НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Гладиш Богдана Іванівна

Гладиш

УДК 517.162

ФУНКЦІЇ З КРИТИЧНИМИ ТОЧКАМИ НА МЕЖІ МАЛОВИМІРНИХ МНОГОВИДІВ

01.01.04 – геометрія та топологія

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
ПРИШЛЯК Олександр Олегович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем механіко-математичного факультету.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України,
старший науковий співробітник
МАКСИМЕНКО Сергій Іванович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії топології
відділу алгебри і топології;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
КАДУБОВСЬКИЙ Олександр Анатолійович,
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»,
декан фізико-математичного факультету.

Захист відбудеться «20» жовтня 2020 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «15» вересня 2020 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради   Сорока Ю. Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена вивченню гладких функцій на многовидах із межею, а саме: розглядаються питання, пов'язані з їхньою локальною класифікацією, глобальною класифікацією оптимальних функцій і деформаціями загального положення.

Актуальність теми. Топологічна класифікація гладких функцій – це основна задача топологічних досліджень, оскільки такі функції знаходять своє застосування в диференціальній топології, аналізі, динамічних системах та інших галузях науки. М. Морс отримав топологічне представлення гладкої функції в околі внутрішньої невиродженої критичної точки у формі квадратичного многочлена. На його ідеях ґрунтується теорія, названа на його честь – теорія Морса, яка описує зв'язок алгебраїчно-топологічних властивостей многовидів зі критичними точками функції, заданої на ньому. О. Болсинов і А. Фоменко[1], досліджуючи гамільтонову механіку, розглядали пошарову й пошарово оснащену еквівалентності функцій Морса на компактній замкненій поверхні, завдяки чому ввели поняття атома й f-атома відповідно. Проте проблеми представлення функцій Морса в околі граничної особливості й локальної будови відповідного критичного околу актуальні і їхньому розв'язкові присвячений другий розділ дисертації. Також гранична лема Морса паралельно отримана у роботі[2], де передумови твердження відрізняються від наведених у дисертації. Для класифікації простих функцій Морса на замкнених поверхнях Ґ. Ріб[3] і А. Кронрод[4] побудували граф, де критичним точкам функції відповідають вершини, а компонентам зв'язності регулярних рівнів – точки на ребрі графа. Відображення з невиродженими особливостями на маловимірних многовидах вивчені в роботах В. Шарка[5], О. Пришляка[6], С. Максименка[7] та ін. Залишалось відкритим питання побудови інваріанта для простих функцій на 2-многовиді з межею у формі графа (з додатковою інформацією).

Залежно від поставленої задачі поведінка функції Морса на межі може бути різною. Так, на многовидах із межею від функцій Морса природньо вима-

---

[1] Болсинов А.В. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. В 2 т. / А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко // Изд. Дом "Удмурский университет", Ижевск, 1999. – Т. 1. – 444 с.

[2] Borodzic M. Morse theory for manifolds with boundary / M. Borodzic, A. Nemethi, A. Raniski // Algebr. Geom. Topol. – 2016. – Vol. 2, № 2. – P. 971–1023.

[3] Reeb G. Sur certaines propietes topologiques des varieties feulletees / G. Reeb // Actualites Sci. Ind., № 1183, Hermn&Cie, Paris, 1952. – P. 5–89, 155–156.

[4] Кронрод А.С. О функциях двух переменных / А.С. Кронрод // Успехи мат. наук. – 1950. – Т. 5, № 1 (35). – С. 24–134.

[5] Sharko V.V. Classification of Morse functions on surfaces / V.V. Sharko // Low-dimentional Topology and Combinatorial Group Theory. International Summer Conference, Chelyabinsk Univ. – 1996. – P. 19–25.

[6] Пришляк А.О. Сопряженность функций Морса / А.О. Пришляк // Некоторые вопросы совр. мат. Ин-т матем., Киев, 1998. – Т. 25. – С. 319–325.

[7] Максименко С.И. Компоненты пространств отображений Морса / С.И. Максименко // Некоторые вопросы совр. мат. Ин-т матем., Киев, 1998. – Т. 25. – С. 135–153.

гають, щоб їхнє обмеження на внутрішність також було функцією Морса. У класичній теорії Морса функції Морса сталі на кожній компоненті межі. Якщо ж не накладати жодних обмежень на поведінку на межі, то функція в загальному положенні не має критичних точок на межі і її обмеження на межу – функція Морса. Такі функції часто називають m-функціями. Топологічна еквівалентність m-функцій досліджувалась у працях С. Максименка[8] (отримано критерій еквівалентності m-функцій), О. Пришляка[9,10] (описано всі атоми й молекули m-функцій на компактних (не)орієнтованих поверхнях зі краєм із не більш ніж 6-ма (5-ма) крайовими особливостями) та ін. Актуальним залишається питання вивчення топологічної класифікації зі збереженням орієнтації многовиду гладких функцій із невиродженими критичними точками на поверхні з межею, топологічно еквівалентних до m-функцій.

Функції з ізольованими особливостями детально вивчались у працях М. Морса[11], О. Пришляка[12], Є. Полуляха[13], І. Юрчук[14], С. Максименка[15] та ін. Так, для замкнених поверхонь О. Пришляк отримав локальну топологічну класифікацію таких функцій у околі критичної точки й побудував повний топологічний інваріант у формі розрізняючого графа. З іншого боку, топологічна структура функцій у околі ізольованої критичної точки на межі поверхні не була дослідженою. Цьому питанню присвячений останній розділ дисертаційної роботи.

Цікавим для дослідження є також питання мінімальності числа критичних точок функції на заданому многовиді (оптимальність функції). С. Смейл показав існування таких функцій у випадку однозв'язних многовидів розмірності понад п'ять. Своєю чергою В. Шарко[16] отримав умови існування мінімальних функцій на замкнених многовидах великих розмірностей. Часто виникає ситуація, коли задача класифікації потребує побудови інваріантів, що використовують певні комбінаторні об'єкти. Одним із таких об'єктів є хордові

[8] Максименко С.И. Классификация m-функций на поверхностях / С.И. Максименко // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 8. – С. 1129–1135.

[9] Пришляк О.О. Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях / О.О. Пришляк, К.І. Міщенко, Н.В. Лукова, К.І. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – Т. 104, № 1. – С. 1–12.

[10] Лукова Н.В. m-Функції на неорієнтованих поверхнях // Н.В. Лукова, О.О. Пришляк, К.І. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2012. – Т. 108, № 2. – С. 176–185.

[11] М. Морс Топологические методы теории функций комплексного переменного / М. Морс // Изд. иностранной литературы, Москва, 1951. – 248 с.

[12] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface / A.O. Prishlyak // Topology Appl. – 2002. – Vol. 119, № 3. – P. 257–267.

