_n^C(A^{k-1})}, \quad (13)$$

де $k=1,2,\dots$ – кількість ітерацій, яка може залежати від кількості кластерів n , потужності множини вхідних даних задачі або обчислювальних можливостей; $E^k(p_i)$ – розбиття множини застосування, отримане на k -ому кроці, за допомогою застосування циклічного трансферу, відповідного перестановці p_i ; циклічні перестановки $p_i \in P_n^C(A^{k-1})$ належать множині циклічних перестановок, породженій множиною A^{k-1} породжуючих елементів, отриманих на $k-1$ -ому кроці.

Розв'язання задачі (13) засновано на властивостях множини циклічних перестановок, які були викладені в розділі 2. Методи розв'язання задачі (13) досліджені в розділі 3 для лінійної функція $F(x|E^k(p_i))$. У класі задач комбінаторної оптимізації на кластерних даних для демонстрації покращення розв'язку задачі, отриманого за допомогою евристики, циклічними трансферами обрано задачу транспортної маршрутизації, пов'язану з побудовою циклічних маршрутів. А саме, задачу розвезення вантажів від багатьох відправників багатьом одержувачам (Pickup and Delivery Problem або One-to-One PDP). Крім того у задачі One-to-One PDP присутні додаткові обмеження, пов'язані з вимогами на послідовність розвантаження транспортних засобів та з 3D обмеженнями на завантаження транспортних засобів. Покращення розв'язку задачі One-to-One PDP з 3D обмеженнями на завантаження, отриманого за допомогою евристики, циклічними трансферами було програмно реалізовано. Представлено приклад роботи програмного пакету, наведено результати обчислювальних експериментів, що демонструють покращення значення функції цілі задачі PDP на 5–9% (рис. 3).

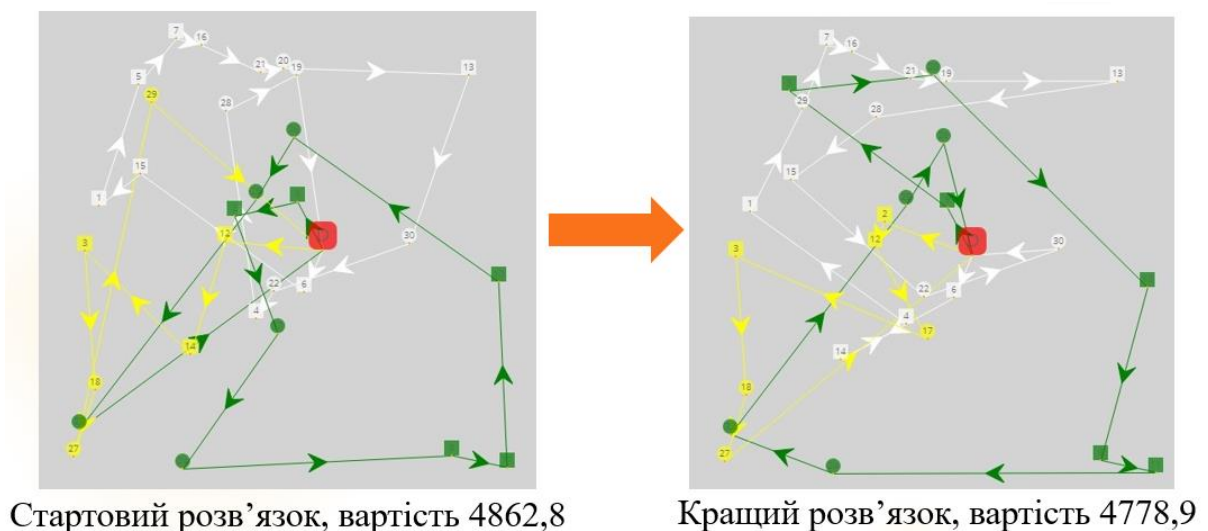


Рисунок 3. Приклад покращення розв'язку задачі PDP, отриманого за допомогою евристики