[13] Шарко В.В. Топологічна еквівалентність псевдо-гармонічних функцій загального положення на площині / В.В. Шарко, Є.О. Полулях, Ю.Ю. Сорока // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 6. – С. 7–47.

[14] Юрчук І.А. Властивості псевдо-гармонічних функцій на замкненій області / І.А. Юрчук // Праці міжнародного геометричного центру. – 2014. – Т. 4, № 4. – С. 50–59.

[15] Максименко С.І. Функції з ізольованими особливостями на поверхнях / С.І. Максименко // Геометрія та топологія функцій на многовидах. Праці інституту математики НАН України, 7, 2010. – № 4. – С. 7–66.

[16] Шарко В.В. Числа Морса и минимальные функции Морса на неодносвязных многообразиях / В.В. Шарко // Укр. мат. журн. – 1988. – Т. 40, № 1. – С. 130–131.

діаграми, детально описані, наприклад, у роботі О. Кадубовського[17], які автор використав для топологічної класифікації оптимальних функцій на замкнених поверхнях. Однак актуальним залишається вивчення оптимальних функцій як із ізольованими, так і з невиродженими особливостями на межі й побудови відповідних інваріантів.

Варто відзначити ще один важливий напрямок досліджень, а саме деформації функцій. Вони виникають у багатьох розділах математики і її застосувань, зокрема в теорії катастроф, при вивченні просторів функцій тощо. Деформації можна розглядати як шлях у просторі функцій, вивченню структури якого присвячено багато робіт С. Максименка та його учнів[18]. Проте не вивченим залишається питання: якою буде деформація графів Кронрода-Ріба для функцій на поверхнях із межею, між якими існує деформація загального положення?

Таким чином, актуальними для розгляду є дослідження локального зображення функцій із невиродженими й із ізольованими критичними точками на межі поверхні, побудова інваріанту для подальшої класифікації таких функцій. Також попередньо нерозв'язаною проблемою залишається питання оптимальності гладких функцій із особливостями на межі поверхні й деформацій гладких функцій із невиродженими критичними точками на компактних орієнтованих поверхнях із межею.

Зв'язок із науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Результати дисертації використані при виконанні науково-дослідної теми 19БФ038-02 «Розробка нових аналітико-геометричних, асимптотичних та якісних методів дослідження інваріантних множин диференціальних рівнянь». Номер державної реєстрації 0119U100334.

Мета і завдання дослідження. *Мета* цієї роботи – це вивчення топологічних властивостей функцій із ізольованими критичними точками на межі компактного 2-вимірного многовиду.

Основні *об'єкти* дослідження: класи функцій із невиродженими критичними точками на межі многовидів, які також є невиродженими критичними точками відповідних обмежень на межу, з ізольованими критичними точками на межі поверхні, які також є ізольованими критичними точками їхніх обмежень на межу поверхні, прості функції з невиродженими критичними точками на орієнтованій поверхні з межею, а також деформації загального положення функцій описаних вище класів.

---

[17] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях / О.А. Кадубовський // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т. 12, № 6. – С. 105–145.

[18] Максименко С.И. Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе / С.И. Максименко, Б.Г. Фещенко // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 64, № 9. – С. 1205–1212.

Предмет дослідження: топологічні властивості функцій на многовидах з межею.

Завдання дослідження: отримати представлення функції в околі невиродженої критичної точки на межі n-вимірного многовиду, яка також є невиродженою критичною точкою обмеження функції на межу (mm-функції), а також в околі ізольованої особливості на межі поверхні; побудувати критерій оптимальності mm-функції на заданій (компактній) поверхні й дослідити питання продовження функції, заданої на межі поверхні, на всю поверхню до оптимальної mm-функції; знайти інваріанти для простих функцій із невиродженими й із ізольованими особливостями на компактних поверхнях із межею; класифікувати атоми всіх описаних вище функцій; дослідити, коли між функціями з невиродженими особливостями на компактних поверхнях із межею існує деформація загального положення.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, отримані в дисертаційній роботі, нові й полягають у такому:

(1) для mm-функцій:
  (a) знайдено зображення функції в околі критичної точки на межі n-вимірного многовиду;
  (b) описано всі прості атоми;
  (c) побудовано критерій оптимальності простих mm-функцій;
  (d) знайдено необхідні умови продовження функції Морса, заданої на межі орієнтованої поверхні роду g із $4g+2$ критичними точками до оптимальної mm-функції з однозв'язними компонентами рівня;
(2) для простих функцій із невиродженими особливостями на компактній поверхні з межею:
  (a) побудовано інваріант для O-класифікації;
  (b) задано формули для знаходження топологічного типу поверхні за оснащеним KR-графом;
(3) для функцій із пунктів (1) і (2), а також для простих функцій Морса на замкненій поверхні отримано критерій існування деформації загального положення між двома функція одного з описаних вище класів в термінах деформацій відповідних оснащених KR-графів;
(4) для простих функцій, усі критичні точки яких ізольовані, належать межі і також є ізольованими критичними точками обмеження цих функцій на межу поверхні:
  (a) отримано топологічну класифікацію в околі критичної точки;
  (b) побудовано повний топологічний для оптимальних функцій як у орієнтованому, так і в неорієнтованому випадках.

Практичне значення одержаних результатів. Результати, отримані в дисертації, мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при дослідженнях із топології, теорії особливостей, теорії динамічних систем, а також у інших галузях науки, де виникають функції на поверхнях. Також досліджені у дисертації функції можуть використовуватись як функції Ляпунова для градієнтних полів і у якісній теорії гамільтонових векторних полів. Своєю чергою mm-функції знаходять своє застосування в контактній топології і теорії Флоера, та, розглядаючи ті чи інші процеси неперервно в часі, отримаємо залежну від параметра сім'ю функцій (деформацію).

Особистий внесок здобувачки. Результати, які містить ця дисертаційна робота, авторка отримала особисто. Задання загального плану досліджень, постановка задач і загальне керівництво роботою належать науковому керівникові. У працях, які опубліковані у співавторстві, остаточні формулювання й доведення результатів належать здобувачці.

Апробація результатів. Результати дисертації доповідались і обговорювались на таких конференціях і семінарах:

- Науковий семінар відділу топології Інституту математики НАН України (м. Київ, Україна, 2015);
- Семінар кафедри геометрії і топології Одеського національного університету імені І.І. Мечнікова (м. Одеса, Україна, 2015);
- International conference «Geometry in Odessa – 2015» (Odesa, Ukraine, 2015);
- International scientific and technical conference «Modern information and telecommunication technologies» (Kyiv, Ukraine, 2015);
- Міжнародна конференція «Геометрія та топологія в Одесі – 2016» (м. Одеса, Україна, 2016);
- Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A.A. Borisenko for his 70th birthday (Kharkiv, Ukraine, 2016);
- The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, Ukraine, 2016);
- All-ukrainian scientific and practical conference «Applied geometry and information technologies in science, objects and process modelling» (Mykolaiv, Ukraine, 2016);
- International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis» (Odesa, Ukraine, 2017);
- Seminars of Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology (Vienna, Austria, 2015 – 2019);
- Семінари кафедри геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, Україна, 2015 – 2019).

Публікації. Результати дисертаційної роботи представлені у 5-ти статтях [1 – 5] в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України. Всі статті опубліковані в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus). Також опубліковано 12 тез у матеріалах наукових конференцій [6 – 17].

Структура й обсяг дисертації. До складу дисертації входять: анотація (українською й англійською мовами), вступ, п'ять розділів, висновки, список використаних джерел, що містить 64 одиниці посилань, і додаток. Повний обсяг роботи становить 149 сторінок.

Подяки. Авторка висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, професорові Олександрові Олеговичу Пришляку за постановку задач, постійну підтримку і керування роботою, а також докторам фізико-математичних наук С.І. Максименку, Є.О. Полуляху та іншим працівникам лабораторії топології відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України за вагомі зауваження, підтримку й увагу до результатів дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, завдання, об’єкт, предмет і методи дослідження; сформульовано можливі практичні застосування одержаних результатів і особистий внесок здобувачки; аргументовано наукову новизну; надано перелік публікацій і зазначено апробацію результатів дисертаційної роботи.

Розділ 1 має вступний і допоміжний характер. У ньому описуються деякі базові поняття й попередні результати, присвячені теорії Морса, класу функцій із ізольованими критичними точками на замкнених поверхнях і m-функціям, які використовуються або ж узагальнюються в подальших розділах.

Вважатимемо, що всі многовиди й функції класу C^∞. Також для функції $f: M \to \mathbb{R}$ через f_∂ позначатимемо обмеження f на межу ∂M поверхні M.

Розділ 2 присвячено вивченню функцій із невиродженими особливостями на межі поверхні.

У підрозділі 2.1 отримано локальне *зображення* таких функцій. Нехай M – n-вимірний многовид із межею ∂M, $f: M \to \mathbb{R}$.

Теорема 2.1.1. *Нехай $p_0 \in \partial M$ – невироджена критична точка функції f і невироджена критична точка обмеження f_∂ функції f на ∂M, така, що $f(p_0) = 0$. Тоді існує система координат $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_n \geq 0$ в околі p_0, для якої $p_0 = (0,0,\dots,0)$ і функція f має таке локальне зображення:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_\lambda^2 + \cdots x_{n-1}^2 + \delta x_n^2 \qquad (2.1)$$

для деякого $\delta \in \{-1, +1\}$.

Означення 2.1.4. Нехай $p_0 \in \partial M$ – критична точка функцій f і f_∂, тоді *індексом критичної точки* p_0 називатимемо пару (λ, δ), яка визначається рівністю (2.1).

У підрозділах 2.2 і 2.3 розглядається випадок 2-вимірного многовиду і прості функції з невиродженими особливостями на межі. Описано структуру простих функцій в околі критичного рівня залежно від індексу критичної точки. Отримано класифікацію простих атомів і f-атомів таких функцій. Введено поняття mm-функції, знайдено найменше можливе число критичних точок простої mm-функції у класі всіх простих mm-функцій на заданій поверхні. Також важливим результатом є необхідні умови продовження простої функції Морса, заданої на межі орієнтованої поверхні роду g із $4g + 2$ критичними точками на всю поверхню до простої оптимальної mm-функції.

Нагадаємо, що гладкі функції $f: M \to \mathbb{R}$ і $g: N \to \mathbb{R}$ називаються *пошарово (оснащено) еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $\lambda: M \to N$, який переводить компоненти зв'язності ліній рівня функції f у компоненти зв'язності ліній рівня функції g (зберігаючи при цьому напрямки зростання функцій).

Нехай c – критичне значення функції $f: M \to \mathbb{R}$, $V_\varepsilon(c) = [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ – ε-окіл критичного значення (такий, що не містить відмінних від c критичних значень). Через $f^{-1}(V_\varepsilon(c))$ позначимо окіл відповідного критичного рівня. Тоді *атомом (f-атомом)* називається клас пошарової (пошарово оснащеної) еквівалентності пари $(U, f|_U)$, де U – об'єднання компонент лінійної зв'язності множини $f^{-1}(V_\varepsilon(c))$, які містять критичні точки. Атом (f-атом) називається *простим*, якщо він містить одну критичну точку. Надалі, якщо не буде вказано протилежного, всі атоми й f-атоми будуть простими.

Означення 2.3.1. Функцію Морса $f: M \to \mathbb{R}$ називатимемо *mm-функцією,* якщо обмеження f_∂ функції на межу ∂M також є функцією Морса і всі критичні точки функції f належать межі поверхні ∂M.

Під поняттям оптимальної функції у певному класі функцій розумітимемо функцію, яка має найменше можливе число критичних точок у цьому класі, якщо така існує. Також простою називатимемо функцію, яка має одну критичну точку на кожному критичному рівні.

Для оптимальної mm-функції на поверхні показано, що вона має два екстремуми, й отримано формулу для опису ейлерової характеристики поверхні.

Теорема 2.3.4. *Проста оптимальна mm-функція на орієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $4g + 2k$ критичні точки, а на неорієнтованій поверхні роду g з k компонентами межі має $2g + 2$ критичні точки.*

Природньо виникає запитання: чи кожну просту функцію Морса, задану на межі поверхні, можна продовжити на всю поверхню до простої оптимальної mm-функції з однозв'язними компонентами рівня?

Теорема 2.3.5. *Нехай f – проста функція Морса, задана на межі орієнтованої поверхні M роду g з однією компонентою межі, яка має $4g+2$ критичні точки із критичними значеннями $c_1, c_2, \dots, c_{4g+2}$ $(c_1 < c_2 < \dots < c_{4g+2})$. Тоді, якщо функцію f можна продовжити на всю поверхню до простої оптимальної mm-функції з однозв'язними компонентами рівня, то виконуються умови:*

I) *перші 3 критичні значення, c_1, c_2, c_3, функції f (як функції на колі) відповідають точкам локального мінімуму;*
II) *серед критичних значень $c_4, c_5, \dots, c_{4i+3}$ є принаймні $2i$ значень, які відповідають точкам локального мінімуму, для всіх натуральних i, таких, що $4i+3 \leq 4g+2$.*

Зауважимо, що як наслідок за виконання умов теореми 2.3.5 останні три критичні значення, $c_{4g}, c_{4g+1}, c_{4g+2}$, відповідають точкам локального максимуму як функції на колі.

Розділ 3 присвячено дослідженню простих функцій із невиродженими критичними точками на компактній зв'язній орієнтованій поверхні. Введено поняття функцій класу $\Omega(M)$ і показано їхню еквівалентність до m-функцій.