У п'ятому розділі наведено результати обчислювальних експериментів, виконаних за допомогою програмного забезпечення, побудованого із застосуванням розроблених у роботі засобів математичного моделювання, методів та алгоритмів. На прикладі однієї задачі виду (4) – (5) проведено порівняння розв'язків, отриманих за допомогою методу гілок та меж, комбінації методу гілок та меж з евристикою та за допомогою методу транспозицій суміжності. Для цієї задачі точний та наближений розв'язки співпадають, а розв'язок, знайдений за допомогою евристики, має відносну похибку 0,039. Аналізуються результати обчислювальних експериментів з різними вхідними даними. Для задачі (4) – (5) наведено порівняння точного розв'язку та розв'язку, отриманого за допомогою евристики. Проаналізовано результати отримання наближеного розв'язку задач на основі властивостей транспозицій суміжності. Побудовано оцінки отриманих наближених розв'язків. Для задачі (4) – (5) проведено порівняння наближених розв'язків та розв'язків, отриманих за допомогою евристики. Відзначимо, що використання евристики із застосуванням методу гілок та меж дозволяє істотно знизити часові витрати на розв'язання задач великої розмірності при одночасній втраті в точності розв'язку. Використання евристичного підходу в комплексі з методом гілок та меж дозволяє підвищити розмірність розв'язуваних задач більш ніж в 2 рази: з 40 до 100. Для задач розмірності менше 40, час роботи наближеного алгоритму менше ніж час роботи евристичного. Для задач розмірності більше 40, застосування наближеного алгоритму виправдано у випадках, коли застосування евристичного алгоритму недоцільно.

Підрозділ 5.3 присвячено результатам обчислювальних експериментів з оптимізації лінійної функції з додатковими обмеженнями на циклічних перестановках на основі випадкового пошуку. Наведено отримане на практиці прискорення при застосуванні паралельних обчислень, значення якого більше ніж оцінка прискорення, отримана згідно закону Амдала. Проведено обчислювальні експерименти та наведено результати, отримані при розв'язанні допоміжної задачі різними методами, запропонованими в рамках дисертаційної роботи. Проведено порівняння методів розв'язання допоміжної задачі, яке демонструє перевагу у використанні методу транспозицій суміжності для розв'язання допоміжної задачі.

На рисунку 4 наведено порівняння середнього часу розв'язання задач виду (9) – (11) в залежності від розмірності розв'язуваних задач, та використовуються наступні скорочення: $AvgTime(ВП+МГМ)$ – середній час розв'язання задач виду (9) – (11) методом випадкового пошуку(ВП) у комбінації з методом гілок та меж(МГМ), $AvgTime(ВП+ТС)$ – середній час розв'язання задач виду (9) – (11) методом випадкового пошуку(ВП) у комбінації з методом транспозицій суміжності(ТС).

У підрозділі 5.4 наведено приклад застосування транспозицій суміжності для генерації циклічних перестановок, обчислено оцінку складності генерації.