Нагадаємо, що функція $f: M \to \mathbb{R}$, задана на компактній поверхні M із межею ∂M (можливо, $\partial M = \emptyset$), називається *m-функцією*, якщо f_∂ – функція Морса й усі критичні точки f внутрішні, невироджені і їх скінченна кількість.

Нехай M – компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею, $f: M \to \mathbb{R}$. Позначивши через $CP(*)$ $(NDCP(*))$ множину (невироджених) критичних точок функції $*$, розглянемо функції класу $\Omega_0(M)$, які задаються таким чином:

$$\Omega_0(M) = \{f: M \to \mathbb{R} \,|\, CP(f) = NDCP(f) \supset CP(f_\partial) = NDCP(f_\partial)\}.$$

Теорема 3.0.1. *Нехай M – гладка компактна зв'язна орієнтована поверхня. Тоді виконуються такі твердження:*

1) *для довільної функції $f \in \Omega_0(M)$ існує m-функція $g: M \to \mathbb{R}$, яка є топологічно еквівалентною до функції f;*
2) *для довільної m-функції $g: M \to \mathbb{R}$ існує функція $f \in \Omega_0(M)$, така, що f і g топологічно еквівалентні.*

У підрозділі 3.1 описано поняття $\mathcal{O}$-еквівалентності і $\mathcal{O}$-атома й побудовано оснащений KR-граф, інваріантність якого при $\mathcal{O}$-класифікації функцій доведено в підрозділі 3.2.

Розгляньмо функції $f: M \to \mathbb{R}$, $g: N \to \mathbb{R}$, задані на компактних зв'язних орієнтованих поверхнях M і N відповідно.

Означення 3.1.1. Функції f і g називаються $\mathcal{O}$*-еквівалентними*, якщо f і g пошарово оснащено еквівалентні і відповідний гомеоморфізм поверхонь (який задає пошарово оснащену еквівалентність) зберігає орієнтацію. Позначимо через U об'єднання компонент лінійної зв'язності достатньо малого околу критичного рівня функції f, такі, що містять критичні точки. Клас $\mathcal{O}$-еквівалентності пари $(U, f|_U)$ називатимемо $\mathcal{O}$*-атомом*.

Означення 3.1.2. $\mathcal{O}$-атом називається *простим*, якщо він містить одну критичну точку.

Оскільки надалі в цьому розділі всі функції прості, то якщо не буде вказано протилежного, кожен атом ($\mathcal{O}$-атом) вважатимемо простим.

Розгляньмо клас простих функцій із $\Omega_0(M)$ (позн. $\Omega(M)$), $f \in \Omega(M)$. Компоненти лінії рівня функції f називатимемо шарами, причому для регулярних рівнів вони гомеоморфні до відрізка чи кола. Тоді поверхня M розіб'ється на об'єднання шарів і отримаємо шарування з особливостями. Шар називатимемо (O-) I-шаром, якщо він відповідає компоненті лінії рівня, гомеоморфній до відрізка (кола). Розглянемо відношення еквівалентності на M, у якому точки будуть еквівалентними тоді і тільки тоді, коли вони належать одному шарові. Далі, ввівши фактор-топологію до простору шарів, отримаємо деякий граф Γ_f, у якому ребра зображатимемо звичайною (штрихпунктирною) лінією, якщо вони поставлені у відповідність до (O-) I-шарів. Відповідні ребра називатимемо O- й I-*ребрами*, тоді отримаємо *розбиття ребер* графа Γ_f на O- й I-ребра.

Означення 3.1.4. Вершини валентності 3 і 4 графа Γ_f функції f, до яких інцидентні тільки I-ребра, називатимемо Y- і X-*вершинами* відповідно.

Для кожної Y-вершини графа Γ_f зафіксуємо циклічний порядок інцидентних до них ребер. На рисунку він задаватиметься за допомогою обходу відповідних ребер проти годинникової стрілки, а циклічний порядок у X-вершині – таким чином: лівий верхній – лівий нижній – правий верхній – правий нижній.

Означення 3.1.5. *Оснащеним графом Кронрода-Ріба (оснащеним KR-графом)* функції $f \in \Omega(M)$ називатимемо граф Γ_f разом із заданим розбиттям, орієнтацією ребер і їхнім циклічним порядком у Y- і в X-вершинах.

Залежно від індексу критичної точки p_0 і її належності до межі поверхні ∂M показано, що можливими є 7 простих атомів і 13 простих $\mathcal{O}$-атомів.

Зафіксуймо на оснащених KR-графах орієнтацію ребер від нижньої до верхньої вершини.

Означення 3.1.7. Оснащені графи Кронрода-Ріба Γ_f і Γ_g функцій $f, g \in \Omega(M)$ називатимемо *еквівалентними* за ізоморфізмом $\varphi: \Gamma_f \to \Gamma_g$, якщо φ задовольняє умови:

(1) зберігає розбиття ребер;
(2) зберігає циклічні порядки суміжних ребер для кожної X- і Y-вершини;
(3) зберігає орієнтацію ребер.

Теорема 3.2.2. *Нехай M, N – гладкі компактні орієнтовані поверхні, $f \in \Omega(M)$, $g \in \Omega(N)$. Тоді f і g є $\mathcal{O}$-еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їхні оснащені KR-графи* Γ_f і Γ_g *еквівалентні.*

Підрозділ 3.3 має обрахунковий характер. Так, описано оснащені KR-графи для функцій із $\Omega(M)$ із не більш ніж 5-ма критичними точками (див. теорему 3.3.3).

У підрозділі 3.4 описано топологічний тип поверхні оснащеного KR-графа, а саме, наведено формули для знаходження ейлерової характеристики поверхні залежно від структури оснащеного KR-графа.

Нехай M – компактна зв'язна орієнтована поверхня з межею, $f \in \Omega(M)$.

Означення 3.4.1. Вершини валентності 2 і 3 графа Γ_f функції f, до яких інцидентні як I-, так і O-ребра, називатимемо T- і D-*вершинами* відповідно.

Через E_{I} (E_{o}) позначимо число (O-) I-ребер, а V_{I} (V_{o}) позначимо число вершин, до яких інцидентні тільки (O-) I-ребра. Число компонент межі поверхні позначатимемо як ∂.

Твердження 3.4.2. *Якщо граф Γ_f функції $f \in \Omega(M)$ містить або тільки* O-*ребра, або ж тільки* I-*ребра, то рід поверхні визначається формулою (3.1) або (3.2) відповідно, де*

$$g_{\mathrm{O}} = E_{\mathrm{O}} - V_{\mathrm{O}} + 1, \tag{3.1}$$

$$g_{\mathrm{I}} = \frac{E_{\mathrm{I}} - V_{\mathrm{I}} + 2 - \partial}{2}. \tag{3.2}$$

Під (O-) I-*підграфом* оснащеного KR-графа розумітимемо граф (можливо, незв'язний), утворений із Γ_f шляхом викидання (I-) O-ребер й ізольованих вершин, якщо такі утворилися.

Теорема 3.4.3. *Рід поверхні може бути визначений за формулою*

$$g = g_{\mathrm{I}} + g_{\mathrm{O}} + V_{\mathrm{D}} + V_{\mathrm{T}} - c_{\mathrm{O}} - c_{\mathrm{I}} + 1, \tag{3.3}$$

де g_{I} (g_{O}) – сумарний рід (O-) I-*підграфа, рід кожної компоненти якого задається формулою (3.2) ((3.1)), V_{D} (V_{T}) – число (*T-) D- *вершин, c_{I} (c_{O}) – число компонент зв'язності* (O-) I-*підграфа.*

Розділ 4 присвячено деформаціям простих функцій із невиродженими особливостями на компактних орієнтованих поверхнях із межею.

У підрозділі 4.1 визначено поняття деформації загального положення й деформації оснащеного KR-графа. Описано зв'язок між цими деформаціями й отримано зв'язок між оптимальністю й полярністю функцій Морса, m-функцій і mm-функцій.

Нехай $\Sigma(M)$ – це одна із таких множин: (1) прості функції Морса на замкненій поверхні; (2) прості m-функції на компактній поверхні з межею; (3) прості mm-функції на компактній поверхні з межею.

Означення 4.1.1. *Деформацією* (гладкою гомотопією) гладкої функції $f \in \Sigma(M)$ у гладку функцію $g \in \Sigma(M)$ називатимемо однопараметричну сім'ю відображень $\mathrm{F_t} \coloneqq F(x,t)$, $\mathrm{F}: M \times [0,1] \to \mathbb{R}$, таку, що:

(a) $\mathrm{F}_0(x) = f(x), x \in M$;
(b) $\mathrm{F}_1(x) = g(x), x \in M$;
(c) $\mathrm{F} \in C^\infty(M \times [0,1])$.

Означення 4.1.2. *Деформацією загального положення* називається деформація $\mathrm{F_t}$, для якої виконується такі умови:

(1) існує скінченна підмножина $J \subset (0,1)$, така, що $F_t \in \Sigma(M)$, $t \in [0,1] \setminus J$ і $F_t \notin \Sigma(M)$, $t \in J$;
(2) для кожного $t \in J$ виконується одна з таких умов:
  (2.1) функція F_t має критичний рівень, на якому розташовані 2 невироджені критичні точки (які можуть бути внутрішніми або ж точками на межі), тобто функція F_t є функцією Морса, m- або mm-функцією відповідно;
  (2.2) існує точка $p \in M$, така, що функція F_t – проста гладка функція, всі критичні точки якої є невиродженими, й така заміна координат (x, y і окремо t) в околі точки p, що:
    (2.2.1) $F_t(x,y) = x^3 \pm tx \pm y^2$ у разі, якщо $p \in \mathrm{Int}(M)$;
    (2.2.2) $F_t(x,y) = x^3 \pm tx \pm y$ або $F_t(x,y) = -x^2 + (y-t)^2$, $y \geq 0$ у разі, якщо $p \in \partial M$ і $\Sigma(M)$ – клас m-функцій;
    (2.2.3) $F_t(x,y) = x^3 \pm tx \pm y^2, y \geq 0$ у випадку, якщо $p \in \partial M$ і $\Sigma(M)$ – клас mm-функцій.

Нехай Γ_f – оснащений KR-граф функції $f \in \Sigma(M)$. Розгляньмо відображення $\varphi: V(\Gamma_f) \to 2^{E(\Gamma_f)}$, яке кожній вершині v графа Γ_f ставить у відповідність множину всіх інцидентних до неї ребер $\{p_j | j = \overline{1,i}\}$ (для деякого i): I-ребер – e_j й O-ребер – l_j, тобто $p_j = e_j$, або ж $p_j = l_j$. На множині вершин і ребер графа Γ_f розглянемо два відношення часткового порядку $\prec$ і $\vdash$, визначені у такий спосіб: (1) $v_1 \prec v_2$, якщо вершина v_1 відповідає меншому значенню функції f, аніж v_2; (2) $p_1 \prec p_2$, якщо всі точки ребра p_1 відповідають меншим значенням функції f, аніж усі точки p_2; (3) нехай ребра p_1 і p_2

інцидентні до однієї Y-вершини v, такі, що їх неможливо порівняти за допомогою відношення часткового порядку $\prec$. У вершині v оснащений KR-граф визначає циклічний порядок. Якщо циклічний порядок проти (за) годинникової стрілки, то скажемо, що друге (перше) ребро при його проходженні міститься лівіше від першого (другого). Тоді $p_1 \vdash p_2$, якщо p_1 міститься лівіше від p_2. Отже, відображення φ й відношення $\prec, \vdash$ однозначно задають граф Γ_f.

Означення 4.1.3. Нехай v_1, v_2 – суміжні вершини графа Γ_f, такі, що $v_1 \prec v_2$. Тоді *простою деформацією оснащеного KR-графа* Γ_f функції $f \in \Sigma(M)$ називається одна з подальших операцій або обернена до неї:

1) скорочення вершини v_2 й інцидентного до неї ребра l_1 у разі, якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1\}$;
2) скорочення ребра e_2 й інцидентних до нього вершин v_1 і v_2, якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(v_2) = \{e_2\}$;
3) скорочення ребра l_2 й інцидентних до нього вершин v_1, v_2, якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2\}$;
4) якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec l_4 \vdash l_5\}$, то підняття вершини v_1 на ребро l_3, тобто ізоморфізм η, такий, що $\eta(v_1) \prec \eta(v_2)$ і $\varphi(\eta(v_1)) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(\eta(v_2)) = \{l_3 \prec l_4 \vdash l_5\}$;
5) якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(v_2) = \{e_2 \prec e_4 \vdash e_5\}$, то підняття вершини v_1 на ребро e_5, тобто ізоморфізм η, такий що $\eta(v_2) \prec \eta(v_1)$ і $\varphi(\eta(v_1)) = \{e_1 \prec e_2 \vdash e_3\}$, $\varphi(\eta(v_2)) = \{e_4 \prec e_5 \vdash e_1\}$;
6) якщо $\varphi(v_1) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(v_2) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, то протягування вершини v_1 на ребро l_3, тобто ізоморфізм μ, такий що $\mu(v_2) \prec \mu(v_1)$ і $\varphi(\mu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1\}$, $\varphi(\mu(v_2)) = \{e_2 \prec l_2 \vdash e_1\}$;
7) якщо $\varphi(v_1) = \{l_1 \prec l_2 \vdash l_3\}$, $\varphi(v_2) = \{l_2 \prec e_1\}$, то протягування вершини v_2 на ребро l_1, тобто ізоморфізм ν, такий що $\nu(v_2) \prec \nu(v_1)$ і $\varphi(\nu(v_1)) = \{e_1 \prec l_1 \vdash e_2\}$, $\varphi(\nu(v_2)) = \{l_2 \prec e_1\}$.