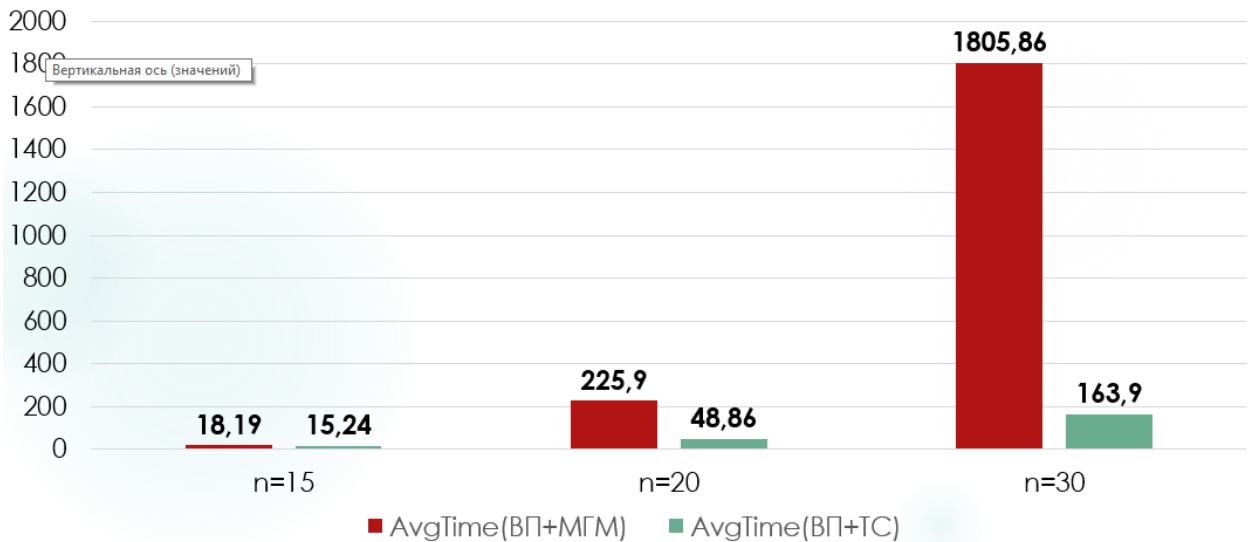


Рисунок 4. Порівняння середнього часу розв'язання задач виду (9) – (11)

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджено моделі та методи комбінаторної оптимізації на циклічних перестановках: вивчено властивості циклічних перестановок, розвинуто та запропоновано методи розв'язання задач оптимізації на циклічних перестановках, серед яких задачі транспортної маршрутизації.

1. Проведено аналіз публікацій, присвячених розв'язанню задач комбінаторної оптимізації на множині перестановок та її підмножинах, зокрема, на множині циклічних перестановок. На підставі аналізу зроблено такі висновки:

- розвиток моделей і методів комбінаторної оптимізації, що використовують властивості множини циклічних перестановок, є актуальною задачею;
- використання властивостей циклічних перестановок при їх відображенні в евклідов простір дозволить підвищити ефективність методів комбінаторної оптимізації та генерації для задач на циклічних перестановках;
- використання властивостей циклічних перестановок при розв'язанні задач комбінаторної оптимізації за допомогою теорії циклічних трансферів дозволить розширити клас розв'язуваних задач, зокрема, на випадки, коли побудова допоміжного графу неможлива.

2. Здійснено відображення множини циклічних перестановок в евклідов простір та виділено множину відповідних вершин перестановочного багатогранника. Продовжено дослідження спеціального класу транспозицій для перестановок, що відповідають суміжним вершинам перестановочного багатогранника (транспозицій суміжності). Отримано нові властивості транспозицій суміжності та їх композицій як бієктивних відображень.

3. Досліджено властивості циклічної структури перестановок: запропоновано класифікацію циклічних перестановок в залежності від послідовності елементів у циклі; застосовано транспозиції суміжності та їх композиції до довільних та циклічних перестановок, завдяки чому досліджено циклічну структуру суміжних вершин перестановочного багатогранника. Запропоновано використання транспозицій суміжності для генерації перестановок з різною циклічною структурою. Оцінено кількість згенерованих перестановок в залежності від виду композиції транспозицій суміжності.

4. Запропоновано методи розв'язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок, зокрема, з додатковими лінійними обмеженнями, які базуються на досліджених властивостях транспозицій суміжності. Розроблено підходи на основі комбінацій методу гілок та меж, евристики, випадкового пошуку, в тому числі, із використанням транспозицій суміжності.

5. Розроблено модифікацію методу комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів від'ємної вартості за допомогою множини циклічних перестановок у випадках, коли побудова допоміжного графу неможлива. Розроблену модифікацію застосовано для покращення розв'язків задач транспортної маршрутизації, отриманих за допомогою евристики, зокрема, задачі вивозу і доставки (Pickup and Delivery Problem).

6. Для розв'язання задач, досліджених в роботі, програмно реалізовано запропоновані моделі та методи комбінаторної оптимізації, та здійснено обчислювальні експерименти.

7. Аналіз результатів обчислювальних експериментів з оптимізації лінійних функцій без додаткових обмежень на множині циклічних перестановок показали, що евристичний підхід в комплексі з методом гілок та меж дозволяє збільшити розмірність розв'язуваних задач.

Застосування методу оптимізації за допомогою транспозицій суміжності, завдяки дослідженням властивостей транспозицій суміжності, проведених в роботі, дозволяє отримувати наближений розв'язок задачі, який в деяких випадках збігається з точним.

Розроблені методи розв'язання задачі оптимізації лінійної функції на циклічних перестановках дозволяють, в залежності від особливостей задачі, використовуваних евристик та їх параметрів, обирати між точністю розв'язку, використанням обчислювальних можливостей та часом роботи алгоритму при розв'язанні більш складних задач комбінаторної оптимізації, в рамках яких знаходження мінімуму лінійної функції є лише допоміжною задачею, що розв'язується багато разів.