Прості деформації оснащених KR-графів зображені на рисунку 4.1.2.

Означення 4.1.4. *Деформацією оснащеного KR-графа* Γ_f функції $f \in \Sigma(M)$ називається послідовність простих деформацій.

Теорема 4.1.5. *Якщо між функціями f і g із класу $\Sigma(M)$ існує деформація загального положення, то існує деформація між їхніми оснащеними графами Кронрода-Ріба Γ_f і Γ_g.*

Показано, що для функцій, заданих на зв'язних поверхнях, оптимальність і полярність рівнозначні для функцій Морса й mm-функцій і з оптимальності m-функції випливає її полярність.

У підрозділі 4.2 введено поняття деформаційного графа поверхні, а саме як графа, вершинам якого відповідають класи пошарово оснащеної еквівалентності функцій, а ребрам – прості деформації корозмірності 0 між цими функціями, й описано деформаційні графи таких поверхонь: $F_{1,0}$, $F_{0,2}$ і $F_{2,0}$, де $F_{i,j}$ – орієнтована поверхня роду i з j компонентами межі.

Розділ 5 присвячено вивченню функцій із ізольованими особливостями на межі компактної поверхні.

У підрозділі 5.1 отримано локальне представлення таких функцій в околі критичних точок. Для подальшої класифікації сформульовано поняття оснащеної хордової діаграми й описано прості атоми сідлового критичного рівня функції. Також виведено рекурентну формулу для обчислення числа цих атомів.

Нехай M – компактна поверхня з межею ∂M, $f: M \to \mathbb{R}$ – функція, задана на M зі скінченним числом критичних точок, які належать ∂M. Розгляньмо такий клас функцій (заданих на поверхні M)

$$\Theta_0(M) = \{f: M \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty(M), CP(f) = ICP(f) = ICP(f_\partial),$$

де $CP(*)$ $\big(ICP(*)\big)$ – множина (ізольованих) критичних точок функції $*$.

Теорема 5.1.4. *Нехай $f \in \Theta_0(M), p_0$ – сідлова критична точка функції f. Тоді існує окіл $U(p_0)$ точки p_0, такий, що обмеження функції на межу поверхні $f|_{U(p_0)}$ топологічно еквівалентне до функції $g(x,y) = \mathrm{Re}\,(x+iy)^k, y \geq 0$, заданої у деякому околі точки $(0,0)$ для певного цілого $k \geq 1$.*

Надалі розглянемо тільки прості функції з $\Theta_0(M)$ (позн. $\Theta(M)$). Кожен атом сідлового критичного рівня функції $f \in \Theta(M)$ має структуру $(2k+2)$-кутника. Поставмо у відповідність цьому багатокутнику коло з відміченими точками. Колу відповідатиме межа $(2k+2)$-кутника, а відміченим точкам – точки на межі, такі, що належать критичному рівню функції. Відмічені точки з'єднаємо хордою тоді і тільки тоді, коли відповідні сторони багатокутника склеюються при збільшенні околу. Отримаємо коло з відміченими точками і хордами з вершинами у цих точках. Зафіксуємо орієнтацію для подальшого задання нумерації відмічених точок на колі так, щоб при зміні орієнтації отримати атом, еквівалентний до початкового. Занумеруємо відмічені точки таким чином: точку, яка поставлена у відповідність до критичної точки p_0, позначимо через Q_0, а решту точок занумеруємо відповідно до орієнтації межі, починаючи від Q_1 і до Q_k, беручи при цьому за точку відліку точку Q_0. Відмічені точки розбивають коло на $k+1$ чорних і сірих дуг, які відповідають областям додатності й від'ємності функції відповідно.1 Також зауважимо, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (окрім тих, які містять вершину, яка відповідає критичній точці – Q_0) мають різний колір. Так, кожен f-атом може бути визначений за допомогою кола з k відміченими точками й точкою Q_0, l

хордами (серед яких немає петель), якщо додатково розглянути таке фіксоване розбиття дуг, що кожні дві дуги зі спільною вершиною (можливо, окрім тих, які містять вершину Q_0) мають різний колір. Коло з описаними вище елементами (побудоване з f-атома функції) називатимемо *хордовою діаграмою сідлового критичного рівня функції*.

Означення 5.1.5. *Оснащеною хордовою діаграмою* називатимемо коло, яке містить такі елементи:

(1) відмічені точки, які є занумерованими, і серед них виділена одна точка – точка Q_0;
(2) хорди з кінцями у відмічених точках, крім точки Q_0;
(3) розбиття дуг кола на товсті і тонкі, таке, що кожні дві дуги (можливо, крім тих, які містять Q_0) мають різний колір.

Занумеруємо відмічені точки оснащеної хордової діаграми від 0 до k (для деякого натурального k) за годинниковою стрілкою, починаючи з виділеної точки. Тоді хорду називатимемо *хордою 1-го (2-го) типу*, якщо вона з'єднує відмічені точки з номерами різної (однакової) парності.

Означення 5.1.6. Дві оснащені хордові діаграми називаються *еквівалентними*, якщо вони можуть бути отримані одна із другої за допомогою повороту чи симетрії, що зберігають при цьому елементи (1) – (3) (див. означення 5.1.5).

Означення 5.1.7. *Вільною відміченою точкою* на оснащеній хордовій діаграмі називається відмічена точка, яка не з’єднана хордою з іншими відміченими точками.

Поставивши у відповідність атому сідлового критичного рівня підстановку склейки природним чином (інволюцію, яка містить цикл, якщо на хордовій діаграмі відповідні дві відмічені точки з'єднані хордою), отримаємо атом разом із заданою підстановкою склейки $\tau^{(k)}$ (позн. $A_{\tau^{(k)}}$). Показано, що кожен атом сідлового критичного рівня функції збігається з атомом $A_{\tau^{(k)}}$ для деякої підстановки $\tau^{(k)}$ (яка задаватиме склейку сторін), і отримано рекурентну формулу для знаходження числа атомів (теорема 5.1.10).

У підрозділі 5.2 розглянуто прості оптимальні функції. Отримано критерій оптимальності, критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій у термінах хордових діаграм, а також розв'язано питання реалізації хордових діаграм із додатковими умовами.

Теорема 5.2.1. *Нехай $f \in \Theta(M)$, де M – зв'язна компактна поверхня зі зв'язною межею, яка негомеоморфна до 2-вимірного диску. Тоді функція f оптимальна тоді і тільки тоді, коли вона має лише три критичні точки, дві з яких є точками мінімуму і максимуму, а третя – сідловою.*

Якщо розглядати оснащену хордову діаграму як граф, вершинами якого є відмічені точки, а ребрами – дуги і хорди, то поняття шляху й суміжності дуг (як ребер графа) – задане коректно.