Альтернативна стратегія формування циклічних трансферів від'ємної вартості, заснована на властивостях множини циклічних перестановок, дозволила покращити розв'язки задачі One-to-One Pickup and Delivery Problem з 3D обмеженнями на завантаження на 5-9%.

8. Практичне значення результатів роботи підтверджується їх впровадженням в держбюджетне наукове дослідження, у виробництво та в навчальний процес Харківського національного університету радіоелектроніки, про що свідчать відповідні акти.

9. Можливі напрями продовження досліджень за тематикою дисертації:

- пошук альтернативних евристик та застосування альтернативних правил розгалуження дерева і побудови оцінок в комбінації методу гілок та меж з евристикою, що мають меншу обчислювальну складність порівняно із запропонованими у даній роботі;
- використання властивостей транспозицій суміжності для подальшого дослідження циклічної структури перестановок та використання їх для розробки нових методів розв'язання задач оптимізації на перестановках із заданою циклічною структурою;
- створення більш ефективних методів розв'язання різних задач комбінаторної оптимізації, ґрунтуючись на застосуванні альтернативної стратегії формування циклічних трансферів від'ємної вартості, за допомогою властивостей множини циклічних перестановок.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гребенник И.В., Литвиненко А.С., Титова О.С. Оптимизация линейной функции на множестве циклических перестановок. *Бионика интеллекта*. 2012. №2 (79). С. 8–12.

2. Гребенник И.В., Черная О.С. Циклические свойства смежных перестановок различных элементов. *Бионика интеллекта*. 2014. №1 (82). С. 7–11.

3. Grebennik I.V., Chorna O.S. Influence of Certain Transpositions on the Cyclic Structure of Permutations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. № 6(51). P. 947–955. (Scopus)

4. Grebennik I.V., Chorna O.S. Elements transpositions and their impact on the cyclic structure of permutations. *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2015. № 3(4). P. 33–38.

5. Grebennik I.V., Baranov A.V., Chorna O.S., Gorbacheva E.E. Optimization of linear functions on a cyclic permutation based on the random search *An International Quarterly Journal on Economics of Technology and Modelling Processes*. 2016. №3(5). P. 211–216.

6. Grebennik I.V., Chorna O.S. Special transpositions of permutation elements and properties of their composition *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. № 1(53). P. 67–77. (Scopus)

7. Гребенник И.В., Чорна О.С., Макарова Е.Е. Оптимізація лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2018. №3(49). С. 67-72.

8. Гребеннік І.В., Чорна О.С. Циклічні перестановки в методах комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів. *Біоніка інтелекту*. 2019. №2 (93). С. 28–34.
9. Dupas R., Grebennik I., Litvinchev I., Romanova T., Chorna O. Solution strategy for one-to-one pickup and delivery problem using the cyclic transfer approach. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. №20 (27). P. 1–9. (Scopus)
10. Гребеннік І.В., Тітова О.С. Розв'язання задачі мінімізації лінійної функції на множині циклічних перестановок. *Студентська наукова конференція з прикладної математики та інформатики ШКПМІ: тези доповідей 14-ої всеукраїнської 9-ої міжнародної конференції*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 5-6 травня 2011. С. 246–248.
11. Grebennik I.V., Lytvynenko O.S., Titova O.S. Optimization of linear functions on cyclic permutations. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 20-ой международной конференции*. Брно, Чехия. 17-21 сентября 2012. С. 43-44.
12. Гребеннік І.В., Тітова О.С. Свойства смежности циклических перестановок, отображенных в евклидово пространство. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 22-ой международной конференции*. Ялта-Форос. 23-27 сентября 2013. С. 66.
13. Гребеннік І.В., Черная О.С., Горбачёва Е.Е. Решение задач оптимизации на циклических перестановках на основе случайного поиска. *Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке: тезиси докладов 18-ого международного молодежного форума*. Харьков: Харьковский национальный университет радиоэлектроники. 14-16 апреля 2014. Т. 6. С. 333–334.
14. Grebennik I., Chorna O. Special transposition of the elements of permutations and properties of their composition. *4th International Conference on application of information and communication technology and statistics in economy and education (ICAICTSEE – 2014): тезиси докладов 4-ой международной конференции*. 24-25 вересня 2014. С. 178-187.
15. Гребеннік І.В., Черная О.С. Влияние специальных классов транспозиций на элементы множества перестановок. *Problems of decision making under uncertainties: тезиси докладов 25-ой международной конференции*. Східниця. 11-15 травня 2015. С. 83.
16. Гребеннік І.В., Черная О.С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики (АРАМС-2015): тези доповідей 21-ої всеукраїнської наукової конференції*. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. 24-25 вересня 2015. С. 132–133.
17. Титов С.В., Черная О.С. Использование платформы FlyElephant для оптимизации линейных функций на циклических перестановках. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції*. Київ.

Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 318–321.

18. Гребенник И. В., Черная О. С. Специальные транспозиции элементов перестановок и свойства композиции. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ. Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2016. С. 256–259.

19. Черная О.С., Горбачева Е.Е. Оптимизация линейных функций на множестве циклических перестановок с линейными ограничениями. *Сучасні проблеми машинобудування*: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів. Харків. Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного. 21-24 листопада 2016. С. 35.

20. Гребенник И.В., Черная О.С. Оптимізація маршрутів задачі PDP за допомогою циклічних трансферів. *Інформаційні технології в культурі, мистецтві, освіті, науці, економіці та бізнесі*: тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції. Київ: Київський національний університет культури і мистецтв. 21-22 квітня 2019. С. 153–155.

АНОТАЦІЯ

Чорна О.С. Математичні моделі та методи оптимізації на циклічних перестановках і їх застосування. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи. – Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного Національної академії наук України, м. Харків, 2020.

В роботі досліджено моделі та методи комбінаторної оптимізації, що використовують властивості множини циклічних перестановок і їх застосування для розв’язання наукових і прикладних задач, серед яких — задачі транспортної маршрутизації.

Досліджено властивості циклічних перестановок при їх відображенні в евклідов простір. Використовуються поліедральні властивості перестановок і циклічних перестановок, що відповідають підмножині вершин перестановочного багатогранника. Набув подальшого розвитку клас транспозицій суміжності для перестановок різних елементів, представники якого породжують перестановки, відповідні суміжним вершинам перестановочного многогранника. Описано властивості суміжності і особливості зміни циклічної структури перестановок при впливі транспозицій суміжності. Проведено класифікацію циклічних перестановок в залежності від впливу транспозицій суміжності на їх циклічну структуру. Доведено відповідні твердження про властивості транспозицій суміжності.

Набули подальшого розвитку методи розв’язання задач оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок, зокрема, з лінійними обмеженнями. Для розв’язання задачі без обмежень запропоновано підхід,

заснований на комбінації методу гілок та меж і евристики. Запропоновано метод пошуку наближеного розв'язку задачі без обмежень з використанням властивостей транспозицій суміжності. Для розв'язання задачі оптимізації лінійних функцій на множині циклічних перестановок з лінійними обмеженнями запропоновано метод на основі випадкового пошуку, з використанням транспозицій суміжності для розв'язання допоміжної задачі.

Набув подальшого розвитку метод комбінаторної оптимізації на основі циклічних трансферів в частині генерації циклічних трансферів від'ємної вартості. Метод застосовано для покращення розв'язків задач транспортної маршрутизації, зокрема, задачі вивозу і доставки (Pickup and Delivery Problem), отриманих за допомогою евристики.

Для розв'язання задач, досліджених в роботі, розроблено програмне забезпечення, що реалізує запропоновані моделі та методи комбінаторної оптимізації. Наведено результати обчислювальних експериментів, проведено аналіз результатів, який підтверджує ефективність запропонованих підходів.

Отримані результати можуть бути використані при комп'ютерному моделюванні і розв'язанні задач в областях архівації даних і криптографії, квантових обчислень, біоінформатики.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, циклічні перестановки, транспозиції, перестановочний багатогранник, транспозиції суміжності, лінійна функція, метод гілок та меж, евристика, задача вивозу і доставки.

АННОТАЦІЯ

Черная О.С. Математические модели и методы оптимизации на циклических перестановках и их применение. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного Национальной академии наук Украины, г. Харьков, 2020.

В работе исследованы модели и методы комбинаторной оптимизации, использующие свойства множества циклических перестановок и их применение для решения научных и прикладных задач, среди которых — задачи транспортной маршрутизации.

Исследованы свойства циклических перестановок при их отображении в евклидово пространство. Используются полиэдральные свойства перестановок и циклических перестановок, соответствующих подмножеству вершин перестановочного многогранника. Введен класс транспозиций смежности для перестановок различных элементов, представители которого порождают перестановки, соответствующие смежным вершинам перестановочного многогранника. Описаны свойства смежности и особенности изменения циклической структуры перестановок при воздействии транспозиций смежности. Проведена классификация циклических перестановок в зависимости от влияния транспозиций

смежности на их циклическую структуру. Доказаны соответствующие утверждения о свойствах транспозиций смежности.

Получили дальнейшее развитие методы решения задач оптимизации линейных функций на множестве циклических перестановок, в частности, с линейными ограничениями. Для решения задачи без ограничений предложен подход, основанный на комбинации метода ветвей и границ и эвристики. Предложен метод поиска приближенного решения задачи без ограничений с использованием свойств транспозиций смежности. Для решения задачи оптимизации линейных функций на множестве циклических перестановок с линейными ограничениями предложен метод на основе случайного поиска, с использованием транспозиций смежности для решения вспомогательной задачи.

Получил дальнейшее развитие метод комбинаторной оптимизации на основе циклических трансферов в части генерации циклических трансферов отрицательной стоимости. Метод применен для улучшения решений задач транспортной маршрутизации, в частности, задачи вывоза и доставки (Pickup and Delivery Problem), полученных с помощью эвристик.

Для решения задач, исследованных в работе, разработано программное обеспечение, реализующее предложенные модели и методы комбинаторной оптимизации. Приведены результаты численных экспериментов, проведен анализ результатов, подтверждающий эффективность предложенных подходов.

Полученные результаты могут быть использованы при компьютерном моделировании и решении задач в областях архивации данных и криптографии, квантовых вычислений, биоинформатики.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, циклические перестановки, транспозиции, перестановочный многогранник, транспозиции смежности, линейная функция, метод ветвей и границ, эвристика, задача вывоза и доставки.

ABSTRACT

Chorna O.S. Mathematics models and optimization methods on cyclic permutations and their applications. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

A Thesis for a Candidate of Engineering Sciences degree in the specialty 01.05.02 – mathematical modeling and computational methods. – A. Pidhornyi Institute of Mechanical Engineering Problems of NAS Ukraine, Kharkiv, 2020.

The paper investigates models and methods of combinatorial optimization that use the properties of a set of cyclic permutations and their application for solving scientific and applied problems, including the vehicle routing problems.

The properties of cyclic permutations under their mapping into Euclidean space are investigated. The polyhedral properties of permutations and cyclic permutations corresponding to the subset of vertices of the permutation polytope are

used. A class of adjacency transpositions is introduced for permutations of various elements, whose representatives generate permutations corresponding to adjacent vertices of the permutation polytope. The properties of adjacency and the peculiarities of changing the cyclic structure of permutations under the influence of adjacency transpositions are described. The classification of cyclic permutations is carried out depending on the influence of adjacency transpositions on their cyclic structure. The corresponding statements about the properties of adjacency transpositions are proved.

Methods for solving optimization problems for linear functions on the set of cyclic permutations, in particular, with linear constraints, have been further developed. An approach based on a combination of the branch-and-bound algorithm and heuristics is proposed to solve the problem without constraints. A method is proposed for finding an approximate solution to the problem without constraints using the properties of adjacency transpositions. To solve the problem of optimization of linear functions on the set of cyclic permutations with linear constraints, a method is proposed based on random search, using adjacency transpositions to solve an auxiliary problem.

The method of combinatorial optimization based on cyclic transfers has been further developed in terms of generating cyclic transfers of negative value. The method is applied to improve the solutions obtained using heuristics of transport routing problems, in particular, the Pickup and Delivery Problem.

The software has been developed that implements the proposed models and methods of combinatorial optimization, to solve the problems studied in the work. The results of numerical experiments are represented, the analysis of the results is carried out, confirming the effectiveness of the proposed approaches.

The results obtained can be used in computer modeling and solving problems in the fields of data archiving and cryptography, quantum computing, bioinformatics.

Keywords: combinatorial optimization, cyclic permutations, transpositions, permutation polytope, adjacency transpositions, linear function, branch-and-bound algorithm, heuristics, pickup and delivery problem.