Означення 5.2.3. Шлях між відміченими точками на оснащеній хордовій діаграмі називається *правильним*, якщо він задовольняє такі умови:

1) хорди і дуги чергуються (під час проходження цього шляху);
2) кожна хорда 1-го типу розбиває своїми кінцями коло на дві частини і дві суміжні до неї дуги лежать у одній частині;
3) для хорди 2-го типу суміжні дуги лежать у різних частинах щодо її кінців.

Означення 5.2.4. Правильний шлях між вільними відміченими точками, який проходить через кожну хорду по одному разу, називається *повним шляхом*.

За допомогою дослідження властивостей хордової діаграми сідлового критичного рівня оптимальної функції на орієнтованій поверхні з однією компонентою межі отримано теорему реалізації оснащених хордових діаграм.

Теорема 5.2.5. *Хордова діаграма сідлового критичного рівня оптимальної функції на орієнтованій поверхні з однією компонентою межі задовольняє такі умови:*

1) *кожна хорда ділить коло на дуги, які містять парні числа відмічених точок;*
2) *хордова діаграма має $k+1=4n+2$ відмічених точок (для певного натурального n), дві з яких є вільними відміченими точками, причому одна – точка Q_0;*
3) *існує два повні шляхи між вільними відміченими точками.*

Теорема 5.2.8 (критерій топологічної еквівалентності). *Оптимальні функції топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні хордові діаграми сідлових критичних рівнів еквівалентні.*

Теорема 5.2.9 (реалізація). *Якщо оснащена хордова діаграма задовольняє умови 1) – 3) теореми 5.2.5, то існує оптимальна функція, хордова діаграма сідлового критичного рівня якої збігається із заданою.*

Також вивчені властивості хордової діаграми сідлового критичного рівня оптимальної функції на неорієнтованій поверхні з однією компонентою межі, розглянуто питання топологічної еквівалентності й реалізації і досліджено класи пошарової й топологічної еквівалентності оптимальних функцій на $\bar{F}_{1,1}$, $\bar{F}_{2,1}$, $\bar{F}_{3,1}$, де $\bar{F}_{i,j}$ – неорієнтована поверхня роду i з j компонентами межі.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню гладких функцій на поверхнях із межею. Отримано такі результати:

- отримано локальне зображення функцій у околі невиродженої особливості на межі n-вимірного многовиду, яка також є невиродженою особливістю обмеження функції на межу; у випадку поверхні, розглядаючи прості mm-функції описано атоми, знайдено критерій оптимальності й умови продовження простої функції Морса з межі на всю поверхню до простої оптимальної mm-функції;
- для функцій із невиродженими особливостями на компактній зв'язній орієнтованій поверхні M із межею (функції класу $\Omega_0(M)$): доведена топологічна еквівалентність класу m-функцій; для простих функцій класу $\Omega_0(M)$ (позн. $\Omega(M)$) отримано критерій $\mathcal{O}$-еквівалентності в термінах оснащених KR-графів; для функцій із $\Omega(M)$ із не більш, ніж 5-ма критичними точками, описано всі оснащені KR-графи; знайдено формули для знаходження топологічного типу поверхні за оснащеним KR-графом функції;
- для функцій із $\Sigma(M)$ (одного з подальших класів: прості функції Морса на M, $\partial M = \emptyset$; прості функції класу $\Omega_0(M)$; прості mm-функції), заданих на компактній зв'язній орієнтованій поверхні M: описано деформації загального положення й деформації відповідних оснащених KR-графів; уведено поняття деформаційного графа поверхні і знайдено ці графи для $F_{1,0}$, $F_{0,2}, F_{2,0}$, де $F_{i,j}$ – орієнтована поверхня роду i з j компонентами межі;
- для функцій із ізольованими критичними точками на межі поверхні, які також є ізольованими критичними точками обмежень функцій на межу (функції класу $\Theta_0(M)$): отримано топологічне зображення функцій у околі критичної точки; описано прості атоми сідлового критичного рівня і виведено рекурентну формулу для знаходження їхнього числа; доведено критерій оптимальності простих функцій класу $\Theta_0(M)$ (позн. $\Theta(M)$) для зв'язної компактної поверхні M зі зв'язною межею; знайдено критерій топологічної еквівалентності оптимальних функцій класу $\Theta(M)$ у термінах хордових діаграм сідлових критичних рівнів функцій; описано необхідні і достатні умови реалізації оснащеної хордової діаграми.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ НА ТЕМУ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Гладиш Б.І. Функції з невиродженими критичними точками на межі поверхні / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Український математичний журнал. – 2016. – Т. 68, № 1. – С. 28–37.

2. Hladysh Bohdana I. Topology of functions with isolated critical points on the boundary of a 2-dimensional manifold / Bohdana I. Hladysh and Alexandr O. Prishlyak // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2017. – Vol. 13, № 050. – 17 P.
3. Гладиш Б.І. Деформації загального положення оптимальних функцій на орієнтованих поверхнях з межею / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Український математичний журнал. – 2019. – Т. 71, № 8. – С. 1028–1039.
4. Hladysh Bohdana. Simple Morse functions on an oriented surface with boundary / Bohdana Hladysh and Alexandr Prishlyak // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2019. – Vol. 15, № 3. – P. 354–368.
5. Гладиш Б.І. Функції з ізольованими критичними точками на межі неорієнтованої поверхні / Б.І. Гладиш // Нелінійні коливання. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 26–37.
6. Prishlyak O.O. Functions with non-generated critical points on the boundary of manifold / O.O. Prishlyak, B.I. Ivanusa // International conference «Geometry in Odesa – 2015», Odesa, Ukraine, 25 – 31 May 2015. – Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2015. – P. 58.
7. Ivanusa B.I. Optimal 2 mm-functions on surfaces with boundary / B.I. Ivanusa // International conference of young mathematicians, Kyiv, Ukraine, 3 – 9 June 2015. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – P. 15.
8. Hladysh B.I. Topological aspects of surfaces by genus 3 with boundary and optimal functions defined on them in technical sciences. / B.I. Hladysh, V.V. Zhebka // International scientific and technical conference «Modern information and telecommunication technologies», Kyiv, Ukraine, 17 – 20 November 2015. – Kyiv: State University of Telecommunications, 2015. – C. 110.
9. Гладиш Б.І. Топологічно нееквівалентні функції з трьома ізольованими критичними точками на межі орієнтованої поверхні / Б.І. Гладиш, О.О. Пришляк // Міжнародна наукова конференція «Геометрія і топологія в Одесі – 2016», Одеса, Україна, 2 – 8 червня 2016. – Одеса: Одеська національна академія харчових технологій, 2016. – С. 36.
10. Hladysh B.I. Atoms of saddle critical level line of smooth functions on surfaces with boundary / B.I. Hladysh // XI-th summer school «Algebra, topology, analysis», Odesa, Ukraine, 1 – 14 August 2016. – Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2016. – P. 76.
11. Hladysh B.I. Optimal functions with isolated critical points on the boundary of the surfaces / B.I. Hladysh, O.O. Prishlyak // International conference Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A.A. Borisenko for his 70th birthday, Kharkiv, Ukraine, 12 – 16 September 2016. – Kharkiv: V.N. Karazin Kharkiv National University, 2016. – P. 22.
12. Hladysh Bohdana. Continuation of functions, defined on the circle, to optimal Morse functions on the surface / Bohdana Hladysh and O.O. Prishlyak // International conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz

Kuratowski, Lviv, Ukraine, 27 September – 1 October 2016. – Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. – P. 22–23.

13. Hladysh B.I. Deformations of functions with isolated critical points on the boundary of the surface / B.I. Hladysh // All-ukrainian scientific and practical conference «Applied geometry and information technologies in science, objects and process modelling», Mykolaiv, Ukraine, 19 – 21 October 2016. – Mykolaiv: Mukolaiv V.O. Sukhomlynskyi National University, 2016. – P.12.
14. Hladysh B.I. Deformation of a Morse function on a surface with the boundary / B.I. Hladysh, A.O. Prishlyak // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa, Ukraine, 31 May – 5 June 2017. – Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2017. – P. 50–51.
15. Гладиш Б.І. Функції на поверхнях з межею та їх графи Кронрода-Ріба / Б.І. Гладиш, Н.В. Лукова–Чуйко // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю.О. Митропольського (1917 – 2008), Київ, Україна, 7 – 10 червня 2017. – Київ: Інститут математики НАН України, 2017. – С. 16.
16. Hladysh B. Functions with isolated critical points on the boundary of non-oriented surface / B. Hladysh // International conference «Morse theory and its applications» dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (25.09.1949 – 07.10.2014), Kyiv, Ukraine, 25 – 28 Septermber 2019. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2019. – P. 17–19.
17. Hladysh B. Structure of functions on an oriented 2-manifold with the boundary / B. Hladysh, A. Prishlyak // International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», Odesa, Ukraine, 26 – 30 May 2020. – Odesa: Odesa National Academy of Food Technologies, 2020. – P. 27–28.

АНОТАЦІЇ

Гладиш Б.І. Функції з критичними точками на межі маловимірних многовидів. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.04 "геометрія та топологія". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2020.

Для класів функцій із (невиродженими) ізольованими критичними точками на межі (n-) 2-многовиду отримано локальну класифікацію. У разі компактних поверхонь із межею встановлено критерії оптимальності й побудовано повні топологічні інваріанти для класифікації оптимальних функцій. Вивчено питання, пов'язані з деформаціями загального положення, встановлено зв'язок між оптимальністю й полярністю функцій, введено поняття деформаційного графа поверхні й описано ці графи для деяких поверхонь. Також для функцій із ізольованими особливостями описано хордові діаграми сідлового критичного рівня ми отримали критерій еквівалентності й теорему реалізації, попередньо дослідивши для цього властивості хордових діаграм.

Ключові слова: критична точка, топологічна еквівалентність, оптимальна функція, деформація загального положення.

Гладиш Б.И. Функции с критическими точками на границе маломерных многообразий. – Квалификационная научная робота на правах рукописи.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.04 "геометрия и топология" – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко. – Институт математики Национальной академии наук Украины, Киев, 2020.

Для классов функций с (невырожденными) изолированными оссобенностями на границе (n-) 2-многообразия получено локальную классификацию. В случае компактных поверхностей с границей установлено критерии оптимальности и построено полные топологические инварианты для классификации оптимальных функций. Изучены вопросы, связанные с деформациями общего положения, установлена связь между оптимальностью и полярностью функций, введено понятие деформационного графа поверхности и описаны эти графы для некоторых поверхностей. Также для функций с изолированными особенностями описано хордовые диаграммы седлового критического уровня мы получили критерий эквивалентности и теорему реализации, предварительно исследовав для этого свойства хордовых диаграмм.

Ключевые слова: критическая точка, топологическая эквивалентность, оптимальная функция, деформация общего положения.

Hladysh B. I. Functions with critical points on the boundary of low–dimensional manifolds. – Manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences on the speciality 01.01.04 "Geometry and Topology". – Taras Shevchenko National University of Kyiv. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2020.

The thesis is devoted to the study of smooth functions on smooth manifolds with boundaries. It is considered the questions of local classification, global classification of optimal functions and deformations in general position. The analog of Morse lemma is proved. It is obtained the smallest number of critical points in the class of simple mm-functions (the functions with non-degenerated critical points on the boundary of a surface being also non-degenerated critical points of correspondent restrictions to the boundary) on the fixed surface. Another important result is necessary conditions of continuation of simple Morse function being defined on the single boundary component of oriented surface by genus g with $4g + 2$ critical points, to the simple optimal mm-function which is defined on the whole surface. Also, it is considered simple smooth functions with non-degenerate singularities on a smooth compact oriented surface M with the boundary (this class of functions is denoted by $\Omega(M)$). It is proved the topological equivalence of such functions and m-functions. It is obtained the classification of functions from $\Omega(M)$ up to O-equivalence (this equivalence means layer equipped equivalence which preserves the orientation) and it is found the number of functions from $\Omega(M)$ with at most 5 critical points. As a result of investigating of the equipped Reeb graph, the formula which defines the topological type of the surface is proved. Further, after defining the equipped Reeb graph deformations, the questions being connected with the deformations in general position are studied. It is found the connection between optimality and polarity of Morse functions, m-functions and mm-functions on smooth compact oriented connected surfaces. The last, considered in the dissertation, set of functions consists of simple functions with isolated singularities on the single boundary component of a compact connected surface M being also isolated critical points of correspondent function restriction to the boundary. This class we denote by $\Theta(M)$. It is received the local presentation above critical points (Re $(x + iy)^k$, $y \geq 0$ in the case of saddle critical point and $x^2 + y^2$, $y \geq 0$, $-x^2 - y^2$, $y \geq 0$ for minimum and maximum point correspondingly). The necessary and sufficient condition of optimality of function from $\Theta(M)$ is presented. Also, in the case of the surface with one boundary component, the criterion of topological equivalence of optimal functions from $\Theta(M)$ is obtained, after previous determination (and investigation of properties) of chord diagram of saddle critical level.

Key words: critical point, topological equivalence, optimal function, deformation in general position.

Підп. до др. 04.09.2020. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Умов. друк. арк. 1,16. Фіз. друк. арк. 1,25. Тираж 100 пр. Зам. 40.

Інститут математики НАН України,
01024, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.